10℃のときの寸法を示し，$E=210\,\mathrm{GPa}$，線膨張係数 $\alpha=1.12\times10^{-5}/℃$ とする．

3. 図2のように，一様分布荷重 w を受けても，長柱の安定度（危険荷重）には無関係なことを，両端回転支持の場合について証明せよ．

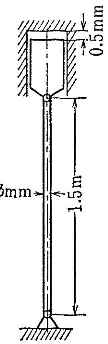


図 1

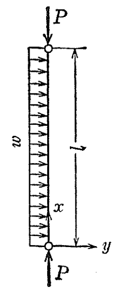


図 2

10. 円筒と回転円板

10.1 薄肉円筒

円筒のうち，外径と内径の比が，大きいもの（肉厚の厚いもの）を厚肉円筒，1に近いもの（肉厚の薄いもの）を薄肉円筒という．ここでは，薄肉円筒に内圧が作用する場合を取り扱う．図 10.1 に示すように，内圧を p，内半径を r，肉厚を t とし，円筒の長さは十分長いものとする．一般に，内圧を受ける円筒には，**円周応力** (circumferential stress, hoop stress) σ_θ，**軸応力** (axial stress) σ_z，および**半径応力** (radial stress) σ_r が作用する．このうち，半径応力 σ_r は，内壁面で絶対値が p，外壁面で0であるから，肉厚 t が半径 r に比較して小さいときには，σ_r は σ_θ と σ_z に対して無視できる．また，両端から十分離れたところでは，σ_θ, σ_z の厚さ方向の変化も無視できる*.

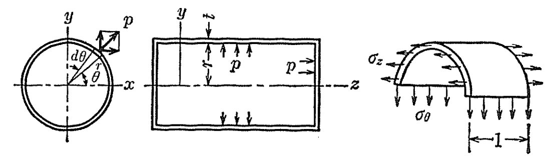


図 10.1　内圧を受ける薄肉円筒

図 10.1 に示すように，長さ1の輪を切り出し，さらにその半分を取り出して，それに働く力の釣合を考える．まず，y 軸方向の釣合いは，

$$2\sigma_\theta t=2\int_0^{\pi/2} pr\sin\theta d\theta=2pr^{**}$$

$$\therefore\quad \sigma_\theta=\frac{pr}{t} \tag{10.1}$$

つぎに，z 軸方向の釣合は，

$$\pi r^2 p=2\pi r t\sigma_z$$

$$\therefore\quad \sigma_z=\frac{pr}{2t} \tag{10.2}$$

* 両端近くでは，応力状態が複雑で，以下の式は適用できない．

** 一様な強さの圧力の，ある方向への全圧力の大きさは，作用面の形状に関係なく，考える方向への投影面積と圧力の積に等しい．

σ_θ と σ_z は，ともに主応力で，式 (10.1)，(10.2) より，

$$\sigma_\theta=2\sigma_z \tag{10.3}$$

となる．すなわち，円周応力は軸応力の2倍となり，破壊が起こるときは，軸方向にき裂が生じる．

つぎに，円周ひずみ ε_θ は，縦弾性係数を E，ポアソン比を ν とすると，式 (8.38) より，

$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{E}(\sigma_\theta-\nu\sigma_z)=\frac{\sigma_\theta}{E}\left(1-\frac{\nu}{2}\right)=\frac{pr}{Et}\left(1-\frac{\nu}{2}\right) \tag{10.4}$$

内圧による半径の増加 Δr は，

$$\varepsilon_\theta=\frac{2\pi(r+\Delta r)-2\pi r}{2\pi r}=\frac{\Delta r}{r}$$

に式 (10.4) を用いて，

$$\Delta r=\frac{pr^2}{Et}\left(1-\frac{\nu}{2}\right) \tag{10.5}$$

10.2 厚肉円筒

図10.2に示すように，内圧 p_i，外圧 p_0 を受ける内径 r_i，外径 r_0 の厚肉円筒を考える．厚肉円筒では，前節の薄肉円筒のように，半径応力 σ_r を無視したり，円周応力 σ_θ が半径方向に一定である，と仮定できない．外径に比べて，円筒の長さが十分に長ければ，軸方向のひずみ ε_z はどの断面でも一様である，として取り扱うことができる．

