Quiz 1

1. Sea $x = 1{,}4142$ y sea $x^* = 1{,}414$. Determine el error absoluto, el error relativo y la cantidad de dígitos significativos con los que x^* aproxima a x.
   Solución:

$$\varepsilon_{ab} = |x - x^*| = |1{,}4142 - 1{,}414| = 2{,}0 \times 10^{-4}$$
$$\delta_{rel} = \frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{2{,}0 \times 10^{-4}}{|1{,}4142|} \approx 1{,}4142 \times 10^{-4}$$

   Entonces, $\delta_{rel} \approx 1{,}4142 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4}$, así, x aproxima a x^* con a lo sumo $p = 4$ dígitos significativos.

2. La función `sucesionRaiz2` recibe como entradas un valor inicial `x1` y una tolerancia `tol`. La salida de dicha función es `xn`, una aproximación al valor $x = \sqrt{2}$.

```
function xn = sucesionRaiz2(x1, tol)
% Entradas: aproximacion inicial "x1", tolerancia "tol"
% Salidas: apriximacion "xn" con la tolerancia requerida
xn=x1;
error = 1; % error inicial
while (error > tol)
        xn_New = 0.5*( xn + 2/xn ); % metodo
    error = abs(xn_New - xn)/abs(xn_New); % error relativo
    xn = xn_New;
end
```

   Cree una función nueva `sucesionRaiz2_v2` que reciba como entradas: un valor inicial `x1`, una tolerancia `tol` y una cantidad máxima de iteraciones `N`. `sucesionRaiz2_v2` debe devolver dos salidas: la aproximación `xn` y la cantidad de iteraciones realizadas.
   Solución:

```
function [xn, contador] = sucesionRaiz2_v2(x1, tol, N)
% Entradas: aprox. inicial "x1", tolerancia "tol", max. iter
   . "N"
% Salidas: aprox. "xn" con la tolerancia requerida
xn=x1;
error = 1; % error inicial
contador = 0;
while (error > tol) && (contador <= N)
        xn_New = 0.5*( xn + 2/xn ); % metodo
    error = abs(xn_New - xn)/abs(xn_New); % error relativo
    xn = xn_New;
    contador =contador +1;
end
```

3. Sea $f(x) = \sqrt{x} - \cos(x)$, definida en $[0, 1]$.

   a) Justifique que f posee una raíz c en dicho intervalo y utilice el algoritmo de bisección para encontrar la aproximación c_3 de la raíz de f.

   b) ¿Cuántas iteraciones se necesitan para aproximar c con una precisión de 10^{-4}?

   Solución: f es continua, además

   a)

$$\begin{aligned} f(0) &= \sqrt{0} - \cos(0) = -1 \\ f(1) &= \sqrt{1} - \cos(1) \approx 0{,}45 \end{aligned}$$

   por TVI existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 0$.

   1) Definimos $[a_1, b_1] = [0, 1]$ y $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{1}{2}$. Se tiene que $f(c_1) \approx -0{,}1705$, entonces $c \in [c_1, b_1]$.
   2) Definimos $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$ y $c_2 = \frac{c_1+b_1}{2} = \frac{3/2}{2} = 3/4$. Se tiene que $f(c_2) \approx 0{,}1343$, entonces $c \in [c_1, c_2]$.
   3) Definimos $[a_3, b_3] = [c_1, c_2]$ y $c_3 = \frac{c_1+c_2}{2} = \frac{5/4}{2} = 5/8$.

   b) Por teorema, se tiene que $|c_k - c| < \dfrac{b-a}{2^k}$, entonces, planteamos

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{2^k} &< 10^{-4} \\ 2^{-k} &< 10^{-4} \\ -k \log 2 &< -4 \\ k &> \frac{4}{\log(2)} \\ k &> 13{,}28 \end{aligned}$$

4. Sea $f(x) = x^3 - 2x - 5$, definida en $[2, 3]$. Muestre que la función $g(x) = \sqrt[3]{2x+5}$ satisface las condiciones de unicidad del punto fijo en $[2, 3]$. ¿Cuál es una iteración simple que permite aproximar una raíz de f en el intervalo dado?

   Solución: Primero, note que se puede obtener el criterio de g de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x^3 - 2x - 5 &= 0 \\ x^3 &= 2x + 5 \\ x &= \sqrt[3]{2x+5} \end{aligned}$$

   Luego, se debe verificar las condiciones del teorema:

   a) g es continua en $[2, 3]$.

b) Veamos que $g([2,3]) \subset [2,3]$:

$$g(2) = \sqrt[3]{9} \approx 2{,}08 \in [2,3]$$
$$g(3) = \sqrt[3]{11} \approx 2{,}22 \in [2,3]$$

además, $g'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x+5)^2}} > 0$ para $x \in [2,3]$, por lo que g es creciente. Se sigue que $g([2,3]) \subset [2,3]$.

c) Veamos que $|g'(x)| < 1$ para $x \in [2,3]$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+5)^2}} \\ &\leq \frac{2}{3\sqrt[3]{(2\cdot 2+5)^2}} \\ &\approx 0{,}1540 < 1 \end{aligned}$$

Por teorema del punto fijo, g posee un único punto fijo en $[2,3]$ y además la iteración $g(c_{k+1}) = \sqrt[3]{2c_k + 5}$ converge al punto fijo para cualquier $c_0 \in [2,3]$.