Resolución de sistemas lineales

Profesor
Filánder Sequeira Chavarría

Última actualización: 8 de octubre de 2020

Organización de la presentación

Normas de vectores

Considerando el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$, se tiene que este posee las siguientes normas usuales:

- $\|\mathbf{x}\|_\infty \;:=\; \max\limits_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|\mathbf{x}\|_1 \;:=\; \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \;=\; |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$
- $\|\mathbf{x}\|_2 \;:=\; \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \;=\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Normas de vectores

Considerando el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$, se tiene que este posee las siguientes normas usuales:

- $\|\mathbf{x}\|_\infty \;:=\; \max_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|\mathbf{x}\|_1 \;:=\; \sum_{i=1}^{n} |x_i| \;=\; |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$
- $\|\mathbf{x}\|_2 \;:=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \;=\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Normas de vectores

Considerando el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$, se tiene que este posee las siguientes normas usuales:

- $\|\mathbf{x}\|_\infty \; := \; \max\limits_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|\mathbf{x}\|_1 \; := \; \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \; = \; |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$
- $\|\mathbf{x}\|_2 \; := \; \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \; = \; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Con el objetivo de determinar una aproximación a la solución $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ del sistema lineal

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

con $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, en lo que sigue se busca definir iteraciones del método de punto fijo en varias variables. Esto es:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ dado} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)}) \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

donde $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Métodos iterativos clásicos

Con el objetivo de determinar una aproximación a la solución $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ del sistema lineal

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

con $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, en lo que sigue se busca definir iteraciones del método de punto fijo en varias variables. Esto es:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ dado} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{(k)}) \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

donde $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Métodos iterativos clásicos

La notación $\mathbf{x}^{(k)}$ debe entenderse como sigue:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

es decir, $x_i^{(k)} \in \mathbb{R}$ corresponde a la i-ésima componente del vector $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, el cual es la aproximación del método de punto fijo en la iteración k.

Para el método de punto fijo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ dado} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)}) \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

el criterio de parada ahora es dado por:

$$\frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} < tol$$

el cual puede reescribirse como:

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}\| < tol\,\|\mathbf{b}\|$$

donde lo preferible es el uso de la norma-2.

Métodos iterativos clásicos

Para el método de punto fijo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ dado} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)}) \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

el criterio de parada ahora es dado por:

$$\frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} < tol$$

el cual puede reescribirse como:

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}\| < tol\,\|\mathbf{b}\|$$

donde lo preferible es el uso de la norma-2.

Métodos iterativos clásicos

Finalmente, para la elección de la función:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

que a su vez cumple las condiciones de existencia y unicidad (en varias variables), se considerarán tres métodos muy similares:

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel (dos versiones)
- Método de SOR (dos versiones)

Métodos iterativos clásicos

Finalmente, para la elección de la función:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

que a su vez cumple las condiciones de existencia y unicidad (en varias variables), se considerarán tres métodos muy similares:

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel (dos versiones)
- Método de SOR (dos versiones)

Métodos iterativos clásicos

Finalmente, para la elección de la función:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

que a su vez cumple las condiciones de existencia y unicidad (en varias variables), se considerarán tres métodos muy similares:

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel (dos versiones)
- Método de SOR (dos versiones)

Métodos iterativos clásicos

Finalmente, para la elección de la función:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

que a su vez cumple las condiciones de existencia y unicidad (en varias variables), se considerarán tres métodos muy similares:

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel (dos versiones)
- Método de SOR (dos versiones)

Organización de la presentación

Introducción

Para introducir el método o iteración de Jacobi, considere el caso particular en que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Es decir, dado el sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$$

La idea es dejar del lado izquierdo una matriz que sea "fácil" de invertir. Por ejemplo, una matriz diagonal.

Para introducir el método o iteración de Jacobi, considere el caso particular en que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Es decir, dado el sistema lineal:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \right.$$

La idea es dejar del lado izquierdo una matriz que sea "fácil" de invertir. Por ejemplo, una matriz diagonal.

Introducción

Para introducir el método o iteración de Jacobi, considere el caso particular en que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Es decir, dado el sistema lineal:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \right.$$

La idea es dejar del lado izquierdo una matriz que sea “fácil” de invertir. Por ejemplo, una matriz diagonal.

Introducción

Para introducir el método o iteración de Jacobi, considere el caso particular en que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Es decir, dado el sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$$

La idea es dejar del lado izquierdo una matriz que sea "fácil" de invertir. Por ejemplo, una matriz diagonal.

Introducción

Así, nótese que:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = & b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \\ a_{22}x_2 & = & b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \\ a_{33}x_3 & = & b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \end{cases}$$

donde, cuando $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ y $a_{33} \neq 0$, se tiene que:

$$\underbrace{\begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases}}_{\mathbf{x}} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) \\ \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right) \\ \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right) \end{matrix}}_{\varphi(\mathbf{x})}$$

Introducción

Así, nótese que:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = & b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \\ a_{22}x_2 & = & b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \\ a_{33}x_3 & = & b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \end{cases}$$

donde, cuando $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ y $a_{33} \neq 0$, se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \underbrace{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}}_{\mathbf{x}} & \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) \\ \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right) \\ \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right) \end{matrix}}_{\varphi(\mathbf{x})} \end{array} \right.$$

Así, nótese que:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = & b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \\ a_{22}x_2 & = & b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \\ a_{33}x_3 & = & b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \end{cases}$$

donde, cuando $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ y $a_{33} \neq 0$, se tiene que:

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}}_{\mathbf{x}} & \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) \\ \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right) \\ \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right) \end{matrix}}_{\varphi(\mathbf{x})} \end{cases}$$

Introducción

Por lo tanto, se puede describir la iteración de punto fijo:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

Método de Jacobi

De acuerdo con lo anterior, en general se obtiene la iteración:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \text{ dado} \\ \text{Para } k = 0, 1, 2, \ldots, \text{ hasta converger, hacer:} \\ \qquad x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right\}, \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

conocida como la **iteración de Jacobi**.

Ejemplo

Aproxime la solución del sistema lineal:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 12 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 14 \end{cases}$$

Utilice una tolerancia de 0.02 con la norma infinito, así como la aproximación inicial $(1, 1, 1)^{\mathtt{t}}$. Más aún, usando la solución $(4, -2, 2)^{\mathtt{t}}$, halle el error relativo de su aproximación final.

