



Frage 1: Cepheiden

Diese Aufgabe wird in den Übungen gemeinsam bearbeitet.

Das wichtigste Werkzeug für die Entfernungsbestimmung im näheren Universum ist die Perioden-Leuchtkraft-Beziehung der Cepheiden. In dieser Aufgabe werden wir sehen, daß diese Beziehung eine natürliche Folge der Tatsache ist, dass Cepheiden schwingende Gasbälle sind:

- a) Zeigen Sie, daß $P \sim (G\rho)^{-1/2}$ die Dimension einer Periode hat, d.h. in Sekunden gemessen wird, und damit typische Schwingungsperioden eines Gasballs mit $(G\rho)^{-1/2}$ skalieren sollten (dieses Argument wird eine "Dimensionsanalyse" genannt). Hier ist ρ die mittlere Dichte des Sterns und $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Lösung: Die Einheit von $G\rho$ sind

$$\text{N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot \text{kg m}^{-3} = \text{kg m s}^{-2} \cdot \text{m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot \text{kg m}^{-3} = \text{s}^{-2} \quad (\text{s1.1})$$

so dass $(G\rho)^{-1/2}$ tatsächlich in Sekunden gemessen wird.

- b) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehung der vorherigen Teilaufgabe, $P \propto \rho^{-1/2}$, sowie der Abhängigkeit der mittleren Dichte eines Sterns von Masse und Radius, daß $\log P = c_1 + c_2 \log L$ wo c_1 und c_2 Konstanten sind. Benutzen Sie diese Abhängigkeit, um zu zeigen, dass $m = c_3 - c_4 \log P$ wo m die beobachtete scheinbare Helligkeit des Cepheiden ist und c_3 und c_4 ebenfalls Konstanten sind. Beachten Sie dabei, dass für die Leuchtkraft eines Sterns gilt $L \propto R^2 T^4$ (warum?).

Lösung: Da $\rho \propto M/R^3$ ergibt sich

$$P \propto \rho^{-1/2} \propto M^{-1/2} R^{3/2} \quad (\text{s1.2})$$

Wegen $L \propto R^2 T^4$ (folgt aus Stefan-Boltzmann) ergibt sich $R \propto L^{1/2} T^{-2}$ und damit

$$P \propto M^{-1/2} L^{3/4} T^{-3} \quad \text{bzw.} \quad P = \xi_1 M^{-1/2} L^{3/4} T^{-3} \quad (\text{s1.3})$$

wo ξ_1 eine Konstante ist. Logarithmieren ergibt dann

$$\log P = c_1 + (3/4) \log L \quad (\text{s1.4})$$

Da für Magnituden $m_2 - m_1 = -2.5 \log(F_2/F_1)$, und da der Fluß $F = L/4\pi r^2$, gilt $m = \xi_2 - \xi_3 \log L$ mit weiteren Konstanten ξ_2 und ξ_3 . Damit ist dann

$$m = \xi_2 - \frac{4\xi_3}{3} (\log P - c_1) = c_3 - c_4 \log P \quad (\text{s1.5})$$

Bei bekannter Entfernung der beobachteten Cepheiden (z.B. Parallaxenbestimmung) kann dann eine äquivalente Beziehung für ihre absolute Helligkeit ermittelt werden.

c) Beobachtungen ergeben, daß für Cepheiden

$$\frac{\langle M_V \rangle}{\text{mag}} \propto -2.3 \log \left(\frac{P}{1 \text{ d}} \right) - 1.7 \quad (1.6)$$

Ein Cepheide wird mit einer scheinbaren mittleren Helligkeit von $\langle m \rangle = 19 \text{ mag}$ und einer Periode von 30 Tagen in M31 entdeckt. Wie groß ist die Entfernung zur Andromeda Galaxie in parsec?

Lösung: $\langle M_V \rangle = -5.1 \text{ mag}$, damit ergibt sich ein Entfernungsmodul von $19 + 5.1 = 24.1$ und damit $d = 660\,000 \text{ pc}$.

Frage 2: Die Hubble-Beziehung und die Entfernungen der Quasare

Das sternartige Objekt HE0624+6907 wurde als sogenannter Quasar der scheinbaren visuellen Helligkeit 14.2 mag entdeckt (Groote et al., 1989, A&A 223, L1). Die Wasserstoffline $H\alpha$ (Ruhesystem: $\lambda = 6563 \text{ \AA}$) befindet sich bei 8990 \AA .

a) Wie gross ist die Rotverschiebung dieses Objekts?

