Resolución de problemas de valor inicial

Profesor
Filánder Sequeira Chavarría

Última actualización: 10 de octubre de 2020

Organización de la presentación

Introducción

El objetivo ahora corresponde a aproximar la solución del **problema de valor inicial** o **problema de Cauchy**:

Problema modelo

Dados $t_0, T, y_0 \in \mathbb{R}$ con $t_0 < T$ y $f : [t_0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se busca $y \in \mathcal{C}^1([t_0, T])$ tal que:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Introducción

Este problema admite solución única sobre una región $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$, cuando f satisface ser **Lipschitz en su segunda variable** en $\mathcal{D}$. Esto es, si existe $L > 0$ tal que:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \;\leq\; L\,|y_1 - y_2| \qquad \forall\,(t, y_1), (t, y_2) \in \mathcal{D}$$

Introducción

Este problema admite solución única sobre una región $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$, cuando f satisface ser **Lipschitz en su segunda variable** en $\mathcal{D}$. Esto es, si existe $L > 0$ tal que:

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \;\leq\; L\,|y_1 - y_2| \qquad \forall\,(t,y_1),(t,y_2) \in \mathcal{D}$$

Lipschitz en su segunda variable

Teorema

Si existe $L > 0$ tal que:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| < L \qquad \forall\, (t, y) \in \mathcal{D}$$

entonces f satisface ser **Lipschitz en su segunda variable** en $\mathcal{D}$ con constante L.

Ejemplo

Considere el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' &= ty^2 - t^2e^{-t} + y \quad \text{para} \quad -1 \leq t \leq 1 \\ y(-1) &= 0 \end{cases}$$

Muestre que tiene solución única en el conjunto

$$\mathcal{D} := \{(t, y) \ / \ -1 \leq t \leq 1 \ \wedge \ -2 \leq y \leq 2\}.$$

Solución

Observe que $f(t,y) := ty^2 - t^2e^{-t} + y$. Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ty + 1$$

Por otro lado, se sigue que:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= |2ty + 1| \\ &\leq |2ty| + |1| \\ &= 2\,|t|\,|y| + 1 \\ &\leq 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es Lipschitz en su segunda variable en $\mathcal{D}$ con constante $L = 5$. Así, el problema de valor inicial posee solución única en $\mathcal{D}$.

Solución

Observe que $f(t,y) := ty^2 - t^2e^{-t} + y$. Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ty + 1$$

Por otro lado, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= |2ty + 1| \\
&\leq |2ty| + |1| \\
&= 2\,|t|\,|y| + 1 \\
&\leq 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \\
&= 5
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es Lipschitz en su segunda variable en $\mathcal{D}$ con constante $L = 5$. Así, el problema de valor inicial posee solución única en $\mathcal{D}$.

Solución

Observe que $f(t,y) := ty^2 - t^2e^{-t} + y$. Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ty + 1$$

Por otro lado, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= |2ty + 1| \\
&\leq |2ty| + |1| \\
&= 2\,|t|\,|y| + 1 \\
&\leq 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \\
&= 5
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es Lipschitz en su segunda variable en $\mathcal{D}$ con constante $L = 5$. Así, el problema de valor inicial posee solución única en $\mathcal{D}$.

Solución

Observe que $f(t,y) := ty^2 - t^2e^{-t} + y$. Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ty + 1$$

Por otro lado, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= |2ty + 1| \\
&\leq |2ty| + |1| \\
&= 2\,|t|\,|y| + 1 \\
&\leq 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \\
&= 5
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es Lipschitz en su segunda variable en $\mathcal{D}$ con constante $L = 5$. Así, el problema de valor inicial posee solución única en $\mathcal{D}$.

Solución

Observe que $f(t,y) := ty^2 - t^2e^{-t} + y$. Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ty + 1$$

Por otro lado, se sigue que:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= |2ty + 1| \\ &\leq |2ty| + |1| \\ &= 2\,|t|\,|y| + 1 \\ &\leq 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es Lipschitz en su segunda variable en $\mathcal{D}$ con constante $L = 5$. Así, el problema de valor inicial posee solución única en $\mathcal{D}$.

Solución

Observe que $f(t,y) := ty^2 - t^2e^{-t} + y$. Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ty + 1$$

Por otro lado, se sigue que:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= |2ty + 1| \\ &\leq |2ty| + |1| \\ &= 2\,|t|\,|y| + 1 \\ &\leq 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es Lipschitz en su segunda variable en $\mathcal{D}$ con constante $L = 5$. Así, el problema de valor inicial posee solución única en $\mathcal{D}$.

Solución

Observe que $f(t,y) := ty^2 - t^2e^{-t} + y$. Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ty + 1$$

Por otro lado, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= |2ty + 1| \\
&\leq |2ty| + |1| \\
&= 2\,|t|\,|y| + 1 \\
&\leq 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \\
&= 5
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es Lipschitz en su segunda variable en $\mathcal{D}$ con constante $L = 5$. Así, el problema de valor inicial posee solución única en $\mathcal{D}$.

Solución

Observe que $f(t,y) := ty^2 - t^2e^{-t} + y$. Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ty + 1$$

Por otro lado, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= |2ty + 1| \\
&\leq |2ty| + |1| \\
&= 2\,|t|\,|y| + 1 \\
&\leq 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \\
&= 5
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es Lipschitz en su segunda variable en $\mathcal{D}$ con constante $L = 5$. Así, el problema de valor inicial posee solución única en $\mathcal{D}$.

Solución

Observe que $f(t,y) := ty^2 - t^2e^{-t} + y$. Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ty + 1$$

Por otro lado, se sigue que:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= |2ty + 1| \\ &\leq |2ty| + |1| \\ &= 2|t||y| + 1 \\ &\leq 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es Lipschitz en su segunda variable en $\mathcal{D}$ con constante $L = 5$. Así, el problema de valor inicial posee solución única en $\mathcal{D}$.

Ejemplo

Calcule la constante $L > 0$ que verifica que la función:

$$f(t, y) \;:=\; t^2 \cos^2(y) + y\,\mathrm{sen}^2(t)$$

es Lipschitz en la segunda variable sobre

$$\mathcal{D} \;:=\; \{(t, y) \;/\; -1 \leq t \leq 1 \;\wedge\; y \in \mathbb{R}\}.$$

Solución

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(t^2\cos^2(y) + y\,\mathrm{sen}^2(t)\right)\right| \\
&= \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&\leq \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y)\right| + \left|\mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&= 2\cdot t^2\cdot|\cos(y)|\cdot|\mathrm{sen}(y)| + \mathrm{sen}^2(t) \\
&\leq 2\cdot t^2\cdot 1\cdot 1 + 1^2 \\
&= 2\cdot t^2 + 1 \\
&\leq 2\cdot 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que $L = 3$.

Solución

Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(t^2\cos^2(y) + y\,\mathrm{sen}^2(t)\right)\right| \\
&= \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&\leq \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y)\right| + \left|\mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&= 2\cdot t^2\cdot|\cos(y)|\cdot|\mathrm{sen}(y)| + \mathrm{sen}^2(t) \\
&\leq 2\cdot t^2\cdot 1\cdot 1 + 1^2 \\
&= 2\cdot t^2 + 1 \\
&\leq 2\cdot 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se concluye que $L = 3$.

Solución

Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(t^2\cos^2(y) + y\,\mathrm{sen}^2(t)\right)\right| \\
&= \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&\leq \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y)\right| + \left|\mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&= 2\cdot t^2\cdot|\cos(y)|\cdot|\mathrm{sen}(y)| + \mathrm{sen}^2(t) \\
&\leq 2\cdot t^2\cdot 1\cdot 1 + 1^2 \\
&= 2\cdot t^2 + 1 \\
&\leq 2\cdot 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se concluye que $L = 3$.

Solución

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(t^2\cos^2(y) + y\,\mathrm{sen}^2(t)\right)\right| \\
&= \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&\leq \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y)\right| + \left|\mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&= 2\cdot t^2\cdot|\cos(y)|\cdot|\mathrm{sen}(y)| + \mathrm{sen}^2(t) \\
&\leq 2\cdot t^2\cdot 1\cdot 1 + 1^2 \\
&= 2\cdot t^2 + 1 \\
&\leq 2\cdot 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que $L = 3$.

Solución

Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(t^2\cos^2(y) + y\,\mathrm{sen}^2(t)\right)\right| \\
&= \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&\leq \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y)\right| + \left|\mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&= 2\cdot t^2\cdot|\cos(y)|\cdot|\mathrm{sen}(y)| + \mathrm{sen}^2(t) \\
&\leq 2\cdot t^2\cdot 1\cdot 1 + 1^2 \\
&= 2\cdot t^2 + 1 \\
&\leq 2\cdot 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se concluye que $L = 3$.

Solución

Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(t^2\cos^2(y) + y\,\mathrm{sen}^2(t)\right)\right| \\
&= \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&\leq \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y)\right| + \left|\mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&= 2\cdot t^2\cdot|\cos(y)|\cdot|\mathrm{sen}(y)| + \mathrm{sen}^2(t) \\
&\leq 2\cdot t^2\cdot 1\cdot 1 + 1^2 \\
&= 2\cdot t^2 + 1 \\
&\leq 2\cdot 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se concluye que $L = 3$.

Solución

Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(t^2\cos^2(y) + y\,\mathrm{sen}^2(t)\right)\right| \\
&= \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&\leq \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y)\right| + \left|\mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&= 2\cdot t^2\cdot|\cos(y)|\cdot|\mathrm{sen}(y)| + \mathrm{sen}^2(t) \\
&\leq 2\cdot t^2\cdot 1\cdot 1 + 1^2 \\
&= 2\cdot t^2 + 1 \\
&\leq 2\cdot 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se concluye que $L = 3$.

Solución

Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(t^2\cos^2(y) + y\,\mathrm{sen}^2(t)\right)\right| \\
&= \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&\leq \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y)\right| + \left|\mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&= 2\cdot t^2\cdot|\cos(y)|\cdot|\mathrm{sen}(y)| + \mathrm{sen}^2(t) \\
&\leq 2\cdot t^2\cdot 1\cdot 1 + 1^2 \\
&= 2\cdot t^2 + 1 \\
&\leq 2\cdot 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se concluye que $L = 3$.

Solución

Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(t^2\cos^2(y) + y\,\mathrm{sen}^2(t)\right)\right| \\
&= \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&\leq \left|-2t^2\cos(y)\,\mathrm{sen}(y)\right| + \left|\mathrm{sen}^2(t)\right| \\
&= 2\cdot t^2\cdot|\cos(y)|\cdot|\mathrm{sen}(y)| + \mathrm{sen}^2(t) \\
&\leq 2\cdot t^2\cdot 1\cdot 1 + 1^2 \\
&= 2\cdot t^2 + 1 \\
&\leq 2\cdot 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se concluye que $L = 3$.

Ejemplo

Calcule la constante $L > 0$ que verifica que la función:

$$f(t, y) \ := \ t \arctan(y)$$

es Lipschitz en la segunda variable sobre

$$\mathcal{D} \ := \ \{(t, y) \ / \ 2 \leq t \leq 6 \ \wedge \ y \in \mathbb{R}\}.$$

Solución

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(t\ \arctan(y)\right)\right| \\
&= \left|\frac{t}{y^2+1}\right| \\
&= \frac{|t|}{y^2+1} \\
&\leq \frac{6}{0+1} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que $L = 6$.

Solución

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\big(t\ \arctan(y)\big)\right| \\
&= \left|\frac{t}{y^2+1}\right| \\
&= \frac{|t|}{y^2+1} \\
&\leq \frac{6}{0+1} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que $L = 6$.

Solución

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\big(t\,\arctan(y)\big)\right| \\
&= \left|\frac{t}{y^2+1}\right| \\
&= \frac{|t|}{y^2+1} \\
&\leq \frac{6}{0+1} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que $L = 6$.

Solución

Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\big(t \arctan(y)\big)\right| \\
&= \left|\frac{t}{y^2+1}\right| \\
&= \frac{|t|}{y^2+1} \\
&\leq \frac{6}{0+1} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se deduce que $L = 6$.

Solución

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(t \arctan(y)\right)\right| \\
&= \left|\frac{t}{y^2+1}\right| \\
&= \frac{|t|}{y^2+1} \\
&\leq \frac{6}{0+1} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que $L = 6$.

Solución

Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(t\,\arctan(y)\right)\right| \\
&= \left|\frac{t}{y^2+1}\right| \\
&= \frac{|t|}{y^2+1} \\
&\leq \frac{6}{0+1} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se deduce que $L = 6$.

Ejercicio

Ejercicio

Verifique que el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} t^2 y' &= t^2 + ty + y^2 \quad \text{para} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) &= -1 \end{cases}$$

posee solución única en

$$\mathcal{D} := \{(t,y) \,/\, 1 \leq t \leq 2 \,\wedge\, -2 \leq y \leq 2\}.$$

Ejercicio

Ejercicio para la casa (Quiz 6, IC-2018)

Muestre que el problema:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+y^2 e^{2t}} & \text{para} \quad 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

posee solución única en $\mathcal{D} := \mathbb{R}^2$.

Organización de la presentación

Introducción

Recordemos que nuestro problema modelo viene dado por: Hallar $y = y(t)$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t, y(t)) \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

Ahora, considere una partición uniforme (puntos igualmente espaciados) conformada de n subintervalos para el intervalo $[t_0, T]$. Es decir:

donde $t_i := t_0 + ih = t_{i-1} + h$, para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $h := \frac{T - t_0}{n}$.

Introducción

Recordemos que nuestro problema modelo viene dado por: Hallar $y = y(t)$ tal que:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \text{para} \quad t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ahora, considere una partición uniforme (puntos igualmente espaciados) conformada de n subintervalos para el intervalo $[t_0, T]$.

Es decir:

$$t_0 \qquad t_1 \qquad t_2 \qquad t_3 \qquad \cdots \qquad t_{n\text{-}1} \qquad t_n = T$$

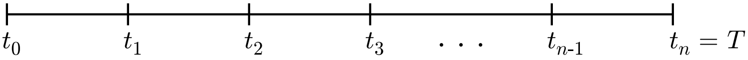
donde $t_i := t_0 + ih = t_{i-1} + h$, para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $h := \frac{T - t_0}{n}$.

Introducción

Recordemos que nuestro problema modelo viene dado por: Hallar $y = y(t)$ tal que:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ahora, considere una partición uniforme (puntos igualmente espaciados) conformada de n subintervalos para el intervalo $[t_0, T]$. Es decir:



donde $t_i := t_0 + ih = t_{i-1} + h$, para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $h := \frac{T - t_0}{n}$.

Introducción

Luego, integrando la ecuación diferencial sobre $[t_k, t_{k+1}]$, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$, se tiene que:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad y(t_{k+1}) - y(t_k) \quad = \quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad y(t_{k+1}) \quad = \quad y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

Introducción

Luego, integrando la ecuación diferencial sobre $[t_k, t_{k+1}]$, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \quad y(t_{k+1}) - y(t_k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \quad y(t_{k+1}) &= y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Introducción

Luego, integrando la ecuación diferencial sobre $[t_k, t_{k+1}]$, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \quad y(t_{k+1}) - y(t_k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \quad y(t_{k+1}) &= y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Esquema numérico

Así, denotando por y_k a la aproximación de $y(t_k)$, entonces lo anterior define la iteración:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{k+1} = y_k + \displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, \mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\text{para } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Observe que todo se reduce a poder calcular/aproximar esta integral.

