Solución Numérica de Ecuaciones

Introducción al Análisis Numérico
MA-1006

UCR

Temas de la clase

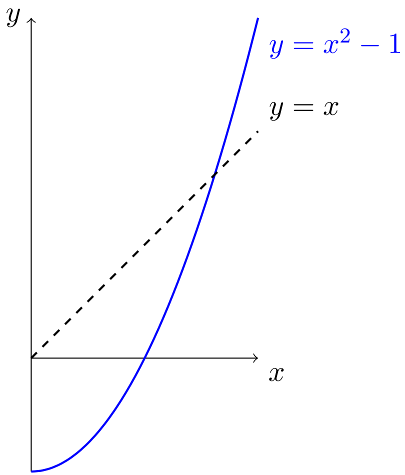
a) Método del punto fijo.
b) Método de Newton-Rhapson.
c) Método de la secante.

Definición (Punto fijo)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ *y sea* $g : A \to A$. *Se dice que* $x \in A$ *es un punto fijo de* g *si se satisface que* $g(x) = x$.

Ejemplo

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ *posee un punto fijo en el intervalo* $[0, 2]$.



y
$y = x^2 - 1$
$y = x$
x

Teorema (Brower)

Suponga que g es una función continua definida en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Suponga además que $g(x) \in [a, b]$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces, g tiene un punto fijo.

Ejercicio

Justifique que la función $g(x) = \dfrac{1}{2}\cos(x)$ definida en $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ satisface que $g([0, \dfrac{\pi}{2}]) \subset [0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Solución:

Note que g es continua y $g(0) = 1/2$, $g(\pi/2) = 0$. Además, $g'(x) = -\dfrac{1}{2}\sin(x)$ y g' es negativa en $[0, \dfrac{\pi}{2}]$, entonces g es decreciente.

Se sigue que $g([0, \dfrac{\pi}{2}]) \subset [0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Definición (Iteración simple)

Sea $g : [a,b] \to [a,b]$ *una función continua y sea* $c_0 \in [a,b]$. *La recursión*

$$c_{k+1} = g(c_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{1}$$

se llama iteración simple o método de aproximaciones sucesivas.

Definición (Función contractiva)

Sea g una función continua definida en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Entonces, g es una **contracción** *en $[a, b]$ si existe una constante L, $0 < L < 1$ tal que*

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b]. \tag{2}$$

Teorema (Derivada y contractividad)

Suponga que $g : [a, b] \to [a, b]$ es diferenciable y que existe $L \in]0, 1[$ tal que $|g'(x)| \leq L$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces g es una contracción sobre $[a, b]$.

Teorema (Unicidad)

Sea g definida y continua sobre $[a, b]$ y que además $g([a, b]) \subset [a, b]$ y siendo g una contracción sobre $[a, b]$. Entonces g tiene un único punto fijo $c \in [a, b]$. Además la iteración simple $c_{k+1} = g(c_k)$ converge a c para cualquier valor $c_0 \in [a, b]$.

Nota: si g no es contractiva, la sucesión $c_{k+1} = g(c_k)$ podría ser divergente.

Ejemplo

Muestre que $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$ *tiene un único punto fijo en el intervalo* $[-1, 1]$.

Retomemos ahora el ejemplo de la motivación y justifiquemos adecuadamente todas las hipótesis del teorema para encontrar una iteración simple que converja al punto fijo de f.

Ejemplo

Sea $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\cos(x)$ *definida en el intervalo* $[0, \dfrac{\pi}{2}]$. *Utilice el método del punto fijo para determine una iteración simple que sea convergente a una raíz de* f *en el intervalo dado.*

¿Cuándo parar?

Tomaremos el error relativo, que es el que compararemos con la tolerancia dada:

$$|e_k| = \frac{|c_{k+1} - c_k|}{|c_{k+1}|} < tol$$

Ejercicios

1. Utilice la iteración de punto fijo para determinar una aproximación de una solución de $x^4 - 3x^2 = 3$ en el intervalo $[1, 2]$, utilizando $x_0 = 1$ y una tolerancia de 10^{-2}.
2. Sea $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Muestre que la función $g(x) = \sqrt[3]{2x + 5}$ en el intervalo $[2, 3]$ satisface las condiciones de unicidad del punto fijo.
3. En `Matlab`, cree una M-función llamada `puntofijo2` que reciba como entradas una función anónima g, una tolerancia tol y un valor inicial c_0. La función debe utilizar el método del punto fijo para aproximar el valor c de un punto fijo de g.

