

## 知的 CAI における幾何の証明計画の認識と 学習機能について†

岡 本 敏 雄<sup>††</sup> 松 田 昇<sup>†††</sup>

初等幾何の合同証明の学習世界において、学習者の自由な発想に基づく問題解決過程を、この分野の深い専門知識を利用することにより診断し、学習者が想定していると思われる問題解決計画を認識する方法を明らかにした。システムは、学習者の解法ステップを検証するために、領域専門知識を適用し、汎用の問題解決モジュールにより、学習者の主張を立証する。学習者の解法ステップが誤っている場合には、専門家の解法との類似度に基づいて計画を推論する。また、学習者の認識構造の成長過程をシステムが認識する機能と方法を提案した。その際、類推の手法を適用し、累積的な認識機構に基づく教授を展開する。ここでいう類推の考え方は、与えられたいくつかのオブジェクト間に類似性を見だし、その類似性に基づいて一方のオブジェクトで成立している事実や規則を、もう一方のオブジェクトに適用させることによって、未知なる事実や規則を予測推定する推論方式である。本研究においては、それにより学習者の証明計画から導き出される結論を先読みする。また、どのような課題に対してどのような誤りを犯しているかに関する情報に基づいて、常に以前の証明状態と学習者の証明パターンとの関連から、学習者の認識の成長を考慮して教授を展開する方法が提案される。

### 1. ま え が き

岡本ら<sup>1)</sup>はこれまで幾何学の論証指導における知的 CAI (GEOMEX) を研究開発してきた。それは、個々の学習者の独自の証明計画に基づく証明の記述を認め、専門家の証明プロセスと学習者のそれとを比較することにより、各学習者の誤りを診断・矯正するものであった。

知的個別指導を展開するためには、より多くの情報を内包しうる学習者モデルの実現が必要不可欠である。そして学習者モデルを構築する上で、学習者の誤りを同定するだけでなく、学習者が何を意図しているのか、いかなる手段を用いてその意図を解決しようとしているのかを認識することが望まれる。そこで、GEOMEX に、計画認識機能およびチュータモデルの認識構造の成長機能を組み入れた知的 CAI システム GEOMEX II を考案した。

さて、最近の知的 CAI 研究では、学習者モデルを構築する様々な方法が検討されている。平島ら<sup>2)</sup>は、学習者の誤りを方略自体ではなく方略の適用の誤りとして捉えている。そこでは、学習者のプランニングを同定するために、意図と方略という概念を導入している。また中村ら<sup>3)</sup>は、Matz<sup>4)</sup>の考え方にに基づき、既知

の知識を新しい状況に適用する際の概念変換の誤りに着目したモデルを提案している。さらに、その概念変換は類推により実現できるとしている。

このような動向を踏まえて、本論では、学習者の自由な問題解決過程を、専門家知識を有する問題解決モジュールによりモニタし、学習者の問題解決計画を同定する方法、および学習者の認識構造の変遷をシステム自体が認識する方法について述べる。

### 2. 研究の目的

筆者らは GEOMEX を用いた学習実験を通して、システムの評価を行い、いくつかの問題点を抽出した。そして、それらに基づくシステムの改良を行った。

本論文では、まず、これらの改良について説明する。そして、本研究の主目的である前述の2点について述べることにする。

システムに新たに加えられた機能を、次に示す。

#### ①証明記述機能の拡充

証明を行う上で、中学校2年生程度の証明文の記述を可能にした。例えば、“三角形 ABC は二等辺三角形だから AB と AC は等しい”といったステートメントである。本システムでは、学習者の主張を意味ネットワーク表現に変換することにより、そういったステートメントの入力を可能にした。

#### ②教材構造知識ベースの自動生成機能の付加

システムは、学習者の証明計画を推論する際に、GEOMEX と同じ形式の教材構造知識ベースを参照する。教材構造知識ベースは、個々の課題に依存して

† On Recognition of Student's Plan in Geometry Proof and System's Learning Function for Intelligent CAI by TOSHIO OKAMOTO (Information Science of Education, Faculty of Education, Tokyo Gakugei University) and NOBORU MATSUDA (The Center for Computer Assisted Instruction, Kanazawa Institute of Technology).

†† 東京学芸大学教育学部教育情報科学教室

††† 金沢工業大学情報処理サービスセンタ CAI 室

おり、それを構築する際の専門家（教授者）の負担は大きい。そこで、本システムでは解法エキスパートを利用して教材構造知識ベースを自動生成する機能を付加した。

③証明過程モニタの強化と証明計画認識機能の付加  
学習者の問題解決計画を認識し、それに即した教授を展開する機能が望まれる。本システムは解法エキスパートを利用することにより、学習者の証明ステップを検証するが、その過程を通して学習者の証明計画を同定する機能を実現した。

④チュータモデルの認識構造の成長機能の付加  
知的 CAI の研究が、教授・学習プロセスの中で、より学習者の理解状態を理解させようとする深いレベルでの認識のスキーマへと発展してきている。本システムでは、そのために、累積された学習履歴に類推の手法を適用し、学習者の認識構造の遷移をシステムが認識する機能を組み入れた。

### 3. システムの構成

図 1 にシステムの構成を示す。システムの構成に関しては、岡本<sup>1)</sup>で詳細に説明されている。本章では、

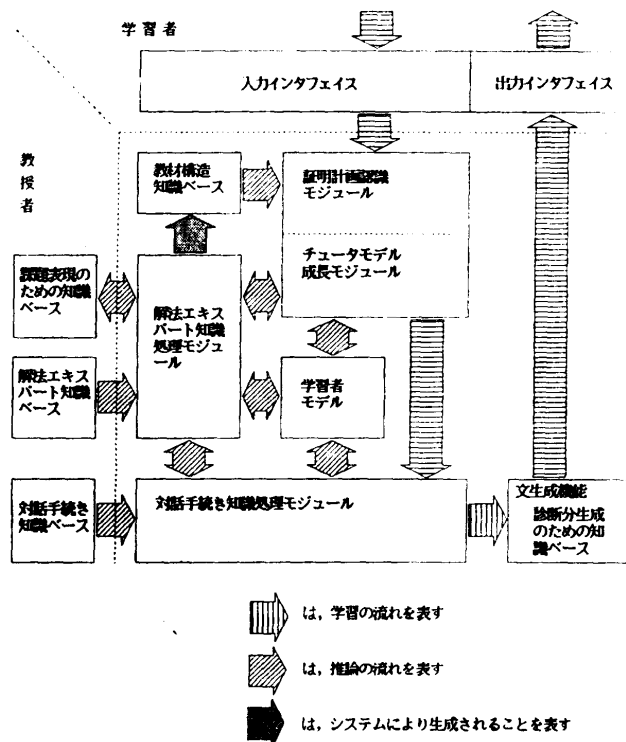


図 1 システムの構成  
Fig. 1 The configuration of the system.

