

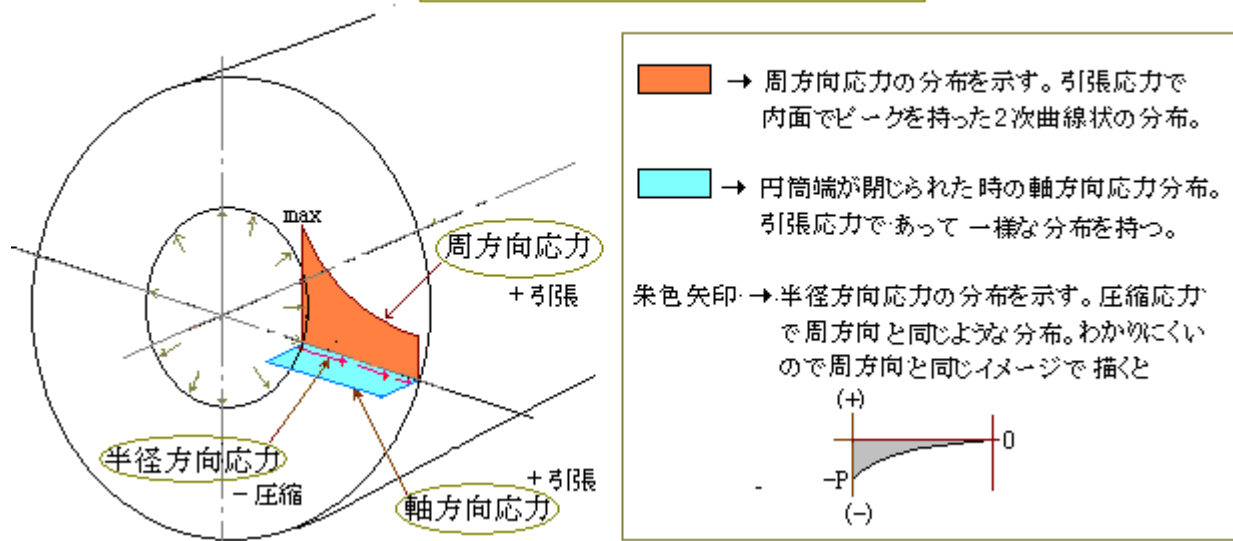
【整番】SE-07-TM-011	【標題】内圧を受ける円筒胴(管)の応力/肉厚計算		
分類：構造(圧力荷重)／種別：技術メモ	作成年月：H25.07／改訂：Ver0.0 (H25. 8)	作成者：N.Miyamoto	

全 19 枚

構成：1. 応力/肉厚計算の基本形、 2. 内圧円筒の規格式とその背景、 3. 内圧円筒の軸方向応力、  
4. Lamé 解の運用例、 5. 超高圧円筒の応力/肉厚計算

**円筒要素**は、プラント構造物で最も基本的な要素である。塔槽類や熱交の胴部分、あるいは配管や熱交チューブ類の直管部分が然り。機器/配管のハード設計は、まず胴部分や直管部分の肉厚を決めるところから始まる。そのサイジングは少しも難しくないが、他の構成材に比べれば物量的に圧倒的な量になるし、これにつながる鏡/蓋板/円錐胴/管継手/ノズル/フランジなどは胴/直管の肉厚を意識しているので決してぞんざいには扱えない。ここでは**内圧を受ける単一円筒**を対象に、耐圧強度及びこれに要する肉厚について考えの骨子を紹介し、これに係わる Basic な事項を検討してみたい。

図1 内圧下の円筒要素の応力分布



## 1. 応力/肉厚計算の基本形

内圧が作用する円筒形の管や胴の応力/肉厚計算の基本形は以下のように整理できる<sup>(1)(3)</sup>。

応力式： $\sigma = P \left[ \frac{D_o}{2t} \right] - y$ 、肉厚式： $t = PD_o / (2\sigma + 2yP)$		
ここで $\sigma$ = 設計応力(N/mm <sup>2</sup> )、 $P$ = 内圧(MPa)、 $D_o$ = 外径(mm)、 $t$ = 肉厚(mm)、 $y$ = 係数(下表)		
	y 値	プロフィール
① Lamé の式	—	内圧作用下の円筒に関する Lamé の弾性解によるもの
② 修正 Lamé の式	0.4	Lamé の式を簡略化したもの
③ 内径の式	1.0	内圧が内径位置まで作用した時の式
④ 平均径の式	0.5	内圧が平均径位置まで作用すると仮定した時の式
⑤ 外径の式	0	内径が外径位置まで作用すると仮定した時の式
⑥ Creep Common の式	0.7	種々のクリープを考慮した式を平均化したもの
⑦ ASME の式	0.4 - 0.7	ASME 規格で調整されたクリープを考慮した式

(注)ここで云う“内圧  $P$ ”はゲージ圧、但し外圧は大気圧としてゲージ圧零とする。なお、外圧が大気圧以上のときは  $P$  は内外差圧(=内圧－外圧)とする(→補足説明(\*2)の(2)を参照のこと)。

なお表中の**設計応力**は肉厚算定ベースの応力を意味し、具体的には、応力式では発生応力、肉厚式では許容応力になる。この場合、設計応力 $\sigma$ は**最大主応力説**(**補 1** 参照)によっている。円筒における最大主応力は常に周方向寄りの内表面に発生する。内圧による周方向応力は主応力であって、他の主応力即ち半径方向/軸方向応力よりも常に高く現れ、その断面分布は内表面で最大になるからである。故に単純には、**設計応力→内表面( $D_i$ )の周方向応力**とみればいい( **図 1** を参照のこと)。

①の **Lame** の式は汎用式で薄肉にも厚肉にも適用できるが、一般には厚肉で用いられることが多い。薄肉には①を修正した②が用いられる。また③～⑦も薄肉に適用される。

### ①の **Lame** の式について：

**Lame** による内圧円筒の弾性解析(**補 2** 参照)によれば、円筒壁に生じる応力成分は次式で与えられる。

$$\text{周方向： } \sigma_t = P\{(r_o/r)^2 + 1\}/(Y^2 - 1)$$

$$\text{長手方向： } \sigma_l = P\{1/(Y^2 - 1)\}$$

$$\text{半径方向： } \sigma_r = -P\{(r_o/r)^2 - 1\}/(Y^2 - 1)$$

ここで、 $r$ =任意半径位置、 $r_o$ =外半径、 $r_i$ =内半径、 $Y$ =半径比( $=r_o/r_i$ )、 $P$ =内圧  
これらは他にせん断成分が存在しないので、主応力( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ )そのものでもある。

最大主応力は、前述のように内表面( $r=r_i$ ) の周方向に派生するので、設計応力は  $r=r_i$  とおいて、

$$\sigma = P\{(Y^2 + 1)/(Y^2 - 1)\}$$

この式を変形すると、

$$\begin{aligned} \sigma &= P\{(D_o^2 + D_i^2)/(D_o^2 - D_i^2)\} = \{D_o^2 + (D_o - 2t)^2\}/\{2t\{D_o + (D_o - 2t)\}\} \\ &\rightarrow \sigma = \{(1/2)(D_o/t)^2 - (D_o/t) + 1\}/\{(D_o/t) - 1\} \end{aligned}$$

### ②の修正 **Lame** の式について：

上記のように **Lame** の式は、応力式が $(D_o/t)$ の2次式になるので、肉厚式は多少複雑な式になり、例えばよく使われる薄肉円筒の肉厚を手早く見積もるとき手間がかかる。そのため **Lame** 式を薄肉用途に単純化した式が提案されている。

薄肉管では、肉厚の応力分布が平坦になって、材力で一般に使う  $\sigma = PD_o/(2t)$  に近づく。そこで、近似式として  $\sigma = P\{[D_o/(2t)] - y\}$  を想定し、**Lame** の原式からの誤差がほどほどに収まるように係数  $y$  を設定することが考えられる。ここで仮に  $D_o/D_i = 1.5$  ( $\rightarrow D_o/t = 6$ ) とすれば、

**Lame** 式： $\sigma = \{(1/2)(6)^2 - (6) + 1\}/\{(6) - 1\}P = 2.6P$ ， 近似式： $\sigma = P\{(1/2)(6) - y\} = (3 - y)P$   
従って  $2.6P = (3 - y)P \rightarrow y = 0.4$  になり、近似式  $\sigma = P\{[D_o/(2t)] - 0.4\}$  が得られる。この近似式と **Lame** 式を比較すると、次のようになる。

$D_o/t$	① <b>Lame</b> 式による $\sigma$	② 近似式による $\sigma$	応力比②/①
50	24.5P	24.6P	1.004(+0.4%)
30	14.52P	14.6P	1.006(+0.6%)
10	4.556P	4.6P	1.010(+1.0%)
8	3.57P	3.6P	1.008(+0.8%)
6	2.6P	2.6P	1.0 (0%)

応力比②/①は 0.4～1.0% ぐらいで殆ど差異がない。故に  $D_o/t \leq 6$  すなわち  $(D_o/D_i) \leq 1.5$  の薄肉円筒では、 $y=0.4$  とした近似式  $\sigma = P \{ [D_o/(2t)] - 0.4 \}$  が成立すると云ってよい。文献などでは  $y=0.4$  とした近似式を修正 **Lame** の式と呼んでいる。

### ③④⑤の内径式、平均径式、外径式について。

通常、内圧下の円筒状の構造物では、平均周方向応力は次式でカウントされる。

$$\sigma_t = \text{圧力荷重/荷重保持断面積} = (\text{内圧} \times \text{圧力投影面積}) / \text{金属部分断面積} = PA_f/A_m$$

ここで  $\sigma_t$  は、断面  $t$  での平均応力いわゆる膜応力であることに注意。前述のように薄肉管では肉厚の応力分布が平坦になって肉厚平均で内面周方向応力を近似できる。

図 2(a)の単純円筒モデルの場合、円筒長さを単位長さ 1 に採れば、

$$PA_f = PD_i, A_m = 2t \rightarrow \sigma_t = PA_f/A_m = PD_i/(2t) = P(D_o - 2t)/(2t) = P\{[D_o/(2t)] - 1\}$$

