力学・解析力学の基礎 1

Udemy 講師：T Tetsuya

2018/02/11

概要

本書ではハミルトニアンモンテカルロ法で出てくるハミルトニアンについて力学・解析力学の観点から導出を行う。まず初めに力学の基礎から出発し、物理の基礎的な用語、また運動方程式や Newton 力学の枠組みを理解する。次に Newton 力学では扱いにくい中心力が働く場合を考える。極座標への変換が比較的大変である事を経験し、座標変換不変な微分方程式という観点から Lagrange 力学という着想が生まれる。また、位相空間という位置と運動量で物体の運動を記述する観点から Hamilton 力学の枠組みを理解する。まず力学・解析力学の基礎 1 では力学のパートを学習する。本書の立場としては力学・解析力学の全ての項目を解説するのではなく、ハミルトニアンを理解するのに必要な部分以外は省いている。この為、詳細をもっと知りたくなった読者は参考文献に挙げている専門書を紐解いて欲しい。本書を読むうえで必要な数学的なレベルとしては、ベクトル、大学レベルの微分・積分が必要である。また高校で物理を履修していることが望ましいが必須ではない。

目次

1　力学の基礎

このセクションでは物理学で出てくる基礎的な用語の説明と定義を行っていく。次々と新しい用語が出てくるので、戸惑うかもしれないが、物理学を学ぶ上では基本となる言葉なので、しっかりと身に付けてほしい。
さて、これから物体の運動について学習を行っていくが、物体の運動を記述するのに最も便利な記述の方法こそが数学である。数学と聞くと嫌な気持ちになる方もいるかもしれないが、例えば、ある物体の運動を説明する為に数式を使わずに言葉だけで説明しようとすると正確さを伴わず、また却って難しいという事に気付くだろう。また、図を使って表すという事はもちろん誰が見ても直感的であり、分かりやすい。この為、本書も必要に応じて図を使って説明するが、やはり様々な運動を記述するのに全て図を使って表していると、膨大なパターンの図を記憶する必要があるという結論に達する。
したがって、最終的には数式を使って表すのが最も便利であり、過不足なく運動を記述する事が出来るという事実に気付く。Galilei の言葉に”**自然は数学の言語で書かれている**”という言葉があるが、この言葉から数学と物理学とは密接に関係しているという事が感じられるのではないだろうか。それでは早速、力学の基礎から学んでいこう。

1.1　位置・速度・加速度

物体の運動を記述する問題は、任意の時間 t において、物体の位置 $[m]$ を決定する問題に帰着する。そして、物体の運動といった場合には、いわゆる並進運動としての運動だけでなく、物体が有限の大きさを持つ場合には、回転も考える必要がある。ただし、そのような回転を考慮せず、どのように物体が動くのかのみに着目すればよい場面では物体を質量を持った点と見なし、その点の運動を記述すればよい。このような質量を持った大きさのない点の事を**質点**といい、本書で扱う全ての物体の運動はこの質点の運動である。
３次元空間で、この質点の位置を表すには最も単純には (x, y, z) の 3 つの座標が決まればよいという事は納得がいくだろう。この 3 組の情報を合わせて、質点の**位置ベクトル**といい、$\mathbf{r}(t)$ や $\mathbf{x}(t)$ などと表す。

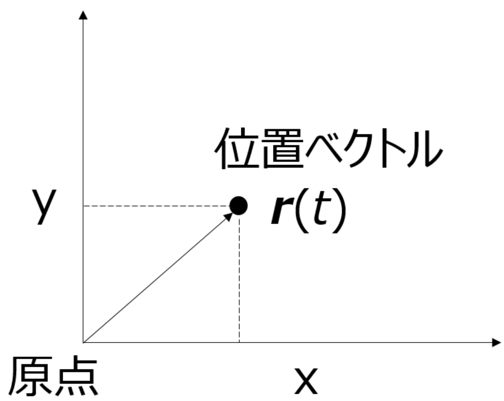

Fig.1.1　2 次元での位置ベクトル

ボールド体で書いた場合には、ベクトルを表していることには注意が必要である。Fig.1.1 には、2 次元空間での位置ベクトルの例を表している。さて、一旦どうやって任意の時間 t での質点の位置を決めるのかという問題は後に置いておいて、仮に任意の時間 t における質点の位置 $\mathbf{r}(t)$ が求まったとしよう。そこで、ある時間 t における位置 $\mathbf{r}(t)$ とそこから微小な時間 Δt が経った時間 $t + \Delta t$ での位置 $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ との差を取ってみる。これは微小時間 Δt の間に進んだ距離であるので、これをかかった時間である Δt で割れば、ある時間 t における速度 $[m/s]$ $\mathbf{v}(t)$ が計算できるという事が分かるだろう。

$$\mathbf{v}(t) \simeq \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{1}$$

