Solución Numérica de Ecuaciones

Introducción al Análisis Numérico
MA-1006

UCR

Temas de la clase

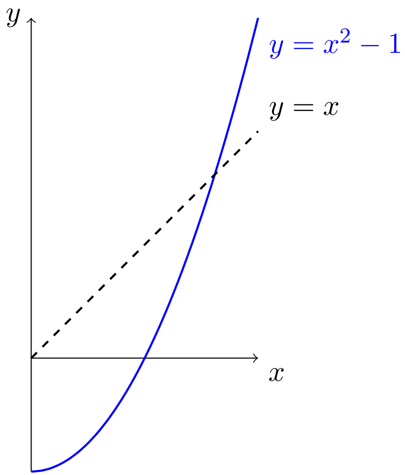
a) Método del punto fijo.
b) Método de Newton-Rhapson.
c) Método de la secante.

Definición (Punto fijo)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ *y sea* $g : A \to A$. *Se dice que* $x \in A$ *es un punto fijo de* g *si se satisface que* $g(x) = x$.

Ejemplo

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ *posee un punto fijo en el intervalo* $[0, 2]$.


y
$y = x^2 - 1$
$y = x$
x

Teorema (Brower)

Suponga que g *es una función continua definida en el intervalo cerrado y acotado* $[a,b]$*. Suponga además que* $g(x) \in [a,b]$*, para todo* $x \in [a,b]$*. Entonces,* g *tiene un punto fijo.*

Ejercicio

Justifique que la función $g(x) = \dfrac{1}{2}\cos(x)$ *definida en* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *satisface que* $g([0, \frac{\pi}{2}]) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$.

Solución:

Note que g es continua y $g(0) = 1/2$, $g(\pi/2) = 0$. Además, $g'(x) = -\dfrac{1}{2}\sin(x)$ y g' es negativa en $[0, \frac{\pi}{2}]$, entonces g es decreciente.

Se sigue que $g([0, \frac{\pi}{2}]) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$.

Definición (Iteración simple)

Sea $g : [a, b] \to [a, b]$ *una función continua y sea* $c_0 \in [a, b]$. *La recursión*

$$c_{k+1} = g(c_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{1}$$

se llama iteración simple o método de aproximaciones sucesivas.

Definición (Función contractiva)

Sea g una función continua definida en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Entonces, g es una **contracción** *en $[a, b]$ si existe una constante L, $0 < L < 1$ tal que*

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b]. \tag{2}$$

Teorema (Derivada y contractividad)

Suponga que $g : [a, b] \to [a, b]$ es diferenciable y que existe $L \in]0, 1[$ tal que $|g'(x)| \leq L$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces g es una contracción sobre $[a, b]$.

Teorema (Unicidad)

Sea g definida y continua sobre $[a,b]$ y que además $g([a,b]) \subset [a,b]$ y siendo g una contracción sobre $[a,b]$. Entonces g tiene un único punto fijo $c \in [a,b]$. Además la iteración simple $c_{k+1} = g(c_k)$ converge a c para cualquier valor $c_0 \in [a,b]$.

Nota: si g no es contractiva, la sucesión $c_{k+1} = g(c_k)$ podría ser divergente.

Ejemplo

Muestre que $g(x) = \dfrac{x^2-1}{3}$ tiene un único punto fijo en el intervalo $[-1,1]$.

Retomemos ahora el ejemplo de la motivación y justifiquemos adecuadamente todas las hipótesis del teorema para encontrar una iteración simple que converja al punto fijo de f.

Ejemplo

Sea $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\cos(x)$ *definida en el intervalo* $[0, \dfrac{\pi}{2}]$. *Utilice el método del punto fijo para determine una iteración simple que sea convergente a una raíz de* f *en el intervalo dado.*

¿Cuándo parar?

Tomaremos el error relativo, que es el que compararemos con la tolerancia dada:

$$|e_k| = \frac{|c_{k+1} - c_k|}{|c_{k+1}|} < tol$$

Ejercicios

1. Utilice la iteración de punto fijo para determinar una aproximación de una solución de $x^4 - 3x^2 = 3$ en el intervalo $[1, 2]$, utilizando $x_0 = 1$ y una tolerancia de 10^{-2}.
2. Sea $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Muestre que la función $g(x) = \sqrt[3]{2x + 5}$ en el intervalo $[2, 3]$ satisface las condiciones de unicidad del punto fijo.
3. En `Matlab`, cree una M-función llamada `puntofijo2` que reciba como entradas una función anónima g, una tolerancia tol y un valor inicial c_0. La función debe utilizar el método del punto fijo para aproximar el valor c de un punto fijo de g.