図 2(a)のモデルでは、内圧投影面積  $A_f$  を当然ながら  $D_i(x1)$  にとっているが、 $A_f$  を 図 2(b)(c)のように平均径  $[(D_o + D_i)/2]$  ないし外径  $D_o$  にとるという考えもある。この場合、

$$\text{平均径のとき: } \sigma_t = P\{(D_o + D_i)/2\}/(2t) = P\{[D_o + (D_o - 2t)]/2\}/(2t) = P\{[D_o/(2t)] - 0.5\}$$

$$\text{外径のとき: } \sigma_t = PD_o/(2t) = \{[D_o/(2t)] - 0\}$$

になる。一般式  $\sigma = P \{ [D_o/(2t)] - y \}$  で云えば、

内径の式のとき  $y = 1$ 、平均径の式のとき  $y = 0.5$ 、外径の式のとき  $y = 0$

ということになる。これらの式については、一般に次のように云われている。

内径式 → 薄肉では問題ないが、厚肉  $[(r_o/r_i) > 1.2]$  では危険側になる

平均径 → 常温破壊試験や高温クリープ試験の結果によく合う。

外径式 → 薄肉では問題ないが、厚肉では過度に安全側になる。

平均径の式は良好で、旧 JISB8271 「圧力容器の胴及び鏡板」では第一種容器の肉厚計算式として採用されていた。

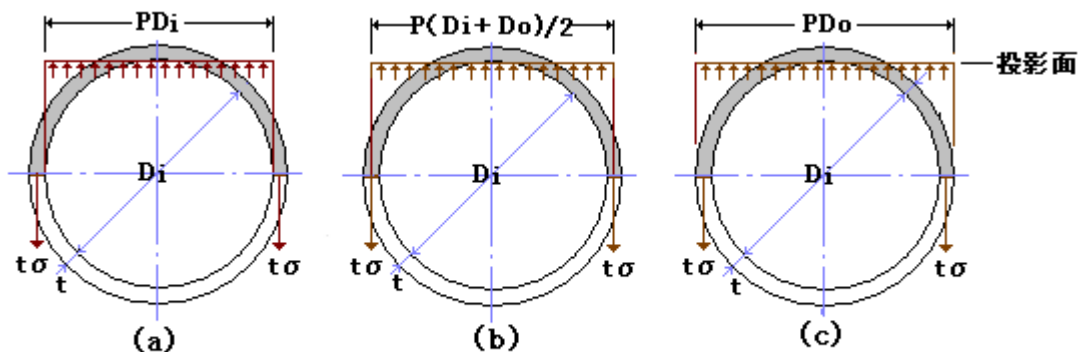


図2. 内圧の負荷領域に関する3つのバリエーション

( 図の内圧 x 圧力投影面積については積分して得られている。図 3 の薄肉円筒を参照のこと。 )

### ⑥⑦の Creep Common、ASME の式について<sup>(1)</sup>

いずれも高温クリープ域を含んだ式である。Creep Common の式については古い Burrows 等の文献に見えるが内容がわからない。多くのクリープ設計式の平均的なところを狙って作られたようだが、平均径の式より小さな応力を見積もり、クリープ試験の結果にくらべ総じて不安全な結果になるようだ。ただクリープの影響を論じる時にしばしば文献類で引用されているようだが、これは

Creep Common の応力を、下限界の指標にしていることに由ると思われる。

ASME の式は、1952 年来、ASME 規格で採用されている肉厚式を指している。例えば、ASME B31.3 では、フェライト鋼/オーステナイト鋼/その他延性鋼について 482～692℃ 以上について y 値を与えている。その場合、クリープ発生温度以下では **Lame** の修正式と同じく  $y=0.4$ 、クリープ域では **Creep Common** の  $y=0.7$  を y 値の最大値にしている。詳細はわからない。

## 2. 内圧円筒の規格式とその背景

- (1) プラント/動力関連の構造規格では、殆どの場合、円筒胴や管の肉厚計算式(必要最小肉厚式)が与えられている。その代表的なもの(を以下に示す)。

薄肉円筒：高圧ガス特定則(12 条)：  $t = PD_i / (2 \sigma_a \eta - 1.2P)$  ----- (2-1a)

JIS B8265 付属書 E：  $t = PR / (\sigma_a \eta - 0.6P)$  ----- (2-1b)

JPI 7S-77：  $t = PD / (2SE + 2YP)$  ----- (2-1c) (補 3)

厚肉円筒：高圧ガス特定則(12 条)：  $t = (D_i/2) \{ (\sigma_a \eta + P) / (\sigma_a \eta - P) \}^{0.5} - 1$  ----- (2-2a)

JIS B8265 付属書 E：  $t = R(Z^{0.5} - 1)$  但し  $Z = (\sigma_a \eta + P) / (\sigma_a \eta - P)$  ----- (2-2b)

ここで、 $t$ =計算厚さ(mm)、 $P$ =設計圧力(含液頭圧)(MPa)、 $\sigma_a$ ,  $S$ =基本許容応力(N/mm<sup>2</sup>)、 $D_i$ =内径(mm)、 $R$ =内半径(mm)、 $D$ =管外径(mm)、 $\eta$ ,  $E$ =品質係数(溶接継手効率)  
 $Y$ =係数

特定則及び JIS B8265 の式は内径基準の式。実際は外径基準の式もあるが、単に表示の違いのみで内容は同じ。JPI 7S-77 は配管規格で、実質 ASME B31.3 に同じ。

上記の高圧ガス特定則と JISB8265 の式は、 $D_i=2R$  であるから、全く同じ式になる。また、適用区分は次のようになっており、

特定則：  $t < (1/4)D_i$  のとき薄肉、 $t \geq (1/4)D_i$  のとき厚肉 → しきい値  $t = (1/4)D_i$

JISB8265：  $P \leq 0.385 \sigma_a \eta$  のとき薄肉、 $P > 0.385 \sigma_a \eta$  のとき厚肉 → しきい値  $P = 0.385 \sigma_a \eta$

一見、異なっている。しかし JISB8265 の肉厚式  $t = PR / (\sigma_a \eta - 0.6P)$  を変形すると、 $P / (\sigma_a \eta) = 2 / (D_i/t + 1.2)$  になり、しきい値が  $P / (\sigma_a \eta) = 0.385$  である所から、

$$2 / (D_i/t + 1.2) = 0.385 \rightarrow D_i/t = 2 / 0.385 - 1.2 \div 4 \rightarrow t = (1/4)D_i \rightarrow \text{特定則のしきい値}$$

故に、特定則も JIS も同じしきい値で、薄肉円筒と厚肉円筒を区分していることになる。

- (2) 高圧ガス特定則の規定に関する補足資料では、薄肉ないし厚肉円筒の式の導入過程について、次のように説明されている。

薄肉円筒の場合：

図 2(a)に示すように圧力投影面積/単長  $A_r = 2 \int_0^{\pi/2} R \sin \theta d\theta = 2R = D_i$ 、金属断面積/単長  $A_m = 2t$  であるから、 $\sigma = P A_r / A_m = PD_i / (2t) \rightarrow t = PD_i / (2\sigma)$  が得られる。実質の圧力投影面積( $D_i$ )は

$D_i = D_i + \beta t$ に拡がるので、肉厚は  $t = P(D_i + \beta t)/(2\sigma) \rightarrow t = PD_i/(2\sigma - \beta P)$  に変わる。更に  $\sigma$  に許容値  $\sigma_{a\eta}$ 、 $\beta$  値に 1.2 を引当てれば、(1a)式の  $t = PD_i/(2\sigma_{a\eta} - 1.2P)$  が得られる。

厚肉円筒の場合：

図 2(b)に厚肉円筒モデルを示す。この場合の Lamé の解は前述の通り。最大主応力は内表面の周方向に派生する。即ち  $\sigma = P\{(Y^2+1)/(Y^2-1)\}$ 、この式を変形して

$$\sigma/P = (Y^2+1)/(Y^2-1) \rightarrow Y^2 = (\sigma+P)/(\sigma-P)$$

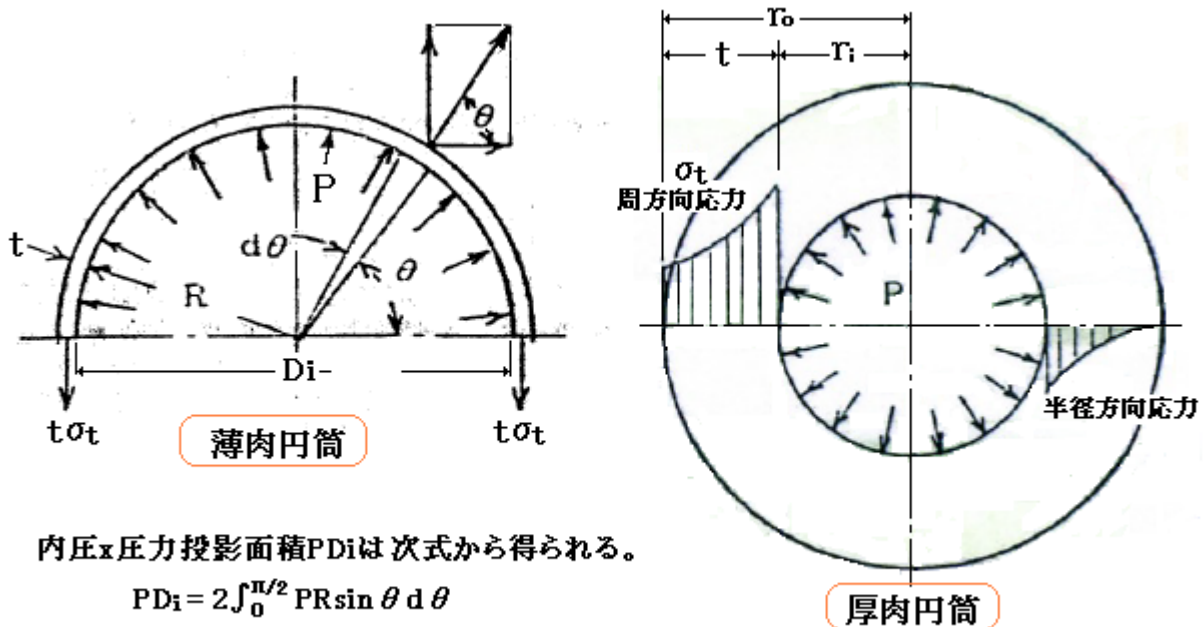
$Y = r_o/r_i = (r_i+t)/r_i$  であるから、

$$(r_i+t)/r_i = \{(\sigma+P)/(\sigma-P)\}^{0.5} \rightarrow t = r_i [\{(\sigma+P)/(\sigma-P)\}^{0.5} - 1]$$

ここで、 $r_i = D_i/2$ 、 $\sigma = \sigma_{a\eta}$  とすれば

$$t = (D_i/2) [\{(\sigma_{a\eta} + P)/(\sigma_{a\eta} - P)\}^{0.5} - 1] \rightarrow (2-2a)式$$

