1 简谐振动

1.1 简谐振动的定义

一、振动的定义及分类

1.定义：一个物理量在某一定值附近往复变化，该物理量的运动形式成为振荡

特征：存在平衡位置+具有周期性

2.分类：按物理量类型划分：电磁振荡+机械振动

在某一空间位置附近做来回往复的周期运动的物体做机械振动

按受力或能量转换划分：自由振动（无阻尼振动，阻尼振动）+受迫振动

根据机械振动的定义可知，机械振动的运动方程可以用周期函数来描述$f(t)=f(t+T)$

任何一个复杂的振动均可分解为若干个以正（余）弦形式运动的振动

二、简谐运动的定义

1.定义：物体运动时，物体相对于平衡位置的位移按余弦（正弦）函数的规律随时间变化，这样的振动称为简谐振动，又称为谐振动。简谐运动是最简单、最基本的振动。

2.模型：弹簧振子（线性谐振动）模型 = 轻弹簧 + 平动刚体

3.运动方程：$x=Acos(\omega t+\phi_0)$，A振幅，ω原频率，ϕ_0初相位

1.2 简谐运动的基本特征

一、两个理想化模型

1.弹簧振子

受力分析：$F=-kx$

由牛顿第二定律，得：

$$-kx=ma=m\frac{d^2x}{dt^2}\quad \text{其中：}\frac{k}{m}=\omega^2$$

动力学微分方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0\quad \text{其中：}\frac{k}{m}=\omega^2$$

运动学方程（振动方程）：

$$x = Acos(\omega t + \phi_0)$$

2.单摆（小角度）

受力分析：$M = -mgl\theta$

由转动定律，有：

$$M = J\beta = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{其中：}\frac{g}{l} = \omega^2$$

动力学微分方程：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad \text{其中：}\frac{g}{l} = \omega^2$$

运动学方程（振动方程）：

$$\theta = \theta_0 cos(\omega t + \phi_0)$$

二、简谐运动的判定

1.物体只受线性恢复力作用

$$F = -kx\text{或}M = -k\theta$$

2.动力学方程满足

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = o$$

3.在无外来强迫力作用下，质点离开平衡位置的位移是时间的正弦函数或余弦函数

$$x = Acos(\omega t + \phi_0)$$

判断一振动是否是简谐振动用三种定义中任何一种皆可

三、简谐运动的速度和加速度

动力学方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

解方程得：

$$x = Acos(\omega t + \phi) \quad A, \phi\text{是积分常数,根据初始条件确定}$$

速度：

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega sin(\omega t + \phi)$$

加速度：

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

1.3 描述简谐运动的物理量

1.振幅A：与振动系统初始运动状态和系统属性有关，反应能量大小。

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

2.圆（角）频率ω：由系统本身属性决定的常数，与初始条件无关（固有角频率）

周期：$T=\frac{2\pi}{\omega}$，物体完成一次全振动所经历的时间，[SI]:s

频率：$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$，单位时间内质点完成的全振动的次数，[SI]:Hz

角频率：$\omega=2\pi\nu$，描述谐振运动的频率和周期，[SI]:$rad\cdot s^{-1}$

3.相位$\omega t+\phi_0$，初相ϕ_0

(1)初相位：ϕ_0，描述t=0时刻的运动状态

$$\phi_0=arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0})$$

(2)相位（位相）$\omega t+\phi$的物理意义：反应系统振动状态，运动状态变化趋势，比较频率相同的两振动系统的振动步调

1.4 简谐运动的表示方法

一、简谐运动的解析描述

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v = A\omega\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = A\omega^2\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

频率相同：ω

振幅的关系：$v_m = A\omega$，$a_m = A\omega^2$

相位关系：速度超前于位移π/2.

加速度与位移反相.

x, v, a 均是作**谐振动**的物理量

欧拉公式	$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

复数表示法：$x = Ae^{i(\omega t+\varphi_0)}$

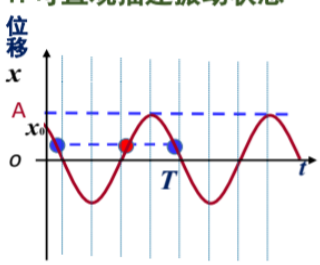
复数表述更适合处理**频谱转换**问题.

二、振动曲线表示法

简谐运动：$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi_0)}$

x-t 曲线　　v-x 曲线

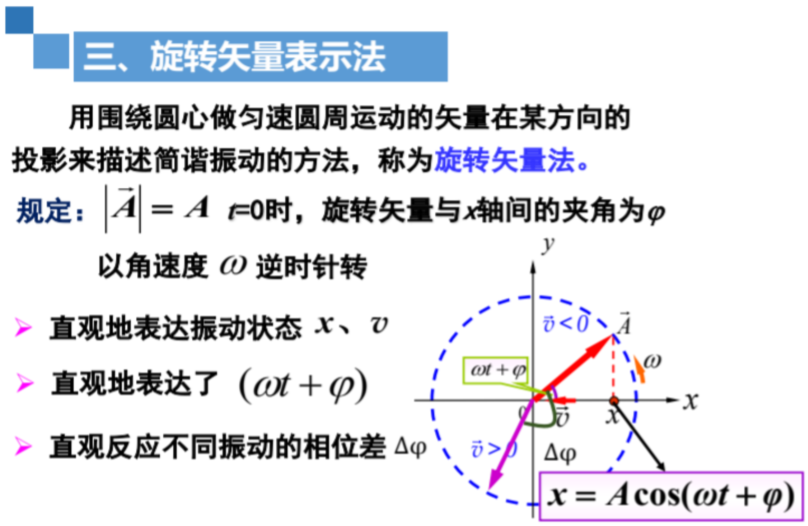
1. 可直观描述振动状态



a. 曲线的**最大值**为振动系统的**振幅A**；

b. 振动状态**完全相同**的相邻两点间的间隔为**振动周期T**；

c. 根据t=0时质点的位置可以确定**初相位φ_0**.


三、旋转矢量表示法
用围绕圆心做匀速圆周运动的矢量在某方向的投影来描述简谐振动的方法，称为旋转矢量法。
规定：$|\vec{A}| = A$ t=0时，旋转矢量与x轴间的夹角为φ
以角速度 ω 逆时针转
直观地表达振动状态 x、v
直观地表达了 $(\omega t+\varphi)$
直观反应不同振动的相位差 $\Delta\varphi$
y
$\vec{v}<0$
$\vec{A}$
ω
$\omega t+\varphi$
x
$\vec{v}$
$\vec{v}>0$
$\Delta\varphi$
$x = A\cos(\omega t+\varphi)$

1.5 简谐运动的能量