Resolución de sistemas lineales

Profesor
Filánder Sequeira Chavarría

Última actualización: 24 de septiembre de 2020

Organización de la presentación

Problema modelo

Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y un vector columna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, recordemos que el sistema lineal

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

cumple una y solo una de las siguientes proposiciones:

- admite única solución $\Big\}$ $\mathbf{A}$ es no singular
- admite infinitas soluciones
- no admite solución $\Big\}$ $\mathbf{A}$ es singular

Problema modelo

Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y un vector columna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, recordemos que el sistema lineal

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

cumple una y solo una de las siguientes proposiciones:

- admite única solución } **A** es no singular
- admite infinitas soluciones
- no admite solución } **A** es singular

Problema modelo

En lo que sigue nos interesa el caso en que $\mathbf{A}$ es no singular, donde como esto implica que $\mathbf{A}$ es invertible, se obtiene que:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,.$$

El problema de esto es que cuando n es grande, el cálculo de $\mathbf{A}^{-1}$ se vuelve **extremadamente costoso** y **numéricamente inestable**.

Por ende, no se calcula $\mathbf{A}^{-1}$. De hecho, lo que se hace es resolver $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sin calcular $\mathbf{A}^{-1}$ de ninguna forma.

Problema modelo

En lo que sigue nos interesa el caso en que $\mathbf{A}$ es no singular, donde como esto implica que $\mathbf{A}$ es invertible, se obtiene que:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,.$$

El problema de esto es que cuando n es grande, el cálculo de $\mathbf{A}^{-1}$ se vuelve **extremadamente costoso** y **numéricamente inestable**.

Por ende, no se calcula $\mathbf{A}^{-1}$. De hecho, lo que se hace es resolver $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sin calcular $\mathbf{A}^{-1}$ de ninguna forma.

Problema modelo

En lo que sigue nos interesa el caso en que $\mathbf{A}$ es no singular, donde como esto implica que $\mathbf{A}$ es invertible, se obtiene que:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,.$$

El problema de esto es que cuando n es grande, el cálculo de $\mathbf{A}^{-1}$ se vuelve **extremadamente costoso** y **numéricamente inestable**.

Por ende, no se calcula $\mathbf{A}^{-1}$. De hecho, lo que se hace es resolver $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sin calcular $\mathbf{A}^{-1}$ de ninguna forma.

Método de eliminación Gaussiana

Encuentre la solución del siguiente sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 2 \\ 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 & = & -4 \\ 2x_3 - 3x_4 & = & 12 \\ 4x_4 & = & -8 \end{array}\right.$$

Solución

Observe que:

- De la cuarta ecuación se deduce que: $x_4 = -2$.
- De la tercer ecuación, se sigue que:

$$2x_3 - 3 \cdot (-2) = 12 \quad \Rightarrow \quad 2x_3 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3.$$

- De la segunda ecuación, se obtiene que:

$$2x_2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = -4 \Rightarrow 2x_2 - 4 = -4 \Rightarrow x_2 = 0.$$

- De la primera ecuación, se deduce que:

$$x_1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Por lo tanto, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$ y $x_4 = -2$.

Solución

Observe que:

- De la cuarta ecuación se deduce que: $x_4 = -2$.
- De la tercer ecuación, se sigue que:

$$2x_3 - 3\cdot(-2) = 12 \quad\Rightarrow\quad 2x_3 = 6 \quad\Rightarrow\quad x_3 = 3.$$

- De la segunda ecuación, se obtiene que:

$$2x_2 + 2\cdot 3 + 5\cdot(-2) = -4 \Rightarrow 2x_2 - 4 = -4 \Rightarrow x_2 = 0.$$

- De la primera ecuación, se deduce que:

$$x_1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 3 + 4\cdot(-2) = 2 \quad\Rightarrow\quad x_1 + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Por lo tanto, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$ y $x_4 = -2$.

Solución

Observe que:

- De la cuarta ecuación se deduce que: $x_4 = -2$.
- De la tercer ecuación, se sigue que:

$$2x_3 - 3 \cdot (-2) = 12 \quad \Rightarrow \quad 2x_3 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3.$$

- De la segunda ecuación, se obtiene que:

$$2x_2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = -4 \Rightarrow 2x_2 - 4 = -4 \Rightarrow x_2 = 0.$$

- De la primera ecuación, se deduce que:

$$x_1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Por lo tanto, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$ y $x_4 = -2$.

Solución

Observe que:

- De la cuarta ecuación se deduce que: $x_4 = -2$.
- De la tercer ecuación, se sigue que:

$$2x_3 - 3 \cdot (-2) \;=\; 12 \quad \Rightarrow \quad 2x_3 \;=\; 6 \quad \Rightarrow \quad x_3 \;=\; 3.$$

- De la segunda ecuación, se obtiene que:

$$2x_2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) \;=\; -4 \;\Rightarrow\; 2x_2 - 4 \;=\; -4 \;\Rightarrow\; x_2 \;=\; 0.$$

- De la primera ecuación, se deduce que:

$$x_1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) \;=\; 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 1 \;=\; 2 \;\Rightarrow\; x_1 \;=\; 1.$$

Por lo tanto, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$ y $x_4 = -2$.

Solución

Observe que:

- De la cuarta ecuación se deduce que: $x_4 = -2$.
- De la tercer ecuación, se sigue que:

$$2x_3 - 3\cdot(-2) = 12 \quad \Rightarrow \quad 2x_3 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3.$$

- De la segunda ecuación, se obtiene que:

$$2x_2 + 2\cdot 3 + 5\cdot(-2) = -4 \Rightarrow 2x_2 - 4 = -4 \Rightarrow x_2 = 0.$$

- De la primera ecuación, se deduce que:

$$x_1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 3 + 4\cdot(-2) = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Por lo tanto, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$ y $x_4 = -2$.

Observación

La forma en que se resolvió el sistema previo se conoce como el **método de sustitución hacia atrás** y se aplica cuando la matriz de coeficientes es triangular superior.

El inconveniente de este procedimiento es que no todo sistema es triangular superior, por lo que se emplea el **método de eliminación Gaussiana** para transformar un sistema "cualquiera" en uno triangular superior tal y como se hace en el siguiente ejemplo.

Observación

La forma en que se resolvió el sistema previo se conoce como el **método de sustitución hacia atrás** y se aplica cuando la matriz de coeficientes es triangular superior.

El inconveniente de este procedimiento es que no todo sistema es triangular superior, por lo que se emplea el **método de eliminación Gaussiana** para transformar un sistema “cualquiera” en uno triangular superior tal y como se hace en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Encuentre la solución del siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 12x_3 + 16x_4 &= 70 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 &= 26 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 7x_4 &= -30 \\ 4x_2 + 3x_3 - 6x_4 &= -26 \end{cases}$$

Solución

Se aplican operaciones elementales sobre filas, tal y como sigue:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -6 & 12 & 16 & 70 \\ 1 & -2 & 6 & 6 & 26 \\ -1 & 3 & -3 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & 3 & -6 & -26 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 1 & -2 & 6 & 6 & 26 \\ -1 & 3 & -3 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & 3 & -6 & -26 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_1+f_3]{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -6 & -26 \end{array}\right)$$

Solución

Se aplican operaciones elementales sobre filas, tal y como sigue:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -6 & 12 & 16 & 70 \\ 1 & -2 & 6 & 6 & 26 \\ -1 & 3 & -3 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & 3 & -6 & -26 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 1 & -2 & 6 & 6 & 26 \\ -1 & 3 & -3 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & 3 & -6 & -26 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_1+f_3]{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -6 & -26 \end{array}\right)$$

Solución

Se aplican operaciones elementales sobre filas, tal y como sigue:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -6 & 12 & 16 & 70 \\ 1 & -2 & 6 & 6 & 26 \\ -1 & 3 & -3 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & 3 & -6 & -26 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} {\color{red}1} & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 1 & -2 & 6 & 6 & 26 \\ -1 & 3 & -3 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & 3 & -6 & -26 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_1+f_3]{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ {\color{red}0} & 1 & 0 & -2 & -9 \\ {\color{red}0} & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -6 & -26 \end{array}\right)$$

Solución

$$\xrightarrow{-4f_2+f_4} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_3+f_4} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}f_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Aquí finaliza el método de eliminación Gaussiana.

Solución

$$\xrightarrow{-4f_2+f_4} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & \color{red}{0} & 3 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_3+f_4} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}f_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Aquí finaliza el método de eliminación Gaussiana.

Solución

$$\xrightarrow{-4f_2+f_4}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & \color{red}{0} & 3 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_3+f_4}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}f_3}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Aquí finaliza el método de eliminación Gaussiana.

Solución

$$\xrightarrow{-4f_2+f_4}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & \color{red}{0} & 3 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_3+f_4}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}f_3}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Aquí finaliza el método de eliminación Gaussiana.

Solución

Dado que el sistema ahora es triangular superior, entonces se procede con el método de sustitución hacia atrás el cual se puede efectuar de dos formas equivalentes, las cuales se presentan a continuación.

Solución: Sustitución hacia atrás (1)

Se continúa con la matriz aumentada para hacer ceros por arriba de la diagonal.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2f_4+f_2 \\ -8f_4+f_1}]{-\frac{1}{3}f_4+f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-6f_3+f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Solución: Sustitución hacia atrás (1)

Se continúa con la matriz aumentada para hacer ceros por arriba de la diagonal.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2f_4+f_2 \\ -8f_4+f_1}]{-\frac{1}{3}f_4+f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & \color{red}{0} & -5 \\ 0 & 1 & 0 & \color{red}{0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \color{red}{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-6f_3+f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & \color{red}{0} & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Solución: Sustitución hacia atrás (1)

Se continúa con la matriz aumentada para hacer ceros por arriba de la diagonal.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2f_4+f_2 \\ -8f_4+f_1}]{-\frac{1}{3}f_4+f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & \color{red}{0} & -5 \\ 0 & 1 & 0 & \color{red}{0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \color{red}{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-6f_3+f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & \color{red}{0} & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Solución: Sustitución hacia atrás (1)

$$\xrightarrow{3f_2+f_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la solución del sistema se obtiene en la última columna de la matriz aumentada, es decir:

$$x_1 = -2, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 0 \qquad \text{y} \qquad x_4 = 5$$

Solución: Sustitución hacia atrás (2)

Se reescribe la matriz aumentada en notación de sistema lineal para luego seguir proceso de la sustitución hacia atrás, tal y como en el ejemplo previo.

Así, observe que:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 & = & 35 \\ x_2 \qquad\quad - 2x_4 & = & -9 \\ x_3 + \frac{1}{3}x_4 & = & \frac{5}{3} \\ x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

Solución: Sustitución hacia atrás (2)

Se reescribe la matriz aumentada en notación de sistema lineal para luego seguir proceso de la sustitución hacia atrás, tal y como en el ejemplo previo.