が得られる。



内圧x圧力投影面積  $PD_i$  は次式から得られる。

$$PD_i = 2 \int_0^{\pi/2} PR \sin \theta d\theta$$

図 3 特定則肉厚式に関する説明図

(3) この補足資料には明記されていないが、計算式の基本形としては、

薄肉の場合の(1a)式  $\rightarrow$  修正 Lamé の式

厚肉の場合の(2a)式  $\rightarrow$  Lamé の式

になる。何故ならば、厚肉の場合、(2-2a)式は Lamé の式そのものであるからである。また薄肉の場合、修正 Lamé の式を次のように変形すれば、(2-1a)式になるからである。

$$t = PD_o/(2\sigma + 0.8P) = P(D_i + 2t)/(2\sigma + 2 \times 0.4P)$$

$$\rightarrow t = PD_i/(2\sigma - 1.2P) \rightarrow t = PD_i/(2\sigma_{a\eta} - 1.2P)$$

この場合の Lamé の式や修正 Lamé の式は、1.の「応力/肉厚計算の基本形」でも述べたように最大主応力説によるものである。即ち下図のように肉厚に分布する周方向応力  $\sigma_t$  の最大値を採ったものである。

[ 周方向応力  $\sigma_t$  は長手方向応力  $\sigma_l$  や半径方向応力  $\sigma_r$  よりも大きいし、 $\sigma_t, \sigma_l, \sigma_r$  は何れも

主応力であるから、必然的に内表面における  $\sigma_t$  の Max 値が、肉厚断面の最大主応力になる。]

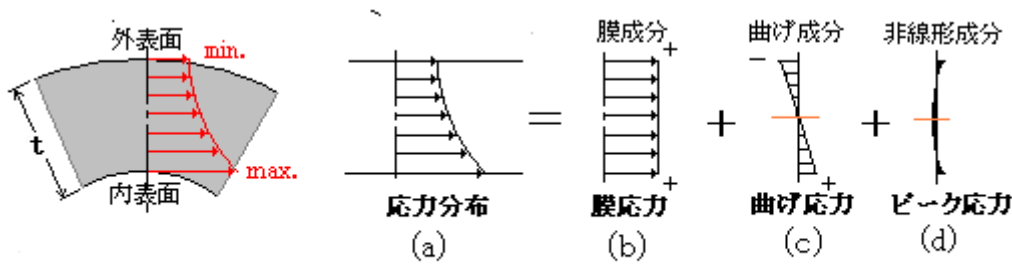


図4 周方向応力分布とその成分

然るに ASME の応力解析評価の考えでは、肉厚断面の応力分布を下図のように分解し、膜成分のみを 1 次応力として延性破壊防止の観点から制限する。しかし、周方向応力の最大値は

一次応力(膜成分)+2 次応力(曲げ成分)+ピーク応力(非線形成分)

になり、もともと延性破断に直接寄与しない 2 次応力/ピーク応力を内包している。故に周方向応力の最大値をベースに肉厚式を設定することには懸念が残る。また最大主応力説には、降伏/破壊条件として誤差が大きいのでは？という懸念もある。何故なら規格や標準の多くが、主応力説によらず最大せん断応力説(→Tresca 応力)によっている事実がある。

次項では、もともとこれら規格式が持っているこれら懸念事項をクリアするため、最大せん断応力説(Tresca 応力)を用いて応力式を求め、主応力説による式と直接比較してみたい。

- (4) 前 1 節で示したように、Lame の解は、円筒壁に生じる周方向応力  $\sigma_t$ 、軸方向応力  $\sigma_l$ 、半径方向応力  $\sigma_r$  を与える。これらは、他にせん断成分  $\tau$  が介在しないので主応力でもある。また常に  $\sigma_t > \sigma_l > \sigma_r$  であるから、次の 3 つのせん断応力強さのうち、 $S_1$  が常に最大になる。

$$S_1 = |\sigma_t - \sigma_r|, \quad S_2 = |\sigma_l - \sigma_r|, \quad S_3 = |\sigma_t - \sigma_l|$$

この場合、 $\sigma_t$  と  $\sigma_r$  は壁断面に勾配を持つので、膜応力、曲げ応力および非線形応力に分離される。そして膜応力は 1 次応力に、曲げ応力は 2 次応力に、非線形応力はピーク応力に区分される。この場合、肉厚を決定するのは 1 次応力であるから、一次膜応力強さ( $P_m$ )を用いて

肉厚式を決めることになる。膜応力成分は  $\sigma_{tm} > \sigma_{lm} > \sigma_{rm}$  であるから、最大の  $P_m$  は、

$$P_m = |\sigma_{tm} - \sigma_{rm}|$$

膜応力  $\sigma_{tm}, \sigma_{rm}$  は肉厚分布応力  $\sigma_t, \sigma_r$  を平均化して得られる。

$$\sigma_{tm} = \{1/(r_o - r_i)\} \int \sigma_t dr = \{1/(r_o - r_i)\} \{P/(Y^2 - 1)\} \int \{(r_o/r)^2 + 1\} dr = P/(Y - 1) = Pr_i/t$$

$$\sigma_{rm} = \{1/(r_o - r_i)\} \int \sigma_r dr = -\{1/(r_o - r_i)\} \{P/(Y^2 - 1)\} \int \{(r_o/r)^2 - 1\} dr = -P/(Y + 1) = -Pr_i/(r_o + r_i)$$

この結果を上記の  $P_m$  式に代入して次式が得られる( $P_m$  は Tresca 応力である)。

$$P_m = |\sigma_{tm} - \sigma_{rm}| = \{2Y/(Y^2 - 1)\}P \quad \text{-----}(2-3)$$

更にこの式を変形して  $t (=r_o - r_i)$  を求め、 $P_m$  に対する許容応力を  $\sigma_{a\eta}$  とすれば、

$$t = r_i [(P/P_m - 1) + \{1 + (P/P_m)^2\}^{0.5}] \rightarrow t = r_i [\{P/(\sigma_{a\eta}) - 1\} + \{1 + \{P/(\sigma_{a\eta})\}^2\}^{0.5}] \quad \text{-----}(2-4)$$

)

膜応力強さ  $P_m$ (図では  $\sigma$  表示)と、Lame の式(JIS 厚肉式)と修正 Lame の式(JIS 薄肉式)ないし平均径の式から得られる応力( $\sigma$ )を比較すると図 3 のようになる。平均径の式は、破壊試験の結果



とよく合うとされる所から、発生応力の指標として使用している。

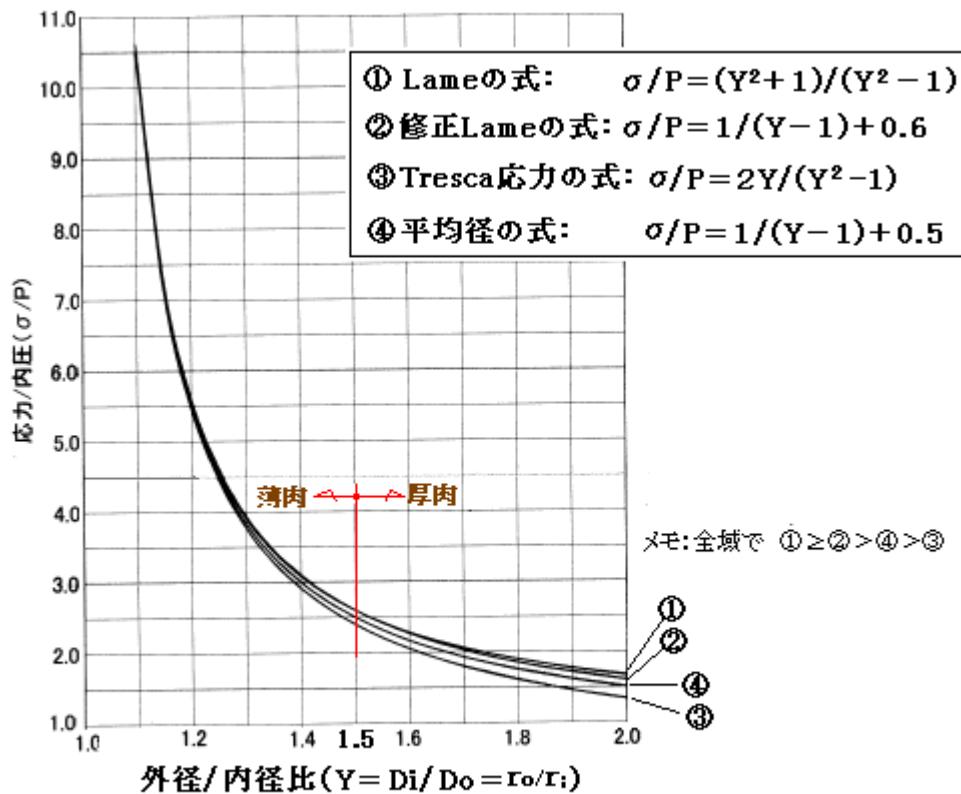


図5 内外径比と応力の関係(応力式の比較)

このグラフは幾何形状 Y に対する  $(\sigma/P)$  を示している。内圧 P を一定とすれば縦軸  $(\sigma/P)$  は発生応力レベルそのものを表わしている。

グラフから判るように、① ≥ ② > ④ > ③ になる。①②はかなり漸近しており、Y=1.5 まではむしろ②の方が若干高めであるが、Y=1.5 を越えると、逆に①の方が高くなる(即ち、薄肉域では②の方が多少安全側、厚肉領域では①の方が安全側になる)。

③の Tresca 応力(即ち  $P_m$ )は最大せん断応力説によるもので、通常、実際の応力より高めになる。しかし平均径の式は破壊試験の結果に合う傾向があり実際の応力に近いとすれば、③が④の平均径の式を下回るの?である。破壊域の挙動イコール弾性域の挙動ではない筈であるから、その影響があるのかもしれない。

ただ③ > ④の事実とはともかくとして、薄肉域(Y<1.5)では、①～④の応力に大差はないが、③(あるいは④)に比べて①②の応力がやや大きくなる事実は、特定則/JIS 薄肉式②の式が適度に安全側の設定になっていることを意味している。

厚肉域(Y>1.5)でも傾向は然りであるが、①～④の夫々の差異が開いて自ずと③(あるいは④)に比べ①②の応力が大きくなっており JIS 厚肉式(Lamé 式)の裕度が大きいことがうかがえる。ただこれが過度であるとは言い切れないのかも知れない。高圧から超高圧という設備上の重大さから云えば、この程度の裕度は必要なのかも知れない。

図 4 に Tresca 応力式と Lamé の式(JIS 厚肉式)/修正 Lamé の式(JIS 薄肉式)/平均径の式から

得られる肉厚の比較を示す( $\sigma$ は許容値とする)。傾向としては応力の場合と同じで、高圧になる程肉厚は厚くなる。当然ながら最大主応力説による①②の方が厚肉になる。

