Einführung in die Astronomie I
Wintersemester 2008/2009
Übungsaufgaben 8 – Musterlösung
J. Wilms/M. Kadler
13. Januar 2009

Frage 1: *Sternaufbau*

a) Welche Leuchtkraft (in solaren Einheiten) und absolute Helligkeit hat ein Hauptreihenstern der zehnfachen Sonnenmasse?

Lösung: Aus der zehnfachen Masse folgt wegen $L \propto M^4$ die 10000-fache Leuchtkraft.

Für die absolute Helligkeit gilt:

$$M_{\mathrm{bol}}(\mathrm{Stern}) - M_{\mathrm{bol}}(\mathrm{Sonne}) = -2.5 \times \log L_{\odot} \quad \text{(s1.1)}$$

und damit

$$M_{\mathrm{bol}}(\mathrm{Stern}) = 4.74 - 2.5 \log 10000 = -5.26\,\mathrm{mag} \quad \text{(s1.2)}$$

b) Bei der Wasserstofffusion wird pro Fusionsereignis eine Energie von 26 MeV frei. Wie viele solche Prozesse müssen pro Sekunde ablaufen, um die Sonnenleuchtkraft zu liefern?

Lösung: Die pro Fusionsereignis freigesetzte Energie ist $E = 26 \times 10^6 \cdot 1.67 \times 10^{-19}\,J$. Bei $L_{\odot} = 3.82 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$ ist damit $N = L_{\odot}/E = 8.8 \times 10^{37}\,\mathrm{s}^{-1}$.

c) Wie viele Jahre kann die Sonne im Hauptreihenstadium verbleiben, wenn 10% der Wasserstoffmasse der Sonne während des Hauptreihenstadiums fusionieren?

Lösung: Pro Fusionsprozess werden 4 Protonen zu Helium verschmolzen. 75% der Sonnenmasse ist Wasserstoff. Die Protonenmasse ist $m_{\mathrm{p}} = 1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, die der Sonne $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Damit ist die Zahl der Protonen in der Sonne $= 0.75 \times M_{\odot}/m_{\mathrm{p}} = 9.2 \times 10^{56}$

Während der Hauptreihenzeit müssten also $(0.1 \cdot 9.2 \times 10^{56})/4 = 2.3 \times 10^{55}$ Fusionsprozesse ablaufen. Nach Teilaufgabe b finden pro Sekunde 8.8×10^{37} Prozesse statt.

Für die Hauptreihenzeit t_{h} gilt dann: $t_{\mathrm{h}} = 2.3 \times 10^{55}/8.8 \times 10^{37}\mathrm{s}^{-1} = 2 \times 10^{17}\mathrm{s} = 8.3 \times 10^9$ Jahre

d) Die Sonne strahlt seit 4,5 Milliarden Jahren mit etwa konstanter Leuchtkraft. Berechnen Sie die Masse, die der Sonne auf diese Weise verloren gegangen ist. Wie viel Prozent der Sonnenmasse ist dies?

Lösung: Nach der Formel $E = mc^2$ verlor die Sonne in 4.5 Milliarden Jahren die Masse $m = L_{\odot}t/c^2 = 6 \times 10^{26}\,\mathrm{kg}$, entsprechend 0.03% der Sonnenmasse.

Frage 2: *Bedingungen im Sonneninneren*

Diese Aufgabe wird als Präsenzaufgabe in den Übungen gelöst werden.
Im Folgenden werden wir aus der Annahme der Hydrostasie den mittleren Druck und die Temperatur im Sonneninneren abschätzen.

a) Aus der Annahme der Hydrostasie wurde in der Vorlesung gezeigt, daß

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \tag{2.1}$$

Um den Druck im Sonneninneren abzuschätzen, nehmen wir an, daß die Dichte im Sonneninneren überall der mittleren Dichte entspricht: $\rho(r) = \langle\rho\rangle = \text{const.}$. Bestimmen Sie die mittlere Dichte und die innerhalb des Radius r eingeschlossene Masse M_r und ermitteln Sie durch Trennung der Variablen den Druck bei dem Radius $r/2$. Beachten Sie dabei die Randbedingung $P(r = R) = 0$.

Lösung: Die mittlere Dichte ist

$$\langle\rho\rangle = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{2\times 10^{30}\,\mathrm{kg}}{\frac{4}{3}\pi\cdot 3.4\times 10^{26}\,\mathrm{m}^3} = 1410\,\mathrm{kg\,m^{-3}} = 1.4\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \tag{s2.1}$$

und damit nicht viel größer als die von Wasser. Ferner gilt

$$M_r = \frac{4}{3}\pi\langle\rho\rangle r^3 \tag{s2.2}$$

und damit

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} = \frac{4\pi G\langle\rho\rangle^2 r}{3} \tag{s2.3}$$

womit

$$\int_P^0 dP = -\frac{4}{3}\pi G\langle\rho\rangle^2 \int_{R/2}^R r dr \tag{s2.4}$$

$$= -\frac{4}{3}\pi G\langle\rho\rangle^2 \cdot \frac{1}{2}\left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right) \tag{s2.5}$$

$$= -\frac{1}{2}\pi G\langle\rho\rangle^2 R^2 \tag{s2.6}$$

so dass

$$P = \frac{1}{2}\pi G\langle\rho\rangle^2 R^2 = 10^{14}\,\mathrm{Pa} \tag{s2.7}$$

b) Da das Gas im Inneren der Sonne der idealen Gasgleichung genügt, gilt

$$P = \frac{\langle\rho\rangle}{\mu m_\mathrm{p}} kT \tag{2.8}$$

woraus bei bekanntem Druck die Temperatur abgeleitet werden kann. Hier ist μ das mittlere Molekulargewicht, d.h. die mittlere Masse aller druckausübenden Teilchen pro Proton. Bestimmen Sie μ für den Fall vollständig ionisierten Wasserstoffgases. Warum ist dieser Wert ist kleiner als der korrekte Wert für Materie solarer Zusammensetzung, $\mu = 0.61$? Bestimmen Sie für $\mu = 0.61$ die typische Temperatur in der Sonne.

Lösung: Bei vollständig ionisiertem Wasserstoff wird der Druck durch Elektronen und Protonen ausgeübt. Da $m_\mathrm{e} \ll m_\mathrm{p}$ ist daher $\mu = 0.5$. Für Gas, das auch Helium und andere schwerere Elemente ("Metalle") enthält, steigt μ: Für Material mit 75% Wasserstoff und 25% Helium (pro Masse) haben wir ein Verhältnis von 12 H-Atomen pro He Atom. Wenn dieses Material ionisiert wird, erzeugen 14 Elektronen, 12 Protonen und 1 He-Kern (=27 Teilchen) Druck, die zusammen eine Masse von $16\,m_\mathrm{p}$ haben, so dass $\mu = 0.59$. Das mittlere Molekulargewicht steigt also an.

Für die Temperatur gilt

$$T = \frac{\mu m_{\mathrm{p}} P}{k\langle\rho\rangle} \tag{s2.8}$$

Einsetzen von $\langle\rho\rangle$ und μ ergibt dann

$$T = \frac{\mu m_{\mathrm{p}} P}{k\langle\rho\rangle} = \frac{0.61 \cdot 1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \times 10^{14}\,\mathrm{Pa}}{1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{m^3\,Pa\,K^{-1}} \times 1400\,\mathrm{kg\,m^{-3}}} = 5 \times 10^{6}\,\mathrm{K} \tag{s2.9}$$