Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Einführung in die Astronomie II
Sommersemester 2009
Übungsaufgaben 13 – Musterlösung
J. Wilms/M. Kadler
26. Mai 2009

Frage 1: *Akkretion in Röntgendoppelsternen und Aktiven Galaxienkernen*

Sowohl in Röntgendoppelsternen als auch in aktiven Galaxienkernen sind die hohen beobachteten Leuchtkräfte auf Materieakkretion auf ein zentrales massereiches Objekt zurückzuführen. In Röntgendoppelsternen handelt es sich hierbei entweder um einen Weissen Zwerg, einen Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch (mit einigen wenigen Sonnenmassen $M_\odot$). Im Falle von aktiven Galaxienkernen ist das Zentralobjekt ein supermassives Schwarzes Loch mit $M \gtrsim 10^6\,M_\odot$.

a) Zeigen Sie mithilfe des Energieerghaltungssatzes, dass für die freiwerdende Energie E_{released} bei der Akkretion eines Massenelements m aus dem Unendlichen auf eine Kreisbahn mit Radius r um ein kompaktes Objekt der Masse M gilt: $E = GMm/2r$. Es kann angenommen werden, dass sich das Massenelement im Unendlichen in Ruhe befand. (Für die Herleitung ist ein Ansatz nach Newtonscher Mechanik ausreichend.)

Lösung: Aus der Energieerhaltung folgt, dass die freiwerdende Energie gleich der Differenz der potentiellen Energie im Unendlichen (= 0) und der totalen Energie im Abstand r ist. Letztere setzt sich zusammen aus potentieller Energie und kinetischer Energie auf der Kreisbahn:

$$E(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(s1.1)}$$

Auf einer stabilen Kreisbahn gilt

$$G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \text{, so dass} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad \text{(s1.2)}$$

Einsetzen in Gl. (s1.1) ergibt

$$E(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{2r} = -\frac{GMm}{2r} \quad , \qquad \text{(s1.3)}$$

so dass für die freiwerdende Energie gilt:

$$E_{\text{released}}(r) = E(\infty) - E(r) = 0 - \left(-\frac{GMm}{2r}\right) = \frac{GMm}{2r} \qquad \text{(s1.4)}$$

b) Bestimmen Sie mithilfe des Ergebnisses der vorigen Teilaufgabe die freiwerdende Energie, wenn eine Masse von 1 kg aus dem Unendlichen auf die Oberfläche eines Neutronensterns trifft ($M_{\text{NS}} = 1.44\,M_\odot$; $r_{\text{NS}} = 10\,\text{km}$). Drücken Sie diese Energie in Einheiten von Megatonnen TNT aus, wobei $1\,\text{MT} = 3\times10^{15}\,\text{J}$ eine typische Grössenordnung einer Atombombenexplosion ist. ($G = 6.67\times10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2}$, $1\,M_\odot = 2\times10^{30}\,\text{kg}$).

Lösung: Einsetzen in Gl. (s1.4) ergibt

$$E_{\text{released}} = \frac{6.67\times10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2}\cdot 1.44\cdot 2\times10^{30}\,\text{kg}\cdot 1\,\text{kg}}{2\cdot 10\cdot 10^3\,\text{m}} = 9.6\times10^{15}\,\text{N}\,\text{m} = 9.6\times10^{15}\,\text{J} \sim 3\,\text{MT}$$

c) Leuchtkraft ist definiert als die Leistung die ein astronomisches Objekt pro Zeiteinheit freisetzt.

1. überzeugen Sie sich, dass diese Definition äquivalent ist zu $L = \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$. Nutzen Sie diese Gleichung, um eine Formel zur Berechnung der totalen Leuchtkraft eines Objektes, das mit der *Massenakkretionsrate* $\dot{m}$ akkretiert. Dabei ist $\dot{m} = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ die Menge der akkretierten Masse ($\mathrm{d}m$) pro Zeiteinheit ($\mathrm{d}t$). Die totale Leuchtkraft ist die freigesetzte Energie bei Akkretion auf den Schwarzschildradius, $r_\mathrm{S} = 2GM/c^2$). Hängt diese Leuchtkraft von der Masse des akkretierenden Objektes ab?

Lösung: Nach Definition gilt

$$L = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad , \tag{s1.5}$$

wobei ΔE die freigesetzte Energie im Zeitintervall Δt ist. Im Grenzwert $\Delta t \to 0$ ergibt sich $L = \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$.
Die Zeitableitung von Gl. (s1.4) ergibt

$$L = \frac{GM\dot{m}}{2r} \quad . \tag{s1.6}$$

Für den Schwarzschildradius eines Schwarzen Loches ergibt sich

$$L_\mathrm{BH} = \frac{GM\dot{m}}{2 \cdot 2GM/c^2} = \frac{1}{4}\dot{m}c^2 \quad . \tag{s1.7}$$

Dieser Ausdruck hängt nur von der Massenakkretionsrate ab und nicht von der absoluten Masse. (*N.B.* Eine korrektere relativistische Behandlung ergibt $L_\mathrm{BH} \sim 0.1\dot{m}c^2$ für ein nicht-rotierendes ("Schwarzschild") Schwarzes Loch, und $L_\mathrm{BH} \sim 0.42\dot{m}c^2$ für ein maximal rotierendes "Kerr" Schwarzes Loch.)

