Integración numérica

Profesor
Filánder Sequeira Chavarría

Última actualización: 24 de mayo de 2020

Organización de la presentación

Introducción

Considere las integrales:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad \int_0^\pi \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

cuyas funciones no poseen antiderivada. No obstante, estas son claramente continuas por lo que admiten integral definida acotada. Es decir, su integral existe, aunque no se puedan calcular con el Teorema Fundamental del Cálculo.

Problema modelo

El objetivo ahora es aproximar el valor de la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

donde $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ es una función continua.

Introducción

Considere las integrales:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad \int_0^{\pi} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

cuyas funciones no poseen antiderivada. No obstante, estas son claramente continuas por lo que admiten integral definida acotada. Es decir, su integral existe, aunque no se puedan calcular con el Teorema Fundamental del Cálculo.

Problema modelo

El objetivo ahora es aproximar el valor de la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

donde $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ es una función continua.

Introducción

Considere las integrales:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad \int_0^\pi \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

cuyas funciones no poseen antiderivada. No obstante, estas son claramente continuas por lo que admiten integral definida acotada. Es decir, su integral existe, aunque no se puedan calcular con el Teorema Fundamental del Cálculo.

Problema modelo

El objetivo ahora es aproximar el valor de la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

donde $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ es una función continua.

Organización de la presentación

Introducción

Para aproximar el valor de la integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, se puede hacer uso de las técnicas de interpolación que permiten aproximar f por un polinomio, el cual siempre será "simple" de integrar. En efecto, primeramente se definen $n+1$ puntos en el intervalo $[a,b]$, donde por simplicidad, se consideran estos igualmente espaciados:

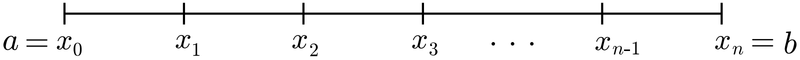
En otras palabras, definiendo $h := \frac{b-a}{h}$, se toma:

$$x_i \;:=\; a + ih \qquad \text{para} \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

donde claramente $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_{i+1} - x_i = h$.

Introducción

Para aproximar el valor de la integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, se puede hacer uso de las técnicas de interpolación que permiten aproximar f por un polinomio, el cual siempre será "simple" de integrar. En efecto, primeramente se definen $n+1$ puntos en el intervalo $[a,b]$, donde por simplicidad, se consideran estos igualmente espaciados:



En otras palabras, definiendo $h := \frac{b-a}{n}$, se toma:

$$x_i \ := \ a + ih \qquad \text{para} \ \ i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

donde claramente $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_{i+1} - x_i = h$.

Para aproximar el valor de la integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, se puede hacer uso de las técnicas de interpolación que permiten aproximar f por un polinomio, el cual siempre será "simple" de integrar. En efecto, primeramente se definen $n+1$ puntos en el intervalo $[a,b]$, donde por simplicidad, se consideran estos igualmente espaciados:

$$a = x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_{n\text{-}1} \quad x_n = b$$

En otras palabras, definiendo $h := \frac{b-a}{n}$, se toma:

$$x_i \;:=\; a + ih \qquad \text{para} \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

donde claramente $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_{i+1} - x_i = h$.

Introducción

Con estos $n+1$ puntos se pueden calcular:

$$y_i \;:=\; f(x_i) \qquad \text{para} \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

y así construir, en particular, el polinomio interpolador de Lagrange:

$$p_n(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} L_k(x) y_k \;=\; \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$$

donde $L_k(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$.

Introducción

Con estos $n+1$ puntos se pueden calcular:

$$y_i \;:=\; f(x_i) \qquad \text{para} \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

y así construir, en particular, el polinomio interpolador de Lagrange:

$$p_n(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} L_k(x) y_k \;=\; \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$$

donde $L_k(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$.

Introducción

Ahora, se sigue que:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k) \right\} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left\{ \int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x \right\}}_{=:w_k} f(x_k)
\end{aligned}
$$

Introducción

Ahora, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k) \right\} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left\{ \int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x \right\}}_{=:w_k} f(x_k)
\end{aligned}$$

Ahora, se sigue que:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k) \right\} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left\{ \int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x \right\}}_{=:w_k} f(x_k)
\end{aligned}
$$

Ahora, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \int_a^b {\color{red}p_n(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k) \right\} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left\{ \int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x \right\}}_{{\color{red}=:w_k}} f(x_k)
\end{aligned}$$

Cuadraturas de Newton-Cotes

Es decir, definiendo:

$$w_k \ := \ \int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{para} \ \ k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

se deduce que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \approx \ \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

la cual se conoce como una **cuadratura de Newton-Cotes**.

- w_k son los *pesos* de cuadratura
- x_k son los *puntos* de cuadratura

Cuadraturas de Newton-Cotes

Es decir, definiendo:

$$w_k \;:=\; \int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{para} \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

se deduce que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

la cual se conoce como una **cuadratura de Newton-Cotes**.

- w_k son los *pesos* de cuadratura
- x_k son los *puntos* de cuadratura

Cuadraturas más conocidas

$\boxed{\boldsymbol{n=1}}$: En este caso se tienen dos puntos:

$$x_0 \; := \; a \qquad \text{y} \qquad x_1 \; := \; b\,,$$

donde $h = \frac{b-a}{1} \Rightarrow h = b - a$. Más aún:

$$L_0(x) \; := \; \frac{x-b}{a-b} \qquad \text{y} \qquad L_1(x) \; := \; \frac{x-a}{b-a}\,.$$

$\boxed{\boldsymbol{n=1}}$: En este caso se tienen dos puntos:

$$x_0 \;:=\; a \qquad \text{y} \qquad x_1 \;:=\; b\,,$$

donde $h = \frac{b-a}{1} \Rightarrow h = b - a$. Más aún:

$$L_0(x) \;:=\; \frac{x-b}{a-b} \qquad \text{y} \qquad L_1(x) \;:=\; \frac{x-a}{b-a}\,.$$

Cuadraturas más conocidas

Luego, nótese que:

- $$w_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b}\int_a^b (x-b)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{a-b}\left[\cancelto{0}{\frac{(b-b)^2}{2}} - \frac{(a-b)^2}{2}\right]$$
$$= -\frac{(a-b)^2}{2(a-b)} = -\frac{a-b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore\ w_0 = \frac{b-a}{2}$$

Cuadraturas más conocidas

Luego, nótese que:

- $$w_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b}\int_a^b (x-b)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{a-b}\left[\cancelto{0}{\frac{(b-b)^2}{2}} - \frac{(a-b)^2}{2}\right]$$

$$= -\frac{(a-b)^2}{2(a-b)} = -\frac{a-b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore\ w_0 = \frac{b-a}{2}$$

Cuadraturas más conocidas

Luego, nótese que:

- $$w_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b}\int_a^b (x-b)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{a-b}\left[\cancelto{0}{\frac{(b-b)^2}{2}} - \frac{(a-b)^2}{2}\right]$$

$$= -\frac{(a-b)^2}{2(a-b)} = -\frac{a-b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore\ w_0 = \frac{b-a}{2}$$

Cuadraturas más conocidas

Luego, nótese que:

- $$w_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b}\int_a^b (x-b)\,\mathrm{d}x$$
  $$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{a-b}\left[\cancelto{0}{\frac{(b-b)^2}{2}} - \frac{(a-b)^2}{2}\right]$$
  $$= -\frac{(a-b)^2}{2(a-b)} = -\frac{a-b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore\ w_0 = \frac{b-a}{2}$$

Luego, nótese que:

- $$w_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b}\int_a^b (x-b)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]\Big|_a^b = \frac{1}{a-b}\left[\cancelto{0}{\frac{(b-b)^2}{2}} - \frac{(a-b)^2}{2}\right]$$
$$= -\frac{(a-b)^2}{2(a-b)} = -\frac{a-b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore\ w_0 = \frac{b-a}{2}$$

Luego, nótese que:

- $$w_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b}\int_a^b (x-b)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{a-b}\left[\cancelto{0}{\frac{(b-b)^2}{2}} - \frac{(a-b)^2}{2}\right]$$
$$= -\frac{(a-b)^2}{2(a-b)} = -\frac{a-b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore\ w_0 = \frac{b-a}{2}$$

Luego, nótese que:

- $$w_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b}\int_a^b (x-b)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{a-b}\left[\cancelto{0}{\frac{(b-b)^2}{2}} - \frac{(a-b)^2}{2}\right]$$
$$= -\frac{(a-b)^2}{2(a-b)} = -\frac{a-b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore\ w_0 = \frac{b-a}{2}$$

Cuadraturas más conocidas

- $$w_1 = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-a)^2}{2} - \cancelto{0}{\frac{(a-a)^2}{2}}\right]$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore\ w_1 = \frac{b-a}{2}$$

Cuadraturas más conocidas

- $w_1 = \displaystyle\int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-a)^2}{2} - \cancelto{0}{\frac{(a-a)^2}{2}}\right]$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore\; w_1 = \frac{b-a}{2}$$

Cuadraturas más conocidas

- $$w_1 = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-a)^2}{2} - \cancelto{0}{\frac{(a-a)^2}{2}}\right]$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore\ w_1 = \frac{b-a}{2}$$

Cuadraturas más conocidas

- $$w_1 = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x$$
  $$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-a)^2}{2} - \cancelto{0}{\frac{(a-a)^2}{2}}\right]$$
  $$= \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore\ w_1 = \frac{b-a}{2}$$

Cuadraturas más conocidas

- $$w_1 = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-a)^2}{2} - \cancelto{0}{\frac{(a-a)^2}{2}}\right]$$
$$= \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore\ w_1 = \frac{b-a}{2}$$

Cuadraturas más conocidas

- $$w_1 = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-a)^2}{2} - \cancelto{0}{\frac{(a-a)^2}{2}}\right]$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore\ w_1 = \frac{b-a}{2}$$

Cuadraturas más conocidas

Por lo tanto, se deduce que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \sum_{k=0}^{1} w_k f(x_k) \\
&= w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) \\
&= \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) \\
&= \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]
\end{aligned}$$

Cuadraturas más conocidas

Por lo tanto, se deduce que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \sum_{k=0}^{1} w_k f(x_k) \\
&= w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) \\
&= \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) \\
&= \frac{b-a}{2} \left[f(a) + f(b) \right]
\end{aligned}$$

Cuadraturas más conocidas

Por lo tanto, se deduce que:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \sum_{k=0}^{1} w_k f(x_k) \\
&= w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) \\
&= \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) \\
&= \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]
\end{aligned}
$$

Cuadraturas más conocidas

Por lo tanto, se deduce que:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \sum_{k=0}^{1} w_k f(x_k) \\ &= w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) \\ &= \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) \\ &= \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]\end{aligned}$$

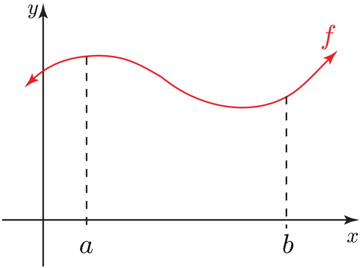
Cuadraturas de Newton-Cotes para $n = 1$

Definición

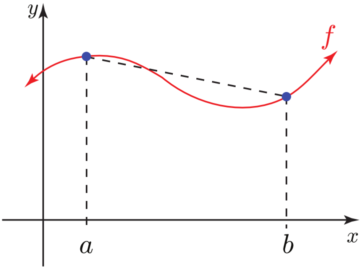
Se define la **regla del trapecio** dada por:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; \frac{b-a}{2}\,[f(a) + f(b)]$$