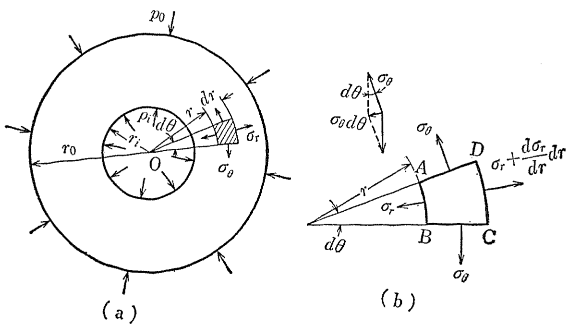


図 10.2　内，外圧を受ける厚肉円筒

図 10.2 に示すように，任意の断面上で，半径 r と $r+dr$ の同心円筒と中心角 $d\theta$ で，単位厚さの微小扇形の要素を切り出し，これの半径方向の力の平衡を

考える．荷重が軸対称であるから，同図 (b) の面 AD，BC には，せん断応力は発生せず，図のように垂直応力のみが作用する．面 AD，BC に作用する円周応力を σ_θ，面 AB に作用する半径応力を σ_r とすると，面 CD には

$$\sigma_r+\frac{d\sigma_r}{dr}dr$$

が作用する．また面 AD, BC に作用する σ_θ の半径方向成分は，

$$\sigma_\theta d\theta$$

となるから，半径方向の釣合を考えると，

$$\sigma_r r d\theta+\sigma_\theta dr d\theta-\left(\sigma_r+\frac{d\sigma_r}{dr}dr\right)(r+dr)d\theta=0$$

高次の微小項を省略すると，

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_\theta=0 \tag{10.6}$$

この式には2個の未知数 σ_r, σ_θ を含むので，この式のみでは σ_r, σ_θ を定めることはできない(不静定)．そこで，以下のように変形も同時に考えなければならない．まず，半径 r における半径方向の変位を u とすれば，$r+dr$ での同方向の変位は，$u+(du/dr)dr$ となるので，半径 r における半径方向のひずみ ε_r は，

$$\varepsilon_r=\frac{u+(du/dr)dr-u}{dr}=\frac{du}{dr} \tag{10.7}$$

また，半径方向の変位 u によって，半径 r の円は半径 $r+u$ の円になるので，円周ひずみ ε_θ は，

$$\varepsilon_\theta=\frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r}=\frac{u}{r} \tag{10.8}$$

応力とひずみの関係式 (フックの法則) (8.36) の中の $\sigma_x, \sigma_y, \varepsilon_x, \varepsilon_y$ を $\sigma_r, \sigma_\theta, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ として，式 (8.36) に式 (10.7)，(10.8) を代入すると，

$$\sigma_r=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{(1-\nu)\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}+\nu\varepsilon_z\right\} \tag{10.9}$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{(1-\nu)\frac{u}{r}+\nu\frac{du}{dr}+\nu\varepsilon_z\right\} \tag{10.10}$$

$$\sigma_z=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}+\frac{1-\nu}{\nu}\varepsilon_z\right\} \tag{10.11}$$

式 (10.9)，(10.10) を式 (10.6) に代入すると，

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=0 \tag{10.12}$$

変形して,

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)=0$$

積分して,

$$\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}=C$$

変形すると

$$\frac{d(ru)}{dr}=Cr$$

さらに積分して,

$$ru=\frac{C}{2}r^2+C'$$

ゆえに,一般解は,

$$u=C_1r+\frac{C_2}{r} \tag{10.13}$$

式 (10.13) を式 (10.9)〜(10.11) に代入すると,各応力成分は,積分定数を含んだ形で,つぎのように得られる.

$$\sigma_r=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{C_1-(1-2\nu)\frac{C_2}{r^2}+\nu\varepsilon_z\right\} \tag{10.14}$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{C_1+(1-2\nu)\frac{C_2}{r^2}+\nu\varepsilon_z\right\} \tag{10.15}$$

$$\sigma_z=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{2C_1+\frac{1-\nu}{\nu}\varepsilon_z\right\} \tag{10.16}$$

定数 C_1, C_2 は,円筒の内,外面における境界条件から決める.内,外圧を受ける場合には,内,外面で,半径応力 σ_r がこれらの圧力に等しくならなければならない.すなわち,

$$r=r_i:\sigma_r=-p_i,\qquad r=r_0:\sigma_r=-p_0{}^{*} \tag{10.17}$$

式 (10.14) を境界条件式 (10.17) に代入し,C_1, C_2 について解くと,

$$\left.\begin{aligned}C_1&=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\frac{r_i^2p_i-r_0^2p_0}{r_0^2-r_i^2}-\nu\varepsilon_z\\ C_2&=\frac{1+\nu}{E}\frac{r_i^2r_0^2}{r_0^2-r_i^2}(p_i-p_0)\end{aligned}\right\} \tag{10.18}$$

式 (10.18) の定数を式 (10.14)〜(10.16) にもどせば,

* σ_r が負になることに注意.