Así, observe que:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 & = & 35 \\ x_2 \qquad\qquad - 2x_4 & = & -9 \\ x_3 + \frac{1}{3}x_4 & = & \frac{5}{3} \\ x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

Solución: Sustitución hacia atrás (2)

Luego, de la cuarta ecuación se tiene que $x_4 = 5$, y al sustituir este valor en la tercer ecuación se obtiene que $x_3 = 0$. Similarmente, reemplazando $x_4 = 5$ en la segunda ecuación se deduce que $x_2 = 1$. Finalmente, de la primera ecuación se concluye que $x_1 = -2$.

Por lo tanto, en ambos formatos, se concluye que la solución del sistema viene dada por: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 5$.

Ejercicio

Ejercicio

Resuelva el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 21 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -14 \end{cases}$$

Complejidad aritmética

Para resolver un sistema lineal de tamaño $n \times n$, el método de eliminación Gaussiana requiere aproximadamente n^3 operaciones.

Esto es mucho mejor que la regla de Cramer, la cual requiere de aproximadamente $(n+1)!$ operaciones.

Por ejemplo, si $n = 100$, se tiene que:

- Eliminación Gaussiana: $100^3 \ = \ 1\,000\,000$ operaciones
- Regla de Cramer: $101! \ \approx \ 9.3 \times 10^{157}$ operaciones

Complejidad aritmética

Para resolver un sistema lineal de tamaño $n \times n$, el método de eliminación Gaussiana requiere aproximadamente n^3 operaciones.

Esto es mucho mejor que la regla de Cramer, la cual requiere de aproximadamente $(n+1)!$ operaciones.

Por ejemplo, si $n = 100$, se tiene que:

- Eliminación Gaussiana: $100^3 \;=\; 1\,000\,000$ operaciones
- Regla de Cramer: $101! \;\approx\; 9.3 \times 10^{157}$ operaciones

Complejidad aritmética

Para resolver un sistema lineal de tamaño $n \times n$, el método de eliminación Gaussiana requiere aproximadamente n^3 operaciones.

Esto es mucho mejor que la regla de Cramer, la cual requiere de aproximadamente $(n+1)!$ operaciones.

Por ejemplo, si $n = 100$, se tiene que:

- Eliminación Gaussiana: $100^3 \; = \; 1\,000\,000$ operaciones
- Regla de Cramer: $101! \; \approx \; 9.3 \times 10^{157}$ operaciones

Organización de la presentación

Introducción

Recordemos las operaciones elementales sobre filas:

- **Intercambio:** Consiste en intercambiar la fila i con la fila j. Se denota por: $f_i \leftrightarrow f_j$.
- **Reescalamiento:** Consiste en multiplicar la fila i por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Se denota por: αf_i.
- **Pivoteo:** Consiste en multiplicar por α a la fila i y el resultado sumarlo a la fila j. La fila i se mantiene sin cambios. Se denota por: $\alpha f_i + f_j$.

Introducción

Recordemos las operaciones elementales sobre filas:

- **Intercambio:** Consiste en intercambiar la fila i con la fila j. Se denota por: $f_i \leftrightarrow f_j$.
- **Reescalamiento:** Consiste en multiplicar la fila i por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Se denota por: αf_i.
- **Pivoteo:** Consiste en multiplicar por α a la fila i y el resultado sumarlo a la fila j. La fila i se mantiene sin cambios. Se denota por: $\alpha f_i + f_j$.

Introducción

Recordemos las operaciones elementales sobre filas:

- **Intercambio:** Consiste en intercambiar la fila i con la fila j. Se denota por: $f_i \leftrightarrow f_j$.
- **Reescalamiento:** Consiste en multiplicar la fila i por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Se denota por: αf_i.
- **Pivoteo:** Consiste en multiplicar por α a la fila i y el resultado sumarlo a la fila j. La fila i se mantiene sin cambios. Se denota por: $\alpha f_i + f_j$.

A continuación se aplica el método de eliminación Gaussiana a la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

pero sin utilizar las operaciones de intercambio y reescalamiento.

Así, se sigue que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2f_1+f_3]{-f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Introducción

A continuación se aplica el método de eliminación Gaussiana a la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

pero sin utilizar las operaciones de intercambio y reescalamiento. Así, se sigue que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2f_1+f_3]{-f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Introducción

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_1+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Introducción

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_1+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Introducción

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_1+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Introducción

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_1+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Introducción

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Introducción

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Introducción

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Introducción

Lo anterior establece que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Triangular inferior}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz } \mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\text{Triangular superior}}$$

Ahora, definiendo $\mathbf{U} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

Lo anterior establece que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Triangular inferior}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz } \mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\text{Triangular superior}}$$

Ahora, definiendo $\mathbf{U} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

Introducción

Luego, se sigue que:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{U}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

donde, definiendo la matriz tria. inf. unitaria $\mathbf{L} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$, se deduce que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

lo cual corresponde a una factorización de la matriz $\mathbf{A}$.

Introducción

Luego, se sigue que:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{U} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}\end{aligned}$$

donde, definiendo la matriz tria. inf. unitaria $\mathbf{L} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$, se deduce que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

lo cual corresponde a una factorización de la matriz $\mathbf{A}$.

Luego, se sigue que:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{U} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}\end{aligned}$$

donde, definiendo la matriz tria. inf. unitaria $\mathbf{L} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$, se deduce que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

lo cual corresponde a una factorización de la matriz $\mathbf{A}$.

Factorización LU

Definición

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si existen:

- $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior unitaria
- $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior

tales que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

se dice que **A posee factorización LU**.

Observación

En general, cualquier matriz $\mathbf{A}$ a la que se le pueda aplicar el método de eliminación Gaussiana (sin intercambio ni reescalamiento) se puede escribir como el producto de una matriz triangular inferior unitaria $\mathbf{L}$ por una matriz triangular superior $\mathbf{U}$.

Ejemplo

Determine la factorización LU de la matriz:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 1 & -6 \\ -8 & -4 & -11 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solución

Nótese que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 1 & -6 \\ -8 & -4 & -11 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[4f_1+f_4]{-2f_1+f_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3f_2+f_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_3+f_4} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Solución

Por lo tanto, se tiene que:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, para determinar **L** recuerde que esta es triangular inferior unitaria por lo que se sabe que:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Por lo tanto, se tiene que:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, para determinar **L** recuerde que esta es triangular inferior unitaria por lo que se sabe que:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Para llenar las entradas restante, se recuerdan las operaciones elementales sobre filas empleadas durante el procedimiento en que se determina $\mathbf{U}$. Estas son:

- $-2f_1 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{31} = 2$
- $4f_1 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{41} = -4$
- $3f_2 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{32} = -3$
- $-f_3 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{43} = 1$

De esta forma, se obtiene que:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & ? & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Para llenar las entradas restante, se recuerdan las operaciones elementales sobre filas empleadas durante el procedimiento en que se determina $\mathbf{U}$. Estas son:

- $-2f_1 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{31} = 2$
- $4f_1 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{41} = -4$
- $3f_2 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{32} = -3$
- $-f_3 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{43} = 1$

De esta forma, se obtiene que:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & ? & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Para llenar las entradas restante, se recuerdan las operaciones elementales sobre filas empleadas durante el procedimiento en que se determina $\mathbf{U}$. Estas son:

- $-2f_1 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{31} = 2$
- $4f_1 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{41} = -4$
- $3f_2 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{32} = -3$
- $-f_3 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{43} = 1$

De esta forma, se obtiene que:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & ? & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Para llenar las entradas restante, se recuerdan las operaciones elementales sobre filas empleadas durante el procedimiento en que se determina **U**. Estas son:

- $-2f_1 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{31} = 2$
- $4f_1 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{41} = -4$
- $3f_2 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{32} = -3$
- $-f_3 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{43} = 1$

De esta forma, se obtiene que:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & ? & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Para llenar las entradas restante, se recuerdan las operaciones elementales sobre filas empleadas durante el procedimiento en que se determina **U**. Estas son:

- $-2f_1 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{31} = 2$
- $4f_1 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{41} = -4$
- $3f_2 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{32} = -3$
- $-f_3 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{43} = 1$

De esta forma, se obtiene que:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & ? & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Para llenar las entradas restante, se recuerdan las operaciones elementales sobre filas empleadas durante el procedimiento en que se determina $\mathbf{U}$. Estas son:

- $-2f_1 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{31} = 2$
- $4f_1 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{41} = -4$
- $3f_2 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{32} = -3$
- $-f_3 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{43} = 1$

De esta forma, se obtiene que:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & ? & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Para llenar las entradas restante, se recuerdan las operaciones elementales sobre filas empleadas durante el procedimiento en que se determina **U**. Estas son:

- $-2f_1 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{31} = 2$
- $4f_1 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{41} = -4$
- $3f_2 + f_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{32} = -3$
- $-f_3 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{43} = 1$

De esta forma, se obtiene que:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & ? & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

En resumen, la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 1 & -6 \\ -8 & -4 & -11 & -2 \end{pmatrix}$$

posee factorización LU, con:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Determine la factorización LU de la matriz:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 16 \\ 1 & -2 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Solución

Observe que:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 16 \\ 1 & -2 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}f_1+f_3]{-\frac{1}{2}f_1+f_2} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4f_2+f_4} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_3+f_4} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Por lo tanto, la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 16 \\ 1 & -2 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

posee factorización LU, con:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observación

Nótese que si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= |\mathbf{LU}| \\ &= |\mathbf{L}| \cdot |\mathbf{U}| \\ &= 1 \cdot |\mathbf{U}| \\ &= |\mathbf{U}| \end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que:

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{U}|$$

Observación

Nótese que si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= |\mathbf{LU}| \\ &= |\mathbf{L}| \cdot |\mathbf{U}| \\ &= 1 \cdot |\mathbf{U}| \\ &= |\mathbf{U}| \end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que:

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{U}|$$

Ejercicio

Ejercicio

Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine, si existe, su factorización LU.

Observación

Nótese que el determinante de la matriz $\mathbf{A}$ no juega un papel en la existencia de la factorización LU. Sin embargo, la existencia no siempre se tiene, como es el ejemplo de la matriz:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual es no singular, pero como $a_{11} = 0$ no se puede emplear el procedimiento de eliminación Gaussiana previo.

Submatrices principales

Definición

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$, se define el ***k*-ésima submatriz principal de A** como la matriz

$$\mathbf{A}^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

que tiene por entradas, los elementos a_{ij} de $\mathbf{A}$ con $1 \leq i, j \leq k$. Es decir, $\mathbf{A}^{(k)}$ es obtenida de $\mathbf{A}$ eliminando las últimas $n-k$ filas y columnas.

