Solución numérica de ecuaciones no lineales

1 Introducción

Considere la ecuación $e^{2x-x^2} - x^3 = 0$. Esta ecuación posee una solución positiva, sin embargo, no es fácil determinar dicha solución mediante métodos algebraicos.

En este capítulo nos ocuparemos de estudiar algunos métodos para aproximar las raíces de una función f, definida en un subconjunto de los números reales I, la cual puede ser en general no lineal. En este contexto el término *raíz* significa un número real c tal que $f(c) = 0$. Los métodos que estudiaremos requieren que f sea al menos continua y en otros casos los métodos requieren supuestos más fuertes sobre la función f.

Los métodos que se estudian en este capítulo se pueden expresar como algoritmos iterativos para realizar una aproximación. Con dicho algoritmo se construye una sucesión de términos (c_k) que se espera que se acerque cada vez más a c.

Usualmente se necesita una condición para deterner el algoritmo, de lo contrario, es posible que consuman muchos recursos computacionales o mucho tiempo. Una forma de detener un algoritmo es definiendo una **tolerancia**, esto es, definiendo cuanto es el error que podemos aceptar en nuestra aproximación. Otra forma es definiendo la cantidad máxima de iteraciones que queremos realizar. También se pueden combinar las dos condiciones para deterner el algoritmo.

El teorema del valor intermedio es de utilidad para ubicar un intervalo (inicial) donde una función continua posee una raíz.

Teorema 1 (Valor Intermedio) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*

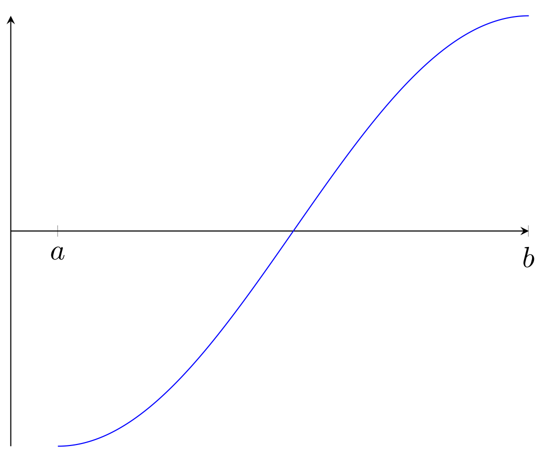


Figure 1: Función con un cero en el intervalo $[a, b]$

2 Método de bisección

En la siguiente figura 1 puede observarse la gráfica de una función f. Suponga que dicha función es contínua en el intervalo $[a, b]$ mostrado en la gráfica.
Dado que $f(a)f(b) < 0$, por el teorema del valor intermedio sabemos que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

En el siguiente método, suponemos que el cero c de la función f es único en el intervalo $[a, b]$. El método de bisección consiste en la siguiente estrategia

a) Defina $a_1 = a$, $b_1 = b$ y $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

b) Si $f(c_1) = 0$, entonces $c_1 = c$ y terminamos el proceso.

c) Si $f(c_1) \neq 0$ entonces:

- Si $f(c_1)f(a_1) < 0$, se tiene que $c \in [a_1, c_1]$. Defina entonces $a_2 = a_1$ y $b_2 = c_1$.
- Si $f(c_1)f(b_1) < 0$, se tiene que $c \in [c_1, b_1]$. Defina entonces $a_2 = c_1$ y $b_2 = b_1$.

d) Repita los pasos a), b) y c) para el nuevo intervalo.

Ejemplo 1 *Considere la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 6$. *Realice dos iteraciones con el método de bisección con el intervalo inicial* $[1, 5]$.
Solución: *Primero note que la función es continua y además que* $f(1) = -2$ *y* $f(5) = 54$. *Por el teorema del valor intermedio, sabemos que existe* $c \in [1, 5]$ *tal que* $f(c) = 0$. *Ahora aproximamos este valor de* c *mediante el siguiente proceso:*

- *Definimos* $a_1 = 1$, $b_1 = 5$ *y* $c_1 = \dfrac{1+5}{3} = 3$ *(la primera aproximación de c).*
- $f(3) = 6$ *y entonces se cumple que* $f(a_1)f(c_1) = f(1)f(3) < 0$. *Defina* $a_2 = 1$ *y* $b_2 = 3$.
- *Tenemos* $a_2 = 1$, $b_2 = 3$, *entonces* $c_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$.
- *Note que* $f(2) = 0$.

