Einführung in die Astronomie II

Sommersemester 2009
Übungsaufgaben 14 – Musterlösung

J. Wilms/M. Kadler

09. Juni 2009

Frage 1: *Aktive Galaxien*

a) Seyfert-Galaxien zeigen zwei Arten von Emissionslinien in ihren Spektren: “Dünne Linien” (“narrow lines”) mit typischen Breiten von $\Delta\lambda/\lambda \sim 0.001$ und “breite Linien” (“broad lines”) mit typischen Breiten von $\Delta\lambda/\lambda \sim 0.01$. Man vermutet, daß die Linienemission von heißen Wolken herrührt, die sich mit hoher Geschwindigkeit in Bezug auf unsere Sichtlinie bewegen. Die Linien sind verbreitert, da sich einige der Wolken mit hoher Geschwindigkeit auf uns zu, andere aber von uns weg bewegen. Die Summe der Emissionen der Einzelwolken erzeugt dann das beobachtete Profil. Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsdispersion der für die dünnen und die breiten Linien verantwortlichen Wolken.

Lösung: Mit Hilfe der Dopplerformel

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \tag{s1.1}$$

finden wir $v_{\text{Narrow}} = 300\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$ und $v_{\text{Broad}} = 3000\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$.

b) Bei welcher Entfernung vom Zentrum des AGN befinden sich die Wolken? Nehmen Sie dazu an, daß sich die Wolken auf Kreisbahnen um ein Schwarzes Loch mit $10^7\,M_\odot$ bewegen.

Lösung: Im Fall der Bewegung auf Kreisbahnen ist

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \text{so daß} \quad r = \frac{GM}{v^2} \tag{s1.2}$$

Mit $M = 10^7\,M_\odot = 2 \times 10^{37}$ kg ergibt sich für die breiten Linien $r_{\text{BLR}} = 1.5 \times 10^{14}\,\text{m} = 0.005\,\text{pc} \sim 1000\,\text{AU}$ und für die dünnen Linien $r_{\text{NLR}} = 1.5 \times 10^{16}\,\text{m} = 0.5\,\text{pc}$.

c) Akkretion ist sehr effizient bei der Umwandlung von potentieller Energie in Strahlung. Die bei Akkretion freiwerdende Energie wird häufig in Einheiten der relativistischen Ruhemasse angegeben. Überzeugen Sie sich, daß die Leuchtkraft des AGN als $L = \eta\dot{M}c^2$, geschrieben werden kann, wo η die sogenannte “Effizienz” des Akkretionsprozesses ist und wo $\dot{M} = dM/dt$ die Massenakkretionsrate ist, d.h. die pro Zeiteinheit akkretierte Masse. Typischerweise ist für Akkretion $\eta = 0.1$. Wie viel Masse muß pro Jahr akkretiert werden, um die Leuchtkraft des Quasars 3C 273, $L = 10^{12}\,L_\odot$, zu erklären

Lösung: Nach Einstein ist die Ruheenergie gegeben durch $E = mc^2$. Wenn daher eine Masse Δm während eines Zeitintervalls Δt in Energie verwandelt wird, ist die freigesetzte Leistung

$$P = \frac{\Delta mc^2}{\Delta t} \tag{s1.3}$$

Der Grenzwert $\lim_{\Delta t\to 0}$ ergibt die gewünschte Aussage.

Mit Hilfe der Gleichung in der Frage kann dann die Massenakkretionsrate gefunden werden:

$$\dot{M} = \frac{L}{\eta c^2} = 4.4 \times 10^{22}\,\mathrm{kg\,s^{-1}} = 0.7\,M_\odot\,\mathrm{year}^{-1} \tag{s1.4}$$

Frage 2: *Die Hubble-Beziehung und die Entfernungen der Quasare*

(Wiederholung der Übungsaufgabe von Blatt 12)
Das sternartige Objekt HE0624+6907 wurde als sogenannter Quasar der scheinbaren visuellen Helligkeit 14.2 mag entdeckt (Groote et al., 1989, A&A 223, L1). Die Wasserstoffline Hα (Ruhesystem: $\lambda = 6563$Å) befindet sich bei 8990Å.

a) Wie gross ist die Rotverschiebung dieses Objekts?

Lösung: $z = 0.37$.

b) Wie gross ist die Entfernung des Quasars ($H_0 = 72\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$)?

Lösung: $d = 1.5\,\mathrm{Gpc}$

c) Wie gross ist seine absolute Helligkeit im Optischen? Vergleichen Sie die Leuchtkraft des Quasars mit der der Sonne und der der Milchstraße (letztere hat $M_\mathrm{V} = -20.2\,\mathrm{mag}$)!

