Métodos Iterativos para Sistemas de Ecuaciones

MA-1006

UCR

Temas de sección

a) Normas, condición y estabilidad.
b) Método de Jacobi, método de Gauss-Seidel, métodos SOR.
c) Métodos para sistema de ecuaciones no lineales.

¿Cuál es la idea?

¿Cuál es la idea de esta sección?

Definición

Una norma en $\mathbb{R}^n$ *es una función* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *que satisface las siguientes propiedades*

a) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, *para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

b) $\|\mathbf{x}\| = 0$ *si y solo si* $\mathbf{x} = 0$.

c) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

d) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, *para todo* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

Definición (Normas de vectores)

Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ *(el espacio de vectores columna). Sea* $\mathbf{x}$ *un vector* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$. *Se definen las siguientes normas:*

- $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$
- $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

Ejercicio (Normas)

Sea $\mathbf{x} = (-1, 1, -2)^t$. *Determine* $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$ *y* $\|\mathbf{x}\|_\infty$.

Solución:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |-1| + |1| + |-2| = 4$$
$$\|\mathbf{x}\|_2 = (|-1|^2 + |1|^2 + |-2|^2)^{1/2} = \sqrt{6}$$
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = |-2| = 2$$

Definición (Normas de matrices)

Una norma (matricial) es una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ *que satisface las siguientes propiedades para* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$*:*

a) $\|A\| \geq 0$.

b) $\|A\| = 0$ *si y solo si* $A = 0$.

c) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

e) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ *(consistente).*

Teorema

Si $\|\cdot\|$ *es una norma en* $\mathbb{R}^n$*, entonces*

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$$

es una norma matricial.

Comentario: a una norma matricial definida a partir de una norma de vectores se le denomina norma *inducida* o norma *natural*.

Normas de matrices

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tenemos los siguientes resultados:

a) Sean $\{a_j\}_{j=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ los vectores **columna** de A.

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|a_j\|_1 .$$

Esto es, la 1-norma de una matriz corresponde a la máxima suma de los valores absolutos de las entradas de cada columna.

b) Si denotamos a_i^* a las n **filas** de A, entonces:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \|a_i^*\|_1 .$$

Esto es, la ∞-norma de una matriz corresponde al máximo de la suma de los valores absolutos de cada fila.

Ejercicio (Normas de matrices)

Determine $\|A\|_1$ *y* $\|A\|_\infty$ *donde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$\|A\|_1 = 6$

$\|A\|_\infty = 7$

Ejercicio (Normas de matrices en `Matlab`)

El comando `norm` de `Matlab` calcula la 2-norma de un vector (o matriz). Además,

a) *`norm(v,p)` devuelve la p-norma del vector (o matriz).*

b) *Note que si $p = 2$, entonces `norm(v)=norm(v,p)`.*

c) *En el comando `norm(v,p)`, p también puede tomar el valor `Inf` (norma infinito).*

Verifique que para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $\|A\|_1 = 6$ y $\|A\|_\infty = 7$.

Definición (Radio espectral)

Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *valores propios de una matriz* A*. Entonces su radio espectral* $\rho(A)$ *se define como*

$$\rho(A) = \max_{i=1,\cdots,n} \{|\lambda_i|\}$$

Teorema

Sea $\|\cdot\|$ *una norma matricial en* $\mathbb{R}^{n\times n}$. *Entonces para todo* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *se tiene*

- $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$
- $\rho(A) \leq \|A\|$

Número de condición

Definición

El número de condición de una matriz A está está dado por

$$\kappa(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$$

Se dice que la matriz A es mal condicionada si $\kappa(A) \gg 1$. Es caso contrario se dice que es bien condicionada. Además, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es mal condicionado si la matriz A es mal condicionada.

Métodos: Jacobi y Gauss

Dado un sistema lineal de tamaño $n \times n$ dado por $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, esto es,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Queremos generar un método iterativo para aproximar la solución $\mathbf{x}$ a dicho sistema.
El método debe iniciar con una aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ para la solución $\mathbf{x}$ y debe generar una sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ que sea convergente a $\mathbf{x}$.

Método de Jacobi

El método de Jacobi se obtiene primeramente despejando cada variable x_i de la ecuación i de la forma

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij}x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Note que aquí se requiere imponer la restricción $a_{ii} \neq 0$. Luego, para cada $k \geq 1$, se obtienen las componentes $x_i^{(k)}$ de $\mathbf{x}^{(k)}$ a partir de $\mathbf{x}^{(k-1)}$

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} -a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i \right], \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Veamos esto con un ejemplo.

Método de Jacobi

Ejemplo

Considere el sistema

$$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ 2x - 8y = 0 \end{cases} \tag{1}$$

La solución exacta a este sistema está dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/9 \\ -1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.\overline{4} \\ -0.\overline{1} \end{pmatrix}.$$

Aplique el método de Jacobi para aproximar la solución utilizando como vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0)^t$.