Por otro lado, <u>no</u> se debe confundir que:

- y_k es la aproximación de y evaluado en t_k
- $y(t_k)$ es el valor exacto de y evaluado en t_k

Esquema numérico

Así, denotando por y_k a la aproximación de $y(t_k)$, entonces lo anterior define la iteración:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{k+1} = y_k + \displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, \mathrm{d}t \end{cases}$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1$

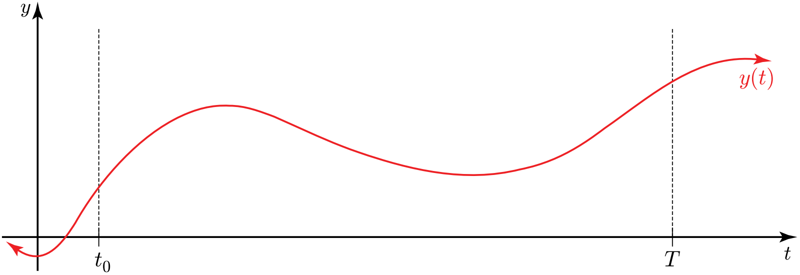
Observe que todo se reduce a poder calcular/aproximar esta integral.

Por otro lado, <u>no</u> se debe confundir que:

- y_k es la aproximación de y evaluado en t_k
- $y(t_k)$ es el valor exacto de y evaluado en t_k

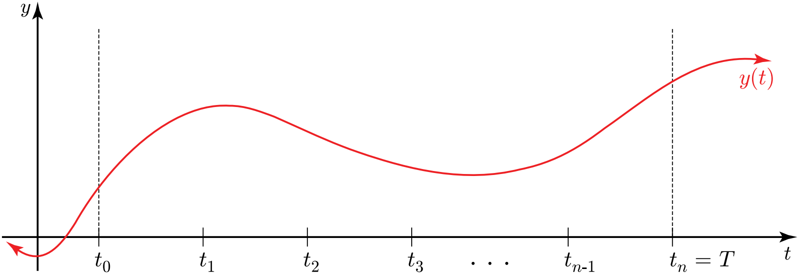
Observación

Los esquemas o iteraciones de la forma anterior, permiten encontrar una serie de puntos $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$, los cuales son aproximaciones de $(t_0, y(t_0)), (t_1, y(t_1)), \ldots, (t_n, y(t_n))$, respectivamente. Esto se ilustra en la siguiente figura:



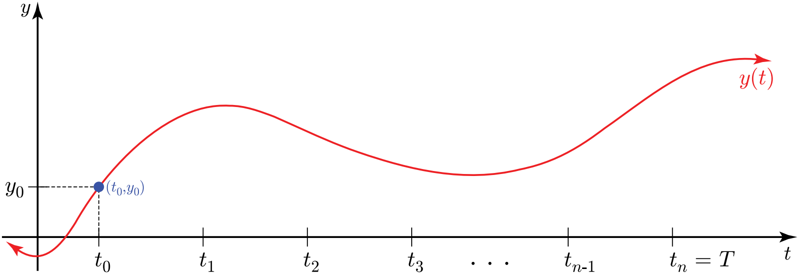
Observación

Los esquemas o iteraciones de la forma anterior, permiten encontrar una serie de puntos $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$, los cuales son aproximaciones de $(t_0, y(t_0)), (t_1, y(t_1)), \ldots, (t_n, y(t_n))$, respectivamente. Esto se ilustra en la siguiente figura:



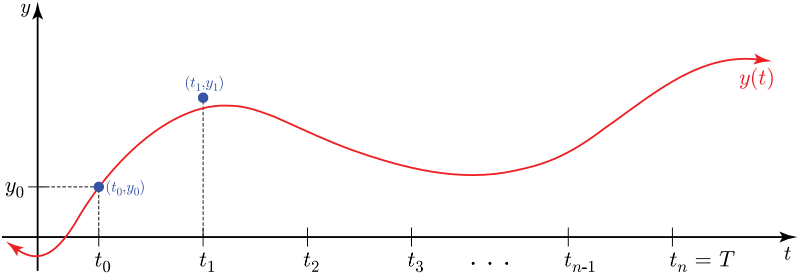
Observación

Los esquemas o iteraciones de la forma anterior, permiten encontrar una serie de puntos $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$, los cuales son aproximaciones de $(t_0, y(t_0)), (t_1, y(t_1)), \ldots, (t_n, y(t_n))$, respectivamente. Esto se ilustra en la siguiente figura:



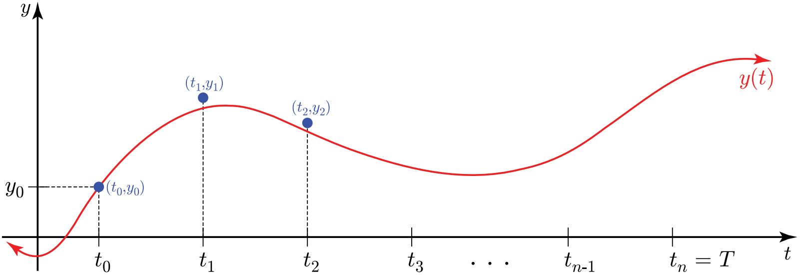
Observación

Los esquemas o iteraciones de la forma anterior, permiten encontrar una serie de puntos $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$, los cuales son aproximaciones de $(t_0, y(t_0)), (t_1, y(t_1)), \ldots, (t_n, y(t_n))$, respectivamente. Esto se ilustra en la siguiente figura:



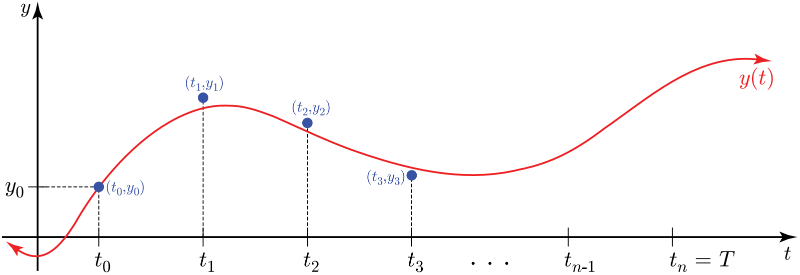
Observación

Los esquemas o iteraciones de la forma anterior, permiten encontrar una serie de puntos $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$, los cuales son aproximaciones de $(t_0, y(t_0)), (t_1, y(t_1)), \ldots, (t_n, y(t_n))$, respectivamente. Esto se ilustra en la siguiente figura:



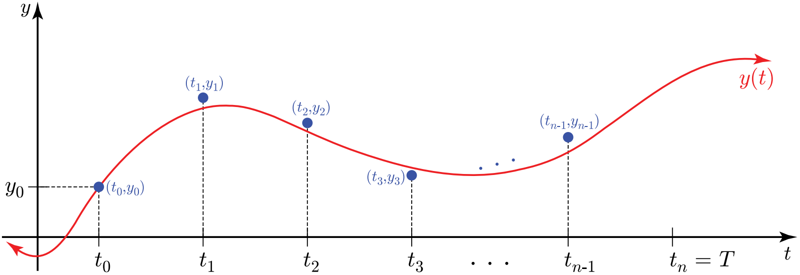
Observación

Los esquemas o iteraciones de la forma anterior, permiten encontrar una serie de puntos $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$, los cuales son aproximaciones de $(t_0, y(t_0)), (t_1, y(t_1)), \ldots, (t_n, y(t_n))$, respectivamente. Esto se ilustra en la siguiente figura:



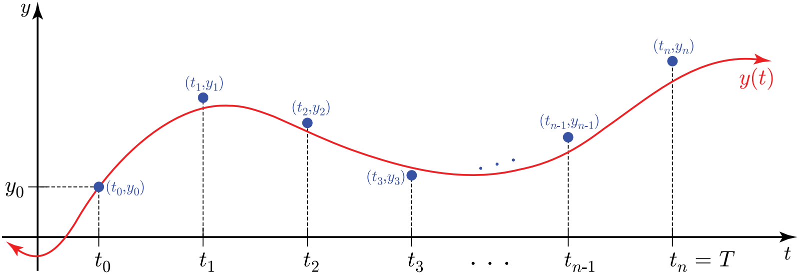
Observación

Los esquemas o iteraciones de la forma anterior, permiten encontrar una serie de puntos $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$, los cuales son aproximaciones de $(t_0, y(t_0)), (t_1, y(t_1)), \ldots, (t_n, y(t_n))$, respectivamente. Esto se ilustra en la siguiente figura:



Observación

Los esquemas o iteraciones de la forma anterior, permiten encontrar una serie de puntos $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$, los cuales son aproximaciones de $(t_0, y(t_0)), (t_1, y(t_1)), \ldots, (t_n, y(t_n))$, respectivamente. Esto se ilustra en la siguiente figura:



Observación

Es decir, se aproxima la función $y(t)$ de manera discreta.

En el caso de que se requiera una expresión continua (completa) para la función $y(t)$, basta con utilizar las técnicas de interpolación previamente vistas.

Observación

Es decir, se aproxima la función $y(t)$ de manera discreta.

En el caso de que se requiera una expresión continua (completa) para la función $y(t)$, basta con utilizar las técnicas de interpolación previamente vistas.

Organización de la presentación

Introducción

Un **método de un paso** es aquel que para calcular el valor siguiente y_{k+1}, requiere únicamente del valor previo y_k (la relación puede ser explícita o implícita).

A continuación se presentan algunos métodos de un paso, obtenidos a partir de la aproximación de la integral en la iteración:

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, \mathrm{d}t$$

Introducción

Un **método de un paso** es aquel que para calcular el valor siguiente y_{k+1}, requiere únicamente del valor previo y_k (la relación puede ser explícita o implícita).

A continuación se presentan algunos métodos de un paso, obtenidos a partir de la aproximación de la integral en la iteración:

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

Primera opción

Se aproxima $f(t, y(t))$ dentro de la integral por una constante. Más precisamente, tomando:

$$f(t, y(t)) \approx f(t_k, y_k)$$

se sigue que:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, y_k)\,\mathrm{d}t \\ &= y_k + \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} 1\,\mathrm{d}t\right] f(t_k, y_k) \\ &= y_k + (t_{k+1} - t_k) f(t_k, y_k) \\ &= y_k + h\, f(t_k, y_k) \end{aligned}$$

Primera opción

Se aproxima $f(t, y(t))$ dentro de la integral por una constante. Más precisamente, tomando:

$$f(t, y(t)) \approx f(t_k, y_k)$$

se sigue que:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, y_k)\,\mathrm{d}t \\ &= y_k + \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} 1\,\mathrm{d}t\right] f(t_k, y_k) \\ &= y_k + (t_{k+1} - t_k) f(t_k, y_k) \\ &= y_k + h\,f(t_k, y_k) \end{aligned}$$

Primera opción

Se aproxima $f(t, y(t))$ dentro de la integral por una constante. Más precisamente, tomando:

$$f(t, y(t)) \approx f(t_k, y_k)$$

se sigue que:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, y_k)\,\mathrm{d}t \\ &= y_k + \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} 1\,\mathrm{d}t\right] f(t_k, y_k) \\ &= y_k + (t_{k+1} - t_k) f(t_k, y_k) \\ &= y_k + h\, f(t_k, y_k) \end{aligned}$$

Primera opción

Se aproxima $f(t, y(t))$ dentro de la integral por una constante. Más precisamente, tomando:

$$f(t, y(t)) \approx f(t_k, y_k)$$

se sigue que:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, y_k)\,\mathrm{d}t \\ &= y_k + \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} 1\,\mathrm{d}t\right] f(t_k, y_k) \\ &= y_k + (t_{k+1} - t_k) f(t_k, y_k) \\ &= y_k + h\, f(t_k, y_k) \end{aligned}$$

Método de Euler hacia adelante

De esta forma se obtiene el esquema numérico:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{k+1} \;=\; y_k + h\,f(t_k, y_k) \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

conocido como el **método de Euler hacia adelante**. Observe que este es un método explícito.

Ilustración del método de Euler

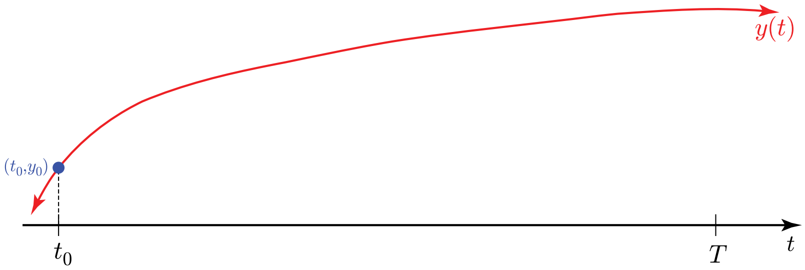


Ilustración del método de Euler

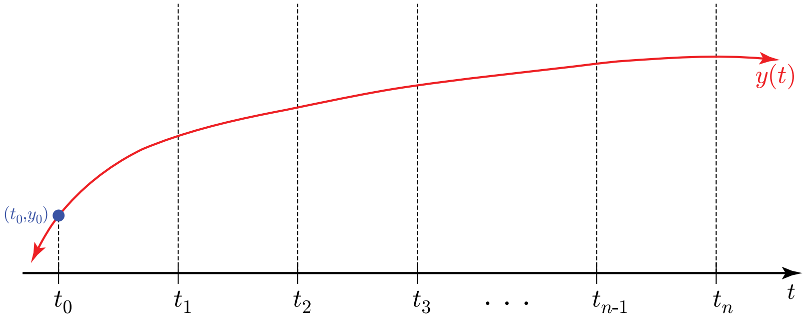


Ilustración del método de Euler

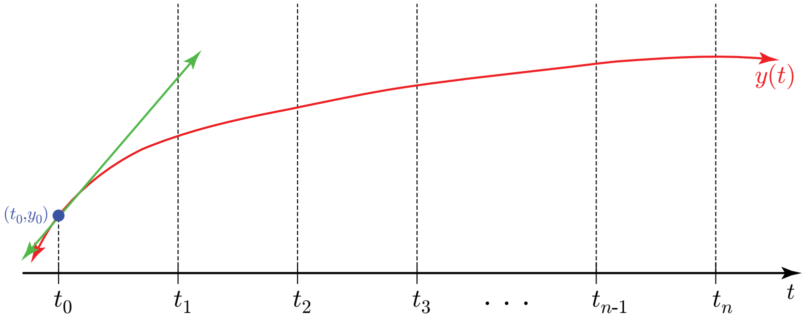


Ilustración del método de Euler

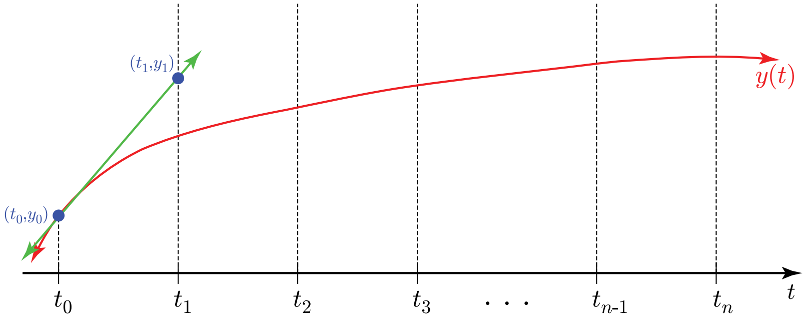


Ilustración del método de Euler

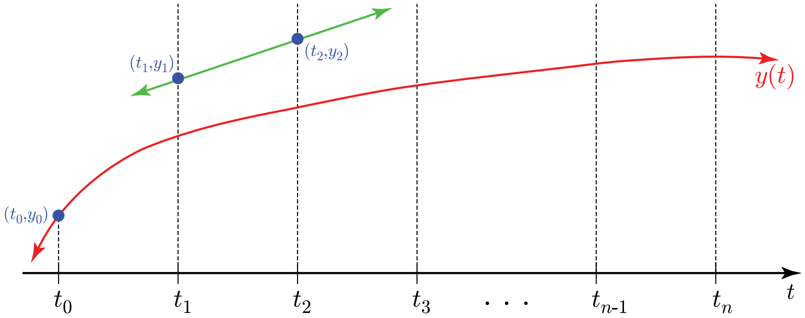
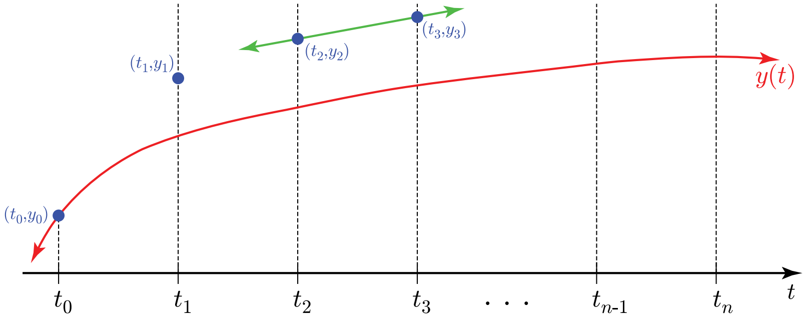


Ilustración del método de Euler



Segunda opción: Euler hacia atrás

Similar al anterior, pero ahora:

$$f(t, y(t)) \approx f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

con lo cual se obtiene que:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{k+1} = y_k + h\, f(t_{k+1}, y_{k+1}) \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

denominado el **método de Euler hacia atrás** y es un método implícito, por lo que se requiere resolver una ecuación.

