Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Einführung in die Astronomie I
Wintersemester 2008/2009
Übungsaufgaben 3 – Musterlösung
J. Wilms/M. Kadler
11. November 2008

Frage 1: *Ellipseneigenschaften von Kreutz-Kometen*

a) Kreutz-Kometen stellen eine Untergruppe der sog. Sungrazer (wörtl. Sonnenkratzer) Kometen dar, die auf ihrer Bahn im Perihel der Sonne sehr nahe kommen. Die Kometen der Kreutz Gruppe gehen vermutlich alle auf einen sehr viel grösseren Kometen zurück, der beim Umlauf um die Sonne durch Gezeitenkräfte zerbrach.

Der bekannteste Vertreter der Kreutz Gruppe ist der Komet Ikeya-Seki, der 1965 eine Helligkeit von -10^m erreichte und damit als dritthellstes Objekt am Himmel (nach Sonne und Mond) tagsüber deutlich neben der Sonne sichtbar war. Perihelabstand und Exzentrizität seiner Bahn betragen $d_{\text{perihel}} = 0,008$ AE und $e = 0,99991$. Berechne die beiden Halbachsen a, b seiner Ellipsenbahn.

Lösung: Nach Definition ist

$$e = \frac{a - d_{\text{perihel}}}{a} \quad .$$

Damit folgt

$$a = -\frac{d_{\text{perihel}}}{e-1} \sim 88.9\text{AE} \quad .$$

Die kleine Halbachse b ergibt sich aus

$$b = a\sqrt{(1-e^2)} = 88.9\,\text{AE} \cdot \sqrt{(1-0.99991^2)} \sim 1.19\,\text{AE} \quad .$$

b) Wann wird der Komet Ikeya-Seki sein Perihel das nächste Mal erreichen.

Lösung: Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt

$$P^2_{\text{Ikeya-Seki}}/P^2_{\oplus} = a^3_{\text{Ikeya-Seki}}/a^3_{\oplus} \quad ,$$

so dass

$$P_{\text{Ikeya-Seki}} = \sqrt{(88.9\,\text{AE}/1\,\text{AE})^3} \cdot P_{\oplus} \sim 838.2\,\text{Jahre} \quad .$$

Der nächste Periheldurchgang des Kometen Ikeya-Seki wird also in ca. 800 Jahren geschehen.

Frage 2: *Geschwindigkeit auf Keplerbahn, Drehimpulserhaltung*

In der Vorlesung wurde demonstriert, dass das 2. Keplersche Gesetz eine unmittelbare Folge der Drehimpulserhaltung während der Bahnbewegung auf einer Keplerbahn ist. Es gilt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = const.$$

wobei dA/dt die Sektorgeschwindigkeit ist. dA ist dabei die Fläche, die vom Radiusvektor eines Planeten auf seiner Bahn während der Zeit dt überstrichen wird.

a) Zeige durch Integration von dA/dt über einen vollen Umlauf eines Planeten der Masse m um die Sonne mit der Periode P, dass der Drehimpuls pro Einheitsmasse gegeben ist durch

$$\frac{L}{m} = \frac{2\pi ab}{P} \quad .$$

a und b sind die grosse und kleine Halbachse der Bahnellipse mit der Gesamtfläche $A = \pi ab$.

Lösung: Durch Integration der Gleichung ergibt sich

$$\int_0^P \frac{dA}{dt} dt = \int_0^P \frac{L}{2m} dt \quad .$$

Da die Fläche, die der Radiusvektor während eines vollen Umlaufs überstreicht, die gesamte Ellipsenfläche ist, folgt

$$A = \pi ab = \frac{LP}{2m} \quad .$$

Also $L/m = 2\pi ab/P$.

b) Zeige mithilfe obiger Gleichung für den Einheitsdrehimpuls, dass die Bahngeschwindigkeit im Perihel und im Aphel gegeben sind durch

$$v_{\text{perihel}} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad \text{und} \quad v_{\text{aphel}} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad .$$

Lösung: Der entscheidende Teil dieser Lösung ist es, zu erkennen, dass sowohl im Perihel als auch im Aphel der Geschwindigkeitsvektor senkrecht zum Radiusvektor steht, so dass

$$|\vec{L}| = m|\vec{r} \times \vec{v}| = mrv \quad .$$

Damit folgt für beide Fälle

$$v = \frac{L}{mr} = \frac{2m\pi ab}{Pmr} = \frac{2\pi a^2}{Pr}\sqrt{1-e^2} \quad ,$$

wobei $b = a\sqrt{1-e^2}$ benutzt wurde. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$r_{\text{perihel}} = a(1-e) \quad \text{und} \quad r_{\text{aphel}} = a(1+e) \quad .$$

Damit folgt direkt

$$v_{\text{perihel}} = \frac{2\pi a^2}{Pa(1-e)}\sqrt{1-e^2} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad ,$$

$$v_{\text{aphel}} = \frac{2\pi a^2}{Pa(1+e)}\sqrt{1-e^2} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad .$$

c) Bestimme Perihel- und Aphelgeschwindigkeit der Erde ($a_\oplus = 1$ AU, $e_\oplus = 0.017$, $P_\oplus = 365.26$ Tage), sowie des Kometen Ikeya-Seki mit den Bahnparameter-Werten aus Aufgabe 1.