$$\sigma_r=\frac{1}{r_0^2-r_i^2}\left\{r_i^2\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)p_i-r_0^2\left(1-\frac{r_i^2}{r^2}\right)p_0\right\} \tag{10.19}$$

$$\sigma_\theta=\frac{1}{r_0^2-r_i^2}\left\{r_i^2\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)p_i-r_0^2\left(1+\frac{r_i^2}{r^2}\right)p_0\right\} \tag{10.20}$$

$$\sigma_z=2\nu\frac{r_i^2p_i-r_0^2p_0}{r_0^2-r_i^2}+E\varepsilon_z=\nu(\sigma_r+\sigma_\theta)+E\varepsilon_z \tag{10.21}$$

式 (10.21) で,ε_z を r に無関係に一定とすると,σ_z も一定となり,σ_z は断面上で一様に分布することになる.

変位 u は,式 (10.13) に式 (10.18) を代入して,

$$u=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\frac{r_i^2p_i-r_0^2p_0}{r_0^2-r_i^2}r+\frac{1+\nu}{E}\frac{r_i^2r_0^2(p_i-p_0)}{(r_0^2-r_i^2)r}-\nu\varepsilon_zr \tag{10.22}$$

式 (10.21),(10.22) には,z 方向のひずみ ε_z が含まれているので,円筒の両端末の拘束条件によって,σ_z と u は異なる.

まず,両端が閉鎖されている場合 (図 10.3) は,軸方向の力の釣合を考えると,

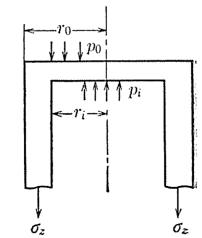


図 10.3

$$\pi(r_0^2-r_i^2)\sigma_z-\pi(r_i^2p_i-r_0^2p_0)=0$$

これより,

$$\sigma_z=\frac{r_i^2p_i-r_0^2p_0}{r_0^2-r_i^2} \tag{10.23}$$

式 (10.21) に代入して,

$$\frac{r_i^2p_i-r_0^2p_0}{r_0^2-r_i^2}=2\nu\frac{r_i^2p_i-r_0^2p_0}{r_0^2-r_i^2}+E\varepsilon_z$$

ゆえに,

$$\varepsilon_z=\frac{1-2\nu}{E}\frac{r_i^2p_i-r_0^2p_0}{r_0^2-r_i^2} \tag{10.24}$$

変位 u は,式 (10.22) にこれを代入して,

$$u=\frac{1-2\nu}{E}\frac{r_i^2p_i-r_0^2p_0}{r_0^2-r_i^2}r+\frac{1+\nu}{E}\frac{r_i^2r_0^2(p_i-p_0)}{(r_0^2-r_i^2)r} \tag{10.25}$$

つぎに,両端が開放されている場合には,

$$\sigma_z=0 \tag{10.26}$$

式 (10.21) より,

$$\varepsilon_z=-\frac{2\nu}{E}\frac{r_i^2p_i-r_0^2p_0}{r_0^2-r_i^2} \tag{10.27}$$

これを式（10.22）に代入して，

$$u=\frac{1-\nu}{E}\frac{r_i^2p_i-r_0^2p_0}{r_0^2-r_i^2}r+\frac{1+\nu}{E}\frac{r_i^2r_0^2(p_i-p_0)}{(r_0^2-r_i^2)r} \tag{10.28}$$

a）　内圧のみを受ける場合

式（10.19），（10.20）で，$p_0=0$ とおき，

$$\sigma_r=\frac{p_i^2r_i}{r_0^2-r_i^2}\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right) \tag{10.29}$$

$$\sigma_\theta=\frac{p_ir_i^2}{r_0^2-r_i^2}\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right) \tag{10.30}$$

最大せん断応力 τ_1 は

$$\tau_1=\frac{1}{2}(\sigma_\theta-\sigma_r)=\frac{r_i^2r_0^2p_i}{(r_0^2-r_i^2)r^2} \tag{10.31}$$