Ejemplo

Utilice ambos métodos de Euler para aproximar

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2t}{\sqrt{2t-1}} - y \quad \text{para} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

con 4 puntos. Luego, determine el error absoluto, sabiendo que la solución exacta corresponde a $y(t) = \sqrt{2t-1}$.

Solución

Usar 4 puntos significa que $n+1=4 \Rightarrow n=3$. Así, $h=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$ y con ello:

$$t_0 = 1\,, \qquad t_1 = \frac{4}{3}\,, \qquad t_2 = \frac{5}{3} \qquad \text{y} \qquad t_3 = 2\,.$$

Euler hacia adelante Se tiene que:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{3}\left(\frac{2t_k}{\sqrt{2t_k-1}} - y_k\right)$$

donde es claro que:

Solución

Usar 4 puntos significa que $n+1=4 \Rightarrow n=3$. Así, $h=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$ y con ello:

$$t_0 \;=\; 1\,, \qquad t_1 \;=\; \frac{4}{3}\,, \qquad t_2 \;=\; \frac{5}{3} \qquad \text{y} \qquad t_3 \;=\; 2\,.$$

$\boxed{\textbf{Euler hacia adelante}}$ Se tiene que:

$$y_{k+1} \;=\; y_k \;+\; \frac{1}{3}\left(\frac{2t_k}{\sqrt{2t_k-1}} - y_k\right)$$

donde es claro que:

Solución

- $y_0 \;=\; 1$
- $y_1 \;=\; 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2\cdot 1}{\sqrt{2\cdot 1-1}} - 1\right) \;=\; 1 + \frac{1}{3} \;=\; \frac{4}{3}$
- $y_2 \;=\; \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)}{\sqrt{2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)-1}} - \frac{4}{3}\right) \;=\; 1.577419262$
- $y_3 \;=\; 1.577419262 + \frac{1}{3}\left(\frac{2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)}{\sqrt{2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)-1}} - 1.577419262\right)$

  $\;=\; 1.779005808$

Solución

- $y_0 = 1$
- $y_1 = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2\cdot 1}{\sqrt{2\cdot 1 - 1}} - 1\right) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
- $y_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)}{\sqrt{2\cdot\left(\frac{4}{3}\right) - 1}} - \frac{4}{3}\right) = 1.577419262$
- $y_3 = 1.577419262 + \frac{1}{3}\left(\frac{2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)}{\sqrt{2\cdot\left(\frac{5}{3}\right) - 1}} - 1.577419262\right)$
  $= 1.779005808$

Solución

- $y_0 = 1$
- $y_1 = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2\cdot 1}{\sqrt{2\cdot 1 - 1}} - 1\right) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
- $y_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)}{\sqrt{2\cdot\left(\frac{4}{3}\right) - 1}} - \frac{4}{3}\right) = 1.577419262$
- $y_3 = 1.577419262 + \frac{1}{3}\left(\frac{2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)}{\sqrt{2\cdot\left(\frac{5}{3}\right) - 1}} - 1.577419262\right)$
  $= 1.779005808$

Solución

- $y_0 = 1$
- $y_1 = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2 \cdot 1}{\sqrt{2 \cdot 1 - 1}} - 1\right) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
- $y_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)}{\sqrt{2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) - 1}} - \frac{4}{3}\right) = 1.577419262$
- $$\begin{aligned} y_3 &= 1.577419262 + \frac{1}{3}\left(\frac{2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)}{\sqrt{2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) - 1}} - 1.577419262\right) \\ &= 1.779005808 \end{aligned}$$

Solución

Por lo tanto, la solución numérica viene dada por:

$$(1,1)\,, \quad \left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)\,, \quad \left(\frac{5}{3},1.577419262\right) \quad \text{y} \quad (2,1.779005808).$$

Solución

Ahora, los valores exactos son:

- $y(t_0) = y(1) = 1$
- $y(t_1) = y\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{2 \cdot \frac{4}{3} - 1} = 1.290994449$
- $y(t_2) = y\left(\frac{5}{3}\right) = \sqrt{2 \cdot \frac{5}{3} - 1} = 1.527525232$
- $y(t_3) = y(2) = \sqrt{2 \cdot 2 - 1} = 1.732050808$

Solución

De esta forma, se obtienen los errores absolutos:

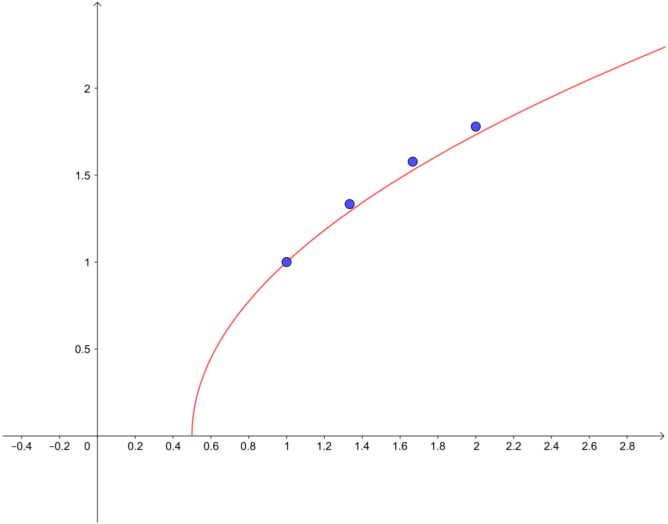
- $$|y(t_0) - y_0| = 0$$

- $$\begin{aligned} |y(t_1) - y_1| &= \left|1.290994449 - \tfrac{4}{3}\right| \\ &= 0.04233888433 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} |y(t_2) - y_2| &= |1.527525232 - 1.577419262| \\ &= 0.04989403 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} |y(t_3) - y_3| &= |1.732050808 - 1.779005808| \\ &= 0.04695500049 \end{aligned}$$

Solución



Solución

$\boxed{\textbf{Euler hacia atrás}}$ Observe que:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{3}\left(\frac{2t_{k+1}}{\sqrt{2t_{k+1}-1}} - y_{k+1}\right) \\
\Rightarrow \quad y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}} - \frac{1}{3}y_{k+1} \\
\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{3}\right) y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}} \\
\Rightarrow \quad \frac{4}{3} y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}} \\
\Rightarrow \quad y_{k+1} &= \frac{3}{4} y_k + \frac{t_{k+1}}{2\sqrt{2t_{k+1}-1}}
\end{aligned}
$$

Solución

$\boxed{\textbf{Euler hacia atrás}}$ Observe que:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{3}\left(\frac{2t_{k+1}}{\sqrt{2t_{k+1}-1}} - y_{k+1}\right) \\
\Rightarrow \quad y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}} - \frac{1}{3}y_{k+1} \\
\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}} \\
\Rightarrow \quad \frac{4}{3}y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}} \\
\Rightarrow \quad y_{k+1} &= \frac{3}{4}y_k + \frac{t_{k+1}}{2\sqrt{2t_{k+1}-1}}
\end{aligned}
$$

Solución

$\boxed{\textbf{Euler hacia atrás}}$ Observe que:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{3}\left(\frac{2t_{k+1}}{\sqrt{2t_{k+1}-1}} - y_{k+1}\right)\\
\Rightarrow \quad y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}} - \frac{1}{3}y_{k+1}\\
\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}}\\
\Rightarrow \quad \frac{4}{3}y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}}\\
\Rightarrow \quad y_{k+1} &= \frac{3}{4}y_k + \frac{t_{k+1}}{2\sqrt{2t_{k+1}-1}}
\end{aligned}
$$

Solución

$\boxed{\textbf{Euler hacia atrás}}$ Observe que:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{3}\left(\frac{2t_{k+1}}{\sqrt{2t_{k+1}-1}} - y_{k+1}\right)\\
\Rightarrow \quad y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}} - \frac{1}{3}y_{k+1}\\
\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}}\\
\Rightarrow \quad \frac{4}{3}y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}}\\
\Rightarrow \quad y_{k+1} &= \frac{3}{4}y_k + \frac{t_{k+1}}{2\sqrt{2t_{k+1}-1}}
\end{aligned}
$$

Solución

$\boxed{\textbf{Euler hacia atrás}}$ Observe que:

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{3}\left(\frac{2t_{k+1}}{\sqrt{2t_{k+1}-1}} - {\color{red}y_{k+1}}\right) \\
\Rightarrow \quad y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}} - \frac{1}{3}y_{k+1} \\
\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}} \\
\Rightarrow \quad \frac{4}{3}y_{k+1} &= y_k + \frac{2t_{k+1}}{3\sqrt{2t_{k+1}-1}} \\
\Rightarrow \quad y_{k+1} &= \frac{3}{4}y_k + \frac{t_{k+1}}{2\sqrt{2t_{k+1}-1}}
\end{aligned}$$

Solución

Ahora, se sigue que:

- $y_0 \;=\; 1$
- $y_1 \;=\; \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{\frac{4}{3}}{2\sqrt{2 \cdot \frac{4}{3} - 1}} \;=\; 1.266397779$
- $y_2 \;=\; \frac{3}{4} \cdot 1.266397779 + \frac{\frac{5}{3}}{2\sqrt{2 \cdot \frac{5}{3} - 1}} \;=\; 1.49534306$
- $y_3 \;=\; \frac{3}{4} \cdot 1.49534306 + \frac{2}{2\sqrt{2 \cdot 2 - 1}} \;=\; 1.698857564$

Solución

Ahora, se sigue que:

- $y_0 \;=\; 1$
- $y_1 \;=\; \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{\frac{4}{3}}{2\sqrt{2 \cdot \frac{4}{3} - 1}} \;=\; 1.266397779$
- $y_2 \;=\; \frac{3}{4} \cdot 1.266397779 + \frac{\frac{5}{3}}{2\sqrt{2 \cdot \frac{5}{3} - 1}} \;=\; 1.49534306$
- $y_3 \;=\; \frac{3}{4} \cdot 1.49534306 + \frac{2}{2\sqrt{2 \cdot 2 - 1}} \;=\; 1.698857564$

Solución

Ahora, se sigue que:

- $y_0 \;=\; 1$
- $y_1 \;=\; \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{\frac{4}{3}}{2\sqrt{2\cdot\frac{4}{3}-1}} \;=\; 1.266397779$
- $y_2 \;=\; \frac{3}{4}\cdot 1.266397779 + \frac{\frac{5}{3}}{2\sqrt{2\cdot\frac{5}{3}-1}} \;=\; 1.49534306$
- $y_3 \;=\; \frac{3}{4}\cdot 1.49534306 + \frac{2}{2\sqrt{2\cdot 2-1}} \;=\; 1.698857564$

Solución

Ahora, se sigue que:

- $y_0 = 1$
- $y_1 = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{\frac{4}{3}}{2\sqrt{2 \cdot \frac{4}{3} - 1}} = 1.266397779$
- $y_2 = \frac{3}{4} \cdot 1.266397779 + \frac{\frac{5}{3}}{2\sqrt{2 \cdot \frac{5}{3} - 1}} = 1.49534306$
- $y_3 = \frac{3}{4} \cdot 1.49534306 + \frac{2}{2\sqrt{2 \cdot 2 - 1}} = 1.698857564$

Solución

Por lo tanto, la solución numérica viene dada por:

$$(1,1)\,,\quad \left(\frac{4}{3}, 1.266397779\right)\,,\quad \left(\frac{5}{3}, 1.49534306\right)$$

y

$$(2, 1.698857564).$$

Solución

De esta forma, se obtienen los errores absolutos:

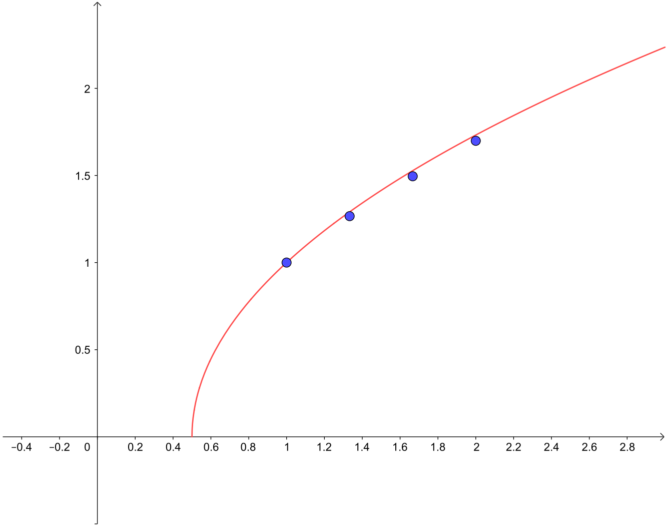
- $|y(t_0) - y_0| \;=\; 0$

- $|y(t_1) - y_1| \;=\; |1.290994449 - 1.266397779| \;=\; 0.02459667$

- $|y(t_2) - y_2| \;=\; |1.527525232 - 1.49534306| \;=\; 0.032182172$

- $|y(t_3) - y_3| \;=\; |1.732050808 - 1.698857564| \;=\; 0.033193244$

Solución



Ejercicio

Ejercicio

Repita el ejercicio anterior con 4 subintervalos a:

$$\begin{cases} y' = 5t - 2t^3 + ty \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

donde la solución exacta es $y(t) = 2t^2 - 1$

Tercera opción

Se utiliza la regla del trapecio, con lo que:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t &\approx \frac{t_{k+1} - t_k}{2}\Big[f(t_k, y(t_k)) + f\big(t_{k+1}, y(t_{k+1})\big)\Big] \\
&\approx \frac{t_{k+1} - t_k}{2}\Big[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\Big] \\
&= \frac{h}{2}\Big[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\Big]
\end{aligned}
$$

Tercera opción

Se utiliza la regla del trapecio, con lo que:

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t &\approx \frac{t_{k+1}-t_k}{2}\left[f(t_k, y(t_k)) + f\big(t_{k+1}, y(t_{k+1})\big)\right] \\
&\approx \frac{t_{k+1}-t_k}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right] \\
&= \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]
\end{aligned}$$

Tercera opción

Se utiliza la regla del trapecio, con lo que:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t &\approx \frac{t_{k+1} - t_k}{2}\left[f(t_k, y(t_k)) + f\big(t_{k+1}, y(t_{k+1})\big)\right] \\
&\approx \frac{t_{k+1} - t_k}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right] \\
&= \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]
\end{aligned}
$$

Tercera opción

Se utiliza la regla del trapecio, con lo que:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t &\approx \frac{t_{k+1} - t_k}{2}\left[f(t_k, y(t_k)) + f\big(t_{k+1}, y(t_{k+1})\big)\right] \\
&\approx \frac{t_{k+1} - t_k}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right] \\
&= \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]
\end{aligned}
$$

Método de trapecio implícito

con lo que se obtiene la iteración:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{k+1} \;=\; y_k + \dfrac{h}{2}\big[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\big] \\ \qquad\qquad\qquad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

la cual se conoce como el **método de Crank-Nicholson** o el **método de trapecio implícito**. Nótese que este esquema corresponde al promedio entre ambos esquemas de Euler.