表 1 証明に利用できるキーワード  
Table 1 The available keywords in a user's statement on GEOMEX II.

記号	=, ≡, ∠, △, ⊥
幾何学用語	垂直, 等しい, 合同 二等辺三角形
接続語	と, は, で, より, だから

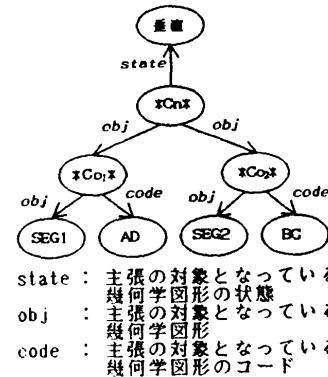


図 2 証明ステートメント  
Fig. 2 The knowledge representation for proof-statement.

入力インタフェース、計画認識モジュール、チュータモデル成長モジュール、およびそれらに関連するモジュールについて詳細を説明する。

#### 3.1 入力インタフェース

知的 CAI を構成する上で、入出力インタフェースの機能は重要である。本システムでは、定められたキーワードを組み合わせることにより証明を記述する方法を採用した。さらに、入力されたステートメントを意味ネットワーク表現に変換する機能をもたせた。

現在利用可能なキーワードを表 1 に示す。図 2 に『AD と BC は垂直である』というステートメントの表現を示す。図の中のリンク名の意味は、幾何学定理を表現する意味ネットワーク中のそれと同じである<sup>1)</sup>。学習者の主張を意味ネットワーク形式に変換したことにより、様々なステートメントが入力可能になり、さらに解法エキスパート知識処理モジュールでその妥当性を診断することが可能になった (3.3 節参照)。

現時点において入力可能な文型は、次の 3 つである。

X は Y である。

X<sub>1</sub> と X<sub>2</sub> は Y である



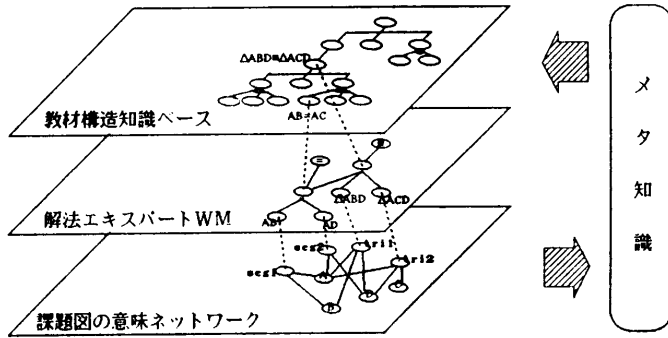


図 4 教材構造知識ベースの構造

Fig. 4 The structure of the knowledge base for geometry subject.

うすることで、証明計画の同定能力が強化されている。実際には、すべての冗長な証明を生成・認識することは困難である。そこで現時点では、解法エキスパートが再帰的に生成する副目標の数を 10 以内と定め、それ以上の副目標を生成しなければならない課題は扱っていない。

このようにして生成された教材構造知識ベースの各ノードは、解法エキスパートの生成した副目標である。すなわちそれらは、図 2 に示したように、課題図を表現する知識ベース中のアトム知識（線分、角等の幾何学図形を表現する最小の知識）<sup>1)</sup> 間の関係を表している。そしてそれは、解法エキスパート知識処理モジュールのワーキングメモリに保存されている。図 4 に課題図の意味ネットワーク、解法エキスパートのワーキングメモリ、教材構造知識ベースの関係を示す。

教材構造知識ベースの各ノードを、課題図を表現している意味ネットワークとリンクさせることにより、線分、角等のもつ付加情報を教材構造知識ベースに組み込む必要がなくなった。線分、角等のもつ付加情報とは、例えば『 $\angle AED$  は平角である』といった事柄を指す。上の例の場合、システムは平角に関する解法エキスパート知識を適用し、課題図を表現している意味ネットワークを探索することにより  $\angle AED$  が平角であることを認識する。

### 3.3 証明計画の認識

本節では、システムが学習者の証明計画を認識する方法について説明する。その際、論理的には、

- ① 学習者の証明プロセスが教材構造知識ベース内の正しいそれと一致する。
- ② 学習者の主張は正しいが、教材構造知識ベース内に該当する証明プロセスがない。

③ 学習者が誤った主張をしている、といった状況が考えられる。①は学習者の証明が正しいことを意味する。②は学習者は正しい知識を知っているが適用の仕方が誤っていることを意味する。③は誤った知識を適用していることを意味する。

②は、システムの教材構造知識ベース生成能力に依存する問題である。すなわち、教材構造知識ベースが不完全な場合、学習者の主張が正しいにもかかわらず、システムがそれを認識できないことになる。現時点では、前述したように対象世界の限定化により、その

ような状況を防いでいる。

計画認識モジュールは、教材構造知識ベースを参照し、解法エキスパートを利用することにより、学習者の証明計画に対する仮説を立てる。以下、順を追って本モジュールの動きを説明する。

#### 3.3.1 教材構造知識ベースによる証明計画の認識

①の状況では、学習者の証明プロセスを教材構造知識ベースにオーバーレイすることで、学習者の想定していると思われる証明過程を認識できる。

その際、システムは、

『 $P_1, \dots, P_n$  より  $G$  である』

という形のステートメントを基に、学習者の証明計画を推測する。この場合、各  $P_i (i=1, \dots, n)$  は、『 $AB=AC$ 』など証明を記述する最小限度のステートメントであり、 $P_1, \dots, P_n$  はそれらの連言である。以後、各  $P_i$  を前提、 $G$  を中間仮説と呼ぶ。

さて、①の状況では、学習者の主張する前提と一致する AND 節をもつ部分木が、教材構造知識ベース内に 1 つだけ存在する。部分木とは、1 つの AND 節およびその親ノードを指す。図 5 に部分木の例を示す。

学習者の主張する前提と一致する AND 節をもつ部分木が見つかった場合、その AND 節から親ノードへ至る証明プロセスと同じ方略を、学習者も想定していると考えられる。

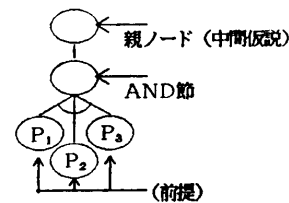


図 5 部分木

Fig. 5 The partial tree for geometry proof.