ただし、微小時間は人によって感覚が異なるので、最終的にはこの Δt について 0 の極限を取ることで、一意的にある時間 t における速度を定義することが出来る。すなわち、

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

次に、同じ論法である時間 t における質点の速度の時間変化として、加速度 $[m/s^2]\mathbf{a(t)}$ を定義出来る。

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

これらはまさに微分の定義そのものであり、したがって、微分を使って次のように表すことが出来る。

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \tag{4}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \tag{5}$$

また、速度は位置の 1 階微分であるので、加速度 $\mathbf{a}(t)$ は次のように、位置の時間についての 2 階微分で表すことが出来る。

$$\mathbf{a(t)} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \tag{6}$$

このように物理では微分がたくさん出てくることになる。この為、物理ではしばしば微分記号を書くのをめんどくさがり、記法の簡略化の為に、時間についての微分を次のように書く。

$$\mathbf{v(t)} = \dot{\mathbf{r}}(t) \tag{7}$$

$$\mathbf{a(t)} = \ddot{\mathbf{r}}(t) \tag{8}$$

記号の上にドットが 1 つ付くと時間に関する 1 回微分、 2 つ付くと 2 階微分を表す。これを **Newton の記法**という。これで、物体の運動の記述に必要な位置と速度、加速度の概念が定義できた。

1.2　アリストテレス時代の物体の運動

この節から物体の運動がどのようにして決まるのかという先の節で置いておいた問題を考えていく。アリストテレスは驚くべきことに紀元前 4 世紀の時代にこのような物体の運動について考えていた[*1]。アリストテレスは当時、物体には”力”というものが内在していて、それを消費することで、物体は動くと考えていた。すなわち、Fig.1.2 のような具合に、物体に内在している力が失われると物体が止まると考えていた。実際に、我々が普段目にする多くの運動は摩擦が働き、このような運動を見ることが多いため、一見自然なように思える。

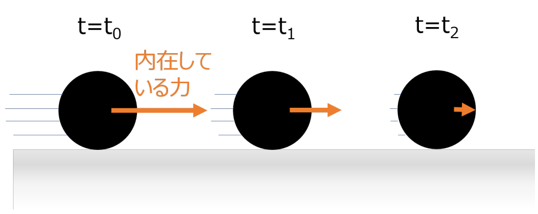

Fig.1.2　アリストテレスの運動論。時間が経つにつれて、内在している力が失われやがて止まる。

しかし、今ではこの考えは間違っていて、物体を止めているのは摩擦力であり、摩擦が働かなければ物体は等速直線運動をするという Newton が提唱する運動の法則がこの世界の物体の運動を記述できる事が広く世に

[*1] このころ、日本はまだ弥生時代である

知られている。ただ、紀元前において既にこのような力のような概念や物体の運動というものが考えられていたという事自体が驚くべき事実である。当時のアリストテレスが生きていた時代がどのような時代だったのかの詳細は分からないが、例え、当時そのような物体の運動のメカニズムを考えるような事が常識でなかったとしても、[*2]、世の中の現象をよく観察して、その現象のメカニズムを捉えようとする姿勢は時代を超えて、我々も見習うべき姿勢ではないだろうか。

1.3　運動の法則

物体の運動の法則を見出したのは Newton である。先に述べた通り、我々が普段見ている運動の多くは止まってしまうにもかかわらず、Newton には物体の運動は力が働かない限り、静止か等速直線運動を続けるという慣性の法則を見出した。まさに、Newton は天才であると言える。物理学者は基本的には実験事実が先にあって、それをどう説明するかと考えるわけであるが、優れた物理学者は頭の中で思考実験を繰り返し、実際のところ世界はこうなっているのではないかというような、この世界に対する自然観や哲学を持っている[*3]。詳細は分からないが、Newton もそのような思考実験の中から、運動の法則を見出したのではないだろうか。さて、Newton は次の運動の 3 法則を発見した。この運動の法則は Newton 力学の枠組みの中では原理であり、他の法則や定理から証明する事はできない。この意味では運動の 3 原理といった方がよいかもしれない。

Newton の運動の 3 法則

1. **運動の第一法則 (慣性の法則)**:力が作用しない限り、物体は静止か等速直線運動を続ける

2. **運動の第二法則 (運動の法則)**:物体にかかる加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$、物体の質量 m, 物体に働く力 $\mathbf{F}$ とすると、物体の運動は運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ に従う