Submatrices principales

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Submatrices principales

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}}^{\mathbf{A}^{(1)}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Submatrices principales

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}}^{\,\mathbf{A}^{(2)}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1,n-1} \\ a_{2,n-1} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{31} & a_{32} \end{matrix} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots \end{matrix} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \begin{matrix} a_{n-1,1} & a_{n-1,2} \end{matrix} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \begin{matrix} a_{n1} & a_{n2} \end{matrix} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Submatrices principales

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}}^{\,\mathbf{A}^{(3)}} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} \quad a_{n-1,2} \quad a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} \quad a_{n2} \quad a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Submatrices principales

$$\mathbf{A}^{(n-1)}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Submatrices principales

$$
\mathbf{A} = \left(\overset{\mathbf{A}^{(n)}}{\boxed{\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{matrix}}} \right)
$$

Existencia de la factorización LU

Teorema

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $n \geq 1$, tal que para toda submatriz principal $\mathbf{A}^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ con $1 \leq k < n$ es no singular. Entonces existen matrices $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior unitaria y $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior, tales que

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}.$$

Unicidad de la factorización LU

Teorema

Suponga que la factorización LU de $\mathbf{A}$ existe. Si además, $\mathbf{A}$ es no singular, se concluye que esta factorización es única.

Por ejemplo, observe que:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

son dos factorizaciones LU distintas.

Unicidad de la factorización LU

Teorema

Suponga que la factorización LU de $\mathbf{A}$ existe. Si además, $\mathbf{A}$ es no singular, se concluye que esta factorización es única.

Por ejemplo, observe que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son dos factorizaciones LU distintas.

Ventaja de la factorización LU

Volviendo al problema de resolver el sistema lineal:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

suponga que la factorización LU de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, es conocida. Así, se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{LUx} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{L}\underbrace{(\mathbf{Ux})}_{=:\mathbf{y}} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{Ly} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Ventaja de la factorización LU

Volviendo al problema de resolver el sistema lineal:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

suponga que la factorización LU de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, es conocida. Así, se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{LUx} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{L}\underbrace{(\mathbf{Ux})}_{=:\mathbf{y}} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{Ly} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Ventaja de la factorización LU

Volviendo al problema de resolver el sistema lineal:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

suponga que la factorización LU de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, es conocida. Así, se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{LUx} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{L}\underbrace{(\mathbf{Ux})}_{=:\mathbf{y}} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{Ly} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Ventaja de la factorización LU

Volviendo al problema de resolver el sistema lineal:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

suponga que la factorización LU de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, es conocida. Así, se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{L}\underbrace{(\mathbf{U}\mathbf{x})}_{=:\mathbf{y}} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{L}\mathbf{y} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Ventaja de la factorización LU

Volviendo al problema de resolver el sistema lineal:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

suponga que la factorización LU de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, es conocida. Así, se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{L}\underbrace{(\mathbf{U}\mathbf{x})}_{=:\mathbf{y}} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{L}\mathbf{y} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Ventaja de la factorización LU

Debido a que $\mathbf{L}$ es no singular (por ser triangular inferior unitaria), el sistema $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ se puede resolver de manera simple gracias al *método de sustitución hacia adelante*. Luego, una vez calculado $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se determina $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ al aplicar el *método de sustitución hacia atrás* al sistema:

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

En resumen, se puede hallar la solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ al resolver, los siguientes dos sistemas triangulares:

1. $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$

Ventaja de la factorización LU

Debido a que $\mathbf{L}$ es no singular (por ser triangular inferior unitaria), el sistema $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ se puede resolver de manera simple gracias al *método de sustitución hacia adelante*. Luego, una vez calculado $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se determina $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ al aplicar el *método de sustitución hacia atrás* al sistema:

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

En resumen, se puede hallar la solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ al resolver, los siguientes dos sistemas triangulares:

1. $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$

Ejemplo (I Examen, IC-2018)

Considere la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 6 \\ -6 & -15 & -2 & -11 \\ 0 & 3 & 2 & -6 \\ -3 & -11 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Muestre que la matriz $\mathbf{A}$ tiene factorización LU.

b) Encuentre la factorización LU de $\mathbf{A}$.

c) ¿Es la factorización obtenida en b) única? Justifique su respuesta.

d) Usando la factorización LU encontrada en b), resuelva el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} := \left(27, -52, -6, -9\right)^t$.

Solución

$a)$ Calculamos los determinantes de las 3 primeras submatrices principales:

- $|\mathbf{A}^{(1)}| = |3| = 3$
- $|\mathbf{A}^{(2)}| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -6 & -15 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-15) - (-6) \cdot 7 = -3$
- $$\begin{aligned} |\mathbf{A}^{(3)}| &= \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -6 & -15 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} -15 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (-24) + 6 \cdot (11) = -6 \end{aligned}$$

Dado que todos los determinantes son distintos de cero, se deduce que $\mathbf{A}$ admite factorización LU.

Solución

a) Calculamos los determinantes de las 3 primeras submatrices principales:

- $|\mathbf{A}^{(1)}| = |3| = 3$
- $|\mathbf{A}^{(2)}| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -6 & -15 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-15) - (-6) \cdot 7 = -3$
- $|\mathbf{A}^{(3)}| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -6 & -15 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 3 \begin{vmatrix} -15 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-24) + 6 \cdot (11) = -6$$

Dado que todos los determinantes son distintos de cero, se deduce que $\mathbf{A}$ admite factorización LU.

Solución

a) Calculamos los determinantes de las 3 primeras submatrices principales:

- $|\mathbf{A}^{(1)}| = |3| = 3$
- $|\mathbf{A}^{(2)}| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -6 & -15 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-15) - (-6) \cdot 7 = -3$
- $$\begin{aligned} |\mathbf{A}^{(3)}| &= \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -6 & -15 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} -15 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (-24) + 6 \cdot (11) = -6 \end{aligned}$$

Dado que todos los determinantes son distintos de cero, se deduce que $\mathbf{A}$ admite factorización LU.

Solución

$a)$ Calculamos los determinantes de las 3 primeras submatrices principales:

- $|\mathbf{A}^{(1)}| \;=\; |3| \;=\; 3$
- $|\mathbf{A}^{(2)}| \;=\; \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -6 & -15 \end{vmatrix} \;=\; 3\cdot(-15)-(-6)\cdot 7 \;=\; -3$
- $$\begin{aligned} |\mathbf{A}^{(3)}| &= \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -6 & -15 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} -15 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3\cdot(-24)+6\cdot(11) \;=\; -6 \end{aligned}$$

Dado que todos los determinantes son distintos de cero, se deduce que $\mathbf{A}$ admite factorización LU.

$b)$ Nótese que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 6 \\ -6 & -15 & -2 & -11 \\ 0 & 3 & 2 & -6 \\ -3 & -11 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[1f_1+f_4]{2f_1+f_2} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-4f_2+f_4]{3f_2+f_3} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solución

$b)$ Nótese que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 6 \\ -6 & -15 & -2 & -11 \\ 0 & 3 & 2 & -6 \\ -3 & -11 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[{\color{red}1}f_1 + f_4]{{\color{red}2}f_1+f_2} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{\color{red}-4}f_2 + f_4]{{\color{red}3}f_2+f_3} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {\color{red}-2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {\color{red}-3} & 1 & 0 \\ {\color{red}-1} & {\color{red}4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solución

c) Dado que

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= |\mathbf{U}| \\ &= 3 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 5 \\ &= -30 \neq 0 \end{aligned}$$

se tiene que la factorización LU anterior es única.

Solución

d) Considere el sistema lineal $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, el cual aplicando sustitución hacia adelante se sigue que:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} y_1 & = & 27 & \Rightarrow & y_1 & = & 27 \\ -2y_1 + y_2 & = & -52 & \Rightarrow & y_2 & = & -52 + 2\cdot 27 \ = \ 2 \\ -3y_2 + y_3 & = & -6 & \Rightarrow & y_3 & = & -6 + 3\cdot 2 \ = \ 0 \\ -y_1 + 4y_2 \quad + y_4 & = & -9 & \Rightarrow & y_4 & = & -9 + 27 - 4\cdot 2 \ = \ 10 \end{array}\right.$$

de donde se tiene que $\mathbf{y} = \left(27,\, 2,\, 0,\, 10\right)^t$. Luego, se resuelve el sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ mediante sustitución hacia atrás. En efecto,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 6x_4 & = & 27 & \Rightarrow & x_1 & = & \frac{1}{3}(27 - 3 - 6\cdot 2) \ = \ 4 \\ -x_2 \quad + x_4 & = & 2 & \Rightarrow & x_2 & = & -(2-2) \ = \ 0 \\ 2x_3 - 3x_4 & = & 0 & \Rightarrow & x_3 & = & \frac{1}{2}(3\cdot 2) \ = \ 3 \\ 5x_4 & = & 10 & \Rightarrow & x_4 & = & \frac{10}{5} \ = \ 2 \end{array}\right.$$

Por lo tanto, $\mathbf{x} = \left(4,\, 0,\, 3,\, 2\right)^t$.

Solución

d) Considere el sistema lineal $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, el cual aplicando sustitución hacia adelante se sigue que:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} y_1 & = & 27 & \Rightarrow & y_1 = 27 \\ -2y_1 + y_2 & = & -52 & \Rightarrow & y_2 = -52 + 2\cdot 27 = 2 \\ -3y_2 + y_3 & = & -6 & \Rightarrow & y_3 = -6 + 3\cdot 2 = 0 \\ -y_1 + 4y_2 + y_4 & = & -9 & \Rightarrow & y_4 = -9 + 27 - 4\cdot 2 = 10 \end{array}\right.$$

de donde se tiene que $\mathbf{y} = \left(27,\ 2,\ 0,\ 10\right)^t$. Luego, se resuelve el sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ mediante sustitución hacia atrás. En efecto,

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 6x_4 & = & 27 & \Rightarrow & x_1 = \frac{1}{3}(27 - 3 - 6\cdot 2) = 4 \\ -x_2 + x_4 & = & 2 & \Rightarrow & x_2 = -(2-2) = 0 \\ 2x_3 - 3x_4 & = & 0 & \Rightarrow & x_3 = \frac{1}{2}(3\cdot 2) = 3 \\ 5x_4 & = & 10 & \Rightarrow & x_4 = \frac{10}{5} = 2 \end{array}\right.$$

Por lo tanto, $\mathbf{x} = \left(4,\ 0,\ 3,\ 2\right)^t$.

Observación

Una ventaja de la factorización LU se da cuando se requiere resolver varios sistemas lineales con la misma matriz. En efecto, si se tienen los $m \in \mathbb{N}$ sistemas lineales:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, m$$

resolver cada uno de ellos por eliminación Gaussiana tomaría un costo aproximado de n^3 operaciones cada uno, es decir, aproximadamente mn^3 operaciones en total. En el caso que $m > n$, es claro que se tienen por lo menos n^4 operaciones lo cual es bastante costo.

