Einführung in die Astronomie II
Sommersemester 2009
Übungsaufgaben 10 – Musterlösung
J. Wilms/M. Kadler
5. Mai 2009

Frage 1: *Roche und Zentrum der Milchstraße (Fortsetzung)*

Diese Aufgabe wird in den Übungen gemeinsam bearbeitet werden.

a) Wenn zwei gravitierende Objekte zu nahe zueinander kommen, dann können sie aufgrund der Gezeitenkräfte zerrissen werden. Dies wurde unter anderem im 19. Jahrhundert von Edouard Albert Roche am Beispiel der Bildung der Ringe des Saturn gezeigt.

Betrachten Sie zur Herleitung des Roche-Limit einen kugelförmigen Stern mit Radius r und Masse m, der sich auf einer Kreisbahn mit Radius d um ein weit entferntes Objekt mit der Masse M und Radius R bewegt (d.h. $d \gg r$). Näherungsweise kann angenommen werden, daß Stern zerrissen wird, wenn seine Gravitationskraft an der Oberfläche nicht mehr ausreicht, ein Massenelement der Masse μ zu halten, d.h. wenn die Anziehungskraft von M auf μ größer ist, als die von m auf μ.

- Die Gezeitenkraft ist definiert als der Unterschied der Gravitationskraft von M, die auf ein Masseelement μ im Zentrum des Sterns wirkt, und der, die auf das gleiche Masseelement auf der Oberfläche des Sterns an dem Punkt wirkt, der M am nächsten gelegen ist. Zeigen Sie, daß im Limit $d \gg r$ die Gezeitenkraft gegeben ist durch

$$F_\mathrm{T} = \frac{2GM\mu r}{d^3} \tag{1.1}$$

Lösung: Die Differenz der Gravitationskraft von M und von m auf μ ist

$$\begin{aligned} F_\mathrm{T} &= \frac{GM\mu}{(d-r)^2} - \frac{GM\mu}{d^2} = GM\mu\left(\frac{1}{(d-r)^2} - \frac{1}{d^2}\right) \\ &= \frac{GM\mu}{d^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{r}{d}\right)^2} - 1\right) = \frac{GM\mu}{d^2}\left(1 + 2\frac{r}{d} - 1\right) = \frac{2GM\mu r}{d^3} \end{aligned} \tag{s1.1}$$

- Der Stern zerfällt, wenn die Gravitationskraft auf μ gleich groß ist, wie die Gezeitenkraft. Zeigen Sie, daß der Stern dann zerfällt, wenn

$$d \le R\left(2\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} \tag{1.2}$$

wo ρ_M und ρ_m die Dichten von M und m sind. Dies ist die *Roche-Grenze*. Eine genauere Rechnung ergibt

$$d \le 2.456R\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} \tag{1.3}$$

Lösung: Kräftegleichgewicht:

$$\frac{GM\mu}{r^2} = \frac{2GM\mu r}{d^3} \quad \Longrightarrow \quad d = r\left(2\frac{M}{m}\right)^{1/3} \tag{s1.2}$$

Da

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_M R^3 \quad \text{und} \quad m = \frac{4\pi}{3}\rho_m r^3 \tag{s1.3}$$

ist

$$d = r \cdot \left(2\frac{\rho_M R^3}{\rho_m r^3}\right)^{1/3} = R\left(2\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} \quad \text{(s1.4)}$$

b) Das massereiche Schwarze Loch im Zentrum der Milchstraße übt Gezeitenkräfte auf seine Umgebung aus. Berechnen Sie die Rochegrenze für ein $3.7 \times 10^6\, M_\odot$ Schwarzes Loch und einen sonnenähnlichen Stern und vergleichen Sie diese mit dem Schwarzschildradius $R_\mathrm{S} = 2GM/c^2$ des Schwarzen Lochs.

(*Anmerkung:* Für die Berechnung der Dichte des Schwarzen Lochs können Sie annehmen, daß seine Masse innerhalb des Schwarzschildradius homogen verteilt ist)

Lösung: Masse des Schwarzen Lochs: $M_\mathrm{BH} = 3.710^6 M_\odot$, Masse des Sterns $M_\mathrm{S} = 1M_\odot$.