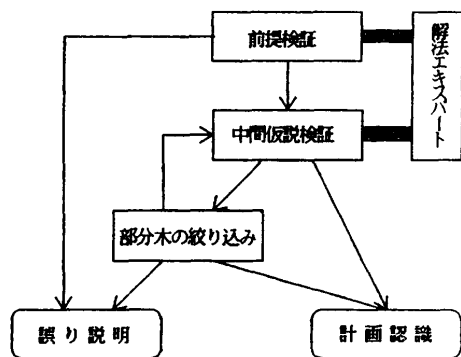


図 6 計画認識モジュールの構成

Fig. 6 The configuration of the plan recognizer.

学習者の主張する前提と一致する AND 節が、教材構造知識ベースに存在しない場合には、まず各前提の妥当性を検証し、次にそれらの前提から中間仮説が導き出されるかどうかを検証する。図 6 に、この場合の計画認識モジュールの推論の流れを示す。

### 3.3.2 前提の検証

前述した方法で学習者の証明計画を同定できない場合、システムはまず、各前提が正しいか否かを検証する。いずれかの前提が誤りを含む場合には、それが成立しない理由を提示する。

前提の検証は、解法エキスパートを利用して行う。すなわち、当該の課題の結論を学習者の主張している前提に置き換えて、解法エキスパートに解かせる。前提の検証は、当該の課題の状況において、学習者の主張している前提が成立するか否かを調べるだけで、それらが最終的な証明に有意か否かは評価しない。

### 3.3.3 中間仮説の検証

各前提が成立する場合には、次にそれらを根拠にして中間仮説  $G_i$  が導けるか否かを検証する。

そのために、システムはまず、学習者の主張している前提および中間仮説をそれぞれ仮定、結論とするように課題を一時的に作り替える。そして、その課題を解法エキスパートに証明させる。すなわち、課題の制約条件および、その時点における学習者の証明履歴等の条件を排除し、学習者の主張する前提から中間仮説に至る証明プロセスを探索する。

中間仮説の検証は、解法エキスパートの証明プロセスに  $P_i (i=1, \dots, n)$  をすべて含むような AND 節がある場合に成功する。もしそれがない場合には、別解を探索し、同様の試みを行う。別解が生成できない場合には、中間仮説の検証は失敗する。

もし、 $P_1, \dots, P_n$  から  $G_i$  が導けるのであれば、図 7

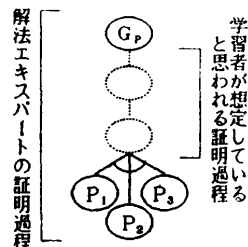


図 7 証明過程の一致による認識

Fig. 7 The recognition method of matching the relation between system's proving process and student's planning process.

学習者の主張した前提

$AB=AC$

$EB=EC$

$AE=AE$

学習者の主張した中間仮説

$\angle ABE = \angle ACE$

GEOMEX による証明

$\triangle ABE$  と  $\triangle ACE$  について

仮定により  $AB=AC$

仮定により  $EB=EC$

共通だから  $AE=AE$

したがって

三辺相等

したがって

$\triangle ABE \cong \triangle ACE$  合同条件

したがって

$\angle ABE = \angle ACE$  合同だから

図 8 中間仮説検証の例

Fig. 8 The example of verification on subgoal.

に示すように、解法エキスパートの証明プロセスが学習者の想定している証明計画と一致する可能性がある(前述の②に該当する)。図 8 に中間仮説の検証の出力例を示す。図 8 でシステムは、学習者が三角形の合同を利用して 2 つの角が等しいことの証明を行っているとして仮定する。

### 3.3.4 教材構造知識ベースを用いた部分木の絞り込み

前提はすべて正しいが、それらから中間仮説が導き出せない場合(前述の③に該当する)、システムは教材構造知識ベース内の部分木に着目することにより、証明計画の同定を試みる。すなわち、システムは、学習者の主張している前提を最も多く含む部分木の親ノードを、学習者が暗黙に想定している証明計画における中間仮説  $G_{p'}$  であると仮定する。

図 9 は『 $P_1, P_2, P_3$  より  $G_p$  である』と答えた場合の例である。図において、 $G_{p'}$  が親ノードである部分木には  $P_1, P_2$  が含まれ、 $G_{p''}$  が親ノードである部分木には  $P_3$  のみが含まれている。したがってシステム

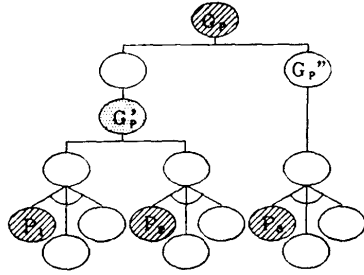


図 9 類似度に基づく部分木の絞り込み

Fig. 9 Identification method of the partial tree based on similarity of the premise-set.

は、学習者がノード  $G_p^l$  を想定していると仮定する。

学習者の主張する前提を最も多く含む部分木が複数ある場合には、それらを学習者に提示し、どのノードを想定しているのか質問し、その返答を  $G_p^l$  とする。

次にシステムは、 $G_p^l$  を前提にして  $G_p^m$  が導けるかどうかを検証する。もし、それが成立すれば、学習者は『 $P_1, \dots, P_3$  より  $G_p^l$  である』という誤った証明計画を想定している可能性がある。 $G_p^l$  を前提にして  $G_p^m$  を導くことができない場合には、学習者の証明計画は認識不可能であり、この時の学習者を混乱状態であると定義する。

### 3.4 チュータの成長モデル

本節で問題とする事柄は、学習者の学習プロセスの進展に対するシステムの認識の成長である。

学習者は、証明プロセスの中で、誤った証明行為を含め学習を進展させていくが、同時にシステム自体も学習者の学習成長に対して、その見方を成長させていかなければならない。その図式は、図 10 のように表される。

図において、 $L_i(t_i)$  は時点  $t_i$  における学習者の理解状態を、 $R_i(t_i)$  はシステムの認識を各々表している。

#### 3.4.1 類推の定式化

上述したモデルを具体的に構成していくために、本研究では類推の概念を導入する。一般に類推とは、与えられたいくつかのオブジェクト間に類似性を見だし、その類似性に基づいて一方のオブジェクトで成立している事実や規則を、もう一方のオブジェクトに適

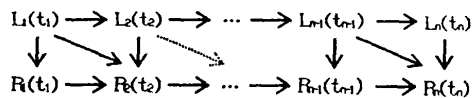


図 10 チュータモデルの成長過程

Fig. 10 The modelling of the tutor's growth process.

