Einführung in die Astronomie II

Sommersemester 2009
Übungsaufgaben 16 – Musterlösung
J. Wilms/M. Kadler
23. Juni 2009

Frage 1: *Einstein-de Sitter Universum*

Die Friedmann-Gleichung lautet für ein flaches Universum ($k = 0$):

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0 R_0^3}{R^3} R^2 = 0 \tag{1.1}$$

wo $R_0 = 1$ der heutige Skalenfaktor und ρ_0 die heutige Dichte des Universums ist.

a) Zeigen Sie, dass im Fall $k = 0$

$$\frac{8\pi G\rho_0}{3} = H_0^2 R_0^3 \tag{1.2}$$

Lösung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H(t)^2}\rho(t) \tag{s1.1}$$

Da in flachen Universen $\Omega = 1$ und wie angegeben $R_0 = 1$, ergibt sich die gewünschte Gleichung.

b) Überzeugen Sie sich, dass in einem materiedominierten Universum für die Dichte gilt

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^3 \tag{1.2}$$

wo ρ_0 die mittlere Dichte des Universums zum heutigen Zeitpunkt ist.

Lösung: Die in einem mitbewegten Volumen enthaltene Teilchenzahl ist eine Erhaltungsgröße. Da die Teilchenzahl proportional ist zu $\rho(t)V$ und da das Volumen $V \propto R(t)^3$ folgt die obige Behauptung.

c) Lösen Sie die Friedmann-Gleichung für ein materiedominiertes Universum unter der Randbedingung, dass ein Urknall stattgefunden hat ($R(t = 0) = 0$).

Lösung: Aus dem Obigen ergibt sich für die Friedmann-Gleichung

$$\dot{R}^2 - \frac{H_0^2 R_0^3}{R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = H_0 R_0^{3/2} R^{-1/2} \tag{s1.2}$$

und damit nach Trennung der Variablen

$$\int_0^{R(t)} R^{1/2}\,\mathrm{d}R = H_0 R_0^{3/2} t \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{3} R^{3/2}(t) = H_0 R_0^{3/2} t \quad \Longrightarrow \quad R(t) = R_0 \left(\frac{3H_0}{2}\,t\right)^{2/3} \tag{s1.3}$$

d) Zeige, dass in diesem Weltmodell das heutige Alter des Universums gegeben ist durch

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \tag{1.4}$$

Lösung: Für das heutige Weltalter gilt $R(t = t_0) = R_0$ und daraus folgt einfach die obige Behauptung.

e) Kugelsternhaufen haben ein Alter von 14 Milliarden Jahre. Warum kann daher das hier behandelte Einstein-de Sitter-Universum *keine* Beschreibung unseres Universums sein ($H_0 = 72\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$)?

Lösung: Das sich aus der Gleichung ergebende Weltalter ist 9 Mrd. Jahre, also jünger als die Kugelsternhaufen.

f) Unter der Annahme, dass $\Omega = 1$ (warum ist das sinnvoll?), wie wird das in der vorherigen Teilaufgabe angesprochene Problem in heutigen kosmologischen Modellen gelöst?

Lösung: $\Omega = 1$ wird von der Inflationstheorie postuliert. Damit werden sehr viele fundamentale Probleme des frühen Universums gelöst, so dass diese Annahme sehr sinnvoll ist. Da $\Omega_m = 0.3$ muss damit $\Omega_\Lambda = 0.7$ gelten. Da Universen mit Ω_Λ eine exponentielle Expansion aufweisen, sind sie älter als Universen nur mit Materie. Damit wird das Weltalter >14 Milliarden Jahre und das Problem der Alter der Kugelsternhaufen ist gelöst.

Frage 2: *Vorlesungsnachbearbeitung*

a) Welche Argumente sprechen dafür, dass das Universum mit einem Urknall begonnen hat?

Lösung: Existenz der 3 K-Strahlung, Hubble'sches Gesetz

b) Welche Argumente sprechen dafür, dass das frühe Universum durch eine inflationäre Phase gegangen ist?

Lösung: Keine magnetischen Monopole, keine Antimaterie im beobachteten Universum, Inflation löst das Horizont-Problem, Inflation löst das "Flachheits problem".

c) Spekulieren Sie über den inneren Aufbau der ersten Generation massereicher Sterne des Spektraltyps O und B, also der Sterne, die aus den primordial erzeugten Elementen entstanden sind.

Lösung: Heutige O- und B-Sterne erzeugen ihre Energie mit dem CNO-Prozess. Da in den Big Bang Nukleosynthese C, N und O nicht fusioniert wurden, können die ersten massereichen Sterne nur mit dem pp-Prozess Energie erzeugt haben. Es ist daher davon auszugehen, dass sie zunächst nur mit dem pp-Prozess Energie erzeugt haben und daher Innen radiativ und Aussen konvektiv waren. Erst nachdem CNO im Stern fusioniert wurden, wird der Stern auf Energieerzeugung durch den CNO-Prozess umschalten (das ging wahrscheinlich sehr schnell, da nur sehr wenig CNO notwendig ist, um den CNO-Prozess energetisch effizienter zu machen als den pp-Prozess).