Observación

Por otro lado, si se calcula la factorización LU de $\mathbf{A}$ (costo de n^3 una única vez) y se resuelve cada sistema lineal utilizando el procedimiento anterior se resuelven los m sistemas con una complejidad aproximada de $n^3 + m(2n^2) \approx n^3$ operaciones, lo cual es más barato.

Ejercicio

Ejercicio (I Examen, IIC-2016)

Considere la siguiente matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -6 & -8 \\ -4 & -8 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Demuestre que la matriz **A** tiene factorización LU y, además, que esta factorización es única.

b) Encuentre la factorización LU de **A**.

c) Usando la factorización LU encontrada en *b*), resuelva el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (-4, 6, -10, 20)^t$.

Ejercicio

Ejercicio para la casa (I Examen, IIC-2017)

Sea $\mathbf{A}$ una matriz 4×4 a la cual se le realizaron las siguientes operaciones elementales entre filas:

$$-\frac{1}{2}f_1 + f_2\,, \quad -3f_1 + f_3\,, \quad 4f_1 + f_4\,, \quad \frac{1}{2}f_2 + f_3 \quad \text{y} \quad -f_2 + f_4\,,$$

obteniendo como resultado la matriz:

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Ejercicio (continuación)

a) Determine explícitamente la matriz $\mathbf{A}$.

b) Justifique si es posible garantizar que $\mathbf{A}$ posee factorización LU única.

c) Con ayuda de la factorización LU de $\mathbf{A}$, encuentre el conjunto solución del sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} := \left(31, \frac{3}{2}, 124, -90\right)^t$.

Organización de la presentación

1. Introducción
2. Factorización LU
3. Técnicas de pivoteo
4. Factorización QR

Introducción

El método de eliminación Gaussiana se sumamente sensible a cambios numéricos. Para ilustrar esto, considere el siguiente el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{solución}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, considere una perturbación a este sistema, donde el vector de la derecha ha sido "muy ligeramente" modificado, mientras que la matriz se mantiene sin cambios.

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{solución}} \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

Introducción

El método de eliminación Gaussiana se sumamente sensible a cambios numéricos. Para ilustrar esto, considere el siguiente el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{solución}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, considere una perturbación a este sistema, donde el vector de la derecha ha sido "muy ligeramente" modificado, mientras que la matriz se mantiene sin cambios.

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{solución}} \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

Introducción

El método de eliminación Gaussiana se sumamente sensible a cambios numéricos. Para ilustrar esto, considere el siguiente el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{solución}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, considere una perturbación a este sistema, donde el vector de la derecha ha sido "muy ligeramente" modificado, mientras que la matriz se mantiene sin cambios.

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{solución}} \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

Introducción

El método de eliminación Gaussiana se sumamente sensible a cambios numéricos. Para ilustrar esto, considere el siguiente el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{solución}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, considere una perturbación a este sistema, donde el vector de la derecha ha sido "muy ligeramente" modificado, mientras que la matriz se mantiene sin cambios.

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{solución}} \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

Introducción

El método de eliminación Gaussiana se sumamente sensible a cambios numéricos. Para ilustrar esto, considere el siguiente el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{solución}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, considere una perturbación a este sistema, donde el vector de la derecha ha sido "muy ligeramente" modificado, mientras que la matriz se mantiene sin cambios.

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{solución}} \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

Introducción

En otras palabras, un pequeño cambio en el vector de la derecha, cambia significativamente la solución del sistema.

Ahora, considere una nueva perturbación al sistema, donde se modifican "muy ligeramente" los elementos de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sol.}} \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, pequeños cambios en los datos, alteran completamente el resultado. En virtud de los ejemplos, es claro que los métodos numéricos en precisión finita no brindan una impresión confiable para resolver este sistema lineal de orden 4.

En otras palabras, un pequeño cambio en el vector de la derecha, cambia significativamente la solución del sistema.

Ahora, considere una nueva perturbación al sistema, donde se modifican "muy ligeramente" los elementos de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sol.}} \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, pequeños cambios en los datos, alteran completamente el resultado. En virtud de los ejemplos, es claro que los métodos numéricos en precisión finita no brindan una impresión confiable para resolver este sistema lineal de orden 4.

Introducción

En otras palabras, un pequeño cambio en el vector de la derecha, cambia significativamente la solución del sistema.

Ahora, considere una nueva perturbación al sistema, donde se modifican "muy ligeramente" los elementos de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sol.}} \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, pequeños cambios en los datos, alteran completamente el resultado. En virtud de los ejemplos, es claro que los métodos numéricos en precisión finita no brindan una impresión confiable para resolver este sistema lineal de orden 4.

Introducción

En otras palabras, un pequeño cambio en el vector de la derecha, cambia significativamente la solución del sistema.

Ahora, considere una nueva perturbación al sistema, donde se modifican "muy ligeramente" los elementos de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sol.}} \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, pequeños cambios en los datos, alteran completamente el resultado. En virtud de los ejemplos, es claro que los métodos numéricos en precisión finita no brindan una impresión confiable para resolver este sistema lineal de orden 4.

Introducción

En otras palabras, un pequeño cambio en el vector de la derecha, cambia significativamente la solución del sistema.

Ahora, considere una nueva perturbación al sistema, donde se modifican "muy ligeramente" los elementos de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sol.}} \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, pequeños cambios en los datos, alteran completamente el resultado. En virtud de los ejemplos, es claro que los métodos numéricos en precisión finita no brindan una impresión confiable para resolver este sistema lineal de orden 4.

Introducción

De acuerdo a lo anterior, el método de eliminación Gaussiana será afectado cuando se utilice en precisión finita.

Una estrategia para disminuir el impacto de la precisión finita sobre el método de eliminación Gaussiana consiste en utilizar **técnicas de pivoteo**.

Técnicas de pivoteo

1. **Pivoteo parcial:** consiste en intercambiar filas, durante la aplicación del método de eliminación Gaussiana, de tal forma que el pivote actual a_{kk} satisfaga que:

$$|a_{kk}| = \max_{j=k}^{n} |a_{jk}|, \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Es decir, el pivote actual es la entrada con mayor valor absoluto en la columna k, por debajo de la fila k.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}\right)$$

1. **Pivoteo parcial:** consiste en intercambiar filas, durante la aplicación del método de eliminación Gaussiana, de tal forma que el pivote actual a_{kk} satisfaga que:

$$|a_{kk}| = \max_{j=k}^{n} |a_{jk}|, \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Es decir, el pivote actual es la entrada con mayor valor absoluto en la columna k, por debajo de la fila k.

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & \color{red}{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & \color{red}{a_{32}} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ 0 & \color{red}{a_{42}} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}\right)$$

Técnicas de pivoteo

2. **Pivoteo total:** consiste en intercambiar filas y columnas, durante la aplicación del método de eliminación Gaussiana, de tal forma que el pivote actual a_{kk} satisfaga que:

$$|a_{kk}| = \max_{i=k}^{n} \max_{j=k}^{n} |a_{ij}|, \qquad \text{para } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Es decir, el pivote actual es la entrada con mayor valor absoluto en el rango de índices $[k, n] \times [k, n]$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}\right)$$

Técnicas de pivoteo

2. **Pivoteo total:** consiste en intercambiar filas y columnas, durante la aplicación del método de eliminación Gaussiana, de tal forma que el pivote actual a_{kk} satisfaga que:

$$|a_{kk}| = \max_{i=k}^{n} \max_{j=k}^{n} |a_{ij}|, \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Es decir, el pivote actual es la entrada con mayor valor absoluto en el rango de índices $[k,n] \times [k,n]$.

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}\right)$$

Observación

Es importante tener en cuenta que el intercambio de columnas, altera el orden de las variables del sistema.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 9 & 2 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Observación

Es importante tener en cuenta que el intercambio de columnas, altera el orden de las variables del sistema.

Por ejemplo:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -3 & -1 & 8 & 1 \\
0 & -4 & -2 & 9 & 2 \\
3 & -6 & 0 & 6 & 3 \\
2 & -1 & 7 & 0 & 4
\end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_4}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{array} \\
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 8 & -1 & -3 & 1 \\
0 & 9 & -2 & -4 & 2 \\
3 & 6 & 0 & -6 & 3 \\
2 & 0 & 7 & -1 & 4
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Observación

Es importante tener en cuenta que el intercambio de columnas, altera el orden de las variables del sistema.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 9 & 2 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 4 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 8 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & -1 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

Observación

Es importante tener en cuenta que el intercambio de columnas, altera el orden de las variables del sistema.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 9 & 2 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 4 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 8 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & -1 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

Observación

Es importante tener en cuenta que el intercambio de columnas, altera el orden de las variables del sistema.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 9 & 2 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 4 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 8 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & -1 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

Ejemplo

Utilice el método de eliminación Gaussiana:

1. sin hacer intercambios,
2. con pivoteo parcial y
3. con pivoteo total,

para resolver el siguiente sistema lineal con truncamiento a dos dígitos decimales.

$$\begin{cases} 3.03x_1 - 12.1x_2 + 14x_3 & = & -119 \\ -3.03x_1 + 12.1x_2 - \ \ 7x_3 & = & 120 \\ 6.11x_1 - 14.2x_2 + 21x_3 & = & -139 \end{cases}$$

Además, determine cuál técnica da mejor resultado, al comparar los mismos con la solución exacta $(0, 10, \frac{1}{7})^t$.

