Interpolación

Profesor
Filánder Sequeira Chavarría

Última actualización: 10 de octubre de 2020

Organización de la presentación

Problema modelo

Nuestro problema ahora es:

Problema modelo

Dado un conjunto de pares ordenados (preferiblemente distintos):

$$(x_0, y_0)\,, \quad (x_1, y_1)\,, \quad \ldots\,, \quad (x_n, y_n) \quad \leftarrow n+1 \text{ pares}$$

Encontrar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que:

$$f(x_i) \;=\; y_i \qquad \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Por simplicidad, usualmente se busca a f como un polinomio, o bien, como una función polinomial a trozos. A este problema se le conoce como un problema de **interpolación**.

Problema modelo

Nuestro problema ahora es:

Problema modelo

Dado un conjunto de pares ordenados (preferiblemente distintos):

$$(x_0, y_0)\,, \quad (x_1, y_1)\,, \quad \ldots\,, \quad (x_n, y_n) \quad \leftarrow n+1 \text{ pares}$$

Encontrar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que:

$$f(x_i) \;=\; y_i \qquad \forall\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Por simplicidad, usualmente se busca a f como un polinomio, o bien, como una función polinomial a trozos. A este problema se le conoce como un problema de **interpolación**.

Ejemplo

Halle el polinomio de grado a lo más 2, que interpole (es decir: "contiene a", o bien, "pase por") los puntos:

$$(1,4)\,, \qquad (2,1) \qquad \text{y} \qquad (3,3)\,.$$

Solución

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ y se sabe que:

- $p(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 4$
- $p(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b + c = 1$
- $p(3) = 3 \quad \Rightarrow \quad 9a + 3b + c = 3$

de donde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

del cual se obtiene que:

$$a = \frac{5}{2}, \qquad b = -\frac{21}{2} \qquad \text{y} \qquad c = 12$$

Solución

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ y se sabe que:

- $p(1) = 4 \Rightarrow a + b + c = 4$
- $p(2) = 1 \Rightarrow 4a + 2b + c = 1$
- $p(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c = 3$

de donde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

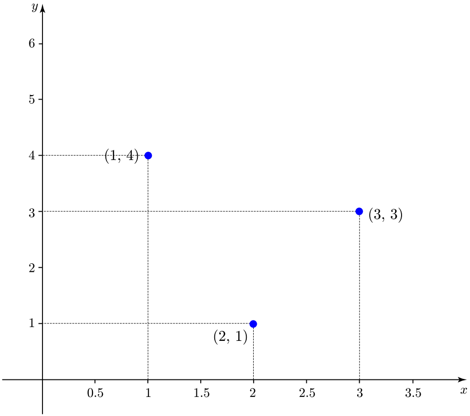
del cual se obtiene que:

$$a = \frac{5}{2}, \qquad b = -\frac{21}{2} \qquad \text{y} \qquad c = 12$$

Solución

Por lo tanto, el polinomio buscado corresponde a:

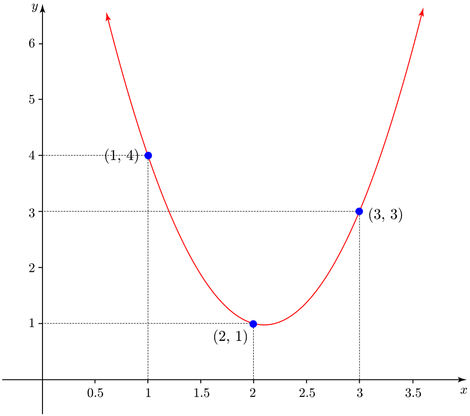
$$p(x) \;=\; \frac{5}{2}x^2 \;-\; \frac{21}{2}x \;+\; 12\,.$$



Solución

Por lo tanto, el polinomio buscado corresponde a:

$$p(x) \;=\; \frac{5}{2}x^2 \,-\, \frac{21}{2}x \,+\, 12\,.$$



Organización de la presentación

Existencia del polinomio interpolador

Teorema

Sean $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, donde $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Entonces, existe un único polinomio $p_n \in \mathcal{P}_n$, tal que:

$$p_n(x_i) = y_i \qquad \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

Aquí $\mathcal{P}_n$ denota el conjunto de todos los polinomios de grado a lo más n, con $n \in \mathbb{N}$.

Observación

La unicidad del teorema anterior establece que hay un único polinomio de grado a lo más n que interpole $n+1$ puntos distintos dados. Sin embargo, esto no quiere decir que no puedan haber (de hecho hay infinitos) más de un polinomio interpolante de grados mayores a n.

Por ejemplo:

$$p(x) \;=\; \frac{5}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + 12 \;\in\; \mathcal{P}_2$$

interpola a $(1,4)$, $(2,1)$ y $(3,3)$, al igual que:

$$q(x) \;=\; \frac{5}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + 12 + \alpha(x-1)(x-2)(x-3) \;\in\; \mathcal{P}_3$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observación

La unicidad del teorema anterior establece que hay un único polinomio de grado a lo más n que interpole $n+1$ puntos distintos dados. Sin embargo, esto no quiere decir que no puedan haber (de hecho hay infinitos) más de un polinomio interpolante de grados mayores a n.

Por ejemplo:

$$p(x) \;=\; \frac{5}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + 12 \;\in\; \mathcal{P}_2$$

interpola a $(1,4)$, $(2,1)$ y $(3,3)$, al igual que:

$$q(x) \;=\; \frac{5}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + 12 + \alpha(x-1)(x-2)(x-3) \;\in\; \mathcal{P}_3$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Polinomio de interpolación de Lagrange

Definición

Considere los $n+1$ puntos: (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}) y (x_n, y_n), donde $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. El **polinomio de interpolación de Lagrange**, se define por:

$$p_n(x) \; := \; \sum_{k=0}^{n} L_k(x) y_k \; \in \; \mathcal{P}_n \, ,$$

donde $L_k(x)$ son **los polinomios de Lagrange** de grado n, definidos por:

$$L_k(x) \; := \; \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \, .$$

Observación

Los polinomios de Lagrange satisfacen que:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Por lo tanto, observe que:

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x_i) y_k = y_i$$

lo que muestra que es polinomio interpolante.

Observación

Los polinomios de Lagrange satisfacen que:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Por lo tanto, observe que:

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x_i) y_k = y_i$$

lo que muestra que es polinomio interpolante.

Ejemplo

Encuentre el polinomio de interpolación de Lagrange que pasa por los puntos $(-1,-5)$, $(0,-1)$, $(1,7)$ y $(2,13)$.

Solución

En este caso $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$. Así, primero se buscan los polinomios de Lagrange, tal y como sigue:

- $$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{-6} \\ &= \frac{-x^3+3x^2-2x}{6} = -\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x-(-1))(x-1)(x-2)}{(0-(-1))(0-1)(0-2)} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{2} \\ &= \frac{x^3}{2}-x^2-\frac{x}{2}+1 \end{aligned}$$

Solución

En este caso $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$. Así, primero se buscan los polinomios de Lagrange, tal y como sigue:

- $$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{-6} \\ &= \frac{-x^3+3x^2-2x}{6} = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x-(-1))(x-1)(x-2)}{(0-(-1))(0-1)(0-2)} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{2} \\ &= \frac{x^3}{2} - x^2 - \frac{x}{2} + 1 \end{aligned}$$

Solución

- $$L_2(x) = \frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)}{(1-(-1))(1-0)(1-2)} = \frac{x(x+1)(x-2)}{-2}$$
$$= \frac{-x^3+x^2+2x}{2} = -\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+x$$

- $$L_3(x) = \frac{(x-(-1))(x-0)(x-1)}{(2-(-1))(2-0)(2-1)} = \frac{x(x+1)(x-1)}{6}$$
$$= \frac{x^3-x}{6} = \frac{x^3}{6}-\frac{x}{6}$$

Solución

- $$L_2(x) = \frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)}{(1-(-1))(1-0)(1-2)} = \frac{x(x+1)(x-2)}{-2}$$
  $$= \frac{-x^3+x^2+2x}{2} = -\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+x$$

- $$L_3(x) = \frac{(x-(-1))(x-0)(x-1)}{(2-(-1))(2-0)(2-1)} = \frac{x(x+1)(x-1)}{6}$$
  $$= \frac{x^3-x}{6} = \frac{x^3}{6}-\frac{x}{6}$$

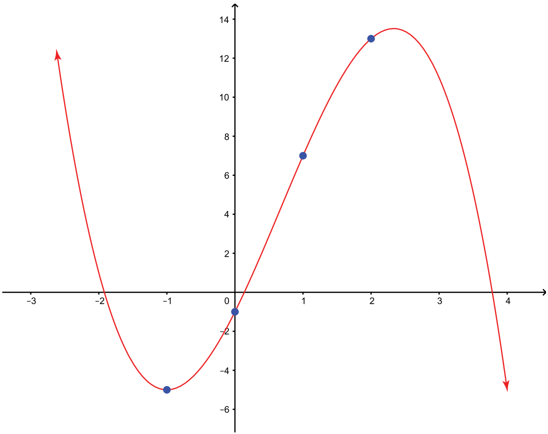
Solución

Con esto, se sigue que:

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= -5L_0(x) - L_1(x) + 7L_2(x) + 13L_3(x) \\
&= -5\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right) - \left(\frac{x^3}{2} - x^2 - \frac{x}{2} + 1\right) \\
&\quad + 7\left(-\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + x\right) + 13\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) \\
&= \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + \frac{13}{6}\right)x^3 + \left(-\frac{5}{2} + 1 + \frac{7}{2}\right)x^2 \\
&\quad + \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{2} + 7 - \frac{13}{6}\right)x + (-1) \\
&= -x^3 + 2x^2 + 7x - 1
\end{aligned}$$

Solución

En resumen: $p_3(x) = -x^3 + 2x^2 + 7x - 1.$



Ejemplo

Encuentre el polinomio de interpolación de Lagrange que pasa por los puntos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, -1)$.

Solución

Para este caso, el polinomio de interpolación de Lagrange es dado por:

$$p_2(x) = 0 \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + (-1) \cdot L_2(x) = L_1(x) - L_2(x)$$

Ahora, falta calcular $L_1(x)$ y $L_2(x)$, tal y como se muestra:

- $L_1(x) = \prod_{\substack{i=0\\i\neq 1}}^{2} \dfrac{x-x_i}{x_1-x_i} = \dfrac{(x-(-2))}{(0-(-2))} \cdot \dfrac{(x-1)}{(0-1)} = \dfrac{-x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + 1$
- $L_2(x) = \prod_{\substack{i=0\\i\neq 2}}^{2} \dfrac{x-x_i}{x_2-x_i} = \dfrac{(x-(-2))}{(1-(-2))} \cdot \dfrac{(x-0)}{(1-0)} = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2x}{3}$

Solución

Para este caso, el polinomio de interpolación de Lagrange es dado por:

$$p_2(x) \;=\; 0\cdot L_0(x) + 1\cdot L_1(x) + (-1)\cdot L_2(x) \;=\; L_1(x) - L_2(x)$$

Ahora, falta calcular $L_1(x)$ y $L_2(x)$, tal y como se muestra:

- $L_1(x) \;=\; \prod_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{2} \frac{x-x_i}{x_1-x_i} \;=\; \frac{(x-(-2))}{(0-(-2))}\cdot\frac{(x-1)}{(0-1)} \;=\; \frac{-x^2}{2}-\frac{x}{2}+1$
- $L_2(x) \;=\; \prod_{\substack{i=0\\ i\neq 2}}^{2} \frac{x-x_i}{x_2-x_i} \;=\; \frac{(x-(-2))}{(1-(-2))}\cdot\frac{(x-0)}{(1-0)} \;=\; \frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}$

Solución

Para este caso, el polinomio de interpolación de Lagrange es dado por:

$$p_2(x) \;=\; 0 \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + (-1) \cdot L_2(x) \;=\; L_1(x) - L_2(x)$$

Ahora, falta calcular $L_1(x)$ y $L_2(x)$, tal y como se muestra:

- $$L_1(x) \;=\; \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 1}}^{2} \frac{x - x_i}{x_1 - x_i} \;=\; \frac{(x-(-2))}{(0-(-2))} \cdot \frac{(x-1)}{(0-1)} \;=\; \frac{-x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$$
- $$L_2(x) \;=\; \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 2}}^{2} \frac{x - x_i}{x_2 - x_i} \;=\; \frac{(x-(-2))}{(1-(-2))} \cdot \frac{(x-0)}{(1-0)} \;=\; \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3}$$

Solución

Para este caso, el polinomio de interpolación de Lagrange es dado por:

$$p_2(x) \;=\; 0 \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + (-1) \cdot L_2(x) \;=\; L_1(x) - L_2(x)$$

Ahora, falta calcular $L_1(x)$ y $L_2(x)$, tal y como se muestra:

- $$L_1(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 1}}^{2} \frac{x - x_i}{x_1 - x_i} = \frac{(x-(-2))}{(0-(-2))} \cdot \frac{(x-1)}{(0-1)} = \frac{-x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$$
- $$L_2(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 2}}^{2} \frac{x - x_i}{x_2 - x_i} = \frac{(x-(-2))}{(1-(-2))} \cdot \frac{(x-0)}{(1-0)} = \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3}$$

Solución

Por lo tanto, el polinomio de interpolación $p_2 \in \mathcal{P}_2$ que pasa por los puntos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, -1)$ corresponde a:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= L_1(x) - L_2(x) \\ &= \left(\frac{-x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1 \right) - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} \right) \\ &= -\frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 1 \end{aligned}$$

Ejercicio

Ejercicio

Encuentre el polinomio de interpolación de Lagrange que aproxima la función $f(x) := 2^x \cos(\pi x)$ en el intervalo $[2, 4]$, utilizando los puntos en el conjunto: $\{2, 3, 4\}$.