Método de Newton-Rhapson

Considere la ecuación $f(x) = 0$. Supongamos que $\lambda(x)$ es una función sin ceros reales y definamos $g(x) = x - \lambda(x)f(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} g(c) &= c \\ \Leftrightarrow c - \lambda(c)f(c) &= c \\ \Leftrightarrow -\lambda(c)f(c) &= 0 \\ \Leftrightarrow f(c) &= 0 \end{aligned}$$

Por teorema asociado a iteración de punto fijo, tiene sentido plantearse el siguiente método:

Definición (Iteración de Newton-Rhapson)

El método de Newton para aproximar una raíz de $f(x) = 0$ consiste en aplicar la iteración

$$c_{k+1} = c_k - \frac{f(c_k)}{f'(c_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

donde c_0 es un valor dado. Note que implícitamente se asume que $f'(c_k) \neq 0$, para cada $k \geq 0$.

Teorema

Sea $f \in C^2([a,b])$ *es tal que*

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$;
2. $f'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$;
3. $f''(x) \geq 0$ *o* $f''(x) \leq 0$, *para todo* $x \in [a,b]$;
4. $\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right| \leq b - a$ *y* $\left|\dfrac{f(b)}{f'(b)}\right| \leq b - a$.

Entonces, el método de Newton converge a la única solución c *de* $f(x) = 0$ *para cualquier* $c_0 \in [a,b]$.

Ejemplo

Considere la función $f : [1, 10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$.

1. *Utilice el método de Newton-Rhapson para encontrar una sucesión* (c_k) *que converja a un cero de* f *para cualquier valor* $c_0 \in [1, 10]$.
2. *En* `Matlab`*, elabore una M-función de nombre* `Newton_Rhapson1` *que reciba como entradas: la función anónima* f*, el criterio de* f' *también como función anómina, un valor inicial* c_0 *y una cantidad máxima de iteraciones* n.
3. *Pruebe su código con el valor* $c_0 = 5 \in [1, 10]$ *y una cantidad de iteraciones de su elección. ¿Se observa convergencia?*
4. *Pruebe su código con el valor* $c_0 = 20$ *y una cantidad de iteraciones de su elección. ¿Se observa convergencia?*

Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 6$ y sea $c_0 = 1$ un valor inicial. Use el método de Newton para encontrar c_2.
2. Muestre que $f(x) = x^2 - x - 2$ tiene una raíz única en $[1, 3]$ a la cual converge la sucesión del método de Newton para todo $x_0 \in [1, 3]$.

Ejercicios

3 En `Matlab`, cree una M-función `Newton_Rhapson2` que aplique el método de Newton para calcular la raíz de f. Su código debe recibir como entradas: el criterio de una función f, el criterio de f', un valor inicial c_0, una cantidad de iteraciones n y una tolerancia tol. debe calcular la aproximación de la raíz c de la función.
Pruebe su código con la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2$ que posee una raíz $c = \sqrt{2} \approx 1.414213562373095$.

Método de la secante

A pesar de que el método de Newton es muy popular, se asume que la función es derivable y que podemos evaluar la derivada. En la práctica esto puede no ser viable.
Una alternativa es utilizar una aproximación de la derivada: $f'(c_k) \approx \dfrac{f(c_k) - f(c_{k-1})}{c_k - c_{k-1}}$ y entonces se obtiene el método de la secante.

Definición

El método de la secante para aproximar una raíz c de una función f consiste en aplicar la iteración

$$c_{k+1} = c_k - \frac{c_k - c_{k-1}}{f(c_k) - f(c_{k-1})} f(c_k), \quad k \geq 0 \tag{4}$$

donde c_0 y c_1 son valores iniciales.

Note que para calcular c_{k+1} con este método se necesita conocer c_k y c_{k-1}.

Teorema

Sea $I_\delta = [c - \delta, c + \delta]$, $\delta > 0$ *y suponga que* $f \in C^2(I_\delta)$ *es tal que* $f(c) = 0$ *y* $f'(c) \neq 0$. *Entonces, para valores iniciales* $c_0, c_1 \in I_\delta$ *suficientemente cerca de* c, *el método de la secante* (4) *converge a* c.

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2 - 6$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y sean* $c_0 = 3$, $c_1 = 2$, *aplicando el método de la secante tenemos*

$$
\begin{aligned}
c_3 &= c_1 - \frac{c_1 - c_0}{f(c_1) - f(c_0)} f(c_1) \\
&= 2 - \frac{2 - 3}{f(2) - f(3)} f(2) \\
&= 2 - \frac{(-1)}{(-5)} (-2) \\
&= 2 + \frac{2}{5} \\
&= 2.4
\end{aligned}
$$

Ejercicios

1. Sea $f(x) = x - 2\cos(x)$ y sean $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$. Determine el valor de x_3.