1 机械波

1.1 机械波的基本属性

一、波的定义：波是自然界中一种常见的物质运动形式，波仅伴随着加载信息的能量传递

质点运动：实体载着信息和能量运动，若干包含能量的小的物质集合的整体运动

波的传播：信息和能量的传播，没有物质实体的移动，能量的扩展分布，充满其传播空间

二、波的分类：

1.机械波：机械振动在弹性介质中的传播，在介质中传播时受牛顿定律的支配

2.电磁波：可以在真空中传播

3.物质波：微观粒子具有波动性，反应概率密度的空间分布

波的共同属性：都伴随能量传播，有反射、折射、干涉、衍射现象

三、机械波的基本属性：机械振动（波源）在弹性介质（通过相互之间的弹性力组合在一起的连续介质）中的传播形成机械波。

机械波产生条件：振源+弹性介质

是运动状态的传播，弹性介质的质点并不随波传播.

四、横波和纵波

1.横波：质点振动方向与波的传播方向相垂直的波。特征：具有交替出现的波峰和波谷；仅在固体中传播

2.纵波：质点振动方向与波的传播方向相平行的波。固、液、气体中均可传播

横波和纵波都是行波

1.2 机械波的描述

一、波线和波面

波面：某时刻，同一波源向外传播的波到达的空间各点连成的面（同相位面）

波阵面：波在传播过程中行进在最前面的波面，又称波前

波（射）线：描述波传播的方向的射线。在各向均匀介质中波射线垂直于波面，波射线是波的能量传播方向

根据波面的形状，可以将波分为：球面波（点源）、柱面波（线源）、平面波（面源）

二、波函数与波动曲线

波形图：$y = y(x,t)$，某时刻各点振动的位移y（广义：任一物理量）与相应的平衡位置坐标x的关系曲线

三、机械波的特征量

振幅：A 质点偏离自身平衡位置所达到的最大正向位移

波长：λ 一个完整波形的长度。即：沿波的传播方向，两个相邻的、相位差为2π的振动质点之间的距离

周期：T 波前进一个波长的距离所需要的时间

频率：单位时间内波动所传播的完整波的数目，$\nu = \frac{1}{T}$

周期或频率只决定于波源的振动

波速：u 波动过程中，某一振动状态（即振动相位）单位时间内所传播的距离（相速）

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu] \quad \lambda = \frac{u}{\nu} = Tu$$

波速只决定于媒质的性质

固体内：横波 $u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$，纵波 $u = \sqcup\frac{E}{\rho}$