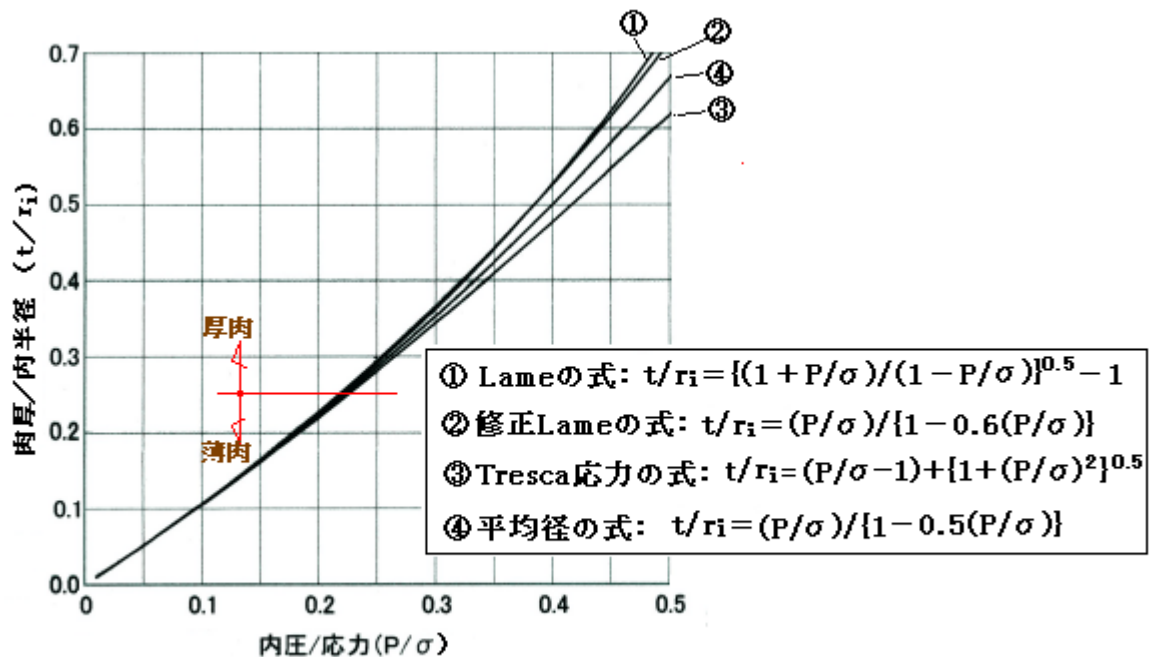


図6 内圧/応力比と肉厚の関係(肉厚式の比較)

- (5) 更に上記の Tresca 応力式を修正 Lamé の式の形に簡易化して考察してみる。前項の検討では、周方向膜応力と半径方向膜応力は次のようであった。

$$\sigma_{tm} = Pr_i/t, \quad \sigma_{rm} = -Pr_i/(r_o + r_i)$$

これらは最大/最小の主応力なので、その応力差をとって最大せん断応力強さが得られる。即ち、

$$S_{\max} = |\sigma_{tm} - \sigma_{rm}| = P\{Di/(2t) + ri/(r_o + r_i)\} = P\{Di/(2t) + 1/(Y + 1)\} \quad (\rightarrow \text{前項では } P_m \text{ と表示})$$

前述のように特定則/JIS の薄肉式では  $Y = 1.5$  が上限になる。そこで  $Y = 1 \sim 1.5$  とすれば、

$$S_{\max} = P\{Di/(2t)\} + 0.4 \sim 0.5$$

安全側に考えるのであれば応力が高めの 0.5 をとって、 $S_{\max} = P\{Di/(2t)\} + 0.5$  ということになり、結果的に 平均径の式  $\sigma = P\{D_o/(2t) - 0.5\} = P\{D_i/(2t) + 0.5\}$  と同じになる。平均径の式は前述のように破壊試験の結果に近いために安全裕度が少ない。そこで [ ] 内の 0.5 を 0.6 にアップして  $S_{\max} = P\{Di/(2t)\} + 0.6$  にすれば規格式として適当な裕度が保てる。この  $S_{\max}$  式は、修正 Lamé の式  $\sigma = P\{D_o/(2t) - 0.4\} = P\{D_i/(2t) + 0.6\}$  に合致する。

前(2)項の薄肉円筒の説明では、実際とは異なる仮定の圧力投影面積が用いられているが、何故、“仮定の投影面積”なのか、説明はなされていない。素性のわからない圧力投影面積を使わずともかなりシリアスな最大せん断応力説に対して、修正 Lamé の式が適度な設計裕度を持っている事実を用いて合理的な説明ができるのではないかと思う。修正 Lamé の式の持つ適度な裕度こそが、今まで JIS などの規格式に使用されてきた唯一の理由ではなかったか？

### 3. 内圧円筒の軸方向応力



通常、内圧円筒の両端は閉じられているので、半径方向の伸び変形以外に、**内圧推力**による軸方向伸び変形も加わるが、これは周方向応力の半分程度になるので、内圧円筒のサイジング即ち肉厚設定は、前々節や前節で示したように周方向応力をベースにした肉厚算定式に拠ることが多い。しかし、内圧以外の機械荷重が加わると、場合によっては軸方向の累積応力が周方向を上回り軸方向ベースのサイジングになることも考えられるので、以下これについて考え方を示しておく。

(1) 内圧円筒の軸方向応力は、長手方向の境界条件によって決まる。下図に代表的な境界条件を示す。

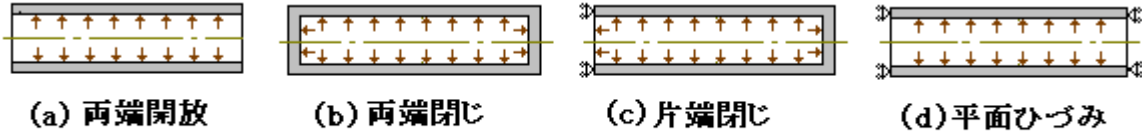


図7 内圧円筒の長手境界条件

(a)の**両端開放**の時は、長手拘束がなく端が開放されているので、軸方向推力の作用がなくまた半径方向ひずみや周方向のひずみに伴うポアソン効果も開放されて軸方向応力は零になる。即ち

$$\sigma_a = 0 \quad \text{----- (3-1)}$$

(b)の**両端閉じ**の時は、軸方向にエンドフォース  $F = \pi r_i^2 \cdot P$  が加わり一様に円筒を引き伸ばして

$$\begin{aligned} \sigma_a &= F/A = P \pi r_i^2 / (\pi r_o^2 - \pi r_i^2) = [1/\{(r_o/r_i)^2 - 1\}]P \\ \sigma_a &= \{1/(Y^2 - 1)\}P \quad \text{----- (3-2)} \end{aligned}$$

なる軸方向応力が発生する。なおこの軸方向応力は半径方向の変形になんら影響を及ぼさないので周方向/半径方向の応力は変化しない(Lameの解の通り)。

(c)では、片端のエンドフォースの作用が、一方の片端の拘束を受けて(b)と同じ状態になる。

(d)の**平面ひずみ**の時は、半径方向/周方向応力によるポアソン効果が円筒両端で拘束されて

$$\begin{aligned} \sigma_a &= -\nu (\sigma_r + \sigma_t) = -\nu [\{(r_o/r)^2 + 1\}/(Y^2 - 1) - \{(r_o/r)^2 - 1\}/(Y^2 - 1)]P \\ \sigma_a &= -\{2\nu/(Y^2 - 1)\}P \quad (\nu = \text{ポアソン比}) \quad \text{----- (3-3)} \end{aligned}$$

なる軸方向応力が発生する。なお軸方向のひずみは半径方向の変形には殆ど影響を及ぼさないため、周方向/半径方向の応力はそのまま(Lameの解の通り)。

配管など行き止まりや曲げ形状を持つ構造では、両端/片端閉じになる。機器と機器をストレートにつなぐ時は、端部にバネ境界が介在して両端開放と平面ひずみの中間になる。

なお(a)～(d)いずれの場合にしろ、**Lame**による周方向応力/半径方向応力は変化しない(念為)。

(2) 両端閉じや片端閉じの内圧円筒に、内圧以外の軸力や曲げが作用するときの応力及び必要肉厚を考慮してみる。この場合、最大せん断応力説と主応力説の2つのケースがある。

まず、最大せん断応力説によるケースでは、曲げに派生するせん断力を無視すると、

$$\text{軸方向膜応力強さ: } \sigma_{am} = \{1/(Y^2 - 1)\}P + W/A_m \pm Mr_m/I$$

$$\text{半径方向膜応力強さ: } \sigma_{rm} = -0.5P \quad (\rightarrow \text{応力の直線分布を仮定})$$

ここで  $P$ =内外差圧、 $M$ =円筒曲げモーメント、 $W$ =軸力(引張のとき+、圧縮のとき-)、

$Y$ =径比( $=r_o/r_i=D_o/D_i$ )、 $A_m$ =円筒金属断面積[ $=\pi(r_o^2-r_i^2)$ ]、 $r_m$ =平均半径 [ $=(r_o+r_i)/2$ ]、

$I$ =円筒断面 2 次モーメント( $=(\pi/64)(D_o^4-D_i^4)=(\pi/4)(r_o^4-r_i^4)$ )

膜応力強さ  $S$  は、これらの応力差( $\sigma_{am}-\sigma_{rm}$ )をとって、

$$S = | \{ 1/(Y^2-1) \} P + W/A_m \} \pm Mr_m/I + 0.5P | \quad \text{-----}(3-4)$$

次に最大主応力説による場合は、各荷重から生じる応力(主応力)を単純加算する。

$$S = \{ \{ 1/(Y^2-1) \} - 0.4 \} P + W/A_m \pm Mr_o/I \quad \text{-----}(3-5)$$

ここで、右辺第 1 項は内圧荷重項で、修正 Lamé 式のフォームを転用している。第 2 項は軸力項で、第 3 項は曲げ荷重項で外表面の最大応力をカウントしている。