Método de trapecio implícito

con lo que se obtiene la iteración:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{k+1} \;=\; y_k + \dfrac{h}{2}\big[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\big] \\ \qquad\qquad\qquad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

la cual se conoce como el **método de Crank-Nicholson** o el **método de trapecio implícito**. Nótese que este esquema corresponde al promedio entre ambos esquemas de Euler.

Cuarta opción

Para eliminar la parte implícita del método de trapecio implícito, es decir y_{k+1} del lado derecho, esta se puede reemplazar por una aproximación explícita como la dada por el método de Euler hacia adelante. Es decir, se tiene el nuevo esquema:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ \widehat{y}_{k+1} = y_k + h\,f(t_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \widehat{y}_{k+1})\right] \\ \qquad\qquad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

El valor $\widehat{y}_{k+1}$ es un paso intermedio. Este nuevo esquema se conoce como el **método de Heun**, o bien, el **método de trapecio explícito**.

Cuarta opción

Para eliminar la parte implícita del método de trapecio implícito, es decir y_{k+1} del lado derecho, esta se puede reemplazar por una aproximación explícita como la dada por el método de Euler hacia adelante. Es decir, se tiene el nuevo esquema:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ \widehat{y}_{k+1} = y_k + h\,f(t_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \widehat{y}_{k+1})\right] \\ \qquad\qquad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

El valor $\widehat{y}_{k+1}$ es un paso intermedio. Este nuevo esquema se conoce como el **método de Heun**, o bien, el **método de trapecio explícito**.

Observación

La idea detrás del método de trapecio explícito, en el cual se convierte un método implícito en uno explícito se conoce como técnica de **predictor-corrector**. En el paso intermedio $\widehat{y}_{k+1}$ se genera una "predicción" del valor buscado, y en el segundo paso se utiliza esta para mejorar/corregir dicho valor.

También es posible aplicar esta técnica en el método de Euler hacia atrás, tal y como sigue:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{k+1} = y_k + h\,f(t_{k+1}, y_k + h\,f(t_k, y_k)) \\ \qquad\qquad\qquad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Observación

La idea detrás del método de trapecio explícito, en el cual se convierte un método implícito en uno explícito se conoce como técnica de **predictor-corrector**. En el paso intermedio $\widehat{y}_{k+1}$ se genera una "predicción" del valor buscado, y en el segundo paso se utiliza esta para mejorar/corregir dicho valor.

También es posible aplicar esta técnica en el método de Euler hacia atrás, tal y como sigue:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{k+1} = y_k + h\, f(t_{k+1}, y_k + h\, f(t_k, y_k)) \\ \qquad\qquad\qquad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Observación

La idea detrás del método de trapecio explícito, en el cual se convierte un método implícito en uno explícito se conoce como técnica de **predictor-corrector**. En el paso intermedio $\widehat{y}_{k+1}$ se genera una "predicción" del valor buscado, y en el segundo paso se utiliza esta para mejorar/corregir dicho valor.

También es posible aplicar esta técnica en el método de Euler hacia atrás, tal y como sigue:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{k+1} \;=\; y_k + h\,f(t_{k+1},\, y_k + h\,f(t_k, y_k)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Ejercicio

Ejercicio

Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= y + \dfrac{t}{2y} \quad \text{para} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

a) Aproxime la solución de este problema utilizando el método de Heun con 3 puntos.

b) Calcule los errores absolutos si la solución exacta es $y(t) = t\sqrt{t}$.

c) Utilice la interpolación para obtener el polinomio de grado ≤ 2 que interpole los puntos obtenidos en a).

Ejercicio

Ejercicio para la casa (III Examen, IIC-2017)

Un proyectil de masa $m = 0.11\,kg$ que es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v(0) = 8\,m/s$, disminuye su velocidad por el efecto de la fuerza de gravedad $F_g := -mg$ y, además, por la resistencia del aire $F_r := kv|v|$, donde $g = 9.8\,m/s^2$ y $k = 0.002\,kg/m$. La ecuación diferencial de la velocidad v está dada por:

$$mv' \;=\; -mg - kv|v|\,.$$

Ejercicio (continuación)

Ejercicio para la casa (III Examen, IIC-2017)

a) Escriba el problema de valor inicial que modela este problema.

b) Usando el método de trapecio explícito, calcule la velocidad después de: $0.25\,s$, $0.5\,s$, $0.75\,s$ y $1.0\,s$.

c) Con los resultados obtenidos en a), determine, con una precisión de décimas de segundo, cuándo alcanzará el proyectil su altura máxima y empezará a caer. Justifique su respuesta.

Organización de la presentación

Introducción

Los métodos de Runge-Kutta mejoran la precisión del método de Euler al considerar un serie de “pasos intermedios”.

Por ejemplo, considere la familia de métodos:

$$\begin{cases} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f(t_k + \alpha h, y_k + \beta h k_1) \\ y_{k+1} &= y_k + h(a k_1 + b k_2) \end{cases}$$

donde k_1 y k_2 se conocerán como **pasos intermedios** y α, β, a, b son parámetros a determinar explícitamente.

Introducción

Los métodos de Runge-Kutta mejoran la precisión del método de Euler al considerar un serie de "pasos intermedios".

Por ejemplo, considere la familia de métodos:

$$\begin{cases} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f(t_k + \alpha h, y_k + \beta h k_1) \\ y_{k+1} &= y_k + h(a k_1 + b k_2) \end{cases}$$

donde k_1 y k_2 se conocerán como **pasos intermedios** y α, β, a, b son parámetros a determinar explícitamente.

Es posible verificar, por medio del error de truncamiento, que para que el esquema previo dé una mejor aproximación que el método de Euler se deben elegir las constantes como:

$$\beta = \alpha\,, \qquad a = 1 - \frac{1}{2\alpha}\,, \qquad b = \frac{1}{2\alpha} \qquad \text{y} \qquad \alpha \neq 0\,.$$

Es decir, el esquema depende únicamente de $\alpha \neq 0$ de la forma:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ k_2 = f(t_k + \alpha h, y_k + \alpha h k_1) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2\alpha}\left[(2\alpha - 1)k_1 + k_2\right] \end{cases}$$

Introducción

Es posible verificar, por medio del error de truncamiento, que para que el esquema previo dé una mejor aproximación que el método de Euler se deben elegir las constantes como:

$$\beta \; = \; \alpha\,, \qquad a \; = \; 1 - \frac{1}{2\alpha}\,, \qquad b \; = \; \frac{1}{2\alpha} \qquad \text{y} \qquad \alpha \; \neq \; 0\,.$$

Es decir, el esquema depende únicamente de $\alpha \neq 0$ de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k_1 & = & f(t_k, y_k) \\ k_2 & = & f(t_k + \alpha h, y_k + \alpha h k_1) \\ y_{k+1} & = & y_k + \frac{h}{2\alpha}[(2\alpha - 1)k_1 \, + \, k_2] \end{array} \right.$$

En particular, para $\alpha = 1$ se obtiene el método de trapecio explícito:

$$\begin{cases} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f(t_k + h, y_k + hk_1) = f(t_{k+1}, y_k + hk_1) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k)]$$

Introducción

En particular, para $\alpha = 1$ se obtiene el método de trapecio explícito:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ k_2 = f(t_k + h, y_k + hk_1) = f(t_{k+1}, y_k + hk_1) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))]$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$ se obtiene:

$$\begin{cases} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right) \\ y_{k+1} &= y_k + hk_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_{k+1} = y_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2}f(t_k, y_k)\right)$$

Este método se conoce como el **método de Euler modificado**, o bien, el método de punto medio. Por simplicidad, se le puede denominar el **método RK2**.

Introducción

Si $\alpha = \frac{1}{2}$ se obtiene:

$$\begin{cases} k_1 & = & f(t_k, y_k) \\ k_2 & = & f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right) \\ y_{k+1} & = & y_k + hk_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_{k+1} \;=\; y_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2},\; y_k + \frac{h}{2}f(t_k, y_k)\right)$$

Este método se conoce como el **método de Euler modificado**, o bien, el método de punto medio. Por simplicidad, se le puede denominar el **método RK2**.

Si $\alpha = \frac{1}{2}$ se obtiene:

$$\begin{cases} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right) \\ y_{k+1} &= y_k + hk_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_{k+1} = y_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2}f(t_k, y_k)\right)$$

Este método se conoce como el **método de Euler modificado**, o bien, el método de punto medio. Por simplicidad, se le puede denominar el **método RK2**.

Observación

El método RK2 se ilustra a continuación. Para ello, recordando que $f(t, y(t)) = y'(t)$, se cumple que:

$$k_1 \approx y'(t_k) \qquad \text{y} \qquad k_2 \approx y'\left(t_k + \frac{h}{2}\right).$$

donde, en k_2, se utiliza el método de Euler $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$, para deducir que:

$$y_k + \frac{h}{2}k_1 \approx y\left(t_k + \frac{h}{2}\right)$$

Observación

El método RK2 se ilustra a continuación. Para ello, recordando que $f(t, y(t)) = y'(t)$, se cumple que:

$$k_1 \approx y'(t_k) \qquad \text{y} \qquad k_2 \approx y'\left(t_k + \frac{h}{2}\right).$$

donde, en k_2, se utiliza el método de Euler $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$, para deducir que:

$$y_k + \frac{h}{2}k_1 \approx y\left(t_k + \frac{h}{2}\right)$$

Observación

El método RK2 se ilustra a continuación. Para ello, recordando que $f(t, y(t)) = y'(t)$, se cumple que:

$$k_1 \approx y'(t_k) \qquad \text{y} \qquad k_2 \approx y'\left(t_k + \frac{h}{2}\right).$$

donde, en k_2, se utiliza el método de Euler $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$, para deducir que:

$$y_k + \frac{h}{2}k_1 \approx y\left(t_k + \frac{h}{2}\right)$$

Ilustración del método RK2

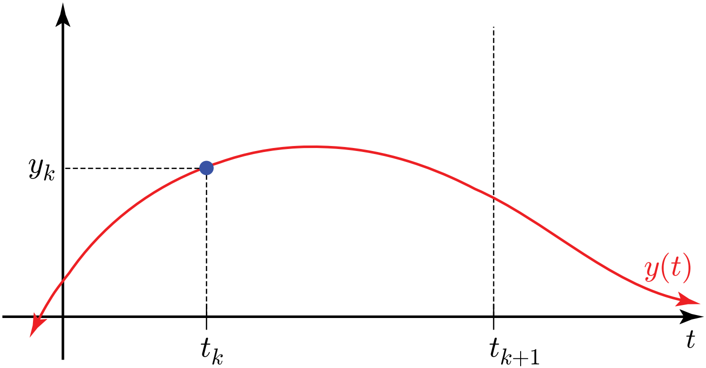


Ilustración del método RK2

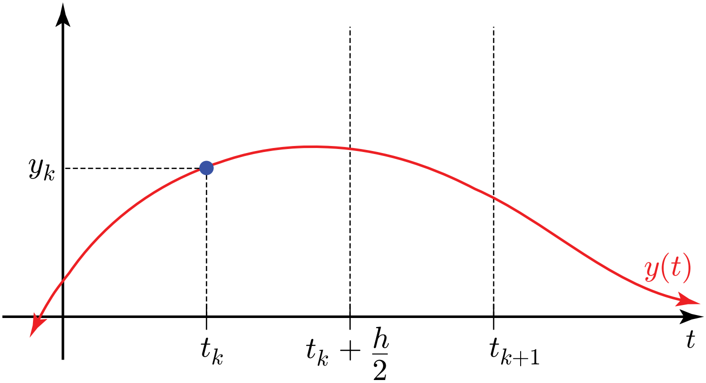


Ilustración del método RK2

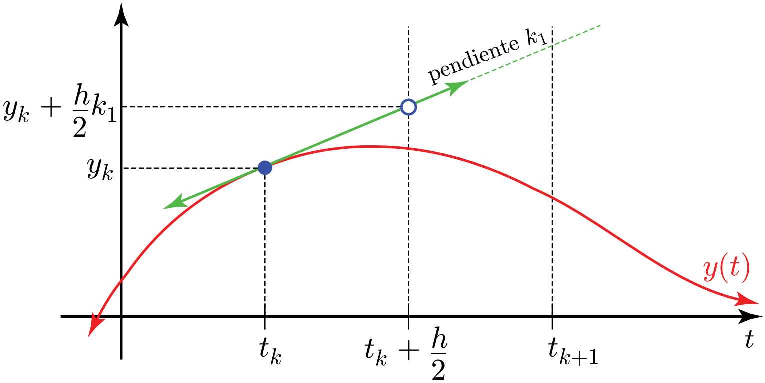


Ilustración del método RK2

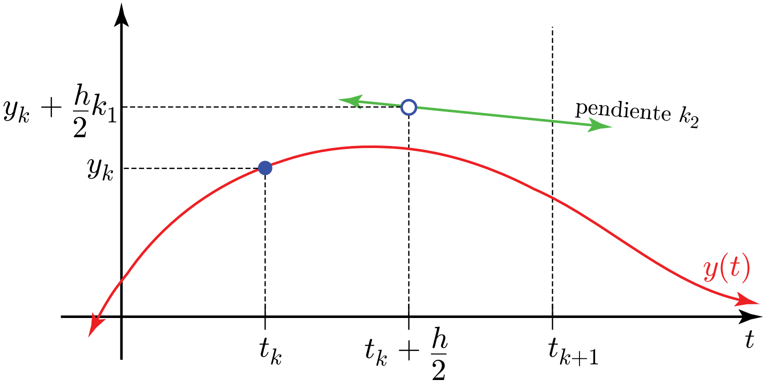
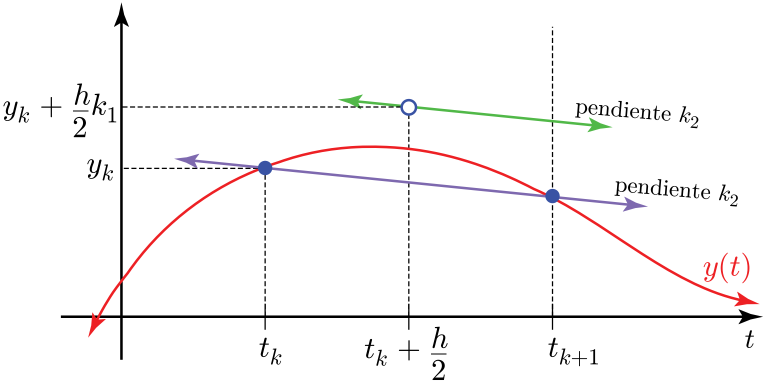


Ilustración del método RK2



Método RK3

Algunos otros métodos de Runge-Kutta más usados son:

$$
(\text{RK3}): \quad \begin{cases} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(t_k + \dfrac{h}{2},\ y_k + \dfrac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_k + h,\ y_k + h(2k_2 - k_1)\right) \\ y_{k+1} &= y_k + \dfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{cases}
$$

Método RK4

$$
(\mathrm{RK4}): \quad \left\{ \begin{array}{rcl}
k_1 & = & f(t_k, y_k) \\
k_2 & = & f\left(t_k + \dfrac{h}{2},\ y_k + \dfrac{h}{2} k_1\right) \\
k_3 & = & f\left(t_k + \dfrac{h}{2},\ y_k + \dfrac{h}{2} k_2\right) \\
k_4 & = & f\left(t_k + h,\ y_k + h k_3\right) \\
y_{k+1} & = & y_k + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{array} \right.
$$

Ejemplo

Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = e^{-y}(1+e^t) & \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

con solución exacta $y(t) = \ln(t+e^t)$. Utilice el método RK4 para aproximar $y(t)$ en $t = 0.6$ con $h = 0.3$. ¿Cuántos dígitos significativos posee su aproximación? Redondee a 4 decimales.