3. **運動の第三法則 (作用・反作用の法則)**:物体 1 から 2 に働く力を $\mathbf{F_{12}}$, 物体 2 から 1 に働く力を $\mathbf{F_{21}}$ としたときに、$\mathbf{F_{12}} = -\mathbf{F_{21}}$

この運動の第二法則である質点の運動方程式を立てて、2 階の微分方程式を解くことで、物体の運動が決まる。驚くべきなのは、運動方程式はある場合にだけ成り立つ方程式ではなく、全ての運動をこのシンプルな方程式により記述できる事である。すなわち、空に投げ上げたボールの動きも記述できるし、地球は太陽に対して公転運動をしているが、その天体の運動もまた同じ運動方程式で記述することが出来る。また原子レベルではこの Newton の運動方程式には必ずしも従わず、Schrödinger 方程式で記述する必要があるが、分子レベルではある程度、Newton の運動方程式で記述できる。そのため、分子動力学シミュレーションはこの Newton の運動方程式をベースにしている。すなわち、この Newton が発見した運動方程式はかなり普遍的な方程式であると言える。

力学では後はこの運動方程式をどうやって解くかを学べばよいわけであるが、2 階の微分方程式であるので、2 回時間について積分すれば、運動方程式を解くことができる。その際に、高校の積分でも不定積分を習ったかと思うが、積分する度に積分定数が 1 つ出てくるので、この運動方程式では 2 つの積分定数が出てくる。これが、運動の初期値問題であり、$t = 0$ の時に、位置と速度の値を決めることで、完全に運動が決定すること

[*2] 当時は哲学者が大勢いただろうからそんなことはないだろうが

[*3] 例えば、有名なところで言えば、Einstein の"神はサイコロを振らない"という言葉であったり、当時、天動説の世の中で Galilei が発したとされる"それでも地球は回る"という言葉はまさに彼らの自然観を表している

になる。

1.4　例題：重力が働く場合

ここでは簡単な例題を通して、運動方程式を実際に解いてみる。Fig.1.3 に示したように、質点を原点から斜め上方向に投げ上げる。その際に、初速度を $\mathbf{v_0}$、投げ上げる方向を x 軸から角度 θ とする。この質点について、運動方程式を立ててみよう。質点に働く力は重力のみであり、重力は鉛直下向きに mg だけかかる。ここで m は物体の質量 [kg], g は定数であり、重力加速度 $(9.8[m/s^2])$ である。したがって、運動方程式を x 方向と y 方向についてそれぞれ立てると、

$$m\ddot{x}(t) = 0 \tag{9}$$
$$m\ddot{y}(t) = -mg \tag{10}$$

となる。まずは x 方向から運動方程式を解いてみると、両辺を m で割り、時間について 1 回積分すると、左辺はドットが一つ取れて、$\dot{x}(t)$ になり、

$$\dot{x}(t) = const. \tag{11}$$

ここで、const. は積分定数である。
すなわち、この方程式が意味するところは、x 方向は一定速度で動くという事を言っている。確かに慣性の法則では力が働かなければ、物体は静止か等速直線運動を続けるので、辻褄が合っている。具体的に、const. の値を決めよう。ここでは、t=0 の時の初速度は x 方向、y 方向についてそれぞれ $v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta$ であるので、

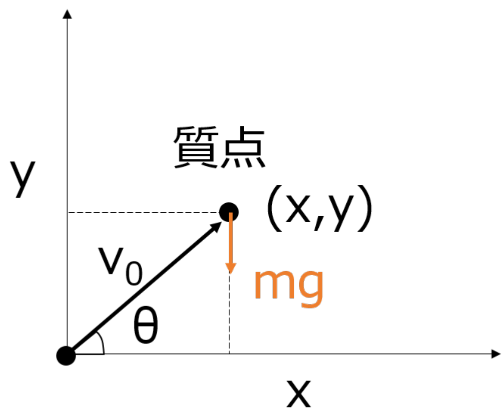

Fig.1.3　質点の斜方投射。原点から初速度 $\mathbf{v_0}$ で角度 θ に向かって投げる。質点には重力が働く

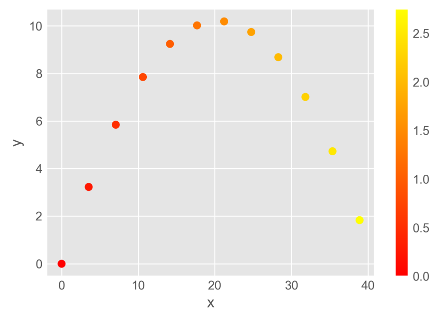

Fig.1.4　$v_0 = 20[m/s], \theta = 45[degree]$ における質点の斜方投射の座標。カラーバーは時間を表している。質点は放物線を描きながら、落下する。

