

1 简谐振动

1.1 简谐振动的定义

一、振动的定义及分类

1.定义：一个物理量在某一定值附近往复变化，该物理量的运动形式成为振荡

特征：存在平衡位置+具有周期性

2.分类：按物理量类型划分：电磁振荡+机械振动

在某一空间位置附近做来回往复的周期运动的物体做机械振动

按受力或能量转换划分：自由振动（无阻尼振动，阻尼振动）+受迫振动

根据机械振动的定义可知，机械振动的运动方程可以用周期函数来描述 $f(t) = f(t + T)$

任何一个复杂的振动均可分解为若干个以正（余）弦形式运动的振动

二、简谐运动的定义

1.定义：物体运动时，物体相对于平衡位置的位移按余弦（正弦）函数的规律随时间变化，这样的振动称为简谐振动，又称为谐振动。简谐运动是最简单、最基本的振动。

2.模型：弹簧振子（线性谐振动）模型 = 轻弹簧 + 平动刚体

3.运动方程： $x = A\cos(\omega t + \phi_0)$ ， A 振幅， ω 原频率， ϕ_0 初相位

1.2 简谐运动的基本特征

一、两个理想化模型

1.弹簧振子

受力分析： $F = -kx$

由牛顿第二定律，得：

$$-kx = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{其中：} \frac{k}{m} = \omega^2$$

动力学微分方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{其中：} \frac{k}{m} = \omega^2$$

运动学方程（振动方程）：

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

2.单摆（小角度）

受力分析： $M = -mgl\theta$

由转动定律，有：

$$M = J\beta = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{其中：} \frac{g}{l} = \omega^2$$

动力学微分方程：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad \text{其中：} \frac{g}{l} = \omega^2$$

运动学方程（振动方程）：

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

二、简谐运动的判定

1.物体只受线性恢复力作用

$$F = -kx \text{ 或 } M = -k\theta$$

2.动力学方程满足

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

3.在无外来强迫力作用下，质点离开平衡位置的位移是时间的正弦函数或余弦函数

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

判断一振动是否是简谐振动用三种定义中任何一种皆可

三、简谐运动的速度和加速度

动力学方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

解方程得：

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \quad A, \phi \text{ 是积分常数, 根据初始条件确定}$$

速度：

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

加速度：

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2x$$

1.3 描述简谐运动的物理量

1.振幅A：与振动系统初始运动状态和系统属性有关，反应能量大小。

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

2.圆（角）频率 ω ：由系统本身属性决定的常数，与初始条件无关（固有角频率）

周期： $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ，物体完成一次全振动所经历的时间，[SI]:s

频率： $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ ，单位时间内质点完成的全振动的次数，[SI]:Hz

角频率： $\omega = 2\pi\nu$ ，描述谐振运动的频率和周期，[SI]: $rad \cdot s^{-1}$

3.相位 $\omega t + \phi_0$ ，初相 ϕ_0

(1)初相位： ϕ_0 ，描述 $t=0$ 时刻的运动状态

$$\phi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

(2)相位（位相） $\omega t + \phi$ 的物理意义：反应系统振动状态，运动状态变化趋势，比较频率相同的两振动系统的振动步调

1.4 简谐运动的表示方法

一、简谐运动的解析描述

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

频率相同: ω

$$v = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

振幅的关系: $v_m = A\omega$
 $a_m = A\omega^2$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

相位关系: 速度超前于位移 $\pi/2$.

x, v, a 均是作简谐振动的物理量

加速度与位移反相.

欧拉公式 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

复数表示法: $x = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}$

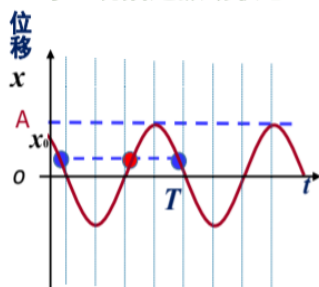
复数表述更适合
处理频谱转换问题.

二、振动曲线表示法

简谐运动: $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

$x-t$ 曲线 $v-x$ 曲线

1. 可直观描述振动状态



a. 曲线的最大值为振动系统的
振幅A;

b. 振动状态完全相同的相邻两
点间的间隔为振动周期T;

c. 根据 $t=0$ 时质点的位置可以
确定初相位 φ_0 .