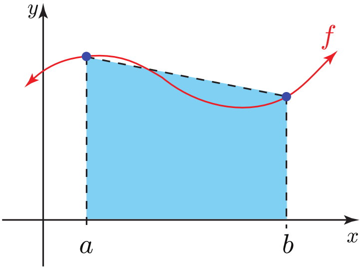
Regla del trapecio



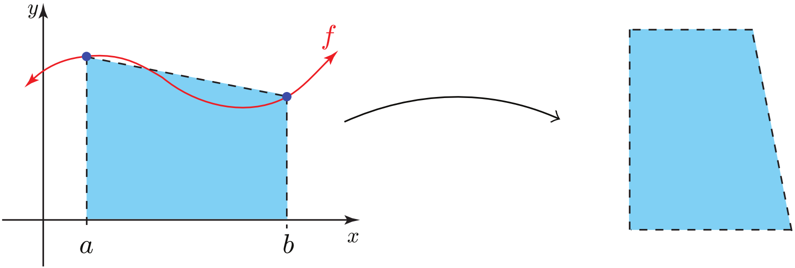
Regla del trapecio



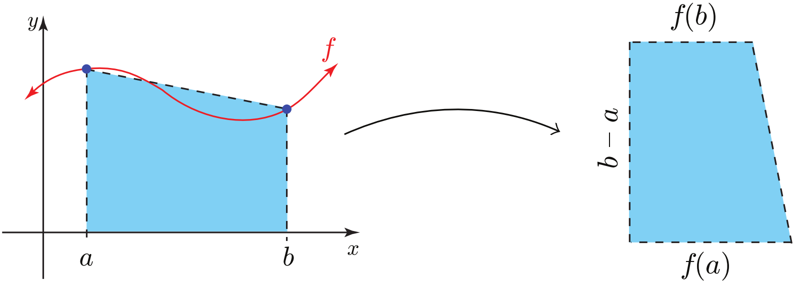
Regla del trapecio



Regla del trapecio



Regla del trapecio



Cuadraturas más conocidas

$\boxed{\boldsymbol{n=2}}$: Ahora, se tiene $h = \frac{b-a}{2}$ y los puntos:

$$x_0 \;:=\; a\,, \qquad x_1 \;:=\; \frac{a+b}{2} \qquad \text{y} \qquad x_2 \;:=\; b\,.$$

Luego, se tiene que:

$$L_0(x) \;:=\; \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)} \;=\; \frac{(2x-a-b)(x-b)}{(b-a)^2}$$

$$L_1(x) \;:=\; \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} \;=\; \frac{4(x-a)(b-x)}{(b-a)^2}$$

$$L_2(x) \;:=\; \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)} \;=\; \frac{(x-a)(2x-a-b)}{(b-a)^2}$$

Cuadraturas más conocidas

$\boxed{\boldsymbol{n=2}}$: Ahora, se tiene $h = \frac{b-a}{2}$ y los puntos:

$$x_0 \ := \ a\,, \qquad x_1 \ := \ \frac{a+b}{2} \qquad \text{y} \qquad x_2 \ := \ b\,.$$

Luego, se tiene que:

$$L_0(x) \ := \ \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)} = \frac{(2x-a-b)(x-b)}{(b-a)^2}$$

$$L_1(x) \ := \ \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} = \frac{4(x-a)(b-x)}{(b-a)^2}$$

$$L_2(x) \ := \ \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)} = \frac{(x-a)(2x-a-b)}{(b-a)^2}$$

Cuadraturas más conocidas

En particular, nótese que:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \int_a^b \frac{(2x-a-b)(x-b)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{\big((x-a)+(x-b)\big)(x-b)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-b+b-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-b)^2+(b-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (b-a)(x-b)+2(x-b)^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Cuadraturas más conocidas

En particular, nótese que:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \int_a^b \frac{(2x-a-b)(x-b)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{\big((x-a)+(x-b)\big)(x-b)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-b+b-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-b)^2+(b-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (b-a)(x-b)+2(x-b)^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Cuadraturas más conocidas

En particular, nótese que:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \int_a^b \frac{(2x-a-b)(x-b)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{\big((x-a)+(x-b)\big)(x-b)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-b+b-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-b)^2+(b-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (b-a)(x-b)+2(x-b)^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

En particular, nótese que:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \int_a^b \frac{(2x-a-b)(x-b)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{\big((x-a)+(x-b)\big)(x-b)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-b+b-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-b)^2+(b-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (b-a)(x-b)+2(x-b)^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Cuadraturas más conocidas

En particular, nótese que:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \int_a^b \frac{(2x-a-b)(x-b)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{\big((x-a)+(x-b)\big)(x-b)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-b+b-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-b)^2+(b-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (b-a)(x-b)+2(x-b)^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Cuadraturas más conocidas

En particular, nótese que:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \int_a^b \frac{(2x-a-b)(x-b)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{\big((x-a)+(x-b)\big)(x-b)}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-b+b-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{(x-b)^2+(b-a)(x-b)+(x-b)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (b-a)(x-b)+2(x-b)^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Cuadraturas más conocidas

Ahora, integrando se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \frac{1}{(b-a)^2}\left[(b-a)\frac{(x-b)^2}{2} + 2\frac{(x-b)^3}{3}\right]\Bigg|_a^b \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\Bigg[(b-a)\frac{\cancelto{0}{(b-b)^2}}{2} + 2\frac{\cancelto{0}{(b-b)^3}}{3} \\
&\qquad - (b-a)\frac{(a-b)^2}{2} - 2\frac{(a-b)^3}{3}\Bigg] \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left[-\frac{(a-b)^3}{2} + \frac{2(b-a)^3}{3}\right] \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{6} = \frac{b-a}{6} \qquad \therefore\ w_0 = \frac{b-a}{6}
\end{aligned}
$$

Cuadraturas más conocidas

Ahora, integrando se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \frac{1}{(b-a)^2}\left[(b-a)\frac{(x-b)^2}{2} + 2\frac{(x-b)^3}{3}\right]\Bigg|_a^b \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\Bigg[(b-a)\frac{\cancelto{0}{(b-b)^2}}{2} + 2\frac{\cancelto{0}{(b-b)^3}}{3} \\
&\qquad - (b-a)\frac{(a-b)^2}{2} - 2\frac{(a-b)^3}{3}\Bigg] \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left[-\frac{(a-b)^3}{2} + \frac{2(b-a)^3}{3}\right] \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{6} = \frac{b-a}{6} \qquad \therefore\ w_0 = \frac{b-a}{6}
\end{aligned}
$$

Cuadraturas más conocidas

Ahora, integrando se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \frac{1}{(b-a)^2}\left[(b-a)\frac{(x-b)^2}{2} + 2\frac{(x-b)^3}{3}\right]\Bigg|_a^b \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\Bigg[(b-a)\frac{\cancelto{0}{(b-b)^2}}{2} + 2\frac{\cancelto{0}{(b-b)^3}}{3} \\
&\qquad - (b-a)\frac{(a-b)^2}{2} - 2\frac{(a-b)^3}{3}\Bigg] \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left[-\frac{(a-b)^3}{2} + \frac{2(b-a)^3}{3}\right] \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{6} = \frac{b-a}{6} \qquad \therefore\ w_0 = \frac{b-a}{6}
\end{aligned}
$$

Ahora, integrando se obtiene que:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \frac{1}{(b-a)^2}\left[(b-a)\frac{(x-b)^2}{2} + 2\frac{(x-b)^3}{3}\right]\Bigg|_a^b \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\Bigg[(b-a)\frac{\cancelto{0}{(b-b)^2}}{2} + 2\frac{\cancelto{0}{(b-b)^3}}{3} \\
&\qquad - (b-a)\frac{(a-b)^2}{2} - 2\frac{(a-b)^3}{3}\Bigg] \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left[-\frac{(a-b)^3}{2} + \frac{2(b-a)^3}{3}\right] \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{6} = \frac{b-a}{6} \qquad \therefore\ w_0 = \frac{b-a}{6}
\end{aligned}$$

Cuadraturas más conocidas

Ahora, integrando se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \frac{1}{(b-a)^2}\left[(b-a)\frac{(x-b)^2}{2} + 2\frac{(x-b)^3}{3}\right]\Bigg|_a^b \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\Bigg[(b-a)\frac{\cancelto{0}{(b-b)^2}}{2} + 2\frac{\cancelto{0}{(b-b)^3}}{3} \\
&\qquad - (b-a)\frac{(a-b)^2}{2} - 2\frac{(a-b)^3}{3}\Bigg] \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left[-\frac{(a-b)^3}{2} + \frac{2(b-a)^3}{3}\right] \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{6} = \frac{b-a}{6} \qquad \therefore\ w_0 = \frac{b-a}{6}
\end{aligned}
$$

Cuadraturas más conocidas

Similarmente, se puede probar que:

$$w_1 = \frac{2(b-a)}{3} \qquad \text{y} \qquad w_2 = \frac{b-a}{6}$$

y con esto:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \\
&= \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{2(b-a)}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} f(b) \\
&= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]
\end{aligned}$$

Cuadraturas más conocidas

Similarmente, se puede probar que:

$$w_1 = \frac{2(b-a)}{3} \qquad \text{y} \qquad w_2 = \frac{b-a}{6}$$

y con esto:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \\
&= \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{2(b-a)}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} f(b) \\
&= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]
\end{aligned}$$

Cuadraturas más conocidas

Similarmente, se puede probar que:

$$w_1 = \frac{2(b-a)}{3} \qquad \text{y} \qquad w_2 = \frac{b-a}{6}$$

y con esto:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \\
&= \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{2(b-a)}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} f(b) \\
&= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]
\end{aligned}$$

Cuadraturas más conocidas

Similarmente, se puede probar que:

$$w_1 = \frac{2(b-a)}{3} \qquad \text{y} \qquad w_2 = \frac{b-a}{6}$$

y con esto:

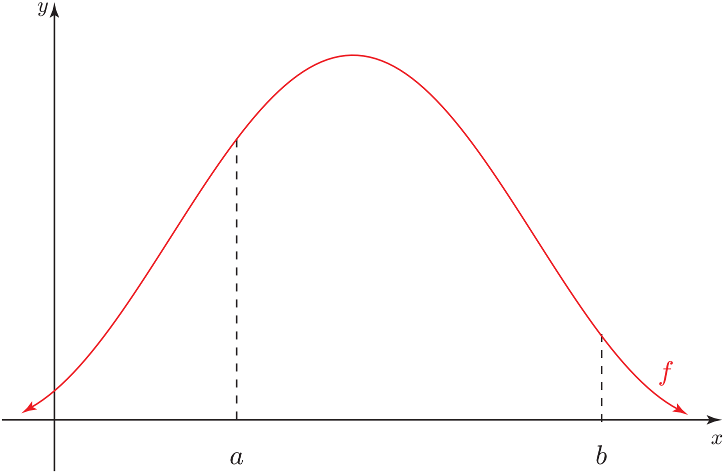
$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \\
&= \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{2(b-a)}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} f(b) \\
&= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]
\end{aligned}$$