$$const. = v_0 \cos\theta \tag{12}$$

である事が分かる。
したがって、

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos\theta \tag{13}$$

となる。さらに、もう一度時間について積分する事で、座標が求まる。すなわち、

$$x(t) = v_0 t \cos\theta + const. \tag{14}$$

さらに、ここでは $t = 0$ で $x = 0$ なので、

$$const. = 0 \tag{15}$$

である事が分かる。従って、x 方向については完全に運動が決まり、

$$x(t) = v_0 t \cos\theta \tag{16}$$

と求まった。
このように、運動方程式が決まったら、時間について 2 回積分し、初期値を用いれば、運動を完全に記述できる事が分かる。同じようにして、y 方向の運動方程式も積分してみよう。運動方程式は

$$m\ddot{y}(t) = -mg \tag{17}$$

であったので、両辺を m で割り、1 回時間について積分し、

$$\dot{y}(t) = -gt + const. \tag{18}$$

となるが、初期条件の $t = 0$ で $v_y = v_0 \sin\theta$ より

$$const. = v_0 \sin\theta \tag{19}$$

である事が分かる。よって、

$$\dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin\theta \tag{20}$$

となる事が分かる。後はもう一度時間について積分し、

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta + const. \tag{21}$$

ここで、初期条件の $t = 0$ で $y = 0$ より、

$$const. = 0 \tag{22}$$

よって、y 方向についても完全に運動が決定した。さて、得られた解を纏めると

$$x(t) = v_0 t \cos\theta \tag{23}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta \tag{24}$$

である。このように、運動方程式と初期条件だけから質点の運動が完全に記述できる。この解を $v_0 = 20[m/s], \theta = 45[degree]$ でプロットしたものが、Fig. 1.4 である。質点の色の違いは時間の進み具合を示している。このように、重力を受けるため、x=20 付近で y 軸方向の速度が 0 になり、放物線を描きながら、物体が落下している様子が分かる。
結局、Newton 力学によって、物体の運動を記述するには以下のような手続きを踏めばよい。

Newton 力学の手続き

1. 物体の運動方程式を立てる
2. 運動方程式を解く
3. 初期条件から物体の座標が完全に決まる

1.5　運動量

この節では**運動量 p** という概念を導入する事によって、運動方程式に別の解釈を与えよう。運動量は

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{25}$$

で定義される量である。この量の意味は端的に言えば、”止めにくさ”といえる。例えば、同じ速さ v で動いていても、アリが時速 10[km/hr] で動いてるのと、象が時速 10[km/hr] で動いているのとどちらが止めにくいかと言えば、それは象だろう。これはなぜかといえば、質量が象の方が大きいからである。この運動量 $\mathbf{p}$ を導入する事で、運動方程式がどのように変化を受けるかというと、

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = F \tag{26}$$

の左辺の m は定数であるので、まとめることができ

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = F \tag{27}$$

とよりシンプルに書くことが出来る。単に式を簡単にするために導入したのではないかと思われるかもしれないが、運動量は物理において様々な場面で出てくる量であり、物理的には重要な意味を持っていると考えられる。ともかく、運動方程式をこの形式で書き直すと、方程式を”物体の運動量の時間変化量は物体にかかった力と等しい”と解釈することが出来るわけである。同じ方程式でも書き方によって解釈が異なるというのはなかなか面白い点であると言える。このような方程式の意味や物理自体への自然観というものはこの後の、解析力学でも度々考えさせられる事項である。

1.6　仕事・エネルギー

この節では運動方程式を式変形して、運動の別の見方を考えてみる。運動方程式をドットを使わずに陽に書いてみると、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \tag{28}$$

となる。この運動方程式を x について積分してみよう。

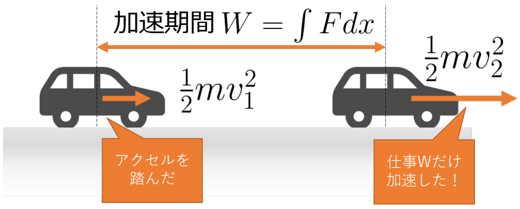

Fig.1.5　運動エネルギーと仕事の関係

$$\int m\frac{d^2x}{dt^2}dx = \int F dx \tag{29}$$

こちらは少し変形すると

$$\int m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}dt = \int F dx \tag{30}$$