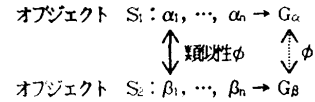


図 11 類推の基本原則

Fig. 11 The fundamental principle of analogical reasoning.

用させることによって、問題解決の手がかりを得たり、またオブジェクト内に潜在している未知の事実や規則を予測推定する推論方式のことである。類推の基本的な定式化は図 11 のように表される。

図において、 $S_i$  (オブジェクト) は学習者の意図を表す。そして  $\{\alpha_j\}$ ,  $\{\beta_j\}$  ( $j=1, \dots, n$ ) は設定された前提を、 $G_\alpha$ ,  $G_\beta$  は表出された目標を各々表している。

すなわち、類推とは、2つの異なる前提  $\{\alpha_j\}$  と  $\{\beta_j\}$  ( $j=1, \dots, n$ ) の間に、類似性関数  $\phi$  が存在するときに、

$$G_\beta = \phi(\{\alpha_j\}, \{\beta_j\}, G_\alpha)$$

なる  $G_\beta$  を予測する推論方法である。本システムにおいては、それは学習者の主張している前提から、導かれる結論を先読みすることを意味する。

さて、類推を上記のように定義する場合、

#### ① 類似性関数 $\phi$ の定義

#### ② 2つのオブジェクト $S_1$ , $S_2$ から $\phi$ を求めるアルゴリズム

#### ③ $\phi$ に基づいて $G_\beta$ を推論する方法

を明らかにする必要がある。筆者らは、有川ら<sup>9)</sup>に従い、 $\phi$  を  $S_1$ ,  $S_2$  に属する変数を含まない項の対応付けと定義する。本システムにおける項とは、定理を表現している意味ネットワークのノードおよびリンクを指す。

#### 3.4.2 類推の方法

本システムにおける類推の対象は、学習者が前提として主張している幾何学図形である。すなわち、幾何学図形を表現している意味ネットワークの構造的な類似性を推論する。具体的には、意味ネットワークのリンクおよびノードを用いて類似性を定義する。

さて、幾何証明における類推では、証明の対象となっている幾何学図形の構造的な類似性に加えて、証明プロセスの類似性を考慮する必要がある。そのために、解法エキスパート知識を用いた類似性を定義する。以下、順にこれらの類似性をシステムが推論する方法について説明する。

幾何学図形の構造的な類似性を、同一のリンクで結合されているノード (アトム知識) の対応付けにより次のように定義する。すなわち、

$$\phi = \{ \langle t^1, t^2 \rangle \mid t^1 \in N(F_1), t^2 \in N(F_2) \\ \vdash \exists r, X, Y, r(X, t^1) \wedge r(Y, t^2) \}.$$

ここで、 $N(F)$  は図形  $F$  を表現している意味ネットワークに属するノードを、 $r(P, Q)$  はノード  $P, Q$  が  $r$  なるリンクで結合されていることをそれぞれ意味している。記号  $\wedge$  は and 関係を表す。 $X, Y$  は任意のノードである。

類似性の定義より、対応付け  $\phi$  によって2つの幾何学図形  $F_1, F_2$  に共通する構造  $S$  が抽出される。それらは、同一のリンクで構成される構造であり、例えば対頂角の関係にある2つの角といった、幾何学的に意味をもつ構造である。また類推エンジンは、常に対対応付けの無矛盾性を検証しているので、無意味な類似性が生成されることはない。

特定の図形の対応付けが、複数生成される場合がある。しかし、それらは幾何学特有の対称性（例えば、 $\triangle ABC$  と  $\triangle XYZ$  における頂点の対応付けは、6通りある）によるものであり、本質的には同一の構造を表現している。したがって、本システムにおいては、最初に検出された対応付けを採用する。

さて、 $\phi$  を求める過程は次のように示される。まず図形  $F_1$  を表現しているネットワーク  $W_1$  の全ノードを変数化し（リンクは変えずに）、新たなネットワーク  $W_0$  を生成する。次に、 $W_0$  と  $W_i$  ( $i=1, 2$ ) のノードを単一化 (unify) し、代入

$$\theta_i = \{ t^1_1/X_1, \dots, t^1_m/X_m \}$$

$$(t^1_j \in N(W_i), X_j \in N(W_0); i=1, 2; j=1, \dots, m)$$

を得る。最後に  $\theta_1$  と  $\theta_2$  から  $\phi \subseteq N(F_1) \times N(F_2)$  なる対応付け

$$\phi = \{ \langle t^1_j, t^2_j \rangle \mid j=1, \dots, m \}$$

を得る。

証明プロセスの類似性は、同一の解法エキスパート規則の適用を受ける前提同士の対応付けにより定義する。図12に『 $\angle\alpha + \angle x = M$  かつ  $\angle\beta + \angle x = M$  ならば  $\angle\alpha = \angle\beta$  である』という規則が2通りの方法で適応されている例題を示す。また、その規則を図13に示す。図12の中で、ang 01等の記号は、意味ネットワークにおけるノード番号である。