Definición

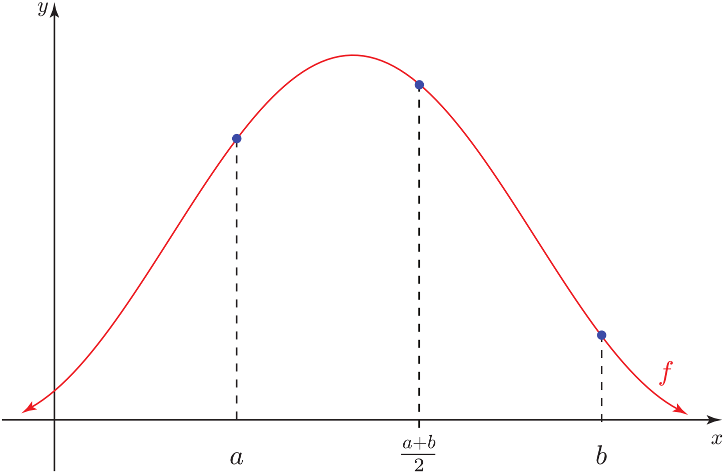
Se define la **regla de Simpson** dada por:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

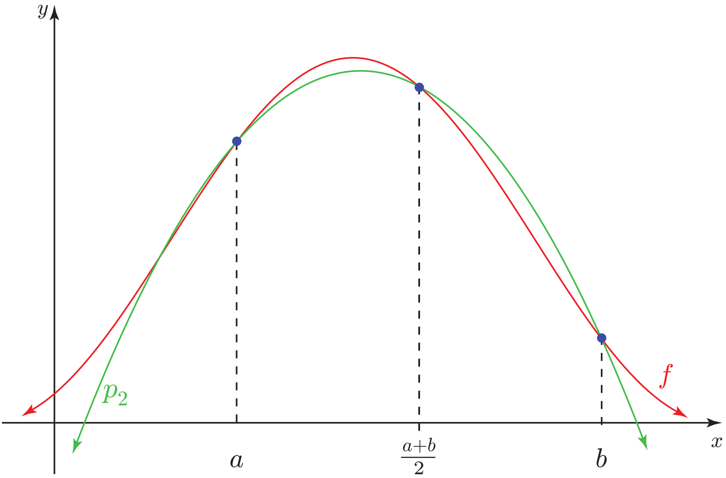
Regla de Simpson



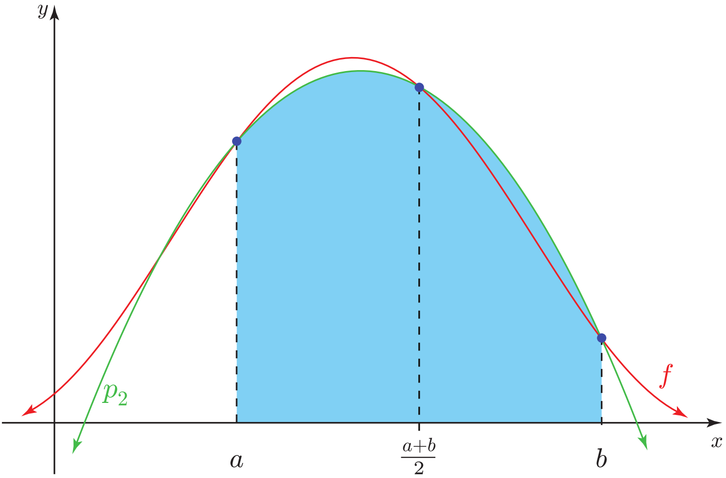
Regla de Simpson



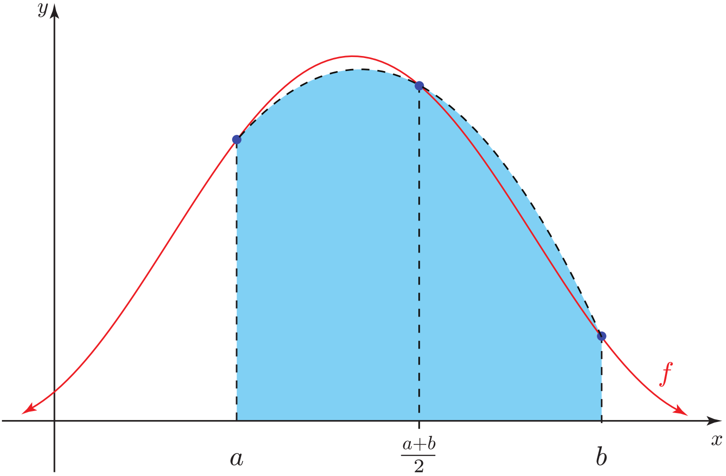
Regla de Simpson



Regla de Simpson



Regla de Simpson



Ejemplo

Utilizando ambas reglas de cuadraturas, aproxime el valor de:

$$I := \int_1^3 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0.9025694576\ldots$$

Solución

- **Regla del trapecio:** Se tiene que

$$I \approx \frac{3-1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(1)}{1}+\frac{\operatorname{sen}(3)}{3}\right] = 0.8885109875$$

Error relativo: $\dfrac{|0.9025694576 - 0.8885109875|}{|0.9025694576|} = 0.01558$

- **Regla de Simpson:** Observe primero que el punto medio corresponde a $\frac{3+1}{2} = 2$ y así:

$$I \approx \frac{3-1}{6}\left[\frac{\operatorname{sen}(1)}{1} + 4\cdot\frac{\operatorname{sen}(2)}{2}+\frac{\operatorname{sen}(3)}{3}\right] \approx 0.9023686137$$

Error relativo: $\dfrac{|0.9025694576 - 0.9023686137|}{|0.9025694576|} = 0.00022$

Solución

- **Regla del trapecio:** Se tiene que

$$I \approx \frac{3-1}{2}\left[\frac{\text{sen}(1)}{1}+\frac{\text{sen}(3)}{3}\right] = 0.8885109875$$

$$\textit{Error relativo:}\ \frac{|0.9025694576-0.8885109875|}{|0.9025694576|} = 0.01558$$

- **Regla de Simpson:** Observe primero que el punto medio corresponde a $\frac{3+1}{2}=2$ y así:

$$I \approx \frac{3-1}{6}\left[\frac{\text{sen}(1)}{1}+4\cdot\frac{\text{sen}(2)}{2}+\frac{\text{sen}(3)}{3}\right] \approx 0.9023686137$$

$$\textit{Error relativo:}\ \frac{|0.9025694576-0.9023686137|}{|0.9025694576|} = 0.00022$$

Solución

- **Regla del trapecio:** Se tiene que

$$I \approx \frac{3-1}{2}\left[\frac{\text{sen}(1)}{1}+\frac{\text{sen}(3)}{3}\right] = 0.8885109875$$

$$\textit{Error relativo:}\ \frac{|0.9025694576 - 0.8885109875|}{|0.9025694576|} = 0.01558$$

- **Regla de Simpson:** Observe primero que el punto medio corresponde a $\frac{3+1}{2} = 2$ y así:

$$I \approx \frac{3-1}{6}\left[\frac{\text{sen}(1)}{1} + 4\cdot\frac{\text{sen}(2)}{2}+\frac{\text{sen}(3)}{3}\right] \approx 0.9023686137$$

$$\textit{Error relativo:}\ \frac{|0.9025694576 - 0.9023686137|}{|0.9025694576|} = 0.00022$$

Solución

- **Regla del trapecio:** Se tiene que

$$I \approx \frac{3-1}{2}\left[\frac{\text{sen}(1)}{1}+\frac{\text{sen}(3)}{3}\right] = 0.8885109875$$

$$\textit{Error relativo:}\ \frac{|0.9025694576 - 0.8885109875|}{|0.9025694576|} = 0.01558$$

- **Regla de Simpson:** Observe primero que el punto medio corresponde a $\frac{3+1}{2} = 2$ y así:

$$I \approx \frac{3-1}{6}\left[\frac{\text{sen}(1)}{1}+4\cdot\frac{\text{sen}(2)}{2}+\frac{\text{sen}(3)}{3}\right] \approx 0.9023686137$$

$$\textit{Error relativo:}\ \frac{|0.9025694576 - 0.9023686137|}{|0.9025694576|} = 0.00022$$

Ejercicio

Ejercicio

Utilizando ambas reglas de cuadraturas, aproxime el valor de:

$$I \; := \; \int_0^{\pi} \cos(x^2)\, \mathrm{d}x \; \approx \; 0.5656935142\ldots$$

Solución:

- **Regla del trapecio:** $I \approx \quad 0.152861476$
- **Regla de Simpson:** $I \approx -1.585212535$

Ejercicio

Ejercicio

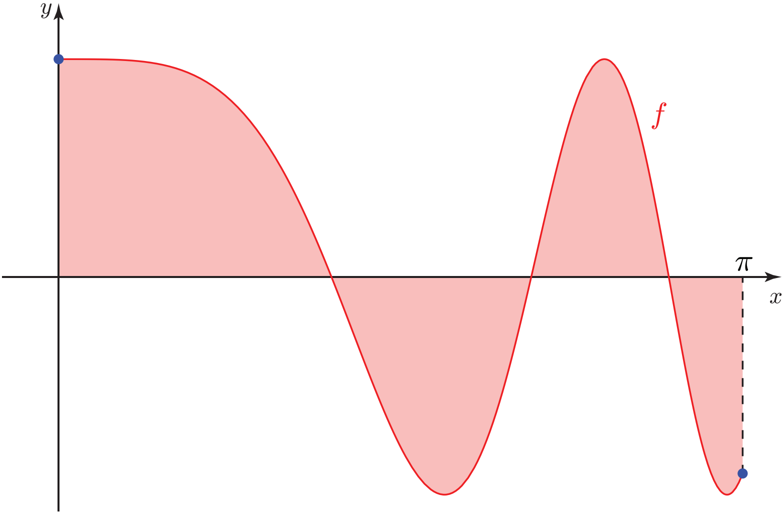
Utilizando ambas reglas de cuadraturas, aproxime el valor de:

$$I := \int_0^{\pi} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x \approx 0.5656935142\ldots$$

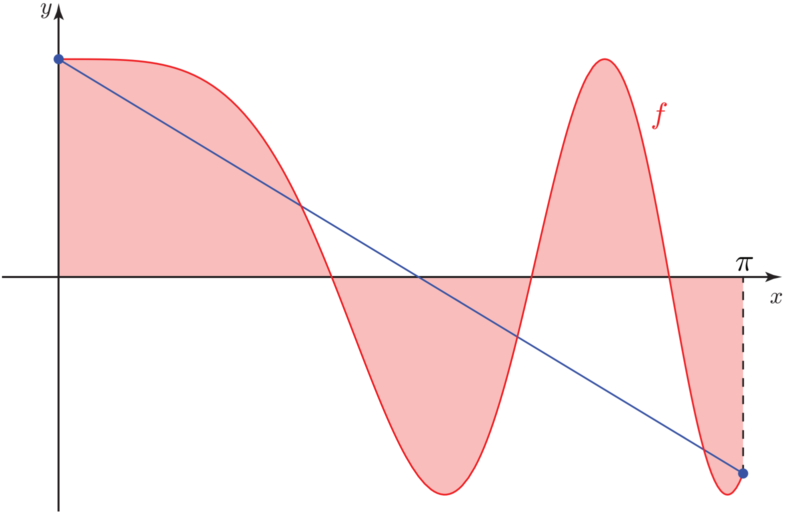
Solución:

- **Regla del trapecio:** $I \approx 0.152861476$
- **Regla de Simpson:** $I \approx -1.585212535$