Teorema 2 (Convergencia) *Suponga que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua y que* $f(a)f(b) < 0$. *La sucesión* $(c_k)_{k\geq 1}$ *generada por el método de bisección satisface*

$$|c_k - c| \leq \frac{b-a}{2^k}.$$

Ejemplo 2 *Determine el número de iteraciones necesarias para aproximar un cero de* $f(x) = x^3 - \dfrac{x^2}{3} - 2x + \dfrac{2}{3}$, $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ *con una precisión de* 10^{-3}.

Solución: Del teorema 2 tenemos que

$$|c_k - c| < \frac{2-1}{2^k} = \frac{1}{2^k},$$

por lo que para garantizar que $\dfrac{1}{2^k} < 10^{-3}$ basta tomar $k > \dfrac{3}{\log_{10} 2} \approx 9.9657$, esto es, podemos tomar $k = 10$ (o cualquier valor mayor).

Algorithm 1 Algoritmo de bisección

Input: f continua, intervalo inicial $I_0 \leftarrow [a,b]$ con $f(a)f(b) < 0$
Output: Aproximación c_k de una raíz c de f en I_0.

```
k ← 0;
while la iteración no haya convergido do
    c_k ← (a_k + b_k)/2;
    if c_k es una raíz then
        Retorne c_k;                          ▷ se detiene el ciclo
    end if
    if f(a_k)f(c_k) < 0 then
        a_{k+1} ← a_k,  b_{k+1} ← c_k ;
    else
        a_{k+1} ← c_k,  b_{k+1} ← b_k ;
    end if
    k ← k + 1;
end while
```

Ejercicios

1. Determine el número de iteraciones necesarias para aproximar una raíz de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ con una precisión de 10^{-3} en el intervalo $[1,3]$.
2. Utilice el algoritmo de bisección para encontrar la aproximación c_3 de $f(x) = \sqrt{x} - \cos(x)$ en el intervalo $[0,1]$.
3. Utilice el método de bisección para encontrar una aproximación con una precisión de 10^{-5} para la solución de la ecuación $3x - e^x = 0$ en el intervalo $[1,2]$.

3 Método del punto fijo

Motivación: Considere la función $f(x) = x - \frac{1}{2}\cos(x)$ definida en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. La función f posee una raíz en el intervalo que tiene un valor aproximado de $c \approx 0.45018361$. Note que

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x - \frac{1}{2}\cos(x) &= 0 \\ x &= \frac{1}{2}\cos(x), \quad \text{defina: } g(x) = \frac{1}{2}\cos(x) \\ x &= g(x) \end{aligned}$$

Gracias a que g posee ciertas propiedades, dado un valor inicial c_0 en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, se puede utilizar la igualdad anterior para crear una sucesión (c_k), tal que $c_{k+1} = g(c_k)$ que converge a c, que es la raíz de la función f.

Ejemplo 3 *Aproxime el cero de $f(x) = x - \frac{1}{2}\cos(x)$ definida en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.*

1. *Cree una función en `MATLAB` (M-función) que aproxime la raíz de f en el intervalo dado realizando una cantidad N de iteraciones.*
2. *Pruebe su código con $N = 10$ y $N = 100$. ¿Qué ocurre?*

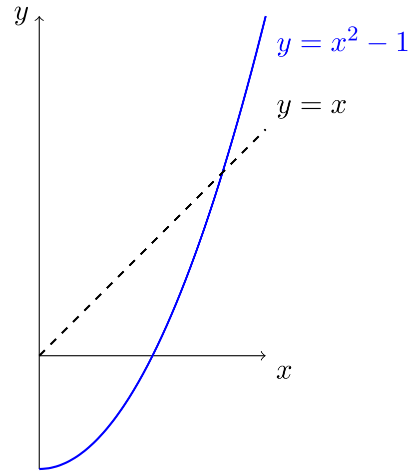
Solución:

```
function ck = puntofijo(g, c0, N)
% ENTRADAS: g una funcion tipo function handle, valor inicial c0, cantidad de
   iteraciones N
% SALIDAS: "ck" la aproximacion de la raiz de f
ck = c0;
for i=1:N
    ck = g(ck);
end
fprintf("La aproximacion es: %1.5f \n", x)
```

Nuevamente se hace énfasis en que en el ejemplo anterior la sucesión que se crea utilizando la función g converge a la raíz $c \approx 0.45018361$ gracias a las propiedades que satisface dicha función. Se detallan dichas propiedades con los siguientes definiciones y resultados.