Damit ist

$$\frac{M_\mathrm{BH}}{M_\mathrm{S}} = \frac{\rho_\mathrm{BH} R_\mathrm{BH}^3}{\rho_\mathrm{S} R_\mathrm{S}^3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\rho_\mathrm{BH}}{\rho_\mathrm{S}} = \frac{M_\mathrm{BH} R_\mathrm{S}^3}{M_\mathrm{S} R_\mathrm{BH}^3} \quad \text{(s1.5)}$$

so daß

$$R_\mathrm{Roche} < f_r \left(\frac{M_\mathrm{BH}}{MS}\right)^{1/3} R_\mathrm{S} = 2.5 \times 10^8\ \mathrm{km} \quad \text{(s1.6)}$$

Der Schwarzschildradius des Schwarzen Lochs ist $R_\mathrm{Sch} = \frac{2GM}{c^2} = 1.1 \times 10^7$ km. Ein sonnenähnlicher Stern würde also zerrissen werden, wenn er sich dem galaktischem Zentrum bis auf den ca. 20-fachen Schwarzschildradius nähert.

c) Vergleichen Sie mit der Umlaufbahn des Sterns S2, die einen nächsten Abstand von $d = 120$ AU vom Schwarzen Loch hat.

Lösung: $d = 120\ \mathrm{AU} = 1.8 \times 10^{10}$ km und damit $d > R_\mathrm{Roche} > R_\mathrm{Sch}$

S2 könnte noch ca. 70× näher an das Schwarze Loch gelangen, bevor er zerrissen werden würde.

Frage 2: *Kernkollaps eines Sterns*

Beim Supernovakollaps kollabiert das Zentrum eines Sterns in sich zusammen. Dabei wird ein Teil der freigesetzten Gravitationsenergie zur Neutronisierung der Materie gemäß

$$\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \longrightarrow \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e} \tag{2.1}$$

benötigt, der Rest der Energie wird zur Ejektion der äußeren Hüllen des Sterns benutzt. Wir betrachten hier den Kollaps eines Sterns mit 10 Sonnenmassen.

a) Berechnen Sie die in Neutrinos abgestrahlte Energie unter der Annahme, daß das Sternzentrum eine Masse von $1.4\,M_\odot$ hat und jedes Neutrino eine Energie von 1 MeV trägt (1 MeV entspricht einer Energie von 1.6×10^{-13} J).

Lösung: Die Zahl der erzeugten Neutrinos ist

$$N_\nu = \frac{1.4\,M_\odot}{m_\mathrm{p} + m_\mathrm{e}} \sim \frac{1.4\,M_\odot}{m_\mathrm{p}} = \frac{1.4 \cdot 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}}{1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}} = 1.67 \times 10^{57} \tag{s2.1}$$

Damit ist die abgestrahlte Energie gleich

$$E_\nu = 1\,\mathrm{MeV} \cdot N_\nu = 2.7 \times 10^{44}\,\mathrm{J} \tag{s2.2}$$

b) Berechnen Sie die beim Kollaps freigesetzte Bindungsenergie unter der Annahme, daß der Kern eine Masse von $1.4\,M_\odot$ hat. Vor dem Kollaps habe der Kern einen Radius von $R_\mathrm{vorher} = 8000\,\mathrm{km}$ (typisch für weiße Zwerge), nach dem Kollaps einen Radius $R_\mathrm{nachher} = 14\,\mathrm{km}$. Gehen Sie der Einfachheit halber davon aus, daß beide Objekte eine homogene Massenverteilung haben.

Lösung: Die potentielle Energie einer Kugel ist $E_\mathrm{pot} = GM^2/R$, damit

$$E_\mathrm{Kollaps} = GM^2\left(\frac{1}{R\,\mathrm{NS}} - \frac{1}{R\,\mathrm{WD}}\right) \sim \frac{GM^2}{R_\mathrm{NS}} = 3.7 \times 10^{46}\,\mathrm{J} \tag{s2.3}$$

Der Neutrinoverlust ist damit vernachlässigbar.

c) Die äußere Hülle des Sterns, mit einer Masse von $8.6\,M_\odot$ wird durch die Explosion nach Außen geschleudert. Bestimme die Geschwindigkeit der Ejekta unter der Annahme, daß die beim Kernkollaps freigesetzte Energie vollständig zur Beschleunigung der Hülle benutzt wird.

Lösung: Energieerhaltung, d.h.

$$\frac{1}{2}M_\mathrm{Hülle}v^2 = E_\mathrm{Kollaps} \quad\Longrightarrow\quad v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{Kollaps}}{M_\mathrm{Hülle}}} = 6.6 \times 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 0.22c \tag{s2.4}$$

d.h. die Ejekta sind sehr schnell.