液体、气体内：纵波 $u = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$

1.3 平面间谐波波函数

一、平面间谐波

1.平面简谐波定义：平面波传播过程中，若介质中各质元均做同振幅、同频率的简谐振动，该波称为平面简谐波

2.平面简谐波产生条件：作简谐运动的波源 + 均匀无吸收的弹性介质

3.平面简谐波是最基本、最简单的波动形式，复杂波可看成是不同频率简谐波叠加的结果

二、平面简谐波波函数

反映平面简谐波在均匀介质中传播时，介质中各质元相对于自身平衡位置的位移随时间的变化的函数。任一波线上各点的振动状态可代表整个波的状态

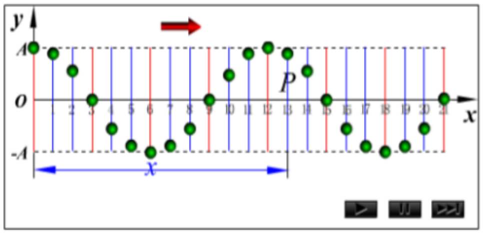
二、平面简谐波波函数

选择波源O为坐标原点。

设波源O做简谐振动：

$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

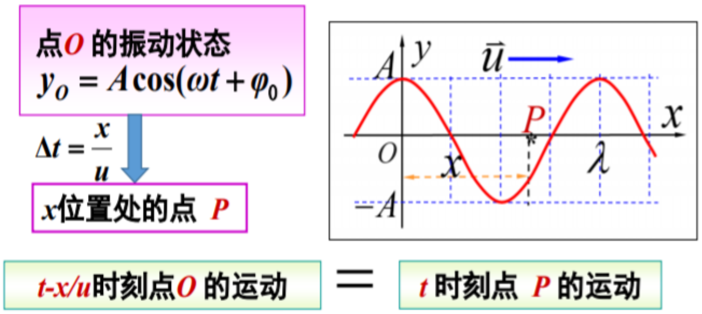
在平面简谐波的一条波线上



求波函数关键：写出任一质点在t时刻的相位。

二、平面简谐波波函数

(1) 时间延迟法　波的传播速度为 $\vec{u}$



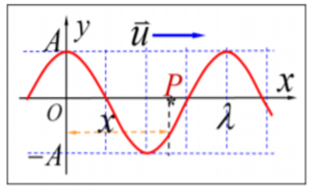
点P 振动方程：

(波函数)　$$y_P = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

二、平面简谐波波函数

设波源0做简谐振动：

$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



(2) 相位落后法

波线上，相距为λ的两点之间相位差为2π。

点 *P* 与点 *O* 的相位差 $\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_O = -2\pi\dfrac{x}{\lambda}$

$$\varphi_p = -2\pi\frac{x}{\lambda} + \omega t + \varphi_0 = -2\pi\frac{x}{Tu} + \omega t + \varphi_0 = -\omega\frac{x}{u} + \omega t + \varphi_0$$

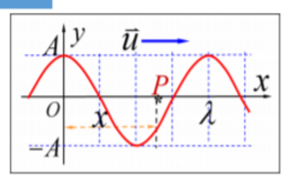
点 P 振动方程

（波函数） $y_p = A\cos[\omega(t - \dfrac{x}{u}) + \varphi_0]$

二、平面简谐波波函数

波函数（沿x轴正向传播）

$$y_p = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$



u沿 x轴负向：

$$\boxed{y = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi_0]}$$

其它形式： $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\upsilon$，$\lambda = uT = u/\upsilon$

$$y(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

$$y(x,t) = A\cos(\omega t \mp kx + \varphi_0)$$ 角波数 $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

二、平面简谐波波函数

波函数（沿x轴正向传播）

$$y = A\cos[\underline{\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0}]$$

➤**质点的振动速度，加速度**

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin[\underline{\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0}]$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos[\underline{\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0}]$$

称为波在x处 t时刻的相位或相，它决定了振动的状态。

波函数（沿x轴正向传播）：$y = Acos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi_0]$
对于某一给定的相位

$$\omega(t - \frac{x}{u}) = 常量\phi$$

两边对t求导可得相位的传播速度

$$\frac{dx}{dt} = u$$

说明波的相位的传播速度就是波的速度u，所以波速u也称为相速度，它可以超过光速

1.4 波函数的物理意义和波动方程

一、波函数的物理意义

$$y = Acos[\omega(t - \frac{x}{u} + \phi_0)] = Acos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \phi_0]$$

1.x固定时，表示该点的振动方程，体现波的时间周期性

2.当t一定时，表示该时刻波线上各点相对其平衡位置的位移，体现波的空间周期性

3.若x、t均变化，表示波形沿传播方向的运动情况（行波）

二、波动方程

$$y = Acos[\omega(t - \frac{x}{u} + \phi_0)]$$

对变量二次求导

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 Acos[\omega(t - \frac{x}{u} + \phi_0)]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{u^2} Acos[\omega(t - \frac{x}{u} + \phi_0)]$$

波动微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

具有普适性，即对任意一维平面波都成立

1.5 机械波的能量

一、波动能量的传播

以固体棒中传播的纵波为例分析波动能量的传播

波函数：$y = Acos\omega(t - \frac{x}{u})$，介质密度为$\rho$

振动动能：

$$dW_k = \frac{1}{2}(dm)v^2 = \frac{1}{2}(\rho dV)v^2 = \frac{1}{2}\rho dV A^2\omega^2 sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$$

弹性势能：

$$dW_p = \frac{1}{2}k(dy)^2 = \frac{1}{2}\rho dV A^2\omega^2 sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$$

$$dW_k = dW_p = \frac{1}{2}\rho dV A^2\omega^2 sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$$

体积元的总机械能：

$$dW = dW_k + dW_p = \rho dV A^2\omega^2 sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$$

1. 传播的媒质中，任一质元的动能、势能、总机械能均作同相位的周期性变化

平衡位置时，三者均最大

位移最大时，三者均为零

2. 传播的媒质中，任一质元不断地传播能量，机械能不守恒

3. 传播的媒质中,质元做的是受迫振动，而非简谐振动

能量密度：单位体积介质中的波动能量

$$w = \frac{dW}{dV} = \rho A^2 \omega^2 sin^2 \omega (t - \frac{x}{u})$$

平均能量密度：能量密度在一个周期内的平均值

$$\overline{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

能流：单位时间通过介质中某一面积的能量

$$p = \frac{wSudt}{dt} = wSu$$

平均能流：能流在一个周期内的时间平均值

$$\overline{P} = \overline{w} uS$$

平均能流密度（波的强度）I：通过与波传播方向垂直的单位面积的平均能流

$$I = \frac{\overline{P}}{S} = \overline{w} u \Rightarrow I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u$$