Solución

Despejando la diagonal en el sistema lineal, se tiene que:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 12 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 14 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(12 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(-8 + x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(14 - 2x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)}) \end{cases}$$

Solución

Despejando la diagonal en el sistema lineal, se tiene que:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x_1 + x_2 - x_3 & = & 12 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 & = & -8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & 14 \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \frac{1}{4}(12 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} & = & \frac{1}{3}(-8 + x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)}) \end{array}\right.$$

Solución

Ahora, utilizando $\mathbf{x}^{(0)} := (1,1,1)^{\mathtt{t}}$, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 0}}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} & = & \frac{1}{4}(12 - 1 + 1) & = & 3 \\ x_2^{(1)} & = & \frac{1}{3}(-8 + 1 - 1) & = & -\frac{8}{3} \\ x_3^{(1)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) & = & 2 \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{8}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución

Ahora, utilizando $\mathbf{x}^{(0)} := (1, 1, 1)^{\mathtt{t}}$, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 0}}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}(12 - 1 + 1) &= 3 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{3}(-8 + 1 - 1) &= -\frac{8}{3} \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) &= 2 \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{8}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución

Error: Nótese que $tol\,\|\mathbf{b}\|_\infty = 0.02 \cdot 14 = 0.28$, y luego:

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{8}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&= \frac{14}{3} \\
&\approx 4.6667 \not< 0.28
\end{aligned}$$

(Se sigue)

Solución

Error: Nótese que $tol\,\|\mathbf{b}\|_\infty = 0.02 \cdot 14 = 0.28$, y luego:

$$\begin{aligned}\left\|\begin{pmatrix}12\\-8\\14\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\-1 & 3 & 1\\2 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-\frac{8}{3}\\2\end{pmatrix}\right\|_\infty &= \left\|\begin{pmatrix}\frac{14}{3}\\1\\\frac{10}{3}\end{pmatrix}\right\|_\infty\\ &= \frac{14}{3}\\ &\approx 4.6667 \not< 0.28\\ &\quad\text{(Se sigue)}\end{aligned}$$

Solución

Error: Nótese que $tol\,\|\mathbf{b}\|_\infty = 0.02 \cdot 14 = 0.28$, y luego:

$$
\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{8}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&= \frac{14}{3} \\
&\approx 4.6667 \not< 0.28
\end{aligned}
$$

(Se sigue)

Solución

Error: Nótese que $tol\,\|\mathbf{b}\|_\infty = 0.02 \cdot 14 = 0.28$, y luego:

$$\begin{aligned}
\left\|\begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{8}{3} \\ 2 \end{pmatrix}\right\|_\infty &= \left\|\begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}\right\|_\infty \\
&= \frac{14}{3} \\
&\approx 4.6667 \not< 0.28
\end{aligned}$$

(Se sigue)

Solución

Error: Nótese que $tol \, \|\mathbf{b}\|_\infty = 0.02 \cdot 14 = 0.28$, y luego:

$$
\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{8}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&= \frac{14}{3} \\
&\approx 4.6667 \not< 0.28 \\
& \quad \text{(Se sigue)}
\end{aligned}
$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 1}$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} & = & \frac{1}{4}(12 - \left(-\frac{8}{3}\right) + 2) & = & \frac{25}{6} \\ x_2^{(2)} & = & \frac{1}{3}(-8 + 3 - 2) & = & -\frac{7}{3} \\ x_3^{(2)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)) & = & \frac{8}{3} \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{25}{6} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 1}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1^{(2)} & = & \frac{1}{4}(12 - \left(-\frac{8}{3}\right) + 2) \;=\; \frac{25}{6} \\ x_2^{(2)} & = & \frac{1}{3}(-8 + 3 - 2) \;=\; -\frac{7}{3} \\ x_3^{(2)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)) \;=\; \frac{8}{3} \end{array}\right.$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{25}{6} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Solución

Error:

$$
\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{25}{6} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \right\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&= 3 \not< 0.28 \\
&\quad \text{(Se sigue)}
\end{aligned}
$$

Solución

Error:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{25}{6} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 3 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

Error:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{25}{6} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 3 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

Error:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{25}{6} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 3 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 2}}$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{4}\left(12 - \left(-\frac{7}{3}\right) + \frac{8}{3}\right) = \frac{17}{4} \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{3}\left(-8 + \frac{25}{6} - \frac{8}{3}\right) = -\frac{13}{6} \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{5}\left(14 - 2\cdot\left(\frac{25}{6}\right) - 2\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)\right) = \frac{31}{15} \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} \\ -\frac{13}{6} \\ \frac{31}{15} \end{pmatrix}$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 2}$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} & = & \frac{1}{4}(12 - (-\frac{7}{3}) + \frac{8}{3}) & = & \frac{17}{4} \\ x_2^{(3)} & = & \frac{1}{3}(-8 + \frac{25}{6} - \frac{8}{3}) & = & -\frac{13}{6} \\ x_3^{(3)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot (\frac{25}{6}) - 2 \cdot (-\frac{7}{3})) & = & \frac{31}{15} \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} \\ -\frac{13}{6} \\ \frac{31}{15} \end{pmatrix}$$

Solución

Error:

$$
\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17}{4} \\ -\frac{13}{6} \\ \frac{31}{15} \end{pmatrix} \right\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} -\frac{23}{30} \\ \frac{41}{60} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&= \frac{23}{30} \\
&\approx 0.7667 \not< 0.28 \\
&\text{(Se sigue)}
\end{aligned}
$$

Solución

Error:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17}{4} \\ -\frac{13}{6} \\ \frac{31}{15} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{23}{30} \\ \frac{41}{60} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \frac{23}{30}$$

$$\approx 0.7667 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

Error:

$$\left\|\begin{pmatrix}12\\-8\\14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&1&-1\\-1&3&1\\2&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{17}{4}\\-\frac{13}{6}\\\frac{31}{15}\end{pmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix}-\frac{23}{30}\\\frac{41}{60}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\|_\infty$$

$$= \frac{23}{30}$$

$$\approx 0.7667 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

Error:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17}{4} \\ -\frac{13}{6} \\ \frac{31}{15} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{23}{30} \\ \frac{41}{60} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \frac{23}{30}$$

$$\approx 0.7667 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

<u>Error</u>:

$$\begin{aligned}\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17}{4} \\ -\frac{13}{6} \\ \frac{31}{15} \end{pmatrix} \right\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} -\frac{23}{30} \\ \frac{41}{60} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &= \frac{23}{30} \\ &\approx 0.7667 \not< 0.28 \\ & \text{(Se sigue)} \end{aligned}$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 3}}$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} &= \frac{1}{4}\left(12 - \left(-\frac{13}{6}\right) + \frac{31}{15}\right) &= \frac{487}{120} \\ x_2^{(4)} &= \frac{1}{3}\left(-8 + \frac{17}{4} - \frac{31}{15}\right) &= -\frac{349}{180} \\ x_3^{(4)} &= \frac{1}{5}\left(14 - 2 \cdot \left(\frac{17}{4}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{13}{6}\right)\right) &= \frac{59}{30} \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} \frac{487}{120} \\ -\frac{349}{180} \\ \frac{59}{30} \end{pmatrix}$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k=3}}$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} &=& \frac{1}{4}(12-(-\frac{13}{6})+\frac{31}{15}) &=& \frac{487}{120} \\ x_2^{(4)} &=& \frac{1}{3}(-8+\frac{17}{4}-\frac{31}{15}) &=& -\frac{349}{180} \\ x_3^{(4)} &=& \frac{1}{5}(14-2\cdot(\frac{17}{4})-2\cdot(-\frac{13}{6})) &=& \frac{59}{30} \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} \frac{487}{120} \\ -\frac{349}{180} \\ \frac{59}{30} \end{pmatrix}$$