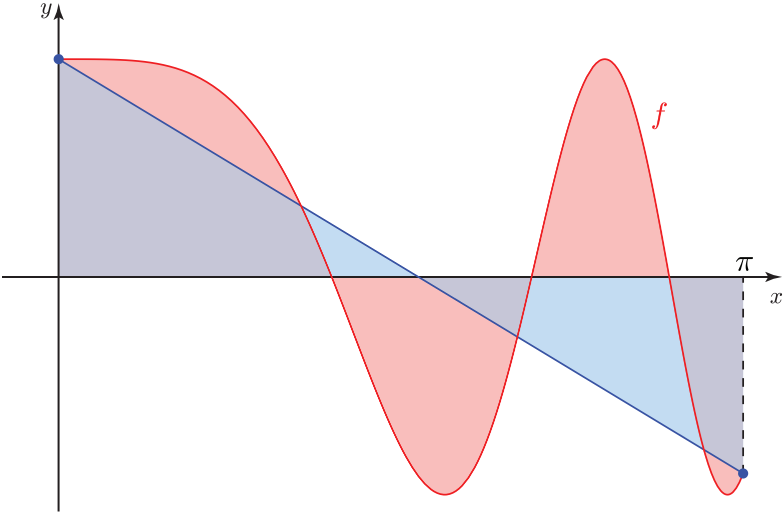
Situación gráfica



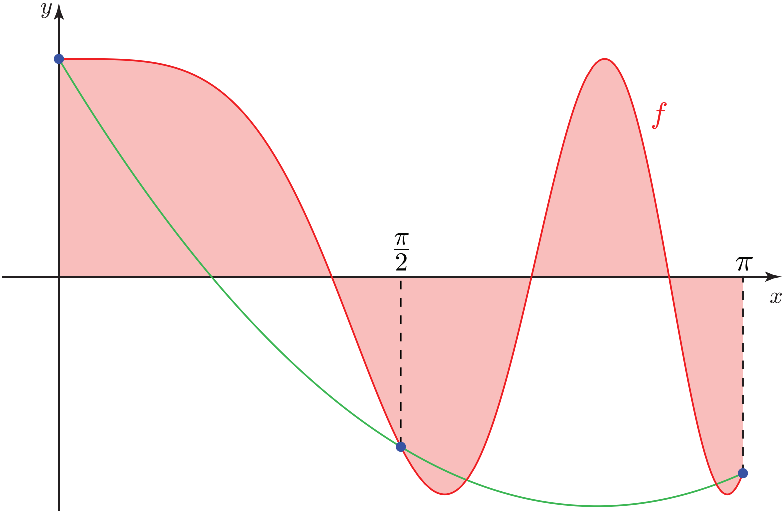
Situación gráfica: Regla del trapecio



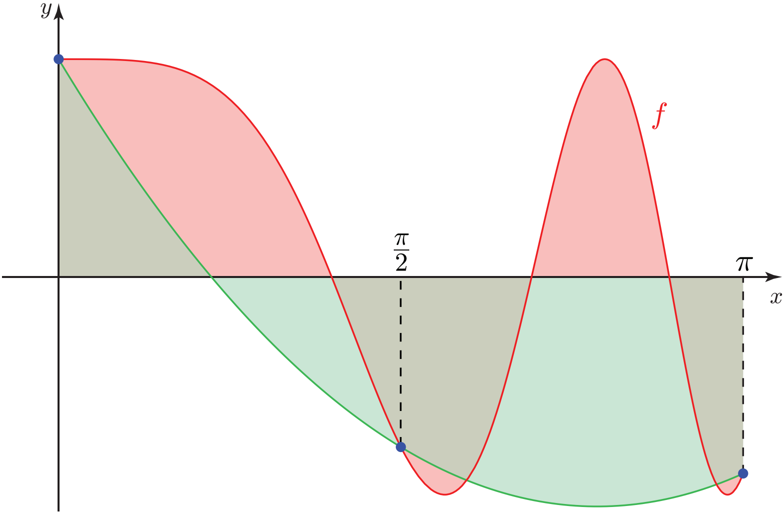
Situación gráfica: Regla del trapecio



Situación gráfica: Regla de Simpson



Situación gráfica: Regla de Simpson



Observación

De acuerdo con lo anterior, es importante tener una forma de medir el error en las aproximaciones obtenidas, sin necesidad de tener el valor exacto de la integral.

Estimado de error

Definición

El **error** $E_n(f)$ obtenido al aproximar la integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, por una cuadratura $\sum\limits_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$, está definido por:

$$E_n(f) \;:=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k).$$

Observación: En el caso de las cuadraturas de Newton-Cotes, no es difícil observar que:

$$E_n(f) \;=\; \int_a^b f(x) - p_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Estimado de error

Definición

El **error** $E_n(f)$ obtenido al aproximar la integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, por una cuadratura $\sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$, está definido por:

$$E_n(f) \;:=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k).$$

Observación: En el caso de las cuadraturas de Newton-Cotes, no es difícil observar que:

$$E_n(f) \;=\; \int_a^b f(x) - p_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Estimado de error

Por otro lado, recordando del tema de interpolación que:

$$|f(x) - p_n(x)| \;\leq\; \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\pi_{n+1}(x)|$$

donde $\pi_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. Lo que permite establece que:

$$|E_n(f)| \;\leq\; \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b |\pi_{n+1}(x)|\, \mathrm{d}x.$$

Estimado de error

Por otro lado, recordando del tema de interpolación que:

$$|f(x) - p_n(x)| \;\leq\; \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\pi_{n+1}(x)|$$

donde $\pi_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. Lo que permite establece que:

$$|E_n(f)| \;\leq\; \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b |\pi_{n+1}(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Recordemos que $x_0 = a$ y $x_1 = b$, es decir $n = 1$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
|E_1(f)| &\leq \frac{M_2}{2} \int_a^b |(x-a)(x-b)| \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{M_2}{2} \int_a^b (x-a)(b-x) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{M_2}{2} \cdot \frac{(b-a)^3}{6} \\
&= \frac{h^3}{12} M_2
\end{aligned}
$$

donde $h := b - a$.

Estimado de error de la regla del trapecio

Recordemos que $x_0 = a$ y $x_1 = b$, es decir $n = 1$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
|E_1(f)| &\leq \frac{M_2}{2}\int_a^b |(x-a)(x-b)|\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{M_2}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{M_2}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{6} \\
&= \frac{h^3}{12}M_2
\end{aligned}
$$

donde $h := b - a$.

Estimado de error de la regla del trapecio

Recordemos que $x_0 = a$ y $x_1 = b$, es decir $n = 1$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
|E_1(f)| &\leq \frac{M_2}{2}\int_a^b |(x-a)(x-b)|\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{M_2}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{M_2}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{6} \\
&= \frac{h^3}{12}M_2
\end{aligned}
$$

donde $h := b - a$.

Recordemos que $x_0 = a$ y $x_1 = b$, es decir $n = 1$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
|E_1(f)| &\leq \frac{M_2}{2} \int_a^b |(x-a)(x-b)| \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{M_2}{2} \int_a^b (x-a)(b-x) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{M_2}{2} \cdot \frac{(b-a)^3}{6} \\
&= \frac{h^3}{12} M_2
\end{aligned}
$$

donde $h := b - a$.

Estimado de error de la regla del trapecio

Recordemos que $x_0 = a$ y $x_1 = b$, es decir $n = 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} |E_1(f)| &\leq \frac{M_2}{2}\int_a^b |(x-a)(x-b)|\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{M_2}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{M_2}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{6} \\ &= \frac{h^3}{12}M_2 \end{aligned}$$

donde $h := b - a$.

Estimado de error de la regla del trapecio

Teorema

Sea f una función continua sobre $[a, b]$, con segunda derivada continua sobre $[a, b]$. Entonces:

$$|E_1(f)| \;\leq\; \frac{h^3}{12} M_2 \,,$$

donde $h := b - a$.

Estimado de error de la regla de Simpson

Usando $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$, se puede probar para la regla de Simpson que:

$$|E_2(f)| \;\leq\; \frac{4h^4}{49} M_3$$

Sin embargo, esta cota de error no es muy precisa, por lo que se considera una estrategia diferente para obtener la siguiente cota:

Teorema

Sea f una función continua sobre $[a,b]$, con cuarta derivada continua sobre $[a,b]$. Entonces:

$$|E_2(f)| \;\leq\; \frac{h^5}{90} M_4\,,$$

donde $h := \frac{b-a}{2}$.

Estimado de error de la regla de Simpson

Usando $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$, se puede probar para la regla de Simpson que:

$$|E_2(f)| \;\leq\; \frac{4h^4}{49} M_3$$

Sin embargo, esta cota de error no es muy precisa, por lo que se considera una estrategia diferente para obtener la siguiente cota:

Teorema

Sea f una función continua sobre $[a, b]$, con cuarta derivada continua sobre $[a, b]$. Entonces:

$$|E_2(f)| \;\leq\; \frac{h^5}{90} M_4\,,$$

donde $h := \frac{b-a}{2}$.

Ejemplo

Considere

$$\int_2^5 \ln(x)\,\mathrm{d}x \;=\; [x\ln(x) - x]\Big|_2^5 \;\approx\; 3.660895201$$

Determine una cota de error para la regla del trapecio y la regla de Simpson.

Solución

Primero, observe que:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x}\\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2}\\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3}\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4}\\
f^{(5)}(x) &= \frac{24}{x^5}
\end{aligned}
$$

Solución: Regla del trapecio

Para la cota de error de la regla del trapecio se requiere hallar $M_2 := \max_{x\in[2,5]} |f''(x)|$. Para ello, primero observe que $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ no posee ceros, por lo que el máximo de $|f''(x)|$ se alcanza en los extremos del intervalo $[2,5]$. Así, se tiene que:

- $|f''(2)| = \left|-\dfrac{1}{2^2}\right| = \dfrac{1}{4} = 0.25$
- $|f''(5)| = \left|-\dfrac{1}{5^2}\right| = \dfrac{1}{25} = 0.04$

De esta forma, se tiene que $M_2 = \frac{1}{4}$ y, por lo tanto:

$$|E_1(f)| \leq \frac{h^3}{12}M_2 = \frac{(5-2)^3}{12} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{16} = 0.5625.$$

Solución: Regla del trapecio

Para la cota de error de la regla del trapecio se requiere hallar $M_2 := \max\limits_{x\in[2,5]} |f''(x)|$. Para ello, primero observe que $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ no posee ceros, por lo que el máximo de $|f''(x)|$ se alcanza en los extremos del intervalo $[2,5]$. Así, se tiene que:

- $|f''(2)| = \left|-\dfrac{1}{2^2}\right| = \dfrac{1}{4} = 0.25$
- $|f''(5)| = \left|-\dfrac{1}{5^2}\right| = \dfrac{1}{25} = 0.04$

De esta forma, se tiene que $M_2 = \frac{1}{4}$ y, por lo tanto:

$$|E_1(f)| \leq \frac{h^3}{12}M_2 = \frac{(5-2)^3}{12}\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{16} = 0.5625.$$

Solución: Regla del trapecio

Para la cota de error de la regla del trapecio se requiere hallar $M_2 := \max_{x\in[2,5]} |f''(x)|$. Para ello, primero observe que $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ no posee ceros, por lo que el máximo de $|f''(x)|$ se alcanza en los extremos del intervalo $[2,5]$. Así, se tiene que:

- $|f''(2)| \;=\; \left|-\dfrac{1}{2^2}\right| \;=\; \dfrac{1}{4} \;=\; 0.25$
- $|f''(5)| \;=\; \left|-\dfrac{1}{5^2}\right| \;=\; \dfrac{1}{25} \;=\; 0.04$

De esta forma, se tiene que $M_2 = \frac{1}{4}$ y, por lo tanto:

$$|E_1(f)| \;\leq\; \frac{h^3}{12}M_2 \;=\; \frac{(5-2)^3}{12}\cdot\frac{1}{4} \;=\; \frac{9}{16} \;=\; 0.5625.$$

Solución: Regla del trapecio

Para la cota de error de la regla del trapecio se requiere hallar $M_2 := \max\limits_{x\in[2,5]} |f''(x)|$. Para ello, primero observe que $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ no posee ceros, por lo que el máximo de $|f''(x)|$ se alcanza en los extremos del intervalo $[2,5]$. Así, se tiene que:

- $|f''(2)| = \left|-\dfrac{1}{2^2}\right| = \dfrac{1}{4} = 0.25$
- $|f''(5)| = \left|-\dfrac{1}{5^2}\right| = \dfrac{1}{25} = 0.04$

De esta forma, se tiene que $M_2 = \frac{1}{4}$ y, por lo tanto:

$$|E_1(f)| \leq \frac{h^3}{12} M_2 = \frac{(5-2)^3}{12} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{16} = 0.5625.$$

Solución: Regla de Simpson

Similarmente, nótese primero que $f^{(5)}(x) = \frac{24}{x^5}$ no posee ceros, y con ello M_4 se obtiene de:

- $$|f^{(4)}(2)| = \left|-\frac{6}{2^4}\right| = \frac{3}{8} = 0.375$$
- $$|f^{(4)}(5)| = \left|-\frac{6}{5^4}\right| = \frac{6}{625} = 0.0096$$

Por lo tanto, se concluye que $M_4 = \frac{3}{8}$. Finalmente, se deduce que:

$$|E_2(f)| \leq \frac{h^5}{90}M_4 = \frac{\left(\frac{5-2}{2}\right)^5}{90} \cdot \frac{3}{8} = \frac{81}{2560} \approx 0.03164.$$

Solución: Regla de Simpson

Similarmente, nótese primero que $f^{(5)}(x) = \frac{24}{x^5}$ no posee ceros, y con ello M_4 se obtiene de:

- $|f^{(4)}(2)| \; = \; \left|-\dfrac{6}{2^4}\right| \; = \; \dfrac{3}{8} \; = \; 0.375$
- $|f^{(4)}(5)| \; = \; \left|-\dfrac{6}{5^4}\right| \; = \; \dfrac{6}{625} \; = \; 0.0096$

Por lo tanto, se concluye que $M_4 = \frac{3}{8}$. Finalmente, se deduce que:

$$|E_2(f)| \; \leq \; \frac{h^5}{90} M_4 \; = \; \frac{\left(\frac{5-2}{2}\right)^5}{90} \cdot \frac{3}{8} \; = \; \frac{81}{2560} \; \approx \; 0.03164.$$

Observación

Como algo adicional, utilizando la regla del trapecio, se tiene:

$$\int_2^5 \ln(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; \frac{3}{2}\left[\ln(2)+\ln(5)\right] \;\approx\; 3.453877639,$$

mientras que para la regla de Simpson:

$$\int_2^5 \ln(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; \frac{1.5}{3}\left[\ln(2)+4\ln(3.5)+\ln(5)\right] \;\approx\; 3.656818483.$$

De esta forma, se puede verificar que el error absoluto de la regla del trapecio es 0.207017562, mientras que el de la regla de Simpson corresponde a 0.004076718.

Ahora, nótese que ambos errores son menores que las respectivas cotas previamente determinadas.

Observación

Como algo adicional, utilizando la regla del trapecio, se tiene:

$$\int_2^5 \ln(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{3}{2}\left[\ln(2)+\ln(5)\right] \approx 3.453877639,$$

mientras que para la regla de Simpson:

$$\int_2^5 \ln(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1.5}{3}\left[\ln(2)+4\ln(3.5)+\ln(5)\right] \approx 3.656818483.$$

De esta forma, se puede verificar que el error absoluto de la regla del trapecio es 0.207017562, mientras que el de la regla de Simpson corresponde a 0.004076718.

Ahora, nótese que ambos errores son menores que las respectivas cotas previamente determinadas.

Observación

Como algo adicional, utilizando la regla del trapecio, se tiene:

$$\int_2^5 \ln(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; \frac{3}{2}\left[\ln(2)+\ln(5)\right] \;\approx\; 3.453877639,$$

mientras que para la regla de Simpson:

$$\int_2^5 \ln(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; \frac{1.5}{3}\left[\ln(2)+4\ln(3.5)+\ln(5)\right] \;\approx\; 3.656818483.$$

De esta forma, se puede verificar que el error absoluto de la regla del trapecio es 0.207017562, mientras que el de la regla de Simpson corresponde a 0.004076718.

Ahora, nótese que ambos errores son menores que las respectivas cotas previamente determinadas.

Ejemplo

Considere la siguiente integral $I := \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x.$

a) Utilice la regla de Simpson para aproximar I.

b) Determine la cota de error correspondiente.

Solución

a) Se tiene el punto medio $\frac{-1+1}{2} = 0$ y, con ello, se tiene que:

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{1+1}{6}\Big[f(-1) + 4f(0) + 2f(1)\Big] \\ &= \frac{1}{3}\Big[0.2420 + 4 \cdot 0.3989 + 0.2420\Big] \\ &= 0.6932 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $I \approx 0.6932$.

Solución

$b)$ La cota de error para la regla de Simpson, corresponde a:

$$|E_2(f)| \ \leq \ \frac{h^5}{90} M_4 \,,$$

donde como $h = \frac{1+1}{2} = 1$, se deduce que:

$$|E_2(f)| \ \leq \ \frac{M_4}{90} \,.$$

Solución

Ahora, para $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, nótese que:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \\
f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{2}} \\
f'''(x) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} (x^3 - 3x) e^{-\frac{x^2}{2}} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x^4 - 6x^2 + 3) e^{-\frac{x^2}{2}} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} x(x^4 - 10x^2 + 15) e^{-\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}
$$

Solución

Así, observe que $f^{(5)}(x) = 0$ se cumple para:

$$x = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 = 5 \pm \sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{10}}\,,$$

por lo que los puntos críticos de $f^{(4)}$ corresponden a $x = -2.8570$, $x = -1.3556$, $x = 0$, $x = 1.3556$ y $x = 2.8570$. Luego, observe que solo $x = 0$ pertenece a $[-1, 1]$ y dado que

$$|f^{(4)}(0)| = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \approx 1.1968$$

y

$$|f^{(4)}(\pm 1)| = \frac{2e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4839\,.$$

Solución

Así, observe que $f^{(5)}(x) = 0$ se cumple para:

$$x = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 = 5 \pm \sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{10}}\,,$$

por lo que los puntos críticos de $f^{(4)}$ corresponden a $x = -2.8570$, $x = -1.3556$, $x = 0$, $x = 1.3556$ y $x = 2.8570$. Luego, observe que solo $x = 0$ pertenece a $[-1, 1]$ y dado que

$$|f^{(4)}(0)| = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \approx 1.1968$$

y

$$|f^{(4)}(\pm 1)| = \frac{2e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4839\,.$$

Solución

De acuerdo con lo anterior, se deduce que:

$$M_4 \;:=\; \max_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)| \;=\; |f^{(4)}(0)| \;=\; 1.1968\,.$$

Finalmente, se tiene que:

$$|E_2(f)| \;\leq\; \frac{1.1968}{90} \;=\; 0.01329777778\,.$$

Solución

De acuerdo con lo anterior, se deduce que:

$$M_4 \;:=\; \max_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)| \;=\; |f^{(4)}(0)| \;=\; 1.1968\,.$$

Finalmente, se tiene que:

$$|E_2(f)| \;\leq\; \frac{1.1968}{90} \;=\; 0.01329777778\,.$$

Ejercicio

Ejercicio (III Examen, IIC-2017)

Considere la integral:

$$\begin{aligned} I &:= \int_{-1}^{1}\left[5+\ln(x^2+x+1)^3-2\sqrt{3}(2x+1)\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{9}{2}\ln(3)-\frac{5\pi}{6}\sqrt{3}+4 \;\approx\; 4.40925689 \end{aligned}$$

a) Utilice la regla del trapecio para obtener una aproximación de la integral I. ¿Cuántos dígitos significativos posee esta aproximación?

b) Muestre que la segunda derivada de la función que se integra en I, corresponde a $f''(x) = \dfrac{-6}{x^2+x+1}$.

c) Determine la cota de error.

Ejercicio

Ejercicio para la casa

Determine un cota de error al aproximar

$$\int_0^2 \cos(-2x)\,\mathrm{d}x\,,$$

con las reglas del trapecio y de Simpson.

Observaciones

- Recordemos que si se aplica un cambio de variable a una integral es posible modificar su intervalo de integración. Por ejemplo, si $x = (b-a)t + a$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= (b-a)\int_0^1 f\big((b-a)t+a\big)\,\mathrm{d}t \\ &\approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} \widehat{w}_k f\big((b-a)\widehat{t}_k + a\big) \end{aligned}$$

donde $\widehat{w}_k$ y $\widehat{t}_k$ conforman una cuadratura definida en $[0,1]$.

Es decir, que es posible usar una cuadratura defina en el intervalo $[0,1]$ en cualquier otro intervalo $[a,b]$.

Observaciones

- Recordemos que si se aplica un cambio de variable a una integral es posible modificar su intervalo de integración. Por ejemplo, si $x = (b-a)t + a$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= (b-a)\int_0^1 f\big((b-a)t+a\big)\,\mathrm{d}t \\ &\approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} \widehat{w}_k f\big((b-a)\widehat{t}_k + a\big) \end{aligned}$$

  donde $\widehat{w}_k$ y $\widehat{t}_k$ conforman una cuadratura definida en $[0,1]$.

  Es decir, que es posible usar una cuadratura defina en el intervalo $[0,1]$ en cualquier otro intervalo $[a,b]$.

Observaciones

- Recordemos que si se aplica un cambio de variable a una integral es posible modificar su intervalo de integración. Por ejemplo, si $x = (b-a)t + a$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= (b-a)\int_0^1 f\big((b-a)t+a\big)\,\mathrm{d}t \\ &\approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} \widehat{w}_k f\big((b-a)\widehat{t}_k + a\big) \end{aligned}$$

donde $\widehat{w}_k$ y $\widehat{t}_k$ conforman una cuadratura definida en $[0,1]$.

Es decir, que es posible usar una cuadratura defina en el intervalo $[0,1]$ en cualquier otro intervalo $[a,b]$.

Observaciones

- No es necesario que los puntos de cuadratura sean igualmente espaciados. Por ejemplo, considere la regla de cuadratura:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; -\frac{1}{6}f(0) + \frac{8}{9}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{18}f(1)\,.$$

- Por otro lado, tampoco es necesario que los puntos estén dentro del intervalo de integración. Por ejemplo, observe la siguiente regla de cuadratura:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; -\frac{1}{12}f(-1) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{5}{12}f(1)\,,$$

la cual es exacta para polinomios de grado ≤ 2.

Observaciones

- No es necesario que los puntos de cuadratura sean igualmente espaciados. Por ejemplo, considere la regla de cuadratura:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; -\frac{1}{6}f(0) + \frac{8}{9}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{18}f(1)\,.$$

- Por otro lado, tampoco es necesario que los puntos estén dentro del intervalo de integración. Por ejemplo, observe la siguiente regla de cuadratura:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; -\frac{1}{12}f(-1) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{5}{12}f(1)\,,$$

la cual es exacta para polinomios de grado ≤ 2.

Definición

Se dice que una regla de cuadratura es **exacta para polinomios de grado n**, si esta siempre brinda el resultado preciso de la integral cuando la función que se integra es un polinomio de grado menor o igual que n.

Observación: Para determinar el mayor grado polinomial, para el cual una cuadratura es exacta, es suficiente con utilizar la base canónica de los polinomios, tal y como se muestra a continuación.

Exactitud de una cuadratura

Definición

Se dice que una regla de cuadratura es **exacta para polinomios de grado $\boldsymbol{n}$**, si esta siempre brinda el resultado preciso de la integral cuando la función que se integra es un polinomio de grado menor o igual que n.