Solución:

Solución:

A partir del sistema, se depeja la primera variable de la primera ecuación y la segunda variable de la segunda ecuación:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-2}{5} + \frac{2y}{5} &&= 0x + \frac{2y}{5} - \frac{2}{5} \\
y &= \frac{0}{(-8)} - \frac{2x}{(-8)} &&= \frac{x}{4} + 0y + 0,
\end{aligned}
$$

este sistema se puede escribir como sigue:

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}
$$

Defina $T = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = (-2/5, 0)^t$. La ecuación (2) sugiere que podemos utilizar la iteración

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} \tag{3}$$

para aproximar la solución al sistema (4).

- En la primera iteración, utilizamos $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^t$ en la ecuación (3) y obtenemos

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- En la segunda iteración, utilizamos $\mathbf{x}^{(1)} = (-2/5, 0)^t$ en la ecuación (3) y obtenemos

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 \\ -0.1 \end{pmatrix}.$$

- En la tercera iteración:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/5 \\ -1/10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/25 \\ -1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.44 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

De esta forma se puede continuar el procedimiento hasta que la aproximación sea lo `suficientemente buena`. Se puede utilizar como condición de parada utilizando una tolerancia ε de la siguiente forma

$$\frac{\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|_\infty}{\left\|\mathbf{x}^{(k)}\right\|_\infty} < \varepsilon.$$

Método de Jacobi

El método anterior también se puede escribir como sigue: podemos la matriz A en tres matrices D, L, U, donde la matriz D tiene las entradas diagonales de A, la matriz L es la parte (estrictamente) triangular inferior de A y la matriz U contiene la parte estrictamente triangular superior de A, esto es, $A = (D - L - U)$. Entonces, el procedimiento del ejemplo (4) es equivalente a

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (D - L - U)\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ D\mathbf{x} &= (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= D^{-1}((L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b}) \\ &= D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}, \end{aligned}$$

entonces, la iteración de Jacobi puede ser escrita de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k+1)} &= D^{-1}(L+U)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b}\\ &= T_J\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c_J}\end{aligned}$$

Ejercicio

Para el sistema

$$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ 2x - 8y = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Dtermine T_J *y* c_J.

Ejercicio

Encuentre las primeras dos iteraciones del método de Jacobi para el sistema

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 3x + 6y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 7z = 4 \end{cases} \tag{5}$$

utilizando el vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^t$.

Método de Gauss-Seidel

El método se basa en la igualdad

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}x_j^{(k)}) - \sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}x_j^{(k-1)}) + b_i\right], \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

En forma matricial, podemos descomponer $A = D - L - U$ y realizar un despeje

$$\begin{aligned}(D-L)\mathbf{x} &= U\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \textit{'hacia adelante'}\\ \mathbf{x} &= (D-L)^{-1}U\mathbf{x} + (D-L)^{-1}\mathbf{b}.\end{aligned}$$

La ecuación anterior sugiere plantear la iteración

$$\mathbf{x}^{(k)} = (D-L)^{-1}U\mathbf{x}^{(k-1)} + (D-L)^{-1}\mathbf{b}. \tag{6}$$

Si definimos $T_g = (D-L)^{-1}U$ y $\mathbf{c}_g = (D-L)^{-1}\mathbf{b}$, la ecuación (6) también se puede escribir de la forma $\mathbf{x}^{(k)} = T_g\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}_g$.

Ejemplo

Aproximar la solución al sistema

$$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ 2x - 8y = 0 \end{cases} \tag{7}$$

utilizando el vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0)^t$.

Solución:

Ahora vamos a utilizar el método de Gauss-Seidel. Separamos la matriz A de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D - L - U,$$

luego debemos encontrar explicitamente la matriz $D - L$ y $(D-L)^{-1}$

$$(D - L) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (D-L)^{-1} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

De lo anterior tenemos que

$$T_g = (D-L)^{-1}U = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 \\ 0 & 1/10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = (D-L)^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -1/10 \end{pmatrix}$$

- En la primera iteración, utilizamos $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0)^t$ y obtenemos

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 \\ 0 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 \\ -1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -1/10 \end{pmatrix}.$$

- En la segunda iteración, utilizamos $\mathbf{x}^{(1)} = (-2/5, -1/10)^t$ en la ecuación (3) y obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 2/5 \\ 0 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/5 \\ -1/10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 \\ -1/10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -11/25 \\ -11/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.44 \\ -0.11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio

Determine las matrices T_g *y* $\mathbf{c}_g$ *del método de Gauss-Seidel para el sistema*

$$\begin{cases} 3x - \ \ y + \ \ z = 1 \\ 3x + 6y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 7z = 4 \end{cases} \tag{8}$$

Convergencia

Teorema

Para cualquier $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, *la sucesión* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ *definida por*

$$\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}, \quad \textit{para } k \geq 1$$

converge a la solución única de $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ *si y solo si* $\rho(T) < 1$.