Ejercicio

Ejercicio para la casa (II Examen, IIC-2016)

El objetivo de este problema es aproximar una solución de:

$$\tan(x) - \operatorname{sen}(x) = 0.436 \qquad \text{para} \quad \tfrac{1}{2} \leq x \leq \tfrac{3}{2}.$$

a) Definiendo $f(x) := \tan(x) - \operatorname{sen}(x)$, complete la tabla.

x	0.91153	1.08265	1.17959
$f(x)$			

Redondee sus resultados a cuatro decimales. Recuerde usar radianes.

Ejercicio

Ejercicio para la casa (continuación)

b) Construya el polinomio interpolante de Lagrange: $p_2(y)$ para x como función de y. Más precisamente, interpole $x = f^{-1}(y)$ en:

$$(f(0.91153), 0.91153)\,, \qquad (f(1.08265), 1.08265)$$

y

$$(f(1.17959), 1.17959)\,.$$

c) Evalúe p_2 en un valor apropiado de y para encontrar una solución aproximada a la ecuación planteada. Luego, usando como solución exacta $\xi = 0.8783933784\ldots$, determine la cantidad de dígitos significativos que posee su aproximación.

Estimado de error

Teorema

Sea f una función continua sobre $[a,b]$, tal que las derivadas de f de orden $\leq n+1$ existen y son continuas en $[a,b]$. Si $p_n \in \mathcal{P}_n$ es el polinomio que interpola a la función f en los $n+1$ valores distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, entonces para todo $x \in [a,b]$, existe $\xi = \xi(x) \in \,]a,b[$, tal que:

$$f(x) \;=\; p_n(x) \;+\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\pi_{n+1}(x),$$

donde

$$\pi_{n+1}(x) \;:=\; \prod_{j=0}^{n}(x-x_j) \;=\; (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\,.$$

Estimado de error

Teorema (continuación)

Además, para $M_{n+1} := \max\limits_{z\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(z)\right|$, se cumple que:

$$|f(x) - p_n(x)| \ \leq \ \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|\pi_{n+1}(x)| \quad \forall\, x \in [a,b].$$

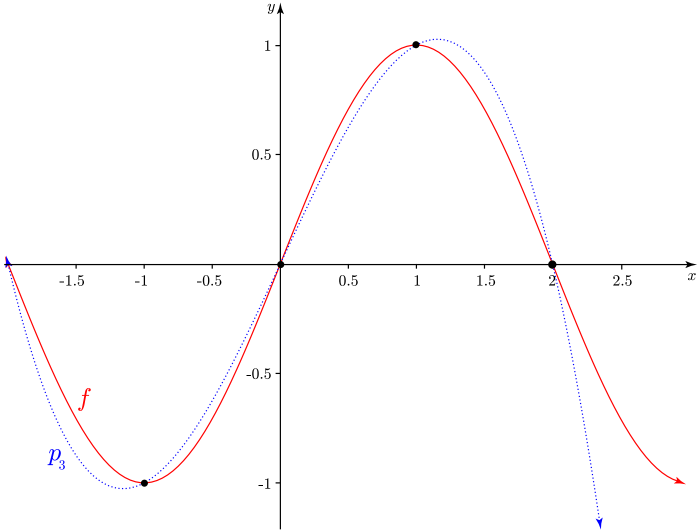
Ejemplo

Sea $f(x) := \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. El polinomio que interpola a f en los valores del conjunto $\{-1, 0, 1, 2\}$ viene dado por:

$$p_3(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{4x}{3}\,.$$

Determine una cota de error para este polinomio.

Gráfica de la situación



Solución

Usando el teorema anterior, se tiene que:

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{M_4}{4!} |\pi_4(x)| \qquad \forall\, x \in [-1, 2]\,,$$

Luego, nótese que:

- $f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
- $f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
- $f''(x) = -\frac{\pi^3}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
- $f^{(4)}(x) = \frac{\pi^4}{16}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

donde es claro que:

$$\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|\frac{\pi^4}{16}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| \leq \frac{\pi^4}{16}$$

por lo tanto $M_4 = \dfrac{\pi^4}{16}$.

Solución

Usando el teorema anterior, se tiene que:

$$|f(x) - p_3(x)| \;\leq\; \frac{M_4}{4!}\,|\pi_4(x)| \qquad \forall\; x \in [-1,2]\,,$$

Luego, nótese que:

- $f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
- $f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
- $f''(x) = -\frac{\pi^3}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
- $f^{(4)}(x) = \frac{\pi^4}{16}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

donde es claro que:

$$\left|f^{(4)}(x)\right| \;=\; \left|\frac{\pi^4}{16}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| \;\leq\; \frac{\pi^4}{16}$$

por lo tanto $M_4 = \dfrac{\pi^4}{16}$.

Solución

Usando el teorema anterior, se tiene que:

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{M_4}{4!} |\pi_4(x)| \qquad \forall\ x \in [-1, 2],$$

Luego, nótese que:

- $f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
- $f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
- $f''(x) = -\frac{\pi^3}{8} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
- $f^{(4)}(x) = \frac{\pi^4}{16} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

donde es claro que:

$$\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|\frac{\pi^4}{16} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| \leq \frac{\pi^4}{16}$$

por lo tanto $M_4 = \dfrac{\pi^4}{16}$.

Solución

De esta forma, se tiene que:

$$|f(x) - p_3(x)| \;\leq\; \frac{\pi^4}{384}\,|x(x+1)(x-1)(x-2)| \qquad \forall\, x \in [-1,2]$$

Adicionalmente, también se puede se puede probar que:

$$\max_{z\in[-1,2]} |x(x+1)(x-1)(x-2)| \;=\; 1$$

lo que permite afirmar que:

$$\begin{aligned} |f(x) - p_3(x)| \;&\leq\; \frac{\pi^4}{384} \qquad \forall\, x \in [-1,2] \\ &\approx\; 0.2536695079 \qquad \forall\, x \in [-1,2] \end{aligned}$$

Solución

De esta forma, se tiene que:

$$|f(x) - p_3(x)| \ \leq \ \frac{\pi^4}{384}\,|x(x+1)(x-1)(x-2)| \qquad \forall\ x \in [-1,2]$$

Adicionalmente, también se puede se puede probar que:

$$\max_{z\in[-1,2]} |x(x+1)(x-1)(x-2)| \ = \ 1$$

lo que permite afirmar que:

$$\begin{aligned} |f(x) - p_3(x)| \ &\leq \ \frac{\pi^4}{384} \qquad \forall\ x \in [-1,2] \\ &\approx \ 0.2536695079 \qquad \forall\ x \in [-1,2] \end{aligned}$$

Ejercicio

Ejercicio (para la casa)

Sea $f(x) := e^x$ en el intervalo $[1, 2]$. Determine el polinomio de interpolación de Lagrange con los puntos del conjunto $\{1, 1.5, 2\}$. Luego, encuentre una cota para el error.

Organización de la presentación

Introducción

El método de diferencias divididas construye un polinomio interpolador de manera alternativa al polinomio interpolante de Lagrange. El resultado es el mismo en virtud del teorema de existencia y unicidad, pero es escrito de diferente forma.

Así, dados $n+1$ puntos distintos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, se construye el polinomio interpolador de Newton p_n de grado $\leq n$, de la forma:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \\ &\quad + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

donde el objetivo es hallar: $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Introducción

El método de diferencias divididas construye un polinomio interpolador de manera alternativa al polinomio interpolante de Lagrange. El resultado es el mismo en virtud del teorema de existencia y unicidad, pero es escrito de diferente forma.

Así, dados $n+1$ puntos distintos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, se construye el polinomio interpolador de Newton p_n de grado $\leq n$, de la forma:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \\ &\quad + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

donde el objetivo es hallar: $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Introducción

La ventaja ahora es que se simplifican los cálculos del polinomio interpolador con ayuda de una tabla. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Calcule el polinomio de interpolación de menor grado que pasa por los puntos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, -1)$, utilizando el método de diferencias divididas.

Solución

Al tener 3 puntos, entonces el polinomio de interpolación pertenece a $\mathcal{P}_2$. Así, sea $p_2 \in \mathcal{P}_2$ el polinomio de interpolación que pasa por los puntos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, -1)$, entonces

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1).$$

Ahora, se deben calcular los valores: a_0, a_1 y a_2, para lo cual se utiliza la siguiente tabla:

Solución

Al tener 3 puntos, entonces el polinomio de interpolación pertenece a $\mathcal{P}_2$. Así, sea $p_2 \in \mathcal{P}_2$ el polinomio de interpolación que pasa por los puntos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, -1)$, entonces

$$p_2(x) \;=\; a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1).$$

Ahora, se deben calcular los valores: a_0, a_1 y a_2, para lo cual se utiliza la siguiente tabla:

Solución

Al tener 3 puntos, entonces el polinomio de interpolación pertenece a $\mathcal{P}_2$. Así, sea $p_2 \in \mathcal{P}_2$ el polinomio de interpolación que pasa por los puntos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, -1)$, entonces

$$p_2(x) \ = \ a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1).$$

Ahora, se deben calcular los valores: a_0, a_1 y a_2, para lo cual se utiliza la siguiente tabla:

Solución

x_i	y_i		
-2	0		
		$\dfrac{0-1}{-2-0} = \dfrac{1}{2}$	
0	1		$\dfrac{\frac{1}{2}-(-2)}{-2-1} = \dfrac{-5}{6}$
		$\dfrac{1-(-1)}{0-1} = -2$	
1	-1		

Por lo tanto, el polinomio de interpolación que pasa por los puntos $(-2,0)$, $(0,1)$ y $(1,-1)$ corresponde a

$$p_2(x) = 0 + \frac{1}{2}(x-(-2)) + \frac{-5}{6}(x-(-2))(x-0) = -\frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 1.$$

Solución

x_i	y_i		
-2	0		
		$\dfrac{0-1}{-2-0} = \dfrac{1}{2}$	
			$\dfrac{\frac{1}{2}-(-2)}{-2-1} = \dfrac{-5}{6}$
0	1		
		$\dfrac{1-(-1)}{0-1} = -2$	
1	-1		

Por lo tanto, el polinomio de interpolación que pasa por los puntos $(-2,0)$, $(0,1)$ y $(1,-1)$ corresponde a

$$p_2(x) \ = \ 0+\frac{1}{2}(x-(-2))+\frac{-5}{6}(x-(-2))(x-0) \ = \ -\frac{5}{6}x^2-\frac{7}{6}x+1.$$

Ejemplo

Halle el polinomio que interpola los puntos $(-1,-5)$, $(0,-1)$, $(1,7)$ y $(2,13)$. Utilice el método de diferencias divididas.

Solución

Como $n = 3$, el polinomio de Newton es de la forma:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

donde al reemplazar $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$, se sigue que:

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x^2 + x) + a_3(x^3 - x) .$$

Solución

x_i	y_i			
-1	-5			
		$\frac{-5+1}{-1-0} = 4$		
0	-1		$\frac{4-8}{-1-1} = 2$	
		$\frac{-1-7}{0-1} = 8$		$\frac{2-(-1)}{-1-2} = -1$
1	7		$\frac{8-6}{0-2} = -1$	
		$\frac{7-13}{1-2} = 6$		
2	13			

Por lo tanto, el polinomio de interpolación viene dado por:

$$p_3(x) = -5+4(x+1)+2(x^2+x)-(x^3-x) = -x^3+2x^2+7x-1.$$

Solución

x_i	y_i			
-1	-5			
		$\frac{-5+1}{-1-0} = 4$		
0	-1		$\frac{4-8}{-1-1} = 2$	
		$\frac{-1-7}{0-1} = 8$		$\frac{2-(-1)}{-1-2} = -1$
1	7		$\frac{8-6}{0-2} = -1$	
		$\frac{7-13}{1-2} = 6$		
2	13			

Por lo tanto, el polinomio de interpolación viene dado por:

$$p_3(x) \;=\; -5+4(x+1)+2(x^2+x)-(x^3-x) \;=\; -x^3+2x^2+7x-1.$$

Ejercicio

Ejercicio

Halle el polinomio que interpola los puntos $(-2,-3)$, $(-1,11)$, $(0,7)$, $(1,21)$ y $(2,89)$. Utilice el método de diferencias divididas.

Ejercicio

Ejercicio para la casa (II Examen, IIC-2017)

Una partícula se mueve dentro de un recipiente rectangular con grozor despreciable. Con el fin de obtener información de su posición se recolectan los siguientes datos:

Tiempo (seg) t	Posición horizontal $x(t)$	Posición vertical $y(t)$
0	4	1
1	2	1
2	0	7
3	4	25

Ejercicio

Ejercicio para la casa (continuación)

a) ¿Es posible construir un polinomio interpolador con los datos de x y y? Justifique su respuesta.

b) Utilizando los datos $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ y $t_3 = 3$, construya el polinomio interpolador, utilizando Lagrange, para la posición horizontal como función de t (es decir, $x(t)$). Simplifique al máximo su resultado.

c) Utilizando los datos $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ y $t_3 = 3$, construya el polinomio interpolador, utilizando diferencias divididas, para la posición vertical como función de t (es decir, $y(t)$). Simplifique al máximo su resultado.

d) Nótese que de las partes *b*) y *c*), se tiene un conjunto de ecuaciones paramétricas $(x(t), y(t))$ para la curva generada por el movimiento de la partícula. Determine el punto asociado al valor $t = -1$.

