集中講義: 高次元エクスパンダーとその応用

清水 伸高 (東工大)

2024 年 5 月

Contents

1 グラフ上のランダムウォーク

1.1 グラフ

まず基礎的な概念の定義を与える．本講義では有限単純無向グラフを単に**グラフ (graph)** と呼ぶ．すなわち, グラフとは有限集合 V とその二元部分集合 $E \subseteq \binom{V}{2}$ の組 $G = (V, E)$ である．V の元を**頂点 (vertex)**, E の元を**辺 (edge)** と呼ぶ．特に混乱が生じない限りは辺 $\{u, v\}$ を省略して uv と記す．二頂点 $u, v \in V$ が $uv \in E$ を満たすとき, u は v に隣接しているという (v もまた u に隣接している)．頂点 $u \in V$ に対し $\deg(u) = |\{v \in V : uv \in E\}|$ を**次数 (degree)** と呼ぶ．全ての頂点の次数が d に

等しいとき, G は d**-正則** (d**-regular**) であるという. 以下で定義される行列 $A \in \mathbb{R}^{V \times V}$ を**隣接行列** **(adjacency matrix)** という:

$$A(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } uv \in E, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

考えているグラフ G が明らかな場合は次数や隣接行列などを $\deg(u), A$ などと表す. また, 考えているグラフ G が曖昧であったり特別に指定したい場合は $\deg_G(u), A_G$ などと表す.

1.2 グラフ上の単純ランダムウォーク

ランダムウォークは高次元エクスパンダーの定義やその解析に不可欠な概念である. そこで本節ではまず最も基本的なグラフ上の単純ランダムウォークを定義し, その基本的な性質を紹介する. 後に単純ランダムウォークを拡張した一般的なランダムウォークを導入し, その重要なクラスである可逆なランダムウォークについて説明する.

定義 1.1 (単純ランダムウォーク)

グラフ $G = (V, E)$ を考える. 頂点集合 V 上に値をとる確率変数の列 $(X_t)_{t=0,1,\dots}$ であって, 任意の $t \geq 0$, 頂点列 $(v_0, \dots, v_{t-1}) \in V^t$, および $v \in V$ に対して

$$\Pr[X_t = v \mid X_0 = v_0, \dots, X_{t-1} = v_{t-1}] = \Pr[X_t = v_t \mid X_{t-1} = v_{t-1}] = \frac{1}{\deg(v_{t-1})}$$

を満たすものを G 上の**単純ランダムウォーク (simple random walk)** という. さらに,

$$P(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(u)} & \text{if } uv \in E, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義される行列 $P \in [0,1]^{V \times V}$ を**遷移確率行列 (transition matrix)** と呼ぶ.

本稿では連続時間の確率過程は考えないので, $(X_t)_{t=0,1,\dots}$ は略して $(X_t)_{t \geq 0}$ と表す. 単純ランダムウォークの初期地点 X_0 については何も仮定していない. 例えば X_0 は決定的な頂点 $X_0 = u$ であったり一様ランダムな頂点であっても単純ランダムウォークと呼ぶ.

初期頂点 X_0 の分布が決まれば各時刻 t における X_t の分布は一意に定まる. 実際, $t \geq 0$ に対し $x_t \in [0,1]^V$ を X_t の分布とする (すなわち, $x_t(u) = \Pr[X_t = u]$). 任意の $t \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} x_t(v) &= \Pr[X_t = v] \\ &= \sum_{u \in V} \Pr[X_t = v \text{ and } X_{t-1} = u] \\ &= \sum_{u \in V} \Pr[X_t = v \mid X_{t-1} = u] \Pr[X_{t-1} = u] \\ &= \sum_{u \in V} P(u,v) x_{t-1}(u) \end{aligned}$$

という漸化式を得る. これは $x_t = x_{t-1}P$ とも表せる (ここで x_t は行ベクトルとして扱う) ので

$$x_t = x_0 P^t \tag{1}$$

を得る.

グラフ $G=(V,E)$ の各頂点を対角に並べた $V\times V$ 行列を**次数行列 (degree matrix)** という. すなわち, 次数行列 $D\in\mathbb{R}^{V\times V}$ は

$$D(u,v)=\begin{cases}\deg(u) & \text{if } u=v,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

グラフ G 上の単純ランダムウォークの遷移確率行列 P は, 次数行列 D と隣接行列 A を用いて $P=D^{-1}A$ と表せる.

1.3 単純ランダムウォークの収束性と定常分布

グラフ G 上の単純ランダムウォーク $(X_t)_{t\geq 0}$ を考え, 時刻 t における分布を $x_t\in[0,1]^V$ の $t\to\infty$ における収束性を議論したい. まず, 分布間の距離として全変動距離を定義する.

定義 1.2 (全変動距離)

有限集合 V 上の二つの分布 $\mu,\nu\in[0,1]^V$ に対し, **全変動距離 (total variation distance)** を

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu):=\frac{1}{2}\sum_{u\in V}|\mu(u)-\nu(u)|=\frac{1}{2}\|\mu-\nu\|_1$$

で定める.

1.4 混交時間とエクスパンダーグラフ

2 高次元エクスパンダー

2.1 定義

2.2 単体複体上のランダムウォーク

2.3 局所スペクトルエクスパンダー

2.4 Oppenheim のトリクルダウン定理

3 マトロイド

3.1 定義

3.2 例

3.2.1 グラフ的マトロイド

3.2.2 線形マトロイド

3.3 モチベーション

3.3.1 組合せ最適化

3.3.2 組合せ論

3.4 基の数え上げ

4 Anari, Liu, Gharan, Vinzant の定理

定理 4.1 （Oppenheim のトリクルダウン定理）

hoge

定理 4.1より, 以下を得る.

系 4.2

jimei na kei

系 4.2 定理 4.1