Solución

<u>Error</u>:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{487}{120} \\ -\frac{349}{180} \\ \frac{59}{30} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{59}{180} \\ -\frac{11}{120} \\ -\frac{13}{180} \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \frac{59}{180}$$

$$\approx 0.3278 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

Error:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{487}{120} \\ -\frac{349}{180} \\ \frac{59}{30} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{59}{180} \\ -\frac{11}{120} \\ -\frac{13}{180} \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \frac{59}{180}$$

$$\approx 0.3278 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

Error:

$$
\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{487}{120} \\ -\frac{349}{180} \\ \frac{59}{30} \end{pmatrix} \right\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} -\frac{59}{180} \\ -\frac{11}{120} \\ -\frac{13}{180} \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&= \frac{59}{180} \\
&\approx 0.3278 \not< 0.28
\end{aligned}
$$

(Se sigue)

Solución

Error:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{487}{120} \\ -\frac{349}{180} \\ \frac{59}{30} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{59}{180} \\ -\frac{11}{120} \\ -\frac{13}{180} \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \frac{59}{180}$$

$$\approx 0.3278 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

Error:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{487}{120} \\ -\frac{349}{180} \\ \frac{59}{30} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{59}{180} \\ -\frac{11}{120} \\ -\frac{13}{180} \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \frac{59}{180}$$

$$\approx 0.3278 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 4}$

$$\begin{cases} x_1^{(5)} = \frac{1}{4}(12 - (-\frac{349}{180}) + \frac{59}{30}) = \frac{2863}{720} \\ x_2^{(5)} = \frac{1}{3}(-8 + \frac{487}{120} - \frac{59}{30}) = -\frac{709}{360} \\ x_3^{(5)} = \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot (\frac{487}{120}) - 2 \cdot (-\frac{349}{180})) = \frac{1757}{900} \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} \frac{2863}{720} \\ -\frac{709}{360} \\ \frac{1757}{900} \end{pmatrix}$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 4}}$

$$\begin{cases} x_1^{(5)} & = & \frac{1}{4}(12 - (-\frac{349}{180}) + \frac{59}{30}) & = & \frac{2863}{720} \\ x_2^{(5)} & = & \frac{1}{3}(-8 + \frac{487}{120} - \frac{59}{30}) & = & -\frac{709}{360} \\ x_3^{(5)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot (\frac{487}{120}) - 2 \cdot (-\frac{349}{180})) & = & \frac{1757}{900} \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} \frac{2863}{720} \\ -\frac{709}{360} \\ \frac{1757}{900} \end{pmatrix}$$

Solución

Error:

$$
\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2863}{720} \\ -\frac{709}{360} \\ \frac{1757}{900} \end{pmatrix} \right\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{29}{1800} \\ -\frac{27}{400} \\ \frac{9}{40} \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&= \frac{9}{40} \\
&\approx 0.225 < 0.28 \\
& \text{(Se detiene)}
\end{aligned}
$$

Solución

Error:

$$\left\|\begin{pmatrix}12\\-8\\14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&1&-1\\-1&3&1\\2&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2863}{720}\\-\frac{709}{360}\\\frac{1757}{900}\end{pmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix}\frac{29}{1800}\\-\frac{27}{400}\\\frac{9}{40}\end{pmatrix}\right\|_\infty$$

$$= \frac{9}{40}$$

$$\approx 0.225 < 0.28$$

(Se detiene)

Solución

Error:

$$\begin{aligned}\left\|\begin{pmatrix}12\\-8\\14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&1&-1\\-1&3&1\\2&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2863}{720}\\-\frac{709}{360}\\\frac{1757}{900}\end{pmatrix}\right\|_\infty &= \left\|\begin{pmatrix}\frac{29}{1800}\\-\frac{27}{400}\\\frac{9}{40}\end{pmatrix}\right\|_\infty\\ &= \frac{9}{40}\\ &\approx 0.225 < 0.28\\ &\text{(Se detiene)}\end{aligned}$$

Solución

<u>Error</u>:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2863}{720} \\ -\frac{709}{360} \\ \frac{1757}{900} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \frac{29}{1800} \\ -\frac{27}{400} \\ \frac{9}{40} \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \frac{9}{40}$$

$$\approx 0.225 < 0.28$$

(Se detiene)

Solución

Finalmente, el error relativo viene dado por:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2863}{720} \\ -\frac{709}{360} \\ \frac{1757}{900} \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_\infty} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} \frac{17}{720} \\ -\frac{11}{360} \\ \frac{43}{900} \end{pmatrix} \right\|_\infty}{4}$$

$$= \frac{\frac{43}{900}}{4}$$

$$\approx 0.01194444444$$

Solución

Finalmente, el error relativo viene dado por:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2863}{720} \\ -\frac{709}{360} \\ \frac{1757}{900} \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_\infty} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} \frac{17}{720} \\ -\frac{11}{360} \\ \frac{43}{900} \end{pmatrix} \right\|_\infty}{4}$$

$$= \frac{\frac{43}{900}}{4}$$

$$\approx 0.01194444444$$

Solución

Finalmente, el error relativo viene dado por:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2863}{720} \\ -\frac{709}{360} \\ \frac{1757}{900} \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_\infty} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} \frac{17}{720} \\ -\frac{11}{360} \\ \frac{43}{900} \end{pmatrix} \right\|_\infty}{4}$$

$$= \frac{\frac{43}{900}}{4}$$

$$\approx 0.01194444444$$

Solución

Finalmente, el error relativo viene dado por:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2863}{720} \\ -\frac{709}{360} \\ \frac{1757}{900} \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_\infty} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} \frac{17}{720} \\ -\frac{11}{360} \\ \frac{43}{900} \end{pmatrix} \right\|_\infty}{4}$$

$$= \frac{\frac{43}{900}}{4}$$

$$\approx 0.01194444444$$

Ejercicio

Ejercicio

Aproxime la solución del sistema lineal:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = -6 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Utilice una tolerancia de 0.01 con la norma infinito. Más aún, usando la solución $(-1,0,1)^{\mathsf{t}}$, halle el error relativo de su aproximación final.

Ejercicio

Ejercicio para la casa (II Examen, IC-2018)

Considere el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -21 \\ 39 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (\star)$$

a) Utilice el método de Jacobi, con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -2, 2, -1)^{\mathtt{t}}$, para determinar una aproximación a la solución del sistema $(\star)$. Considere una exactitud de al menos 5×10^{-2} y la norma-∞.

b) Sabiendo que la solución exacta del sistema $(\star)$ corresponde a $(6, -12, 12, -6)^{\mathtt{t}}$, determine el error relativo en la aproximación obtenida en *a*). Utilice la norma-2.

Matriz estrictamente diagonal dominante

Definición

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice **estrictamente diagonal dominante**, si para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumple que:

$$|a_{ii}| \;>\; \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Es decir, si en cada fila el valor absoluto de la entrada en la diagonal, es mayor que la suma de los valores absolutos de las entradas restantes de esa fila.

Observación: Toda matriz estrictamente diagonal dominante es no singular.

Matriz estrictamente diagonal dominante

Definición

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice **estrictamente diagonal dominante**, si para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumple que:

$$|a_{ii}| \; > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Es decir, si en cada fila el valor absoluto de la entrada en la diagonal, es mayor que la suma de los valores absolutos de las entradas restantes de esa fila.

Observación: Toda matriz estrictamente diagonal dominante es no singular.