Organización de la presentación

Introducción

Sean x_0, x_1, ..., x_n números distintos. En algunas aplicaciones, además de la información relacionada con las imágenes de estos valores, también se cuenta con las imágenes de su primera derivada.

En otras palabras, se conocen los números reales y_0, y_1, ..., y_n y z_0, z_1, ..., z_n. Y con ello, el objetivo es hallar un polinomio p tal que:

$$p(x_i) = y_i \qquad \text{y} \qquad p'(x_i) = z_i$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Una solución para este problema la brinda la **interpolación de Hermite**, definida en esta sección.

Introducción

Sean x_0, x_1, …, x_n números distintos. En algunas aplicaciones, además de la información relacionada con las imágenes de estos valores, también se cuenta con las imágenes de su primera derivada.

En otras palabras, se conocen los números reales y_0, y_1, …, y_n y z_0, z_1, …, z_n. Y con ello, el objetivo es hallar un polinomio p tal que:

$$p(x_i) = y_i \qquad \text{y} \qquad p'(x_i) = z_i$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Una solución para este problema la brinda la **interpolación de Hermite**, definida en esta sección.

Introducción

Sean x_0, x_1, ..., x_n números distintos. En algunas aplicaciones, además de la información relacionada con las imágenes de estos valores, también se cuenta con las imágenes de su primera derivada.

En otras palabras, se conocen los números reales y_0, y_1, ..., y_n y z_0, z_1, ..., z_n. Y con ello, el objetivo es hallar un polinomio p tal que:

$$p(x_i) = y_i \qquad \text{y} \qquad p'(x_i) = z_i$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Una solución para este problema la brinda la **interpolación de Hermite**, definida en esta sección.

Existencia del polinomio interpolador

Teorema

Considere $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tal que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Además, sean $y_0, y_1, \ldots, y_n, z_0, z_1, \ldots, z_n$ números reales. Entonces, existe un único polinomio $p_{2n+1} \in \mathcal{P}_{2n+1}$, tal que:

$$p_{2n+1}(x_i) \;=\; y_i \qquad \text{y} \qquad p'_{2n+1}(x_i) \;=\; z_i \qquad \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

Polinomio de interpolación de Hermite

Definición

Considere $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tal que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Más aún, sean $y_0, y_1, \ldots, y_n, z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$. El **polinomio de interpolación de Hermite**, se define por:

$$p_{2n+1}(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} \left\{ H_k(x) y_k \,+\, K_k(x) z_k \right\} \;\in\; \mathcal{P}_{2n+1}\,,$$

donde $H_k(x)$ y $K_k(x)$ son polinomios de grado $2n+1$, definidos por:

$$\begin{aligned} H_k(x) &= [L_k(x)]^2 \left(1 - 2L_k'(x_k)(x - x_k)\right), \\ K_k(x) &= [L_k(x)]^2 \,(x - x_k)\,. \end{aligned}$$

Observaciones

- Los polinomios $H_k(x)$ satisfacen que:

$$H_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} \qquad \text{y} \qquad H_k'(x_i) = 0,$$

mientras que los polinomios $K_k(x)$ cumplen que:

$$K_k(x_i) = 0 \qquad \text{y} \qquad K_k'(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Esto permite que el polinomio de interpolador de Hermite, cumpla que $p_{2n+1}(x_i) = y_i$ y $p_{2n+1}'(x_i) = z_i$.

Observaciones

- Los polinomios $H_k(x)$ satisfacen que:

$$H_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} \qquad \text{y} \qquad H'_k(x_i) = 0,$$

mientras que los polinomios $K_k(x)$ cumplen que:

$$K_k(x_i) = 0 \qquad \text{y} \qquad K'_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Esto permite que el polinomio de interpolador de Hermite, cumpla que $p_{2n+1}(x_i) = y_i$ y $p'_{2n+1}(x_i) = z_i$.

Observaciones

- Al igual que Lagrange interpola los puntos dados. Observe que no se contradice la unicidad, ya que el polinomio de Hermite no es de grado $\leq n$.

- Por otro lado, bajo algunas particularidades, es posible que el polinomio de Lagrange y de Hermite den el mismo resultado.

Observaciones

- Al igual que Lagrange interpola los puntos dados. Observe que no se contradice la unicidad, ya que el polinomio de Hermite no es de grado $\leq n$.

- Por otro lado, bajo algunas particularidades, es posible que el polinomio de Lagrange y de Hermite den el mismo resultado.

Ejemplo

Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, para la cual se construye la siguiente tabla de datos:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	-1	-2	18
1	0	2	-1
2	1	6	18

a) Determine el polinomio de interpolación de Hermite, utilizando los datos de la tabla anterior.

b) Encuentre una aproximación para $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Solución

$a)$ Calculemos primero los polinomios de Lagrange:

- $$L_0(x) = \frac{x-0}{-1-0}\cdot\frac{x-1}{-1-1} = \frac{x(x-1)}{(-1)\cdot(-2)} = \frac{x^2-x}{2}$$
- $$L_1(x) = \frac{x-(-1)}{0-(-1)}\cdot\frac{x-1}{0-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{1\cdot(-1)} = 1-x^2$$
- $$L_2(x) = \frac{x-(-1)}{1-(-1)}\cdot\frac{x-0}{1-0} = \frac{(x+1)x}{2\cdot 1} = \frac{x^2+x}{2}$$

Solución

$a)$ Calculemos primero los polinomios de Lagrange:

- $$L_0(x) = \frac{x-0}{-1-0}\cdot\frac{x-1}{-1-1} = \frac{x(x-1)}{(-1)\cdot(-2)} = \frac{x^2-x}{2}$$
- $$L_1(x) = \frac{x-(-1)}{0-(-1)}\cdot\frac{x-1}{0-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{1\cdot(-1)} = 1-x^2$$
- $$L_2(x) = \frac{x-(-1)}{1-(-1)}\cdot\frac{x-0}{1-0} = \frac{(x+1)x}{2\cdot 1} = \frac{x^2+x}{2}$$

Solución

$a)$ Calculemos primero los polinomios de Lagrange:

- $L_0(x) \;=\; \dfrac{x-0}{-1-0}\cdot\dfrac{x-1}{-1-1} \;=\; \dfrac{x(x-1)}{(-1)\cdot(-2)} \;=\; \dfrac{x^2-x}{2}$

- $L_1(x) \;=\; \dfrac{x-(-1)}{0-(-1)}\cdot\dfrac{x-1}{0-1} \;=\; \dfrac{(x+1)(x-1)}{1\cdot(-1)} \;=\; 1-x^2$

- $L_2(x) \;=\; \dfrac{x-(-1)}{1-(-1)}\cdot\dfrac{x-0}{1-0} \;=\; \dfrac{(x+1)x}{2\cdot 1} \;=\; \dfrac{x^2+x}{2}$

Solución

Ahora, observe que:

- $L_0'(x) = \left[\dfrac{x^2 - x}{2}\right]' = x - \dfrac{1}{2} \Rightarrow L_0'(-1) = -\dfrac{3}{2}$
- $L_1'(x) = \left[1 - x^2\right]' = -2x \Rightarrow L_1'(0) = 0$
- $L_2'(x) = \left[\dfrac{x^2 + x}{2}\right]' = x + \dfrac{1}{2} \Rightarrow L_2'(1) = \dfrac{3}{2}$

Solución

Ahora, observe que:

- $L_0'(x) = \left[\dfrac{x^2 - x}{2}\right]' = x - \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L_0'(-1) = -\dfrac{3}{2}$
- $L_1'(x) = \left[1 - x^2\right]' = -2x \quad \Rightarrow \quad L_1'(0) = 0$
- $L_2'(x) = \left[\dfrac{x^2 + x}{2}\right]' = x + \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L_2'(1) = \dfrac{3}{2}$

Solución

Ahora, observe que:

- $L_0'(x) = \left[\dfrac{x^2 - x}{2}\right]' = x - \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L_0'(-1) = -\dfrac{3}{2}$
- $L_1'(x) = \left[1 - x^2\right]' = -2x \quad \Rightarrow \quad L_1'(0) = 0$
- $L_2'(x) = \left[\dfrac{x^2 + x}{2}\right]' = x + \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L_2'(1) = \dfrac{3}{2}$

Solución

Ahora, observe que:

- $L_0'(x) = \left[\dfrac{x^2 - x}{2}\right]' = x - \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L_0'(-1) = -\dfrac{3}{2}$
- $L_1'(x) = [1 - x^2]' = -2x \quad \Rightarrow \quad L_1'(0) = 0$
- $L_2'(x) = \left[\dfrac{x^2 + x}{2}\right]' = x + \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L_2'(1) = \dfrac{3}{2}$

Solución

Además, observe que:

- $[L_0(x)]^2 = \dfrac{(x^2-x)^2}{4} = \dfrac{x^4-2x^3+x^2}{4}$
- $[L_1(x)]^2 = (1-x^2)^2 = 1-2x^2+x^4$
- $[L_2(x)]^2 = \dfrac{(x^2+x)^2}{4} = \dfrac{x^4+2x^3+x^2}{4}$

Solución

Seguidamente, calculamos H_0, H_1, H_2, K_0, K_1 y K_2, tal y como sigue:

- $$\begin{aligned} H_0(x) &= [L_0(x)]^2\big(1 - 2L_0'(-1)(x-(-1))\big) \\ &= \frac{(x^4-2x^3+x^2)(3x+4)}{4} \\ &= \frac{3x^5-2x^4-5x^3+4x^2}{4} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} H_1(x) &= [L_1(x)]^2\big(1 - 2L_1'(0)(x-0)\big) \\ &= 1-2x^2+x^4 \end{aligned}$$

Solución

Seguidamente, calculamos H_0, H_1, H_2, K_0, K_1 y K_2, tal y como sigue:

- $$\begin{aligned} H_0(x) &= [L_0(x)]^2\big(1 - 2L_0'(-1)(x-(-1))\big) \\ &= \frac{(x^4 - 2x^3 + x^2)(3x+4)}{4} \\ &= \frac{3x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 4x^2}{4} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} H_1(x) &= [L_1(x)]^2\big(1 - 2L_1'(0)(x-0)\big) \\ &= 1 - 2x^2 + x^4 \end{aligned}$$

Solución

Seguidamente, calculamos H_0, H_1, H_2, K_0, K_1 y K_2, tal y como sigue:

- $$\begin{aligned} H_0(x) &= [L_0(x)]^2\big(1 - 2L_0'(-1)(x-(-1))\big) \\ &= \frac{(x^4 - 2x^3 + x^2)(3x+4)}{4} \\ &= \frac{3x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 4x^2}{4} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} H_1(x) &= [L_1(x)]^2\big(1 - 2L_1'(0)(x-0)\big) \\ &= 1 - 2x^2 + x^4 \end{aligned}$$

Solución

Seguidamente, calculamos H_0, H_1, H_2, K_0, K_1 y K_2, tal y como sigue:

- $$\begin{aligned} H_0(x) &= [L_0(x)]^2\big(1 - 2L_0'(-1)(x-(-1))\big) \\ &= \frac{(x^4 - 2x^3 + x^2)(3x+4)}{4} \\ &= \frac{3x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 4x^2}{4} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} H_1(x) &= [L_1(x)]^2\big(1 - 2L_1'(0)(x-0)\big) \\ &= 1 - 2x^2 + x^4 \end{aligned}$$

Solución

Seguidamente, calculamos H_0, H_1, H_2, K_0, K_1 y K_2, tal y como sigue:

- $$\begin{aligned} H_0(x) &= [L_0(x)]^2\big(1 - 2L_0'(-1)(x-(-1))\big) \\ &= \frac{(x^4 - 2x^3 + x^2)(3x+4)}{4} \\ &= \frac{3x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 4x^2}{4} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} H_1(x) &= [L_1(x)]^2\big(1 - 2L_1'(0)(x-0)\big) \\ &= 1 - 2x^2 + x^4 \end{aligned}$$

Solución

- $$H_2(x) = [L_2(x)]^2\big(1 - 2L_2'(1)(x-1)\big)$$
  $$= \frac{(x^4 + 2x^3 + x^2)(-3x+4)}{4}$$
  $$= \frac{-3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 4x^2}{4}$$

- $$K_0(x) = [L_0(x)]^2(x - (-1))$$
  $$= \frac{(x^4 - 2x^3 + x^2)(x+1)}{4}$$
  $$= \frac{x^5 - x^4 - x^3 + x^2}{4}$$

Solución

- $$\begin{aligned} H_2(x) &= [L_2(x)]^2\big(1 - 2L_2'(1)(x-1)\big) \\ &= \frac{(x^4+2x^3+x^2)(-3x+4)}{4} \\ &= \frac{-3x^5-2x^4+5x^3+4x^2}{4} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} K_0(x) &= [L_0(x)]^2(x-(-1)) \\ &= \frac{(x^4-2x^3+x^2)(x+1)}{4} \\ &= \frac{x^5-x^4-x^3+x^2}{4} \end{aligned}$$

Solución

- $$\begin{aligned} H_2(x) &= [L_2(x)]^2\big(1 - 2L_2'(1)(x-1)\big) \\ &= \frac{(x^4+2x^3+x^2)(-3x+4)}{4} \\ &= \frac{-3x^5-2x^4+5x^3+4x^2}{4} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} K_0(x) &= [L_0(x)]^2(x-(-1)) \\ &= \frac{(x^4-2x^3+x^2)(x+1)}{4} \\ &= \frac{x^5-x^4-x^3+x^2}{4} \end{aligned}$$