Convergencia

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se llama estrictamente diagonal dominante por filas si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Otros resultados de convergencia son los siguientes:

1. Si A es estrictamente diagonal dominante, entonces, las sucesiones obtenidas con el método de Jacobi y Gauss-Seidel convergen.
2. Si A es simétrica y definida positiva, entonces el método de Gauss-Seidel converge.
3. Si tanto A como $2D - A$ son simétricas y definidas positivas, entonces el método de Jacobi converge.

Método de Sobrerelajación (SOR)

Los métodos de sobrerelajación (de Gauss-Seidel) son utilizados para acelerar convergencia. En resumen, los métodos utilizan un peso $0 < \omega < 1$ para *promediar* el valor de $x_i^{(k+1)}$ en cada iteración.

La iteración

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)}, \omega \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ dados,} \\ \text{para } k = 0, 1, 2, ..., \text{ hacer:} \\ \hat{x}_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ x_i^{(k+1)} = (1-\omega) x_i^{(k)} + \omega \hat{x}_i^{(k+1)}, \quad \forall i = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

se conoce como **iteración de sobrerrelajación hacia adelante.**

La iteración

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)}, \omega \in \mathbb{R} - \{0\} \ \text{dados}, \\ \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, \ \text{hacer:} \\ \hat{x}_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k+1)} \right) \\ x_i^{(k+1)} = (1-\omega) x_i^{(k)} + \omega \hat{x}_i^{(k+1)}, \quad \forall i = n, n-1, \ldots, 1 \end{cases}$$

se conoce como **iteración de sobrerrelajación hacia atrás.**

Teorema

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es simétrica y definida positiva y* $\omega \in]0,2[$, *entonces la iteración SOR converge hacia la solución de* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *para todo* $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Sistemas no lineales: Método de Newton

Considere el sistema de ecuaciones (no lineales)

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 &= -2x_2 \\ 2x_1 + x_2^2 &= 6 \end{aligned}$$

Dos soluciones (aproximadas) a este sistema son $(0.625204094, 2.179355825)$ y $(2.109511920, -1.334532188)$.
Este sistema se puede expresar también de la forma

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2) & = x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) & = 2x_1 + x_2^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

Nos referimos el sistema de ecuaciones como $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, donde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Podemos aproximar la solución de este sistema con el método de Newton multivariable.

Definición

Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. La recursión definida por

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [J_f(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} F(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ es el método de Newton para el sistema $F(\mathbf{x}) = 0$.

Note que se asume que $J_f(\mathbf{x}^{(k)})$ existe y es no singular para cada $k = 0, 1, 2, \ldots$. La matriz jacobiana en el punto $\mathbf{x}$ está dada por

$$J_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Teorema

Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *y suponga que*

1. $F(\mathbf{c}) = 0$, F *está definida y es continua en un vecindario de* $\mathbf{c}$,
2. *las derivadas parciales de* F *están definidas y son continuas,*
3. *la matriz jacobiana* $J_f(\mathbf{c})$ *es no singular,*

entonces la sucesión $\mathbf{x}^{(k)}$ *definida por el método de Newton converge a la solución* $\mathbf{c}$ *para* $\mathbf{x}^{(0)}$ *sufientemente cerca de* $\mathbf{c}$ *y la convergencia es cuadrática.*

Ejercicio

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 &= -2x_2 \\ 2x_1 + x_2^2 &= 6 \end{aligned}$$

Utilice el método de Newton con $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^t$ *para calcular* $\mathbf{x}^{(1)}$ *y* $\mathbf{x}^{(2)}$.

```
% Ejemplo: Newton en dos variables: se necesita F, JF, v (aprox. i
clearvars
F = @(x1,x2) [x1^2 - x2^2 + 2*x2; 2*x1 + x2^2 - 6];
J = @(x1,x2) [2*x1 -2*x2 + 2; 2 2*x2]; % Jacobiano
v = [1; 1]; % [-4;-5]; % Condicion Inicial
tol = 10^-6;
iterMax = 10;
error = 1; % error en la aprox.
k = 1; % contador
while (error > tol) && (k <= iterMax)
      vaux = v - J(v(1),v(2))\F(v(1),v(2));
      error = norm(vaux-v, Inf); % norma infinito
      v = vaux;
      if (k==iterMax)
          fprintf("Máximo de iteraciones excesido %3d \n", k)
      end
      k= k+1;
end
disp(v)
disp(k)
```