とも書けることが分かる。この時、合成関数の微分 $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ を思い出せば、

$$\int \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \int F dx \tag{31}$$

と書ける。したがって、適当な経路で積分したとして、その時の速度を v_1, v_2 などとすると、

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int F dx \tag{32}$$

となる。ここで、右辺は力をその経路に渡って足し算した量であり、これを**仕事**といい、W で表す。すなわち、

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W \tag{33}$$

そして、左辺だが、$\frac{1}{2}mv^2$ の差になっているが、この量を**運動エネルギー**といい、T などで表される。この式の言っていることは、2 つの運動エネルギーの差はその経路でなされた仕事と同じであるという事を言っている。日常的な感覚で言えば、Fig. 1.5 のように、車の加速を考えてみる。車のアクセルを踏み続けると、その間、車には力が働き、加速する。そして、加速する前と加速した後での運動エネルギーの差はアクセルをどれだけ踏んでいたか (これが仕事) に依存するというわけである。この運動エネルギーは速度の 2 乗の量であるので、ベクトル量ではなくスカラー量であり、向きを考慮する必要はない事が特徴である。

さて、仕事 W は $W=\int Fdx$ で定義されているので、例えば、重量の働くものの高さを変化させる場合にも同じように計算する事ができる。例えば、A 君が重さ 5kg のボールをもって、Fig. 1.6 のように、高さ y の塔の頂上まで頑張って持っていったとする。A 君は 5kg という決して軽くないボールを何とか塔の頂上まで持ち上げたわけだが、この仕事によって先ほど車のアクセルを踏んだようにボールが加速するかといえば、決してそんなことはない。やはり、頂上でも A 君の手の上に静止している。こうなってくると、A 君は頑張った甲斐がなく骨折り損のように思えてくる。

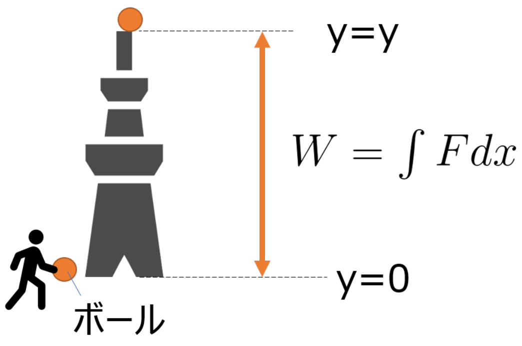

Fig.1.6　位置エネルギーと仕事の関係

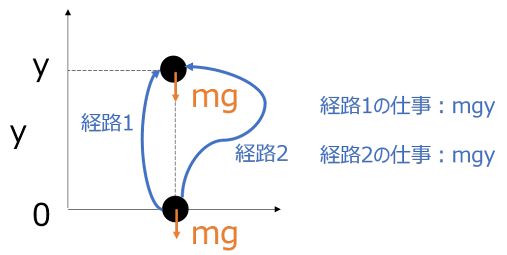

Fig.1.7　経路ごとの位置エネルギー。どの経路を辿っても仕事は同じになる

しかし、確かに仕事は物体に対してされているわけである。実は、A 君の仕事によって、**高さという別のエネルギーが蓄えられていたわけである。**これが、**位置エネルギー**や**ポテンシャル**と呼ばれる量であり、$U(x)$ のように表される。位置エネルギーはお金が様々なものと交換できるのと同じように、別のエネルギーである運動エネルギーと交換する事ができる。そのためには例えば、塔の頂上からボールを落としてみれば、ボールはどんどん加速していく事が確認できるはずである[*4]。これは位置エネルギーが同じだけの運動エネルギーに交換されているからである。

さて、このポテンシャルはどの程度蓄えられているかというと、先ほどの仕事の定義に基づいて、計算すればよい。すなわち、物体には重力 mg が下向きに働くので、A 君はそれと同じ大きさの力を上向きに加え続ける必要があるわけであり、

$$\int Fdy=\int mgdy=mgy \tag{34}$$

という風に計算できる。ここで、着目すべき点は、仕事が塔の高さのみの関数になっている点である。この為、重力による仕事はどのような経路を辿ろうとも高さが同じであれば、仕事は同じになる。重力のような力の場合、その仕事は位置のみの関数で与えられるが、このような力を**保存力**といい、保存力は次のようにポテンシャルの傾きから導かれる。すなわち、保存力の場合、力は

$$F=-\frac{dU(x)}{dx} \tag{35}$$

で与えられる。例えば、先ほどの重力の場合には重力ポテンシャルは $U(y)=mgy$ であるから、$-mg$ という大きさが mg で下向きの重力が得られる。多くの力は保存力であり、例えば、＋の電荷と－の電荷との間に働くクーロン力も保存力である。