Solución

- $$\begin{aligned} H_2(x) &= [L_2(x)]^2\big(1 - 2L_2'(1)(x-1)\big) \\ &= \frac{(x^4 + 2x^3 + x^2)(-3x+4)}{4} \\ &= \frac{-3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 4x^2}{4} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} K_0(x) &= [L_0(x)]^2(x - (-1)) \\ &= \frac{(x^4 - 2x^3 + x^2)(x+1)}{4} \\ &= \frac{x^5 - x^4 - x^3 + x^2}{4} \end{aligned}$$

Solución

- $$\begin{aligned} H_2(x) &= [L_2(x)]^2\big(1-2L_2'(1)(x-1)\big) \\ &= \frac{(x^4+2x^3+x^2)(-3x+4)}{4} \\ &= \frac{-3x^5-2x^4+5x^3+4x^2}{4} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} K_0(x) &= [L_0(x)]^2(x-(-1)) \\ &= \frac{(x^4-2x^3+x^2)(x+1)}{4} \\ &= \frac{x^5-x^4-x^3+x^2}{4} \end{aligned}$$

Solución

- $$\begin{aligned} H_2(x) &= [L_2(x)]^2\big(1 - 2L_2'(1)(x-1)\big) \\ &= \frac{(x^4 + 2x^3 + x^2)(-3x+4)}{4} \\ &= \frac{-3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 4x^2}{4} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} K_0(x) &= [L_0(x)]^2(x - (-1)) \\ &= \frac{(x^4 - 2x^3 + x^2)(x+1)}{4} \\ &= \frac{x^5 - x^4 - x^3 + x^2}{4} \end{aligned}$$

Solución

- $K_1(x) = [L_1(x)]^2(x-0)$
  $= (1-2x^2+x^4)x$
  $= x^5-2x^3+x$

- $K_2(x) = [L_2(x)]^2(x-1)$
  $= \dfrac{(x^4+2x^3+x^2)(x-1)}{4}$
  $= \dfrac{x^5+x^4-x^3-x^2}{4}$

Solución

- $K_1(x) = [L_1(x)]^2(x-0)$
  $= (1-2x^2+x^4)x$
  $= x^5 - 2x^3 + x$

- $K_2(x) = [L_2(x)]^2(x-1)$
  $= \dfrac{(x^4+2x^3+x^2)(x-1)}{4}$
  $= \dfrac{x^5+x^4-x^3-x^2}{4}$

Solución

- $$\begin{aligned} K_1(x) &= [L_1(x)]^2(x-0) \\ &= (1-2x^2+x^4)x \\ &= x^5-2x^3+x \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} K_2(x) &= [L_2(x)]^2(x-1) \\ &= \frac{(x^4+2x^3+x^2)(x-1)}{4} \\ &= \frac{x^5+x^4-x^3-x^2}{4} \end{aligned}$$

Solución

- $$\begin{aligned} K_1(x) &= [L_1(x)]^2(x-0) \\ &= (1-2x^2+x^4)x \\ &= x^5-2x^3+x \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} K_2(x) &= [L_2(x)]^2(x-1) \\ &= \frac{(x^4+2x^3+x^2)(x-1)}{4} \\ &= \frac{x^5+x^4-x^3-x^2}{4} \end{aligned}$$

Solución

- $$\begin{aligned} K_1(x) &= [L_1(x)]^2(x-0) \\ &= (1-2x^2+x^4)x \\ &= x^5-2x^3+x \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} K_2(x) &= [L_2(x)]^2(x-1) \\ &= \frac{(x^4+2x^3+x^2)(x-1)}{4} \\ &= \frac{x^5+x^4-x^3-x^2}{4} \end{aligned}$$

Solución

- $$\begin{aligned} K_1(x) &= [L_1(x)]^2(x-0) \\ &= (1-2x^2+x^4)x \\ &= x^5-2x^3+x \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} K_2(x) &= [L_2(x)]^2(x-1) \\ &= \frac{(x^4+2x^3+x^2)(x-1)}{4} \\ &= \frac{x^5+x^4-x^3-x^2}{4} \end{aligned}$$

Solución

Por lo tanto, el polinomio de interpolación de Hermite es:

$$
\begin{aligned}
p_5(x) &= -2H_0(x) + 18K_0(x) + 2H_1(x) - K_1(x) \\
&\quad + 6H_2(x) + 18K_2(x) \\
&= \frac{-3x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 4x^2}{2} + \frac{9x^5 - 9x^4 - 9x^3 + 9x^2}{2} \\
&\quad + \; 2 - 4x^2 + 2x^4 - x^5 + 2x^3 - x \\
&= \left(-\tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{2} - 1 - \tfrac{9}{2} + \tfrac{9}{2}\right) x^5 + \left(1 - \tfrac{9}{2} + 2 - 3 + \tfrac{9}{2}\right) x^4 \\
&\quad + \; \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{9}{2} + 2 + \tfrac{15}{2} - \tfrac{9}{2}\right) x^3 + \left(-2 + \tfrac{9}{2} - 4 + 6 - \tfrac{9}{2}\right) x^2 \\
&\quad - \; x + 2 \\
&= 2x^5 + 3x^3 - x + 2
\end{aligned}
$$

Solución

Por lo tanto, el polinomio de interpolación de Hermite es:

$$
\begin{aligned}
p_5(x) &= -2H_0(x) + 18K_0(x) + 2H_1(x) - K_1(x) \\
&\quad + 6H_2(x) + 18K_2(x) \\
&= \frac{-3x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 4x^2}{2} + \frac{9x^5 - 9x^4 - 9x^3 + 9x^2}{2} \\
&\quad + \; 2 - 4x^2 + 2x^4 - x^5 + 2x^3 - x \\
&= \left(-\tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{2} - 1 - \tfrac{9}{2} + \tfrac{9}{2}\right) x^5 + \left(1 - \tfrac{9}{2} + 2 - 3 + \tfrac{9}{2}\right) x^4 \\
&\quad + \; \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{9}{2} + 2 + \tfrac{15}{2} - \tfrac{9}{2}\right) x^3 + \left(-2 + \tfrac{9}{2} - 4 + 6 - \tfrac{9}{2}\right) x^2 \\
&\quad - \; x + 2 \\
&= \; 2x^5 + 3x^3 - x + 2
\end{aligned}
$$

Solución

Por lo tanto, el polinomio de interpolación de Hermite es:

$$
\begin{aligned}
p_5(x) &= -2H_0(x) + 18K_0(x) + 2H_1(x) - K_1(x) \\
&\quad + 6H_2(x) + 18K_2(x) \\
&= \frac{-3x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 4x^2}{2} + \frac{9x^5 - 9x^4 - 9x^3 + 9x^2}{2} \\
&\quad + 2 - 4x^2 + 2x^4 - x^5 + 2x^3 - x \\
&= \left(-\tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{2} - 1 - \tfrac{9}{2} + \tfrac{9}{2}\right) x^5 + \left(1 - \tfrac{9}{2} + 2 - 3 + \tfrac{9}{2}\right) x^4 \\
&\quad + \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{9}{2} + 2 + \tfrac{15}{2} - \tfrac{9}{2}\right) x^3 + \left(-2 + \tfrac{9}{2} - 4 + 6 - \tfrac{9}{2}\right) x^2 \\
&\quad - x + 2 \\
&= 2x^5 + 3x^3 - x + 2
\end{aligned}
$$

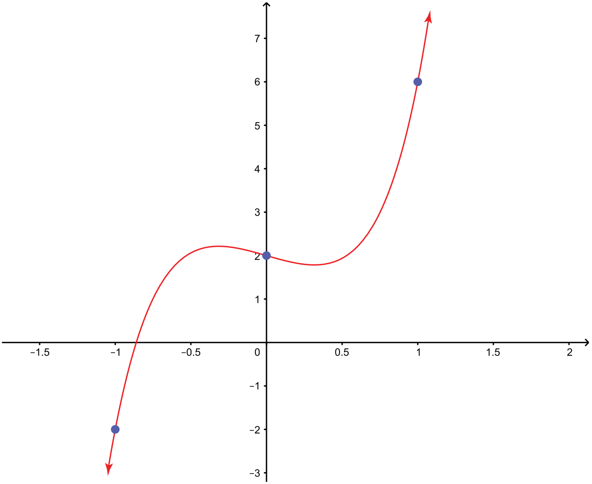
Solución

Por lo tanto, el polinomio de interpolación de Hermite es:

$$
\begin{aligned}
p_5(x) &= -2H_0(x) + 18K_0(x) + 2H_1(x) - K_1(x) \\
&\quad + 6H_2(x) + 18K_2(x) \\
&= \frac{-3x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 4x^2}{2} + \frac{9x^5 - 9x^4 - 9x^3 + 9x^2}{2} \\
&\quad + \; 2 - 4x^2 + 2x^4 - x^5 + 2x^3 - x \\
&= \left(-\tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{2} - 1 - \tfrac{9}{2} + \tfrac{9}{2}\right) x^5 + \left(1 - \tfrac{9}{2} + 2 - 3 + \tfrac{9}{2}\right) x^4 \\
&\quad + \; \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{9}{2} + 2 + \tfrac{15}{2} - \tfrac{9}{2}\right) x^3 + \left(-2 + \tfrac{9}{2} - 4 + 6 - \tfrac{9}{2}\right) x^2 \\
&\quad - \; x + 2 \\
&= 2x^5 + 3x^3 - x + 2
\end{aligned}
$$

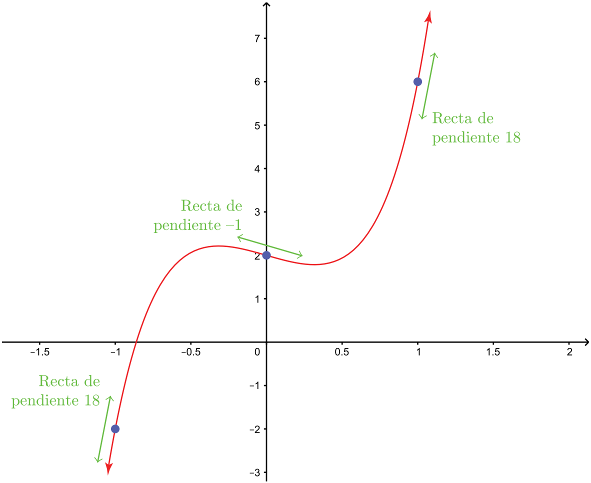
Solución

En resumen: $p_5(x) = 2x^5 + 3x^3 - x + 2.$



Solución

En resumen: $p_5(x) = 2x^5 + 3x^3 - x + 2.$



Solución

$b)$ Finalmente, se sigue que:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx p_5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{31}{16}.$$

Solución

b) Finalmente, se sigue que:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx p_5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{31}{16}.$$

Solución

b) Finalmente, se sigue que:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx p_5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{31}{16}\,.$$

Ejercicio

Ejercicio

Construya el polinomio de interpolación de Hermite, que cumpla que $p_3(0) = 0$, $p_3(1) = 1$, $p_3'(0) = 1$ y $p_3'(1) = 0$.

Estimado de error

Teorema

Sea f una función continua sobre $[a,b]$, tal que las derivadas de f de orden $\leq 2n+2$ existen y son continuas en $[a,b]$. Si $p_{2n+1} \in \mathcal{P}_{2n+1}$ es el polinomio que interpola a la función f en los $n+1$ valores distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, entonces para todo $x \in [a,b]$, existe $\xi = \xi(x) \in\,]a,b[$, tal que:

$$f(x) \;=\; p_{2n+1}(x) \;+\; \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\,[\pi_{n+1}(x)]^2,$$

donde

$$\pi_{n+1}(x) \;:=\; \prod_{j=0}^{n}(x-x_j) \;=\; (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\,.$$

Estimado de error

Teorema (continuación)

Además, para $M_{2n+2} := \max_{z \in [a,b]} \left| f^{(2n+2)}(z) \right|$, se cumple que:

$$|f(x) - p_{2n+1}(x)| \;\leq\; \frac{M_{2n+2}}{(2n+2)!} \, [\pi_{n+1}(x)]^2 \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Ejemplo

Considere $f(x) := \ln(x)$ y $p_3 \in \mathcal{P}_3$ el polinomio de interpolación de Hermite para los nodos $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$. Determine una cota de error del polinomio p_3.

Solución

El estimado de error del polinomio de interpolación de Hermite está dado por:

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{M_4}{4!}[\pi_4(x)]^2 = \frac{M_4}{24}(x-1)^2(x-2)^2.$$

Luego, observe que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \\ f''(x) &= \frac{-1}{x^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{-6}{x^4} \end{aligned}$$

Solución

El estimado de error del polinomio de interpolación de Hermite está dado por:

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{M_4}{4!}[\pi_4(x)]^2 = \frac{M_4}{24}(x-1)^2(x-2)^2.$$

Luego, observe que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \\ f''(x) &= \frac{-1}{x^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{-6}{x^4} \end{aligned}$$

Solución

Con ello, se sigue que:

$$M_4 = \max_{x\in[1,2]} \left| f^{(4)}(x) \right| = \max_{x\in[1,2]} \left\{ \frac{6}{x^4} \right\} = \frac{6}{1^4} = 6\,,$$

mientras que:

$$\begin{aligned} [\pi_4(x)]^2 &= (x^2-2x+1)(x^2-4x+4) \\ &= x^4-6x^3+13x^2-12x+4 \end{aligned}$$

Por otro lado, observe que:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[[\pi_4(x)]^2\right]' \\ &= 4x^3-18x^2+26x-12 \\ &= 2(x-1)(2x-3)(x-2) \end{aligned}$$

lo que establece que $x=1$, $x=\frac{3}{2}$ y $x=2$ son puntos críticos de $[\pi_4(x)]^2$.