Observación: Para determinar el mayor grado polinomial, para el cual una cuadratura es exacta, es suficiente con utilizar la base canónica de los polinomios, tal y como se muestra a continuación.

Exactitud de la regla del trapecio

- Para $f(x) := x^0 = 1$, nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b 1\,\mathrm{d}x \;=\; b-a$$

y además:

$$\frac{b-a}{2}\big[f(a)+f(b)\big] \;=\; \frac{b-a}{2}[1+1] \;=\; b-a$$

lo que muestra que es exacta para polinomios de grado ≤ 0.

Exactitud de la regla del trapecio

- Para $f(x) := x^0 = 1$, nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b 1\,\mathrm{d}x \;=\; b-a$$

y además:

$$\frac{b-a}{2}\big[f(a)+f(b)\big] \;=\; \frac{b-a}{2}[1+1] \;=\; b-a$$

lo que muestra que es exacta para polinomios de grado ≤ 0.

Exactitud de la regla del trapecio

- Para $f(x) := x^0 = 1$, nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b 1\,\mathrm{d}x \;=\; b-a$$

y además:

$$\frac{b-a}{2}\big[f(a)+f(b)\big] \;=\; \frac{b-a}{2}[1+1] \;=\; b-a$$

lo que muestra que es exacta para polinomios de grado ≤ 0.

Exactitud de la regla del trapecio

- Para $f(x) := x$, nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$$

y además:

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] &= \frac{b-a}{2}[a+b] \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2} \\ &= \frac{b^2-a^2}{2}\end{aligned}$$

lo que muestra que es exacta para polinomios de grado ≤ 1.

Exactitud de la regla del trapecio

- Para $f(x) := x$, nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$$

y además:

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] &= \frac{b-a}{2}[a+b] \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2} \\ &= \frac{b^2-a^2}{2}\end{aligned}$$

lo que muestra que es exacta para polinomios de grado ≤ 1.

Exactitud de la regla del trapecio

- Para $f(x) := x$, nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b x\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_a^b \;=\; \frac{b^2-a^2}{2}$$

y además:

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{2}\big[f(a)+f(b)\big] &= \frac{b-a}{2}[a+b] \\
&= \frac{(b-a)(b+a)}{2} \\
&= \frac{b^2-a^2}{2}
\end{aligned}$$

lo que muestra que es exacta para polinomios de grado ≤ 1.

Exactitud de la regla del trapecio

- Para $f(x) := x^2$, nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b x^2\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_a^b \;=\; \frac{b^3-a^3}{3}$$

y además:

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \;&=\; \frac{b-a}{2}[a^2+b^2] \;=\; \frac{(b-a)(b^2+a^2)}{2}\\ &=\; \frac{b^3+a^2b-ab^2-a^3}{2}\end{aligned}$$

lo que muestra que no es exacta para grado ≥ 2.

Exactitud de la regla del trapecio

- Para $f(x) := x^2$, nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

y además:

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] &= \frac{b-a}{2}[a^2 + b^2] = \frac{(b-a)(b^2+a^2)}{2} \\ &= \frac{b^3 + a^2 b - a b^2 - a^3}{2}\end{aligned}$$

lo que muestra que no es exacta para grado ≥ 2.

Exactitud de la regla del trapecio

- Para $f(x) := x^2$, nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b x^2\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_a^b \;=\; \frac{b^3 - a^3}{3}$$

y además:

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{2}\big[f(a)+f(b)\big] \;&=\; \frac{b-a}{2}[a^2+b^2] \;=\; \frac{(b-a)(b^2+a^2)}{2}\\ &=\; \frac{b^3 + a^2 b - a b^2 - a^3}{2}\end{aligned}$$

lo que muestra que no es exacta para grado ≥ 2.

Exactitud de la regla del trapecio

De acuerdo con lo anterior, se deduce que la regla del trapecio es exacta para polinomios de grado ≤ 1.

Ejercicio

Ejercicio

Determine el mayor grado polinomial, para el cual la regla de Simpson es exacta.

Ejercicio

Ejercicio para la casa (III Examen, IC-2018)

Para obtener la regla de cuadratura del trapecio, se utilizan los puntos $x_0 = a$ y $x_1 = b$ con el fin de construir el polinomio de interpolación.

a) Ahora, muestre que si se utilizan $x_0 = \frac{1}{3}(2a+b)$ y $x_1 = \frac{1}{3}(a+2b)$, en vez de los valores originales, se obtiene una nueva regla del trapecio dada por:

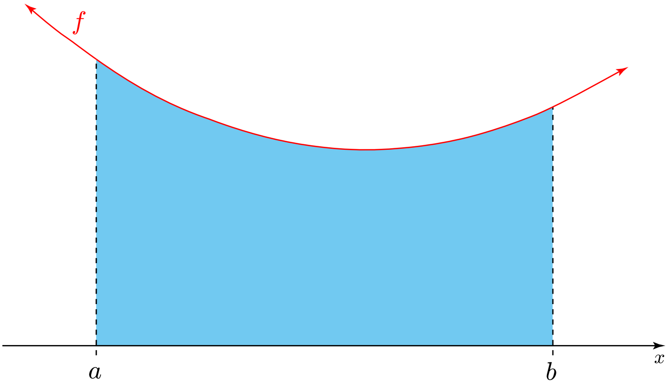
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right].$$

b) Determine el mayor grado polinomial, para el cual la cuadratura previa es exacta.

Organización de la presentación

Introducción

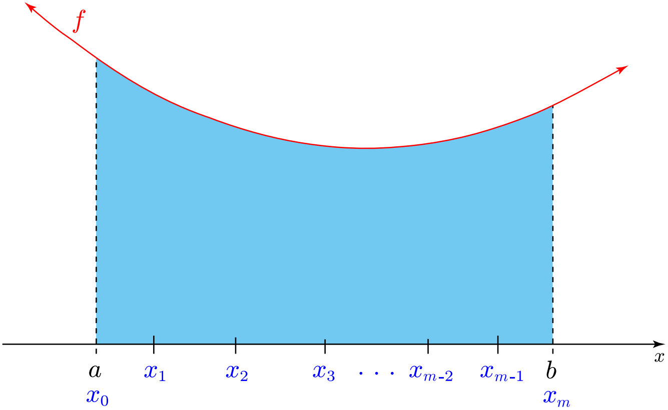
Una estrategia que mejora la precisión en la aproximación de la integral corresponde a la división del intervalo de integración.



Se crean m subintervalos, los cuales no necesariamente poseen la misma longitud.

Introducción

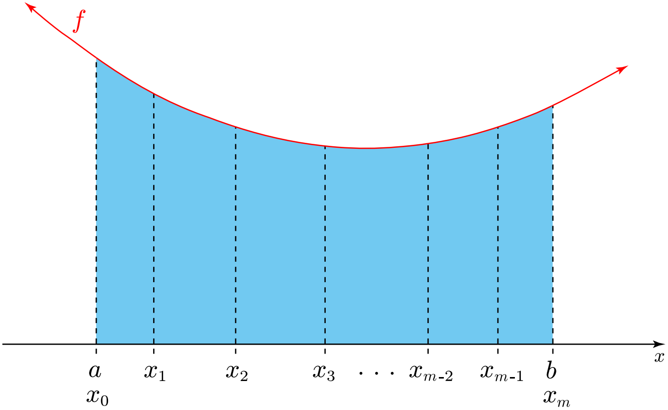
Una estrategia que mejora la precisión en la aproximación de la integral corresponde a la división del intervalo de integración.



Se crean m subintervalos, los cuales no necesariamente poseen la misma longitud.

Introducción

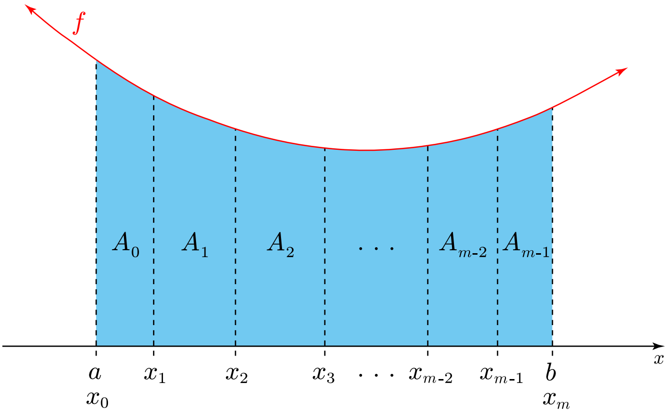
Una estrategia que mejora la precisión en la aproximación de la integral corresponde a la división del intervalo de integración.



Se crean m subintervalos, los cuales no necesariamente poseen la misma longitud.

Introducción

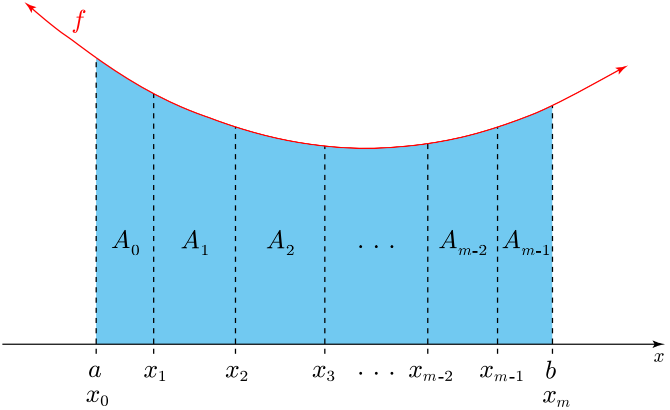
Una estrategia que mejora la precisión en la aproximación de la integral corresponde a la división del intervalo de integración.



Se crean m subintervalos, los cuales no necesariamente poseen la misma longitud.

Introducción

Una estrategia que mejora la precisión en la aproximación de la integral corresponde a la división del intervalo de integración.



Se crean m subintervalos, los cuales no necesariamente poseen la misma longitud.

Introducción

Por simplicidad, suponga que los puntos están igualmente espaciados, esto es

$$x_i = a + ih\,, \quad \text{con} \quad h := \frac{b-a}{m}$$

Luego, es claro que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \right\} = \sum_{i=0}^{m-1} A_i$$

donde si se usa una cuadratura para aproximar cada A_i, entonces se obtendrá una **cuadratura compuesta**.

Introducción

Por simplicidad, suponga que los puntos están igualmente espaciados, esto es

$$x_i \ = \ a + ih \, , \quad \text{con} \quad h := \frac{b-a}{m}$$

Luego, es claro que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ = \ \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \right\} \ = \ \sum_{i=0}^{m-1} A_i$$

donde si se usa una cuadratura para aproximar cada A_i, entonces se obtendrá una **cuadratura compuesta**.