Definición 1 (Punto fijo) *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y sea $g : A \to A$. Se dice que $x \in A$ es un punto fijo de g si se satisface que $g(x) = x$.*

Ejemplo 4 *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ posee un punto fijo en el intervalo $[0, 2]$.*



Teorema 3 (Brower) *Suponga que g es una función continua definida en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Suponga además que $g(x) \in [a, b]$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces, g tiene un punto fijo.*

Ejercicio 1 *Justifique que la función $g(x) = \dfrac{1}{2}\cos(x)$ definida en $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ satisface que $g([0, \dfrac{\pi}{2}]) \subset [0, \dfrac{\pi}{2}]$.*

Solución:
Note que g es continua y $g(0) = 1/2$, $g(\pi/2) = 0$. Además, $g'(x) = -\dfrac{1}{2}\sin(x)$ y g' es negativa en $[0, \dfrac{\pi}{2}]$, entonces g es decreciente.

Se sigue que $g([0, \dfrac{\pi}{2}]) \subset [0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Definición 2 (Iteración simple) *Sea $g : [a, b] \to [a, b]$ una función continua y sea $c_0 \in [a, b]$. La recursión*

$$c_{k+1} = g(c_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{1}$$

se llama iteración simple o método de aproximaciones sucesivas.

Definición 3 (Función contractiva) *Sea g una función continua definida en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Entonces, g es una **contracción** en $[a, b]$ si existe una constante L, $0 < L < 1$ tal que*

$$|g(x) - g(y)| \le L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b]. \tag{2}$$

Teorema 4 (Derivada y contractividad) *Suponga que $g : [a, b] \to [a, b]$ es diferenciable y que existe $L \in]0, 1[$ tal que $|g'(x)| \le L$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces g es una contracción sobre $[a, b]$.*

Teorema 5 (Unicidad) *Suponga que g es continua sobre $[a, b]$ con $g([a, b]) \subset [a, b]$ y además que g una contracción sobre $[a, b]$. Entonces g tiene un único punto fijo $c \in [a, b]$. Además la iteración simple $c_{k+1} = g(c_k)$ converge a c para cualquier valor $c_0 \in [a, b]$.*

Nota: si g no es contractiva, la sucesión $c_{k+1} = g(c_k)$ podría ser divergente.

Ejemplo 5 *Muestre que* $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$ *tiene un único punto fijo en el intervalo* $[-1, 1]$.

Retomemos ahora el ejemplo de la motivación y justifiquemos adecuadamente todas las hipótesis del teorema para encontrar una iteración simple que converja al punto fijo de f.

Ejemplo 6 *Sea* $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\cos(x)$ *definida en el intervalo* $[0, \dfrac{\pi}{2}]$. *Utilice el método del punto fijo para determinar una iteración simple que sea convergente a una raíz de* f *en el intervalo dado.*

¿Cuándo parar?

Tomaremos el error relativo, que es el que compararemos con la tolerancia dada:

$$|e_k| = \frac{|c_{k+1} - c_k|}{|c_{k+1}|} < tol$$

Ejercicios

1. Utilice la iteración de punto fijo para determinar una aproximación de una solución de $x^4 - 3x^2 = 3$ en el intervalo $[1, 2]$, utilizando $x_0 = 1$ y una tolerancia de 10^{-2}.

2. Sea $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Muestre que la función $g(x) = \sqrt[3]{2x + 5}$ en el intervalo $[2, 3]$ satisface las condiciones de unicidad del punto fijo.

3. En `Matlab`, cree una M-función llamada `puntofijo2` que reciba como entradas una función anónima g, una tolerancia tol y un valor inicial c_0. La función debe utilizar el método del punto fijo para aproximar el valor c de un punto fijo de g.