(3-4),(3-5)式は肉厚  $t$  に関して線形関係でないので、式を変形して肉厚算定式を作ると、かなり煩雑になる。むしろ肉厚を仮定して応力が法規の制限( $\sigma_{a\eta}$ )を満たすように反復計算した方が早い。ただ薄肉の場合は、 $r_o \div r_i$  とおくことでかなり簡単化できる。例えば

$$1/(Y^2-1) = r_i^2/(r_o^2-r_i^2) = r_i/(2t), \quad A_m = \pi(r_o^2-r_i^2) \div 2\pi r_m t$$

$$I/r_o = (\pi/64)(D_o^4-D_i^4)/r_o \div \pi r_m^2 t$$

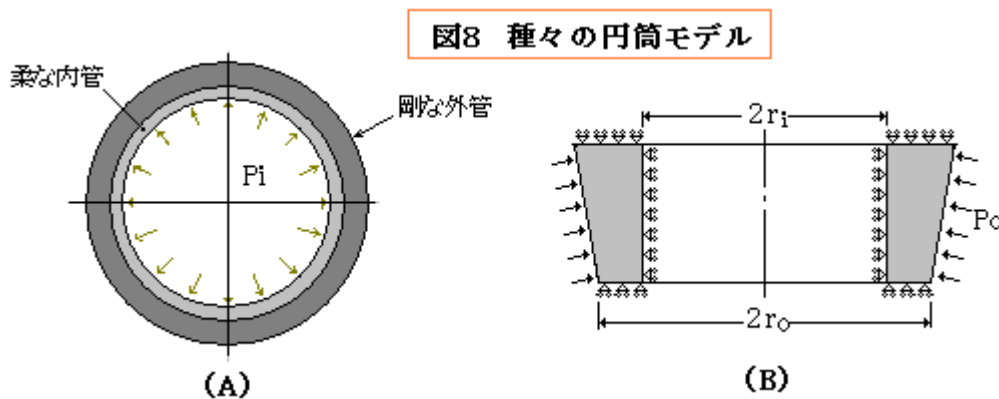
(3-5)式は、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \downarrow S &= \{ Pr_i/(2t) - 0.4P \} + W/(2\pi r_m t) \pm M/(\pi r_m^2 t) \\ t &= \{ 1/(S+0.4P) \} \{ Pr_i/2 + W/(2\pi r_m) \pm M/(\pi r_m^2) \} \quad \text{-----}(3-6) \end{aligned}$$

(3-6)式の応力  $S$  に対し、許容応力値  $\sigma_{a\eta}$  を与えれば、必要肉厚が計算できる。

#### 4. Lamé 解の運用例

内圧円筒に対する Lamé の解は、いろいろの境界条件をもった円筒構造に使用できる<sup>(4)(12)</sup>。以下、**補 2** の式を引用して、3 つの運用例を紹介する。



- (1) 外周拘束円筒について。図 8(A)のように柔らかい内管がかなり剛な外管に拘束された状態(Ex. ゴムライニング管)では、内面に比べ外面の半径方向変位は零に近いとみてよいと思われるので補 2 の(g)式から、

$$u = C_1 r_o + C_2 / r_o = 0$$

内表面  $r=r_i$  では、 $\sigma_r = -P_i$  であるから、補 2 の(h1)式より、

$$\sigma_r = \{E/(1-\nu^2)\}[C_1(1+\nu) - C_2\{(1-\nu)/r_i^2\}] = -P_i \rightarrow C_1/(1-\nu) - C_2/\{r_i^2(1+\nu)\} = -P_i/E$$

これら 2 つの式から、積分定数  $C_1, C_2$  を求めると

$$C_1 = -(P_i/E)[r_i^2(1-\nu^2)/\{r_i^2(1+\nu) + r_o^2(1-\nu)\}],$$

$$C_2 = -(P_i/E)[r_o^2 r_i^2(1-\nu^2)/\{r_i^2(1+\nu) + r_o^2(1-\nu)\}]$$

この結果を応力式(h1)(h2)に代入して次式が得られる。

$$\sigma_r = -\{[(1+\nu) + (r_o/r)^2(1-\nu)]/\{(1+\nu) + Y^2(1-\nu)\}\}P_i$$

$$\sigma_t = -\{[(1+\nu) - (r_o/r)^2(1-\nu)]/\{(1+\nu) + Y^2(1-\nu)\}\}P_i$$

内表面や外表面の応力は、

$$\text{内表面}(r=r_i) : \sigma_r = -P_i, \sigma_t = -\{[(1+\nu) - Y^2(1-\nu)]/\{(1+\nu) + Y^2(1-\nu)\}\}P_i$$

$$\text{外表面}(r=r_o) : \sigma_r = -[2/\{(1+\nu) + Y^2(1-\nu)\}]P_i, \sigma_t = -[2\nu/\{(1+\nu) + Y^2(1-\nu)\}]P_i$$

薄肉の場合、 $r_o \div r_i$  であるから、

$$\text{内表面}(r=r_i) : \sigma_r = -P_i, \sigma_t = -\nu P_i$$

$$\text{外表面}(r=r_o) : \sigma_r = -P_i, \sigma_t = -\nu P_i$$

周方向応力は、半径方向のポアソン効果によるもの。応力は内圧以下である。故にライニング材の許容応力が、最高使用内圧  $P_i$  を上回れば良い。

ライニング層の外管がそれほど剛とは言えないときは、多重円筒の扱いになる。

(2) 内周/両端拘束円筒について。図 8(B)はシール材として弁体の溝にはめ込まれたテフロンシールの例である。多少勾配はあるが、最小外径を使い円筒モデルで扱う。半径方向の変位は  $r=r_i$  で零であるから、 $u = C_1 r_i + C_2/r_i = 0 \rightarrow C_2 = -C_1 r_i^2 \rightarrow u = (r - r_i^2/r)C_1$

これを、応力-ひずみ関係式  $\sigma_r = \{E/(1-\nu^2)\}(du/dr + \nu u/r)$  に代入して、 $r=r_o$  とおけば

$$\sigma_r = \{E/(1-\nu^2)\}\{(1+r_i^2/r_o^2) + \nu(1-r_i^2/r_o^2)\}C_1 = -P_o \quad (\text{外表面にて})$$

であるから、 $C_1 = -(P_o/E)(1-\nu^2)/\{(1+r_i^2/r_o^2) + \nu(1-r_i^2/r_o^2)\}$  が得られる。これを用いて

$$\sigma_r = -\{[(1+r_i^2/r^2) + \nu(1-r_i^2/r^2)]/\{(1+r_i^2/r_o^2) + \nu(1-r_i^2/r_o^2)\}\}P_o$$

$$\sigma_t = \{E/(1-\nu^2)\}(u/r + \nu du/dr) = \{E/(1-\nu^2)\}\{(1-r_i^2/r_o^2) + \nu(1+r_i^2/r_o^2)\}C_1$$

$$= -\{[(1-r_i^2/r^2) + \nu(1+r_i^2/r^2)]/\{(1+r_i^2/r_o^2) + \nu(1-r_i^2/r_o^2)\}\}P_o$$

内外表面の応力は次のようになる。

$$\text{内表面}(r=r_i) : \sigma_r = -[2/\{(1+r_i^2/r_o^2) + \nu(1-r_i^2/r_o^2)\}]P_o, \sigma_t = \nu P_o$$

$$\text{外表面}(r=r_o) : \sigma_r = -P_o, \sigma_t = -\{[(1-r_i^2/r_o^2) + \nu(1+r_i^2/r_o^2)]/\{(1+r_i^2/r_o^2) + \nu(1-r_i^2/r_o^2)\}\}P_o$$

また両端拘束であるので、平面ひずみ扱いになる。その場合、軸方向応力は

$$\sigma_a = \nu(\sigma_r + \sigma_t) = -[2(1+\nu)\nu/\{(1+r_i^2/r_o^2) + \nu(1-r_i^2/r_o^2)\}]P_o$$

(3) 半径方向変位について。通常、円筒強度の方が重視されるが、場合によっては半径方向変位  $u$  が設計上、必要になることがある。このときは次の応力-ひずみ関係式に、

$$\varepsilon_t = u/r = (1/E)\{\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_a)\}$$

Lame の解から得られた  $(\sigma_t, \sigma_r)$  と 前節 3. で得られた  $\sigma_a$  を代入して変位  $u$  を求めればよい。ここではその結果のみを記す。

$$\text{両端開放のとき} : u = (P_i/E)\{1/(Y^2-1)\}\{(1-\nu)r + (1+\nu)(r_o^2/r)\}$$

$$\text{両端閉じのとき} : u = (P_i/E)\{1/(Y^2-1)\}\{(1-2\nu)r + (1+\nu)(r_o^2/r)\}$$

$$\text{平面ひずみのとき} : u = (P_i/E)\{1/(Y^2-1)\}(1+\nu)\{(1-2\nu)r + (r_o^2/r)\}$$

## 5. 超高压円筒の応力/肉厚計算<sup>(2)(11)(12)</sup>

(1) 特定則/JISなどの規格が基本的にLameの弾性解析によっているのは、以上に述べた通り。

これら規格を適用すると、内表面の応力即ち最大主応力は許容応力以下(<降伏点)に抑えられるので、円筒壁は弾性範囲(降伏点以下)に保たれる。非常に内圧が高くなっても内表面の応力を許容応力に保つとなると、当然、肉厚は非現実的な厚さになる。JISの厚肉式は次式の通りであるが、

$$t = R(Z^{0.5} - 1) \quad \text{但し } Z = (\sigma_a \eta + P) / (\sigma_a \eta - P)$$

例えば内圧が120MPa辺りになって許容応力[120N/mm<sup>2</sup>×1.0]に近づくと、パラメータZの分母が0に近づいてZ即ち肉厚tは∞になり、設計不可能ということになる。

肉厚分布の応力には勾配があるが、その勾配の頂点を例えば降伏点の2/3以下(通常の許容応力)に抑えようという発想には、前述のように破壊試験の結果に対し適度な余裕を持ち規格としてふさわしいということ以外、確たる根拠は見当たらない。たとえ内表面に降伏が起きても破断にはまだ余裕があることは周知のことである。

超高压の円筒容器・配管では、根拠に乏しい過度な肉厚によって設備が不経済になることをさけるため、厚肉式の許容応力を $\sigma_a \eta$ (あるいはSE)を実質上割増にした基準式が用いられている。例えば

・KHK S-0220 超高压ガス設備に関する基準の4.3.1及び解説4.3

・ASME B31.3 Process PipingのChapter IX High Pressure Piping

これらについては種々の文献/資料があり議論が出尽くして飽和している印象がある。KHK S-0220の解説4.3とだいぶ重なるが、ここでは文献(2)(12)などを参考にしてその要点をまとめてみた。

(2) 内圧が上昇すると内表面で降伏が起これそれが肉厚断面に拡がり破断に至る。この過程を順を追って考えてみる。内表面の応力(主応力)は前述の通り。

$$\sigma_1 = [(Y^2 + 1)/(Y^2 - 1)]P, \quad \sigma_2 = \{1/(Y^2 - 1)\}P, \quad \sigma_3 = -P$$

一方、Mises 応力(相当応力)は、周知のごとく次式で与えられる。

$$\sigma_e = (1/\sqrt{2})\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\}^{0.5}$$