証明プロセスの類似性を求めるために、システムは2組の前提 ( $P_1, P_2$  とする) と規則を単一化し、各々の代入 ( $\theta_1, \theta_2$ ) を基に対対応付けを行う。図12を用いた場合の例を次に示す。

$$P_1 = \{ \angle DAF + \angle ADF = 90 \\ \angle CDG + \angle ADF = 90 \}$$

$$P_2 = \{ \angle EDC + \angle DEC = 90 \}$$

$$\angle EHB + \angle HEB = 90$$

$$\theta_1 = \{ \text{ang 01/_obj 1, ang 03/_obj 2, ang 02/_obj x} \\ \angle DAF/_\text{cod 1}, \angle CDG/_\text{cod 2}, \\ \angle ADF/_\text{cod x1}, \angle ADF/_\text{cod x2}, \\ 90/_\text{x} \}$$

$$\angle ADF/_\text{cod x1}, \angle ADF/_\text{cod x2},$$

$$90/_\text{x}$$

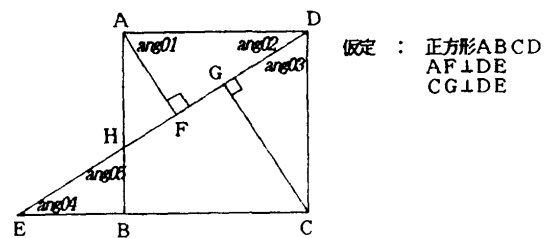
$$\theta_2 = \{ \text{ang 03/_obj 1, ang 05/_obj 2, ang 04/_obj x} \\ \angle EDC/_\text{cod 1}, \angle EHB/_\text{cod 2}, \\ \angle DEC/_\text{cod x1}, \angle HEB/_\text{cod x2}, \\ 90/_\text{x} \}$$

$$\angle EDC/_\text{cod 1}, \angle EHB/_\text{cod 2},$$

$$\angle DEC/_\text{cod x1}, \angle HEB/_\text{cod x2},$$

$$90/_\text{x}$$

$$\phi = \{ \langle \text{ang 01, ang 03} \rangle, \langle \text{ang 03, ang 05} \rangle, \\ \langle \text{ang 02, ang 04} \rangle, \langle \angle DAF, \angle EDC \rangle, \\ \langle \angle EHB, \angle DEC \rangle \}$$



仮定 : 正方形ABCD  
AF ⊥ DE  
CG ⊥ DE

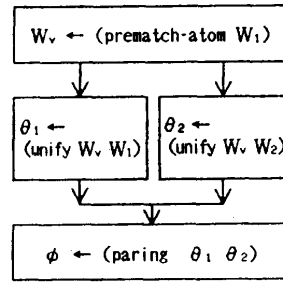
$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \angle DAF + \angle ADF = 90 \\ & \angle CDG + \angle ADF = 90 \\ & \therefore \angle DAF = \angle CDG \\ \textcircled{2} \quad & \angle EDC + \angle DEC = 90 \\ & \angle EHB + \angle HEB = 90 \\ & \therefore \angle EHB = \angle EDC \end{aligned}$$

図12 方略的な類似性を有する証明プロセス  
Fig. 12 A proof process with strategic analogy.

```
if (and (goal-is (concept (state equal)
  (obj ((concept (obj _obj 1)
    (code _cod 1))
    (concept (obj _obj 2)
      (code _cod 2))))))
  (isap _obj 1 'ang)
  (isap _obj 2 'ang)
  (wm-has (concept (measure _x)
    (op add)
    (obj ((concept (obj _obj 1)
      (code _cod 1))
      (concept (obj _obj x)
        (code _cod x1))))))
    (wm-has (concept (measure _x)
      (op add)
      (obj ((concept (obj _obj 2)
        (code _cod 2))
        (concept (obj _obj x)
          (code _cod x2))))))
    (reason 等しい量の差)
    (obj ((concept (obj _obj 1)
      (code _cod 1))
      (concept (obj _obj 2)
        (code _cod 2))))))
  then (push-wm (concept (state equal)
    (reason 等しい量の差)
    (obj ((concept (obj _obj 1)
      (code _cod 1))
      (concept (obj _obj 2)
        (code _cod 2))))))
```

図13 解法エキスパート知識

Fig. 13 The knowledge of expert engine.



```

(defun prematch-atom (atom
                      prop con propl tmp)
  (listp atom)
  (mapcar 'prematch-atom atom))
(setq propl (get-prop atom)
  con (make-new-concept))
(loop
  ((null (setq prop (get atom (car propl))))))
  (((gatom-p prop)
    (put con (car propl) (prematch-atom prop)))
   (put con (car propl) (trans_var prop)))
  (pop propl))
(return con))

(defun paring (par1 par2 par tmp)
  (loop
    ((null par1) (return par))
    (mapc '(lambda (k)
              (push (append (cdar par1) (cdr k)) par))
          (find-par (car par1) par2))
    (pop par1)))

(defun find-par (par1 par2)
  (mapcan '(lambda (k) ((equal (car par1) (car k))
                              (list k))) par2))

```

図 14 類推のための LISP プログラム

Fig. 14 The program for analogical reasoning.

<∠CDG, ∠EHB>, <∠ADF, ∠DEC>, <∠ADF, ∠HEB>, <90, 90>

図 14 に上記の推論手続きを実現する LISP プログラムの構成および主な関数を示す。関数 prematch-atom は、上述した  $W_v$  を生成する。関数 unify は、 $W_v$  と  $W_i$  ( $i=1, 2$ ) を単一化し、代入 ( $\theta_i$ ) をリストにして返す。そして関数 paring は、2つの代入を基に対応付け  $\phi$  を求める。

### 3.4.3 類推に基づく認識構造の成長

図 15 は、類推に基づく認識構造の成長過程を概念

的に示している。図の中で、 $\{P^i_{a_i}\}$  ( $a=1, \dots, n_i$ ) は時点  $t_i$  における学習者の主張する前提を表す（以下、 $P^i_{a_i}$  と表す）。結論  $G_i = (V_i)$  において、その添字  $w$  は誤った結論を、 $c$  は正しい結論を各々表している。 $\vee$  は or 関係を示す。また記号  $\otimes$  は、疑似的な直積関係を示し、ここではそれまでの各々の中間仮説を証明しようとする前提の累積・結合状態を示す。 $\Pi t_i$  は時点  $t_i$  におけるシステムの認識状態を示している。

システムは、学習者の証明プロセスにおける前提間に存在する類似性  $\phi$  を見だし、それにより学習者の根元的な証明概念を表現する。ここで、根元的な証明概念とは、証明の理論を組み立てる基になる公理や定理レベルでの理解状態を指す。すなわち、それは学習者モデルで表現されている理解状態よりも深いレベルでの学習者の理解状態（証明計画まで含めて）を表現するものである。本システムでは、類推の手法を適用し、限定化された証明課題間における証明行為の類似性（根元的な証明概念）を認識することを試みる。