Solución

Con ello, se sigue que:

$$M_4 = \max_{x\in[1,2]} \left| f^{(4)}(x) \right| = \max_{x\in[1,2]} \left\{ \frac{6}{x^4} \right\} = \frac{6}{1^4} = 6\,,$$

mientras que:

$$\begin{aligned} [\pi_4(x)]^2 &= (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4x + 4) \\ &= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \end{aligned}$$

Por otro lado, observe que:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[[\pi_4(x)]^2 \right]' \\ &= 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12 \\ &= 2(x-1)(2x-3)(x-2) \end{aligned}$$

lo que establece que $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ y $x = 2$ son puntos críticos de $[\pi_4(x)]^2$.

Solución

Con ello, se sigue que:

$$M_4 = \max_{x\in[1,2]} \left| f^{(4)}(x) \right| = \max_{x\in[1,2]} \left\{ \frac{6}{x^4} \right\} = \frac{6}{1^4} = 6\,,$$

mientras que:

$$\begin{aligned} [\pi_4(x)]^2 &= (x^2-2x+1)(x^2-4x+4) \\ &= x^4-6x^3+13x^2-12x+4 \end{aligned}$$

Por otro lado, observe que:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[[\pi_4(x)]^2\right]' \\ &= 4x^3-18x^2+26x-12 \\ &= 2(x-1)(2x-3)(x-2) \end{aligned}$$

lo que establece que $x=1$, $x=\frac{3}{2}$ y $x=2$ son puntos críticos de $[\pi_4(x)]^2$.

Solución

Así, como:

$$[\pi_4(1)]^2 = 0\,, \qquad [\pi_4(1.5)]^2 = \frac{1}{16} \qquad \text{y} \qquad [\pi_4(2)]^2 = 0$$

se deduce que:

$$[\pi_4(x)]^2 \leq \frac{1}{16} \qquad \forall\, x \in [1,2]\,.$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{6}{24} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{64} \qquad \forall\, x \in [1,2]\,.$$

Solución

Así, como:

$$[\pi_4(1)]^2 \;=\; 0\,, \qquad [\pi_4(1.5)]^2 \;=\; \frac{1}{16} \qquad \text{y} \qquad [\pi_4(2)]^2 \;=\; 0$$

se deduce que:

$$[\pi_4(x)]^2 \;\leq\; \frac{1}{16} \qquad \forall\, x \in [1,2]\,.$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$|f(x) - p_3(x)| \;\leq\; \frac{6}{24} \cdot \frac{1}{16} \;=\; \frac{1}{64} \qquad \forall\, x \in [1,2]\,.$$

Ejercicio

Ejercicio (para la casa)

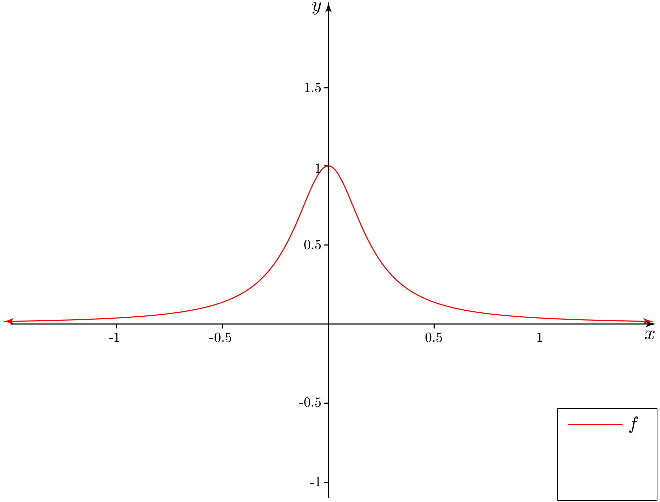
Sea $f(x) := e^x$ en el intervalo $[1, 2]$. Determine el polinomio de interpolación de Hermite con los puntos del conjunto $\{1, 1.5, 2\}$. Luego, encuentre una cota para el error.

Organización de la presentación

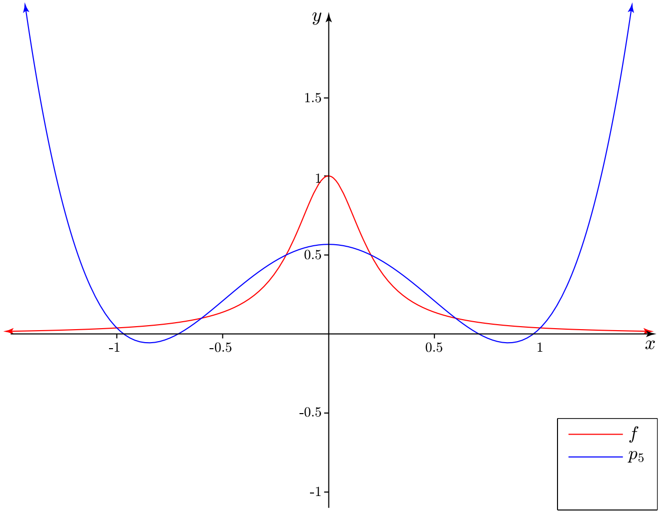
Introducción: Fenómeno de Runge

Cuando se tiene una gran cantidad de datos, los grados en los polinomios de interpolación de Lagrange y Hermite son bastante altos, lo que produce muchas oscilaciones. Esto a su vez, hace que los polinomios interpolantes no se asemejen a la función de origen (de haber) que interpolan.

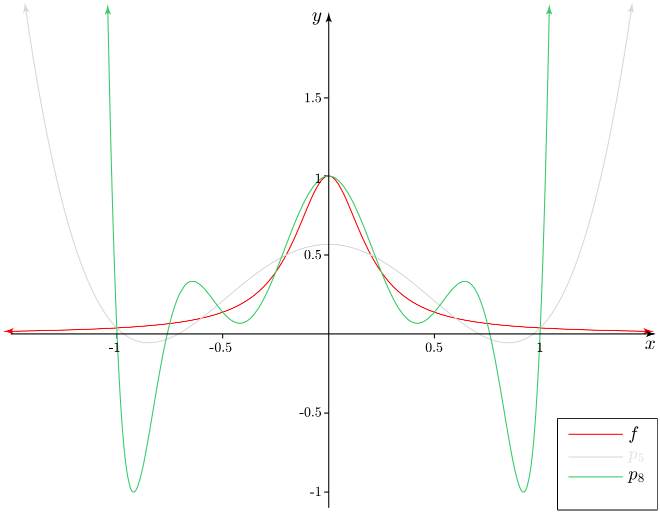
Introducción: Fenómeno de Runge



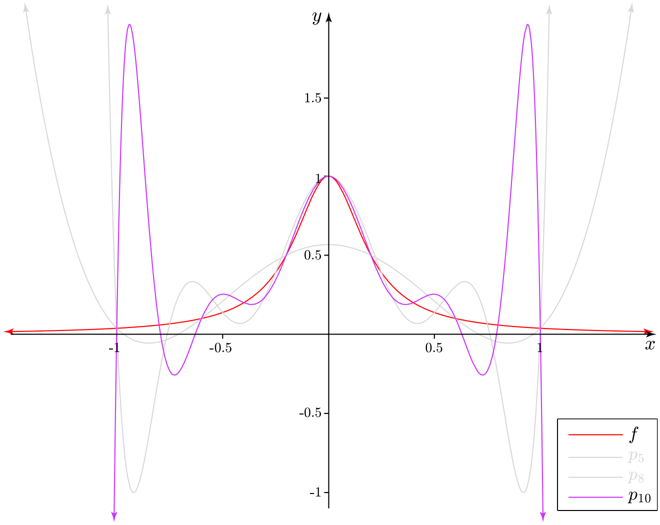
Introducción: Fenómeno de Runge



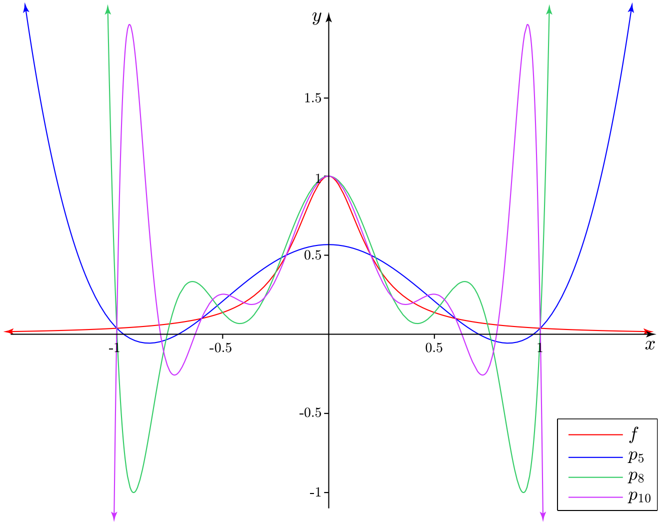
Introducción: Fenómeno de Runge



Introducción: Fenómeno de Runge



Introducción: Fenómeno de Runge



Introducción: Fenómeno de Runge

Para evitar este problema se busca usar grado polinomial bajo (grado 1, 2 o 3). Por ello, se interpolan los datos, no con un polinomio, sino más bien con una **función a trozos**, donde cada trozo sea un polinomio de grado bajo.

A esta técnica se le conoce como **interpolación por trazadores** (spline).

Introducción: Fenómeno de Runge

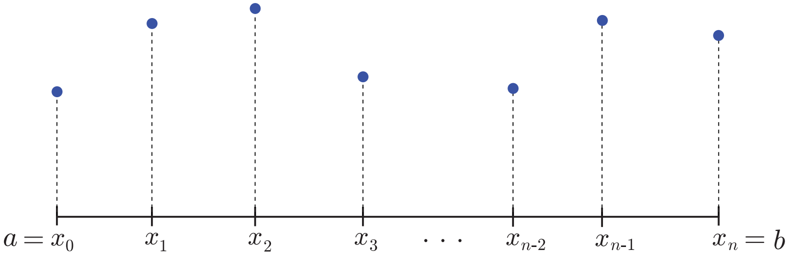
Para evitar este problema se busca usar grado polinomial bajo (grado 1, 2 o 3). Por ello, se interpolan los datos, no con un polinomio, sino más bien con una **función a trozos**, donde cada trozo sea un polinomio de grado bajo.

A esta técnica se le conoce como **interpolación por trazadores** (spline).

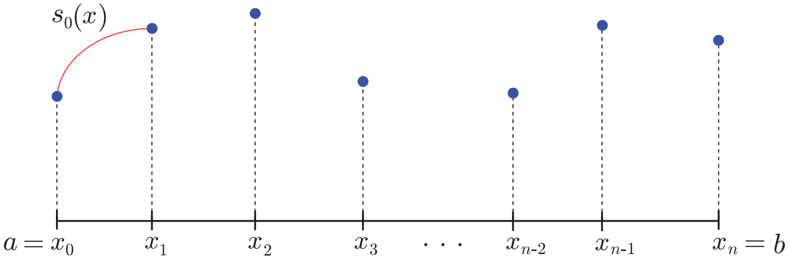
Dados $n+1$ puntos distintos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$; se buscan n polinomios $s_i \in \mathcal{P}_3$, con $i = 0, 1, \ldots, n-1$, los cuales interpolan los puntos dados mediante una función a trozos.

Interpolación por trazadores cúbicos

Dados $n+1$ puntos distintos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$; se buscan n polinomios $s_i \in \mathcal{P}_3$, con $i = 0, 1, \ldots, n-1$, los cuales interpolan los puntos dados mediante una función a trozos.

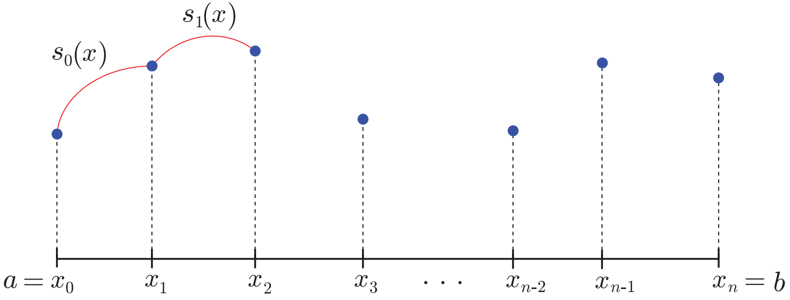


Dados $n+1$ puntos distintos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$; se buscan n polinomios $s_i \in \mathcal{P}_3$, con $i = 0, 1, \ldots, n-1$, los cuales interpolan los puntos dados mediante una función a trozos.



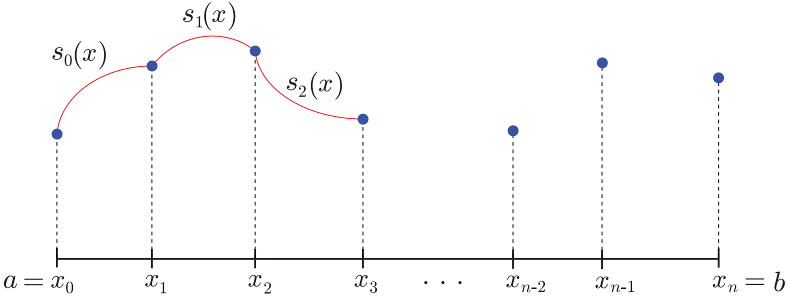
Interpolación por trazadores cúbicos

Dados $n+1$ puntos distintos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$; se buscan n polinomios $s_i \in \mathcal{P}_3$, con $i = 0, 1, \ldots, n-1$, los cuales interpolan los puntos dados mediante una función a trozos.