三、旋转矢量表示法

用围绕圆心做匀速圆周运动的矢量在某方向的投影来描述简谐振动的方法，称为**旋转矢量法**。

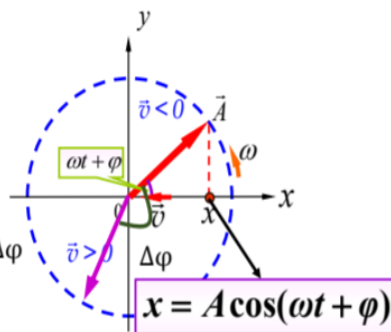
规定： $|\vec{A}| = A$ $t=0$ 时，旋转矢量与x轴间的夹角为 φ

以角速度 ω 逆时针转

➤ 直观地表达振动状态 x 、 v

➤ 直观地表达了 $(\omega t + \varphi)$

➤ 直观反应不同振动的相位差 $\Delta\varphi$



1.5 简谐运动的能量

1. 谐振动系统的动能：

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

2. 谐振动系统的势能：

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) \quad \text{考虑到: } \frac{k}{m}\omega^2$$

3. 谐振动系统的总能量：

$$\text{孤立谐振动系统机械能守恒: } E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

4. 动能和势能的变化频率是位移变化频率的2倍，总能量并不改变。

5. 能量方法是工程中求振动系统固有频率是常用的方法：

由振动过程中机械能守恒：

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{常数}$$

两边求导：

$$mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0 \implies m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \implies \omega^2 = \frac{k}{m}$$

1.6 简谐运动的合成

1.6.1 同方向同频率简谐运动的合成

一、两个同方向同频率简谐振动的合成

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \text{线性叠加 } x = x_1 + x_2$$

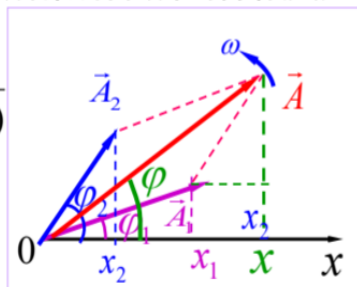
两个同方向同频率简谐运动合成后仍为同频率的简谐振动

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

在 $t = 0$ 时刻:

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$



一、两个同方向同频率简谐振动的合成

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

讨论两个特例

(1) 两个振动同相

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$$

(2) 两个振动反相

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2| \quad \text{如果 } A_1 = A_2 \text{ 则 } A=0$$

(3) 一般情况 $\Delta\varphi$ 为其他任意值: $|A_1 - A_2| < A < (A_1 + A_2)$

二、多个同方向同频率简谐振动的合成

N 个同方向，同频率、振幅相等的谐振动，

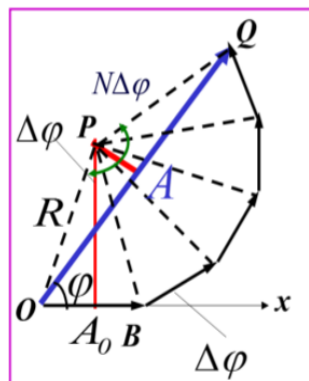
若它们初相位依次为 $\varphi, 2\varphi \dots$

合振幅 A : $A = 2R \sin \frac{N\Delta\varphi}{2} = 2R \sin \frac{N\varphi}{2}$

由 $\triangle OPB$ 可看出

$$A_0 = 2R \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 2R \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$A = A_0 \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$



当 $N\varphi = 2k\pi$ ($k \neq 1$) 时的 $A=0$ ，当 $\varphi=0$ 时 $A=NA_0$ 。

1.6.2 同方向不同频率简谐振动的合成

若 $\omega_1 = \omega_2$ ，则 $\Delta\phi$ 不变；同方向同频率两个简谐运动的合成仍为简谐运动

若 $\omega_1 \neq \omega_2$ ，则 $\Delta\phi$ 变；同方向不同频率的两个简谐运动搞的合成为一复杂运动

同方向不同频率简谐振动的合成：

$$x_1 = A \cos \omega_1 t \quad x_2 = A \cos \omega_2 t \text{ 振幅相同，初相为零}$$

$$x = x_1 + x_2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t = 2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2}$$

当 $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1$ or ω_2 时，振幅随时间的变化非常缓慢

拍：频率较大而频率差较小的两个同方向简谐振动合成时，其和振动的振幅时而增强时而减弱的现象

拍频：单位时间内合成振幅加强（减弱）的次数

$$\nu_{\text{拍}} = \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \right| = |\nu_2 - \nu_1|$$

1.7 互相垂直的谐振动的合成

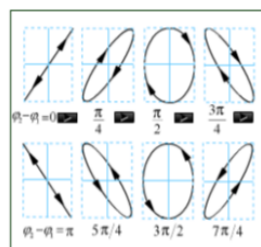
互相垂直的两简谐振动的合成总结

1. 互相垂直的同频率两简谐振动的合成

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}) \quad y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

消去 t 得到轨道方程（椭圆方程）

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}) = \sin^2(\varphi_{20} - \varphi_{10})$$



2. 两个互相垂直不同振幅同频率简谐振动的合成

当频率比为整数比时，得到李萨茹图形

测量振动频率和相位的方法：
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$