Regla del trapecio compuesta

Nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1}\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

$$\approx \sum_{i=0}^{m-1}\left\{\frac{x_{i+1}-x_i}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\right\}$$

donde, si los puntos están todos a una distancia de $h := \frac{b-a}{m}$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{m-1}\left\{\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\right\}$$

$$= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{m-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

Regla del trapecio compuesta

Nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1}\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

$$\approx \sum_{i=0}^{m-1}\left\{\frac{x_{i+1}-x_i}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\right\}$$

donde, si los puntos están todos a una distancia de $h := \frac{b-a}{m}$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{m-1}\left\{\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\right\}$$

$$= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{m-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

Regla del trapecio compuesta

Nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1}\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

$$\approx \sum_{i=0}^{m-1}\left\{\frac{x_{i+1}-x_i}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\right\}$$

donde, si los puntos están todos a una distancia de $h := \frac{b-a}{m}$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{m-1}\left\{\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\right\}$$

$$= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{m-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

Regla del trapecio compuesta

Nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \right\}$$

$$\approx \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{x_{i+1} - x_i}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \right\}$$

donde, si los puntos están todos a una distancia de $h := \frac{b-a}{m}$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \right\}$$

$$= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{m-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

Regla del trapecio compuesta

Nótese que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \right\}$$

$$\approx \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{x_{i+1} - x_i}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \right\}$$

donde, si los puntos están todos a una distancia de $h := \frac{b-a}{m}$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \right\}$$

$$= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{m-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

Regla del trapecio compuesta

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad &\approx \quad \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{m-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})] \\
&= \quad \frac{h}{2}\Big\{[f(x_0)+f(x_1)]+[f(x_1)+f(x_2)] \\
&\qquad +[f(x_2)+f(x_3)]+\ \ldots \\
&\qquad +[f(x_{m-1})+f(x_m)]\Big\} \\
&= \quad \frac{h}{2}\Big\{f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots \\
&\qquad +2f(x_{m-2})+2f(x_{m-1})+f(x_m)\Big\}
\end{aligned}
$$

Regla del trapecio compuesta

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{m-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})] \\
&= \frac{h}{2}\Big\{[f(x_0)+f(x_1)]+[f(x_1)+f(x_2)] \\
&\quad +[f(x_2)+f(x_3)]+\ldots \\
&\quad +[f(x_{m-1})+f(x_m)]\Big\} \\
&= \frac{h}{2}\Big\{f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots \\
&\quad +2f(x_{m-2})+2f(x_{m-1})+f(x_m)\Big\}
\end{aligned}$$

Regla del trapecio compuesta

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right] \\
&= \frac{h}{2}\Big\{\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+\left[f(x_1)+f(x_2)\right] \\
&\qquad +\left[f(x_2)+f(x_3)\right]+\ \ldots \\
&\qquad +\left[f(x_{m-1})+f(x_m)\right]\Big\} \\
&= \frac{h}{2}\Big\{f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots \\
&\qquad +2f(x_{m-2})+2f(x_{m-1})+f(x_m)\Big\}
\end{aligned}$$

Regla del trapecio compuesta

Definición

Para $m \geq 2$, se define la **regla del trapecio compuesta** dada por:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_m)\right] + h\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \\ &= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)\right] \end{aligned}$$

donde $x_i := a + ih$, para todo $i = 0, 1, \ldots, m$, con $h := \frac{b-a}{m}$.

Ejemplo

Considere la integral

$$I \;:=\; \int_{-2}^{2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \;\approx\; 1.76416278$$

donde, aplicando la regla del trapecio, se obtiene que:

$$I \;\approx\; \frac{2-(-2)}{2}\left[e^{-(-2)^2} + e^{-(2)^2}\right] \;=\; 4e^{-4} \;=\; 0.0732625556$$

cuya aproximación es poco precisa.

Ejemplo

Considere la integral

$$I \;:=\; \int_{-2}^{2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \;\approx\; 1.76416278$$

donde, aplicando la regla del trapecio, se obtiene que:

$$I \;\approx\; \frac{2-(-2)}{2}\left[e^{-(-2)^2}+e^{-(2)^2}\right] \;=\; 4e^{-4} \;=\; 0.0732625556$$

cuya aproximación es poco precisa.

Ahora, utilizando la regla del trapecio compuesta con $m = 4$ subintervalos, observe que:

$$h = \frac{2-(-2)}{4} = 1$$

y con ello:

$$\begin{aligned} x_0 &= -2 \\ x_1 &= -2+1 = -1 \\ x_2 &= -1+1 = 0 \\ x_3 &= 0+1 = 1 \\ x_4 &= 1+1 = 2 \end{aligned}$$

Ejemplo

Ahora, utilizando la regla del trapecio compuesta con $m = 4$ subintervalos, observe que:

$$h = \frac{2-(-2)}{4} = 1$$

y con ello:

$$\begin{aligned} x_0 &= -2 \\ x_1 &= -2+1 = -1 \\ x_2 &= -1+1 = 0 \\ x_3 &= 0+1 = 1 \\ x_4 &= 1+1 = 2 \end{aligned}$$

Ejemplo

Ahora, utilizando la regla del trapecio compuesta con $m = 4$ subintervalos, observe que:

$$h = \frac{2 - (-2)}{4} = 1$$

y con ello:

$$\begin{aligned} x_0 &= -2 \\ x_1 &= -2 + 1 = -1 \\ x_2 &= -1 + 1 = 0 \\ x_3 &= 0 + 1 = 1 \\ x_4 &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Ejemplo

Ahora, utilizando la regla del trapecio compuesta con $m = 4$ subintervalos, observe que:

$$h = \frac{2 - (-2)}{4} = 1$$

y con ello:

$$\begin{aligned} x_0 &= -2 \\ x_1 &= -2 + 1 = -1 \\ x_2 &= -1 + 1 = 0 \\ x_3 &= 0 + 1 = 1 \\ x_4 &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Ejemplo

Ahora, utilizando la regla del trapecio compuesta con $m = 4$ subintervalos, observe que:

$$h = \frac{2 - (-2)}{4} = 1$$

y con ello:

$$\begin{aligned} x_0 &= -2 \\ x_1 &= -2+1 = -1 \\ x_2 &= -1+1 = 0 \\ x_3 &= 0+1 = 1 \\ x_4 &= 1+1 = 2 \end{aligned}$$

Ejemplo

Ahora, utilizando la regla del trapecio compuesta con $m = 4$ subintervalos, observe que:

$$h = \frac{2 - (-2)}{4} = 1$$

y con ello:

$$\begin{aligned}
x_0 &= -2 \\
x_1 &= -2 + 1 = -1 \\
x_2 &= -1 + 1 = 0 \\
x_3 &= 0 + 1 = 1 \\
x_4 &= 1 + 1 = 2
\end{aligned}$$

Ejemplo

Por lo tanto, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
I &\approx \frac{1}{2}\left[f(-2) + 2f(-1) + 2f(0) + 2f(1) + f(2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-(-2)^2} + 2e^{-(-1)^2} + 2e^{-(0)^2} + 2e^{-(1)^2} + e^{-(2)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2e^{-4^2} + 4e^{-1} + 2\right] \\
&= 1.754074521
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Por lo tanto, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
I &\approx \frac{1}{2}\left[f(-2) + 2f(-1) + 2f(0) + 2f(1) + f(2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-(-2)^2} + 2e^{-(-1)^2} + 2e^{-(0)^2} + 2e^{-(1)^2} + e^{-(2)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2e^{-4^2} + 4e^{-1} + 2\right] \\
&= 1.754074521
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Por lo tanto, se obtiene que:

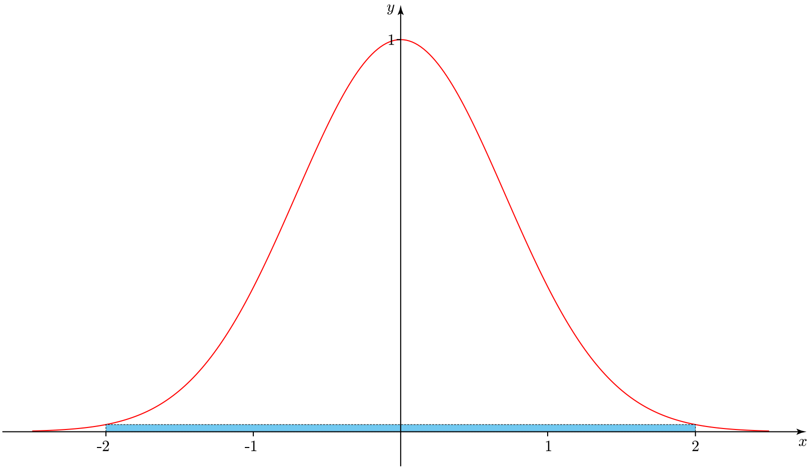
$$
\begin{aligned}
I &\approx \frac{1}{2}\left[f(-2) + 2f(-1) + 2f(0) + 2f(1) + f(2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-(-2)^2} + 2e^{-(-1)^2} + 2e^{-(0)^2} + 2e^{-(1)^2} + e^{-(2)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2e^{-4^2} + 4e^{-1} + 2\right] \\
&= 1.754074521
\end{aligned}
$$

Ejemplo

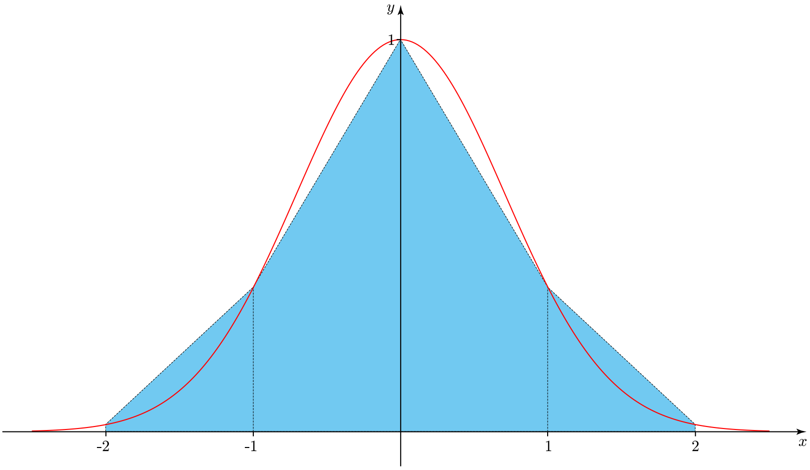
Por lo tanto, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
I &\approx \frac{1}{2}\left[f(-2)+2f(-1)+2f(0)+2f(1)+f(2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-(-2)^2}+2e^{-(-1)^2}+2e^{-(0)^2}+2e^{-(1)^2}+e^{-(2)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2e^{-4^2}+4e^{-1}+2\right] \\
&= 1.754074521
\end{aligned}
$$

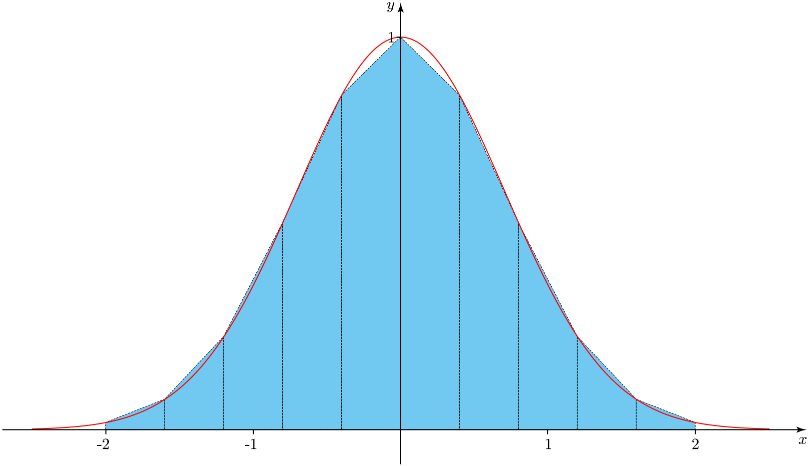
Gráficamente: Regla del trapecio



Gráficamente: R. del trapecio compuesta $(m = 4)$



Gráficamente: R. del trapecio compuesta ($m = 10$)



Estimado de error

$$\begin{aligned}
E_1(f,h) &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m)\right]}_{\text{Regla del trapecio compuesta}} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]\right]}_{\text{Error de la regla del trapecio en } [x_i, x_{i+1}]} \\
&\leq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^3}{12} M_2 \\
&= \frac{h^3}{12} M_2 \cdot m
\end{aligned}$$