Método de Newton-Rhapson

Considere la ecuación $f(x) = 0$. Supongamos que $\lambda(x)$ es una función sin ceros reales y definamos $g(x) = x - \lambda(x)f(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} g(c) &= c \\ \Leftrightarrow c - \lambda(c)f(c) &= c \\ \Leftrightarrow -\lambda(c)f(c) &= 0 \\ \Leftrightarrow f(c) &= 0 \end{aligned}$$

Por teorema asociado a iteración de punto fijo, tiene sentido plantearse el siguiente método:

Definición (Iteración de Newton-Rhapson)

El método de Newton para aproximar una raíz de $f(x) = 0$ consiste en aplicar la iteración

$$c_{k+1} = c_k - \frac{f(c_k)}{f'(c_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

donde c_0 es un valor dado. Note que implícitamente se asume que $f'(c_k) \neq 0$, para cada $k \geq 0$.

Teorema

Sea $f \in C^2([a,b])$ *es tal que*

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$;
2. $f'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$;
3. $f''(x) \geq 0$ *o* $f''(x) \leq 0$, *para todo* $x \in [a,b]$;
4. $\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right| \leq b - a$ *y* $\left|\dfrac{f(b)}{f'(b)}\right| \leq b - a$.

Entonces, el método de Newton converge a la única solución c *de* $f(x) = 0$ *para cualquier* $c_0 \in [a,b]$.

Ejemplo

Considere la función $f : [1, 10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$.

1. *Utilice el método de Newton-Rhapson para encontrar una sucesión* (c_k) *que converja a un cero de* f *para cualquier valor* $c_0 \in [1, 10]$.
2. *En* `Matlab`*, elabore una M-función de nombre* `Newton_Rhapson1` *que reciba como entradas: la función anónima* f*, el criterio de* f' *también como función anómina, un valor inicial* c_0 *y una cantidad máxima de iteraciones* n.
3. *Pruebe su código con el valor* $c_0 = 5 \in [1, 10]$ *y una cantidad de iteraciones de su elección. ¿Se observa convergencia?*
4. *Pruebe su código con el valor* $c_0 = 20$ *y una cantidad de iteraciones de su elección. ¿Se observa convergencia?*

Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 6$ y sea $c_0 = 1$ un valor inicial. Use el método de Newton para encontrar c_2.
2. Muestre que $f(x) = x^2 - x - 2$ tiene una raíz única en $[1, 3]$ a la cual converge la sucesión del método de Newton para todo $x_0 \in [1, 3]$.

Ejercicios

3 En `Matlab`, cree una M-función `Newton_Rhapson2` que aplique el método de Newton para calcular la raíz de f. Su código debe recibir como entradas: el criterio de una función f, el criterio de f', un valor inicial c_0, una cantidad de iteraciones n y una tolerancia tol. debe calcular la aproximación de la raíz c de la función.
Pruebe su código con la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2$ que posee una raíz $c = \sqrt{2} \approx 1.414213562373095$.

Método de la secante

A pesar de que el método de Newton es muy popular, se asume que la función es derivable y que podemos evaluar la derivada. En la práctica esto puede no ser viable.
Una alternativa es utilizar una aproximación de la derivada: $f'(c_k) \approx \dfrac{f(c_k) - f(c_{k-1})}{c_k - c_{k-1}}$ y entonces se obtiene el método de la secante.

Definición

El método de la secante para aproximar una raíz c de una función f consiste en aplicar la iteración

$$c_{k+1} = c_k - \frac{c_k - c_{k-1}}{f(c_k) - f(c_{k-1})} f(c_k), \quad k \geq 0 \tag{4}$$

donde c_0 y c_1 son valores iniciales.

Note que para calcular c_{k+1} con este método se necesita conocer c_k y c_{k-1}.