Solución sin intercambios

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 6.11 & -14.2 & 21 & -139 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3.03}f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 6.11 & -14.2 & 21 & -139 \end{array}\right) \xrightarrow[-6.11f_1+f_3]{3.03f_1+f_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 0.01 & 6.99 & 1.01 \\ 0 & 10.17 & -7.22 & -100.93 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{0.01}f_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 1 & 699 & 101 \\ 0 & 10.17 & -7.22 & -100.93 \end{array}\right)$$

Solución sin intercambios

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 6.11 & -14.2 & 21 & -139 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3.03}f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 6.11 & -14.2 & 21 & -139 \end{array}\right) \xrightarrow[-6.11f_1+f_3]{3.03f_1+f_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 0.01 & 6.99 & 1.01 \\ 0 & 10.17 & -7.22 & -100.93 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{0.01}f_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 1 & 699 & 101 \\ 0 & 10.17 & -7.22 & -100.93 \end{array}\right)$$

Solución sin intercambios

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 6.11 & -14.2 & 21 & -139 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3.03}f_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 6.11 & -14.2 & 21 & -139 \end{array}\right) \xrightarrow[-6.11f_1+f_3]{3.03f_1+f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 0.01 & 6.99 & 1.01 \\ 0 & 10.17 & -7.22 & -100.93 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{0.01}f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 1 & 699 & 101 \\ 0 & 10.17 & -7.22 & -100.93 \end{array}\right)$$

Solución sin intercambios

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 6.11 & -14.2 & 21 & -139 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3.03 f_1}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 6.11 & -14.2 & 21 & -139 \end{array}\right) \xrightarrow[-6.11 f_1 + f_3]{3.03 f_1 + f_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 0.01 & 6.99 & 1.01 \\ 0 & 10.17 & -7.22 & -100.93 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{0.01} f_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 1 & 699 & 101 \\ 0 & 10.17 & -7.22 & -100.93 \end{array}\right)$$

Solución sin intercambios

$$\xrightarrow{-10.17f_2+f_3} \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 1 & 699 & 101 \\ 0 & 0 & -7116.05 & -926.24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{-7116.05}f_3} \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 1 & 699 & 101 \\ 0 & 0 & 1 & 0.13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-4.62f_3+f_1]{-699f_3+f_2} \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & -3.99 & 0 & -39.87 \\ 0 & 1 & 0 & 10.13 \\ 0 & 0 & 1 & 0.13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3.99f_2+f_1} \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 0 & 0.54 \\ 0 & 1 & 0 & 10.13 \\ 0 & 0 & 1 & 0.13 \end{array}\right)$$

Solución sin intercambios

$$\xrightarrow{-10.17f_2+f_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 1 & 699 & 101 \\ 0 & 0 & -7116.05 & -926.24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{-7116.05}f_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 1 & 699 & 101 \\ 0 & 0 & 1 & 0.13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-4.62f_3+f_1]{-699f_3+f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 0 & -39.87 \\ 0 & 1 & 0 & 10.13 \\ 0 & 0 & 1 & 0.13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3.99f_2+f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0.54 \\ 0 & 1 & 0 & 10.13 \\ 0 & 0 & 1 & 0.13 \end{array}\right)$$

Solución sin intercambios

$$\xrightarrow{-10.17f_2+f_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 1 & 699 & 101 \\ 0 & 0 & -7116.05 & -926.24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{-7116.05}f_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 1 & 699 & 101 \\ 0 & 0 & 1 & 0.13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-4.62f_3+f_1]{-699f_3+f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 0 & -39.87 \\ 0 & 1 & 0 & 10.13 \\ 0 & 0 & 1 & 0.13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3.99f_2+f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0.54 \\ 0 & 1 & 0 & 10.13 \\ 0 & 0 & 1 & 0.13 \end{array}\right)$$

Solución sin intercambios

$$\xrightarrow{-10.17f_2+f_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 1 & 699 & 101 \\ 0 & 0 & -7116.05 & -926.24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{-7116.05}f_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 4.62 & -39.27 \\ 0 & 1 & 699 & 101 \\ 0 & 0 & 1 & 0.13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-4.62f_3+f_1]{-699f_3+f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3.99 & 0 & -39.87 \\ 0 & 1 & 0 & 10.13 \\ 0 & 0 & 1 & 0.13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3.99f_2+f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0.54 \\ 0 & 1 & 0 & 10.13 \\ 0 & 0 & 1 & 0.13 \end{array}\right)$$

Solución sin intercambios

Por lo tanto, se deduce la aproximación:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.54 \\ 10.13 \\ 0.13 \end{pmatrix}$$

Luego, el error relativo viene dado por:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.54 \\ 10.13 \\ 0.13 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \right\|} = 0.05555198701$$

Solución sin intercambios

Por lo tanto, se deduce la aproximación:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.54 \\ 10.13 \\ 0.13 \end{pmatrix}$$

Luego, el error relativo viene dado por:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.54 \\ 10.13 \\ 0.13 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \right\|} = 0.05555198701$$

Solución con pivoteo parcial

$$\left(\begin{array}{rrr:r} 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ \color{red}{6.11} & -14.2 & 21 & -139 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr:r} 6.11 & -14.2 & 21 & -139 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{6.11} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrr:r} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow[-3.03 f_1 + f_3]{3.03 f_1 + f_2}$$

$$\left(\begin{array}{lrr:r} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ 0 & \color{red}{5.07} & 3.39 & 51.09 \\ 0 & -5.07 & 3.60 & -50.09 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo parcial

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ \color{red}{6.11} & -14.2 & 21 & -139 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6.11 & -14.2 & 21 & -139 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{6.11} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow[-3.03 f_1 + f_3]{3.03 f_1 + f_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ 0 & \color{red}{5.07} & 3.39 & 51.09 \\ 0 & -5.07 & 3.60 & -50.09 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo parcial

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ \color{red}{6.11} & -14.2 & 21 & -139 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6.11 & -14.2 & 21 & -139 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{6.11} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow[-3.03 f_1 + f_3]{3.03 f_1 + f_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ 0 & \color{red}{5.07} & 3.39 & 51.09 \\ 0 & -5.07 & 3.60 & -50.09 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo parcial

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 6.11 & -14.2 & 21 & -139 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6.11 & -14.2 & 21 & -139 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{6.11} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow[-3.03 f_1 + f_3]{3.03 f_1 + f_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ 0 & 5.07 & 3.39 & 51.09 \\ 0 & -5.07 & 3.60 & -50.09 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo parcial

$$\xrightarrow{f_2+f_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ 0 & 5.07 & 3.39 & 51.09 \\ 0 & 0 & 6.99 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{6.99}f_3]{\frac{1}{5.07}f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ 0 & 1 & 0.66 & 10.07 \\ 0 & 0 & 1 & 0.14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-3.43f_3+f_1]{-0.66f_3+f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2.32 & 0 & -23.22 \\ 0 & 1 & 0 & 9.97 \\ 0 & 0 & 1 & 0.14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2.32f_2+f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -0.08 \\ 0 & 1 & 0 & 9.97 \\ 0 & 0 & 1 & 0.14 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo parcial

$$\xrightarrow{f_2+f_3}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ 0 & 5.07 & 3.39 & 51.09 \\ 0 & 0 & 6.99 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{6.99}f_3]{\frac{1}{5.07}f_2}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ 0 & 1 & 0.66 & 10.07 \\ 0 & 0 & 1 & 0.14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-3.43f_3+f_1]{-0.66f_3+f_2}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2.32 & 0 & -23.22 \\ 0 & 1 & 0 & 9.97 \\ 0 & 0 & 1 & 0.14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2.32f_2+f_1}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -0.08 \\ 0 & 1 & 0 & 9.97 \\ 0 & 0 & 1 & 0.14 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo parcial

$$\xrightarrow{f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ 0 & 5.07 & 3.39 & 51.09 \\ 0 & 0 & 6.99 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{6.99}f_3]{\frac{1}{5.07}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ 0 & 1 & 0.66 & 10.07 \\ 0 & 0 & 1 & 0.14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-3.43f_3+f_1]{-0.66f_3+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2.32 & 0 & -23.22 \\ 0 & 1 & 0 & 9.97 \\ 0 & 0 & 1 & 0.14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2.32f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.08 \\ 0 & 1 & 0 & 9.97 \\ 0 & 0 & 1 & 0.14 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo parcial

$$\xrightarrow{f_2+f_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ 0 & 5.07 & 3.39 & 51.09 \\ 0 & 0 & 6.99 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{6.99}f_3]{\frac{1}{5.07}f_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2.32 & 3.43 & -22.74 \\ 0 & 1 & 0.66 & 10.07 \\ 0 & 0 & 1 & 0.14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-3.43f_3+f_1]{-0.66f_3+f_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2.32 & 0 & -23.22 \\ 0 & 1 & 0 & 9.97 \\ 0 & 0 & 1 & 0.14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2.32f_2+f_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.08 \\ 0 & 1 & 0 & 9.97 \\ 0 & 0 & 1 & 0.14 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo parcial

Por lo tanto, se deduce la aproximación:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -0.08 \\ 9.97 \\ 0.14 \end{pmatrix}$$

Luego, el error relativo viene dado por:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.08 \\ 9.97 \\ 0.14 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \right\|} = 0.008547907409$$

Solución con pivoteo parcial

Por lo tanto, se deduce la aproximación:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -0.08 \\ 9.97 \\ 0.14 \end{pmatrix}$$

Luego, el error relativo viene dado por:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.08 \\ 9.97 \\ 0.14 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \right\|} = 0.008547907409$$

Solución con pivoteo total

$$\left(\begin{array}{rrr:r} 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 6.11 & -14.2 & \color{red}{21} & -139 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr:r} 6.11 & -14.2 & \color{red}{21} & -139 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow{\color{red}{c_1 \leftrightarrow c_3}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr:r} 21 & -14.2 & 6.11 & -139 \\ -7 & 12.1 & -3.03 & 120 \\ 14 & -12.1 & 3.03 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{21} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrr:r} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ -7 & 12.1 & -3.03 & 120 \\ 14 & -12.1 & 3.03 & -119 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo total

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 6.11 & -14.2 & \color{red}{21} & -139 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6.11 & -14.2 & \color{red}{21} & -139 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 21 & -14.2 & 6.11 & -139 \\ -7 & 12.1 & -3.03 & 120 \\ 14 & -12.1 & 3.03 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{21} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ -7 & 12.1 & -3.03 & 120 \\ 14 & -12.1 & 3.03 & -119 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo total

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 6.11 & -14.2 & \color{red}{21} & -139 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6.11 & -14.2 & \color{red}{21} & -139 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow{\color{red}{c_1 \leftrightarrow c_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 21 & -14.2 & 6.11 & -139 \\ -7 & 12.1 & -3.03 & 120 \\ 14 & -12.1 & 3.03 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{21} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ -7 & 12.1 & -3.03 & 120 \\ 14 & -12.1 & 3.03 & -119 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo total

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 6.11 & -14.2 & \color{red}{21} & -139 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6.11 & -14.2 & \color{red}{21} & -139 \\ -3.03 & 12.1 & -7 & 120 \\ 3.03 & -12.1 & 14 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow{\color{red}{c_1 \leftrightarrow c_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 21 & -14.2 & 6.11 & -139 \\ -7 & 12.1 & -3.03 & 120 \\ 14 & -12.1 & 3.03 & -119 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{21} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ -7 & 12.1 & -3.03 & 120 \\ 14 & -12.1 & 3.03 & -119 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo total

$$\xrightarrow[-14f_1+f_3]{7f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 7.41 & -1 & 73.73 \\ 0 & -2.72 & -1.03 & -26.46 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7.41}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 1 & -0.13 & 9.95 \\ 0 & -2.72 & -1.03 & -26.46 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2.72f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 1 & -0.13 & 9.95 \\ 0 & 0 & -1.38 & 0.60 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{-1.38}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 1 & -0.13 & 9.95 \\ 0 & 0 & 1 & -0.43 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo total

$$\xrightarrow[-14f_1+f_3]{7f_1+f_2}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 7.41 & -1 & 73.73 \\ 0 & -2.72 & -1.03 & -26.46 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7.41}f_2}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 1 & -0.13 & 9.95 \\ 0 & -2.72 & -1.03 & -26.46 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2.72f_2+f_3}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 1 & -0.13 & 9.95 \\ 0 & 0 & -1.38 & 0.60 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{-1.38}f_3}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 1 & -0.13 & 9.95 \\ 0 & 0 & 1 & -0.43 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo total

$$\xrightarrow[-14f_1 + f_3]{7f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 7.41 & -1 & 73.73 \\ 0 & -2.72 & -1.03 & -26.46 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7.41}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 1 & -0.13 & 9.95 \\ 0 & -2.72 & -1.03 & -26.46 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2.72f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 1 & -0.13 & 9.95 \\ 0 & 0 & -1.38 & 0.60 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{-1.38}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 1 & -0.13 & 9.95 \\ 0 & 0 & 1 & -0.43 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo total

$$\xrightarrow[-14f_1+f_3]{7f_1+f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & \color{red}{7.41} & -1 & 73.73 \\ 0 & -2.72 & -1.03 & -26.46 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7.41}f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 1 & -0.13 & 9.95 \\ 0 & -2.72 & -1.03 & -26.46 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2.72f_2+f_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 1 & -0.13 & 9.95 \\ 0 & 0 & -1.38 & 0.60 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{-1.38}f_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -0.67 & 0.29 & -6.61 \\ 0 & 1 & -0.13 & 9.95 \\ 0 & 0 & 1 & -0.43 \end{array}\right)$$