さて、以後では物体の事を**系**と呼ぶことがあるが、系とは質点など、物理を考察する対象の事である。系に働く力が、保存力のみの場合には、運動エネルギーとポテンシャルを足した量が保存する。この和を**力学的エネ**

[*4] 実際には空気抵抗があるが、抵抗が無い状況を考える

ルギーといい、力学的エネルギーが保存する事を**力学的エネルギー保存則**という。力学的エネルギー保存則を、実際に導いてみよう。先ほどの運動エネルギーの変化は仕事によるという次の式から出発する。

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int F dx \tag{36}$$

ここでは系に働く力は保存力のみであるので、力は

$$F = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{37}$$

で与えられる。これを上の式に代入すれば、

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} -\frac{dU(x)}{dx}dx \tag{38}$$

$$= -U(x_2) + U(x_1) \tag{39}$$

となるので、移行すれば、

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2) \tag{40}$$

となり、2 つの和は同じになっていることが分かる。このように保存力のみの場合では、力学的エネルギーが保存される。また、かなり後で出てくることになるが、力学的エネルギーを運動量を使って、表してみると次のようになる。

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{41}$$

であるので、力学的エネルギーを H とすると

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x) \tag{42}$$

である。この H こそが、ハミルトニアンである。ハミルトニアンは系の力学的エネルギーを表しており、系が運動するときに常に一定に保たれる。このような運動の中で一定に保たれる保存量は物理の中でいくつも存在し、**運動の積分**と呼ばれる。さて、これまで運動方程式を変形し、わざわざ仕事や運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーの概念などたくさんの量を導入してきた。読者はこれに何の意味があるのだろうかと思うかもしれないが、この証明した力学的エネルギー保存則にはご利益がある。運動方程式は 2 階の微分方程式であり、解くのが簡単ではない。しかし、エネルギー保存則はただの代数の式であるので、難しい計算をする必要はない。例えば、初期条件として、$t = 0$ における、座標 x_0 と速度 v_0 を知っていて、尚且つ、現在の系の座標か速度のどちらが分かっていたとしよう。ここでは座標 $x(t)$ が分かっていたとしよう。そうすると、力学的エネルギー保存則から現在の速さ $|v(t)|$[*5]は

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) = \frac{1}{2}mv(t)^2 + U(x(t)) \tag{43}$$

から簡単に求まってしまうという事はすぐに分かるだろう。このように微分方程式を解くことなく、系の情報を知ることができる事が力学的エネルギー保存則の 1 つのご利益である。

[*5] 力学的エネルギー保存則はスカラー量の方程式なので残念ながら、向きまでは分からない

1.7　中心力

　これまでに、Newton 力学における、系の運動を決める手続きやエネルギー保存則といった概念について説明してきた。ここでは、解析力学への入口として、Newton 力学の少し困った部分というものを取り上げる。そして、Newton 力学の難点を克服する為に、Lagrange 力学や Hamilton 力学の導入を行っていく。

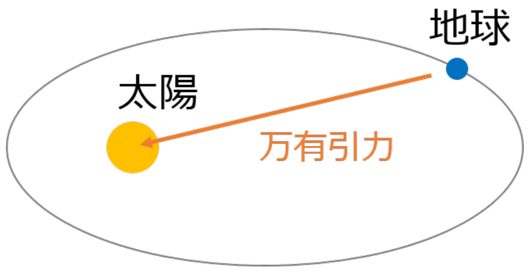

Fig.1.8　惑星の運動

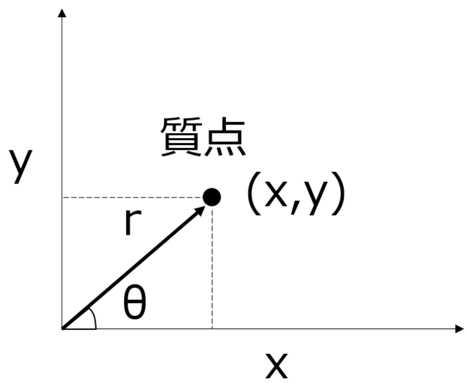

Fig.1.9　2 次元空間での直交座標系と極座標系

Newton 力学では系の運動を記述する為に、まず運動方程式を立て、その微分方程式を解き、初期条件が決まると系の運動が完全に決定されていた。この運動方程式は基本的には直交座標系で立てて、解くのだが、力によっては直交座標系が不便なことがある。それが、惑星の運動を記述するときである。例えば、地球は太陽の周りを公転しているが、これは地球と太陽との間に働く万有引力によって引き起こされている。万有引力は太陽の質量を M, 地球の質量を m, 万有引力定数を G、太陽を原点とした、地球の位置を $\mathbf{r}(t)$ とすると、