1.6 波的衍射 惠更斯原理

一、波的衍射

波传播遇到障碍物时，波的传播方向偏离原来直线传播方向的现象称为衍射。一切波动都具有衍射现象，衍射是波动的直接证据之一

衍射特点：障碍物(受限)的尺度与波长相接近时，能够观察到明显的衍射现象

二、惠更斯原理

在波的传播过程中，波前上每一点都可以看作是发射子波的波源，而在其后的任意时刻，这些子波的包络面就是新的波前

原理依据：

1. 波动在介质是逐点传播；
2. 波动是振动状态的传播。同一波前上所有子波源的振动状态完全相同，因此，其后任意时刻各子波都具有相同的相位

衍射的实质是波面破损或畸变

惠更斯原理的局限性：无法说明子波强度的分布和子波不向后传播的问题

三、惠更斯——菲涅耳原理

波前(波阵面)上每个面元都可以看成是发出球面子波的波源；各子波在空间某点的相干叠加，就决定了该点波的强度。原理的核心是子波相干叠加

1.7 波的反射和折射

一、反射定律

1.反射线、入射线和界面的法线在同一平面内

2.$i = i^{'}$

二、折射定律

1.折射线、入射线和界面的法线在同一平面内

2.$\frac{sini}{sinr} = \frac{u_1}{u_2}$

1.8 波的干涉

一、波的叠加原理

几列波相遇之后，仍然保持它们各自原有的特征（频率、波长、振幅、振动方向等）不变，并按照原来的方向继续前进，好象没有遇到过其他波一样。在相遇区域内任一点的振动，为各列波单独存在时在该点所引起的振动位移的矢量和。仅在波动方程为线性方程（波强不太大）时成立

二、波的干涉

两列相干波相遇时，使某些地方振动始终加强，而使另一些地方振动始终减弱的现象，称为波的干涉现象。(波强的非均匀稳定分布)

相干波的条件：

1.频率相同

2.振动方向平行或同一方向有分量

3.相位相同或相位差恒定

$$A = \sqrt{A_1^2 = A_2^2 + 2A_1A_2cos\Delta\phi}\ \ \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

波程差：$\delta = r_2 - r_1$

$\delta = \pm k\lambda\ \ k = 0, 1, 2, \ldots\ \ A = A_1 + A_2$ 振动始终加强

$\delta = \pm(k + \frac{1}{2})\lambda\ \ k = 0, 1, 2, \ldots\ \ A = |A_1 - A_2|$ 振动始终减弱

$\delta =$ 其他 $|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$

1.9 半波损失

一、驻波的产生

振幅都相同的两列相干波，在同一直线上沿相反方向传播时，某些点的合振幅始终为零（波节），某些点的合振幅始终最大（波腹），这种特殊的干涉现象就称为驻波

二、驻波方程

正向 $y_1 = A\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})$

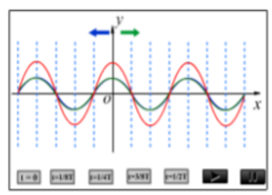
负向 $y_2 = A\cos 2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})$

$$
\begin{aligned}
y &= y_1 + y_2 \\
&= A\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + A\cos 2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda}) \\
&= \boxed{2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}}\,\underline{\cos 2\pi\nu t}
\end{aligned}
$$

驻波的振幅与位置有关

各质点都在作同频率的简谐运动

二、驻波方程



驻波方程：$y = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t$

讨论：

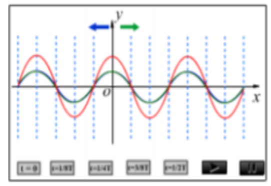
1）振幅 $\left|2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$ 随 x 而异，与时间无关.

$$
\left|\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = \begin{cases} 1 & 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm k\pi \quad k = 0,1,2,\cdots \\ 0 & 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm(k+\frac{1}{2})\pi \quad k = 0,1,2,\cdots \end{cases}
$$

$$
x = \begin{cases} \pm k\frac{\lambda}{2} & k = 0,1,\cdots \quad A_{max} = 2A \quad \text{波腹} \\ \pm(k+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} & k = 0,1,\cdots \quad A_{min} = 0 \quad \text{波节} \end{cases}
$$

相邻波腹（节）间距 $= \lambda/2$　　相邻波腹和波节间距 $= \lambda/4$

二、驻波方程 $y = 2A\cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t$



2）相邻两波节之间质点振动同相位，任一波节两侧振动相位相反，在波节处产生 π 的相位跃变.（与行波不同，无相位的传播）.