Solución con pivoteo total

$$\xrightarrow[-0.29f_3+f_1]{0.13f_3+f_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.67 & 0 & -6.48 \\ 0 & 1 & 0 & 9.89 \\ 0 & 0 & 1 & -0.43 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{0.67f_2+f_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.14 \\ 0 & 1 & 0 & 9.89 \\ 0 & 0 & 1 & -0.43 \end{array}\right)$$

Ahora, como se intercambiaron la columna 1 con la 3, entonces la solución obtenida corresponde a:

$$x_1 = -0.43\,, \qquad x_2 = 9.89 \qquad \text{y} \qquad x_3 = 0.14$$

Solución con pivoteo total

$$\xrightarrow[-0.29f_3+f_1]{0.13f_3+f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -0.67 & 0 & -6.48 \\ 0 & 1 & 0 & 9.89 \\ 0 & 0 & 1 & -0.43 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{0.67f_2+f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0.14 \\ 0 & 1 & 0 & 9.89 \\ 0 & 0 & 1 & -0.43 \end{array}\right)$$

Ahora, como se intercambiaron la columna 1 con la 3, entonces la solución obtenida corresponde a:

$$x_1 = -0.43, \qquad x_2 = 9.89 \qquad \text{y} \qquad x_3 = 0.14$$

Solución con pivoteo total

$$\xrightarrow[-0.29f_3 + f_1]{0.13f_3+f_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -0.67 & 0 & -6.48 \\ 0 & 1 & 0 & 9.89 \\ 0 & 0 & 1 & -0.43 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{0.67f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0.14 \\ 0 & 1 & 0 & 9.89 \\ 0 & 0 & 1 & -0.43 \end{array}\right)$$

Ahora, como se intercambiaron la columna 1 con la 3, entonces la solución obtenida corresponde a:

$$x_1 \;=\; -0.43\,, \qquad x_2 \;=\; 9.89 \qquad \text{y} \qquad x_3 \;=\; 0.14$$

Solución con pivoteo total

Por lo tanto, se deduce la aproximación:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -0.43 \\ 9.98 \\ 0.14 \end{pmatrix}$$

Luego, el error relativo viene dado por:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.43 \\ 9.98 \\ 0.14 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \right\|} = 0.04438107319$$

Solución con pivoteo total

Por lo tanto, se deduce la aproximación:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -0.43 \\ 9.98 \\ 0.14 \end{pmatrix}$$

Luego, el error relativo viene dado por:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.43 \\ 9.98 \\ 0.14 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \right\|} = 0.04438107319$$

Ejemplo (Ampliación, IIC-2016)

Utilice el método de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial para aproximar la solución del sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} -2.9999 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1.9999 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1.9999 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2.9999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.9998 \\ -2.9998 \\ 2.9999 \\ 6.9999 \end{pmatrix}.$$

Utilice truncamiento a cuatro decimales en sus cálculos. Más aún, encuentre el error relativo con la norma-2, sabiendo que la solución exacta corresponde a $(2, 2, -1, -1)^t$.

Solución

Se aplica directamente el método de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial, tal y como sigue:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2.9999 & 2 & 0 & 3 & -4.9998 \\ 1 & -1.9999 & 0 & 1 & -2.9998 \\ 1 & 0 & -1.9999 & 1 & 2.9999 \\ \color{red}{3} & 0 & 2 & -2.9999 & 6.9999 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_4}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 2 & -2.9999 & 6.9999 \\ 1 & -1.9999 & 0 & 1 & -2.9998 \\ 1 & 0 & -1.9999 & 1 & 2.9999 \\ -2.9999 & 2 & 0 & 3 & -4.9998 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 1 & -1.9999 & 0 & 1 & -2.9998 \\ 1 & 0 & -1.9999 & 1 & 2.9999 \\ -2.9999 & 2 & 0 & 3 & -4.9998 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-f_1 + f_3 \\ 2.9999 f_1 + f_4}]{-f_1 + f_2}$$

Solución

Se aplica directamente el método de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial, tal y como sigue:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2.9999 & 2 & 0 & 3 & -4.9998 \\ 1 & -1.9999 & 0 & 1 & -2.9998 \\ 1 & 0 & -1.9999 & 1 & 2.9999 \\ 3 & 0 & 2 & -2.9999 & 6.9999 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_4}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 2 & -2.9999 & 6.9999 \\ 1 & -1.9999 & 0 & 1 & -2.9998 \\ 1 & 0 & -1.9999 & 1 & 2.9999 \\ -2.9999 & 2 & 0 & 3 & -4.9998 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 1 & -1.9999 & 0 & 1 & -2.9998 \\ 1 & 0 & -1.9999 & 1 & 2.9999 \\ -2.9999 & 2 & 0 & 3 & -4.9998 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-f_1 + f_3 \\ 2.9999 f_1 + f_4}]{-f_1+f_2}$$

Solución

Se aplica directamente el método de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial, tal y como sigue:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2.9999 & 2 & 0 & 3 & -4.9998 \\ 1 & -1.9999 & 0 & 1 & -2.9998 \\ 1 & 0 & -1.9999 & 1 & 2.9999 \\ \color{red}{3} & 0 & 2 & -2.9999 & 6.9999 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & -2.9999 & 6.9999 \\ 1 & -1.9999 & 0 & 1 & -2.9998 \\ 1 & 0 & -1.9999 & 1 & 2.9999 \\ -2.9999 & 2 & 0 & 3 & -4.9998 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 1 & -1.9999 & 0 & 1 & -2.9998 \\ 1 & 0 & -1.9999 & 1 & 2.9999 \\ -2.9999 & 2 & 0 & 3 & -4.9998 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-f_1 + f_3 \\ 2.9999 f_1 + f_4}]{-f_1+f_2}$$

Solución

Se aplica directamente el método de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial, tal y como sigue:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2.9999 & 2 & 0 & 3 & -4.9998 \\ 1 & -1.9999 & 0 & 1 & -2.9998 \\ 1 & 0 & -1.9999 & 1 & 2.9999 \\ 3 & 0 & 2 & -2.9999 & 6.9999 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_4}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 2 & -2.9999 & 6.9999 \\ 1 & -1.9999 & 0 & 1 & -2.9998 \\ 1 & 0 & -1.9999 & 1 & 2.9999 \\ -2.9999 & 2 & 0 & 3 & -4.9998 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 1 & -1.9999 & 0 & 1 & -2.9998 \\ 1 & 0 & -1.9999 & 1 & 2.9999 \\ -2.9999 & 2 & 0 & 3 & -4.9998 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-f_1 + f_3 \\ 2.9999 f_1 + f_4}]{-f_1+f_2}$$

Solución

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & 2 & 1.9997 & 0.0003 & 1.9998 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_4}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 2 & 1.9997 & 0.0003 & 1.9998 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \end{array}\right) \xrightarrow{1.9999 f_2 + f_4}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & 0 & 1.3329 & 2 & -3.3333 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{-2.6665} f_3}$$

Solución

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & 2 & 1.9997 & 0.0003 & 1.9998 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 2 & 1.9997 & 0.0003 & 1.9998 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \end{array}\right) \xrightarrow{1.9999 f_2 + f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & 0 & 1.3329 & 2 & -3.3333 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{-2.6665} f_3}$$

Solución

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & 2 & 1.9997 & 0.0003 & 1.9998 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_4}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 2 & 1.9997 & 0.0003 & 1.9998 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \end{array}\right) \xrightarrow{1.9999 f_2 + f_4}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & 0 & 1.3329 & 2 & -3.3333 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{-2.6665} f_3}$$

Solución

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & {\color{red}2} & 1.9997 & 0.0003 & 1.9998 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_4}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 2 & 1.9997 & 0.0003 & 1.9998 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \end{array}\right) \xrightarrow{1.9999 f_2 + f_4}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & 0 & 1.3329 & 2 & -3.3333 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{-2.6665} f_3}$$

Solución

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & 2 & 1.9997 & 0.0003 & 1.9998 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_4}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 2 & 1.9997 & 0.0003 & 1.9998 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2} f_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & -1.9999 & -0.6666 & 1.9999 & -5.3331 \end{array}\right) \xrightarrow{1.9999 f_2 + f_4}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & -2.6665 & 1.9999 & 0.6666 \\ 0 & 0 & 1.3329 & 2 & -3.3333 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{-2.6665} f_3}$$

Solución

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 1.3329 & 2 & -3.3333 \end{array}\right) \xrightarrow{-1.3329 f_3 + f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 0 & 2.9996 & -3.0002 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2.9996} f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-0.0001 f_4 + f_2 \\ 0.9999 f_4 + f_1}]{0.75 f_4 + f_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & 0 & 1.3332 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right) \xrightarrow[-0.6666 f_3 + f_1]{-0.9998 f_3 + f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1.9998 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.9998 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right)$$

Solución

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 1.3329 & 2 & -3.3333 \end{array}\right) \xrightarrow{-1.3329 f_3 + f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 0 & 2.9996 & -3.0002 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2.9996} f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-0.0001 f_4 + f_2 \\ 0.9999 f_4 + f_1}]{0.75 f_4 + f_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & 0 & 1.3332 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right) \xrightarrow[-0.6666 f_3 + f_1]{-0.9998 f_3 + f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1.9998 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.9998 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right)$$

Solución

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 1.3329 & 2 & -3.3333 \end{array}\right) \xrightarrow{-1.3329 f_3 + f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 0 & 2.9996 & -3.0002 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2.9996} f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-0.0001 f_4 + f_2 \\ 0.9999 f_4 + f_1}]{0.75 f_4 + f_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & 0 & 1.3332 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right) \xrightarrow[-0.6666 f_3 + f_1]{-0.9998 f_3 + f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1.9998 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.9998 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right)$$