Solución

Dado que $h = 0.3$ y se desea aproximar $t = 0.6$, entonces se tienen los puntos:

$$t_0 = 0\,, \qquad t_1 = 0.3 \qquad \text{y} \qquad t_2 = 0.6\,.$$

Luego, aplicamos RK4, con $y_0 = 0$ para encontrar y_1 y y_2. En efecto, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Para } k = 0\textbf{:}}$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0) = f(0,0) = 2 \\
k_2 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.15, 0.3) = 1.6015 \\
k_3 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_2) = f(0.15, 0.2402) = 1.7002 \\
k_4 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_3) = f(0.3, 0.5101) = 1.4109
\end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.5007$$

Solución

Dado que $h = 0.3$ y se desea aproximar $t = 0.6$, entonces se tienen los puntos:

$$t_0 = 0\,, \qquad t_1 = 0.3 \qquad \text{y} \qquad t_2 = 0.6\,.$$

Luego, aplicamos RK4, con $y_0 = 0$ para encontrar y_1 y y_2. En efecto, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Para } k = 0\textbf{:}}$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0) = f(0,0) = 2 \\
k_2 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.15, 0.3) = 1.6015 \\
k_3 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_2) = f(0.15, 0.2402) = 1.7002 \\
k_4 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_3) = f(0.3, 0.5101) = 1.4109
\end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.5007$$

Solución

Dado que $h = 0.3$ y se desea aproximar $t = 0.6$, entonces se tienen los puntos:

$$t_0 = 0\,, \qquad t_1 = 0.3 \qquad \text{y} \qquad t_2 = 0.6\,.$$

Luego, aplicamos RK4, con $y_0 = 0$ para encontrar y_1 y y_2. En efecto, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k = 0}\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(0,0) = 2$$

$$k_2 = f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.15, 0.3) = 1.6015$$

$$k_3 = f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_2) = f(0.15, 0.2402) = 1.7002$$

$$k_4 = f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_3) = f(0.3, 0.5101) = 1.4109$$

$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.5007$$

Solución

Dado que $h = 0.3$ y se desea aproximar $t = 0.6$, entonces se tienen los puntos:

$$t_0 = 0\,, \qquad t_1 = 0.3 \qquad \text{y} \qquad t_2 = 0.6\,.$$

Luego, aplicamos RK4, con $y_0 = 0$ para encontrar y_1 y y_2. En efecto, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k = 0}\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(0,0) = 2$$
$$k_2 = f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} k_1) = f(0.15, 0.3) = 1.6015$$
$$k_3 = f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} k_2) = f(0.15, 0.2402) = 1.7002$$
$$k_4 = f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} k_3) = f(0.3, 0.5101) = 1.4109$$

$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.5007$$

Solución

Dado que $h = 0.3$ y se desea aproximar $t = 0.6$, entonces se tienen los puntos:

$$t_0 = 0\,, \qquad t_1 = 0.3 \qquad \text{y} \qquad t_2 = 0.6\,.$$

Luego, aplicamos RK4, con $y_0 = 0$ para encontrar y_1 y y_2. En efecto, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Para } k = 0\textbf{:}}$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0) = f(0,0) = 2 \\
k_2 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.15, 0.3) = 1.6015 \\
k_3 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_2) = f(0.15, 0.2402) = 1.7002 \\
k_4 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_3) = f(0.3, 0.5101) = 1.4109
\end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.5007$$

Solución

Dado que $h = 0.3$ y se desea aproximar $t = 0.6$, entonces se tienen los puntos:

$$t_0 = 0\,, \qquad t_1 = 0.3 \qquad \text{y} \qquad t_2 = 0.6\,.$$

Luego, aplicamos RK4, con $y_0 = 0$ para encontrar y_1 y y_2. En efecto, se sigue que:

- **Para $k = 0$:**

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0) = f(0,0) = 2 \\
k_2 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.15, 0.3) = 1.6015 \\
k_3 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_2) = f(0.15, 0.2402) = 1.7002 \\
k_4 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_3) = f(0.3, 0.5101) = 1.4109
\end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.5007$$

Solución

Dado que $h = 0.3$ y se desea aproximar $t = 0.6$, entonces se tienen los puntos:

$$t_0 = 0\,, \qquad t_1 = 0.3 \qquad \text{y} \qquad t_2 = 0.6\,.$$

Luego, aplicamos RK4, con $y_0 = 0$ para encontrar y_1 y y_2. En efecto, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k = 0}\textbf{:}}$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0) = f(0,0) = 2 \\
k_2 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.15, 0.3) = 1.6015 \\
k_3 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_2) = f(0.15, 0.2402) = 1.7002 \\
k_4 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_3) = f(0.3, 0.5101) = 1.4109
\end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.5007$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } k = 1\textbf{:}}$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_1, y_1) = f(0.3, 0.5007) = 1.4243 \\ k_2 &= f(t_1 + \tfrac{h}{2}, y_1 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.45, 0.7143) = 1.2573 \\ k_3 &= f(t_1 + \tfrac{h}{2}, y_1 + \tfrac{h}{2}k_2) = f(0.45, 0.6893) = 1.2892 \\ k_4 &= f(t_1 + \tfrac{h}{2}, y_1 + \tfrac{h}{2}k_3) = f(0.6, 0.8874) = 1.1619 \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.8847$$

Por lo tanto, $y(0.6) \approx 0.8847$.

Finalmente, observe que:

$$\frac{|y(0.6) - y_2|}{|y(0.6)|} = 0.00006477817493$$

con lo que la aproximación posee 4 dígitos significativos.

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } k = 1\textbf{:}}$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_1, y_1) &&= f(0.3, 0.5007) &&= 1.4243 \\ k_2 &= f(t_1 + \tfrac{h}{2}, y_1 + \tfrac{h}{2}k_1) &&= f(0.45, 0.7143) &&= 1.2573 \\ k_3 &= f(t_1 + \tfrac{h}{2}, y_1 + \tfrac{h}{2}k_2) &&= f(0.45, 0.6893) &&= 1.2892 \\ k_4 &= f(t_1 + \tfrac{h}{2}, y_1 + \tfrac{h}{2}k_3) &&= f(0.6, 0.8874) &&= 1.1619 \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.8847$$

Por lo tanto, $y(0.6) \approx 0.8847$.

Finalmente, observe que:

$$\frac{|y(0.6) - y_2|}{|y(0.6)|} = 0.00006477817493$$

con lo que la aproximación posee 4 dígitos significativos.

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } k = 1\textbf{:}}$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_1, y_1) &= f(0.3, 0.5007) &= 1.4243 \\
k_2 &= f(t_1 + \tfrac{h}{2}, y_1 + \tfrac{h}{2}k_1) &= f(0.45, 0.7143) &= 1.2573 \\
k_3 &= f(t_1 + \tfrac{h}{2}, y_1 + \tfrac{h}{2}k_2) &= f(0.45, 0.6893) &= 1.2892 \\
k_4 &= f(t_1 + \tfrac{h}{2}, y_1 + \tfrac{h}{2}k_3) &= f(0.6, 0.8874) &= 1.1619
\end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.8847$$

Por lo tanto, $y(0.6) \approx 0.8847$.

Finalmente, observe que:

$$\frac{|y(0.6) - y_2|}{|y(0.6)|} = 0.00006477817493$$

con lo que la aproximación posee 4 dígitos significativos.

Ejemplo

Utilice el método RK2 para aproximar el valor de la integral:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x \;\approx\; 3.059116539645954\ldots$$

Considere $h = 0.25$.

Solución

Definiendo $y(t) := \int_1^t \frac{e^x}{x}\, dx$, nótese que:

$$y'(t) = \frac{e^t}{t}$$

y como $y(1) = \int_1^1 \frac{e^x}{x}\, dx = 0$, entonces considere el problema de valor inicial auxiliar:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^t}{t} & \text{para} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

El objetivo ahora es aproximar $y(2)$.

Solución

Definiendo $y(t) := \int_1^t \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$, nótese que:

$$y'(t) = \frac{e^t}{t}$$

y como $y(1) = \int_1^1 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x = 0$, entonces considere el problema de valor inicial auxiliar:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^t}{t} & \text{para} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0 & \end{cases}$$

El objetivo ahora es aproximar $y(2)$.

Solución

Definiendo $y(t) := \int\limits_1^t \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$, nótese que:

$$y'(t) \;=\; \frac{e^t}{t}$$

y como $y(1) = \int\limits_1^1 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x = 0$, entonces considere el problema de valor inicial auxiliar:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^t}{t} & \text{para} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0 & \end{cases}$$

El objetivo ahora es aproximar $y(2)$.

Solución

Luego, como $h = 0.5$, entonces:

$$t_0 = 1\,, \quad t_1 = 1.25\,, \quad t_2 = 1.5\,, \quad t_3 = 1.75 \quad \text{y} \quad t_5 = 2\,,$$

y aplicando el método RK2:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2}k_1) \end{cases}$$

se tiene que:

- $\boxed{\textbf{Para } k = 0\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(1, 0) = 2.7183$$
$$k_2 = f(t_0 + \tfrac{h}{2},\ y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.125, 0.3398) = 2.7380$$

$$y_1 = y_0 + hk_2 = 0.6845$$

Solución

Luego, como $h = 0.5$, entonces:

$$t_0 = 1\,, \quad t_1 = 1.25\,, \quad t_2 = 1.5\,, \quad t_3 = 1.75 \quad \text{y} \quad t_5 = 2\,,$$

y aplicando el método RK2:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2}k_1) \end{cases}$$

se tiene que:

- $\boxed{\textbf{Para } k = 0\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(1, 0) = 2.7183$$
$$k_2 = f(t_0 + \tfrac{h}{2},\ y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.125, 0.3398) = 2.7380$$

$$y_1 = y_0 + hk_2 = 0.6845$$

Solución

Luego, como $h = 0.5$, entonces:

$$t_0 = 1\,,\quad t_1 = 1.25\,,\quad t_2 = 1.5\,,\quad t_3 = 1.75 \quad \text{y} \quad t_5 = 2\,,$$

y aplicando el método RK2:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2}k_1) \end{cases}$$

se tiene que:

- $\boxed{\textbf{Para } k = 0\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(1, 0) = 2.7183$$
$$k_2 = f(t_0 + \tfrac{h}{2},\ y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.125, 0.3398) = 2.7380$$

$$y_1 = y_0 + hk_2 = 0.6845$$

Solución

Luego, como $h = 0.5$, entonces:

$$t_0 = 1\,, \quad t_1 = 1.25\,, \quad t_2 = 1.5\,, \quad t_3 = 1.75 \quad \text{y} \quad t_5 = 2\,,$$

y aplicando el método RK2:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2}k_1) \end{cases}$$

se tiene que:

- $\boxed{\textbf{Para } k = 0\textbf{:}}$

  $k_1 = f(t_0, y_0) = f(1, 0) = 2.7183$

  $k_2 = f(t_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{h}{2}k_1) = f(1.125, 0.3398) = 2.7380$

  $y_1 = y_0 + hk_2 = 0.6845$

Solución

Luego, como $h = 0.5$, entonces:

$$t_0 = 1\,, \quad t_1 = 1.25\,, \quad t_2 = 1.5\,, \quad t_3 = 1.75 \quad \text{y} \quad t_5 = 2\,,$$

y aplicando el método RK2:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2}k_1) \end{cases}$$

se tiene que:

- $\boxed{\textbf{Para } k = 0\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(1, 0) = 2.7183$$

$$k_2 = f(t_0 + \tfrac{h}{2},\ y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.125, 0.3398) = 2.7380$$

$$y_1 = y_0 + hk_2 = 0.6845$$

Solución

Luego, como $h = 0.5$, entonces:

$$t_0 = 1\,, \quad t_1 = 1.25\,, \quad t_2 = 1.5\,, \quad t_3 = 1.75 \quad \text{y} \quad t_5 = 2\,,$$

y aplicando el método RK2:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2}k_1) \end{cases}$$

se tiene que:

- $\boxed{\textbf{Para } k = 0\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(1, 0) = 2.7183$$
$$k_2 = f(t_0 + \tfrac{h}{2},\ y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.125, 0.3398) = 2.7380$$

$$y_1 = y_0 + hk_2 = 0.6845$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } k = 1\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_1, y_1) = f(1.25, 0.6845) = 2.7923$$
$$k_2 = f(t_1 + \tfrac{h}{2},\ y_1 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.275, 1.0335) = 2.8764$$

$$y_2 = y_1 + hk_2 = 1.4036$$

- $\boxed{\textbf{Para } k = 2\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_2, y_2) = f(1.5, 1.4036) = 2.9878$$
$$k_2 = f(t_2 + \tfrac{h}{2},\ y_2 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.625, 1.7771) = 3.1252$$

$$y_3 = y_2 + hk_2 = 2.1849$$

- $\boxed{\textbf{Para } k = 4\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_3, y_3) = f(1.75, 2.1849) = 3.2883$$
$$k_2 = f(t_3 + \tfrac{h}{2},\ y_3 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.875, 2.5959) = 3.4778$$

$$y_4 = y_3 + hk_2 = 3.0543$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } k = 1\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_1, y_1) = f(1.25, 0.6845) = 2.7923$$
$$k_2 = f(t_1 + \tfrac{h}{2},\ y_1 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.275, 1.0335) = 2.8764$$

$$y_2 = y_1 + hk_2 = 1.4036$$

- $\boxed{\textbf{Para } k = 2\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_2, y_2) = f(1.5, 1.4036) = 2.9878$$
$$k_2 = f(t_2 + \tfrac{h}{2},\ y_2 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.625, 1.7771) = 3.1252$$

$$y_3 = y_2 + hk_2 = 2.1849$$

- $\boxed{\textbf{Para } k = 4\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_3, y_3) = f(1.75, 2.1849) = 3.2883$$
$$k_2 = f(t_3 + \tfrac{h}{2},\ y_3 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.875, 2.5959) = 3.4778$$

$$y_4 = y_3 + hk_2 = 3.0543$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k = 1}\textbf{:}}$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_1, y_1) = f(1.25, 0.6845) = 2.7923 \\
k_2 &= f(t_1 + \tfrac{h}{2},\ y_1 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.275, 1.0335) = 2.8764 \\
\\
y_2 &= y_1 + hk_2 = 1.4036
\end{aligned}
$$