Lösung: Für die Erde ergibt sich direkt

$$v_{\mathrm{perihel},\oplus} = \frac{2\pi \cdot 1\,\mathrm{AE}}{1\,\mathrm{Jahr}} \sqrt{\frac{1.017}{0.983}} \sim 6.39\,\mathrm{AE/Jahr} \sim 30.3\,\mathrm{km/s} \quad ,$$

$$v_{\mathrm{aphel},\oplus} = \frac{2\pi \cdot 1\,\mathrm{AE}}{1\,\mathrm{Jahr}} \sqrt{\frac{0.983}{1.017}} \sim 6.18\,\mathrm{AE/Jahr} \sim 29.3\,\mathrm{km/s} \quad .$$

Die Exzentrizität des Kometen Ikeya-Seki war gegeben als $e = 0.99991$ und die grosse Halbachse wurde berechnet zu $a_{\mathrm{Ikeya-Seki}} = 88.9$ AE. Für die Periode ergab sich $P_{\mathrm{Ikeya-Seki}} = 838.2$ Jahre. Damit folgt

$$v_{\mathrm{perihel,Ikeya-Seki}} = \frac{2\pi \cdot 88.9\,\mathrm{AE}}{838.2\,\mathrm{Jahre}} \sqrt{\frac{1.99991}{0.00009}} =\sim 49.7\,\mathrm{AE/Jahr} \sim 235.6\,\mathrm{km/s} \quad ,$$

$$v_{\mathrm{aphel,Ikeya-Seki}} = \frac{2\pi \cdot 88.9\,\mathrm{AE}}{838.2\,\mathrm{Jahre}} \sqrt{\frac{0.00009}{1.99991}} =\sim 0.004\,\mathrm{AE/Jahr} \sim 19\,\mathrm{m/s} \quad .$$

Frage 3: *Herleitung des 3. Keplerschen Gesetzes für den Fall einer dominierenden Zentralmasse*

a) Auf der Erde beträgt die Länge eines Jahres 365.26 Tage. Berechne die Länge des Mars-Jahres aus dem 3. Keplerschen Gesetz. Die grosse Halbachse der Marsbahn beträgt $a_{♂} = 1.524$ AU.

Lösung: Nach dem 3. Keplerschen Gesetz gilt:

$$\frac{P_\oplus^2}{a_\oplus^3} = \frac{P_{♂}^2}{a_{♂}^3} \quad ,$$

so dass

$$P_{♂} = P_\oplus \frac{a_{♂}}{a_\oplus}^{3/2} \quad .$$

Damit folgt: $P_{♂} = 1.881$ Jahre = 687 Tage.

b) Die allgemeine Herleitung des 3. Keplerschen Gesetzes in Newtons Formulierung findet sich im WWW auf den Handouts zur Vorlesung. Hier soll eine vereinfachte Form dieses Gesetzes hergeleitet werden für den Spezialfall, dass eine der beiden beteiligten Massen sehr gross ist und das System dominiert ($m_1 \gg m_2$).

- Bestimme zunächst den Bahnradius der Sonne, der auf die Gravitationskraft Jupiters zurückgeht. Drücke diesen in Einheiten des Sonnenradius aus ($R_\odot = 700000$ km). Nimm den Jupiterorbit als kreisförmig an, mit einem Bahnradius von 5.2 AU bei einer Masse von 318 Erdmassen. Die Masse der Erde ist $m_\oplus = 5.97 \times 10^{24}$ kg. Die Masse der Sonne beträgt $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg. Inwieweit ist demnach die Vereinfachung $M_\odot \gg m_2$ gültig für alle Massen m_2 im Sonnensystem?

Lösung: Nach Definition des Massenschwerpunkts gilt: $M_\odot r_\odot = m_2 r_2$, so dass $r_\odot / r_2 = m_2 / m_\odot$. Jupiters Masse ist $m_{♃} = 318 \cdot 5.97 \times 10^{24}$ kg $= 1.90 \times 10^{27}$ kg. Mit dem gegebenen Wert für $M_\odot$ ergibt sich $r_\odot / r_{♃} = 9.54 \times 10^{-4}$. Aus $r_{♃} = 5.2$ AU und 1AU $= 149.6 \times 10^6$ km folgt dann: $r_\odot = 5.2 \cdot 149.6 \times 10^6\,\mathrm{km} \cdot 9.54 \times 10^{-4} \sim 742000\,\mathrm{km} = 1.06 R_\odot$. Der Massenschwerpunkt des Sonne-Jupiter Systems liegt nur minimal ausserhalb des Sonnenradius, der ungefähr drei Grössenordnungen kleiner ist als der Bahnradius des Jupiter. Für alle anderen Planeten (Masse m_2, Bahnradius r_2) ist dieses Verhältnis noch extremer, weil $m_{♃} r_{♃} > m_2 r_2$.

- Nimm nun also an, dass der massive Zentralkörper stationär ist. Zeige, dass aus der Bedingung, dass die Gravitationskraft des zentralen Körpers auf den Planeten gleich der Zentripetalkraft auf der Planetenbahn ist, eine vereinfachte Form von Keplers 3. Gesetz abgeleitet werden kann.

Lösung: Es gilt

$$F_{grav} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{m_2 v^2}{r} = F_{\mathrm{zent}} \quad ,$$

wobei r der Abstand zwischen den zwei Körpern ist und F_{zent} die Zentripetalkraft des weniger massiven Körpers auf seiner Bahn um den massiven Zentralkörper. Die Bahngeschwindigkeit beträgt $v = 2\pi r/P$, so dass

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{m_2 4\pi^2 r^2}{r P^2} \quad .$$

Daraus folgt

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G m_1} r^3 \quad ,$$

was das 3. Keplersche Gesetz für den Fall $m_1 \gg m_2$ darstellt.