さて、一般的に、上述した前提の類似性  $\phi$  は可能な前提の組合せに対応して複数存在する。それらを  $\phi_k$  ( $k \in N$ : positive integer) と表す。そこで、学習者の主張した前提 ( $P^i_{a_i}$ ) の集合を  $\Gamma$  とし、 $\Gamma$  の要素  $P^i_{a_i}$  に対し、集合

$$\Phi(P^i_{a_i}, \phi_k) = \{P^{i_{xx}} \in \Gamma \mid P^{i_{xx}} \phi_k P^i_{a_i}\}$$

を、 $\phi_k$  による類似前提集合と呼ぶ。ただし、

$$P^{i_{xx}} \phi_k P^{i_{yy}}$$

は、 $P^{i_{xx}}$  と  $P^{i_{yy}}$  の間に類似性  $\phi_k$  が存在することを示す。ここで、

$$P^i_{a_i} \phi_k P^j_{a_j}$$

$$\Leftrightarrow \Phi(P^i_{a_i}, \phi_k) = \Phi(P^j_{a_j}, \phi_k)$$

であるから、以後  $\Phi(P^i_{a_i}, \phi_k)$  の表記において、 $P^i_{a_i}$  を省略し、さらに簡略化して、 $\Phi_k$  と記述する。すなわち、

$$\Phi_k = \{P^i_{a_i}, P^j_{a_j} \in \Gamma \mid P^i_{a_i} \phi_k P^j_{a_j}\}.$$

本システムにおけるチュータモデルの認識構造の成長は、 $\phi_k$  による類似前提集合の遷移として実現される。すなわち、 $\phi_k$  を増殖しつつ、 $\Phi_k$  の構造を変換さ

	学習者の証明	システムの認識	学習者の理解レベル
時	$P^1_{a_1}, \dots, P^1_{n_1} \rightarrow G_1^w$		
$t_1$	$P^1_{a_1}, \dots, P^1_{n_1} \rightarrow G_1^w$	$P^1_{n_1} \otimes P^1_{n_1} \rightarrow \Pi t_1$	not understand
$t_2$	$P^2_{a_1}, \dots, P^2_{n_2} \rightarrow G_2^w$	$P^1_{n_1} \otimes P^2_{n_2} \otimes P^1_{n_1} \rightarrow \Pi t_2$	very not understand
$t_i$	$P^i_{a_1}, \dots, P^i_{n_i} \rightarrow G_i^c$	$P^1_{n_1} \otimes P^2_{n_2} \otimes P^3_{n_3} \otimes P^i_{n_i} \rightarrow \Pi t_i$	understand

図 15 認識構造の成長過程

Fig. 15 The growth process of the system's recognition structure.



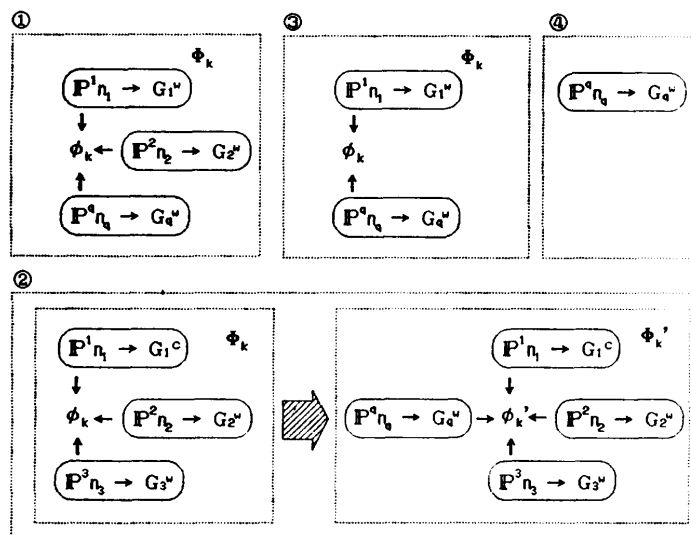


図 16 類似前提集合の成長過程

Fig. 16 The growth process of the similar set of premise by analogy.

せることにより、学習者の認識構造の推移を認識する。すなわち、上述した  $\Pi_{t_i}$  は、 $\phi_k$  の遷移として実現される。

ここで、 $\phi_k$  の構造変換とは、既存の類似前提集合における要素の追加・変更、新たな類似前提集合  $\phi_k'$  の生成等を指し、具体的には、図 16 に示される 4 つの状態が考えられる。すなわち、学習者が時点  $t_i$  において、新たな主張  $S_i$ 、

$S_i: [P_{i,1}, \dots, P_{i,n_i}] \text{ より } G_i \text{ である}$

を提示したときの  $\Pi_{t_i}$  の状態は、次の 4 つが考えられる。

- ① 既存の類似前提集合  $\phi_k$  に、 $P_{i,n_i}$  を追加する。  
この場合、  
 $\forall P_{i,j} \in \phi_k$   
に対して、  
 $P_{i,n_i} \phi_k P_{i,j}$   
である必要がある。
- ② 既存の類似前提集合  $\phi_k$  の  $\phi_k$  自体を  $\phi_k'$  に変え、 $\phi_k'$  に  $P_{i,n_i}$  を追加する。この場合、  
 $\forall P_{i,j}, P_{i,j'} \in \phi_k'$   
に対して、  
 $P_{i,j} \phi_k' P_{i,j'}$  かつ  $P_{i,n_i} \phi_k' P_{i,j'}$   
である必要がある。
- ③ 特定の類似前提集合に属さない単独の  $P_{i,n_i}$  が存在し、かつ  $P_{i,n_i} \phi_k P_{i,n_i}$  なる類似性  $\phi_k$  が存在す

るならば、新たな類似前提集合  $\phi_k$ 、

$$\phi_k = \{P_{i,n_i}, P_{i,n_i}\}$$

を生成する。

- ④ 上記①, ②, ③に該当しない場合、  
 $P_{i,n_i}$  を単独で保存する。

上述した処理を行うためのプログラムを図 17 に示す。modify-anaset は、既存の類似前提集合のリスト (\*analogue\*) に対し、順に、学習者の主張 (ansn) における前提 (pini) を追加できるか (unify-analog)、または新たな類似性が見いだせるか (analogy) を調べる。学習者の主張を含みうる類似前提集合が見いだせなかった場合、単独で学習者の主張を保存する (new-ana)。各類似前提集合  $\phi_k$  は、fi 属性に類似性  $\phi_k$  を、inst 属性に要素のリストをもつ連想リストとして表現されている。