Estimado de error

Luego, como $h = \frac{b-a}{m}$, entonces $m = \frac{b-a}{h}$ y así:

$$|E_1(f,h)| \ \leq \ (b-a)\frac{h^2}{12}M_2$$

Observación

Dada una tolerancia $tol > 0$, nótese que:

$$\begin{aligned}
(b-a)\frac{h^2}{12}M_2 < tol \quad &\Rightarrow \quad \frac{(b-a)^3 M_2}{12m^2} < tol \\
&\Rightarrow \quad \frac{(b-a)^3 M_2}{12tol} < m^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12tol}} < m
\end{aligned}$$

Es decir, si se desea una aproximación con una tolerancia $\leq tol$, entonces es suficiente tomar:

$$m = \left[\!\left[\sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12tol}} \right]\!\right] + 1$$

Observación

Dada una tolerancia $tol > 0$, nótese que:

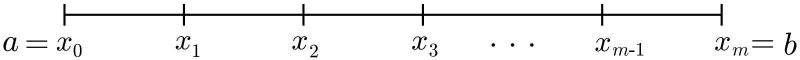
$$
\begin{aligned}
(b-a)\frac{h^2}{12}M_2 < tol \quad &\Rightarrow \quad \frac{(b-a)^3 M_2}{12m^2} < tol \\
&\Rightarrow \quad \frac{(b-a)^3 M_2}{12tol} < m^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12tol}} < m
\end{aligned}
$$

Es decir, si se desea una aproximación con una tolerancia $\leq tol$, entonces es suficiente tomar:

$$
m = \left[\!\left[\sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12tol}} \right]\!\right] + 1
$$

Regla de Simpson compuesta

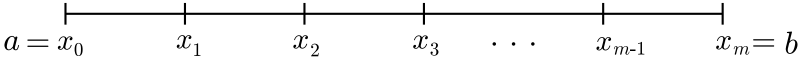
Similarmente, para definir la regla de Simpson compuesta, se divide el intervalo de integración $[a, b]$ en m subintervalos igualmente espaciados.



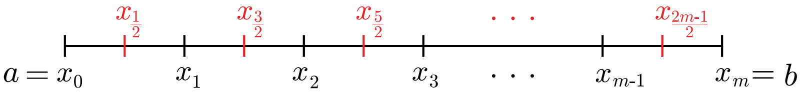
Sin embargo, esta regla requiere además los puntos medios de cada subintervalo.

Regla de Simpson compuesta

Similarmente, para definir la regla de Simpson compuesta, se divide el intervalo de integración $[a, b]$ en m subintervalos igualmente espaciados.

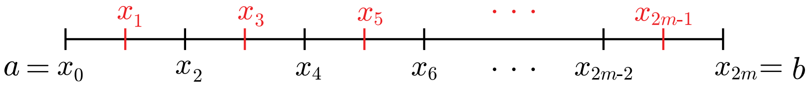


Sin embargo, esta regla requiere además los puntos medios de cada subintervalo.



Regla de Simpson compuesta

Ahora, para no complicar la notación en la regla de Simpson compuesta, lo que se hace es dividir en intervalo en $2m$ subintervalos para incluir los puntos medios en la partición.



Nótese que a pesar de que se usen $2m$ subintervalos, la integral se está aproximando en m subintervalos.

Regla de Simpson compuesta

Definición

Para $m \geq 2$, se define la **regla de Simpson compuesta** dada por:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad &\approx \quad \frac{h}{3}\Bigg[f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) \\ &\qquad + f(x_{2m})\Bigg] \\ &= \quad \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{2m-2}) \\ &\qquad + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})\Big]\end{aligned}$$

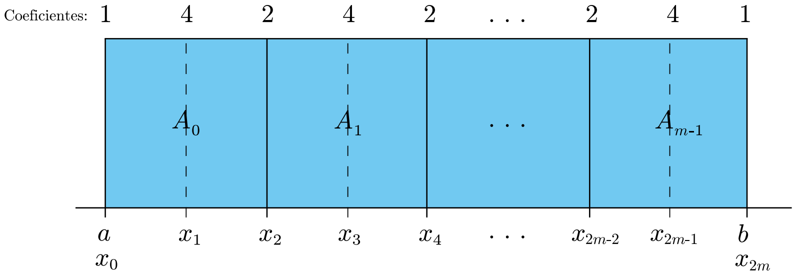
donde $x_i := a + ih$, para todo $i = 0, 1, \ldots, 2m$, con $h := \frac{b-a}{2m}$.

Regla de Simpson compuesta

El patrón de los coeficientes en la regla de Simpson compuesta es:

$$1, \quad 4, \quad 2, \quad 4, \quad \ldots, \quad 2, \quad 4, \quad 1$$

tal y como se muestra en la siguiente figura:



Regla de Simpson compuesta

Por otro lado, de manera análoga a la regla del trapecio compuesta, el estimado de error para la regla de Simpson compuesta es de la forma:

$$|E_2(f,h)| \;\leq\; (b-a)\frac{h^4}{180}M_4$$

mientras que dado $tol > 0$, se requiere de

$$m \;=\; \left[\!\left[\sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{2880 tol}} \right]\!\right] + 1$$

para alcanzar la tolerancia deseada.

Regla de Simpson compuesta

Por otro lado, de manera análoga a la regla del trapecio compuesta, el estimado de error para la regla de Simpson compuesta es de la forma:

$$|E_2(f,h)| \;\leq\; (b-a)\frac{h^4}{180}M_4$$

mientras que dado $tol > 0$, se requiere de

$$m \;=\; \left[\!\left[\sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{2880 tol}} \right]\!\right] + 1$$

para alcanzar la tolerancia deseada.

Ejemplo

Utilice la regla de Simpson compuesta, con $m = 3$, para aproximar la integral

$$I := \int_{-2}^{2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Solución

Observe que $h = \frac{b-a}{2m} = \frac{2-(-2)}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$, con lo que:

$$\begin{aligned}
x_0 &= -2 & & & \leftarrow \text{peso de: } 1\\
x_1 &= -2 + \frac{2}{3} &=& -\frac{4}{3} & \leftarrow \text{peso de: } 4\\
x_2 &= -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} &=& -\frac{2}{3} & \leftarrow \text{peso de: } 2\\
x_3 &= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} &=& 0 & \leftarrow \text{peso de: } 4\\
x_4 &= 0 + \frac{2}{3} &=& \frac{2}{3} & \leftarrow \text{peso de: } 2\\
x_5 &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} &=& \frac{4}{3} & \leftarrow \text{peso de: } 4\\
x_6 &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} &=& 2 & \leftarrow \text{peso de: } 1
\end{aligned}$$

Solución

Observe que $h = \frac{b-a}{2m} = \frac{2-(-2)}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$, con lo que:

$$\begin{aligned}
x_0 &= -2 & & & \leftarrow \text{peso de: } 1\\
x_1 &= -2+\frac{2}{3} &=& -\frac{4}{3} & \leftarrow \text{peso de: } 4\\
x_2 &= -\frac{4}{3}+\frac{2}{3} &=& -\frac{2}{3} & \leftarrow \text{peso de: } 2\\
x_3 &= -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} &=& 0 & \leftarrow \text{peso de: } 4\\
x_4 &= 0+\frac{2}{3} &=& \frac{2}{3} & \leftarrow \text{peso de: } 2\\
x_5 &= \frac{2}{3}+\frac{2}{3} &=& \frac{4}{3} & \leftarrow \text{peso de: } 4\\
x_6 &= \frac{4}{3}+\frac{2}{3} &=& 2 & \leftarrow \text{peso de: } 1
\end{aligned}$$

Solución

Así, se obtiene la aproximación:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{2}{9}\Big[e^{-(-2)^2} + 4e^{-\left(-\frac{4}{3}\right)^2} \\ &\qquad + 2e^{-\left(-\frac{2}{3}\right)^2} + 4e^{-(0)^2} + 2e^{-\left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &\qquad + 4e^{-\left(\frac{4}{3}\right)^2} + e^{-(2)^2}\Big] \\ &= \frac{2}{9}\left[2e^{-4} + 4e^{-\frac{4}{9}} + 8e^{-\frac{16}{9}} + 4\right] \\ &\approx 1.767435412\end{aligned}$$

Solución

Así, se obtiene la aproximación:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{2}{9}\Bigg[e^{-(-2)^2} + 4e^{-\left(-\frac{4}{3}\right)^2} \\
&\qquad + 2e^{-\left(-\frac{2}{3}\right)^2} + 4e^{-(0)^2} + 2e^{-\left(\frac{2}{3}\right)^2} \\
&\qquad + 4e^{-\left(\frac{4}{3}\right)^2} + e^{-(2)^2}\Bigg] \\
&= \frac{2}{9}\left[2e^{-4} + 4e^{-\frac{4}{9}} + 8e^{-\frac{16}{9}} + 4\right] \\
&\approx 1.767435412
\end{aligned}$$

Solución

Así, se obtiene la aproximación:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{2}{9}\Big[e^{-(-2)^2} + 4e^{-\left(-\frac{4}{3}\right)^2} \\ &\qquad + 2e^{-\left(-\frac{2}{3}\right)^2} + 4e^{-(0)^2} + 2e^{-\left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &\qquad + 4e^{-\left(\frac{4}{3}\right)^2} + e^{-(2)^2}\Big] \\ &= \frac{2}{9}\left[2e^{-4} + 4e^{-\frac{4}{9}} + 8e^{-\frac{16}{9}} + 4\right] \\ &\approx 1.767435412\end{aligned}$$

Ejercicio

Ejercicio

Considere la integral

$$I := \int_0^{\pi} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x \approx 0.5656935136$$

a) Utilice las reglas del trapecio y Simpson para aproximar I.

b) Ahora, utilice las versiones compuestas de ambas reglas con 4 subintervalos.

c) ¿Cuántos subintervalos (el valor de m) se requieren en cada regla para obtener aproximaciones con una tolerancia de 10^{-3}?

Ejercicio

Ejercicio para la casa (II Examen, IC-2017)

a) Utilice dos veces la regla compuesta del trapecio, para mostrar que una fórmula para aproximar integrales dobles sobre un rectángulo $[a,b]\times[c,d]$ corresponde a:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \;\approx\; \frac{kh}{4}\Bigg\{ f(x_0,y_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i,y_0)$$

$$+\; f(x_m,y_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_0,y_j) + 4\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i,y_j) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_m,y_j)$$

$$+\; f(x_0,y_n) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i,y_n) + f(x_m,y_n)\Bigg\}$$

donde a, b, c y d son constantes; y además $x_i = a+ih$, $y_j = c+jk$, para $i=0,1,\ldots,m$ y $j=0,1,\ldots,n$, con $h := \frac{b-a}{m}$ y $k := \frac{d-c}{n}$.

Ejercicio (continuación)

Ejercicio para la casa (II Examen, IC-2017)

b) Suponga que al calentar una placa rectangular plana R, su temperatura (en grados Celcius) se describe mediante la siguiente función:

$$T(x,y) \;=\; 10 - 8x^2 - 2y^2\,.$$

Suponga además que R tiene $1\,m$ de largo (dimensión x) y $2\,m$ de ancho (dimensión y), y se desea aproximar la temperatura media de la placa, la cual viene dada por la fórmula:

$$T_{\text{media}} \;:=\; \iint_R T(x,y)\,\mathrm{d}A\,.$$

Utilizando $n = m = 2$ subintervalos y la fórmula encontrada en a) aproxime la temperatura media de la placa.