Ejemplo

Las siguientes matrices son estrictamente diagonal dominante:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Convergencia del método de Jacobi

Teorema

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es estrictamente diagonal dominante, entonces la iteración de Jacobi converge hacia la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Observación: Este teorema no es una equivalencia. Es decir, es posible probar que Jacobi converge, por ejemplo, para la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

la cual no es estrictamente diagonal dominante.

Convergencia del método de Jacobi

Teorema

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es estrictamente diagonal dominante, entonces la iteración de Jacobi converge hacia la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Observación: Este teorema no es una equivalencia. Es decir, es posible probar que Jacobi converge, por ejemplo, para la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

la cual no es estrictamente diagonal dominante.

Ejercicio

Ejercicio para la casa (Ampliación, IIC-2019)

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 1 \\ x_1 + 8x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 & = & 3 \end{cases}$$

a) Compruebe que el método de Jacobi converge para este sistema lineal.

b) Considere una aproximación inicial de $\mathbf{x}^{(0)} = (0.2, 0.3, 0.4)^{\mathtt{t}}$. Aplique el método de Jacobi para aproximar la solución del sistema. Utilice la condición de parada vista en clase, con norma-1, y una tolerancia de 0.003.

Organización de la presentación

Introducción

El método de Gauss-Seidel consiste en una aceleración del método de Jacobi. Para ver en qué consiste esta nueva iteración considere nuevamente el sistema 3×3 genérico:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \right.$$

el cual se reescribe de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) \\ x_2 & = & \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right) \\ x_3 & = & \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right) \end{array} \right.$$

Introducción

El método de Gauss-Seidel consiste en una aceleración del método de Jacobi. Para ver en qué consiste esta nueva iteración considere nuevamente el sistema 3×3 genérico:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{cases}$$

el cual se reescribe de la forma:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right) \\ x_3 &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right) \end{cases}$$

Introducción

El método de Gauss-Seidel consiste en una aceleración del método de Jacobi. Para ver en qué consiste esta nueva iteración considere nuevamente el sistema 3×3 genérico:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{cases}$$

el cual se reescribe de la forma:

$$\begin{cases} x_1 & = & \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) \\ x_2 & = & \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right) \\ x_3 & = & \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right) \end{cases}$$

Introducción

En el método de Jacobi, se suele calcular cada componente de la aproximación en orden:

$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$	$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right)$
$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$	$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}\right)$
$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$	$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)}\right)$

Introducción

En el método de Jacobi, se suele calcular cada componente de la aproximación en orden:

$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$	$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right)$
$(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$	$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}\right)$
$(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$	$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(0)}\right)$

Introducción

En el método de Jacobi, se suele calcular cada componente de la aproximación en orden:

$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$	$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right)$
$(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$	$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}\right)$
$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(0)})$	$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}\right)$

Introducción

Dos variantes conocidas, se diferencian por el orden en que se recorren las variables:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 & \downarrow \\[2em] x_2 & \downarrow \\[2em] x_3 & \downarrow \end{array}\right\} \text{Gauss-Seidel hacia adelante}$$

o bien:

$$\left.\begin{array}{ll} x_3 & \downarrow \\[2em] x_2 & \downarrow \\[2em] x_1 & \downarrow \end{array}\right\} \text{Gauss-Seidel hacia atrás}$$

Introducción

Dos variantes conocidas, se diferencian por el orden en que se recorren las variables:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 & \downarrow \\[1em] x_2 & \downarrow \\[1em] x_3 & \downarrow \end{array}\right\} \text{Gauss-Seidel hacia adelante}$$

o bien:

$$\left.\begin{array}{ll} x_3 & \downarrow \\[1em] x_2 & \downarrow \\[1em] x_1 & \downarrow \end{array}\right\} \text{Gauss-Seidel hacia atrás}$$

Método de Gauss-Seidel

De acuerdo con lo anterior, en general se obtiene la iteración:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \text{ dado} \\ \text{Para } k = 0, 1, 2, \ldots, \text{ hasta converger, hacer:} \\ \qquad x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right\} \\ \qquad\qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

conocida como la **iteración de Gauss-Seidel hacia adelante**.

Método de Gauss-Seidel

De acuerdo con lo anterior, en general se obtiene la iteración:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \text{ dado} \\ \text{Para } k = 0, 1, 2, \dots, \text{ hasta converger, hacer:} \\ \qquad x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k+1)} \right\} \\ \qquad\qquad \forall\, i = n, n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

conocida como la **iteración de Gauss-Seidel hacia atrás**.

Ejemplo

Considere nuevamente el sistema lineal:

$$\begin{cases} 4x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 & = \ \ 12 \\ -x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 & = \ -8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = \ \ 14 \end{cases}$$

Utilice el método de Gauss-Seidel hacia adelante con una tolerancia de al menos 0.02. Use la norma infinito y la aproximación inicial $(1, 1, 1)^{\mathtt{t}}$.

Solución

Para iniciar, se tiene que:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(12 - x_2 + x_3) \\ x_2 = \frac{1}{3}(-8 + x_1 - x_3) \\ x_3 = \frac{1}{5}(14 - 2x_1 - 2x_2) \end{cases}$$

de esta forma, se sigue el método:

Solución

Ahora, utilizando $\mathbf{x}^{(0)} := (1, 1, 1)^{\mathtt{t}}$, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 0}}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} & = & \frac{1}{4}(12 - 1 + 1) & = & 3 \\ x_2^{(1)} & = & \frac{1}{3}(-8 + 3 - 1) & = & -2 \\ x_3^{(1)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)) & = & 2.4 \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2.4 \end{pmatrix}$$

Solución

Ahora, utilizando $\mathbf{x}^{(0)} := (1,1,1)^{\mathtt{t}}$, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k} = \mathbf{0}}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}(12-1+1) &= 3 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{3}(-8+3-1) &= -2 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{5}(14-2\cdot 3-2\cdot(-2)) &= 2.4 \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2.4 \end{pmatrix}$$

Solución

Ahora, utilizando $\mathbf{x}^{(0)} := (1,1,1)^{\mathtt{t}}$, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 0}}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} & = & \frac{1}{4}(12 - 1 + 1) & = & 3 \\ x_2^{(1)} & = & \frac{1}{3}(-8 + {\color{red}3} - 1) & = & -2 \\ x_3^{(1)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot {\color{red}3} - 2 \cdot ({\color{blue}-2})) & = & 2.4 \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2.4 \end{pmatrix}$$

Solución

Ahora, utilizando $\mathbf{x}^{(0)} := (1,1,1)^{\mathtt{t}}$, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 0}}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} & = & \frac{1}{4}(12 - 1 + 1) \;=\; 3 \\ x_2^{(1)} & = & \frac{1}{3}(-8 + 3 - 1) \;=\; -2 \\ x_3^{(1)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)) \;=\; 2.4 \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2.4 \end{pmatrix}$$