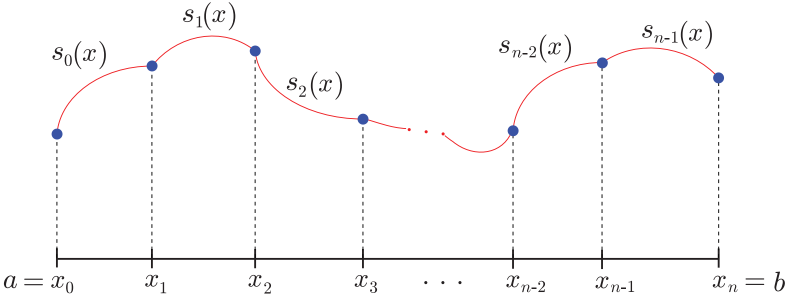
Interpolación por trazadores cúbicos

Dados $n+1$ puntos distintos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$; se buscan n polinomios $s_i \in \mathcal{P}_3$, con $i = 0, 1, \ldots, n-1$, los cuales interpolan los puntos dados mediante una función a trozos.



Interpolación por trazadores cúbicos

Dados $n+1$ puntos distintos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$; se buscan n polinomios $s_i \in \mathcal{P}_3$, con $i = 0, 1, \ldots, n-1$, los cuales interpolan los puntos dados mediante una función a trozos.



Interpolación por trazadores cúbicos

Entonces, se construye el trazador cúbico:

$$S(x) := \begin{cases} s_0(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1[\\ s_1(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2[\\ s_2(x) & \text{si } x \in [x_2, x_3[\\ \vdots & \vdots \\ s_{n-2}(x) & \text{si } x \in [x_{n-2}, x_{n-1}[\\ s_{n-1}(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Interpolación por trazadores cúbicos

Definición

Considere los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots, (x_n, y_n)$; tales que $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Un **trazador cúbico** corresponde a una función a trozos $S(x)$, tal que en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $s_i := S|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3$, el cual cumple que:

1. (Es interpolante)
$$S(x_i) = y_i \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n$$
2. (Continuidad de S)
$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$
3. (Continuidad de S')
$$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$
4. (Continuidad de S'')
$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$

Interpolación por trazadores cúbicos

Definición

Considere los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots, (x_n, y_n)$; tales que $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Un **trazador cúbico** corresponde a una función a trozos $S(x)$, tal que en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $s_i := S|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3$, el cual cumple que:

1. (Es interpolante)
$$S(x_i) = y_i \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n$$
2. (Continuidad de S)
$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$
3. (Continuidad de S')
$$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$
4. (Continuidad de S'')
$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$

Definición

Considere los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots, (x_n, y_n)$; tales que $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Un **trazador cúbico** corresponde a una función a trozos $S(x)$, tal que en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $s_i := S|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3$, el cual cumple que:

1. (Es interpolante)
$$S(x_i) \;=\; y_i \qquad \forall\, i = 0, 1, \dots, n$$
2. (Continuidad de S)
$$s_i(x_{i+1}) \;=\; s_{i+1}(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \dots, n-2$$
3. (Continuidad de S')
$$s_i'(x_{i+1}) \;=\; s_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \dots, n-2$$
4. (Continuidad de S'')
$$s_i''(x_{i+1}) \;=\; s_{i+1}''(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \dots, n-2$$

Definición

Considere los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots, (x_n, y_n)$; tales que $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Un **trazador cúbico** corresponde a una función a trozos $S(x)$, tal que en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $s_i := S|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3$, el cual cumple que:

1. (Es interpolante)
$$S(x_i) \;=\; y_i \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n$$
2. (Continuidad de S)
$$s_i(x_{i+1}) \;=\; s_{i+1}(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$
3. (Continuidad de S')
$$s_i'(x_{i+1}) \;=\; s_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$
4. (Continuidad de S'')
$$s_i''(x_{i+1}) \;=\; s_{i+1}''(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$

Interpolación por trazadores cúbicos

Definición

Considere los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots, (x_n, y_n)$; tales que $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Un **trazador cúbico** corresponde a una función a trozos $S(x)$, tal que en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $s_i := S|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3$, el cual cumple que:

1. (Es interpolante)
$$S(x_i) = y_i \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n$$
2. (Continuidad de S)
$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$
3. (Continuidad de S')
$$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$
4. (Continuidad de S'')
$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$

Definición

Considere los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots, (x_n, y_n)$; tales que $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Un **trazador cúbico** corresponde a una función a trozos $S(x)$, tal que en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $s_i := S|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3$, el cual cumple que:

1. (Es interpolante) $(n+1 \text{ ecuaciones})$
$$S(x_i) = y_i \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n$$
2. (Continuidad de S) $(n-1 \text{ ecuaciones})$
$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$
3. (Continuidad de S') $(n-1 \text{ ecuaciones})$
$$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$
4. (Continuidad de S'') $(n-1 \text{ ecuaciones})$
$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-2$$

Observación

Nótese que la definición anterior contiene:

$$(n+1) + 3(n-1) \; = \; 4n - 2 \text{ ecuaciones}$$

Sin embargo, se deben encontrar n polinomios de grado ≤ 3, lo que corresponden a $4n$ incógnitas. En otras palabras, es necesario agregar dos ecuaciones adicionales, de entre las más comunes están:

- **Frontera libre o natural:** $S''(x_0) = S''(x_n) = 0.$
- **Frontera sujeta:** $S'(x_0) = z_0$ y $S'(x_n) = z_n$.

Observación

Nótese que la definición anterior contiene:

$$(n+1) + 3(n-1) \; = \; 4n - 2 \text{ ecuaciones}$$

Sin embargo, se deben encontrar n polinomios de grado ≤ 3, lo que corresponden a $4n$ incógnitas. En otras palabras, es necesario agregar dos ecuaciones adicionales, de entre las más comunes están:

- **Frontera libre o natural:** $S''(x_0) = S''(x_n) = 0.$
- **Frontera sujeta:** $S'(x_0) = z_0$ y $S'(x_n) = z_n.$

Observación

Nótese que la definición anterior contiene:

$$(n+1) + 3(n-1) \;=\; 4n-2 \text{ ecuaciones}$$

Sin embargo, se deben encontrar n polinomios de grado ≤ 3, lo que corresponden a $4n$ incógnitas. En otras palabras, es necesario agregar dos ecuaciones adicionales, de entre las más comunes están:

- **Frontera libre o natural:** $S''(x_0) = S''(x_n) = 0.$
- **Frontera sujeta:** $S'(x_0) = z_0$ y $S'(x_n) = z_n.$

Observación

Nótese que la definición anterior contiene:

$$(n+1) + 3(n-1) \; = \; 4n-2 \text{ ecuaciones}$$

Sin embargo, se deben encontrar n polinomios de grado ≤ 3, lo que corresponden a $4n$ incógnitas. En otras palabras, es necesario agregar dos ecuaciones adicionales, de entre las más comunes están:

- **Frontera libre o natural:** $S''(x_0) \; = \; S''(x_n) \; = \; 0.$
- **Frontera sujeta:** $S'(x_0) \; = \; z_0$ y $S'(x_n) \; = \; z_n.$

Observación

Nótese que la definición anterior contiene:

$$(n+1) + 3(n-1) \; = \; 4n - 2 \text{ ecuaciones}$$

Sin embargo, se deben encontrar n polinomios de grado ≤ 3, lo que corresponden a $4n$ incógnitas. En otras palabras, es necesario agregar dos ecuaciones adicionales, de entre las más comunes están:

- **Frontera libre o natural:** $S''(x_0) \; = \; S''(x_n) \; = \; 0.$
- **Frontera sujeta:** $S'(x_0) \; = \; z_0 \;$ y $\; S'(x_n) \; = \; z_n.$

Construcción del trazador cúbico

Dado que cada $s_i \in \mathcal{P}_3$, entonces es suficiente tomar:

$$s_i(x) \;=\; a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + y_i \qquad (\star)$$

para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$, para satisfacer la condición (1), a excepción de $s_{n-1}(x_n) = y_n$, la cual quedará cubierta más adelante.

Ahora, por comodidad se definen:

$$\begin{aligned} h_i &:= x_{i+1} - x_i && \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ M_i &:= S''(x_i) && \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n \end{aligned}$$

donde los $M_0, M_1, \ldots, M_n$ se conocen como los **momentos**.

Construcción del trazador cúbico

Dado que cada $s_i \in \mathcal{P}_3$, entonces es suficiente tomar:

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + y_i \qquad (\star)$$

para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$, para satisfacer la condición (1), a excepción de $s_{n-1}(x_n) = y_n$, la cual quedará cubierta más adelante.

Ahora, por comodidad se definen:

$$\begin{aligned} h_i &:= x_{i+1} - x_i & \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ M_i &:= S''(x_i) & \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n \end{aligned}$$

donde los $M_0, M_1, \ldots, M_n$ se conocen como los **momentos**.

Construcción del trazador cúbico

Luego, dado que $s_i \in \mathcal{P}_3 \Rightarrow s_i'' \in \mathcal{P}_1$, de la condición (4) se sigue que s_i'' son segmentos continuos de recta. Es decir, s_i'' es el segmento de recta que pasa por los puntos (x_i, M_i) y (x_{i+1}, M_{i+1}), para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Esto significa que:

$$\begin{aligned} s_i''(x) &= \left(\frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}\right) x + \left(M_i - \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} x_i\right) \\ &= \left(\frac{M_{i+1} - M_i}{h_i}\right) x + \left(M_i - \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i} x_i\right) \\ &= M_i \, \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1} \, \frac{x - x_i}{h_i} \end{aligned}$$

Construcción del trazador cúbico

Luego, dado que $s_i \in \mathcal{P}_3 \Rightarrow s_i'' \in \mathcal{P}_1$, de la condición (4) se sigue que s_i'' son segmentos continuos de recta. Es decir, s_i'' es el segmento de recta que pasa por los puntos (x_i, M_i) y (x_{i+1}, M_{i+1}), para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Esto significa que:

$$
\begin{aligned}
s_i''(x) &= \left(\frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}\right) x + \left(M_i - \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} x_i\right) \\
&= \left(\frac{M_{i+1} - M_i}{h_i}\right) x + \left(M_i - \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i} x_i\right) \\
&= M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}
\end{aligned}
$$

Construcción del trazador cúbico

Luego, dado que $s_i \in \mathcal{P}_3 \Rightarrow s_i'' \in \mathcal{P}_1$, de la condición (4) se sigue que s_i'' son segmentos continuos de recta. Es decir, s_i'' es el segmento de recta que pasa por los puntos (x_i, M_i) y (x_{i+1}, M_{i+1}), para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Esto significa que:

$$
\begin{aligned}
s_i''(x) &= \left(\frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}\right) x + \left(M_i - \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} x_i\right) \\
&= \left(\frac{M_{i+1} - M_i}{h_i}\right) x + \left(M_i - \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i} x_i\right) \\
&= M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}
\end{aligned}
$$

Construcción del trazador cúbico

Luego, dado que $s_i \in \mathcal{P}_3 \Rightarrow s_i'' \in \mathcal{P}_1$, de la condición (4) se sigue que s_i'' son segmentos continuos de recta. Es decir, s_i'' es el segmento de recta que pasa por los puntos (x_i, M_i) y (x_{i+1}, M_{i+1}), para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Esto significa que:

$$
\begin{aligned}
s_i''(x) &= \left(\frac{M_{i+1}-M_i}{x_{i+1}-x_i}\right)x + \left(M_i - \frac{M_{i+1}-M_i}{x_{i+1}-x_i}x_i\right) \\
&= \left(\frac{M_{i+1}-M_i}{h_i}\right)x + \left(M_i - \frac{M_{i+1}-M_i}{h_i}x_i\right) \\
&= M_i\,\frac{x_{i+1}-x}{h_i} + M_{i+1}\,\frac{x-x_i}{h_i}
\end{aligned}
$$

Construcción del trazador cúbico

Se sigue integrando respecto a x sobre $[x_i, x_{i+1}]$ que:

$$s_i'(x) = -\frac{M_i}{2}\frac{(x_{i+1}-x)^2}{h_i} + \frac{M_{i+1}}{2}\frac{(x-x_i)^2}{h_i} + \alpha_i$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Más aún, volviendo a integrar respecto a x sobre $[x_i, x_{i+1}]$ que:

$$s_i(x) = \frac{M_i}{6}\frac{(x_{i+1}-x)^3}{h_i} + \frac{M_{i+1}}{6}\frac{(x-x_i)^3}{h_i} + \alpha_i(x-x_i) + \beta_i$$

con $\beta_i \in \mathbb{R}$.

Construcción del trazador cúbico

Se sigue integrando respecto a x sobre $[x_i, x_{i+1}]$ que:

$$s_i'(x) \;=\; -\frac{M_i}{2}\,\frac{(x_{i+1}-x)^2}{h_i} \;+\; \frac{M_{i+1}}{2}\,\frac{(x-x_i)^2}{h_i} \;+\; \alpha_i$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Más aún, volviendo a integrar respecto a x sobre $[x_i, x_{i+1}]$ que:

$$s_i(x) \;=\; \frac{M_i}{6}\,\frac{(x_{i+1}-x)^3}{h_i} \;+\; \frac{M_{i+1}}{6}\,\frac{(x-x_i)^3}{h_i} \;+\alpha_i(x-x_i) \;+\; \beta_i$$

con $\beta_i \in \mathbb{R}$.

