Ejercicios MA-1006

Lista #2

Introducción al Análisis Numérico

Edición: Mario de León Urbina

19 de marzo de 2025

1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Factorización de matrices: Eliminación Gaussiana, algoritmos de sustitución hacia atrás y hacia adelante, pivoteos (parcial, total, etc.). Factorización de matrices como $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ vía Householder, factorización de Cholesky u otras. Implementación de algoritmos.

Métodos iterativos para sistemas lineales: Utilización de métodos como Jacobi, Gauss-Seidel y sobrerrelajación (SOR) para la solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales. Programación e implementación de los métodos.

1.1. Factorización LU

1. Encuentre la factorización LU de las siguiente matrices:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -6 & -8 \\ -4 & -8 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   Utilizando la factorizaciones obtenidas, resuelva los sistemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} = (-4, 6, -10, 20)^{\mathtt{t}}$

2. Realice la descomposición LU de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -2 \\ 4 & 11 & -10 & 19 & -7 \\ 4 & 2 & -13 & 8 & -5 \\ -1 & 4 & -2 & 12 & -14 \\ 3 & 12 & 13 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

   ¿Es única dicha factorización? Si la respuesta es afirmativa, resuelva el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 0, 1, 0, 2)^{\mathtt{t}}$.

3. Considere el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$$

   Realice sustitución hacia atrás a mano y compruebe su respuesta poniendo en la ventana de comandos `x = Backward(A,b)`

4. Considere el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-7}{3} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{-8}{3} & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Realice sustitución hacia adelante a mano y compruebe su respuesta poniendo en la ventana de comandos `x = Forward(A,b)`

5. Utilice `[L,U]=FactLU(A)` para determinar la factorización LU de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -2 \\ 4 & 11 & -10 & 19 & -7 \\ 4 & 2 & -13 & 8 & -5 \\ -1 & 4 & -2 & 12 & -14 \\ 3 & 12 & 13 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

6. Resuelva el sistema lineal utilizando factorización LU:

$$\begin{cases} -15x_1 - 6x_2 + 9x_3 & = & 0 \\ 35x_1 - 4x_2 - 12x_3 & = & -9 \\ -30x_1 + 36x_2 - 16x_3 & = & -6 \end{cases}$$

Utilice `[L,U,x]=LUx(A,b)` y compare con sus respuestas.

7. Considere la integral indefinida

$$\int \frac{2024x - 1}{(x-1)(x^2+1)}\, dx = \int \left(\frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2 x + a_3}{x^2+1} \right) dx$$

Vamos a calcular el vector solución exacto $(a_1, a_2, a_3)^{\mathtt{t}}$.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{x} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathtt{t}}$. Muestre que la matriz $\mathbf{A}$ posee factorización $\mathbf{LU}$, donde $\mathbf{L}$ es triangular inferior unitaria y $\mathbf{U}$ es triangular superior.

b) Determine la factorización $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, en donde $\mathbf{L}$ es triangular inferior unitaria, $\mathbf{U}$ es triangular superior. Justifique por qué dicha factorización es única.

c) Resuelva el sistema del inciso a) por medio de la factorización $\mathbf{LU}$ (haciendo sustitución hacia adelante y hacia atrás) y escriba las fracciones parciales del problema con las constantes encontradas.

8. Determine la factorización $\mathbf{LU}$ para resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ahora veremos el caso general. Una **matriz tridiagonal** tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Todos los elementos son nulos excepto las diagonales $k = -1, 0, 1$. Tales matrices pueden encontrarse en la solución de problemas de valores en la frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales son diagonal dominantes, es decir, $|a_k| \geq |b_k| + |c_k|$.

Se tiene entonces que

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ \beta_2 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \beta_{n-1} & 1 & \\ & & & & & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & & & & & \\ & \alpha_2 & c_2 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

en donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1, \\ \beta_k &= \frac{b_k}{\alpha_{k-1}}, \quad (k = 2, 3, ..., n) \\ \alpha_k &= a_k - \beta_k c_{k-1}, \quad (k = 2, 3, ..., n) \end{aligned}$$

Al resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$ será equivalente a resolver $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Ly} = \mathbf{v} \\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \end{array} \right.$

En este caso, $\mathbf{Ly} = \mathbf{v}$ implica

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = v_1, \\ y_k = v_k - \beta_k y_{k-1}, \quad (k = 2, 3, ..., n) \end{array} \right.$$

y finalmente, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ implica

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \dfrac{y_n}{\alpha_n}, \\ \\ x_k = \dfrac{y_k - x_{k+1} c_k}{\alpha_k}, \quad (k = 2, 3, ..., n) \end{array} \right.$$

Utilice la información anterior para calcular las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ y a su vez calcular los vectores $\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}$, y compare con su solución del sistema del inicio.