Lösung: $M_\mathrm{V} = -26.7\,\mathrm{mag}$
Vergleich mit Sonne: $M_{\mathrm{V},\odot} = 4.74\,\mathrm{mag}$, so dass

$$\frac{F_\mathrm{Quasar}}{F_\odot} = 10^{0.4(26.7+4.74)} = 4 \times 10^{12} \tag{s2.1}$$

Vergleich mit Milchstrasse: $M_{\mathrm{V,Gal}} = -20.2\,\mathrm{mag}$ und damit

$$\frac{F_\mathrm{Quasar}}{F_\mathrm{Gal.}} = 10^{0.4(26.7-20.2)} = 400 \tag{s2.2}$$

Anmerkung: Da Quasare nicht-thermische Spektren zeigen, emittieren sie vergleichbar auch in anderen Wellenlängen wie Röntgen, UV, oder Radio (ihr Spektrum ist "flach") als die Milchstraße bzw. die Sonne. Daher sind die Leuchtkraftverhältnisse noch wesentlich größer die obigen Werte. Ferner kann aus der obigen Rechnung nur grob auf den Leuchtkraftunterschied geschlossen werden, da aufgrund der unterschiedlichen Spektralformen hier verschiedene Spektralbänder verglichen werden. In der Praxis wird eine sogenannte K-Korrektur angewandt, die auf der mehr oder weniger guten Kenntnis des Breitbandspektrums der Quellen basiert und einen Korrekturfaktor für die Leuchtkraft, z.B. im Optischen, liefert.

Anmerkung 2: Die Gleichung für die absolute Leuchtkraft, die oben benutzt wurde, ist für so hohe Rotverschiebungen eigentlich nicht mehr gültig, da hier eigentlich die Expansion des Universums noch mit berücksichtigt werden muß.

Frage 3: *Der Virialsatz*

Diese Aufgabe wird in den Übungen gemeinsam besprochen werden.
Eine der wichtigsten Werkzeuge bei der Massenbestimmung im Universum ist der sogenannte Virialsatz,

$$T = \frac{1}{2}|U| \tag{3.1}$$

wo T und U die gesamte kinetische und potentielle Energie des Systems ist.
Zur Herleitung des Virialsatzes betrachten wir ein System gravitativ wechselwirkender Teilchen verschiedener Masse, m_i.

a) Zeigen Sie, dass für das i-te Teilchen gilt

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(m_i\mathbf{r}_i^2) - m_i\dot{\mathbf{r}}_i^{\,2} = \sum_{j\neq i}\frac{Gm_im_j\mathbf{r}_i\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|^3} \tag{3.2}$$

Lösung: Zunächst ist

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_i^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{r}_i) = \ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i \tag{s3.1}$$

und daher

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\mathbf{r}_i^2) - \dot{\mathbf{r}}_i^{\,2} = \ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_i^{\,2} = \ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{r}_i \tag{s3.2}$$

Da

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|^3} \tag{s3.3}$$

ist damit

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(m_i\mathbf{r}_i^2) - m_i\dot{\mathbf{r}}_i^{\,2} = \sum_{j\neq i}\frac{Gm_im_j\mathbf{r}_i\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|^3} \tag{s3.4}$$

b) Im statistischen Gleichgewicht gilt, dass im Zeitmittel

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sum_i m_i\mathbf{r}_i^2 = 0 \tag{3.5}$$

ist. Summieren Sie Gl. 3.2 über alle Teilchen des Systems und zeigen Sie unter der Annahme des Gleichgewichts, dass daraus der Virialsatz folgt.

Lösung: Tapfer drauflosrechnen ergibt

$$\frac{1}{2}\sum_i\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(m_i\mathbf{r}_i^2) - \sum_i m_i\dot{\mathbf{r}}_i^{\,2} = \sum_i\sum_{j\neq i}\frac{Gm_im_j\mathbf{r}_i\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|^3} \tag{s3.5}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_i\sum_{j\neq i}Gm_im_j\frac{\mathbf{r}_i\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^3} + \sum_j\sum_{i\neq j}Gm_jm_i\frac{\mathbf{r}_j\cdot(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|^3}\right) \tag{s3.6}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_i\sum_{j\neq i}Gm_im_j\frac{\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i^2}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^3} + \sum_j\sum_{i\neq j}Gm_jm_i\frac{\mathbf{r}_j\cdot\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j^2}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|^3}\right) \tag{s3.7}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{Gm_im_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|} \tag{s3.8}$$

Die kinetische Energie des Systems ist aber

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 \tag{s3.9}$$

und die gesamte potentielle Energie ist

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \tag{s3.10}$$

Im statistischen Gleichgewicht ist damit

$$2T - U = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i^2 = 0 \tag{s3.11}$$

Bemerkung: Der Grund, warum im Mittel

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i^2 = 0 \tag{s3.12}$$

liegt daran, dass für den Mittelwert der zweiten Ableitung einer Funktion F gilt

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}t^2} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t = \tau) - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t = 0) \right) \tag{s3.13}$$

Für ein System mit einer Periode τ ist daher der Mittelwert 0. Im Fall vieler Objekte und für $\tau \to \infty$ gilt das obige immer noch asymptotisch.

Frage 4: *Nachbearbeitung der Vorlesung*

a) Betrachten Sie die verschiedenen Arten Aktiver Galaxien im Vereinigungsmodell.
b) Was sind die Grundannahmen hinter der Verwendung der Supernovae vom Typ Ia für die Entfernungsbestimmung?
c) Sind die von uns bei großen Rotverschiebungen beobachteten Galaxien typische Beispiele für Galaxien im frühen Universum?