Construcción del trazador cúbico

Ahora, al ingresar las condiciones (1) y (2), es decir:

$$s_i(x_i) = y_i \qquad \text{y} \qquad s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

se sigue que:

- $s_i(x_i) = y_i \quad \Rightarrow \quad \dfrac{M_i}{6}h_i^2 + \beta_i = y_i \quad \Rightarrow \quad \beta_i = y_i - \dfrac{M_i}{6}h_i^2$

- $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{M_{i+1}}{6}h_i^2 + \alpha_i h_i + \beta_i = y_{i+1}$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i)$$

Construcción del trazador cúbico

Ahora, al ingresar las condiciones (1) y (2), es decir:

$$s_i(x_i) = y_i \qquad \text{y} \qquad s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

se sigue que:

- $s_i(x_i) = y_i \quad \Rightarrow \quad \dfrac{M_i}{6}h_i^2 + \beta_i = y_i \quad \Rightarrow \quad \beta_i = y_i - \dfrac{M_i}{6}h_i^2$
- $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{M_{i+1}}{6}h_i^2 + \alpha_i h_i + \beta_i = y_{i+1}$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i)$$

Construcción del trazador cúbico

Ahora, al ingresar las condiciones (1) y (2), es decir:

$$s_i(x_i) = y_i \qquad \text{y} \qquad s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

se sigue que:

- $s_i(x_i) = y_i \quad \Rightarrow \quad \dfrac{M_i}{6}h_i^2 + \beta_i = y_i \quad \Rightarrow \quad \beta_i = y_i - \dfrac{M_i}{6}h_i^2$
- $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{M_{i+1}}{6}h_i^2 + \alpha_i h_i + \beta_i = y_{i+1}$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i)$$

Construcción del trazador cúbico

Ahora, al ingresar las condiciones (1) y (2), es decir:

$$s_i(x_i) \;=\; y_i \qquad \text{y} \qquad s_i(x_{i+1}) \;=\; y_{i+1}$$

se sigue que:

- $s_i(x_i) \;=\; y_i \quad \Rightarrow \quad \dfrac{M_i}{6}h_i^2 + \beta_i \;=\; y_i \quad \Rightarrow \quad \beta_i \;=\; y_i - \dfrac{M_i}{6}h_i^2$
- $s_i(x_{i+1}) \;=\; y_{i+1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{M_{i+1}}{6}h_i^2 + \alpha_i h_i + \beta_i \;=\; y_{i+1}$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i \;=\; \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i)$$

Construcción del trazador cúbico

Así, se tiene que las condiciones (1), (2) y (4) se cumplen al tomar:

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \frac{M_i}{6}\frac{(x_{i+1}-x)^3}{h_i} + \frac{M_{i+1}}{6}\frac{(x-x_i)^3}{h_i} \\ &\quad + \left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1}-M_i)\right](x-x_i) + y_i - \frac{M_i}{6}h_i^2 \end{aligned}$$

donde observando que:

$$\begin{aligned} (x_{i+1}-x)^3 &= (x_{i+1} - x_i + x_i - x)^3 \\ &= (h_i - (x-x_i))^3 \\ &= h_i^3 - 3h_i^2(x-x_i) + 3h_i(x-x_i)^2 - (x-x_i)^3 \end{aligned}$$

Construcción del trazador cúbico

Así, se tiene que las condiciones (1), (2) y (4) se cumplen al tomar:

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \frac{M_i}{6}\frac{(x_{i+1}-x)^3}{h_i} + \frac{M_{i+1}}{6}\frac{(x-x_i)^3}{h_i} \\ &\quad + \left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1}-M_i)\right](x-x_i) + y_i - \frac{M_i}{6}h_i^2 \end{aligned}$$

donde observando que:

$$\begin{aligned} (x_{i+1}-x)^3 &= (x_{i+1} - x_i + x_i - x)^3 \\ &= (h_i - (x-x_i))^3 \\ &= h_i^3 - 3h_i^2(x-x_i) + 3h_i(x-x_i)^2 - (x-x_i)^3 \end{aligned}$$

Construcción del trazador cúbico

se deduce que:

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i}(x-x_i)^3+\frac{M_i}{2}(x-x_i)^2 \\ &\quad + \left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{h_i}{6}(M_{i+1}+2M_i)\right](x-x_i)+y_i \end{aligned}$$

Al comparar esta ecuación con $(\star)$ se concluye que:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i} \\ b_i &= \frac{M_i}{2} \\ c_i &= \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{h_i}{6}(M_{i+1}+2M_i) \end{aligned}$$

para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

se deduce que:

$$
\begin{aligned}
s_i(x) \quad = \quad & \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i}(x-x_i)^3+\frac{M_i}{2}(x-x_i)^2 \\
& + \left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{h_i}{6}(M_{i+1}+2M_i)\right](x-x_i)+y_i
\end{aligned}
$$

Al comparar esta ecuación con $(\star)$ se concluye que:

$$
\begin{aligned}
a_i &= \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i} \\
b_i &= \frac{M_i}{2} \\
c_i &= \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{h_i}{6}(M_{i+1}+2M_i)
\end{aligned}
$$

para $i=0,1,\ldots,n-1$.

Construcción del trazador cúbico

En otras palabras, conociendo los momentos es posible hallar cada polinomio cúbico con las fórmulas previas.

Por otro lado, los momentos se pueden determinar por medio de la condición (3):

$$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1})$$

donde, dado que:

$$\begin{aligned} s_i'(x) &= \frac{M_{i+1} - M_i}{2h_i}(x - x_i)^2 + M_i(x - x_i) \\ &\quad + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} + 2M_i) \end{aligned}$$

Construcción del trazador cúbico

En otras palabras, conociendo los momentos es posible hallar cada polinomio cúbico con las fórmulas previas.

Por otro lado, los momentos se pueden determinar por medio de la condición (3):

$$s_i'(x_{i+1}) \;=\; s_{i+1}'(x_{i+1})$$

donde, dado que:

$$\begin{aligned} s_i'(x) \;&=\; \frac{M_{i+1}-M_i}{2h_i}(x-x_i)^2 \;+\; M_i(x-x_i) \\ &\quad + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} \;-\; \frac{h_i}{6}(M_{i+1}+2M_i) \end{aligned}$$

Construcción del trazador cúbico

En otras palabras, conociendo los momentos es posible hallar cada polinomio cúbico con las fórmulas previas.

Por otro lado, los momentos se pueden determinar por medio de la condición (3):

$$s_i'(x_{i+1}) \; = \; s_{i+1}'(x_{i+1})$$

donde, dado que:

$$\begin{aligned} s_i'(x) \; &= \; \frac{M_{i+1} - M_i}{2h_i}(x - x_i)^2 \; + \; M_i(x - x_i) \\ &+ \; \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \; - \; \frac{h_i}{6}(M_{i+1} + 2M_i) \end{aligned}$$

Construcción del trazador cúbico

se tiene que:

$$\begin{aligned} s'_{i+1}(x) &= \frac{M_{i+2}-M_{i+1}}{2h_{i+1}}(x-x_{i+1})^2 + M_{i+1}(x-x_{i+1}) \\ &\quad + \frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(M_{i+2}+2M_{i+1}) \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo en $s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1})$, se deduce (luego de varias manipulaciones algebraicas) que:

$$h_i M_i + 2(h_i + h_{i+1})M_{i+1} + h_{i+1}M_{i+2} = u_i$$

con

$$u_i := 6\left(\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right)$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-2$. Aún faltan dos ecuaciones.

Construcción del trazador cúbico

se tiene que:

$$\begin{aligned} s'_{i+1}(x) &= \frac{M_{i+2} - M_{i+1}}{2h_{i+1}} (x - x_{i+1})^2 + M_{i+1}(x - x_{i+1}) \\ &\quad + \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(M_{i+2} + 2M_{i+1}) \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo en $s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1})$, se deduce (luego de varias manipulaciones algebraicas) que:

$$h_i M_i + 2(h_i + h_{i+1})M_{i+1} + h_{i+1}M_{i+2} = u_i$$

con

$$u_i := 6\left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right)$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-2$. Aún faltan dos ecuaciones.

Construcción del trazador cúbico

se tiene que:

$$
\begin{aligned}
s'_{i+1}(x) \;\; &= \;\; \frac{M_{i+2} - M_{i+1}}{2h_{i+1}}\,(x - x_{i+1})^2 \; + \; M_{i+1}(x - x_{i+1}) \\
&\quad + \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} \; - \; \frac{h_{i+1}}{6}(M_{i+2} + 2M_{i+1})
\end{aligned}
$$

Luego, sustituyendo en $s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1})$, se deduce (luego de varias manipulaciones algebraicas) que:

$$h_i M_i \; + \; 2(h_i + h_{i+1})M_{i+1} \; + \; h_{i+1}M_{i+2} \; = \; u_i$$

con

$$u_i \; := \; 6\left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right)$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-2$. Aún faltan dos ecuaciones.

Frontera libre o natural

Se tiene que $M_0 = 0$ y $M_n = 0$, con lo que se debe resolver el sistema tridiagonal simétrico de $(n-1) \times (n-1)$:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \vdots \\ \vdots & & h_3 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & h_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-3} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

Frontera sujeta

Se tienen dos ecuaciones adicionales $S'(x_0) = z_0$ y $S'(x_n) = z_n$, las cuales dan origen a las ecuaciones:

$$2h_0M_0 + h_0M_1 = v \qquad \text{y} \qquad h_{n-1}M_{n-1} + 2h_{n-1}M_n = w$$

con

$$v := 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - z_0\right) \qquad \text{y} \qquad w := 6\left(z_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$$

Frontera sujeta

De acuerdo con lo anterior, se obtiene el sistema tridiagonal simétrico de orden $n+1$, dado por:

$$\begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & \multicolumn{3}{c}{\boxed{\text{Matriz de frontera natural}}} & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ w \end{pmatrix}$$

Observación

Ambos sistemas lineales previos son estrictamente diagonal dominantes, lo que los hace tener única solución.

Además, métodos como Jacobi y Gauss-Seidel pueden ser empleados, así claro como eliminación Gaussiana.

Observación

Ambos sistemas lineales previos son estrictamente diagonal dominantes, lo que los hace tener única solución.

Además, métodos como Jacobi y Gauss-Seidel pueden ser empleados, así claro como eliminación Gaussiana.

Ejemplo

Determine el trazador cúbico $S(x)$ que interpola los puntos

$$(1,2), \qquad (2,3) \qquad \text{y} \qquad (3,5)$$

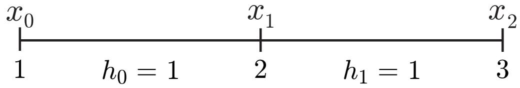
con frontera:

a) natural.

b) sujeta a $S'(1) = 1$ y $S'(3) = -1$.

Solución

Observe que $n = 2$ y además:

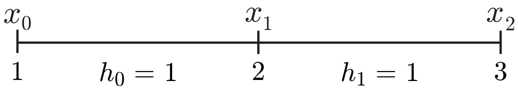


Luego, como $y_0 = 2$, $y_1 = 3$ y $y_2 = 5$, entonces:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= 6\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0}\right) \\
&= 6\left(\frac{5-3}{1} - \frac{3-2}{1}\right) \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Solución

Observe que $n = 2$ y además:



Luego, como $y_0 = 2$, $y_1 = 3$ y $y_2 = 5$, entonces:

$$\begin{aligned} u_0 &= 6\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0}\right) \\ &= 6\left(\frac{5-3}{1} - \frac{3-2}{1}\right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Solución

a) **Frontera natural:** $M_0 = 0$ y $M_2 = 0$. Luego, el sistema es:

$$\begin{aligned}(2(h_0 + h_1))(M_1) &= u_0 \\ \Rightarrow \quad 4M_1 &= 6 \\ \Rightarrow \quad M_1 &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Solución

De esta forma, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{M_1 - M_0}{6h_0} = \frac{\frac{3}{2} - 0}{6 \cdot 1} = \frac{1}{4} \\
a_1 &= \frac{M_2 - M_1}{6h_1} = \frac{0 - \frac{3}{2}}{6 \cdot 1} = -\frac{1}{4} \\
b_0 &= \frac{M_0}{2} = 0 \\
b_1 &= \frac{M_1}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} \\
c_0 &= \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(M_1 + 2M_0) = \frac{3-2}{1} - \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \\
c_1 &= \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{6}(M_2 + 2M_1) = \frac{5-3}{1} - \frac{1}{6}\left(2 \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Solución

Por lo tanto, se concluye el trazador:

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-1)^3 + \frac{3}{4}(x-1) + 2 & \text{si } x \in [1,2[\\ -\frac{1}{4}(x-2)^3 + \frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{2}(x-2) + 3 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

Solución

b) **Frontera sujeta:** $z_0 = 1$ y $z_2 = -1$. Con ello:

$$
\begin{aligned}
v &= 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - z_0\right) = 6\left(\frac{3-2}{1} - 1\right) = 0 \\
w &= 6\left(z_2 - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right) = 6\left(-1 - \frac{5-3}{1}\right) = -18
\end{aligned}
$$

Así, se obtiene el sistema lineal:

$$
\begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_0 \\ w \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -18 \end{pmatrix}
$$

Solución

b) **Frontera sujeta:** $z_0 = 1$ y $z_2 = -1$. Con ello:

$$\begin{aligned} v &= 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - z_0\right) = 6\left(\frac{3-2}{1} - 1\right) = 0 \\ w &= 6\left(z_2 - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right) = 6\left(-1 - \frac{5-3}{1}\right) = -18 \end{aligned}$$

Así, se obtiene el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_0 \\ w \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Solución

$b)$ **Frontera sujeta:** $z_0 = 1$ y $z_2 = -1$. Con ello:

$$\begin{aligned} v &= 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - z_0\right) = 6\left(\frac{3-2}{1} - 1\right) = 0 \\ w &= 6\left(z_2 - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right) = 6\left(-1 - \frac{5-3}{1}\right) = -18 \end{aligned}$$