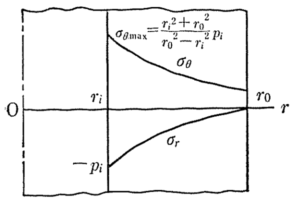


図 10.4　応力分布（内圧）

各応力分布を図示すると，図 10.4 のようになる．各応力の絶対値は，いずれも内周で最大となり，

$$\sigma_r|_{r=r_i}=-p_i \tag{10.32}$$

$$\sigma_\theta|_{r=r_i}=\frac{r_i^2+r_0^2}{r_0^2-r_i^2}p_i \tag{10.33}$$

$$\tau_1|_{r=r_i}=\frac{r_0^2}{r_0^2-r_i^2}p \tag{10.34}$$

これらのうち，$\sigma_\theta|_{r=r_i}$ が最も大きく，これが材料の許容応力 σ_{a1} をこえないように，r_i/r_0 を決めなければならない．すなわち，式（10.33）より，

$$\sigma_\theta|_{r=r_i}=\frac{1+(r_i/r_0)^2}{1-(r_i/r_0)^2}p_i=\sigma_{a1}$$

これから，

$$\frac{r_0}{r_i}=\sqrt{\frac{\sigma_{a1}+p_i}{\sigma_{a1}-p_i}} \tag{10.35}$$

式（10.35）で，内圧 p_i が材料の許容応力 σ_{a1} になると，$r_0/r_i=\infty$ となるので，いくら肉厚を大きくしても破損することになる．すなわち，いくら肉厚を大きくしても，円筒の耐えうる内圧には限度があることがわかる．

半径方向変位 u は，両端の条件によって異なる．たとえば，両端開放の場合は，式（10.28）から，

$$u|_{r=r_i}=\frac{1}{E}\left(\frac{r_0^2+r_i^2}{r_0^2-r_i^2}+\nu\right)r_ip_i \tag{10.36}$$

$$u|_{r=r_0}=\frac{2}{E}\frac{r_i^2r_0}{r_0^2-r_i^2}p_i \tag{10.37*}$$

b）　外圧のみを受ける場合

式（10.19），（10.20）で，$p_i=0$ とおき，

$$\sigma_r=-\frac{p_0r_0^2}{r_0^2-r_i^2}\left(1-\frac{r_i^2}{r^2}\right) \tag{10.38}$$

$$\sigma_\theta=-\frac{p_0r_0^2}{r_0^2-r_i^2}\left(1+\frac{r_i^2}{r^2}\right) \tag{10.39}$$

各応力分布を図 10.5 に示す．各応力は，ともに圧縮で，σ_r は $r=r_0$ で，σ_θ は $r=r_i$ で最大になる．

$$\sigma_r|_{r=r_0}=-p_0 \tag{10.40}$$

$$\sigma_\theta|_{r=r_i}=-\frac{2r_0^2}{r_0^2-r_i^2}p_0 \tag{10.41}$$

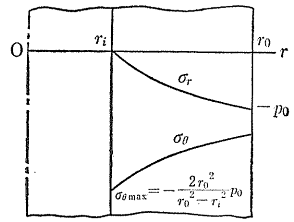


図 10.5　応力分布（外圧）

これらのうち，最大応力は，σ_θ の内周における値であり，これが材料の許容応力 σ_{a1} をこえないように，r_i/r_0 を定める．式（10.41）より，

$$\frac{2r_0^2}{r_0^2-r_i^2}p_0=\sigma_{a1}$$

これから

$$\frac{r_0}{r_i}=\sqrt{\frac{\sigma_{a1}}{\sigma_{a1}-2p_0}} \tag{10.42}$$

外圧 p_0 が $\sigma_{a1}/2$ になると，$r_0/r_i=\infty$ となり，厚さをいくら増しても破損することになる．

半径方向変位 u は，たとえば両端開放の場合，式（10.28）から

$$u|_{r=r_i}=-\frac{2}{E}\frac{r_ir_0^2}{r_0^2-r_i^2}p_0 \tag{10.43}$$

$$u|_{r=r_0}=-\frac{1}{E}\left(\frac{r_0^2+r_i^2}{r_0^2-r_i^2}-\nu\right)r_0p_0 \tag{10.44}$$

*　$u|_{r=r_i}>u|_{r=r_0}$ で肉厚は薄くなる

10.3　組合せ円筒

外筒の内径よりも，内筒の外径をやや大きく加工しておき，外筒を加熱して膨張させて，内筒を挿入すると，常温にもどったときに，両円筒に接触圧が生じる（図 10.6）．これを**焼ばめ**(shrink fit) という．また，焼ばめ前の内筒外径と外筒内径との差 δ を，焼ばめ代という．

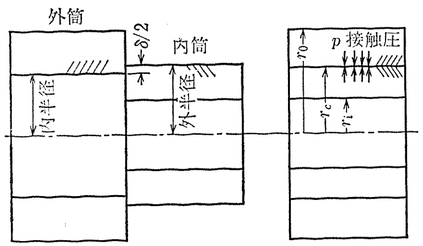


図 10.6　焼ばめ

いま，接触圧 p と焼ばめ代 δ との関係を求めよう．この接触圧は，内圧 p によって生じる外筒の内径の増加と，外圧 p による内筒の外径の減少との和が δ に等しい，という条件から求められる*．すなわち，式（10.36）と式（10.44）において，それぞれ，$r_i \fallingdotseq r_c$，$r_0 \fallingdotseq r_c$** とおいて，

$$\frac{1}{E}\left(\frac{r_0^2+r_c^2}{r_0^2-r_c^2}+\nu\right)r_c p-\left[-\frac{1}{E}\left(\frac{r_c^2+r_i^2}{r_c^2-r_i^2}-\nu\right)r_c p\right]=\frac{\delta}{2}$$