Lösung: $z = 0.37$.

b) Wie gross ist die Entfernung des Quasars ($H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$)?

Lösung: $d = 1.5 \text{ Gpc}$

c) Wie gross ist seine absolute Helligkeit im Optischen? Vergleichen Sie die Leuchtkraft des Quasars mit der der Sonne und der der Milchstraße (letztere hat $M_V = -20.2 \text{ mag}$)!

Lösung: $M_V = -26.7 \text{ mag}$

Vergleich mit Sonne: $M_{V,\odot} = 4.74 \text{ mag}$, so dass

$$\frac{F_{\text{Quasar}}}{F_{\odot}} = 10^{0.4(26.7+4.74)} = 4 \times 10^{12} \quad (\text{s2.1})$$

Vergleich mit Milchstrasse: $M_{V,\text{Gal}} = -20.2 \text{ mag}$ und damit

$$\frac{F_{\text{Quasar}}}{F_{\text{Gal.}}} = 10^{0.4(26.7-20.2)} = 400 \quad (\text{s2.2})$$

Anmerkung: Da Quasare nicht-thermische Spektren zeigen, emittieren sie vergleichbar auch in anderen Wellenlängen wie Röntgen, UV, oder Radio (ihr Spektrum ist "flach") als die Milchstraße bzw. die Sonne. Daher sind die Leuchtkraftverhältnisse noch wesentlich größer die obigen Werte. Ferner kann aus der obigen Rechnung nur grob auf den Leuchtkraftunterschied geschlossen werden, da aufgrund der unterschiedlichen Spektralformen hier verschiedene Spektralbänder verglichen werden. In der Praxis wird eine sogenannte K -Korrektur angewandt, die auf der mehr oder weniger guten Kenntnis des Breitbandspektrums der Quellen basiert und einen Korrekturfaktor für die Leuchtkraft, z.B. im Optischen, liefert.

Anmerkung 2: Die Gleichung für die absolute Leuchtkraft, die oben benutzt wurde, ist für so hohe Rotverschiebungen eigentlich nicht mehr gültig, da hier eigentlich die Expansion des Universums noch mit berücksichtigt werden muß.

Frage 3: Vorlesungsnachbearbeitung

- Diskutieren Sie, warum die Tangentialmethode für die Bestimmung der Rotationskurve der Milchstrasse nur für galaktische Längen $\ell < 90^\circ$ und $\ell > 270^\circ$ funktioniert und daher Messungen der Rotationskurve der Milchstrasse innerhalb von 8.5 kpc deutlich besser sind als für größere Abstände.

Lösung: Unter der Annahme von Kreisbahnbewegung der Gaswolken um das galaktische Zentrum herum wird die größte Radialgeschwindigkeit bei dem Punkt gemessen, bei dem das Dreieck Sonne – Wolke – Galaktisches Zentrum einen rechten Winkel bildet. Die Radialgeschwindigkeit dieser Wolke steht in einer einfachen Beziehung zu ihrer Geschwindigkeit um das Zentrum der Milchstrasse. Ferner kann aus einfachen Dreiecksbeziehungen auf die Entfernung der Wolke vom Galaktischen Zentrum geschlossen werden. Ein solches Dreieck kann natürlich für die äußere Milchstrasse nicht aufgebaut werden, so daß hier die Entfernungen indirekt gemessen werden müssen, was viel ungenauer ist.

- Warum ist MOND keine befriedigende physikalische Theorie, wo doch die Dunkle Materie auch postuliert werden muss?

Lösung: MOND in seiner einfachsten Form impliziert eine kraftabhängige Beschleunigung und ist daher nicht invariant gegenüber der Wahl des Koordinatensystems. Alle Experimente zeigen jedoch, daß eine solche Invarianz beobachtet wird. Die Existenz Dunkler Materie kann jedoch auf der Basis der modernen Quantenmechanik zumindest postuliert werden, d.h. steht nicht im Widerspruch zu allgemein anerkannten physikalischen Theorien.

- Betrachten Sie den Aufbau der kosmischen Entfernungsleiter und der wesentlichen Schritte hin zur Bestimmung von H_0 .

Lösung: Im einfachsten Fall:

1. Parallaxe
2. Kalibration variabler Sterne aus der Parallaxe \implies Cepheiden
3. Messung von Cepheiden im Virgo-Haufen \implies Entfernung und z von Virgo ergibt dann H_0 .