2. Schätzen Sie die Massenakkretionsrate eines Schwarzen Loches im Zentrum eines aktiven Galaxienkerns mit einer Leuchtkraft von $10^{13}\,L_\odot$ ab. (Geeignete Einheiten sind Sonnenmassen pro Jahr: $L_\odot = 4 \times 10^{26}$ W, $c = 300000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, 1 year=365.25 days, 1 day=86400 seconds)

Lösung: Nach Gl. (s1.7) gilt:

$$\dot{m} = \frac{4L_\mathrm{BH}}{c^2} = \frac{4 \cdot 10^{13} \cdot 4 \times 10^{26}\,\mathrm{W}}{9 \times 10^{16}\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}} = 1.78 \times 10^{23}\,\mathrm{kg\,s^{-1}} = 5.6 \times 10^{30}\,\mathrm{kg\,year^{-1}} = 2.8\,M_\odot\,\mathrm{year^{-1}} \quad , \tag{s1.8}$$

da $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J\,s^{-1}} = 1\,\mathrm{m^2\,kg\,s^{-3}}$.

Frage 2: *Superluminal Motion*

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass scheinbare Überlichtgeschwindigkeiten in den Jets aktiver Galaxien beobachtet werden können, wenn sich ein Jet mit hoher Geschwindigkeit v (nahe der Lichtgeschwindigkeit c) in einem kleinen Winkel Φ zur Sichtlinie auf den Beobachter zubewegt. Für die gemessene scheinbare Geschwindigkeit gilt:

$$\beta_\mathrm{app} = \frac{\beta \sin\Phi}{(1 - \beta\cos\Phi)} \quad , \tag{2.1}$$

wobei $\beta = v/c$ und $\beta_\mathrm{app} = v_\mathrm{app}/c$.

a) Zeigen Sie, dass es einen kritischen Winkel $\cos\Phi = \beta$ gibt, unter dem die scheinbare Überlichtgeschwindigkeit einen maximalen Wert annimmt.

Lösung: β_{app} ist maximal, wenn $\mathrm{d}\beta_{\mathrm{app}}/\mathrm{d}\Phi = 0$, d.h., für

$$\frac{\mathrm{d}\beta_{\mathrm{app}}}{\mathrm{d}\Phi} = \frac{\beta\cos\Phi}{1-\beta\cos\Phi} - \frac{\beta^2\sin^2\Phi}{(1-\beta\cos\Phi)^2} = 0 \tag{s2.1}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\beta\cos\Phi}{1-\beta\cos\Phi} = \frac{\beta^2\sin^2\Phi}{(1-\beta\cos\Phi)^2} \tag{s2.2}$$

$$\beta\cos\Phi(1-\beta\cos\Phi) = \beta^2\sin^2\Phi \tag{s2.3}$$

$$\beta\cos\Phi - \beta^2\cos^2\Phi = \beta^2\sin^2\Phi \tag{s2.4}$$

$$\beta\cos\Phi = \beta^2(\sin^2\Phi + \cos^2\Phi) \tag{s2.5}$$

und damit

$$\cos\Phi = \beta \tag{s2.6}$$

b) Drücken Sie den kritischen Winkel über den Lorentzfaktor $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ aus.

Lösung: Es gilt

$$\cos\Phi = \beta \tag{s2.7}$$

$$\cos^2\Phi = \beta^2 \tag{s2.8}$$

$$1 - \sin^2\Phi = \beta^2 \tag{s2.9}$$

$$\sin\Phi = \sqrt{1-\beta^2} \tag{s2.10}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin\Phi = \frac{1}{\gamma} \tag{s2.11}$$

c) Ab welcher minimalen Geschwindigkeit β_{min} kann die scheinbare Geschwindigkeit $\beta_{\mathrm{app}}^{\mathrm{max}}$ grösser werden als 1 (d.h., $v_{\mathrm{app}} > c$)?

Lösung:

$$\beta_{\mathrm{app}} = \frac{\beta\sin\Phi}{1-\beta\cos\Phi} = \frac{\beta}{\gamma(1-\beta^2)} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{s2.12}$$

Die kleinste Geschwindigkeit β_{min}, für die $\beta_{\mathrm{app}} > 1$, ist:

$$\beta_{\mathrm{min}}^2 = 1 - \beta_{\mathrm{min}}^2 \Rightarrow \beta_{\mathrm{min}} = \sqrt{1/2} \sim 0.707 \quad . \tag{s2.13}$$

Dies passiert bei einem Winkel von 45°. Damit ist *superluminal motion* nicht zwangsläufig ein Hinweis auf hochrelativistische Geschwindigkeiten.

d) Kann man von der gemessenen scheinbaren Geschwindigkeit $\beta_{\mathrm{app}} = 10c$ direkt auf die wahre Geschwindigkeit eines Jets schliessen?

Lösung: Nein, weil der Winkel zur Sichtlinie im Allgemeinen unbekannt ist. Allerdings kann man eine untere Grenze für die wahre Geschwindigkeit angeben, unter der Annahme, dass der Jet unter seinem kritischen Winkel beobachtet wird. Dann gilt

$$10 = \beta\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \beta \sim 0.95 \quad . \tag{s2.14}$$

Der kritische Winkel dazu ist $\Phi \sim 17.5°$, d.h., ab ca. 95% der Lichtgeschwindigkeit kann zehnfache Lichtgeschwindigkeit beobachtet werden. Unter allen anderen Winkeln wäre die wahre Geschwindigkeit β noch grösser.