1 简谐振动

1.1 简谐振动的定义

一、振动的定义及分类

1.定义：一个物理量在某一定值附近往复变化，该物理量的运动形式成为振荡

特征：存在平衡位置+具有周期性

2.分类：按物理量类型划分：电磁振荡+机械振动

在某一空间位置附近做来回往复的周期运动的物体做机械振动

按受力或能量转换划分：自由振动（无阻尼振动，阻尼振动）+受迫振动

根据机械振动的定义可知，机械振动的运动方程可以用周期函数来描述$f(t) = f(t+T)$

任何一个复杂的振动均可分解为若干个以正（余）弦形式运动的振动

二、简谐运动的定义

1.定义：物体运动时，物体相对于平衡位置的位移按余弦（正弦）函数的规律随时间变化，这样的振动称为简谐振动，又称为谐振动。简谐运动是最简单、最基本的振动。

2.模型：弹簧振子（线性谐振动）模型 = 轻弹簧 + 平动刚体

3.运动方程：$x = Acos(\omega t + \phi_0)$，$A$振幅，$\omega$原频率，$\phi_0$初相位

1.2 简谐运动的基本特征

一、两个理想化模型

1.弹簧振子

受力分析：$F = -kx$

由牛顿第二定律，得：

$$-kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{其中：} \frac{k}{m} = \omega^2$$

动力学微分方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{其中：} \frac{k}{m} = \omega^2$$

运动学方程（振动方程）：

$$x = Acos(\omega t + \phi_0)$$

2.单摆（小角度）

受力分析：$M = -mgl\theta$

由转动定律，有：

$$M = J\beta = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{其中：} \frac{g}{l} = \omega^2$$

动力学微分方程：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad \text{其中：} \frac{g}{l} = \omega^2$$

运动学方程（振动方程）：

$$\theta = \theta_0 cos(\omega t + \phi_0)$$

二、简谐运动的判定

1.物体只受线性恢复力作用

$$F = -kx\text{或}M = -k\theta$$

2.动力学方程满足

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = o$$

3.在无外来强迫力作用下，质点离开平衡位置的位移是时间的正弦函数或余弦函数

$$x = Acos(\omega t + \phi_0)$$

判断一振动是否是简谐振动用三种定义中任何一种皆可

三、简谐运动的速度和加速度

动力学方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

解方程得：

$$x = Acos(\omega t + \phi) \quad A, \phi\text{是积分常数,根据初始条件确定}$$

速度：

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega sin(\omega t + \phi)$$

加速度：

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

1.3 描述简谐运动的物理量

1.振幅A：与振动系统初始运动状态和系统属性有关，反应能量大小。

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

2.圆（角）频率ω：由系统本身属性决定的常数，与初始条件无关（固有角频率）

周期：$T=\frac{2\pi}{\omega}$，物体完成一次全振动所经历的时间，[SI]:s

频率：$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$，单位时间内质点完成的全振动的次数，[SI]:Hz

角频率：$\omega=2\pi\nu$，描述谐振运动的频率和周期，[SI]:$rad\cdot s^{-1}$

3.相位$\omega t+\phi_0$，初相ϕ_0

(1)初相位：ϕ_0，描述t=0时刻的运动状态

$$\phi_0=arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0})$$

(2)相位（位相）$\omega t+\phi$的物理意义：反应系统振动状态，运动状态变化趋势，比较频率相同的两振动系统的振动步调

1.4 简谐运动的表示方法

一、简谐运动的解析描述

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

频率相同： ω

振幅的关系： $v_m = A\omega$，$a_m = A\omega^2$

相位关系：速度超前于位移π/2.

加速度与位移反相.

x, v, a 均是作**谐振动**的物理量

欧拉公式 $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

复数表示法：$x = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}$

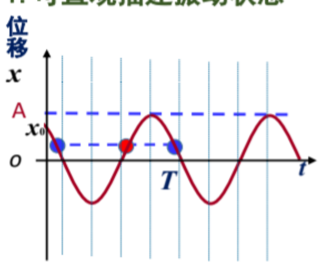
复数表述更适合处理**频谱转换**问题.