例： $x = \pm\dfrac{\lambda}{4}$ **为波节**

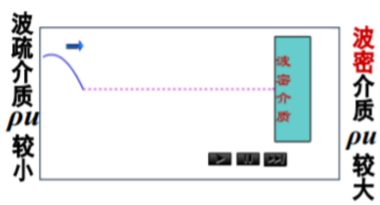
$-\dfrac{\lambda}{4} < x < \dfrac{\lambda}{4}$ 期间，$\boxed{\cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda} > 0}$ $\quad y = 2A\cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t$

$\dfrac{\lambda}{4} < x < \dfrac{3\lambda}{4}$ 期间，$\boxed{\cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda} < 0}$ $\quad y = -\left|2A\cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right|\cos 2\pi\nu t = \left|2A\cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right|\cos(2\pi\nu t + \pi)$

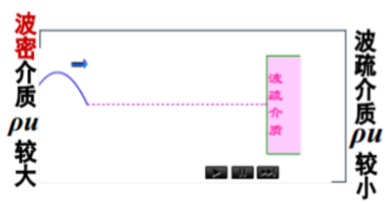
3）反射点是自由的，合成驻波在该点形成波腹，无半波损失；反射点为固定端，该点出现波节，有半波损失。

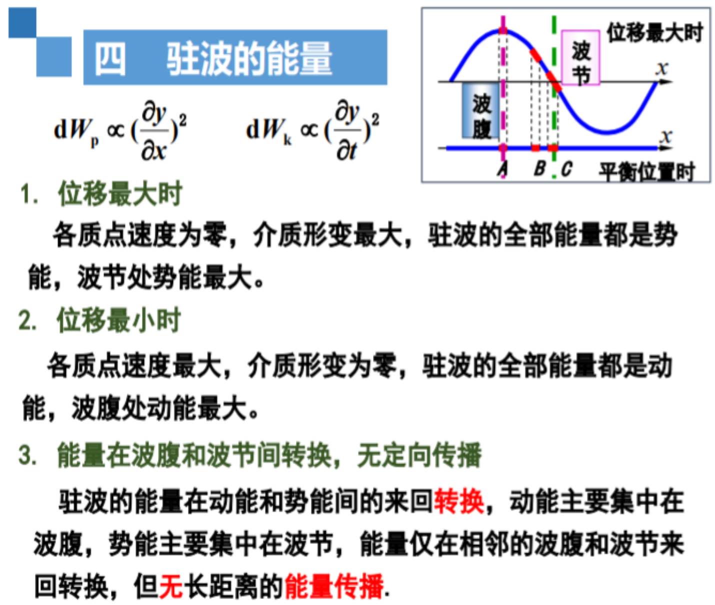
三、相位跃变（半波损失）

弹性波从波疏介质垂直入射到波密介质，反射波在分界处产生 π 的相位跃变，相当于出现了半个波长的波程差，称半波损失.



当波从波密介质垂直入射到波疏介质，反射波在分界处不产生相位跃变.





1.10 多普勒效应

1. 多普勒效应定义

若波源或观察者，或两者同时相对介质运动，则观察者接收到的的频率和波源的振动频率不同的现象，称为多普勒效应

2. 机械波的多普勒效应

$$\nu' = \frac{u \pm v_0 cos\beta}{u \pm v_s cos\alpha}\nu$$

其中：

ν波源振动的频率；ν'：探测器探测的频率；u：波相对于介质的速度；v_0：探测器相对于介质的速度；v_s：波源相对于介质的速度

3. 电磁波的多普勒效应光源和接收器在同一直线上运动时，考虑相对论效应：

$$\nu' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\nu$$

v是光源和接收器的相对运动速度

两者相向运动时，接收波长变短，这种现象称为“紫移”。光源和接收器相背运动时，接收波长变长，这种现象称为“红移”