

集中講義: 高次元エクスパンダーとその応用

清水 伸高 (東工大)

2024 年 5 月

Contents

1	グラフ上のランダムウォーク	1
1.1	グラフ	1
1.2	グラフ上の単純ランダムウォーク	2
1.3	単純ランダムウォークの収束性と定常分布	3
1.4	混交時間とエクスパンダーグラフ	3
2	高次元エクスパンダー	3
2.1	定義	3
2.2	単体複体上のランダムウォーク	3
2.3	局所スペクトルエクスパンダー	3
2.4	Oppenheim のトリクルダウン定理	3
3	マトロイド	3
3.1	定義	3
3.2	例	3
3.2.1	グラフ的マトロイド	3
3.2.2	線形マトロイド	3
3.3	モチベーション	3
3.3.1	組合せ最適化	3
3.3.2	組合せ論	3
3.4	基の数え上げ	3
4	Anari, Liu, Gharan, Vinzant の定理	3

1 グラフ上のランダムウォーク

1.1 グラフ

まず基礎的な概念の定義を与える. 本講義では有限単純無向グラフを単に**グラフ (graph)**と呼ぶ. すなわち, グラフとは有限集合 V とその二元部分集合 $E \subseteq \binom{V}{2}$ の組 $G = (V, E)$ である. V の元を**頂点 (vertex)**, E の元を**辺 (edge)**と呼ぶ. 特に混乱が生じない限りは辺 $\{u, v\}$ を省略して uv と記す. 二頂点 $u, v \in V$ が $uv \in E$ を満たすとき, u は v に隣接しているという (v もまた u に隣接している). 頂点 $u \in V$ に対し $\deg(u) = |\{v \in V : uv \in E\}|$ を**次数 (degree)**と呼ぶ. 全ての頂点の次数が d に

等しいとき, G は d -正則 (d -regular) であるという. 以下で定義される行列 $A \in \mathbb{R}^{V \times V}$ を隣接行列 (adjacency matrix) という:

$$A(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } uv \in E, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

考えているグラフ G が明らかな場合は次数や隣接行列などを $\deg(u)$, A などと表すが, そうでなく考えるグラフが G であることを強調する場合は $\deg_G(u)$, A_G などと表す.

1.2 グラフ上の単純ランダムウォーク

ランダムウォークは高次元エクスパンダーの定義やその解析に不可欠な概念である. そこで本節ではまず最も基本的なグラフ上の単純ランダムウォークを定義し, その基本的な性質を紹介する. 後に単純ランダムウォークを拡張した一般的なランダムウォークを導入し, その重要なクラスである可逆なランダムウォークについて説明する.

定義 1.1 (単純ランダムウォーク)

グラフ $G = (V, E)$ を考える. 頂点集合 V 上に値をとる確率変数の列 $(X_t)_{t=0,1,\dots}$ であって, 任意の $t \geq 0$, 頂点列 $(v_0, \dots, v_{t-1}) \in V^t$, および $v \in V$ に対して

$$\Pr[X_t = v \mid X_0 = v_0, \dots, X_{t-1} = v_{t-1}] = \Pr[X_t = v \mid X_{t-1} = v_{t-1}] = \frac{1}{\deg(v_{t-1})}$$

を満たすものを G 上の単純ランダムウォーク (simple random walk) という. さらに,

$$P(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(u)} & \text{if } uv \in E, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義される行列 $P \in [0, 1]^{V \times V}$ を遷移確率行列 (transition matrix) と呼ぶ.

本稿では連続時間の確率過程は考えないので, $(X_t)_{t=0,1,\dots}$ は略して $(X_t)_{t \geq 0}$ と表す. 単純ランダムウォークの初期地点 X_0 については何も仮定していない. 例えば X_0 は決定的な頂点 $X_0 = u$ であったり一様ランダムな頂点であっても単純ランダムウォークと呼ぶ.

初期頂点 X_0 の分布が決まれば各時刻 t における X_t の分布は一意に定まる. 実際, $t \geq 0$ に対し $x_t \in [0, 1]^V$ を X_t の分布とすると, 任意の $t \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} x_t(v) &= \Pr[X_t = v] \\ &= \sum_{u \in V} \Pr[X_t = v \text{ and } X_{t-1} = u] \\ &= \sum_{u \in V} \Pr[X_t = v \mid X_{t-1} = u] \Pr[X_{t-1} = u] \\ &= \sum_{u \in V} P(u, v) x_{t-1}(u) \end{aligned}$$

という漸化式を得る. これは $x_t = x_{t-1}P$ とも表せる (ここで x_t は行ベクトルとして扱う) ので

$$x_t = x_0 P^t \tag{1}$$

を得る.

グラフ $G = (V, E)$ の各頂点を対角に並べた $V \times V$ 行列を**次数行列 (degree matrix)** という. すなわち, 次数行列 $D \in \mathbb{R}^{V \times V}$ は

$$D(u, v) = \begin{cases} \deg(u) & \text{if } u = v, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

グラフ G 上の単純ランダムウォークの遷移確率行列 P は, 次数行列 D と隣接行列 A を用いて $P = D^{-1}A$ と表せる.

1.3 単純ランダムウォークの収束性と定常分布

1.4 混交時間とエクспанダーグラフ

2 高次元エクспанダー

2.1 定義

2.2 単体複体上のランダムウォーク

2.3 局所スペクトルエクспанダー

2.4 Oppenheim のトリクルダウン定理

3 マトロイド

3.1 定義

3.2 例

3.2.1 グラフ的マトロイド

3.2.2 線形マトロイド

3.3 モチベーション

3.3.1 組合せ最適化

3.3.2 組合せ論

3.4 基の数え上げ

4 Anari, Liu, Gharan, Vintant の定理

定理 4.1 (Oppenheim のトリクルダウン定理)

hoge

定理 4.1より, 以下を得る.

系 4.2

jimei na kei

系 4.2 定理 4.1