Solución

Error: Nótese que $tol\,\|\mathbf{b}\|_\infty = 0.02 \cdot 14 = 0.28$, y luego:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2.4 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 4.4 \\ -1.4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 4.4 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 1}$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} & = & \frac{1}{4}(12-(-2)+2.4) \;=\; 4.1 \\ x_2^{(2)} & = & \frac{1}{3}(-8+4.1-2.4) \;=\; -2.1 \\ x_3^{(2)} & = & \frac{1}{5}(14-2\cdot 4.1-2\cdot(-2.1)) \;=\; 2 \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -2.1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 1}$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(12 - (-2) + 2.4) = 4.1 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{3}(-8 + 4.1 - 2.4) = -2.1 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 4.1 - 2 \cdot (-2.1)) = 2 \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -2.1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 1}$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} &=& \frac{1}{4}(12-(-2)+2.4) &=& 4.1 \\ x_2^{(2)} &=& \frac{1}{3}(-8+4.1-2.4) &=& -2.1 \\ x_3^{(2)} &=& \frac{1}{5}(14-2\cdot 4.1-2\cdot(-2.1)) &=& 2 \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -2.1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 1}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1^{(2)} & = & \frac{1}{4}(12-(-2)+2.4) \;=\; 4.1 \\ x_2^{(2)} & = & \frac{1}{3}(-8+{\color{red}4.1}-2.4) \;=\; -2.1 \\ x_3^{(2)} & = & \frac{1}{5}(14-2\cdot{\color{red}4.1}-2\cdot({\color{blue}-2.1})) \;=\; 2 \end{array}\right.$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -2.1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución

Error:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.1 \\ -2.1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0.4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 0.4 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 2}$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} & = & \frac{1}{4}(12 - (-2.1) + 2) & = & 4.025 \\ x_2^{(3)} & = & \frac{1}{3}(-8 + 4.025 - 2) & = & -1.9917 \\ x_3^{(3)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 4.025 - 2 \cdot (-1.9917)) & = & 1.9867 \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4.025 \\ -1.9917 \\ 1.9867 \end{pmatrix}$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 2}}$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} &= \frac{1}{4}(12 - (-2.1) + 2) \;=\; 4.025 \\ x_2^{(3)} &= \frac{1}{3}(-8 + 4.025 - 2) \;=\; -1.9917 \\ x_3^{(3)} &= \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 4.025 - 2 \cdot (-1.9917)) \;=\; 1.9867 \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4.025 \\ -1.9917 \\ 1.9867 \end{pmatrix}$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k=2}}$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} &=& \frac{1}{4}(12-(-2.1)+2) &=& 4.025 \\ x_2^{(3)} &=& \frac{1}{3}(-8+{\color{red}4.025}-2) &=& -1.9917 \\ x_3^{(3)} &=& \frac{1}{5}(14-2\cdot{\color{red}4.025}-2\cdot({\color{blue}-1.9917})) &=& 1.9867 \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4.025 \\ -1.9917 \\ 1.9867 \end{pmatrix}$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k=2}}$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} & = & \frac{1}{4}(12-(-2.1)+2) & = & 4.025 \\ x_2^{(3)} & = & \frac{1}{3}(-8+{\color{red}4.025}-2) & = & -1.9917 \\ x_3^{(3)} & = & \frac{1}{5}(14-2\cdot {\color{red}4.025}-2\cdot({\color{blue}-1.9917})) & = & 1.9867 \end{cases}$$

donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4.025 \\ -1.9917 \\ 1.9867 \end{pmatrix}$$

Solución

Error:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.025 \\ -1.9917 \\ 1.9867 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -0.1216 \\ 0.0134 \\ -0.0001 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 0.1216 < 0.28$$

(Se detiene)

Solución

Finalmente, el error relativo viene dado por:

$$
\begin{aligned}
\frac{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.025 \\ -1.9917 \\ 1.9867 \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_\infty} &= \frac{\left\| \begin{pmatrix} -0.025 \\ -0.0083 \\ 0.0133 \end{pmatrix} \right\|_\infty}{4} \\
&= \frac{0.025}{4} \\
&= 0.00625
\end{aligned}
$$

Convergencia de Gauss-Seidel #1

Teorema

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es estrictamente diagonal dominante, entonces la iteración de Gauss-Seidel converge hacia la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Convergencia de Gauss-Seidel #2

Teorema

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica definida positiva, entonces la iteración de Gauss-Seidel converge hacia la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio

Ejercicio

Aproxime la solución del sistema lineal:

$$\begin{cases} 5x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 & = & -6 \\ \ \ x_1 + 5x_2 + \ \ x_3 & = & 0 \\ -x_1 + \ \ x_2 + 5x_3 & = & 6 \end{cases}$$

Utilice el método de Gauss-Seidel hacia atrás con una tolerancia de 0.01 con la norma infinito. Más aún, usando la solución $(-1, 0, 1)^{\mathtt{t}}$, halle el error relativo de su aproximación final.

Ejercicio

Ejercicio para la casa (II Examen, IC-2018)

Dado $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, considere el siguiente sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3 & = & 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + \alpha x_3 & = & 3 \end{array}\right. \qquad (\star)$$

a) ¿Existe algún valor de α, tal que la matriz del sistema $(\star)$ sea estrictamente diagonal dominante? Justifique su respuesta.

b) Realice dos iteraciones del método de Gauss-Seidel hacia adelante, con $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1,1)^{\mathsf{t}}$, para hallar una aproximación a la solución del sistema $(\star)$.

Organización de la presentación

En el método de Gauss-Seidel, cuando se calcula $x_i^{(k+1)}$, se deja de usar $x_i^{(k)}$ para usar $x_i^{(k+1)}$, debido a que la nueva aproximación se considera mejor por ser más reciente.

¿Pero es realmente la nueva aproximación, mejor que la previa?

Introducción

En el método de Gauss-Seidel, cuando se calcula $x_i^{(k+1)}$, se deja de usar $x_i^{(k)}$ para usar $x_i^{(k+1)}$, debido a que la nueva aproximación se considera mejor por ser más reciente.

¿Pero es realmente la nueva aproximación, mejor que la previa?

Introducción

La verdad es que no es posible garantizar que la nueva aproximación, de una componente de la solución, es mejor que la previa. Esto debido a que el método de Gauss-Seidel mejorar el vector completo y no necesariamente cada una de las entradas de este.

Por tal razón, es natural considerar un promedio ponderado entre la nueva aproximación con la previa. Es decir, dado $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se puede considerar en cada iteración:

$$(1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\, x_i^{(k+1)}$$

Introducción

La verdad es que no es posible garantizar que la nueva aproximación, de una componente de la solución, es mejor que la previa. Esto debido a que el método de Gauss-Seidel mejorar el vector completo y no necesariamente cada una de las entradas de este.

Por tal razón, es natural considerar un promedio ponderado entre la nueva aproximación con la previa. Es decir, dado $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se puede considerar en cada iteración:

$$(1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\, x_i^{(k+1)}$$

Método de SOR

De acuerdo con lo anterior, en general se obtiene la iteración:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x}^{(0)} \text{ y } \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ dados} \\[1em] \text{Para } k = 0, 1, 2, \ldots, \text{ hasta converger, hacer:} \\[1em] \qquad \begin{aligned} {\color{blue}\widehat{x}_i^{(k+1)}} &= \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right\} \\[1em] x_i^{(k+1)} &= (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \omega\, {\color{blue}\widehat{x}_i^{(k+1)}} \end{aligned} \\[1em] \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \end{array}\right.$$

conocida como la **iteración de sobrerelajación hacia adelante**, o bien, la **iteración de SOR hacia adelante**.