これに上記の $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を代入すると、

$$\sigma_e = (P/\sqrt{2})\{[Y^2/(Y^2 - 1)]^2 + [Y^2/(Y^2 - 1)]^2 + [2Y^2/(Y^2 - 1)]^2\}^{0.5} = 3^{0.5}\{Y^2/(Y^2 - 1)\}P$$

降伏開始のときの内圧を $P_y$ とすれば、

$$S_y = 3^{0.5}\{Y^2/(Y^2 - 1)\}P_y \rightarrow P_y/S_y = (2/3^{0.5})\{(Y^2 - 1)/(2Y^2)\} \quad \text{-----}(5-1)$$

但し $S_y$ =降伏応力(強さ)、因みにTresca 応力の場合は次のようになる。

$$P_y/S_y = \{(Y^2 - 1)/(2Y^2)\} \quad (\rightarrow \text{Mises 応力の}\sqrt{3}/2 = 1/1.15 \text{ 倍})$$

しかしMisesの降伏開始圧力は実測データとよく合い、±15%のデータのバラツキ内に入る。故にここでは、Mises 式を採る。

更に内圧が上昇すると肉厚断面に降伏が拡がり遂に全断面降伏に至る。この過程は弾塑性の混在で進行するので弾塑性解析に拠るのがいいが、塑性域の加工硬化を無視して材料を完全弾塑性体とすれば、Nadaiの解析(補4参照)から次の式が得られる。

$$\text{全域降伏圧力: } P_f = (2/3^{0.5})\sigma_y \log_e Y \quad \text{-----}(5-2)$$

内圧が  $P_f$  以下(即ち  $P < P_y$ )なら、内圧円筒の変形は有限に留まるが、 $P$  が上昇して  $P > P_f$  になれば、不安定化して破断に至る。

(3) 上記の全域降伏圧力  $P_f$  は加工硬化のない材料で成り立つが、加工硬化があると、

荷重増分 = 加工硬化による増分 - 断面減少による減分

によって変形が進行する。初めは加工硬化の影響が強く荷重は急激に増えて山(最高荷重点)に達した後、急激にダウンし Neckling(Bulldging)を生じて長手方向に破断する。この場合の圧力すなわち破壊圧力  $P_B$  は次式で与えられる。

$$P_B = C \log_e Y \quad \text{但し } C = \text{材料定数} \quad \text{-----}(5-3)$$

材料定数  $C$  については Manning など多くの研究者の提案があり概して複雑になる。その点、Faupel の式は簡便でこれに適当な安全率を設ければ、基準式として使用できる。この式は次のように導かれている。

① まず破壊圧は加工硬化度に依存するので、その最小値は Nadai の全域降伏圧力  $P_f$  になる。即ち

$$P_{B \min.} = P_f = (2/3^{0.5}) \sigma_y \log_e Y \quad \text{-----}(5-4)$$

② また加工硬化度が大きくなるほど破壊圧は大きくなるが、加工硬化度は降伏応力  $\sigma_y$  が高くなり引張強さ  $\sigma_B$  に漸近する時に最大値となる。即ち Nadai 式の  $\sigma_y$  を  $\sigma_B$  に置換えて

$$P_{B \max.} = P_f = (2/3^{0.5}) \sigma_B \log_e Y \quad \text{-----}(5-5)$$

③ 実際の破壊圧は、 $P_{B \min.}$  と  $P_{B \max.}$  の中間にくるので、線形分布を仮定して

$$P_B = P_{B \min.} + \gamma (P_{B \max.} - P_{B \min.}) \quad \text{但し } \gamma = \sigma_y / \sigma_B \text{ (降伏比)}$$

従って、次の Faupel の式が得られる。

$$P_B = (2/3^{0.5}) \sigma_B \gamma (2 - \gamma) \log_e K \quad \text{-----}(5-6)$$

Faupel 式に対する破壊圧の実測値の比較を下図に示す。Faupel 式は確かに  $P_{B \max.}$  と  $P_{B \min.}$  の中間にくるが、破壊データは Faupel 式の約  $\pm 25\%$  にばらつくので何らかの安全率をとる必要がある。KKH S-0220 ではデータ等を分析して<sup>(5)</sup>、この安全率を 3 としている。

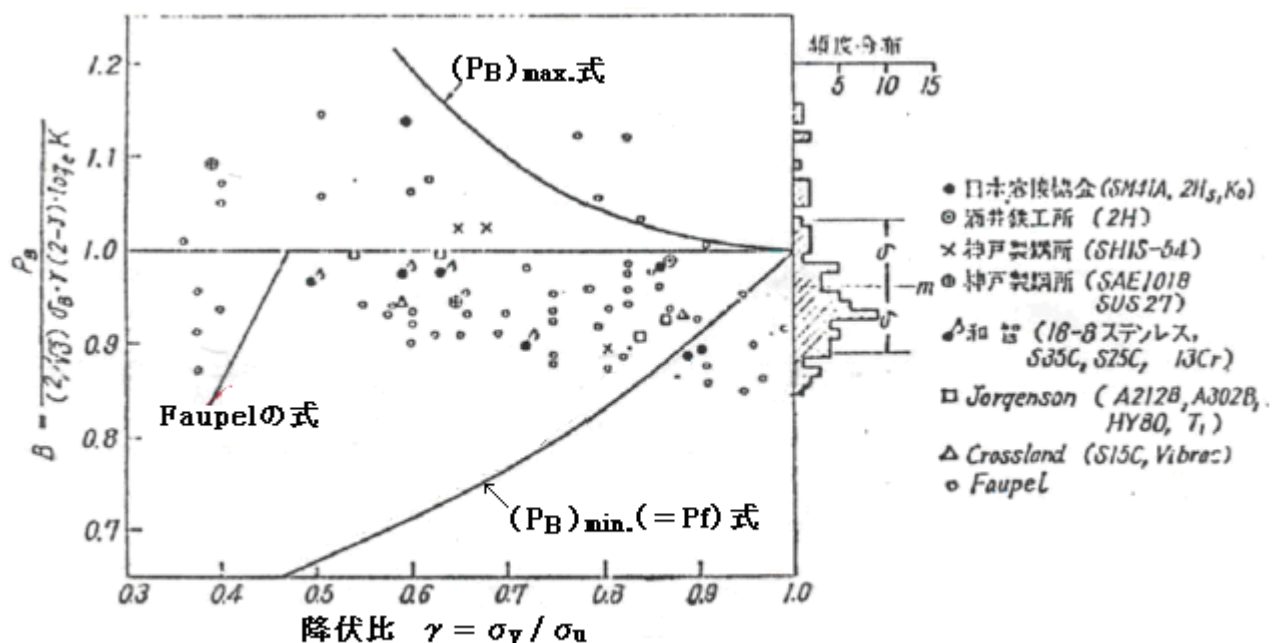


図9 図3 Faupel式に対する破壊圧実測値のばらつき [文献(2)引用]

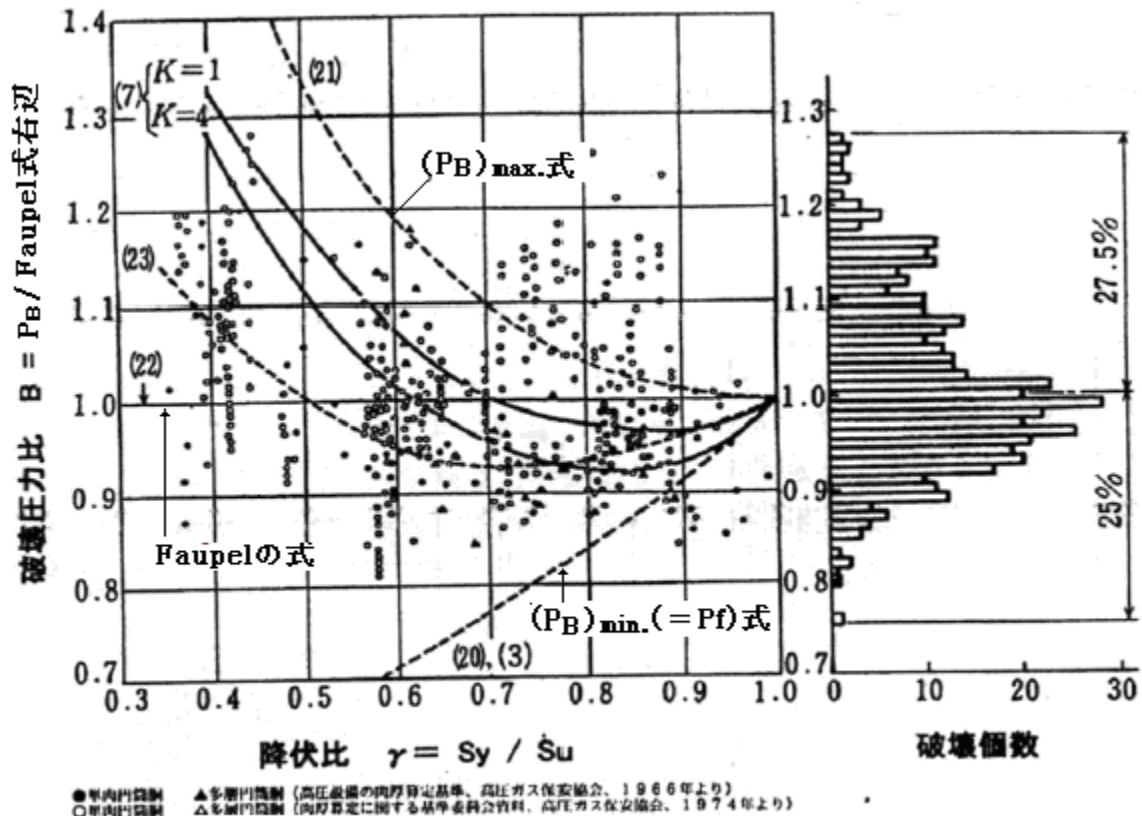


図10 解図-11 円筒胴の破壊圧の算定式と実測値との比較—文献(11)より引用

(4) KHK S-022 超高压ガス設備に関する基準<sup>(11)</sup> で与えられる基準式(肉厚計算式)を次頁に示す。

(1)式は、前(3)項の(5-6)式を肉厚  $t \rightarrow t_r$  について変形し、安全率3を考慮して得られたもの。

(3)式の  $M_D \leq 1$  は、最大応力ポイントの内表面( $r=r_i$ )における Tresca 応力を制限してシャットダウンを確認するものである。基準書の解説でまとめられているので説明は不要なのだろうが、簡単に補足すれば、以下の通り。

