FTML 2025

Antoine Malmezac
Cyprien Deruelle
Lucas Collemare
Charles Prioux

2 Partie 2 : Risque de Bayes avec perte absolue

2.1 Question 0

On cherche une fonction avec une dérivée nulle qui n'est pas un extremum.
La fonction $f(x) = x^3$ fait l'affaire :
— $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(0) = 0$,
— mais $f(0) = 0$ n'est pas un extremum local car la fonction continue de croître (elle passe simplement de valeurs négatives à positives).

2.2 Question 1

Pour montrer que les deux prédicteurs de Bayes peuvent être différents, prenons un exemple simple.

Soit une variable aléatoire Y qui prend :
— la valeur -2 avec probabilité 0.25,
— la valeur 1 avec probabilité 0.75.

Alors :
— Prédicteur pour la perte quadratique :

$$f^*_{\text{squared}} = \mathbb{E}[Y] = -2 \times 0.25 + 1 \times 0.75 = 0.25$$

— Prédicteur pour la perte absolue :

$$f^*_{\text{absolute}} = \text{médiane}(Y) = 1$$

Ils sont bien différents

2.3 Question 2

Pour trouver le prédicteur de Bayes avec la perte absolue, on minimise :

$$g(z) = \int |y - z| p(y) dy$$

En dérivant par rapport à z :

$$g'(z) = \int \text{signe}(z - y) p(y) dy = P(Y \leq z) - P(Y > z)$$

Le minimum est atteint quand $g'(z) = 0$, c'est-à-dire quand $P(Y \leq z) = P(Y > z) = 0.5$.

Conclusion : Le prédicteur de Bayes pour la perte absolue est la médiane de $Y|X$.