Así, se obtiene el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_0 \\ w \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Solución

Ahora, utilizando el método de eliminación Gaussiana:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdots} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{23}{2} \end{array}\right)$$

lo que establece que:

$$M_0 = -\frac{5}{2}, \qquad M_1 = 5 \qquad \text{y} \qquad M_2 = -\frac{23}{2}.$$

Solución

De acuerdo con lo anterior, se deduce que:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{M_1 - M_0}{6h_0} = \frac{5 + \frac{5}{2}}{6 \cdot 1} = \frac{5}{4} \\
a_1 &= \frac{M_2 - M_1}{6h_1} = \frac{-\frac{23}{2} - 5}{6 \cdot 1} = -\frac{11}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \frac{M_0}{2} = \frac{-\frac{5}{2}}{2} = -\frac{5}{4} \\
b_1 &= \frac{M_1}{2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

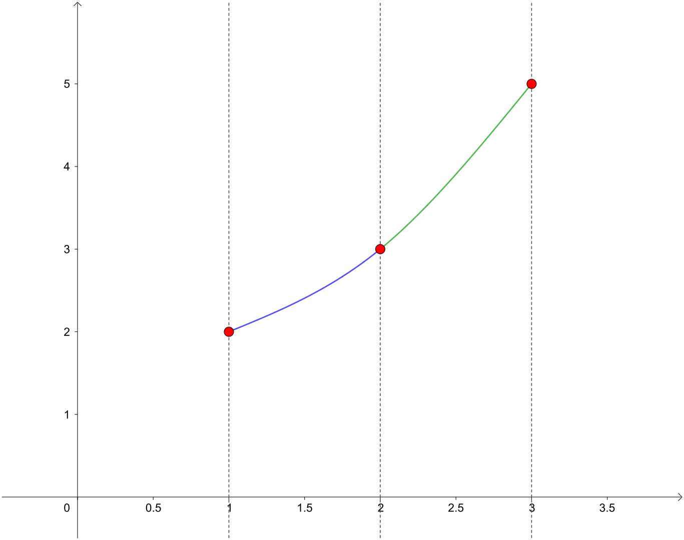
$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(M_1 + 2M_0) = \frac{3-2}{1} - \frac{1}{6}\left(5 + 2 \cdot \frac{-5}{2}\right) = 1 \\
c_1 &= \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{6}(M_2 + 2M_1) = \frac{5-3}{1} - \frac{1}{6}\left(\frac{-23}{2} + 2 \cdot 5\right) = \frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

Solución

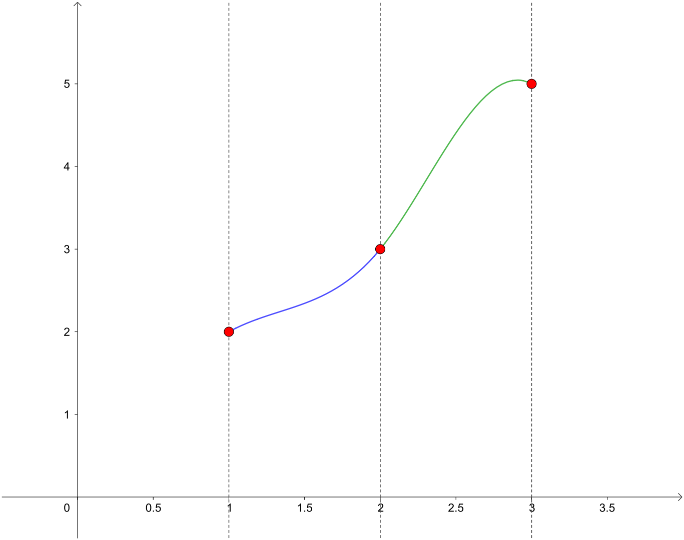
Por lo tanto, se concluye el trazador:

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{4}(x-1)^3 - \dfrac{5}{4}(x-1)^2 + (x-1) + 2 & \text{si } x \in [1,2[\\[2ex] -\dfrac{11}{4}(x-2)^3 + \dfrac{5}{2}(x-2)^2 + \dfrac{9}{4}(x-2) + 3 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

Gráfica de la frontera natural



Gráfica de la frontera sujeta



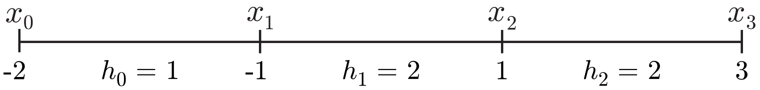
Ejemplo

Determine el trazador cúbico natural que interpola los puntos:

$$(-2, 0), \qquad (-1, 1), \qquad (1, 1) \qquad \text{y} \qquad (3, 1).$$

Solución

Se tiene que $n = 3$ y:

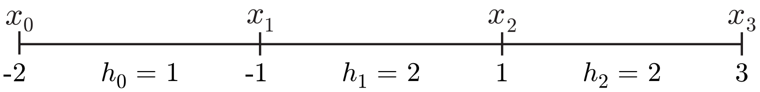


Luego, usando $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ y , $y_3 = 1$, se sigue que:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= 6\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0}\right) = 6\left(\frac{1-1}{2} - \frac{1-0}{1}\right) = -6 \\
u_1 &= 6\left(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right) = 6\left(\frac{1-1}{2} - \frac{1-1}{2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Solución

Se tiene que $n = 3$ y:



Luego, usando $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ y , $y_3 = 1$, se sigue que:

$$\begin{aligned}
u_0 &= 6\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0}\right) = 6\left(\frac{1-1}{2} - \frac{1-0}{1}\right) = -6 \\
u_1 &= 6\left(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right) = 6\left(\frac{1-1}{2} - \frac{1-1}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Solución

Se tiene que $n = 3$ y:

x_0		x_1		x_2		x_3
-2	$h_0 = 1$	-1	$h_1 = 2$	1	$h_2 = 2$	3

Luego, usando $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ y , $y_3 = 1$, se sigue que:

$$u_0 = 6\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0}\right) = 6\left(\frac{1-1}{2} - \frac{1-0}{1}\right) = -6$$

$$u_1 = 6\left(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right) = 6\left(\frac{1-1}{2} - \frac{1-1}{2}\right) = 0$$

Solución

Se tiene que $n = 3$ y:

x_0		x_1		x_2		x_3
-2	$h_0 = 1$	-1	$h_1 = 2$	1	$h_2 = 2$	3

Luego, usando $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ y , $y_3 = 1$, se sigue que:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= 6\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0}\right) = 6\left(\frac{1-1}{2} - \frac{1-0}{1}\right) = -6 \\
u_1 &= 6\left(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right) = 6\left(\frac{1-1}{2} - \frac{1-1}{2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Solución

Ahora, como $M_0 = M_3 = 0$, se obtiene el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{11} \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se deduce que:

$$M_0 = 0, \qquad M_1 = -\frac{12}{11}, \qquad M_2 = \frac{3}{11} \qquad \text{y} \qquad M_3 = 0.$$

Solución

Ahora, como $M_0 = M_3 = 0$, se obtiene el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{11} \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se deduce que:

$$M_0 = 0, \qquad M_1 = -\frac{12}{11}, \qquad M_2 = \frac{3}{11} \qquad \text{y} \qquad M_3 = 0.$$

Solución

Ahora, como $M_0 = M_3 = 0$, se obtiene el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{11} \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se deduce que:

$$M_0 = 0, \qquad M_1 = -\frac{12}{11}, \qquad M_2 = \frac{3}{11} \qquad \text{y} \qquad M_3 = 0.$$

Solución

Ahora, como $M_0 = M_3 = 0$, se obtiene el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{11} \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se deduce que:

$$M_0 = 0, \qquad M_1 = -\frac{12}{11}, \qquad M_2 = \frac{3}{11} \qquad \text{y} \qquad M_3 = 0.$$

Solución

Seguidamente, se calculan las constantes:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{M_1 - M_0}{6h_0} = -\frac{2}{11}\\
a_1 &= \frac{M_2 - M_1}{6h_1} = \frac{5}{44}\\
a_2 &= \frac{M_3 - M_2}{6h_2} = -\frac{1}{44}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \frac{M_0}{2} = 0\\
b_1 &= \frac{M_1}{2} = -\frac{6}{11}\\
b_2 &= \frac{M_2}{2} = \frac{3}{22}
\end{aligned}
$$

Solución

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(M_1 + 2M_0) = \frac{13}{11} \\
c_1 &= \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{6}(M_2 + 2M_1) = \frac{7}{11} \\
c_2 &= \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{h_2}{6}(M_3 + 2M_2) = -\frac{2}{11}
\end{aligned}
$$

Solución

Por lo tanto, se concluye el trazador:

$$S(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{11}(x+2)^3 + \dfrac{13}{11}(x+2) & \text{si } x \in [-2,-1[\\[2ex] \dfrac{5}{44}(x+1)^3 - \dfrac{6}{11}(x+1)^2 + \dfrac{7}{11}(x+1) + 1 & \text{si } x \in [-1,1[\\[2ex] -\dfrac{1}{44}(x-1)^3 + \dfrac{3}{22}(x-1)^2 - \dfrac{2}{11}(x-1) + 1 & \text{si } x \in [1,3] \end{cases}$$

Ejercicio

Rehaga el ejemplo anterior con frontera sujeta:

$$S'(-2) \;=\; 0 \qquad \text{y} \qquad S'(3) \;=\; -16\,.$$

Solución:

$$S(x) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{38}{23}(x+2)^3 + \dfrac{61}{23}(x+2)^2 & \text{si } x \in [-2,-1[\\[2ex] \dfrac{49}{46}(x+1)^3 - \dfrac{53}{23}(x+1)^2 + \dfrac{8}{23}(x+1) + 1 & \text{si } x \in [-1,1[\\[2ex] -\dfrac{139}{46}(x-1)^3 + \dfrac{94}{23}(x-1)^2 + \dfrac{90}{23}(x-1) + 1 & \text{si } x \in [1,3] \end{cases}$$

Ejercicio

Ejercicio

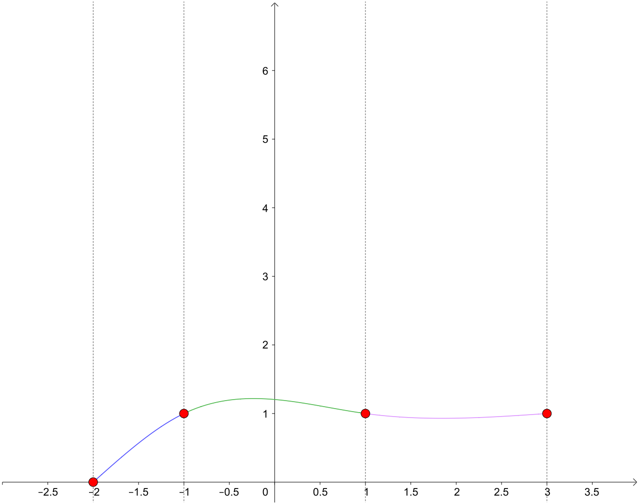
Rehaga el ejemplo anterior con frontera sujeta:

$$S'(-2) = 0 \qquad \text{y} \qquad S'(3) = -16\,.$$

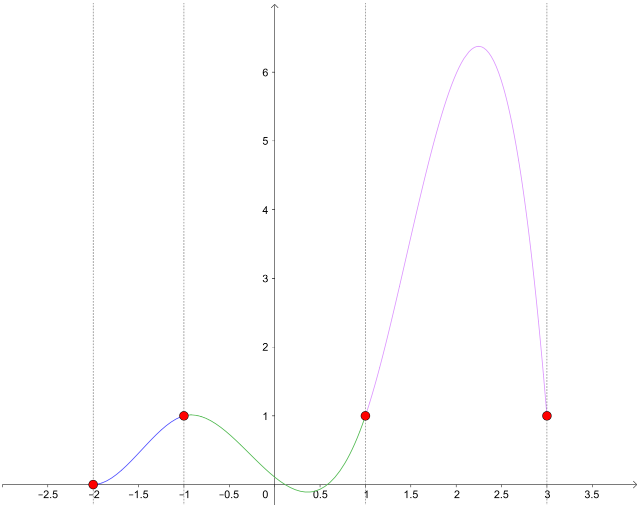
Solución:

$$S(x) = \begin{cases} -\dfrac{38}{23}(x+2)^3 + \dfrac{61}{23}(x+2)^2 & \text{si } x \in [-2,-1[\\[2ex] \dfrac{49}{46}(x+1)^3 - \dfrac{53}{23}(x+1)^2 + \dfrac{8}{23}(x+1) + 1 & \text{si } x \in [-1,1[\\[2ex] -\dfrac{139}{46}(x-1)^3 + \dfrac{94}{23}(x-1)^2 + \dfrac{90}{23}(x-1) + 1 & \text{si } x \in [1,3] \end{cases}$$

Gráfica de la frontera natural



Gráfica de la frontera sujeta



Ejercicio

Ejercicio para la casa (II Examen, IC-2017)

Considere el trazador cúbico $S(x)$ definido como:

$$S(x) := \begin{cases} -\dfrac{19}{20}x^3 + \alpha x^2 - \dfrac{38}{5}x + 12 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ \beta x^3 - \dfrac{57}{10}x^2 - \dfrac{38}{5}x + 12 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -\dfrac{31}{20}x^3 - \dfrac{62}{19}\alpha x^2 - \dfrac{562}{25}\beta x + \dfrac{222}{5} & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

donde α y β son parámetros a determinar.

a) Encuentre los valores de α y β para que S sea en efecto un trazador cúbico.

b) ¿Es S un trazador cúbico con frontera natural? Justifique su respuesta.