1.2. Factorización QR con Householder

1. Sea $\mathbf{H} = \mathbf{I}_n - \dfrac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathsf{t}}}{\mathbf{u}^{\mathsf{t}}\mathbf{u}}$ una matriz de Householder. Pruebe que (i) $\mathbf{Hu} = -\mathbf{u}$, y (ii) $\mathbf{Hv} = \mathbf{v}$ si $\mathbf{v}^{\mathsf{t}}\mathbf{u} = 0$

2. Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1} - \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1$ y $\tau = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathsf{t}}\mathbf{u}$. Demuestre que

$$\left(\mathbf{I}_n \pm \frac{1}{\tau}\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathsf{t}}\right)\mathbf{x} = \mp\|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1$$

   donde $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

3. Dado el vector $\mathbf{u} = (1, 1, 1)^{\mathsf{t}}$ y $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ calcule $\mathbf{HA}$ y $\mathbf{AH}$, donde $\mathbf{H}$ es la matriz de Householder con respecto a $\mathbf{u}$.

4. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 4 & 23 & 2 \\ 8 & 22 & -23 \end{pmatrix}$$

a) Aplicando matrices de transformación de Householder sobre $\mathbf{A}$, encuentre las matrices $\mathbf{Q}$ ortogonal y $\mathbf{R}$ triangular superior, tales que $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$.

b) Muestre que la matriz $\mathbf{Q}$ obtenida en a) es ortogonal.

c) Utilizando la factorización obtenida en a), resuelva el problema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 2, 3)^{\mathtt{t}}$.

1.3. Métodos iterativos

1. Utilizando los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel hacia adelante y hacia atrás, aproxime la solución de los siguientes sistemas con $\mathtt{tol} = 10^{-3}$, con norma 1-vectorial para acotar el error relativo y utilizando $\mathbf{x}^{(0)}$ como el vector nulo.

a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 6_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 & = & 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 & = & -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 1 \end{cases}$

2. calcule $\mathbf{x}^{(2)}$ utilizando el método SOR hacia adelante para el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tome $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^{\mathtt{t}}$ y $\omega = 1{,}2$.

3. Sea $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y sean `D = diag(diag(A))`, `L = tril(A,-1)`, `U = triu(A, 1)`. Se tiene que los métodos de iteración en su versión matricial son los siguientes:

- Jacobi: $\mathbf{x^{(k+1)}} = \mathbf{D^{-1}}(\mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x^{(k)}})$
- GS hacia adelante: $\mathbf{x^{(k+1)}} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-\mathbf{1}}(\mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x^{(k)}})$
- GS hacia atrás: $\mathbf{x^{(k+1)}} = (\mathbf{D} + \mathbf{U})^{-\mathbf{1}}(\mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x^{(k)}})$
- SOR hacia adelante: $\mathbf{x^{(k+1)}} = \left(\mathbf{L} + \frac{\mathbf{1}}{\omega}\mathbf{D}\right)^{-\mathbf{1}} \left(\mathbf{b} + \left(\left(\frac{\mathbf{1}-\omega}{\omega}\right)\mathbf{D} - \mathbf{U}\right)\mathbf{x^{(k)}}\right)$

Para ver que estas versiones son equivalentes a las versiones componente a componente, compruebelo para cada fórmula, con el casos 3×3, es decir, con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^{\mathtt{t}}$$

Además, plantee la fórmula matricial para el método de SOR hacia atrás.

2. Interpolación polinomial

Interpolación de Lagrange: Estudio de métodos de Lagrange y Newton (Diferencias Divididas), cotas de error para polinomios de interpolación. Programación e implementación en `MATLAB`.

Interpolación de Hermite: Estudio del método de Hermite por polinomios de Lagrange y de Hermite y método de Diferencias Divididas. Cota de error para polinomios de interpolación de Hermite. Programación e implementación en `MATLAB`.

Interpolación segmentaria: Definición del fenómeno de Runge. Estudio de métodos de interpolación con trazadores lineales, cuadráticos y cúbicos. Trazadores cúbicos con frontera natural y frontera sujeta. Implementación del trazador cúbico con `MATLAB`.

2.1. Interpolación de Lagrange. Diferencias divididas. Acotación del error

1. Encuentre el polinomio de interpolación de Lagrange que aproxima la función $f(x) = 2^x \cos(\pi x)$ en el intervalo $[2, 4]$, utilizando el conjunto soporte $S = \{2, 3, 4\}$.

2. Considere los nodos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, con $x_i \neq x_j$, para todo $i \neq j$, y sea

$$p_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

   Tomando las condiciones $p_2(x_k) = y_k$ para $k \in 0, 1, 2$,

   a) Plantee el sistema en donde las incógnitas son a_0, a_1, a_2, de forma matricial, con la matriz de Vandermonde correspondiente.
   b) Muestre que la matriz de Vandermonde del inciso a) es invertible, y calcule las incógnitas a_k en función de x_k e y_k.
   c) Calcule los polinomios $L_k(x)$ y luego el polinomio de interpolación de Lagrange. Simplifique al máximo y compare los coeficientes del polinomio de interpolación de Lagrange con los coeficientes a_k calculados en b).
   d) Calcule el polinomio interpolador de Newton, exprese explícitamente las diferencias divididas en función de x_k e y_k. Luego simplifique dicho polinomio y compare con el inciso b) y el c).