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{44}$$

で表される。ここで、最後の $\frac{\mathbf{r}}{r}$ は $\mathbf{r}$ をそのベクトルの大きさ r で割っているので、向きが地球の位置を向いた大きさが 1 の単位ベクトルである。これに負号がついているので、万有引力は太陽の方向に働く名前の通り引力となっている事が分かる。このような力の向きが常に原点の向きに働く力の事を**中心力**という。系に働く力が中心力のみの場合には、力のベクトルが原点方向に向くため、直交座標系を用いるよりも、極座標系という、原点からの距離 r と回転角 θ で表す方が運動が記述しやすい。Fig.1.9 に 2 次元の場合における直交座標と極座標を示した。図から分かる通り、直交座標と極座標の関係は

$$x = r\cos\theta \tag{45}$$
$$y = r\sin\theta \tag{46}$$

である。この極座標系を用いた場合には先のそのままの形で万有引力を表せるが、直交座標を用いた場合には、$\mathbf{r} = (x, y)$ であるので、x、y の成分ごとに表すと

$$F_x = -G\frac{Mm}{x^2+y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{47}$$
$$F_y = -G\frac{Mm}{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{48}$$

となることが分かるだろう。このままだと、x 方向、y 方向のそれぞれについて運動方程式を立てても、x と y の成分が混ざっているので解きにくい。そこで、極座標系を用いることになるわけだが、極座標系では働いて

いる力が r 方向のみに働くので、θ 方向の力は 0 である。すなわち、

$$
\begin{aligned}
F_r &= -G\frac{Mm}{r^2} && (49) \\
F_\theta &= 0 && (50)
\end{aligned}
$$

である。そこで、運動方程式を極座標系で記述したいが、座標系の変換に伴って運動方程式も変換を受けることになる。

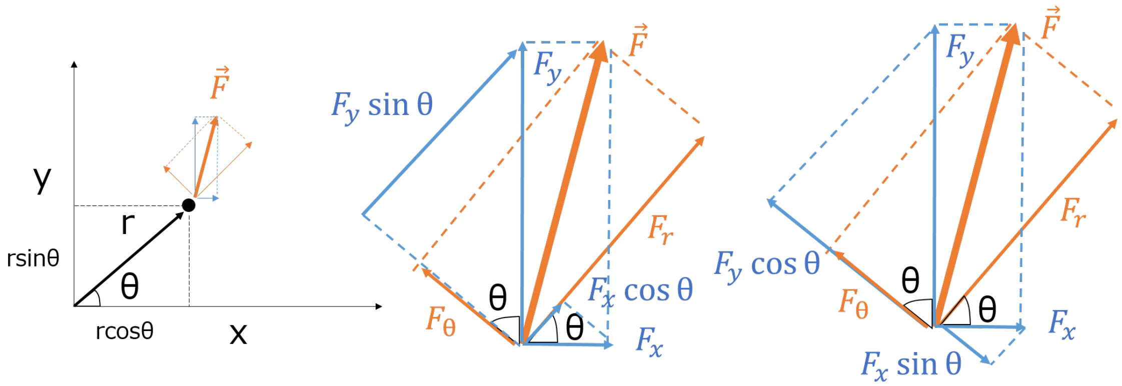

Fig.1.10　極座標系への力の変換。左：赤の太矢印が元の力のベクトル、赤矢印が (r, θ) 方向への力を分解した場合、青矢印が (x, y) 方向への力を分解した場合。 中央：F_r と F_x,F_y の関係、右：F_θ と F_x,F_y の関係

1.8　極座標変換

前節では系に働く力が中心力のみの場合には直交座標系よりも極座標系の方が、力を取り扱いやすいということを見た。本節では直交座標系から極座標系に移った場合に運動方程式が受ける変換を見ていく。座標と力についてそれぞれ、(x, y) の成分から (r, θ) の成分に分解する必要があり、まずは力から分解していく。結構ややこしいので、Fig.1.10 を注意深く見ながら、分解を行う。図を見れば、F_r, F_θ は F_x,F_y により次のように表されることが分かるだろう。