#### 4. 教授戦略

本システムの教授戦略は、対話手続き規則として記述されている。基本的な教授の展開に関する詳細は、岡本ら<sup>1)</sup>に述べられている。本章では、学習者の証明計画に基づいた教授、および類推により形成される類似前提集合に基づいた教授戦略に関して述べる。

##### 4.1 証明計画の認識に基づく教授戦略の決定

計画認識モジュールによって同定された学習者の証明計画に基づいて、適切な教授戦略を決定する機能が

```
(defun modify-anaset (ansn base pini); 類似前提集合更新
  (setq pini (ana-base ansn))
  ((some '(lambda (Fk fi)
    ((setq fi (unify-analog FK pini))
      (add-ana Fk fi ansn))
    ((setq fi (analogy FK pini))
      (ren-ana Fk fi ansn)))
    *analogue*))
  (new-ana pini ansn))
(defun new-ana (pini ansn Fn); 新たな類似前提集合生成
  (setq Fn (prematch-atom pini))
  (push Fn *analogue*))
(defun add-ana (Fk fi ansn) ; 要素の追加
  (put FK 'inst (cons ansn (get Fk 'inst)))
  (put Fk 'fi fi))
```

図 17 類似前提集合変換プログラム

Fig. 17 The program to modify a similar set.

望まれる。

そのためにシステムはまず、システムの同定した証明計画が実際に学習者の想定しているものかどうかを質問する。

システムの推論が正しかった場合には、その計画に支障がない限り、学習者の証明を続けさせる。システムの推論が誤っていた場合には、計画認識が不可能であり、先の定義にしたがって、学習者は混乱状態であるとみなす。

支障のある計画とは、教材構造知識ベースを参照することにより、証明を完成することが不可能と判定される計画を指す。例えば、循環論法に陥っている場合（学習者の主張する前提が、中間仮説より上位のノードに位置していることから認識可能）がそれである。教材構造知識ベースにない証明計画は、一般に完成させることが不可能であるが、それらに対しては実際に誤った主張をするまで、特に助言しない。

支障のある証明計画に対しては、システムは学習者に計画を変更するように指示する。混乱状態にある学習者に対しては、解法エキスパートにより正しい証明を提示する。

図 18 に実際の対話例を示す。図の中で、システムは学習者の誤った（支障のある）証明計画を指摘し、証明のやり直しを助言している。

#### 4.2 類推による教授戦略の決定・助言

類似前提集合を利用することにより、どのような証明に対してどのような誤りを犯しているかを再現する機能が実現できる。具体的には、以前に誤ったときの前提の立て方、結論（中間仮説）の出し方を、現在行っている問題と比較する。前提および中間仮説の類似性から、任意の時点で類似な主張があったとき、助言することができる。その場合、

- ①以前は正しい証明をしているが現在誤っている
- ②以前誤っていた証明を現在同じように誤っている
- ③以前正しい証明を現在も正しく解いている
- ④以前誤っていた証明を現在正しく解いている

といった4つの状況が考えられる。システムは、各々の状況に応じて学習者に助言を与える。

図 12 に示した図形を例にして具体的に説明する。学習者が、既に図 12④ の中間仮説を正しく解いていると仮定する。そして、図 12⑤ の中間仮説において誤った証明をしていると仮定する。

システムは、前述した手続きに基づき、図 13 の規則によって類似性  $\phi$ 、および類似前提集合  $\Phi$  を求め

どうぞ始めて下さい

→ (AE=AE)

続けて下さい

→ (AB=AC)

続けて下さい

→ (EB=EC)

続けて下さい

→ ((1 2 3) より ((ABE=ACE)))

((AE=AE) (AB=AC) (EB=EC)) より ((ABE=ACE)) ですか。

少し考えさせて下さい。

あなたは、次のような考えをしていると思います。

あなたは、((AE=AE) (AB=AC) (EB=EC)) から

((ABE=ACE)) と考え、だから ((ABE=ACE)) と考えたのでしょうか

そうですか？

:\*Y (はい)

よろしい

しかし、その証明は正しくありません

なぜならば、((AB=AC)) は仮定ではありません。

仮定にないことを根拠にするときには、まずそれを証明しなければなりません。

しかし、((AB=AC)) であることは証明できません。

なぜだか分かりますか？

あなたは、((AE=AE) (AB=AC) (EB=EC)) を根拠にして ((ABE=ACE)) と考えました。

しかし、根拠に使われている ((AB=AC)) を証明するためには、((ABE=ACE)) であることを利用するしか方法がありません。

つまり、あなたの証明はうまくいきません。

違う証明を考えましょう。

(注) 1. 記号 ^ は、三角形を表す。

2. 記号 < は、角を表す。

3. 記号 # は、合同を表す。

4. → および :\* のプロンプトに続く文字列が、学習者の入力である。

図 18 計画認識に基づく対話例

Fig. 18 A dialogue based on the function of plan-recognition.

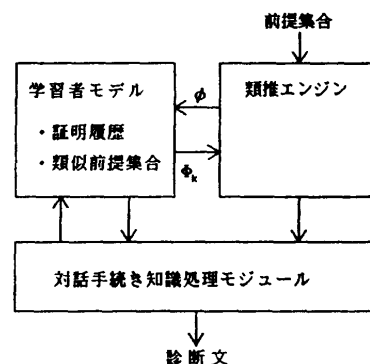


図 19 類推に基づく教授展開

Fig. 19 Block diagram of the dialogue by analogical reasoning.