これから

$$\delta=\frac{4}{E}\frac{r_c^3(r_0^2-r_i^2)}{(r_c^2-r_i^2)(r_0^2-r_c^2)}p \qquad (10.45)$$

なお，焼ばめ代 δ を得るために必要な内筒と外筒との間の温度差 ΔT は，α を外筒材の線膨張係数として***，

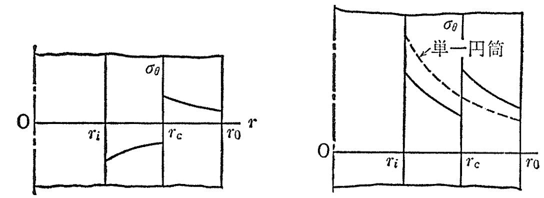
$$\Delta T=\frac{\delta}{2\alpha r_c} \qquad (10.46)$$

焼ばめによってつくられた組合せ円筒は，内筒には外圧 p が，外筒には内圧 p が加わり，応力状態は図 10.7（a）のようになる．これに内圧が作用すると，同図（a）の応力分布に内圧による応力分布が重なって，同図（b）のようになり，その最大応力は，内，外径が組合せ円筒のそれに等しい単一円筒の最大応力に比較して，かなり下がることがわかる．

* 外筒の内周の変位と，内筒の外周の変位との差が $\delta/2$ に等しい，と考えてもよい．

** 厳密には，$r_i \neq r_c, r_0 \neq r_c$ であるが，通常，$\delta \ll r_c$ なので，変位を考える際，式(10.36)，(10.44)で，それぞれ $r_i = r_c, r_0 = r_c$ としても差しつかえない．

*** $u=\delta/2$，$\varepsilon_\theta=\alpha\Delta T=u/r_c \to \Delta T=u/\alpha r_c=\delta/2\alpha r_c$.



（a）　　（b）

図 10.7　焼ばめ円筒の応力分布（σ_θ）

10.4　回 転 円 板

円板が，それに垂直な対称軸のまわりに回転すると，遠心力によって応力が発生する．この応力は，回転軸に関して対称に分布するから，10.2 節の方法で求められる．いま，円板は薄いので，回転軸（z 軸）方向の応力成分を無視できる，と仮定すれば，円板は軸対称の平面応力問題として取り扱える．また，円板には遠心力のみが作用するので，応力は，円板の厚さ方向には変化しないものと仮定する．

円板は一定の角速度 ω で回転するものとすると，図 10.8 の微小要素 ABCD に作用する遠心力は*，

$$\rho r d\theta dr \cdot r\omega^2$$

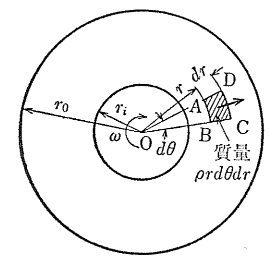


図 10.8　回転円板

となる．ここに，ρ は円板の材料の密度である．したがって，半径方向の力の平衡は，式（10.6）を導き出したときと同様に，

$$\sigma_r r d\theta+\sigma_\theta dr d\theta-\left(\sigma_r+\frac{d\sigma_r}{dr}dr\right)(r+dr)d\theta-\rho r^2\omega^2 d\theta dr=0$$

高次の微小項を省略すると，

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_\theta+\rho\omega^2 r^2=0 \qquad (10.47)$$

つぎに，この式を変位の式に書き換える．この場合は，平面応力であるから．式（8.40）の x, y を r, θ に変え，式（10.7），（10.8）を用いると，σ_r, σ_θ は

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}\right) \qquad (10.48)$$

* 遠心力 $mr\omega^2$（m：質量）．

$$\sigma_\theta=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r}+\nu\frac{du}{dr}\right) \tag{10.49}$$

これを式（10.47）に代入すると，

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}+\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r=0 \tag{10.50}$$

式（10.50）は，円筒の場合の式（10.12）に，遠心力の項が付加されただけであることがわかる．

式（10.50）を変形して，

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)\right\}+\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r=0$$