Solución

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 1.3329 & 2 & -3.3333 \end{array}\right) \xrightarrow{-1.3329 f_3 + f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 0 & 2.9996 & -3.0002 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2.9996} f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-0.0001 f_4 + f_2 \\ 0.9999 f_4 + f_1}]{0.75 f_4 + f_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & 0 & 1.3332 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right) \xrightarrow[-0.6666 f_3 + f_1]{-0.9998 f_3 + f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1.9998 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.9998 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right)$$

Solución

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 1.3329 & 2 & -3.3333 \end{array}\right) \xrightarrow{-1.3329f_3+f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 0 & 2.9996 & -3.0002 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2.9996}f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & -0.9999 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0.0001 & 0.9999 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & -0.2499 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-0.0001f_4+f_2 \\ 0.9999f_4+f_1}]{0.75f_4+f_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6666 & 0 & 1.3332 \\ 0 & 1 & 0.9998 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right) \xrightarrow[-0.6666f_3+f_1]{-0.9998f_3+f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1.9998 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.9998 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.0002 \end{array}\right)$$

Solución

Por lo tanto, la solución del sistema corresponde a:

$$x_1 = 1.9998\,, \quad x_2 = 1.9998\,, \quad x_3 = -1\,, \quad x_4 = -1.0002\,.$$

Finalmente, el error relativo viene dado por:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.9998 \\ 1.9998 \\ -1 \\ -1.0002 \end{pmatrix} \right\|_2}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2} = \frac{\sqrt{3 \cdot (0.0002)^2}}{\sqrt{10}} \approx 0.0001095445115\,.$$

Solución

Por lo tanto, la solución del sistema corresponde a:

$$x_1 \;=\; 1.9998\,, \quad x_2 \;=\; 1.9998\,, \quad x_3 \;=\; -1\,, \quad x_4 \;=\; -1.0002\,.$$

Finalmente, el error relativo viene dado por:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.9998 \\ 1.9998 \\ -1 \\ -1.0002 \end{pmatrix} \right\|_2}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2} = \frac{\sqrt{3 \cdot (0.0002)^2}}{\sqrt{10}} \approx 0.0001095445115\,.$$

Ejercicio

Ejercicio

a) Utilice pivoteo parcial, con redondeo a dos decimales, para resolver el sistema lineal:

$$\begin{cases} 23.12x_1 + 7.86x_2 - 8.15x_3 = 15.26 \\ 12.01x_1 + 2.67x_2 - 56.43x_3 = 9.34 \\ -32.12x_1 + 10.00x_2 - 4.32x_3 = -42.12 \end{cases}$$

b) Repita el paso *a)* con pivoteo total.

c) Comente los resultados obtenidos en *a)* y *b)*, teniendo en cuenta que la solución exacta viene dada por $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 0$.

Ejercicio

Ejercicio para la casa (I Examen, IC-2018)

Considere la técnica de **pivoteo parcial escalado**, en la cual se intercambian filas según el mayor valor en la columna del pivote en relación con su fila completa. Esto claro, solo en matriz de coeficientes (sin incluir el vector de la derecha) y para las entradas por debajo de la diagonal principal. En otras palabras, dada $\mathbf{A} := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, cuando el pivote corresponde a a_{kk}, se buscan en las filas $i = k, k+1, \ldots, n$, los valores:

$$\mathsf{e}_i \;:=\; \frac{|a_{ik}|}{\max\limits_{j=k}^{n} |a_{ij}|}\,.$$

Luego, se intercambia la fila k con la fila correspondiente al mayor de e_i calculado.

Ejercicio

Ejercicio (continuación)

a) Utilice pivoteo parcial, con redondeo a dos decimales, para resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 0.13x - 1.14y - 9.93z & = & -31.94 \\ -1.08x - 4.43y + 5.68z & = & 7.1 \\ -9.71x + 82.4y + 0.75z & = & 157.34 \end{array}\right.$$

b) Repita el paso a) con pivoteo parcial escalado.

c) Comente significativamente los resultados obtenidos en a) y b), teniendo en cuenta que la solución exacta viene dada por $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$.

Organización de la presentación

Introducción

Teorema

Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m \geq n$, se tiene que existen matrices $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tales que:

$$\mathbf{A} \;=\; \mathbf{Q}\mathbf{R}\,,$$

donde $\mathbf{Q}$ es una matriz ortogonal (es decir, $\mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}_m$) $\mathbf{R}$ es triangular superior.

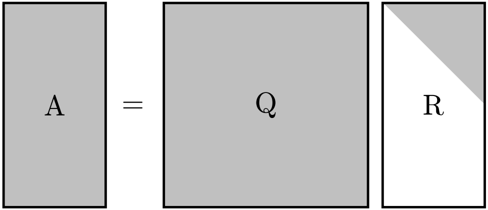
Introducción

Teorema

Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m \geq n$, se tiene que existen matrices $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tales que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}\,,$$

donde $\mathbf{Q}$ es una matriz ortogonal (es decir, $\mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}_m$) $\mathbf{R}$ es triangular superior.



Importancia de la factorización QR

1. Si se tiene un sistema lineal rectangular $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, entonces al reemplazar $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{QRx} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{Q}^t\mathbf{QRx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{I}_m\mathbf{Rx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{Rx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \end{aligned}$$

Observe que se obtiene un sistema lineal con matriz triangular superior.

Importancia de la factorización QR

1. Si se tiene un sistema lineal rectangular $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, entonces al reemplazar $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, se sigue que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{QRx} &= \mathbf{b} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{Q}^t\mathbf{QRx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{I}_m\mathbf{Rx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{Rx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Observe que se obtiene un sistema lineal con matriz triangular superior.

Importancia de la factorización QR

1. Si se tiene un sistema lineal rectangular $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, entonces al reemplazar $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{QRx} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{Q}^t\mathbf{QRx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{I}_m\mathbf{Rx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{Rx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \end{aligned}$$

Observe que se obtiene un sistema lineal con matriz triangular superior.

Importancia de la factorización QR

1. Si se tiene un sistema lineal rectangular $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, entonces al reemplazar $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, se sigue que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{QRx} &= \mathbf{b} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{Q}^t\mathbf{QRx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{I}_m\mathbf{Rx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{Rx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Observe que se obtiene un sistema lineal con matriz triangular superior.

Importancia de la factorización QR

1. Si se tiene un sistema lineal rectangular $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, entonces al reemplazar $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, se sigue que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{QRx} &= \mathbf{b} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{Q}^t\mathbf{QRx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{I}_m\mathbf{Rx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{Rx} &= \mathbf{Q}^t\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Observe que se obtiene un sistema lineal con matriz triangular superior.

Importancia de la factorización QR

1. Si se tiene un sistema lineal rectangular $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, entonces al reemplazar $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, se sigue que:

$$\begin{aligned} & \mathbf{Ax} &=& \ \mathbf{b} \\ \Rightarrow\ & \mathbf{QRx} &=& \ \mathbf{b} \\ \Rightarrow\ & \mathbf{Q}^t\mathbf{QRx} &=& \ \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \\ \Rightarrow\ & \mathbf{I}_m\mathbf{Rx} &=& \ \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \\ \Rightarrow\ & \mathbf{Rx} &=& \ \mathbf{Q}^t\mathbf{b} \end{aligned}$$

Observe que se obtiene un sistema lineal con matriz triangular superior.

Importancia de la factorización QR

2. En el contexto del cálculo de valores propios, el poder hacer la factorización QR de una matriz, permite aproximar todos los valores propios de esta. Esto se hace con el **método QR**.

Entre las desventajas de esta factorización, se encuentra que es un procedimiento costoso de efectuar (requiere una considerable cantidad de cálculos).

Importancia de la factorización QR

2. En el contexto del cálculo de valores propios, el poder hacer la factorización QR de una matriz, permite aproximar todos los valores propios de esta. Esto se hace con el **método QR**.

   Entre las desventajas de esta factorización, se encuentra que es un procedimiento costoso de efectuar (requiere una considerable cantidad de cálculos).

Observación

A continuación se describe la construcción de la factorización QR de una matriz mediante el uso de **reflexiones de Householder**.

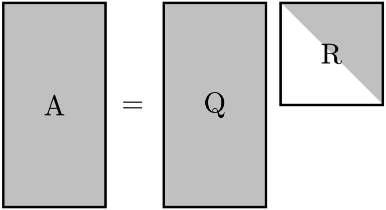
Sin embargo, es importante tener en cuenta que también es posible utilizar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para hallar esta factorización. No obstante, en tal caso la factorización de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ produce $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es decir:

En particular, esta alternativa no se estudia, debido a que el método de Householder es numéricamente más estable.

Observación

A continuación se describe la construcción de la factorización QR de una matriz mediante el uso de **reflexiones de Householder**.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que también es posible utilizar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para hallar esta factorización. No obstante, en tal caso la factorización de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ produce $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es decir:

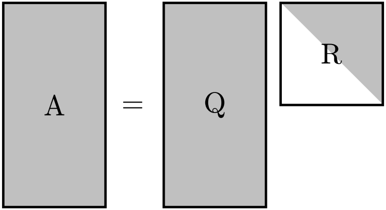


En particular, esta alternativa no se estudia, debido a que el método de Householder es numéricamente más estable.

Observación

A continuación se describe la construcción de la factorización QR de una matriz mediante el uso de **reflexiones de Householder**.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que también es posible utilizar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para hallar esta factorización. No obstante, en tal caso la factorización de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ produce $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es decir:



En particular, esta alternativa no se estudia, debido a que el método de Householder es numéricamente más estable.

Matriz de Householder

Definición

Considere $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Se define la matriz

$$\mathbf{H} := \mathbf{I}_n - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}}$$

la cual se conoce como una **matriz de Householder** para el vector $\mathbf{u}$ no nulo.

Observación: Se puede probar que $\mathbf{H}$ es simétrica y que $\mathbf{H}^t\mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{H}^t = \mathbf{I}_n$. Es decir, las matrices de Householder son ortogonales.

Matriz de Householder

Definición

Considere $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Se define la matriz

$$\mathbf{H} := \mathbf{I}_n - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}}$$

la cual se conoce como una **matriz de Householder** para el vector $\mathbf{u}$ no nulo.

Observación: Se puede probar que $\mathbf{H}$ es simétrica y que $\mathbf{H}^t\mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{H}^t = \mathbf{I}_n$. Es decir, las matrices de Householder son ortogonales.