始めて下さい。

→ (AB=AC)

続けて下さい

→ (EB=EC)

続けて下さい

→ ((ABE)=(ACE))

続けて下さい

→ ((1 2 3) より (^AEC ≡ ^AEB))

(中略)

しかし、その証明は正しくありません

なぜならば、

((AB=AC) ((ABE)=(ACE))) は、仮定ではありません。

しかし、根拠に使われている ((AB=AC) ((ABE)=(ACE))) を証明するためには、(^AEB ≡ ^ACE) であることを利用するしか方法がありません。

つまり、あなたの証明はうまくいきません。

もう一度考え直しましょう

→ (BD=CD)

続けて下さい

→ ((EBD)=(ECD))

続けて下さい

→ ((2 4 5) より (^EDC ≡ ^EDB))

あなたは、次のような考えをしていると思います。

あなたは、((EB=EC) (BD=CD) ((EBD)=(ECD))) から二辺夾角相等と考え、だから (^EBD ≡ ^ECD) と考えたのでしょうか。

そうですか？

:\*N (いいえ)

あなたの考えていることが分かりません

あなたは、以前にも似たような証明をしていますね。

それは、((AB=AC) (EB=EC) ((ABE)=(ACE))) を前提にしていました。

どちらの証明も2つの辺とその間の角に関する事柄を前提にしています。

あなたは、どちらの証明とも誤っています。

あなたは、これらの証明についてまだ良く理解できていないようです。

しっかり覚えましょう。

図 20 類推に基づく対話例

Fig. 20 A dialogue based on the function of analogical reasoning.

る。その結果システムは学習者に、現在考えている中間仮説 (図 12①) に類似の中間仮説 (図 12②) を既に証明していることを示す。そして、対応付け  $\phi$  に基づいて、それらの中間仮説は  $\angle DAF$  と  $\angle EDC$ ,  $\angle CDG$  と  $\angle EHB$ ,  $\angle ADF$  と  $\angle DEC$ , を各々対応させれば、以前と同じ解き方で証明できることを助言する。

図 19 に類推に基づく教授の流れを示す。また図 20 に実際の対話例を示す。図において、システムは学習者が類似した証明プロセス (二辺夾角の合同条件) において誤りを繰り返していることを指摘している。

## 5. システムの評価

本システムの機能を評価するために、10 人の学習者

(中学校 3 年生) に対して、学習実験を行った。実験は、2, 3 人ずつ 4 回に分けて行った。各学習者は、1 人 1 台ずつパーソナルコンピュータを使用して、システムの出す課題を 1 問だけ解いた。課題終了後、各学習者に対して、システムの機能に関する質問を行った。その際特に、計画認識モジュールおよびチュータモデルの成長モジュールの機能評価に関連した質問を中心に行った。

学習実験の結果、計画認識モジュールの機能に対して、学習者が特に強い関心を示していることが認められた。そして、部分木の絞り込みによる証明計画の認識が、特に有効に機能していることが観察された。すなわち、学習者の誤りの多くは、誤った考え方や勘違いによるものであり、解法エキスパート知識だけではそれらを認識するのに十分な情報を与えないことが明らかになった。しかしながら、知識の適用に誤りがある状況では、3.3.3 項で述べた中間仮説の検証が有効に機能していることが認められた。

チュータモデルの成長モジュールに関しても同様に、学習者が強い関心を示していることが認められた。今回学習者に与えた課題は、副目標を解決するために、類似した解法を繰り返し適用する必要があった。システムは類似した主張が行われる度にそれに関連した助言をすることができた。しかし、現時点では、システムの助言として、4.2 節に示した 4 つの状況しか考慮しておらず、システムの助言が表層的な類似性を指摘しているだけに感じられるような場合があり (例えば、合同条件の適用など)、必ずしも学習者の興味を引く内容ではなかった。これは、チュータモデルの状態に即して、何をどの程度助言するかという対話管理の問題であり、今後の課題とされる。

## 6. む す び

学習者の証明計画を認識し、個々の理解状態に即した教授を展開する知的 CAI を構築することができた。

システムは、学習者の証明計画を認識するために、専門知識を適用して、学習者の主張を検証する。すなわち、学習者の主張する前提から、中間仮説に至る証明プロセスを探索する過程において、学習者の証明計画を同定する。そのような証明プロセスが存在しない場合には、解法集合の中から最も学習者の主張に類似している証明プロセスを基に、学習者の証明計画に対する仮説をシステム内部で作成し上げる。

次に、学習者の理解状態の進展を認識するために、類推の手法を用いたチュータモデル構造変換の手法を提案した。すなわち、学習者の証明プロセスにおける類似した主張に着目し、どのような状況においてどのような誤りを犯しているかということに関する認識を、学習の進展と共に再構成する。

これらの機能により、学習者の証明計画を認識し、理解状態に即した助言が可能になったことが、学習実験を通して確認された。しかしながら、現時点においては、対象世界を限定することによりシステム全体が効果的に機能している。今後、より多くの課題を扱えるよう、対象世界を拡張することが課題とされる。

### 参 考 文 献

- 1) 岡本ほか：幾何論証の学習世界における知的 CAI の構成について、情報処理学会論文誌，Vol. 29, No. 3, pp. 311-324 (1988)。
- 2) 平島ほか：プランニングの概念に基づく学生の誤りのモデル化と教育への応用，第 36 回情報処理学会全国大会論文集(Ⅲ)，pp. 2417-2418 (1988)。
- 3) 中村ほか：類推を用いた学生の概念変換による誤りのモデル化，第 36 回情報処理学会全国大会論文集(Ⅲ)，pp. 2423-2424 (1988)。
- 4) Matz, M.: Toward a Process Model for High School Algebra Errors, in Sleeman, D. et al. (eds), *Intelligent Tutoring Systems*, pp. 25-50, Academic Press, London (1982)。

- 5) 有川ほか：類推の理論，大須賀ほか編，知識の獲得と学習，pp. 221-251，オーム社，東京(1987)。

(昭和 63 年 7 月 18 日受付)

(平成 元年 6 月 13 日採録)



岡本 敏雄 (正会員)

1947 年生。1971 年京都教育大学卒業，1975 年東京学芸大学大学院修了(教育心理学専攻)。工学博士(東京工業大学)。現在，東京学芸大学教育情報科学教室助教授。知的 CAI システムの AI モデル研究に従事。(訳書)「人工知能と知的 CAI システム」。CAI 学会理事，日本教育工学会理事，電子情報通信学会教育工学研究専門委員会幹事，同学会人工知能と知識処理研究専門委員会専門委員。人工知能学会，AAAI 学会，日本教育心理学会各会員。



松田 昇 (正会員)

昭和 37 年生。昭和 60 年東京学芸大学教育学部数学教育学科卒業。昭和 63 年同大学院教育学研究科修士課程修了。現在，金沢工業大学工学部助手。主に知的 CAI の研究に従事。電子情報通信学会，CAI 学会，日本教育工学会，日本数学教育学会各会員。