Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Einführung in die Astronomie I
Wintersemester 2008/2009
Übungsaufgaben 2 – Musterlösung
J. Wilms/M. Kadler
11. November 2008

Frage 1: *Bestimmung der Astronomischen Einheit anhand von Venusdurchgängen*

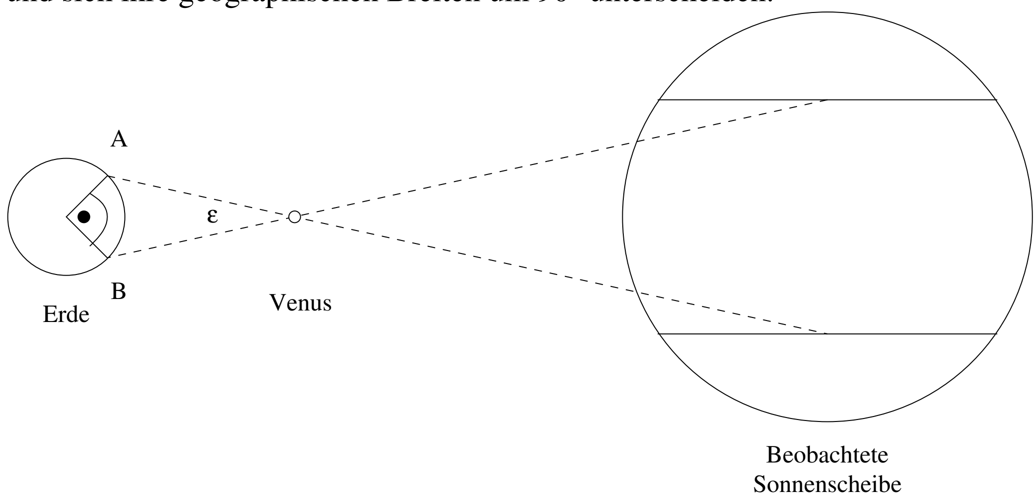
Für die Bestimmung der Astronomischen Einheit spielte ab dem 19. Jahrhundert die Beobachtung der Venusdurchgänge eine bedeutende Rolle. Dabei wandert für einen Beobachter auf der Erde die Venus über die Sonnenscheibe. Die Methode wurde erstmals von Edmund Halley vorgeschlagen. Die Expeditionen zur Beobachtung der Venustransits 1874 und 1882 wurden zu einem "Großforschungsprojekt". Ausführliche Information findet sich in Sterne und Weltraum (2004, 6, 22–42), siehe auch `http://eclipse.astronomie.info/transit/venus`.

a) Bestimme aus der Umlaufzeit der Venus um die Sonne den Abstand Erde — Venus bei einer unteren Konjunktion in Vielfachen der Astronomischen Einheit (bei einer unteren Konjunktion steht die Venus zwischen der Erde und der Sonne).

Lösung: Die relative Umlaufzeit der Venus beträgt 0.615 Jahre. Aus dem 3. Keplerschen Gesetz lässt sich die große Halbachse und bei einer angenommenen Kreisbahn der Radius r_V der Venusbahn berechnen:

$$\frac{P_\mathrm{V}^2}{r_\mathrm{V}^3} = \frac{P_\mathrm{E}^2}{r_\mathrm{E}^3} \quad \text{und daher} \quad r_\mathrm{V} = 0.723\,\mathrm{AU} \tag{s1.1}$$

b) Zur Bestimmung der Astronomischen Einheit betrachten wir ein stark vereinfachtes Modell. Man beobachtet den Venusdurchgang an verschiedenen Orten A und B auf der Erde, von denen aus die Venus auf der Sonnenscheibe verschiedene Strecken durchläuft. Die Orte A und B sollen so gewählt sein, daß sie symmetrisch zur Verbindungslinie Erde – Venus auf demselben Längengrad liegen und sich ihre geographischen Breiten um 90° unterscheiden.



Zeige, daß der geradlinige Abstand zwischen A und B 9006 km beträgt. Berechne nun mit Hilfe des Ergebnisses von Teilaufgabe a) die Astronomische Einheit in Kilometern, wenn der Winkel $\epsilon = 45''$ beträgt.

Lösung: Die gesuchte Strecke AB ist die Diagonale in einem Quadrat, dessen Seitenlängen gleich dem Erdradius sind: AB = 9006 km und daher

$$\tan\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\mathrm{AB}/2}{d_{\mathrm{EV}}} \quad \Longrightarrow \quad d_{\mathrm{EV}} = \frac{4503\,\mathrm{km}}{\tan(\epsilon/2)} = 4.1 \times 10^7\,\mathrm{km} \tag{s1.2}$$

andererseits gilt: $d_{\mathrm{EV}} = (1 - 0.723)$ AU und damit 1 AU $= d_{\mathrm{EV}}/0.277 = 1.5 \times 10^8$ km.

c) Die genaueste Methode zur Bestimmung der Astronomischen Einheit ist die Laufzeitmessung von Radarsignalen. Ein an der Venus in unterer Konjunktion reflektiertes Signal wird 4 min 37 s nach der Aussendung wieder empfangen. Berechne daraus die Astronomische Einheit.