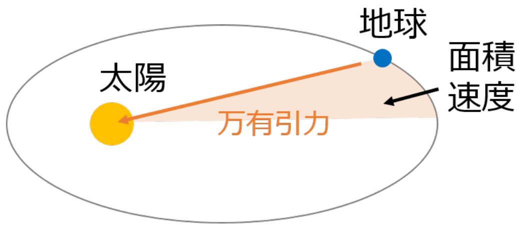

Fig.1.11　Kepler の第 2 法則 (面積速度一定の法則): 単位時間当たりの赤で塗りつぶした面積が一定になる

$$F_r = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta \tag{51}$$
$$F_\theta = -F_x \sin\theta + F_y \cos\theta \tag{52}$$

これで、力の変換は終了である。次に、座標の変換を行う。

$$x = r\cos\theta \tag{53}$$
$$y = r\sin\theta \tag{54}$$

の関係を思い出すとこれを t について 2 階微分すれば、加速度が求まることになる。まずは時間について 1 度微分してみると、積の微分を用いて、

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \tag{55}$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \tag{56}$$

となる。さらにもう一度 t について微分すれば、

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta \tag{57}$$
$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta \tag{58}$$

とたくさんの項が出てきて大変だが、このように導くことが出来る。$m((57)\times\cos\theta\ +\ (58)\times\sin\theta)$ と式変形して、$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ を用いると 1 番目と 3 番目の項が残り、

$$m(\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{59}$$

今度は m(-(57)$\sin\theta$ + (58)$\cos\theta$) と式変形すれば、2 番目と 4 番目の式が残り

$$m(-\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{60}$$

となる。(60) については、

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta) = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \tag{61}$$

という関係を使うと、以下のように纏めることが出来る。

$$m(-\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta) \tag{62}$$

さて、これで後は今まで得た結果を纏めるだけになる。まず、運動方程式から $m\ddot{x} = F_x, m\ddot{y} = F_y$ であるので、(59),(62) は次のように

$$F_x\cos\theta + F_y\sin\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{63}$$
$$-F_x\sin\theta + F_y\cos\theta = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta) \tag{64}$$

と書ける。さらに、力の分解式 (51),(52) を用いれば、左辺はまさに F_r, F_θ となっており、

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{65}$$
$$F_\theta = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta) \tag{66}$$

と書ける。これが目的の極座標系における運動方程式である。この時、系に働く力が万有引力のみの場合、

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2} \tag{67}$$
$$F_\theta = 0 \tag{68}$$

のように表されるのだった。これを先の極座標系にける運動方程式に代入すると、

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G\frac{Mm}{r^2} \tag{69}$$
$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta) = 0 \tag{70}$$

となる。(70) は両辺に r/m をかけて、時間について積分すると、左辺は微分が取れ、右辺は 0 であるので、

$$r^2\theta = const. \tag{71}$$

となり、左辺の量が保存されることが分かる。ちなみにこの量は、惑星が楕円運動する際に、単位時間当たりに掃く面積であり、**面積速度**という名前がついている (Fig.1.11 参照)。この面積速度が一定に保たれるという Kepler の第 2 法則の内容になっている。このように、中心力の場合には極座標系を用いることによって θ 方向については運動の積分が出てきて、運動方程式を解く必要がない。このような系の運動中に一定に保たれる量が出てくる座標を**循環座標**という。系の運動を考える際には循環座標がなるべく多くなるように座標系を取ることで、解くべき微分方程式がどんどん減る事になる。
さて、ここまで極座標系への変換を行ってきたが、式変形が多く、大変面倒だったと感じたのではないだろうか。このように Newton 力学では座標系が変わるとそれに合わせて、運動方程式の形が変化するので、例え、循環座標が出るにしても式変形を追うだけで結構大変な作業量である。これこそが Newton 力学の弱いところであり、この困難を克服し、もっと楽に循環座標を導きだすような力学の枠組みが Lagrange 力学である。
ひとまず、力学のパートはこれで終わりとなる。次のセクションでは Newton 力学とは自然観の異なる力学の枠組みとして Lagrange 力学を導入し、その便利さを知る。

参考文献

[1] 原島　鮮, ”力学 *1* 質点・剛体の力学”(裳華房, 1973)
[2] 藤原　邦男, ”物理学序論としての力学”(東京大学出版会, 1984)
[3] 前野　昌弘, ”よくわかる　初等力学”(東京図書, 2013)