積分すると，

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)+\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2\frac{r^2}{2}=C$$

r を乗じて，さらに積分すると，

$$ur+\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2\frac{r^4}{8}=\frac{C}{2}r^2+C_2$$

ゆえに，変位 u の一般解は，

$$u=C_1r+\frac{C_2}{r}-\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2\frac{r^3}{8} \tag{10.51}$$

式（10.51）を式（10.48），（10.49）に代入すると，各応力成分は

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}\left\{C_1(1+\nu)-C_2(1-\nu)\frac{1}{r^2}-\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2\frac{3+\nu}{8}r^2\right\} \tag{10.52}$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{1-\nu^2}\left\{C_1(1+\nu)+C_2(1-\nu)\frac{1}{r^2}-\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2\frac{1+3\nu}{8}r^2\right\} \tag{10.53}$$

積分定数 C_1, C_2 は，周辺条件から定められる．平面応力の場合，ε_z は式（8.38）の第3式より

$$\varepsilon_z=-\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{\nu}{E}(\sigma_r+\sigma_\theta) \tag{10.54}$$

となり，これに式（10.52），（10.53）を代入すると，ε_z は r によって変化することがわかる．

a） 有効円板

中心に円孔を有する場合には，円板の内・外周に外力が作用しないから，境界条件は，

$$\sigma_r|_{r=r_0}=0, \qquad \sigma_r|_{r=r_i}=0 \tag{10.55}$$

式（10.52）を上式に代入して，C_1, C_2 は，

$$\left.\begin{aligned} C_1&=\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2\frac{3+\nu}{8(1+\nu)}(r_i^2+r_0^2)\\ C_2&=\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2\frac{3+\nu}{8(1-\nu)}r_i^2r_0^2 \end{aligned}\right\} \tag{10.56}$$

変位および各応力の成分は，式（10.51），（10.52），（10.53）に式（10.56）を代入して，それぞれ，

$$u=\frac{\rho\omega^2}{8E}r\left\{(3+\nu)(1-\nu)(r_i^2+r_0^2)-(1-\nu^2)r^2+(3+\nu)(1+\nu)\frac{r_i^2r_0^2}{r^2}\right\} \tag{10.57}$$

$$\sigma_r=\rho\omega^2\frac{3+\nu}{8}r_0^2\left\{1+\left(\frac{r_i}{r_0}\right)^2-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2-\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right\} \tag{10.58}$$

$$\sigma_\theta=\rho\omega^2\frac{3+\nu}{8}r_0^2\left\{1+\left(\frac{r_i}{r_0}\right)^2-\frac{1+3\nu}{3+\nu}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2+\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right\} \tag{10.59}$$

半径応力 σ_r は，$r=r_i$，$r=r_0$ で0となる．また，最大になるのは，$d\sigma_r/dr=0$ より，$r=\sqrt{r_ir_0}$ の位置で，最大値は，

$$(\sigma_r)_{\max}=\rho\omega^2\frac{3+\nu}{8}r_0^2\left(1-\frac{r_i}{r_0}\right)^2 \tag{10.60}$$

円周応力 σ_θ は，内周において最大となる．その値は，式（10.59）から，

$$(\sigma_\theta)_{\max}=\sigma_\theta|_{r=r_i}=\rho\omega^2\frac{3+\nu}{4}r_0^2\left\{1+\frac{1-\nu}{3+\nu}\left(\frac{r_i}{r_0}\right)^2\right\} \tag{10.61}$$

となる．式（10.60）と（10.61）から，$(\sigma_\theta)_{\max}$ はつねに $(\sigma_r)_{\max}$ より大きいことがわかる．

図 10.9 は，式（10.58），（10.59）を，r_i/r_0 をパラメータとして，図示したものである．ただし，$\nu=0.3$ としている．円孔が小さくなれば，σ_θ も σ_r も孔の近くで著しく変化する．孔径が0に近づくと，$(\sigma_\theta)_{\max}$ は，式（10.61）より

$$(\sigma_\theta)_{\max}=\rho\omega^2\frac{3+\nu}{4}r_0^2 \tag{10.62}$$

また，r_i が r_0 に近づくと，

$$(\sigma_\theta)_{\max}=\rho\omega^2r_0^2 \tag{10.63}$$

となる．両式から，孔径を小さくしても，$(\sigma_\theta)_{\max}$ は，円輪（$r_i\fallingdotseq r_0$）のときより約 20% しか低下しないことがわかる．