Lösung: Das Signal muss zur Venus hin- und zurücklaufen:

$$2d_{\mathrm{EV}} = c\Delta t \quad \Longrightarrow 0.277\,\mathrm{AU} = 3.0 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 317\,\mathrm{s}/2 \quad \Longrightarrow 1\,\mathrm{AU} = 1.5 \times 10^8\mathrm{km} \tag{s1.3}$$

d) Das menschliche Auge kann unter günstigen Umständen noch ein Objekt erkennen, das unter einem Winkel von $2'$ erscheint. Kann die Venus auf der Sonnenscheibe mit bloßem (aber hinreichend geschütztem!) Auge wahrgenommen werden?

Lösung: Der Radius der Venus beträgt $R_{\mathrm{V}} = 0.949$ Erdradien. Da $\tan(\alpha/2) = R_{\mathrm{V}}/d_{\mathrm{EV}}$, erscheint die Venus unter einem Winkel von $\alpha = 1'$ und ist also mit unserem bloßem Auge vor der Sonne gerade so nicht beobachtbar.

Frage 2: *Planetary Atmospheres*

As shown in the lectures, the pressure distribution as a function of height is given by

$$P(h) = P_0 \exp(-h/H) \quad \text{with the scale height} \quad H = \frac{kT}{mg}$$

where T is the temperature, g the surface acceleration, and m the average mass of the molecules making up the atmosphere.
Mars' atmosphere consists mainly of CO_2 with a mean molecular mass of $m = 40m_{\mathrm{p}}$ where the proton mass is $m_{\mathrm{p}} = 1.67 \times 10^{-27}$ kg. Determine the ratio of the atmospheric pressures at the basis and at the top of its highest mountain, the extinct volcano Olympus Mons, ($h = 25$ km). Compare this ratio with the ratio of atmospheric pressures on top of Mt. Everest ($h = 8.8$ km) and at mean sea level (assume $H = 8.7$ km).
N.B. You will have to calculate Mars surface acceleration first. In order to do so note that the gravitational force outside of a spherical mass distribution with total mass M equals that of a point masss M at the centre of the spherical mass. Furthermore, ignore the variation of g with height, the rotation of the planet, and assume the atmosphere is isothermal (i.e., the temperature does not change with height). Appropriate data for Mars are a surface temperature $T = -73$°C, a mass $M_{♂} = 0.1M_{♁}$ and a planetary radius of $r_{♂} = 0.533r_{♁}$, for Earth the appropriate values are $M_{♁} = 6 \times 10^{24}$ kg and $r_{♁} = 6378$ km. The gravitational constant is $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$, Boltzmann's constant is $k = 1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$.

Lösung: As described in the question, the surface acceleration, $g_{♂}$, can be obtained from Newton's law of gravitation for a mass m:

$$mg_{♂} = \frac{GM_{♂}m}{r_{♂}^2} \quad \Longrightarrow \quad g_{♂} = \frac{GM_{♂}}{r_{♂}^2} \tag{s2.1}$$

There are now two equally justified ways to proceed:

1. The first way is to first compute $M_{♂}$ and $r_{♂}$ and plugging in the numbers at the end. One finds $M_{♂} = 6 \times 10^{23}$ kg and $r_{♂} = 3.59 \times 10^6$ m. Inserting into Eq. (s2.1) gives

$$g_{♂} = \frac{6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 6 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}}{1.289 \times 10^{13}\,\mathrm{m^2}} = 3.46\,\mathrm{Nkg^{-1}} = 3.46\,\mathrm{m\,s^{-2}} \tag{s2.2}$$

   since $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$.

2. An alternative way is to write Eq. (s2.1) in Earth units and remember that $g_{♁} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Therefore,

$$g_{♂} = \frac{G \cdot 0.1 M_{♁}}{0.284 r_{♁}^2} = 0.35 \frac{GM_{♁}}{r_{♁}^2} = 0.35 g_{♁} \tag{s2.3}$$

   which gives essentially the same number for the acceleration. Note that the g normally remembered, $9.81\mathrm{m\,s^{-2}}$, is slightly lower than the one derived from the above formulae since it takes into account the centripetal acceleration due to the rotation of the Earth, which is dependent on the geographical latitude.

The rest of the computation is now straightforward. Since we are asked to compare the pressures at the bottom to the top, note that

$$\frac{P}{P_0} = \exp\left(-\frac{h}{H}\right) \tag{s2.4}$$

such that for the comparison we do not need to know the pressure at the bottom of the mountains. The problem thus boils down to computing the scale height.
For Mars, the mass of CO_2 is $m = 6.68 \times 10^{-26}$ kg and the atmospheric temperature is $T = 200$ K, such that

$$H = \frac{kT}{mg} = \frac{1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}} \cdot 200\mathrm{K}}{6.68 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg} \cdot 3.46\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 12000 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}} = 12000 \frac{\mathrm{m^2\,kg\,s^{-2}}}{\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}} = 12\,\mathrm{km} \tag{s2.5}$$

The scale height on Mars is thus *higher* than that of Earth. The fact that carbon-dioxide is more massive than oxygen is more than compensated by the lower surface acceleration.
The pressure ratios are then straightforward. Olympus Mons is 2.1 scale heights above the martian pressure reference surface, and thus the pressure on the mountain is exp(−2.1) = 0.12 = 12% of that at the bottom of the mountain. In contrast, Mt. Everest is only one scale height above sea level, and the pressure on Mt. Everest is exp(−1) = 0.37 or about 40% of that at sea level. One is thus justified in claiming that Olympus Mons almost reaches space.