# Ejercicios MA-1006

Lista #3

Introducción al Análisis Numérico

**Edición:** Mario de León Urbina

19 de marzo de 2025

## 1. Integración numérica: cuadraturas

---

Reglas de cuadratura como rectángulo, trapecio, Simpson. Acotación de errores integrales. Integración numérica utilizando cuadraturas de Gauss-Legendre. Determinación de abscisas y pesos de una cuadratura (orden de exactitud). Reglas compuestas con cuadraturas simples de Newton-Cotes y gaussianas.

---

1) Utilice la regla del trapecio simple y la de Simpson 1/3 para aproximar

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$$

2) Calcule una aproximación para la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$ con base en la regla

   a) simple de Gauss de 3 puntos.
   b) del trapecio compuesta, con 4 subintervalos.[1]
   c) de Simpson 1/3 compuesta, con 4 subintervalos.
   d) de Simpson 3/8 compuesta, con 2 subintervalos.
   e) del trapecio modificado (Gauss 2) con 2 subintervalos.

3) Determine los pesos $w_0$ y $w_1$ y el valor de $\alpha$ tales que la aproximación

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_0 f(-\alpha) + w_1 f(\alpha)$$

   sea exacta para polinomios hasta el grado 3.

4) Determine una cota del error al aproximar $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con las reglas del trapecio y Simpson simples.

5) Considere la integral

$$I = \int_0^{\pi} \cos(x^2)\,dx \approx 0{,}5656935142...$$

   Determine cotas para los errores del trapecio y Simpson simples al aproximar la integral.

[1] Acá $m$ subintervalos significa que la partición original es de $m+1$ puntos igualmente espaciados.

6) Sea $f$ integrable en $[-1,1]$. Considere la regla de cuadratura de dos puntos de Gauss-Legendre, la cual está dada por

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \approx f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Utilice la versión compuesta para calcular una aproximación de $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t^2)\,dt$ con la partición $\mathcal{S} = \{t_k\}_{k=0}^{3}$ con $t_k = \dfrac{k\pi}{3}$.

7) Para obtener la regla de cuadratura del trapecio se utilizan los puntos $x_0 = a, x_1 = b$ con el fin de construir el polinomio de interpolación de Lagrange.

a) Muestre que si se utilizan $x_0 = \dfrac{2a+b}{3}$ y $x_1 = \dfrac{a+2b}{3}$, en vez de los valores originales, se obtiene una nueva regla del trapecio dada por

$$\frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right]$$

b) Determine el mayor grado polinomial para el cual la cuadratura previa es exacta.

## 2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: problemas de valor inicial

---

Problema de valor inicial, teorema de existencia y unicidad. Aplicación de los métodos de Euler, Trapecio, métodos explícitos e implícitos. Runge-Kutta (de orden 2, 3, 4).

---

1) Muestre que la función $f(t,y) = y + e^{-y} + e^{-t}$ es Lipschitz continua en la variable $y$ en el conjunto $D = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq y \leq +\infty\}$.

2) Verifique que la función $f(t,y) = e^{-t^2}\arctan(y)$ satisface la condición de Lipschitz en la segunda variable para $t \in [1,+\infty[$. Encuentre la constante de Lipschitz.

3) Muestre que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= \cos(2t) + \sin(2t), \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

tiene solución única en el rectángulo $R = [-\pi/4, \pi/4] \times [-1,1]$.

4) Aplique el método de Euler hacia adelante para

$$\begin{cases} y' &= \cos(2t) + \sin(2t), \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

en el intervalo $[0,1]$ utilizando 4 puntos equiespaciados. Determine el error relativo de cada aproximación. Mejore la aproximación aplicando el método predictor–corrector de Heun. Determine el error relativo de cada aproximación con este último método.

5) Considere el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' &= \arctan(y) - te^{t}, \quad \text{para } -1{,}2 \leq t \leq 1{,}2 \\ y(-1{,}2) &= 2 \end{cases}$$

Aplique el método RK2 para aproximar la solución del problema de valor inicial con $h = 0{,}6$.

6) Aproxime $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ utilizando el método RK3, con $h = 0{,}25$

7) Considere el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' - 3\displaystyle\int_0^t e^{-2(t-x)}y(x)\,dx &= 4e^{-2t}, \quad \text{para } t \in [0,\ 1] \\ y(0) &= 4 \end{cases}$$

   a) Use la regla del trapecio para aproximar la integral $\displaystyle\int_0^t e^{-2(t-w)}y(w)\,dw$.

   b) Reescriba el problema con base en la información del inciso a) y utilice el método RK4 con paso $h = 0{,}25$ para determinar una aproximación de $y(0{,}75)$.

   c) Resuelva el problema de manera exacta (use transformada de Laplace) y compare el valor exacto $y(0{,}75)$ con el valor aproximado del inciso b).

8) Resolviendo un problema de valor inicial adecuado, haga una tabla de valores aproximados de la función

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-x^2/2}\,dx$$

para $0 \leq t \leq 1$. Utilice el método de Runge-Kutta 3 con $h = 0{,}25$.