まず、内径面に生じる裁断せん断応力強さ  $S_{\max}$  は、

$$S_{\max} = |\sigma_t - \sigma_r| = |\sigma_1 - \sigma_2| = \{(Y^2 + 1)/(Y^2 - 1)P - (-P)\} = \{(2Y^2)/(Y^2 - 1)\}P$$

シェークダウンは、周知のように  $S_{\max}$  が  $3S_m$  を越えるとき発生する。許容応力強さ  $S_m$  は、 $\text{Min.}[(1/3)S_u, (2/3)S_y]$  であるから、 $3S_m = S_u = S_y/\gamma$  または  $2S_y$ 、ここでは  $S_u = S_y/\gamma$  をとって、

$$\{(2Y^2)/(Y^2 - 1)\}P \leq S_y/\gamma \rightarrow \text{限界値 } P^* = \{(Y^2 - 1)/(2Y^2)\}(S_y/\gamma)$$

故に圧力比  $[P/P^* = \{(2Y^2)/(Y^2 - 1)\}/(S_y/\gamma)]P$  が得られる。ここでは、この圧力比を  $M_D$  と称してこれを1以下に抑えている。



#### 4.3.1 単肉円筒胴の計算厚さ

単肉円筒胴の計算厚さ及び最大許容圧力は、次による。

$$t_r = \frac{D_i}{2} \left[ \exp \left\{ \frac{\sqrt{3} \times f \times P}{2 S_y \times (2 - \gamma)} \right\} - 1 \right] \quad (1)$$

$$P_{all} = \frac{2}{\sqrt{3} \times f} \times S_y \times (2 - \gamma) \times \ln K \quad (2)$$

設計圧力  $P$  は最大許容圧力  $P_{all}$  以下でなければならない。

ただし、次の式 (3) による  $M_D$  の値が 1.0 を超えてはならない。

$$M_D = \frac{2K^2}{K^2 - 1} \cdot \frac{\gamma}{S_y} P \quad (3)$$

もし、この  $M_D$  の値が 1.0 を超える場合には、塑性計算ベースにより次の条件が、それぞれ満足されることを証明しなければならない。

- (a) 円筒胴内径部において、運転荷重条件でシェークダウンが生じ、ラチェット変形の進行が停止する。
- (b) シェークダウンが起こるまでに生じる変形が指定の限界を超えないこと。
- (c) シェークダウン後に繰返される応力が疲労に対する許容限界内にあり、試験荷重、熱負荷の繰返しや圧力変動をも含めて、十分な疲労強度が保証されること。

ここに、 $t_r$  : 円筒胴の計算厚さ (mm)、

$P_{all}$  : 最大許容圧力 (MPa)、 $P$  : 設計圧力 (MPa)

$D_i$  : 円筒胴の内径 (mm)、 $D_o$  : 円筒胴の外径 (mm)

$K$  : 円筒胴の外径対内径比  $D_o/D_i$

✓  $f$  : 安全率で、3.0 とする。

$S_y$  : 材料の設計温度における降伏点又は 0.2 % 耐力の設定値 (N/mm<sup>2</sup>) (3.4.1 項参照)

$S_u$  : 材料の設計温度における引張強さの設定値 (N/mm<sup>2</sup>) (3.4.1 項参照)

$\gamma$  : 材料の降伏比  $S_y/S_u$

$M_D$  : 設計圧力と設計温度でのシェークダウン限界圧力との比

#### 【 補 足 説 明 】

(補 1) 一般に負荷を受ける構造物は多軸応力場にあるが、これに降伏条件を与える強度理論としては次の 3 つがよく用いられる<sup>⑥</sup>。

(1) 最大主応力説(Rankine の理論):  $\text{Max.}[|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|] = S_y$

(2) 最大せん断応力説(Tresca の理論):  $\text{Max.}[|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|] = S_y$

(3) せん断ひずみエネルギー説(Von Mises の理論):

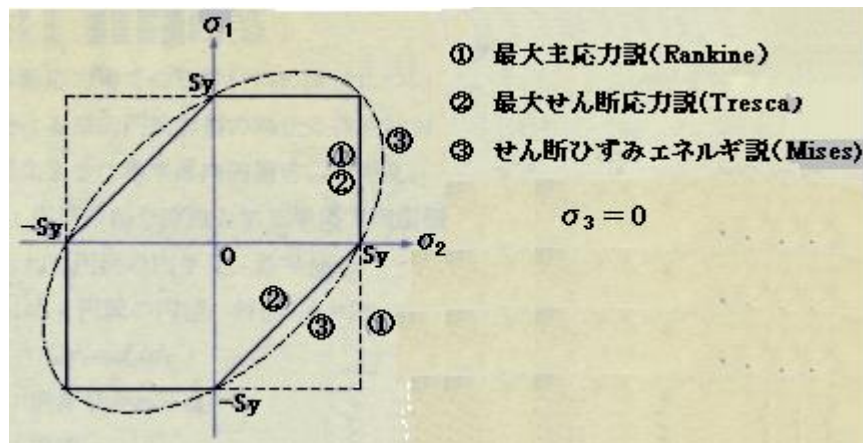
$$U = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2S_y^2$$

簡単のため 2 次元応力場のときの降伏条件を図示すると下図のようになる。一般の延性材料の多軸応力場での降伏や疲労については、

せん断ひずみエネルギー説＞最大せん断応力説＞最大主応力説

の順で単軸引張試験の結果と合うとされている。下図からもわかるように、Mises 理論が実際に近いとすれば、おおむね最大せん断応力説は安全側、最大主応力説は安全側ないし危険側になる傾向がある。従って、単に応力成分を云々するのではなく強度評価(降伏を基準においた)を行う場合は主応力をカウントした後、Tresca 理論で主応力差を求めるのが適度に安全側になり、この理由から ASME の強度評価では最大せん断応力説が採用されている。

最大主応力説は、下図<sup>(6)</sup>からわかるように第 2 象限と第 4 象限で Mises 応力からかなり外れることがあるので、ASME 系の構造規格では殆ど使用されない。内圧円筒で最大主応力説が使用されるのは奇異な感じがするが、「ASME の考えが普及する前からの古い議論であること」、「適度に安全率が保持されること」から、最大主応力説的な扱いが続いたように思える。



## (補 2) Lamé の内圧円筒の弾性解析について。

(1) Lamé の式は、圧力容器・配管分野でしばしば引用されるので、チモシェンコの材料力学(中巻)<sup>(4)</sup>を引用して、その導出過程を紹介しておく。

図 A の(a)は、円筒断面から切りだした微少要素(但し長さ方向は単位長さ)を示す。この要素で半径方向の力の釣り合いを考えると、その内外表面には

$$\sigma_r d\phi, \{\sigma_r + (d\sigma_r/dr)dr\}(r+dr)d\phi$$

という反対方向の力が作用している。また両側には  $\sigma_t dr$  なる力が釣り合っているが、これらは要素の中立軸 X-X に対しそれぞれ  $(d\phi/2)$  の傾きを持っているので、合計、

$2x\{\sigma_t dr \cdot \tan(d\phi/2)\} \approx \sigma_t dr d\phi$  の力が内向きに作用する。従って、微少要素の半径方向の力の釣り合い式は、

$$\begin{aligned} \sigma_r r d\phi - \{\sigma_r + (d\sigma_r/dr)dr\}(r+dr)d\phi + \sigma_t dr d\phi &= 0 \\ \sigma_r r d\phi - \{\sigma_r r d\phi + \sigma_r dr d\phi + (d\sigma_r/dr)rdr d\phi + (d\sigma_r/dr)(dr)^2 d\phi\} + \sigma_t dr d\phi &= 0 \\ -\sigma_r dr d\phi - (d\sigma_r/dr)r dr d\phi - (d\sigma_r/dr)(dr)^2 d\phi + \sigma_t dr d\phi &= 0 \\ -\sigma_r - r(d\sigma_r/dr) - (d\sigma_r/dr)dr + \sigma_t &= 0 \end{aligned}$$

左辺第 3 項は微少なので無視できる。従って、

$$\sigma_t - \sigma_r - r(d\sigma_r/dr) = 0 \quad \text{------(a)}$$

次に円筒自身の変形を考える。内外表面に一樣な圧力が作用する状態では、変形は半径方向に変化し周方向で一率である。従って微少要素の内側の半径方向変位を  $u$  とすれば、外側の半径方向

変位は  $u + (du/dr)dr$  で表現できるので、半径方向のひずみ ( $\varepsilon_r$ ) は、

$$\varepsilon_r = \{u + (du/dr)dr - u\}/dr = du/dr \quad \text{-----(b)}$$

次に要素の周方向ひずみ  $\varepsilon_t$  は半径  $r$  と周長  $2\pi r$  が単純な比例関係にあるので、内側を基準に、

$$\varepsilon_t = \{2\pi(r+u) - 2\pi r\}/(2\pi r) = u/r \quad \text{-----(c)}$$

このような平面応力とひずみの一般的な関係式は、

$$\sigma_x = \{E/(1-\nu^2)\}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \{E/(1-\nu^2)\}(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

ここで  $\sigma_x = \sigma_r$ 、 $\sigma_y = \sigma_t$ 、 $\varepsilon_x = \varepsilon_r$ 、 $\varepsilon_y = \varepsilon_t$  と表記すれば、

$$\sigma_r = \{E/(1-\nu^2)\}(\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t) = \{E/(1-\nu^2)\}(du/dr + \nu u/r) \quad \text{----- (d)}$$

$$\sigma_t = \{E/(1-\nu^2)\}(\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r) = \{E/(1-\nu^2)\}(u/r + \nu du/dr) \quad \text{----- (e)}$$

(d)(e)式を(a)式に代入して、次の基礎方程式が得られる。

$$d^2u/dr^2 + (1/r)(du/dr) + u/r^2 = 0 \quad \text{----- (f)}$$

この式の一般解は  $u = C_1 r + C_2/r$  ( $C_1, C_2 =$  積分定数) ----- (g)

(g)式を(d)(e)式に代入して、

$$\sigma_r = \{E/(1-\nu^2)\}[C_1(1+\nu) - C_2\{(1-\nu)/r^2\}] \quad \text{----- (h1)}$$

$$\sigma_t = \{E/(1-\nu^2)\}[C_1(1+\nu) + C_2\{(1-\nu)/r^2\}] \quad \text{----- (h2)}$$

$C_1, C_2$  は境界条件から得られる。円筒の内外表面では、

$$(\sigma_r)_{r=r_0} = 0, \quad (\sigma_r)_{r=r_i} = -P_i \quad (\text{ここでは } P_o \text{ は零としていることに注意})$$