3. Una función $f(x)$ se aproxima por medio del polinomio interpolador $p(x)$. Use la siguiente tabla para determinar el polinomio de Lagrange por diferencias divididas:

x	$f(x)$
1,6	3
2	8
2,5	14
3,2	15
4	8
4,5	2

   Además determine una aproximación de $f(3)$.

4. Considere la ecuación $f(x) = 2\sin(x) - 2x^2 + 1 = 0$.
   Utilice los nodos

$$(f(1), 1) \quad (f(2), 2) \quad (f(3), 3) \quad (f(4), 4)$$

   para determinar el polinomio interpolador de Lagrange $p(y)$. Estime el valor de $f^{-1}(0)$, sabiendo que f es invertible en $[1, 4]$. Con base en lo anterior, ¿cuál es un valor aproximado de la solución de $f(x) = 0$ en el intervalo $[1, 4]$?

5. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Sabiendo que $f[x_0, x_1, ..., x_k] = \dfrac{(-1)^k}{x_0 x_1 \cdots x_k}$ determine el polinomio interpolador $p(x)$ utilizando $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{5}, x_4 = \frac{1}{8}$.

6. Sea $f(x) = e^x$ en el intervalo $[1, 2]$. Determine el polinomio de interpolación de Lagrange con los puntos del conjunto $S = \{1, 1{,}5, 2\}$. Luego encuentre una cota para el error al aproximar f por p en dicho intervalo.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función para la cual se sabe que

$$f'(-2) = -1, \quad f'(-1) = 1, \quad f'(0) = -2, \quad f'(1) = 5$$

Determine un polinomio de interpolación para f' con la información dada. Simplifique al máximo sus resultados. Sabiendo que $f(1) = 1006$, determine una aproximación para $f(x)$.

2.2. Interpolación de Hermite. Acotación del error

1. Construya el polinomio de interpolación de Hermite que cumpla que $h_3(0) = 0$, $h_3(1) = 1$, $h_3'(0) = 1$ y $h_3'(1) = 0$.

2. Sea $f(x) = e^x$ en el intervalo $[1, 2]$. Determine el polinomio de interpolación de Hermite h con los puntos del conjunto $S = \{1, 1{,}5, 2\}$. Luego encuentre una cota para el error al aproximar f por h en dicho intervalo.

3. Calcule, con detalles, el polinomio de interpolación $h(x)$ de Hermite para $f(x) = x^5$ usando $x_0 = 0$, $x_1 = a > 0$. Determine el valor exacto de $\xi \in]0, a[$ que satisface la igualdad

$$f(x) - h(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}[\pi_2(x)]^2$$

4. Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Utilice el polinomio de interpolación de Hermite en los puntos $\{1, 4, 9\}$ para aproximar el valor de $\sqrt{3}$. Calcule el error relativo de dicha aproximación.

5. Sea $f \in C^6([-1, 1])$ y $h \in \mathbb{P}_5[x]$ el polinomio interpolador de Hermite con $h(x_i) = f(x_i)$ y $h'(x_i) = f'(x_i)$, para $x_i \in \{-1, 0, 1\}$. Muestre que

$$\int_{-1}^{1} h(t)\,dt = \frac{7}{15}f(-1) + \frac{16}{15}f(0) + \frac{7}{15}f(1) + \frac{1}{15}f'(-1) - \frac{1}{15}f'(1)$$

Use este resultado para aproximar el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sin(x^2)\,dx$.

2.3. Interpolación por trazadores cúbicos

1. Considere los nodos $(0, 0), (1, 1), (2, 2)$.

   a) Determine el trazador cúbico con frontera natural. Grafíquelo con `MATLAB` como función a trozos.
   b) Determine el trazador cúbico con frontera sujeta tal que $S'(0) = S'(2) = 1$. Grafíquelo con `MATLAB` como función a trozos.
   c) ¿Qué puede concluir de los dos incisos anteriores?

2. Un trazador cúbico natural S en $[0, 2]$ está definido por

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3, & \text{si } x \in [0, 1[\\ a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + 2, & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Calcule los valores de a, b, c.

3. Sea $f(x) = (3x - 2)e^x$ y el conjunto soporte $\left\{-3, \frac{-3}{2}, \frac{1}{4}, 1\right\}$.

   a) Determine el trazador cúbico con frontera natural.
   b) Determine el trazador cúbico con frontera sujeta tal que $S'(-3) = \frac{-1}{2}$, $S'(1) = 10$.
   c) Grafíque con `MATLAB` f y los trazadores determinados en los incisos previos, así como los nodos asociados al conjunto soporte.