二、振动曲线表示法

简谐运动： $\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$

x-t 曲线　　*v-x* 曲线

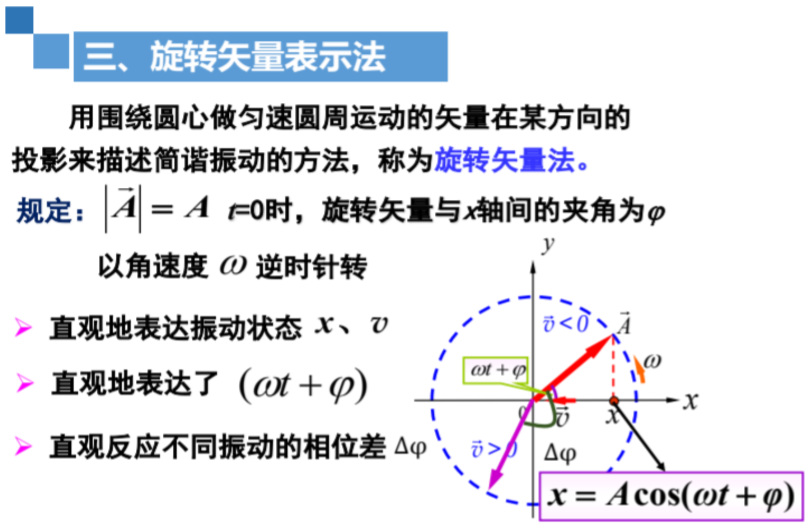
1. 可直观描述振动状态



a. 曲线的**最大值**为振动系统的**振幅A**；

b. 振动状态**完全相同**的相邻两点间的间隔为**振动周期T**；

c. 根据t=0时质点的位置可以确定**初相位φ_0**.



1.5 简谐运动的能量

1.谐振动系统的动能：

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2sin^2(\omega t+\phi_0)$$

2.谐振动系统的势能：

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t+\phi_o) \quad \text{考虑到：} \frac{k}{m}\omega^2$$

3.谐振动系统的总能量：

$$\text{孤立谐振动系统机械能守恒：} E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

4.动能和势能的变化频率是位移变化频率的2倍，总能量并不改变。

5.能量方法是工程中求振动系统固有频率是常用的方法：

由振动过程中机械能守恒：

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{常数}$$

两边求导：

$$mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = 0 \Longrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Longrightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

1.6 简谐运动的合成

1.6.1 同方向同频率简谐运动的合成

一、两个同方向同频率简谐振动的合成

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 &= A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{aligned}\right\} \text{线性叠加}\ x = x_1 + x_2$$

两个同方向同频率简谐运动合成后仍为同频率的简谐振动

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

在 $t=0$ 时刻：

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

一、两个同方向同频率简谐振动的合成

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

讨论两个特例

(1) 两个振动同相

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2}=A_1+A_2$$

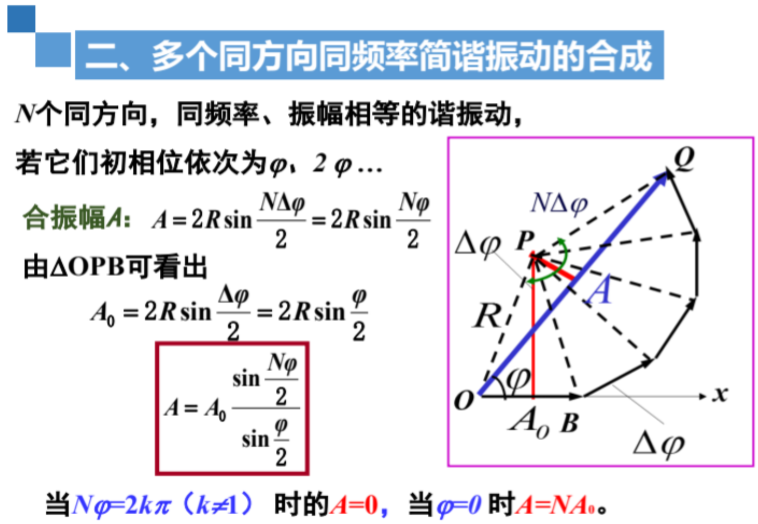
(2) 两个振动反相

$$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi,\qquad k=o,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2-2A_1A_2}=|A_1-A_2|$$

如果 $A_1=A_2$ 则 A=0

(3) 一般情况 $\Delta\varphi$ 为其他任意值： $|A_1-A_2|<A<(A_1+A_2)$



1.6.2 同方向不同频率简谐振动的合成

若$\omega_1=\omega_2$，则$\Delta\phi$不变；同方向同频率两个简谐运动的合成仍为简谐运动

若$\omega_1\neq\omega_2$，则$\Delta\phi$变；同方向不同频率的两个简谐运动搞的合成为一复杂运动

同方向不同频率简谐振动的合成：

$$x_1=Acos\omega_1 t \quad x_2=Acos\omega_2 t\text{振幅相同，初相为零}$$

$$x=x_1+x_2=Acos\omega_1 t+Acos\omega_2 t=2Acos\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}cos\frac{(\omega_2+\omega_1)t}{2}$$

当$\omega_1-\omega_2<<\omega_1\ or\ \omega_2$时，振幅随时间的变化非常缓慢

拍：频率较大而频率差较小的两个同方向简谐振动合成时，其和振动的振幅时而增强时而减弱的现象

拍频：单位时间内合成振幅加强（减弱）的次数

$$\nu_{\text{拍}}=|\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}|=|\nu_2-\nu_1|$$