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k = 2}\textbf{:}}$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_2, y_2) = f(1.5, 1.4036) = 2.9878 \\
k_2 &= f(t_2 + \tfrac{h}{2},\ y_2 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.625, 1.7771) = 3.1252 \\
\\
y_3 &= y_2 + hk_2 = 2.1849
\end{aligned}
$$

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k = 4}\textbf{:}}$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_3, y_3) = f(1.75, 2.1849) = 3.2883 \\
k_2 &= f(t_3 + \tfrac{h}{2},\ y_3 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(1.875, 2.5959) = 3.4778 \\
\\
y_4 &= y_3 + hk_2 = 3.0543
\end{aligned}
$$

Solución

Por lo tanto, se concluye que:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; y(2) \;\approx\; y_4 \;=\; 3.0543$$

Solución

Por lo tanto, se concluye que:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; y(2) \;\approx\; y_4 \;=\; 3.0543$$

Solución

Por lo tanto, se concluye que:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; y(2) \;\approx\; y_4 \;=\; 3.0543$$

Solución

Por lo tanto, se concluye que:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; y(2) \;\approx\; y_4 \;=\; 3.0543$$

Ejercicio

Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y+\cos(t)}{t} & \text{para} \quad 2\pi \leq t \leq 3\pi \\ y(2\pi) = \dfrac{1}{\pi} \end{cases}$$

con solución exacta $y(t) = \frac{2-\text{sen}(t)}{t}$. Por medio de RK3 estime la solución de este problema con 4 puntos. Redondee al cuarto decimal y además halle la cantidad de dígitos significativos en la aproximación obtenida para $y(3\pi)$.

Ejercicio

Ejercicio para la casa (Ampliación, IIC-2017)

Considere el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' - 3\displaystyle\int_0^t e^{-2(t-x)} y(x)\,\mathrm{d}x &= 4e^{-2t} \qquad \text{para } 0 \leq t \leq 1\,, \\ y(0) &= 4\,. \end{cases}$$

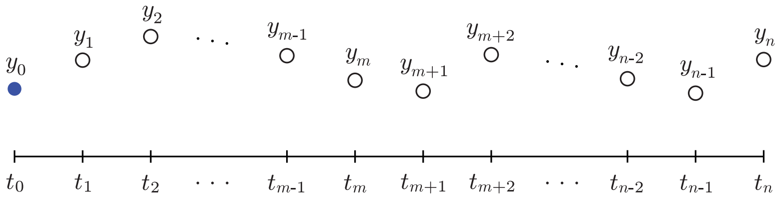
a) Utilizando la regla del trapecio, aproxime la integral en la ecuación anterior.

b) Usando la aproximación encontrada en *a*), reescriba el problema de valor inicial.

c) Empleando el método de RK4, con $h = 0.25$, encuentre una aproximación para $y(0.75)$.

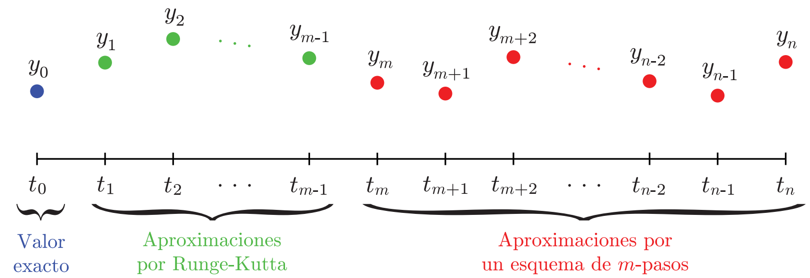
Organización de la presentación

Consideremos ahora métodos de m-pasos, los cuales aproximan y_{k+1} con m valores previos, los cuales pueden incluir a y_{k+1} o no.



Introducción

Consideremos ahora métodos de m-pasos, los cuales aproximan y_{k+1} con m valores previos, los cuales pueden incluir a y_{k+1} o no.



Ejemplo

Considerando el problema $y'(t) = f(t, y(t))$ e integrando en $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ se tiene que:

$$y(t_{k+1}) \;=\; y(t_{k-1}) \;+\; \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

donde, empleando la regla de Simpson, se tiene que:

$$y_{k+1} \;=\; y_{k-1} \;+\; \frac{h}{3}\Big[f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 4f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\Big]$$

Este esquema es un método implícito de 2 pasos, ya que requiere de y_{k-1} y y_k para aproximar y_{k+1}.

Ejemplo

Considerando el problema $y'(t) = f(t, y(t))$ e integrando en $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ se tiene que:

$$y(t_{k+1}) \;=\; y(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

donde, empleando la regla de Simpson, se tiene que:

$$y_{k+1} \;=\; y_{k-1} + \frac{h}{3}\left[f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 4f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]$$

Este esquema es un método implícito de 2 pasos, ya que requiere de y_{k-1} y y_k para aproximar y_{k+1}.

Métodos de Adams-Bashforth y de Adams-Moulton

Volviendo a nuestra iteración genérica:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{k+1} \; = \; y_k + \displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, \mathrm{d}t \end{cases}$$

la idea ahora es usar las cuadraturas de Newton-Cotes tal como se hizo previamente con las cuadraturas de trapecio y Simpson. Es decir, se interpola la función dentro de la integral:

$$g(t) \;:=\; f(t, y(t))$$

mediante el polinomio interpolador de Lagrange. Por simplicidad se usa la notación:

$$f_k \;:=\; f(t_k, y_k)\,.$$

Métodos de Adams-Bashforth y de Adams-Moulton

Volviendo a nuestra iteración genérica:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{k+1} \; = \; y_k + \displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, \mathrm{d}t \end{cases}$$

la idea ahora es usar las cuadraturas de Newton-Cotes tal como se hizo previamente con las cuadraturas de trapecio y Simpson. Es decir, se interpola la función dentro de la integral:

$$g(t) \; := \; f(t, y(t))$$

mediante el polinomio interpolador de Lagrange. Por simplicidad se usa la notación:

$$f_k \; := \; f(t_k, y_k)\,.$$

Métodos de Adams-Bashforth y de Adams-Moulton

Volviendo a nuestra iteración genérica:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{k+1} \;=\; y_k \;+\; \displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

la idea ahora es usar las cuadraturas de Newton-Cotes tal como se hizo previamente con las cuadraturas de trapecio y Simpson. Es decir, se interpola la función dentro de la integral:

$$g(t) \;:=\; f(t, y(t))$$

mediante el polinomio interpolador de Lagrange. Por simplicidad se usa la notación:

$$f_k \;:=\; f(t_k, y_k)\,.$$

Métodos de Adams-Bashforth

Por otro lado, cuando se interpola g se usan los m puntos:

$$\begin{gathered}
(t_{k-(m-1)}, f_{k-(m-1)}) \\
(t_{k-(m-2)}, f_{k-(m-2)}) \\
\vdots \\
(t_{k-2}, f_{k-2}) \\
(t_{k-1}, f_{k-1}) \\
(t_k, f_k)
\end{gathered}$$

con lo que se obtiendrá un método explícito, denominado el **método de Adams-Bashforth de m-pasos**.

Métodos de Adams-Moulton

Más aún, si se agrega el punto (t_{k+1}, f_{k+1}):

$$(t_{k-(m-1)}, f_{k-(m-1)})$$
$$(t_{k-(m-2)}, f_{k-(m-2)})$$
$$\vdots$$
$$(t_{k-2}, f_{k-2})$$
$$(t_{k-1}, f_{k-1})$$
$$(t_k, f_k)$$
$$(t_{k+1}, f_{k+1})$$

se obtiene un esquema implícito denominado el **método de Adams-Moulton de m-pasos**.

Ejemplo

Determine el método de Adams-Bashforth de 2-pasos.

Solución

Como $m = 2$, entonces se utilizan los puntos:

$$(t_{k-1}, f_{k-1}) \qquad \text{y} \qquad (t_k, f_k)$$

cuyo polinomio de interpolación es una línea recta. Así, nótese que:

- pendiente: $\dfrac{f_k - f_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} = \dfrac{f_k - f_{k-1}}{h}$
- intercepto: $f_k - \dfrac{f_k - f_{k-1}}{h} \cdot t_k$

de donde es claro que:

$$p_1(t) = \frac{f_k - f_{k-1}}{h}(t - t_k) + f_k\,.$$

Solución

Como $m = 2$, entonces se utilizan los puntos:

$$(t_{k-1}, f_{k-1}) \qquad \text{y} \qquad (t_k, f_k)$$

cuyo polinomio de interpolación es una línea recta. Así, nótese que:

- pendiente: $\dfrac{f_k - f_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} = \dfrac{f_k - f_{k-1}}{h}$
- intercepto: $f_k - \dfrac{f_k - f_{k-1}}{h} \cdot t_k$

de donde es claro que:

$$p_1(t) = \frac{f_k - f_{k-1}}{h}(t - t_k) + f_k \,.$$

Solución

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p_1(t)\,\mathrm{d}t \\
&= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{f_k - f_{k-1}}{h}(t - t_k) + f_k\,\mathrm{d}t \\
&= y_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} t - t_k\,\mathrm{d}t + f_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{d}t \\
&= y_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{h} \cdot \frac{h^2}{2} + f_k \cdot h \\
&= y_k + \frac{h}{2} f_k - \frac{h}{2} f_{k-1} + h \cdot f_k \\
&= y_k - \frac{h}{2} f_{k-1} + \frac{3h}{2} f_k
\end{aligned}$$

Solución

Luego, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p_1(t)\,\mathrm{d}t \\
&= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{f_k - f_{k-1}}{h}(t - t_k) + f_k\,\mathrm{d}t \\
&= y_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} t - t_k\,\mathrm{d}t + f_k\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{d}t \\
&= y_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{h}\cdot\frac{h^2}{2} + f_k\cdot h \\
&= y_k + \frac{h}{2}f_k - \frac{h}{2}f_{k-1} + h\cdot f_k \\
&= y_k - \frac{h}{2}f_{k-1} + \frac{3h}{2}f_k
\end{aligned}
$$

Solución

Luego, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p_1(t)\,\mathrm{d}t \\
&= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{f_k - f_{k-1}}{h}(t - t_k) + f_k\,\mathrm{d}t \\
&= y_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} t - t_k\,\mathrm{d}t + f_k\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{d}t \\
&= y_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{h}\cdot\frac{h^2}{2} + f_k\cdot h \\
&= y_k + \frac{h}{2}f_k - \frac{h}{2}f_{k-1} + h\cdot f_k \\
&= y_k - \frac{h}{2}f_{k-1} + \frac{3h}{2}f_k
\end{aligned}
$$

Solución

Luego, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p_1(t)\,\mathrm{d}t \\
&= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{f_k - f_{k-1}}{h}(t - t_k) + f_k\,\mathrm{d}t \\
&= y_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} t - t_k\,\mathrm{d}t + f_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{d}t \\
&= y_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{h}\cdot\frac{h^2}{2} + f_k \cdot h \\
&= y_k + \frac{h}{2} f_k - \frac{h}{2} f_{k-1} + h \cdot f_k \\
&= y_k - \frac{h}{2} f_{k-1} + \frac{3h}{2} f_k
\end{aligned}
$$

Solución

Luego, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p_1(t)\,\mathrm{d}t \\
&= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{f_k - f_{k-1}}{h}(t - t_k) + f_k\,\mathrm{d}t \\
&= y_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} t - t_k\,\mathrm{d}t + f_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{d}t \\
&= y_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{h} \cdot \frac{h^2}{2} + f_k \cdot h \\
&= y_k + \frac{h}{2} f_k - \frac{h}{2} f_{k-1} + h \cdot f_k \\
&= y_k - \frac{h}{2} f_{k-1} + \frac{3h}{2} f_k
\end{aligned}
$$

Solución

Luego, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} {\color{red} p_1(t)} \, \mathrm{d}t \\
&= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{f_k - f_{k-1}}{h}(t - t_k) + f_k \, \mathrm{d}t \\
&= y_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} t - t_k \, \mathrm{d}t + f_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{d}t \\
&= y_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{h} \cdot \frac{h^2}{2} + f_k \cdot h \\
&= y_k + \frac{h}{2} f_k - \frac{h}{2} f_{k-1} + h \cdot f_k \\
&= y_k - \frac{h}{2} f_{k-1} + \frac{3h}{2} f_k
\end{aligned}
$$

Solución

Por lo tanto, el método de Adams-Bashforth de 2-pasos, es dado por:

$$\begin{cases} y_0, y_1 \text{ dados} \\ y_{k+1} \;=\; y_k + \dfrac{h}{2}\left[3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})\right] \end{cases}$$

$$\text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Ejemplo

Determine el método de Adams-Moulton de 2-pasos.