Ejemplo

Considere los vectores $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces, observe que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} \quad &:= \quad \mathbf{I}_n - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}} \\
&= \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\,\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0\ 1)}{(0\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \\
&= \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Considere los vectores $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces, observe que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &:= \mathbf{I}_n - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\,\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0\ 1)}{(0\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Considere los vectores $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces, observe que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H} &:= \mathbf{I}_n - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\,\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0\ 1)}{(0\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Considere los vectores $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces, observe que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &:= \mathbf{I}_n - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\,\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0\ 1)}{(0\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

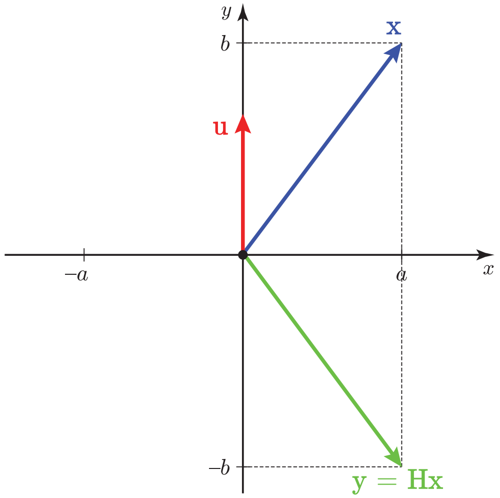
Ejemplo

Ahora, nótese que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &:= \mathbf{Hx} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donde graficando estos vectores:

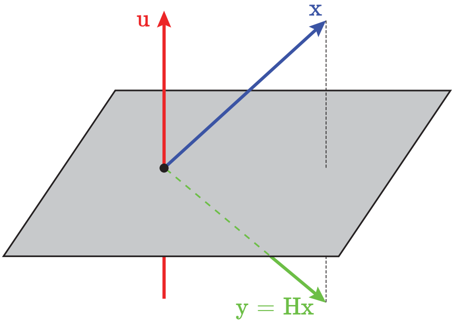
Ejemplo



Ejemplo

Se puede apreciar que $\mathbf{y} := \mathbf{Hx}$ corresponde a una reflexión de $\mathbf{x}$ a la perpendicular del vector $\mathbf{u}$.

En general, se tiene la siguiente situación gráfica:



Debido a esto a la matriz $\mathbf{H} := \mathbf{I}_n - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}}$ se le conoce como *reflexiones de Householder* o *transformaciones de Householder*.

Reflexiones de Householder

Teorema

Sea $\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{e}_1$. Entonces, la matriz de Householder $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida con el vector

$$\mathbf{u} \;:=\; \mathbf{x} \pm \|\mathbf{x}\|_2 \, \mathbf{e}_1$$

satisface que:

$$\mathbf{H}\mathbf{x} \;=\; \mp\|\mathbf{x}\|_2 \, \mathbf{e}_1 \,.$$

Reflexiones de Householder

$$\underbrace{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad\quad\mathbf{H}\quad\quad} \mathbf{Hx} = \begin{pmatrix} \mp\|\mathbf{x}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Refleja un vector cualquiera en uno paralelo a } \mathbf{e}_1}$$

Observación

Respecto del signo de $\mathbf{u} = \mathbf{x} \pm \|\mathbf{x}\|_2\, \mathbf{e}_1$, con el fin de evitar errores de precisión al calcular la primera entrada de $\mathbf{u}$ (específicamente la cancelación catastrófica), se toma el signo de x_1. Es decir:

$$\mathbf{u} \;:=\; \mathbf{x} + \operatorname{sign}(x_1)\, \|\mathbf{x}\|_2\, \mathbf{e}_1 \,,$$

donde:

$$\operatorname{sign}(x) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Observación

Respecto del signo de $\mathbf{u} = \mathbf{x} \pm \|\mathbf{x}\|_2 \, \mathbf{e}_1$, con el fin de evitar errores de precisión al calcular la primera entrada de $\mathbf{u}$ (específicamente la cancelación catastrófica), se toma el signo de x_1. Es decir:

$$\mathbf{u} \;:=\; \mathbf{x} + \operatorname{sign}(x_1)\, \|\mathbf{x}\|_2 \, \mathbf{e}_1 \,,$$

donde:

$$\operatorname{sign}(x) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Dado $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &:= \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{sign}(-4) \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Con ello, se sigue que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H} \;&:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{(-9,\,3,\,0)\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} (-9,\,3,\,0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 81 & -27 & 0 \\ -27 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Finalmente, nótese que:

$$\mathbf{Hx} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Construcción de la factorización QR a través de reflexiones de Householder

La idea es la siguiente:

- Dada

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

se define $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ como la primera columna de $\mathbf{A}$.

Así, se construye la matriz de Householder $\mathbf{H}_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ asociada al vector $\mathbf{u} := \mathbf{x} + \operatorname{sign}(x_1)\|\mathbf{x}\|_2\mathbf{e}_1$.

Construcción de la factorización QR a través de reflexiones de Householder

La idea es la siguiente:

- Dada

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \color{red}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \color{red}{\vdots} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \color{red}{a_{m1}} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

  se define $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ como la primera columna de $\mathbf{A}$.

  Así, se construye la matriz de Householder $\mathbf{H}_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ asociada al vector $\mathbf{u} := \mathbf{x} + \operatorname{sign}(x_1)\|\mathbf{x}\|_2\mathbf{e}_1$.

Construcción de la factorización QR a través de reflexiones de Householder

- Luego, se obtiene:

$$\mathbf{H}_1\mathbf{A} \; := \begin{pmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} & \widehat{a}_{13} & \cdots & \widehat{a}_{1n} \\ 0 & \widehat{a}_{22} & \widehat{a}_{23} & \cdots & \widehat{a}_{2n} \\ 0 & \widehat{a}_{32} & \widehat{a}_{33} & \cdots & \widehat{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \underbrace{\widehat{a}_{m2}}_{\mathbf{x}} & \widehat{a}_{m3} & \cdots & \widehat{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

Así, se crea la matriz de Householder $\widehat{\mathbf{H}}_2 \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}$ similar al paso previo, y se define la matriz:

$$\mathbf{H}_2 \; := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{H}}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

Construcción de la factorización QR a través de reflexiones de Householder

- Luego, se obtiene:

$$\mathbf{H}_1\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} & \widehat{a}_{13} & \cdots & \widehat{a}_{1n} \\ 0 & \widehat{a}_{22} & \widehat{a}_{23} & \cdots & \widehat{a}_{2n} \\ 0 & \widehat{a}_{32} & \widehat{a}_{33} & \cdots & \widehat{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \underbrace{\widehat{a}_{m2}}_{\mathbf{x}} & \widehat{a}_{m3} & \cdots & \widehat{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

Así, se crea la matriz de Householder $\widehat{\mathbf{H}}_2 \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}$ similar al paso previo, y se define la matriz:

$$\mathbf{H}_2 := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{H}}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

Construcción de la factorización QR a través de reflexiones de Householder

- Luego, se obtiene:

$$\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} & \widehat{a}_{13} & \cdots & \widehat{a}_{1n} \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} & \cdots & \widetilde{a}_{2n} \\ 0 & 0 & \widetilde{a}_{33} & \cdots & \widetilde{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \underbrace{\widetilde{a}_{m3}}_{\mathbf{x}} & \cdots & \widetilde{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

Así, se crea la matriz de Householder $\widehat{\mathbf{H}}_3 \in \mathbb{R}^{(m-2)\times(m-2)}$ similar al paso previo, y se define la matriz:

$$\mathbf{H}_3 := \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{H}}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

Construcción de la factorización QR a través de reflexiones de Householder

- Continuando este procedimiento hasta la última columna, se obtiene que:

$$\mathbf{H}_n \mathbf{H}_{n-1} \cdots \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \mathbf{A} \;=\; \mathbf{R}$$

donde $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es triangular superior.

Finalmente, lo anterior establece que:

$$\mathbf{A} \;=\; (\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \cdots \mathbf{H}_{n-1} \mathbf{H}_n)\mathbf{R}$$

donde definiendo:

$$\mathbf{Q} \;:=\; \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \cdots \mathbf{H}_{n-1} \mathbf{H}_n \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

se tiene que $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ y $\mathbf{Q}^t \mathbf{Q} = \mathbf{I}_m$.

Construcción de la factorización QR a través de reflexiones de Householder

- Continuando este procedimiento hasta la última columna, se obtiene que:

$$\mathbf{H}_n\mathbf{H}_{n-1}\cdots\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{A} \;=\; \mathbf{R}$$

donde $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es triangular superior.

Finalmente, lo anterior establece que:

$$\mathbf{A} \;=\; (\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\cdots\mathbf{H}_{n-1}\mathbf{H}_n)\mathbf{R}$$

donde definiendo:

$$\mathbf{Q} \;:=\; \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\cdots\mathbf{H}_{n-1}\mathbf{H}_n \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

se tiene que $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ y $\mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}_m$.

Ejemplo

Determine la factorización QR de la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solución

Paso 1. Tomando $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, se tiene que $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{4} = 2$. Con ello:

$$\mathbf{u} \; := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y así:

$$\mathbf{H}_1 \; := \; \mathbf{I}_4 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Solución

De esta forma, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_1\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{20}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Solución

Paso 2. Ahora $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{4} = 2.$ Así:

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\widehat{\mathbf{H}}_2 := \mathbf{I}_3 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}$$

Solución

Definiendo:

$$\mathbf{H}_2 \; := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}$$

se sigue que:

$$\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{20}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

Solución

Paso 3. Ahora $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{16} = 4$. Así:

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{36}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\widehat{\mathbf{H}}_3 := \mathbf{I}_2 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Solución

Definiendo:

$$\mathbf{H}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

se sigue que:

$$\mathbf{H}_3\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución

Por lo tanto:

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mientras que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &:= \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\mathbf{H}_3 \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Solución

En resumen, la factorización QR de $\mathbf{A}$ viene dada por:

$$\mathbf{Q} := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación

En el caso de hacer la factorización QR con Gram-Schmidt se obtendría:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Ejercicio

Determine la factorización QR de la matriz:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 4 & 23 & 2 \\ 8 & 22 & -23 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$\mathbf{Q} := \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{R} := \begin{pmatrix} -12 & -21 & 12 \\ 0 & -24 & 9 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Ejercicio

Determine la factorización QR de la matriz:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 4 & 23 & 2 \\ 8 & 22 & -23 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$\mathbf{Q} := \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{R} := \begin{pmatrix} -12 & -21 & 12 \\ 0 & -24 & 9 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

Observación

La factorización QR no es única. Por ejemplo si

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR},$$

entonces

$$\mathbf{A} = (-\mathbf{Q})(-\mathbf{R})$$

es otra factorización QR de $\mathbf{A}$.

Ejercicio

Ejercicio para la casa (I Examen, IIC-2017)

Considere la matriz:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Aplicando matrices de transformación de Householder sobre $\mathbf{A}$, encuentre las matrices $\mathbf{Q}$ ortogonal y $\mathbf{R}$ triangular superior, tales que $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$. No redondee ni trunque los resultados, utilice valores exactos.

b) Usando la factorización obtenida en *a*) resuelva el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ cuando $\mathbf{b} := (3, -21, -6)^t$.