b） 中実円板

円孔のない中実円板の場合は，境界条件の一つは，円板の中心で変位が0であ

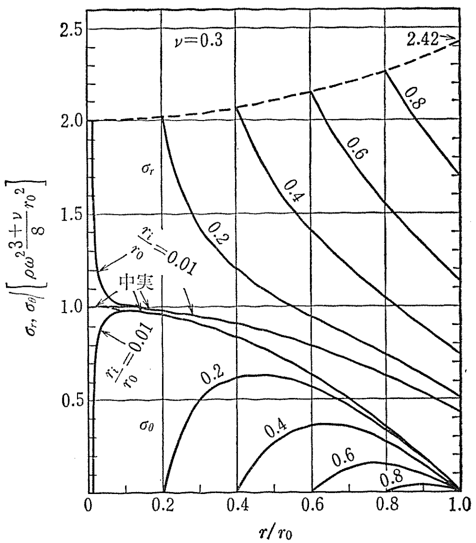


図 10.9　回転円板の半径方向の応力分布

ること，すなわち，

$$r=0 : u=0 \tag{10.64}$$

となる．したがって，一般解（10.51）で，$C_2=0$ とおかなければならない．残りの定数 C_1 は，前と同様に，円板の外周で $\sigma_r=0$ となる条件から決められる．すなわち，式（10.52）から，$C_2=0$ とおいて，

$$C_1=\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2\frac{3+\nu}{8(1+\nu)}r_0{}^2 \tag{10.65}$$

変位および各応力成分は，式（10.51）～（10.53）から，

$$u=\frac{\rho\omega^2}{8E}r\{(3+\nu)(1-\nu)r_0{}^2-(1-\nu^2)r^2\} \tag{10.66}$$

$$\sigma_r=\rho\omega^2\frac{3+\nu}{8}r_0{}^2\left\{1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right\} \tag{10.67}$$

$$\sigma_\theta=\rho\omega^2\frac{3+\nu}{8}r_0{}^2\left\{1-\frac{1+3\nu}{3+\nu}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right\} \tag{10.68}$$

式（10.67），（10.68）は図 10.9 の破線のようになり，中心でその値は，

$$(\sigma_r)_{\max}=(\sigma_\theta)_{\max}=\rho\omega^2\frac{3+\nu}{8}r_0{}^2 \tag{10.69}$$

となる．孔径が 0 に近づくとき，$(\sigma_\theta)_{\max}$ は式（10.62）で与えられ，これと式（10.69）を比較すると，有孔円板の場合は，$(\sigma_\theta)_{\max}$ が 2 倍になることがわかる．すなわち，微小な中心孔の縁における応力は，中実円板の中心における応力の 2 倍に等しくなることがわかる．

以上の回転円板の各式は，電動機回転子のような，比較的長い円筒に対しても，近似的に用いることができる．

大型回転子を鍛造でつくる場合，応力が最大になる中心部に，とかく材料欠陥を生じやすい．この材料の強さに対する不確実性を除くため，通常，回転子の軸にそって中心孔（検査孔）をあけている．この孔のために，最大応力は 2 倍になるが，それによって鍛造品内部の材料の健全性が調べられる．また，通常は，予備試験で，孔のまわりの応力が材料の降伏点をこえるような過大速度で，回転子を回転させる．そうすると，孔のまわりの部分には，永久ひずみが生じるので，回転子を停止した後も応力は残る．すなわち，降伏を起こした回転子の内部側は，降伏を起こしていない外側の部分によって圧縮され，逆に外側の部分は引張りを受ける．これは，ちょうど 10.3 節の組合せ円筒の場合と同様の応力状態（図 10.7）になり，過大応力によって孔のまわりに生じる残留応力は，遠心力によって生じる応力と符号が逆になる．したがって，過大応力を与えることは，回転時の応力分布に強度上好都合な結果となる．

10 章の整理

1. 薄肉円筒（内圧）

　円周応力　$\sigma_\theta=pr/t$　(10.1)

　軸応力　$\sigma_z=pr/2t$　(10.2)

　円周ひずみ　$\varepsilon_\theta=\frac{1}{E}(\sigma_\theta-\nu\sigma_z)=\frac{pr}{Et}\left(1-\frac{\nu}{2}\right)$　(10.4)

　半径の増加　$\Delta r=r\varepsilon_\theta=\frac{pr^2}{Et}\left(1-\frac{\nu}{2}\right)$　(10.5)

2. 厚肉円筒

　基礎式：$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=0$　(10.12)

　一般解：$u=C_1r+\frac{C_2}{r}$　(10.13)

　境界条件：$r=r_i$；$\sigma_r=-p_i$，$r=r_0$；$\sigma_r=-p_0$　(10.17)