Método de SOR

De acuerdo con lo anterior, en general se obtiene la iteración:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \text{ y } \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ dados} \\ \text{Para } k = 0, 1, 2, \dots, \text{ hasta converger, hacer:} \\ \qquad \widehat{x}_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k+1)} \right\} \\ \qquad x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \omega\, \widehat{x}_i^{(k+1)} \\ \qquad\qquad\qquad \forall\, i = n, n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

conocida como la **iteración de sobrerelajación hacia atrás**, o bien, la **iteración de SOR hacia atrás**.

Convergencia del método de SOR

Teorema (Ostrowski-Reich)

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica definida positiva y $0 < \omega < 2$, entonces la iteración de SOR converge hacia la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Observación: En el caso de $\omega = 1$, considerado en el teorema previo, el método de SOR es exactamente el método de Gauss-Seidel.

Convergencia del método de SOR

Teorema (Ostrowski-Reich)

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica definida positiva y $0 < \omega < 2$, entonces la iteración de SOR converge hacia la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Observación: En el caso de $\omega = 1$, considerado en el teorema previo, el método de SOR es exactamente el método de Gauss-Seidel.

Ejemplo

Considere nuevamente el sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 & = & 12 \\ -x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 & = & -8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & 14 \end{array}\right.$$

Utilice el método de SOR hacia adelante con $\omega = 1.2$ y una tolerancia de al menos 0.02. Use la norma infinito y la aproximación inicial $(1, 1, 1)^{\mathtt{t}}$.

Solución

Usando $\mathbf{x}^{(0)} := (1,1,1)^{\mathtt{t}}$ y $\omega = 1.2 \Rightarrow 1-\omega = -0.2$, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k=0}}$

$$
\begin{cases}
\widehat{x}_1^{(1)} & = & \frac{1}{4}(12-1+1) \; = \; 3 \\
x_1^{(1)} & = & (-0.2)\cdot 1 \,+\, (1.2)\cdot 3 \; = \; 3.4 \\
\widehat{x}_2^{(1)} & = & \frac{1}{3}(-8+3.4-1) \; = \; -1.8667 \\
x_2^{(1)} & = & (-0.2)\cdot 1 \,+\, (1.2)\cdot(-1.8667) \; = \; -2.44 \\
\widehat{x}_3^{(1)} & = & \frac{1}{5}(14-2\cdot 3.4-2\cdot(-2.44)) \; = \; 2.416 \\
x_3^{(1)} & = & (-0.2)\cdot 1 \,+\, (1.2)\cdot 2.416 \; = \; 2.6992
\end{cases}
$$

Solución

Usando $\mathbf{x}^{(0)} := (1,1,1)^{\mathtt{t}}$ y $\omega = 1.2 \Rightarrow 1-\omega = -0.2$, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k=0}}$

$$
\begin{cases}
\widehat{x}_1^{(1)} & = & \frac{1}{4}(12-1+1) \;=\; 3 \\
x_1^{(1)} & = & (-0.2)\cdot 1 \,+\, (1.2)\cdot 3 \;=\; 3.4 \\
\widehat{x}_2^{(1)} & = & \frac{1}{3}(-8+3.4-1) \;=\; -1.8667 \\
x_2^{(1)} & = & (-0.2)\cdot 1 \,+\, (1.2)\cdot(-1.8667) \;=\; -2.44 \\
\widehat{x}_3^{(1)} & = & \frac{1}{5}(14-2\cdot 3.4-2\cdot(-2.44)) \;=\; 2.416 \\
x_3^{(1)} & = & (-0.2)\cdot 1 \,+\, (1.2)\cdot 2.416 \;=\; 2.6992
\end{cases}
$$

Solución

Usando $\mathbf{x}^{(0)} := (1,1,1)^t$ y $\omega = 1.2 \Rightarrow 1-\omega = -0.2$, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k=0}}$

$$\begin{cases} \widehat{x}_1^{(1)} &=& \frac{1}{4}(12-1+1) \;=\; 3 \\ x_1^{(1)} &=& (-0.2)\cdot 1 \;+\; (1.2)\cdot 3 \;=\; 3.4 \\ \widehat{x}_2^{(1)} &=& \frac{1}{3}(-8+3.4-1) \;=\; -1.8667 \\ x_2^{(1)} &=& (-0.2)\cdot 1 \;+\; (1.2)\cdot(-1.8667) \;=\; -2.44 \\ \widehat{x}_3^{(1)} &=& \frac{1}{5}(14-2\cdot 3.4-2\cdot(-2.44)) \;=\; 2.416 \\ x_3^{(1)} &=& (-0.2)\cdot 1 \;+\; (1.2)\cdot 2.416 \;=\; 2.6992 \end{cases}$$

Solución

Usando $\mathbf{x}^{(0)} := (1,1,1)^t$ y $\omega = 1.2 \Rightarrow 1-\omega = -0.2$, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 0}}$

$$
\begin{cases}
\widehat{x}_1^{(1)} & = & \frac{1}{4}(12-1+1) \; = \; 3 \\
x_1^{(1)} & = & (-0.2)\cdot 1 \; + \; (1.2)\cdot 3 \; = \; 3.4 \\
\widehat{x}_2^{(1)} & = & \frac{1}{3}(-8+3.4-1) \; = \; -1.8667 \\
x_2^{(1)} & = & (-0.2)\cdot 1 \; + \; (1.2)\cdot(-1.8667) \; = \; -2.44 \\
\widehat{x}_3^{(1)} & = & \frac{1}{5}(14-2\cdot 3.4-2\cdot(-2.44)) \; = \; 2.416 \\
x_3^{(1)} & = & (-0.2)\cdot 1 \; + \; (1.2)\cdot 2.416 \; = \; 2.6992
\end{cases}
$$

Solución

Usando $\mathbf{x}^{(0)} := (1,1,1)^{t}$ y $\omega = 1.2 \Rightarrow 1-\omega = -0.2$, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 0}}$

$$
\begin{cases}
\widehat{x}_1^{(1)} & = & \frac{1}{4}(12 - 1 + 1) \;=\; 3 \\
x_1^{(1)} & = & (-0.2)\cdot 1 \;+\; (1.2)\cdot 3 \;=\; 3.4 \\
\widehat{x}_2^{(1)} & = & \frac{1}{3}(-8 + 3.4 - 1) \;=\; -1.8667 \\
x_2^{(1)} & = & (-0.2)\cdot 1 \;+\; (1.2)\cdot(-1.8667) \;=\; -2.44 \\
\widehat{x}_3^{(1)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2\cdot 3.4 - 2\cdot(-2.44)) \;=\; 2.416 \\
x_3^{(1)} & = & (-0.2)\cdot 1 \;+\; (1.2)\cdot 2.416 \;=\; 2.6992
\end{cases}
$$

Solución

Usando $\mathbf{x}^{(0)} := (1,1,1)^{\mathtt{t}}$ y $\omega = 1.2 \Rightarrow 1-\omega = -0.2$, se sigue que:

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 0}}$

$$\begin{cases} \widehat{x}_1^{(1)} &= & \frac{1}{4}(12-1+1) \;=\; 3 \\ x_1^{(1)} &= & (-0.2)\cdot 1 \,+\, (1.2)\cdot 3 \;=\; 3.4 \\ \widehat{x}_2^{(1)} &= & \frac{1}{3}(-8+{\color{red}3.4}-1) \;=\; -1.8667 \\ x_2^{(1)} &= & (-0.2)\cdot 1 \,+\, (1.2)\cdot(-1.8667) \;=\; -2.44 \\ \widehat{x}_3^{(1)} &= & \frac{1}{5}(14-2\cdot{\color{red}3.4}-2\cdot({\color{blue}-2.44})) \;=\; 2.416 \\ x_3^{(1)} &= & (-0.2)\cdot 1 \,+\, (1.2)\cdot 2.416 \;=\; 2.6992 \end{cases}$$

Solución

Se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3.4 \\ -2.44 \\ 2.6992 \end{pmatrix}$$

Error: (Recuerde que $tol\,\|\mathbf{b}\|_\infty = 0.28$)

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.4 \\ -2.44 \\ 2.6992 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 3.5392 \\ 0.0208 \\ -1.416 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 3.5392 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

Se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3.4 \\ -2.44 \\ 2.6992 \end{pmatrix}$$

<u>Error</u>: (Recuerde que $tol\ \|\mathbf{b}\|_\infty = 0.28$)

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.4 \\ -2.44 \\ 2.6992 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 3.5392 \\ 0.0208 \\ -1.416 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 3.5392 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 1}$

$$
\begin{cases}
\widehat{x}_1^{(2)} &= \frac{1}{4}(12 - (-2.44) + 2.6992) = 4.2848 \\
x_1^{(2)} &= (-0.2)\cdot 3.4 + (1.2)\cdot 4.2848 = 4.4618 \\
\widehat{x}_2^{(2)} &= \frac{1}{3}(-8 + 4.4618 - 2.6992) = -2.0791 \\
x_2^{(2)} &= (-0.2)\cdot(-2.44) + (1.2)\cdot(-2.0791) = -2.0069 \\
\widehat{x}_3^{(2)} &= \frac{1}{5}(14 - 2\cdot 4.4618 - 2\cdot(-2.0069)) = 1.818 \\
x_3^{(2)} &= (-0.2)\cdot 2.6992 + (1.2)\cdot 1.818 = 1.6418
\end{cases}
$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 1}$

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
\widehat{x}_1^{(2)} & = & \frac{1}{4}(12 - (-2.44) + 2.6992) \; = \; 4.2848 \\
x_1^{(2)} & = & (-0.2) \cdot 3.4 + (1.2) \cdot 4.2848 \; = \; 4.4618 \\
\widehat{x}_2^{(2)} & = & \frac{1}{3}(-8 + 4.4618 - 2.6992) \; = \; -2.0791 \\
x_2^{(2)} & = & (-0.2) \cdot (-2.44) + (1.2) \cdot (-2.0791) \; = \; -2.0069 \\
\widehat{x}_3^{(2)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 4.4618 - 2 \cdot (-2.0069)) \; = \; 1.818 \\
x_3^{(2)} & = & (-0.2) \cdot 2.6992 + (1.2) \cdot 1.818 \; = \; 1.6418
\end{array}
\right.
$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 1}$

$$\begin{cases} \widehat{x}_1^{(2)} & = & \frac{1}{4}(12 - (-2.44) + 2.6992) \ = \ 4.2848 \\ x_1^{(2)} & = & (-0.2)\cdot 3.4 \ + \ (1.2)\cdot 4.2848 \ = \ 4.4618 \\ \widehat{x}_2^{(2)} & = & \frac{1}{3}(-8 + {\color{red}4.4618} - 2.6992) \ = \ -2.0791 \\ x_2^{(2)} & = & (-0.2)\cdot(-2.44) \ + \ (1.2)\cdot(-2.0791) \ = \ -2.0069 \\ \widehat{x}_3^{(2)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2\cdot {\color{red}4.4618} - 2\cdot({\color{blue}-2.0069})) \ = \ 1.818 \\ x_3^{(2)} & = & (-0.2)\cdot 2.6992 \ + \ (1.2)\cdot 1.818 \ = \ 1.6418 \end{cases}$$

Solución

Se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4.4618 \\ -2.0069 \\ 1.6418 \end{pmatrix}$$

Error:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.4618 \\ -2.0069 \\ 1.6418 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -2.1985 \\ 0.8407 \\ 0.8812 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 2.1985 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

Se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4.4618 \\ -2.0069 \\ 1.6418 \end{pmatrix}$$

<u>Error</u>:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.4618 \\ -2.0069 \\ 1.6418 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -2.1985 \\ 0.8407 \\ 0.8812 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 2.1985 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 2}$

$$\begin{cases} \widehat{x}_1^{(3)} & = & \frac{1}{4}(12 - (-2.0069) + 1.6418) & = & 3.9122 \\ x_1^{(3)} & = & (-0.2) \cdot 4.4618 + (1.2) \cdot 3.9122 & = & 3.8023 \\ \widehat{x}_2^{(3)} & = & \frac{1}{3}(-8 + 3.8023 - 1.6418) & = & -1.9465 \\ x_2^{(3)} & = & (-0.2) \cdot (-2.0069) + (1.2) \cdot (-1.9465) & = & -1.9344 \\ \widehat{x}_3^{(3)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 3.8023 - 2 \cdot (-1.9344)) & = & 2.0528 \\ x_3^{(3)} & = & (-0.2) \cdot 1.6418 + (1.2) \cdot 2.0528 & = & 2.135 \end{cases}$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 2}$

$$
\begin{cases}
\widehat{x}_1^{(3)} = \frac{1}{4}(12 - (-2.0069) + 1.6418) = 3.9122 \\
x_1^{(3)} = (-0.2) \cdot 4.4618 + (1.2) \cdot 3.9122 = 3.8023 \\
\widehat{x}_2^{(3)} = \frac{1}{3}(-8 + 3.8023 - 1.6418) = -1.9465 \\
x_2^{(3)} = (-0.2) \cdot (-2.0069) + (1.2) \cdot (-1.9465) = -1.9344 \\
\widehat{x}_3^{(3)} = \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 3.8023 - 2 \cdot (-1.9344)) = 2.0528 \\
x_3^{(3)} = (-0.2) \cdot 1.6418 + (1.2) \cdot 2.0528 = 2.135
\end{cases}
$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 2}}$

$$\begin{cases} \widehat{x}_1^{(3)} &= \frac{1}{4}(12 - (-2.0069) + 1.6418) \; = \; 3.9122 \\ x_1^{(3)} &= (-0.2) \cdot 4.4618 \; + \; (1.2) \cdot 3.9122 \; = \; 3.8023 \\ \widehat{x}_2^{(3)} &= \frac{1}{3}(-8 + {\color{red}3.8023} - 1.6418) \; = \; -1.9465 \\ x_2^{(3)} &= (-0.2)\cdot(-2.0069) + (1.2)\cdot(-1.9465) \; = \; -1.9344 \\ \widehat{x}_3^{(3)} &= \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot {\color{red}3.8023} - 2 \cdot ({\color{blue}-1.9344})) \; = \; 2.0528 \\ x_3^{(3)} &= (-0.2) \cdot 1.6418 \; + \; (1.2) \cdot 2.0528 \; = \; 2.135 \end{cases}$$

Solución

Se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3.8023 \\ -1.9344 \\ 2.135 \end{pmatrix}$$