Solución

Similarmente, considere ahora los puntos:

$$(t_{k-1}, f_{k-1}), \qquad (t_k, f_k) \qquad \text{y} \qquad (t_{k+1}, f_{k+1}),$$

donde, los polinomios de Lagrange corresponden a:

$$\begin{aligned}
L_0(t) &= \frac{(t-t_k)(t-t_{k-1})}{(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}-t_{k-1})} &= \frac{1}{2h^2}(t-t_k)(t-t_{k-1}) \\
L_1(t) &= \frac{(t-t_{k+1})(t-t_{k-1})}{(t_k-t_{k+1})(t_k-t_{k-1})} &= -\frac{1}{h^2}(t-t_{k+1})(t-t_{k-1}) \\
L_2(t) &= \frac{(t-t_{k+1})(t-t_k)}{(t_{k-1}-t_{k+1})(t_{k-1}-t_k)} &= \frac{1}{2h^2}(t-t_{k+1})(t-t_k)
\end{aligned}$$

Solución

Similarmente, considere ahora los puntos:

$$(t_{k-1}, f_{k-1}), \qquad (t_k, f_k) \qquad \text{y} \qquad (t_{k+1}, f_{k+1}),$$

donde, los polinomios de Lagrange corresponden a:

$$L_0(t) = \frac{(t-t_k)(t-t_{k-1})}{(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}-t_{k-1})} = \frac{1}{2h^2}(t-t_k)(t-t_{k-1})$$

$$L_1(t) = \frac{(t-t_{k+1})(t-t_{k-1})}{(t_k-t_{k+1})(t_k-t_{k-1})} = -\frac{1}{h^2}(t-t_{k+1})(t-t_{k-1})$$

$$L_2(t) = \frac{(t-t_{k+1})(t-t_k)}{(t_{k-1}-t_{k+1})(t_{k-1}-t_k)} = \frac{1}{2h^2}(t-t_{k+1})(t-t_k)$$

Solución

Con ello, se tiene que:

$$\begin{aligned} p_2(t) &= \frac{f_{k+1}}{2h^2}(t-t_k)(t-t_{k-1}) - \frac{f_k}{h^2}(t-t_{k+1})(t-t_{k-1}) \\ &\quad + \frac{f_{k-1}}{2h^2}(t-t_{k+1})(t-t_k) \end{aligned}$$

De esta forma, observe que:

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y(t))\,\mathrm{d}t &\approx \frac{f_{k+1}}{2h^2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t-t_k)(t-t_{k-1})\,\mathrm{d}t \\ &\quad - \frac{f_k}{h^2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t-t_{k+1})(t-t_{k-1})\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \frac{f_{k-1}}{2h^2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t-t_{k+1})(t-t_k)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Solución

Con ello, se tiene que:

$$p_2(t) = \frac{f_{k+1}}{2h^2}(t-t_k)(t-t_{k-1}) - \frac{f_k}{h^2}(t-t_{k+1})(t-t_{k-1}) + \frac{f_{k-1}}{2h^2}(t-t_{k+1})(t-t_k)$$

De esta forma, observe que:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y(t))\,\mathrm{d}t \approx \frac{f_{k+1}}{2h^2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t-t_k)(t-t_{k-1})\,\mathrm{d}t - \frac{f_k}{h^2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t-t_{k+1})(t-t_{k-1})\,\mathrm{d}t + \frac{f_{k-1}}{2h^2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t-t_{k+1})(t-t_k)\,\mathrm{d}t$$

Solución

Ahora, sumando y restando términos adecuados, se deduce que:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \frac{f_{k+1}}{2h^2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t-t_k)^2 + h(t-t_k)\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \frac{f_k}{h^2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t-t_{k+1})^2 + 2h(t-t_{k+1})\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{f_{k-1}}{2h^2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t-t_k)^2 - h(t-t_k)\,\mathrm{d}t \\
&= y_k + \frac{5h}{12} f_{k+1} + \frac{2h}{3} f_k - \frac{h}{12} f_{k-1} \\
&= y_k + \frac{h}{12}\left[5 f_{k+1} + 8 f_k - f_{k-1}\right]
\end{aligned}
$$

Solución

Por lo tanto, el método de Adams-Moulton de 2-pasos, es dado por:

$$\begin{cases} y_0, y_1 \text{ dados} \\ y_{k+1} \;=\; y_k + \dfrac{h}{12}\big[5f(t_{k+1}, y_{k+1}) + 8f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})\big] \end{cases}$$

$$\text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Orden de precisión

Teorema

Los métodos de Adams-Bashforth de m-pasos son de orden m. Por otro lado, los métodos de Adams-Moulton de m-pasos son de orden $m + 1$.

Métodos más conocidos

Adams-Bashforth	Adams-Moulton
$\begin{cases} y_0, y_1 \text{ dados} \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[3f_k - f_{k-1}\right] \end{cases}$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$	$\begin{cases} y_0, y_1 \text{ dados} \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left[5f_{k+1} + 8f_k - f_{k-1}\right] \end{cases}$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$
$\begin{cases} y_0, y_1, y_2 \text{ dados} \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left[23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}\right] \end{cases}$ para $k = 2, 3, \ldots, n-1$	$\begin{cases} y_0, y_1, y_2 \text{ dados} \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left[9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}\right] \end{cases}$ para $k = 2, 3, \ldots, n-1$
$\begin{cases} y_0, y_1, y_2, y_3 \text{ dados} \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left[55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}\right] \end{cases}$ para $k = 3, 4, \ldots, n-1$	$\begin{cases} y_0, y_1, y_2, y_3 \text{ dados} \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{720}\left[251f_{k+1} + 646f_k - 264f_{k-1} + 106f_{k-2} - 19f_{k-3}\right] \end{cases}$ para $k = 3, 4, \ldots, n-1$

Ejemplo

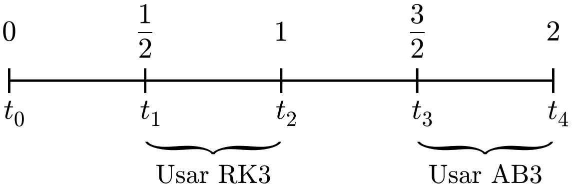
Utilice el método de Adams-Bashforth de 3-pasos para aproximar la solución del problema:

$$\begin{cases} 2(y-1)y' &= 3t^2+4t-2 \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) &= -1 \end{cases}$$

con 5 puntos.

Solución

Como son 5 puntos, entonces $n = 4 \Rightarrow h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$ y con ello:

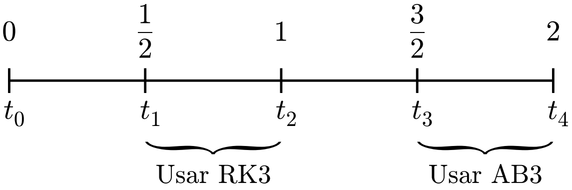


Luego, observe que:

$$f(t,y) := \frac{3t^2+4t-2}{2(y-1)}$$

y $y_0 = -1$.

Como son 5 puntos, entonces $n = 4 \Rightarrow h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$ y con ello:



Luego, observe que:

$$f(t, y) \;:=\; \frac{3t^2 + 4t - 2}{2(y-1)}$$

y $y_0 = -1$.

Solución

Así, aplicando RK3, se tiene que:

- **Para $k = 0$:**

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(0, -1) = 0.5 \qquad (f_0 = 0.5)$$

$$k_2 = f(t_0 + \tfrac{h}{2},\ y_0 + \tfrac{h}{2} k_1) = f(0.25, -0.875) = 0.2167$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(t_0 + h,\ y_0 + h(2k_2 - k_1)) = f(0.5, -1.0333) \\ &= -0.1844 \end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -0.9015$$

$$\therefore\ y_1 = -0.9015$$

Solución

Así, aplicando RK3, se tiene que:

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k = 0}\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(0, -1) = 0.5 \qquad (f_0 = 0.5)$$

$$k_2 = f(t_0 + \tfrac{h}{2},\ y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.25, -0.875) = 0.2167$$

$$k_3 = f(t_0 + h,\ y_0 + h(2k_2 - k_1)) = f(0.5, -1.0333) = -0.1844$$

$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -0.9015$$

$$\therefore\ y_1 = -0.9015$$

Solución

Así, aplicando RK3, se tiene que:

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k = 0}\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(0, -1) = 0.5 \qquad (f_0 = 0.5)$$

$$k_2 = f(t_0 + \tfrac{h}{2},\ y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.25, -0.875) = 0.2167$$

$$k_3 = f(t_0 + h,\ y_0 + h(2k_2 - k_1)) = f(0.5, -1.0333) = -0.1844$$

$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -0.9015$$

$$\therefore\ y_1 = -0.9015$$

Solución

Así, aplicando RK3, se tiene que:

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k} = \textbf{0:}}$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(0, -1) = 0.5 \qquad (f_0 = 0.5)$$

$$k_2 = f(t_0 + \tfrac{h}{2},\; y_0 + \tfrac{h}{2} k_1) = f(0.25, -0.875) = 0.2167$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(t_0 + h,\; y_0 + h(2k_2 - k_1)) = f(0.5, -1.0333) \\ &= -0.1844 \end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -0.9015$$

$$\therefore\; y_1 = -0.9015$$

Solución

Así, aplicando RK3, se tiene que:

- **Para $\boldsymbol{k=0}$:**

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0) = f(0,-1) = 0.5 \qquad ({\color{red} f_0 = 0.5}) \\
k_2 &= f(t_0 + \tfrac{h}{2},\ y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.25, -0.875) = 0.2167 \\
k_3 &= f(t_0 + h,\ y_0 + h(2k_2 - k_1)) = f(0.5, -1.0333) \\
&= -0.1844 \\
y_1 &= y_0 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -0.9015
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ y_1 = -0.9015$$

Solución

Así, aplicando RK3, se tiene que:

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k = 0}\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(0, -1) = 0.5 \qquad (f_0 = 0.5)$$

$$k_2 = f(t_0 + \tfrac{h}{2},\ y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.25, -0.875) = 0.2167$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(t_0 + h,\ y_0 + h(2k_2 - k_1)) = f(0.5, -1.0333) \\ &= -0.1844 \end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -0.9015$$

$$\therefore\ y_1 = -0.9015$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } k = 1\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_1, y_1) = f(0.5, -0.9015) = -0.1972 \quad (f_1 = -0.1972)$$

$$k_2 = f(t_1 + \tfrac{h}{2},\ y_1 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.75, -0.9508) = -0.6888$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(t_1 + h,\ y_1 + h(2k_2 - k_1)) = f(1, -1.4917) \\ &= -1.0033 \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -1.2311$$

$$\therefore\ y_2 = -1.2311$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k} = \textbf{1:}}$

$$k_1 = f(t_1, y_1) = f(0.5, -0.9015) = -0.1972 \quad (f_1 = -0.1972)$$

$$k_2 = f(t_1 + \tfrac{h}{2},\ y_1 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.75, -0.9508) = -0.6888$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(t_1 + h,\ y_1 + h(2k_2 - k_1)) = f(1, -1.4917) \\ &= -1.0033 \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -1.2311$$

$$\therefore\ y_2 = -1.2311$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } k = 1\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_1, y_1) = f(0.5, -0.9015) = -0.1972 \;\; (f_1 = -0.1972)$$

$$k_2 = f(t_1 + \tfrac{h}{2},\; y_1 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.75, -0.9508) = -0.6888$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(t_1 + h,\; y_1 + h(2k_2 - k_1)) = f(1, -1.4917) \\ &= -1.0033 \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -1.2311$$

$$\therefore\; y_2 = -1.2311$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k} = \textbf{1:}}$

$$k_1 = f(t_1, y_1) = f(0.5, -0.9015) = -0.1972 \;\; (f_1 = -0.1972)$$

$$k_2 = f(t_1 + \tfrac{h}{2},\ y_1 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.75, -0.9508) = -0.6888$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(t_1 + h,\ y_1 + h(2k_2 - k_1)) = f(1, -1.4917) \\ &= -1.0033 \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -1.2311$$

$$\therefore\ y_2 = -1.2311$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } k = 1\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_1, y_1) = f(0.5, -0.9015) = -0.1972 \ \ ({\color{red}f_1 = -0.1972})$$

$$k_2 = f(t_1 + \tfrac{h}{2},\ y_1 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.75, -0.9508) = -0.6888$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(t_1 + h,\ y_1 + h(2k_2 - k_1)) = f(1, -1.4917) \\ &= -1.0033 \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -1.2311$$

$$\therefore\ y_2 = -1.2311$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k = 1}\textbf{:}}$

$$k_1 = f(t_1, y_1) = f(0.5, -0.9015) = -0.1972 \ \ ({\color{red}f_1 = -0.1972})$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f(t_1 + \tfrac{h}{2},\ y_1 + \tfrac{h}{2}k_1) = f(0.75, -0.9508) = -0.6888 \\
k_3 &= f(t_1 + h,\ y_1 + h(2k_2 - k_1)) = f(1, -1.4917) \\
&= -1.0033 \\
y_2 &= y_1 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -1.2311
\end{aligned}$$

$$\therefore\ y_2 = -1.2311$$

Solución

De acuerdo con lo anterior, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
t_0 &= 0 & y_0 &= -1 & f_0 &= 0.5 \\
t_1 &= 0.5 & y_1 &= -0.9015 & f_1 &= -0.1972 \\
t_2 &= 1 & y_2 &= -1.2311 & & \\
t_3 &= 1.5 & & & & \\
t_4 &= 2 & & & &
\end{aligned}
$$

y ahora se aplica el método de Adams-Bashforth.

Solución

De acuerdo con lo anterior, se tiene que:

$$
\begin{array}{lll}
t_0 = 0 & y_0 = -1 & f_0 = 0.5 \\
t_1 = 0.5 & y_1 = -0.9015 & f_1 = -0.1972 \\
t_2 = 1 & y_2 = -1.2311 & \\
t_3 = 1.5 & & \\
t_4 = 2 & &
\end{array}
$$

y ahora se aplica el método de Adams-Bashforth.

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k = 2}\textbf{:}}$

$$f_2 = f(t_2, y_2) = f(1, -1.2311) = -1.1205$$

$$
\begin{aligned}
y_3 &= y_2 + \frac{h}{12}\left[23f_2 - 16f_1 + 5f_0\right] \\
&= -2.0693
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ y_3 = -2.0693$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } k = 2\textbf{:}}$

$$
\begin{aligned}
{\color{red}f_2} &= f(t_2, y_2) = f(1, -1.2311) = {\color{red}-1.1205} \\
y_3 &= y_2 + \frac{h}{12}\left[23f_2 - 16f_1 + 5f_0\right] \\
&= -2.0693
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ y_3 = -2.0693$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } k = 2\textbf{:}}$

$$
\begin{aligned}
f_2 &= f(t_2, y_2) = f(1, -1.2311) = -1.1205 \\
y_3 &= y_2 + \frac{h}{12}\left[23f_2 - 16f_1 + 5f_0\right] \\
&= -2.0693
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ y_3 = -2.0693$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k} \textbf{ = 2:}}$

$$
\begin{aligned}
{\color{red} f_2} &= f(t_2, y_2) = f(1, -1.2311) = {\color{red} -1.1205} \\
y_3 &= y_2 + \frac{h}{12}\left[23 f_2 - 16 f_1 + 5 f_0\right] \\
&= -2.0693
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ y_3 = -2.0693$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } k = 3\textbf{:}}$

$$f_3 = f(t_3, y_3) = f(1.5, -2.0693) = -1.7512$$

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + \frac{h}{12}\left[23f_3 - 16f_2 + 5f_1\right] \\ &= -3.0416 \end{aligned}$$

$$\therefore\ y_4 = -3.0416$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } k = 3\textbf{:}}$

$$
\begin{aligned}
f_3 &= f(t_3, y_3) = f(1.5, -2.0693) = -1.7512 \\
y_4 &= y_3 + \frac{h}{12}\left[23 f_3 - 16 f_2 + 5 f_1\right] \\
&= -3.0416
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ y_4 = -3.0416$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{k} = \textbf{3:}}$

$$
\begin{aligned}
{\color{red} f_3} &= f(t_3, y_3) = f(1.5, -2.0693) = {\color{red} -1.7512} \\
y_4 &= y_3 + \frac{h}{12}\left[23 f_3 - 16 f_2 + 5 f_1\right] \\
&= -3.0416
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ y_4 = -3.0416$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Para } k = 3\textbf{:}}$

$$
\begin{aligned}
{\color{red}f_3} &= f(t_3, y_3) = f(1.5, -2.0693) = {\color{red}-1.7512} \\
y_4 &= y_3 + \frac{h}{12}\left[23f_3 - 16f_2 + 5f_1\right] \\
&= -3.0416
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ y_4 = -3.0416
$$

Solución

Por lo tanto, la solución numérica viene dada por:

$$(0,-1)\,,\quad (0.5,-0.9015)\,,\quad (1,-1.2311)\,,\quad (1.5,-2.0693)$$

y

$$(2,-3.0416).$$

Observación

Los métodos multipasos "reciclan" las evaluaciones de la función f, debido a que para $k = 3$, se necesitan f_3, f_2, f_1 y f_0, luego para $k = 4$, se utilizan f_4, f_3, f_2 y f_1. Es decir que en cada iteración, después de la iteración $k = 4$, se realiza únicamente una nueva evaluación, tal como lo hace el método de Euler hacia adelante.