内圧のみを受ける場合，

$$\sigma_r=\frac{p_i r_i^2}{r_0^2-r_i^2}\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right) \tag{10.29}$$

$$\sigma_\theta=\frac{p_i r_i^2}{r_0^2-r_i^2}\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right) \tag{10.30}$$

$$\tau_1=\frac{1}{2}(\sigma_\theta-\sigma_r) \tag{10.31}$$

3.　回転円板

基礎式：$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}+\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r=0 \tag{10.50}$$

一般解：$$u=C_1 r+\frac{C_2}{r}-\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2\frac{r^3}{8} \tag{10.51}$$

境界条件：有孔円板　$\sigma_r|_{r=r_i}=0$，$\sigma_r|_{r=r_0}=0$

　　　　　中実円板　$u|_{r=0}=0$，$\sigma_r|_{r=r_0}=0$

最大応力：

有孔円板　$$(\sigma_\theta)_{\max}=\rho\omega^2\frac{3+\nu}{4}r_0^2\left\{1+\frac{1-\nu}{3+\nu}\left(\frac{r_i}{r_0}\right)^2\right\} \tag{10.61}$$

$$r_i/r_0\to 0:\ (\sigma_\theta)_{\max}=\rho\omega^2\frac{3+\nu}{4}r_0^2 \tag{10.62}$$

$$r_i/r_0\to 1:\ (\sigma_\theta)_{\max}=\rho\omega^2 r_0^2 \tag{10.63}$$

中実円板　$$(\sigma_r)_{\max}=(\sigma_\theta)_{\max}=\rho\omega^2\frac{3+\nu}{8}r_0^2 \tag{10.69}$$

有孔円板の最大応力≧(中実円板の最大応力)×2

問　題　10

1.　内圧を受ける円筒の σ_θ を計算する際，厚肉円筒の公式を用いたときと，薄肉円筒の公式を用いたときとで，どの程度値が異なるか．一例として，$r_i/r_0=0.9$ の場合を示せ．

2.　内径 100 mm，外径 220 mm の両端閉鎖の厚肉鉄管に，内圧 70 MPa が作用するとき，管に生じる円周応力 σ_θ，半径応力 σ_r，軸応力 σ_z，および最大せん断応力 τ_1 の分布を求めよ．ただし，管は長く，両端の影響はないものとする．

3.　2. で，円周ひずみ ε_θ，半径ひずみ ε_r，軸ひずみ ε_z，および半径方向変位 u を求めよ．ただし，$E=200$ GPa，$\nu=0.3$ とする．

4.　同一材料からなる (1) 中実円板，(2) 中心に小円孔を有する円板，(3) 円孔を有する円板 ($r_i/r_0=1/4$)，(4) 円輪，の許容周速度を比較せよ．ただし，ポアソン比を $\nu=0.3$ とする．

11. ひずみエネルギ

11.1　ひずみエネルギの一般式

物体に外力が作用すると，物体は変形し，外力の作用点も移動するから，外力は仕事をする．この外力のなす仕事は，物体の変形に伴う内力仕事として物体に吸収される．この仕事を**ひずみエネルギ** (strain energy) という．外力による応力の値が，材料の弾性限度以下であると，物体は弾性変形を生じて，このエネルギを吸収するので，**弾性ひずみエネルギ** (elastic strain energy) という．弾性変形の場合は，外力を除くと，ひずみはただちに消失して，物体は原形にもどり，吸収していたひずみエネルギは，すべて回収される．

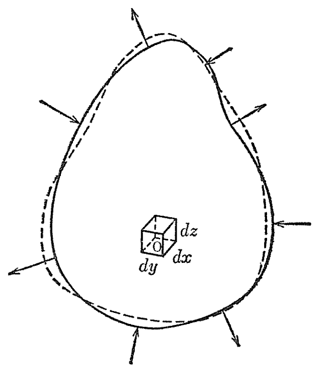


図 11.1

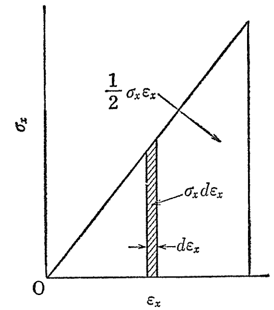


図 11.2　ひずみエネルギ

いま，弾性体中の任意の点Oに，稜の長さが dx, dy, dz の微小な直六面体を考え (図 11.1)，応力およびひずみが 0 の状態から変形して，ある応力状態に達するまでに，六面体の表面に働く応力 (図 8.2) が弾性移動によってなす仕事を求める．x 面に垂直に働く力は，垂直応力 σ_x に面積 $dydz$ を乗じて，$\sigma_x dydz$ となる．x 面の x 軸方向の移動距離は $\varepsilon_x dx$ であるが，それに至るまでの微小変形量は $d\varepsilon_x dx$ であるから，この微小変形による仕事は