Error:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.8023 \\ -1.9344 \\ 2.135 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.8602 \\ -0.5295 \\ -0.4108 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 0.8602 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

Se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3.8023 \\ -1.9344 \\ 2.135 \end{pmatrix}$$

<u>Error</u>:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.8023 \\ -1.9344 \\ 2.135 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.8602 \\ -0.5295 \\ -0.4108 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 0.8602 \not< 0.28$$

(Se sigue)

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } \boldsymbol{k = 3}}$

$$
\begin{cases}
\widehat{x}_1^{(4)} & = & \frac{1}{4}(12 - (-1.9344) + 2.135) & = & 4.0174 \\
x_1^{(4)} & = & (-0.2) \cdot 3.8023 + (1.2) \cdot 4.0174 & = & 4.0604 \\
\widehat{x}_2^{(4)} & = & \frac{1}{3}(-8 + 4.0604 - 2.135) & = & -2.0249 \\
x_2^{(4)} & = & (-0.2) \cdot (-1.9344) + (1.2) \cdot (-2.0249) & = & -2.043 \\
\widehat{x}_3^{(4)} & = & \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 4.0604 - 2 \cdot (-2.043)) & = & 1.993 \\
x_3^{(4)} & = & (-0.2) \cdot 2.135 + (1.2) \cdot 1.993 & = & 1.9646
\end{cases}
$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 3}$

$$
\begin{cases}
\widehat{x}_1^{(4)} = \frac{1}{4}(12 - (-1.9344) + 2.135) = 4.0174 \\
x_1^{(4)} = (-0.2) \cdot 3.8023 + (1.2) \cdot 4.0174 = 4.0604 \\
\widehat{x}_2^{(4)} = \frac{1}{3}(-8 + 4.0604 - 2.135) = -2.0249 \\
x_2^{(4)} = (-0.2) \cdot (-1.9344) + (1.2) \cdot (-2.0249) = -2.043 \\
\widehat{x}_3^{(4)} = \frac{1}{5}(14 - 2 \cdot 4.0604 - 2 \cdot (-2.043)) = 1.993 \\
x_3^{(4)} = (-0.2) \cdot 2.135 + (1.2) \cdot 1.993 = 1.9646
\end{cases}
$$

Solución

- $\boxed{\textbf{Iteración } k = 3}$

$$\begin{cases}
\widehat{x}_1^{(4)} &= & \frac{1}{4}(12 - (-1.9344) + 2.135) &= & 4.0174 \\
x_1^{(4)} &= & (-0.2)\cdot 3.8023 \;+\; (1.2)\cdot 4.0174 &= & 4.0604 \\
\widehat{x}_2^{(4)} &= & \frac{1}{3}(-8 + {\color{red}4.0604} - 2.135) &= & -2.0249 \\
x_2^{(4)} &= & (-0.2)\cdot(-1.9344) + (1.2)\cdot(-2.0249) &= & -2.043 \\
\widehat{x}_3^{(4)} &= & \frac{1}{5}(14 - 2\cdot {\color{red}4.0604} - 2\cdot({\color{blue}-2.043})) &= & 1.993 \\
x_3^{(4)} &= & (-0.2)\cdot 2.135 \;+\; (1.2)\cdot 1.993 &= & 1.9646
\end{cases}$$

Solución

Se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 4.0604 \\ -2.043 \\ 1.9646 \end{pmatrix}$$

Error:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.0604 \\ -2.043 \\ 1.9646 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -0.234 \\ 0.2248 \\ 0.1422 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 0.234 < 0.28$$

(Se detiene)

Solución

Se obtiene que:

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 4.0604 \\ -2.043 \\ 1.9646 \end{pmatrix}$$

<u>Error</u>:

$$\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.0604 \\ -2.043 \\ 1.9646 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -0.234 \\ 0.2248 \\ 0.1422 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 0.234 < 0.28$$

(Se detiene)

Solución

Finalmente, el error relativo viene dado por:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.0604 \\ -2.043 \\ 1.9646 \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_\infty} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -0.0604 \\ 0.043 \\ 0.0354 \end{pmatrix} \right\|_\infty}{4}$$

$$= \frac{0.0604}{4}$$

$$= 0.0151$$

Observación

Considere el sistema lineal $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, el cual se desea resolver mediante el método de SOR. Para ello, es necesario definir un valor de ω, donde para cierto tipo particular de matrices (*matrices consistentemente ordenadas*), se tiene un valor óptimo de ω definido como:

$$\omega_{\text{opt}} := \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left[\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})\right]^2}},$$

donde $\mathbf{D}$ es la matriz diagonal formada por la entradas de la diagonal de $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}$ es la matriz identidad y $\lambda_{\text{máx}}(\cdot)$ corresponde al mayor valor propio de una matriz.

Ejemplo

Dada la matriz:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

observe que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &:= \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo

Dada la matriz:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

observe que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &:= \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo

Dada la matriz:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

observe que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &:= \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo

Dada la matriz:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

observe que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &:= \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo

Luego, para determinar los valores propios de $\mathbf{B}$, se considera el polinomio característico:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{B}-\lambda\,\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\lambda & 2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2\lambda \\
&= -\lambda(\lambda^2+2) = -\lambda(\lambda-\sqrt{2}i)(\lambda+\sqrt{2}i)
\end{aligned}
$$

de donde se deduce que el espectro de $\mathbf{B}$ viene dado por:

$$\sigma(\mathbf{B}) = \{0, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}.$$

Ejemplo

Luego, para determinar los valores propios de $\mathbf{B}$, se considera el polinomio característico:

$$\begin{aligned} |\mathbf{B} - \lambda\,\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\lambda & 2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2\lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 + 2) \;=\; -\lambda(\lambda - \sqrt{2}i)(\lambda + \sqrt{2}i) \end{aligned}$$

de donde se deduce que el espectro de $\mathbf{B}$ viene dado por:

$$\sigma(\mathbf{B}) \;=\; \left\{0,\, \sqrt{2}i,\, -\sqrt{2}i\right\}.$$

Ejemplo

Así, nótese que $\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{B}) = \sqrt{2}i$, por lo que el valor óptimo para ω, se calcula como sigue:

$$
\begin{aligned}
\omega_{\text{opt}} &= \frac{2}{1+\sqrt{1-(\sqrt{2}i)^2}} = \frac{2}{1+\sqrt{1+2}} \\
&= \frac{2}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1
\end{aligned}
$$

donde se obtiene $\omega_{\text{opt}} = \sqrt{3}-1 \approx 0.7321$.

Ejemplo

Así, nótese que $\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{B}) = \sqrt{2}i$, por lo que el valor óptimo para ω, se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
\omega_{\text{opt}} &= \frac{2}{1+\sqrt{1-(\sqrt{2}i)^2}} = \frac{2}{1+\sqrt{1+2}} \\
&= \frac{2}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1
\end{aligned}$$

donde se obtiene $\omega_{\text{opt}} = \sqrt{3} - 1 \approx 0.7321$.

Ejercicio

Ejercicio para la casa

Usando ω_{opt} previamente calculado, utilice el método de SOR hacia atrás para resolver el sistema lineal:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 & = & 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 & = & 0 \\ -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 & = & 8 \end{cases}$$

con una tolerancia menor a 10^{-2} con la norma-2.