Teorema

Sea $I_\delta = [c-\delta, c+\delta]$, $\delta > 0$ *y suponga que* $f \in C^2(I_\delta)$ *es tal que* $f(c) = 0$ *y* $f'(c) \neq 0$. *Entonces, para valores iniciales* $c_0, c_1 \in I_\delta$ *suficientemente cerca de* c, *el método de la secante* (4) *converge a* c.

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2 - 6$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y sean* $c_0 = 3$, $c_1 = 2$, *aplicando el método de la secante tenemos*

Ejercicios

1. Sea $f(x) = x - 2\cos(x)$ y sean $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$. Determine el valor de x_3.
2. En `Matlab`, cree una función `secante1` que aplique el método de la secante.

Falsa posición

El método de Falsa Posición (también llamado Regula Falsi) es muy similar al método de la Secante con la diferencia que incluye una prueba para garantizar que la raíz siempre esté entre iteraciones sucesivas. Suponga que se quiere aproximar la raíz c de la función f. El método se describe a continuación:

1. Dadas las aproximaciones iniciales c_0 y c_1, tal que $f(c_0) \cdot f(c_1) < 0$, se toma

$$c_2 = c_1 - \frac{c_1 - c_0}{f(c_1) - f(c_0)} f(c_1)$$

2. Si $f(c_2)f(c_1) < 0$, entonces c está entre c_1 y c_2. Entonces, tome c_3 utilizando los puntos $(c_1, f(c_1))$ y $(c_2, f(c_2))$.
3. Si $f(c_2)f(c_0) < 0$, entonces c está entre c_0 y c_2. Entonces, tome c_3 utilizando los puntos $(c_0, f(c_0))$ y $(c_2, f(c_2))$. Intercambie los índices de c_0 y c_1.
   Similarmente, una vez que se calcula c_3, el signo de $f(c_3)f(c_2)$ determina si utilizamos c_2 y c_3 o c_3 y c_1 para calcular c_4. En el último caso, se intercambian los índices de c_2 y c_1.

Ejemplo

Sea $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - 5$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y sean* $c_0 = 1$, $c_1 = 15$. *Es fácil ver que la raíz positiva de* f *es* $c = 5 \in [1, 15]$.

Definición

Sea $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión tal que* $\lim c_k = c$, *con* $c_k \neq c$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$. *Suponga que*

$$\lim \frac{|c_{k+1} - c|}{|c_k - c|} = \mu \geq 0.$$

Entonces, se dice que c_k *converge a* c *de manera*

a) *sublinealmente si* $\mu = 1$.

b) *superlinealmente si* $\mu = 0$.

c) *linealmente si* $\mu \in (0, 1)$.

Ejemplo

La sucesión $c_k = \frac{1}{e^{2^k}}$ *converge a* 0 *superlinealmente pues*

Método del punto fijo

Ejemplo

Bajo las hipótesis del teorema del punto fijo, dada una función $g : [a, b] \to [a, b]$, *continua, derivable y tal que* $|g'(x)| < 1$ *para todo* $x \in [a, b]$, *entonces*

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1} - c|}{|c_k - c|} &= \lim_{k\to\infty} \frac{|g(c_k) - g(c)|}{|c_k - c|} \\ &= |g'(c)| \\ &< 1, \end{aligned}$$

por lo que el método de iteración simple converge al menos linealmente.

Método de Bisección

Ejemplo

En el método de bisección, considere $e_k = |c_k - c|$ *se tiene que*

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} \approx \frac{1}{2}$$

En el caso superlineal se tiene que $\lim \dfrac{|c_{k+1} - c|}{|c_k - c|} = 0$. Se dice que c_k converge a c con orden $q > 1$ si también el límite $\lim \dfrac{|c_{k+1} - c|}{|c_k - c|^q}$ existe. En particular, si para $q = 2$ el límite existe se dice que la convergencia es cuadrática.

Ejemplo

La sucesión $c_k = \dfrac{1}{e^{2^k}}$ *converge a* 0 *cuadráticamente (superlineal) pues* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1} - 0|}{|c_k - 0|^2} = 1$

Método de Newton

El método de Newton tiene convergencia cuadrática dada una condición inicial c_0 suficientemente cerca de la raíz c.