4 Método de Newton (Newton-Rhapson)

Considere la ecuación $f(x) = 0$. Supongamos que $\lambda(x)$ es una función sin ceros reales y definamos $g(x) = x - \lambda(x)f(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} g(c) &= c \\ \Leftrightarrow c - \lambda(c)f(c) &= c \\ \Leftrightarrow -\lambda(c)f(c) &= 0 \\ \Leftrightarrow f(c) &= 0 \end{aligned}$$

Por teorema asociado a iteración de punto fijo, tiene sentido plantearse el siguiente método:

Definición 4 (Iteración de Newton-Rhapson) *El método de Newton para aproximar una raíz de $f(x) = 0$ consiste en aplicar la iteración*

$$c_{k+1} = c_k - \frac{f(c_k)}{f'(c_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

donde c_0 es un valor dado. Note que implícitamente se asume que $f'(c_k) \neq 0$, para cada $k \geq 0$.

Teorema 6 *Sea $f \in C^2([a, b])$ es tal que*

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$;
2. $f'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in [a, b]$;
3. $f''(x) \geq 0$ *o* $f''(x) \leq 0$, *para todo* $x \in [a, b]$;
4. $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| \leq b - a$ *y* $\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| \leq b - a$.

Entonces, el método de Newton converge a la única solución c de $f(x) = 0$ para cualquier $c_0 \in [a, b]$.

Ejemplo 7 *Considere la función $f : [1, 10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$.*

1. *Utilice el método de Newton-Rhapson para encontrar una sucesión (c_k) que converja a un cero de f para cualquier valor $c_0 \in [1, 10]$.*
2. *En `Matlab`, elabore una M-función de nombre `Newton_Rhapson1` que reciba como entradas: la función anónima f, el criterio de f' también como función aómina, un valor inicial c_0 y una cantidad máxima de iteraciones n.*
3. *Pruebe su código con el valor $c_0 = 5 \in [1, 10]$ y una cantidad de iteraciones de su elección. ¿Se observa convergencia?*
4. *Pruebe su código con el valor $c_0 = 20$ y una cantidad de iteraciones de su elección. ¿Se observa convergencia?*

Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 6$ y sea $c_0 = 1$ un valor inicial. Use el método de Newton para encontrar c_2.
2. Muestre que $f(x) = x^2 - x - 2$ tiene una raíz única en $[1, 3]$ a la cual converge la sucesión del método de Newton para todo $x_0 \in [1, 3]$.

3. En `Matlab`, cree una M-función `Newton_Rhapson2` que aplique el método de Newton para calcular la raíz de f. Su código debe recibir como entradas: el criterio de una función f, el criterio de f', un valor inicial c_0, una cantidad de iteraciones n y una tolerancia tol. debe calcular la aproximación de la raíz c de la función.

   Pruebe su código con la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2$ que posee una raíz $c = \sqrt{2} \approx 1.414213562373095$.

5 Método de la secante

A pesar de que el método de Newton es muy popular, se asume que la función es derivable y que podemos evaluar la derivada. En la práctica esto puede no ser viable.

Una alternativa es utilizar una aproximación de la derivada: $f'(c_k) \approx \dfrac{f(c_k) - f(c_{k-1})}{c_k - c_{k-1}}$ y entonces se obtiene el método de la secante.

Definición 5 *El método de la secante para aproximar una raíz c de una función f consiste en aplicar la iteración*

$$c_{k+1} = c_k - \frac{c_k - c_{k-1}}{f(c_k) - f(c_{k-1})} f(c_k), \quad k \geq 0 \tag{4}$$

donde c_0 y c_1 son valores iniciales.

Note que para calcular c_{k+1} con este método se necesita conocer c_k y c_{k-1}.

Teorema 7 *Sea $I_\delta = [c - \delta, c + \delta]$, $\delta > 0$ y suponga que $f \in C^2(I_\delta)$ es tal que $f(c) = 0$ y $f'(c) \neq 0$. Entonces, para valores iniciales $c_0, c_1 \in I_\delta$ suficientemente cerca de c, el método de la secante* (4) *converge a c.*

Ejemplo 8 *Sea $f(x) = x^2 - 6$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sean $c_0 = 3$, $c_1 = 2$, aplicando el método de la secante tenemos*

$$\begin{aligned}
c_3 &= c_1 - \frac{c_1 - c_0}{f(c_1) - f(c_0)} f(c_1) \\
&= 2 - \frac{2 - 3}{f(2) - f(3)} f(2) \\
&= 2 - \frac{(-1)}{(-5)}(-2) \\
&= 2 + \frac{2}{5} \\
&= 2.4
\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Sea $f(x) = x - 2\cos(x)$ y sean $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$. Determine el valor de x_3.