Esto no lo tiene el RK4, ya que en cada iteración siempre se deben hacer todas las evaluaciones. Esta idea de reciclar los f_i, optimiza el tiempo al determinar cada y_{k+1}, similar a como lo hace una línea de ensamblaje de automóviles.

Observación

Los métodos multipasos "reciclan" las evaluaciones de la función f, debido a que para $k=3$, se necesitan f_3, f_2, f_1 y f_0, luego para $k=4$, se utilizan f_4, f_3, f_2 y f_1. Es decir que en cada iteración, después de la iteración $k=4$, se realiza únicamente una nueva evaluación, tal como lo hace el método de Euler hacia adelante.

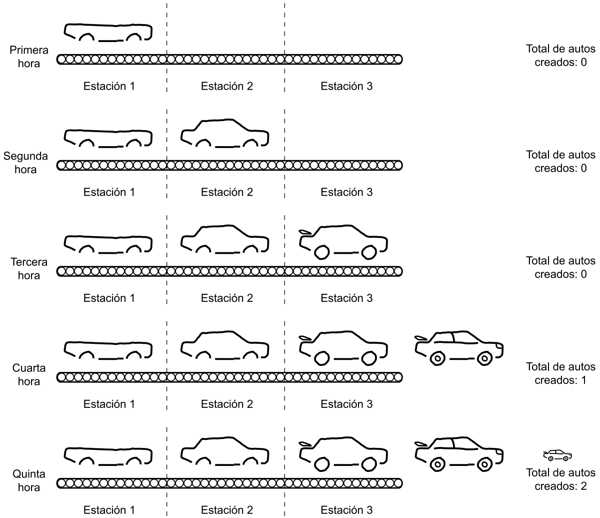
Esto no lo tiene el RK4, ya que en cada iteración siempre se deben hacer todas las evaluaciones. Esta idea de reciclar los f_i, optimiza el tiempo al determinar cada y_{k+1}, similar a como lo hace una línea de ensamblaje de automóviles.

Observación

Los métodos multipasos “reciclan” las evaluaciones de la función f, debido a que para $k = 3$, se necesitan f_3, f_2, f_1 y f_0, luego para $k = 4$, se utilizan f_4, f_3, f_2 y f_1. Es decir que en cada iteración, después de la iteración $k = 4$, se realiza únicamente una nueva evaluación, tal como lo hace el método de Euler hacia adelante.

Esto no lo tiene el RK4, ya que en cada iteración siempre se deben hacer todas las evaluaciones. Esta idea de reciclar los f_i, optimiza el tiempo al determinar cada y_{k+1}, similar a como lo hace una línea de ensamblaje de automóviles.

Observación



Ejercicio

Ejercicio (III Examen, IIC-2016)

Si se aplica el método RK4, con $h = 0.2$, al problema:

$$\begin{cases} y' = 2t\cos^2(y) & \text{para } 0 \leq t \leq 1\,, \\ y(0) = \dfrac{\pi}{4}\,. \end{cases}$$

entonces las primeras dos aproximaciones obtenidas son:

$$y_1 = 0.8050 \qquad \text{y} \qquad y_2 = 0.8593\,.$$

Utilice el esquema de Adams-Bashforth de cuatro pasos para aproximar el valor de $y(1)$. Redondee a cuatro decimales y use radianes.

Solución

Como $h = 0.2$, entonces se tienen los puntos:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.2, \quad t_2 = 0.4, \quad t_3 = 0.6, \quad t_4 = 0.8, \quad t_5 = 1,$$

donde además $f(t,y) := 2t\cos^2(y)$ y se conocen:

$$y_0 \;=\; 0.7854\,, \qquad y_1 \;=\; 0.8050 \qquad \text{y} \qquad y_2 \;=\; 0.8593\,.$$

Ahora, para aplicar el método de Adams-Bashforth de 4-pasos primero es necesario realizar una iteración adicional del RK4. En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_2, y_2) \;=\; f(0.4, 0.8593) \;=\; 0.3411 \\
k_2 &= f(t_2 + \tfrac{h}{2}, y_2 + \tfrac{h}{2}k_1) \;=\; f(0.5, 0.8934) \;=\; 0.3928 \\
k_3 &= f(t_2 + \tfrac{h}{2}, y_2 + \tfrac{h}{2}k_2) \;=\; f(0.5, 0.8986) \;=\; 0.3878 \\
k_4 &= f(t_2 + h, y_2 + h\,k_3) \;=\; f(0.6, 0.9369) \;=\; 0.4210 \\
y_3 &= y_2 + \tfrac{h}{6}\big[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\big] \;=\; 0.9367\,.
\end{aligned}$$

Solución

De esta forma, se tienen los datos:

k	t_k	y_k	f_k
0	0	0.7854	0
1	0.2	0.8050	0.1922
2	0.4	0.8593	0.3411
3	0.6	0.9367	0.4212

con los cuales se emplea el método de Adams-Bashforth de 4-pasos tal y como se muestra:

- $\boldsymbol{k = 3}$**:**

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + \frac{h}{24}\left[55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0\right] \\ &= 1.0213 \end{aligned}$$

Solución

- $\boldsymbol{k = 4}$**:** Primero se calcula

$$f_4 \;=\; f(t_4, y_4) \;=\; f(0.8, 1.0213) \;=\; 0.4364\,,$$

y con ello:

$$\begin{aligned} y_5 &= y_4 + \frac{h}{24}\left[55f_4 - 59f_3 + 37f_2 - 9f_1\right] \\ &= 1.1050 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que $y(1) \approx 1.1050$.

Ejercicio

Ejercicio para la casa

Demuestre que el método de Adams-Bashforth de tres pasos es:

$$y_{k+1} \; = \; y_k + \frac{h}{12}\left[23f(t_k, y_k) - 16f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 5f(t_{k-2}, y_{k-2})\right].$$

Predictor-Corrector de cuarto orden (PC4)

El método **Predictor-Corrector de cuarto orden**, se obtiene al realizar el siguiente procedimiento:

1. Usar RK4 para calcular y_1, y_2 y y_3
2. Para cada $k = 3, 4, \ldots, n-1$, hacer:
    1. AB de 4-pasos para calcular $\widehat{y}_{k+1}$
    2. AM de 3-pasos para calcular y_{k+1}, al reemplazar y_{k+1} del lado derecho por $\widehat{y}_{k+1}$

Predictor-Corrector de cuarto orden (PC4)

El método **Predictor-Corrector de cuarto orden**, se obtiene al realizar el siguiente procedimiento:

1. Usar RK4 para calcular y_1, y_2 y y_3
2. Para cada $k = 3, 4, \ldots, n-1$, hacer:
   1. AB de 4-pasos para calcular $\widehat{y}_{k+1}$
   2. AM de 3-pasos para calcular y_{k+1}, al reemplazar y_{k+1} del lado derecho por $\widehat{y}_{k+1}$

Predictor-Corrector de cuarto orden (PC4)

El método **Predictor-Corrector de cuarto orden**, se obtiene al realizar el siguiente procedimiento:

1. Usar RK4 para calcular y_1, y_2 y y_3
2. Para cada $k = 3, 4, \ldots, n-1$, hacer:
    1. AB de 4-pasos para calcular $\widehat{y}_{k+1}$
    2. AM de 3-pasos para calcular y_{k+1}, al reemplazar y_{k+1} del lado derecho por $\widehat{y}_{k+1}$

Predictor-Corrector de cuarto orden (PC4)

El método **Predictor-Corrector de cuarto orden**, se obtiene al realizar el siguiente procedimiento:

1. Usar RK4 para calcular y_1, y_2 y y_3
2. Para cada $k = 3, 4, \ldots, n-1$, hacer:
    1. AB de 4-pasos para calcular $\widehat{y}_{k+1}$
    2. AM de 3-pasos para calcular y_{k+1}, al reemplazar y_{k+1} del lado derecho por $\widehat{y}_{k+1}$

Predictor-Corrector de cuarto orden (PC4)

El método **Predictor-Corrector de cuarto orden**, se obtiene al realizar el siguiente procedimiento:

1. Usar RK4 para calcular y_1, y_2 y y_3
2. Para cada $k = 3, 4, \ldots, n-1$, hacer:
   1. AB de 4-pasos para calcular $\widehat{y}_{k+1}$
   2. AM de 3-pasos para calcular y_{k+1}, al reemplazar y_{k+1} del lado derecho por $\widehat{y}_{k+1}$

Predictor-Corrector de cuarto orden (PC4)

En otras palabras, se tiene el esquema explícito de cuarto orden:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_1, y_2, y_3 \leftarrow \text{RK4} \\ \widehat{y}_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{24}\left[55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}\right] \leftarrow \text{AB4} \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{24}\left[9f(t_{k+1}, \widehat{y}_{k+1}) + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}\right] \leftarrow \text{AM3} \end{cases}$$

para $k = 3, 4, \ldots, n-1$

Predictor-Corrector de cuarto orden (PC4)

En otras palabras, se tiene el esquema explícito de cuarto orden:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_1, y_2, y_3 \;\leftarrow\; \text{RK4} \\ \widehat{y}_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{24}\left[55 f_k - 59 f_{k-1} + 37 f_{k-2} - 9 f_{k-3}\right] \;\leftarrow\; \text{AB4} \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{24}\left[9 f(t_{k+1}, \widehat{y}_{k+1}) + 19 f_k - 5 f_{k-1} + f_{k-2}\right] \;\leftarrow\; \text{AM3} \end{cases}$$

para $k = 3, 4, \ldots, n-1$

Predictor-Corrector de cuarto orden (PC4)

En otras palabras, se tiene el esquema explícito de cuarto orden:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_1, y_2, y_3 \;\leftarrow\; \text{RK4} \\ \widehat{y}_{k+1} \;=\; y_k \;+\; \dfrac{h}{24}\left[55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}\right] \;\leftarrow\; \text{AB4} \\ y_{k+1} \;=\; y_k \;+\; \dfrac{h}{24}\left[9f(t_{k+1}, \widehat{y}_{k+1}) + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}\right] \;\leftarrow\; \text{AM3} \end{cases}$$

para $k = 3, 4, \ldots, n-1$

Predictor-Corrector de cuarto orden (PC4)

En otras palabras, se tiene el esquema explícito de cuarto orden:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_1, y_2, y_3 \ \leftarrow \ \text{RK4} \\ \widehat{y}_{k+1} \ = \ y_k \ + \ \dfrac{h}{24}\left[55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}\right] \ \leftarrow \ \text{AB4} \\ y_{k+1} \ = \ y_k \ + \ \dfrac{h}{24}\left[9f(t_{k+1}, \widehat{y}_{k+1}) + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}\right] \ \leftarrow \ \text{AM3} \\ \qquad \text{para } k = 3, 4, \ldots, n-1 \end{cases}$$

En otras palabras, se tiene el esquema explícito de cuarto orden:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_1, y_2, y_3 \leftarrow \text{RK4} \\ \widehat{y}_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{24}\left[55 f_k - 59 f_{k-1} + 37 f_{k-2} - 9 f_{k-3}\right] \leftarrow \text{AB4} \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{24}\left[9 f(t_{k+1}, \widehat{y}_{k+1}) + 19 f_k - 5 f_{k-1} + f_{k-2}\right] \leftarrow \text{AM3} \end{cases}$$

para $k = 3, 4, \ldots, n-1$

Predictor-Corrector de cuarto orden (PC4)

En otras palabras, se tiene el esquema explícito de cuarto orden:

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_1, y_2, y_3 \;\leftarrow\; \text{RK4} \\ \widehat{y}_{k+1} \;=\; y_k \;+\; \dfrac{h}{24}\left[55 f_k - 59 f_{k-1} + 37 f_{k-2} - 9 f_{k-3}\right] \;\leftarrow\; \text{AB4} \\ y_{k+1} \;=\; y_k \;+\; \dfrac{h}{24}\left[9 f(t_{k+1}, \widehat{y}_{k+1}) + 19 f_k - 5 f_{k-1} + f_{k-2}\right] \;\leftarrow\; \text{AM3} \end{cases}$$

para $k = 3, 4, \ldots, n-1$

Ejercicio

Ejercicio (III Examen, IC-2018)

Si se aplica el método RK4, con $h = 0.2$, al problema:

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{3ye^t - y^2 - 1}{y - e^t}, \qquad 0 \leq t \leq 1\,, \\ y(0) &= 2\,. \end{cases}$$

entonces las primeras dos aproximaciones obtenidas son:

$$y_1 = 2.2999 \qquad \text{y} \qquad y_2 = 2.7868\,.$$

Utilice el método PC4 para aproximar el valor de $y(1)$.

Solución

Como $h = 0.2$, entonces se tienen los puntos:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.2, \quad t_2 = 0.4, \quad t_3 = 0.6, \quad t_4 = 0.8, \quad t_5 = 1,$$

donde además $f(t,y) := \frac{3ye^t - y^2 - 1}{y - e^t}$ y se conocen:

$$y_0 \ = \ 2.0000\,, \qquad y_1 \ = \ 2.2999 \qquad \text{y} \qquad y_2 \ = \ 2.7868\,.$$

Ahora, para aplicar el método Predictor-Corrector de 4-pasos primero es necesario realizar una iteración adicional del RK4. En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_2, y_2) \ = \ f(0.4, 2.7868) \ = \ 2.8618 \\
k_2 &= f(t_2 + \tfrac{h}{2}, y_2 + \tfrac{h}{2}k_1) \ = \ f(0.5, 3.0730) \ = \ 3.3394 \\
k_3 &= f(t_2 + \tfrac{h}{2}, y_2 + \tfrac{h}{2}k_2) \ = \ f(0.5, 3.1207) \ = \ 3.1908 \\
k_4 &= f(t_2 + h, y_2 + h\,k_3) \ = \ f(0.6, 3.4250) \ = \ 3.7380 \\
y_3 &= y_2 + \tfrac{h}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] \ = \ 3.4421\,.
\end{aligned}$$

Solución

De esta forma, se tienen los datos:

k	t_k	y_k	f_k
0	0.0	2.0000	1.0000
1	0.2	2.2999	1.9822
2	0.4	2.7868	2.8618
3	0.6	3.4421	3.6838

con los cuales se emplea el método PC4 tal y como se muestra:

- $\boldsymbol{k = 3}$**:**

$$\begin{aligned} \widehat{y}_4 &= y_3 + \tfrac{h}{24}\left[55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0\right] \\ &= 4.2596 \\ y_4 &= y_3 + \tfrac{h}{24}\left[9f(t_4, \widehat{y}_4) + 19f_3 - 5f_2 + f_1\right] \\ &= 4.2654 \end{aligned}$$

Solución

- $\boldsymbol{k = 4}$**:** Primero se calcula

$$f_4 \;=\; f(t_4, y_4) \;=\; f(0.8, 4.2654) \;=\; 4.5517\,,$$

y con ello:

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_5 &= y_4 + \tfrac{h}{24}\left[55f_4 - 59f_3 + 37f_2 - 9f_1\right] \\
&= 5.2741 \\
y_5 &= y_4 + \tfrac{h}{24}\left[9f(t_5, \widehat{y}_5) + 19f_4 - 5f_3 + f_2\right] \\
&= 5.2729
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que $y(1) \approx 5.2729$.

Ejercicio

Ejercicio para la casa

Considere el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = \arctan(y) - te^t \quad \text{para } -1.2 \leq t \leq 1.2\,, \\ y(-1.2) = 2\,. \end{cases}$$

Aplique el método PC4 para aproximar la solución del problema de valor inicial con $h = 0.4$.