であるから、 $C_1, C_2$  は次のようになる。

$$C_1 = \{(1-\nu)/E\}\{r_i^2/(r_0^2 - r_i^2)\}P_i, \quad C_2 = \{(1+\nu)/E\}\{r_0^2 r_i^2/(r_0^2 - r_i^2)\}P_i \quad \text{----- (i1)(i2)}$$

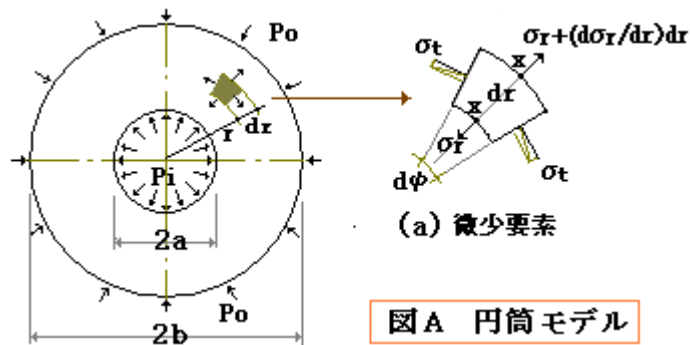
これを、(h1),(h2)式に代入すれば、

$$\sigma_r = [\{1 - (r_0/r)^2\}r_i^2/(r_0^2 - r_i^2)]P_i, \quad \sigma_t = [\{1 + (r_0/r)^2\}r_i^2/(r_0^2 - r_i^2)]P_i$$

ここで  $Y = (r_0/r_i)$  とすれば、

$$\sigma_r = -[\{(r_0/r)^2 - 1\}/(Y^2 - 1)]P_i \quad \text{----- (j1)}$$

$$\sigma_t = [\{(r_0/r)^2 + 1\}/(Y^2 - 1)]P_i \quad \text{----- (j2)}$$



図A 円筒モデル

以上は内圧のみを考え、 $P_o = 0$  として応力を求めたが、 $P_o \neq 0$  のときも上記と同様に  $C_1, C_2$  を求め、(h1)(h2)式に代入して次の式が得られる。

$$\sigma_r = (r_i^2 P_i - r_o^2 P_o)/(r_0^2 - r_i^2) - (P_i - P_o)r_i^2 r_o^2 / \{r^2(r_0^2 - r_i^2)\} \quad \text{----- (k1)}$$

$$\sigma_t = (r_i^2 P_i - r_o^2 P_o)/(r_0^2 - r_i^2) + (P_i - P_o)r_i^2 r_o^2 / \{r^2(r_0^2 - r_i^2)\} \quad \text{----- (k2)}$$

この一般化された式において  $P_i = 0$  とすれば、外圧  $P_o$  のみが作用する場合の応力が求まる。

(2) さてここで、円筒の内外差圧を  $dP$  とすると  $P_i = P_o + dp$  であるから、(k1)(k2)式は、

$$\sigma_r = (r_i^2 P_i - r_o^2 P_o)/(r_0^2 - r_i^2) - (P_i - P_o)r_i^2 r_o^2 / \{r^2(r_0^2 - r_i^2)\} = -P_o + [\{1 - (r_0/r)^2\}/(Y^2 - 1)]dp$$

$$\sigma_t = (r_i^2 P_i - r_o^2 P_o)/(r_0^2 - r_i^2) + (P_i - P_o)r_i^2 r_o^2 / \{r^2(r_0^2 - r_i^2)\} = -P_o + [\{1 + (r_0/r)^2\}/(Y^2 - 1)]dp$$

この場合の右辺第1項 $-P_0$ は静水応力であって、もともと円筒の内外に作用しているもので差圧 $dp$ が解消して零になっても残存する応力成分である。例えば、大気圧 $P_m$ 下に置かれた円筒には無負荷状態で $\sigma_r = \sigma_t = -P_m$ なる圧縮応力が発生している。この静水応力は材料の降伏には関係しないので固定された残留応力と同じように、応力計算(解析)では無視しても構わない。故に上式は、

$$\sigma_r = [-\{(r_0/r)^2 - 1\}/(Y^2 - 1^2)]dp \quad , \quad \sigma_t = [\{1 + (r_0/r)^2\}/(Y^2 - 1^2)]dp$$

外圧 $P_0$ が零のときは、 $dp = P_i$ なので、

$$\sigma_r = [-\{(r_0/r)^2 - 1\}/(Y^2 - 1^2)]P_i \quad , \quad \sigma_t = [\{1 + (r_0/r)^2\}/(Y^2 - 1^2)]P_i$$

これは、(j1),(j2)の式と同じである。内圧と外圧に差異がある時は、その最大差圧をとって応力計算/肉厚計算をすればいい。

(補3) JPI 7S-77はプラント配管規格で、ASME B31.3「Process Piping」の規定を引用している。

JPIの肉厚式は $t < D/6 (D_o/D_i < 1.5)$ の薄肉直管に対し $t = PD/(2SE + 2YP)$ となっている。 $D$ は外径 $D_o$ で、 $\sigma$ は $SE$ に相当するので、これは冒頭1.の表の修正Lameの式そのものである(なお外径基準式にしているのは、配管の場合、外径基準の規格パイプが使用されるからである)。

肉厚式の分母の係数 $Y$ は次のように定義されている。

表 4.1.1  $t$ が $D/6$ 未満の場合の係数 $Y$ の値

JPI 7S-77

材 料	温 度 °C					
	482 以下	510	538	566	593	621 以上
フェライト鋼	0.4	0.5	0.7	0.7	0.7	0.7
オーステナイト鋼	0.4	0.4	0.4	0.4	0.5	0.7
その他の延性金属	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
ねずみ鋳鉄	0.0	—	—	—	—	—

本格的にクリープ領域に入らない低い温度では $Y=0.4$ 、顕著にクリープがおきる高温では、Creep Commonの $Y=0.7$ になっている。

非クリープ域の $Y=0.4$ をとり、 $D_o$ を $D_i + 2t$ にして変形すれば、特定則あるいはJISの薄肉式と同じ式になるので、薄肉円筒の規格式が総じて修正Lameの式を採用していることがわかる。

(補4) Laméの解では、半径位置 $r$ における平衡条件は、 $\sigma_t - \sigma_r = r(d\sigma_r/dr)$ である。この場合せん断成分がないので $(\sigma_t - \sigma_r)$ は主応力差( $\rightarrow$ Tresca 応力 $S$ )でもあるが、Tresca 応力 $S$ とMises 応力 $\sigma_e$ の間には $S = 2/3^{0.5} \sigma_e$ の関係があるため、平衡条件は $2/3^{0.5} \sigma_e = r(d\sigma_r/dr)$ とも書ける。更に肉厚断面の全域で塑性流動が起きていれば、 $\sigma_e$ は材料の降伏応力 $\sigma_y$ に等しいので、平衡条件は $2/3^{0.5} \sigma_y = r(d\sigma_r/dr)$ になり、これを積分して、

$$\sigma_r = (2/3^{0.5}) \sigma_y \cdot \ln r + C \quad C = \text{積分定数}$$

が得られる。塑性流動化した状態では $\sigma_r = -P_y$ に等しいので、本文の(5-1)式より

$$\sigma_r = -P_y = -(2/3^{0.5}) \{(Y^2 - 1)/(2Y^2)\} \sigma_y$$

塑性-弾性の境界を下図のように $r=b$ におくと、 $Y=c/b$ であるから

$$\sigma_r = -P_y = -(2/3^{0.5}) [(c/b)^2 - 1] / \{2(c/b)^2\} \sigma_y$$

これを上記の $\sigma_r$ 式の左辺に代入し $r=b$ とおいて変形すれば、

$$C = (\sigma_y/3^{0.5}) \{(b^2 - c^2)/c^2 - 2 \ln b\}$$

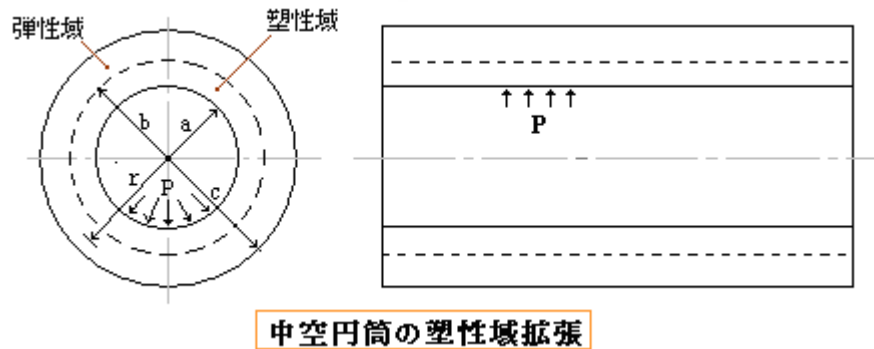
になる。故に $r=a$ にて、

$$\sigma_r = -P_y = (2/3^{0.5}) \sigma_y \ln a + (\sigma_y/3^{0.5}) \{(b^2 - c^2)/c^2 - 2 \ln b\} = -(\sigma_y/3^{0.5}) \{1 - (b/c)^2 + 2 \ln(b/a)\}$$

全面降伏は  $r=b$  が  $r=c$  に到達した時であるから、次の **Nadai** の式が得られる。

$$P_y = (2/3)^{0.5} \sigma_y \cdot \ln(b/a) = (2/3)^{0.5} \sigma_y \log_e Y$$

[以上、文献(12)を引用してまとめた。]



引用文献・テキスト)

- (1) 「内圧管のクリープおよび破壊試験結果と設計基準」 小寺沢 (高圧力 第3巻第4号(1965))
- (2) 「高圧円筒容器胴体の肉厚設計基準式について—圧力容器の設計基準委員会報告」  
鵜戸口、岡村 (高圧力 第3巻3号(1965))
- (3) 「特殊鋼管の管厚算定方法について」 森島、矢野 (配管と装置 1968年7月号)
- (4) チモシェンコ「材料力学(中巻)」 § 40. 厚肉円筒
- (5) KHK インストラクション資料「肉厚算定式の成り立ち」
- (6) 安藤、岡林「原子力プラントの構造設計」 (東大出版会) 2.2
- (7) JIS B8265「圧力容器の構造—一般事項」 付属書 E「圧力容器の胴及び鏡板」
- (8) JPI 7S-77 「石油工業用プラントの配管基準」
- (9) ASME B31.3 Process Piping Chapter IX High Pressure Piping
- (10) 高圧ガス保安法 特定設備検査規則
- (11) KHK S-0220 超高压ガス設備に関する基準 (高圧ガス保安協会) 4.3 内圧を受ける円筒胴
- (12) R.W.ニコルズ(木原,安藤)「圧力容器工学」(1972 産報)

「Chapter 8 The Design of Vessels for High Pressure」 by J. H. Faupel