Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Einführung in die Astronomie II

Sommersemester 2009
Übungsaufgaben 9 – Musterlösung
J. Wilms/M. Kadler
28. April 2009

Frage 1: *Pulsare und Neutronensterne*

a) Die Rotationsperiode des Pulsars im Krebsnebel ist $\tau = 33\,\mathrm{ms}$. Es wird beobachtet, dass sie pro Jahr um $\Delta\tau = 1.3 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$ zunimmt, da der Pulsar die für seine Radiostrahlung notwendige Leistung aus seiner Rotationsenergie speisst. Masse und Radius seien 1.44 Sonnenmassen bzw. 12 km. Wie groß ist die Rotationsenergie des Neutronensterns und wie gross ist seine abgestrahlte Leistung? Wie verhält letztere sich zur Leuchtkraft der Sonne? ($1L_\odot = 4 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$).

Anmerkung: Die abgestrahlte Leistung ist $P = -dE_\mathrm{rot}/dt$ wo E_rot die Rotationsenergie ist; gehen Sie davon aus, daß der Neutronenstern eine homogene Dichteverteilung hat.

Lösung: Der Pulsar wird als kugelförmiger Neutronenstern homogener Dichte angenommen. Seine Rotationsenergie ist dann:

$$E_\mathrm{rot} = \frac{1}{5}MR^2\omega^2 = \frac{1}{5}MR^2\frac{4\pi^2}{\tau^2} \tag{s1.1}$$

Einsetzen: $\omega = 2\pi/\tau = 190\,\mathrm{s}^{-1}$, $M = 4 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $R = 12000\,\mathrm{m}$ ergibt $E_\mathrm{rot} = 3 \times 10^{42}\,\mathrm{J}$

Abgestrahlte Leistung:

$$P = -\frac{dE_\mathrm{rot}}{dt} = -2\frac{1}{5}MR^2\omega\frac{d\omega}{dt} = -2E_\mathrm{rot}\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt} \tag{s1.2}$$

wobei

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2\pi}{\tau^2}\cdot\frac{d\tau}{dt} \tag{s1.3}$$

Mit $d\tau/dt = 1.3\times10^{-5}\,\mathrm{Jahr}^{-1} = 4\times10^{-13}\,\mathrm{s\,s}^{-1}$ ist $d\omega/dt = -2.4\times10^{-9}$. Die abgestrahlte Leistung ist damit $P = 7.5\times10^{31}\,\mathrm{W} \sim 1.8\times10^{5}\,L_\odot$.

b) Wie schnell kann der Neutronenstern aus der obigen Teilaufgabe rotieren, ohne daß er zerrissen wird (Rechnung in klassischer Mechanik)? Wie gross ist dabei die Rotationsgeschwindigkeit am Äquator?

Lösung: Bedingung für Zerreissen: am Äquator Zentrifugalkraft = Gravitationskraft, d.h.

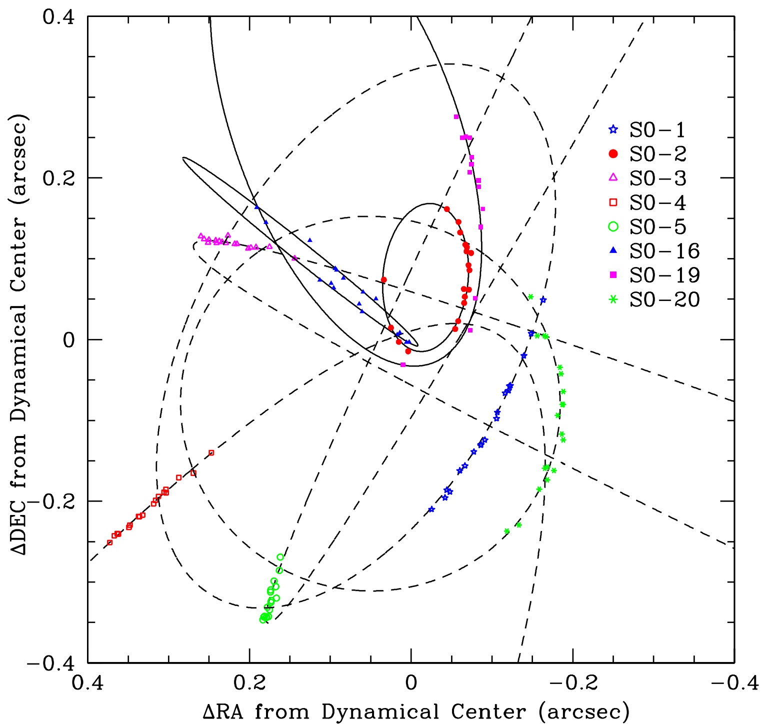
$$m\omega_\mathrm{max}^2R = \frac{GmM}{R^2} \quad\Longrightarrow\quad \omega_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \tag{s1.4}$$

so dass $\omega_\mathrm{max} = \sqrt{GM/R^3} = 10500\,\mathrm{s}^{-1}$. Die maximale Rotationsperiode ist damit $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 0.6\,\mathrm{ms}$. Die Geschwindigkeit am Äquator ist damit $v_\mathrm{max} = \omega R = 1.2\times10^{8}\,\mathrm{m\,s}^{-1} = 0.42c$.

Frage 2: *Das Galaktische Zentrum*

Die Zentren von Spiralgalaxien haben eine sehr hohe Sterndichte und sind daher sehr schwierig zu studieren. Wegen seiner Nähe von nur 8.5 kpc ist das Zentrum unserer Milchstrasse mit das am Besten studierte Galaxienzentrum. In dieser Aufgabe werden wir die nächste Woche in der Vorlesung auch angedeutete Evidenz für die Existenz eines supermassiven Schwarzen Lochs im Galaktischen Zentrum und die Evidenz für eine größere Zahl von Supernova-Explosionen in der jüngsten Vergangenheit in der Nähe des Zentrums beleuchten.

a) Die folgende Abbildung wurde von A. Ghez zusammengestellt. Sie basiert auf der Messung der Positionen von Sternen nahe des Galaktischen Zentrums, die im letzten Jahrzehnt gemacht wurden.



Die Abbildung zeigt, daß sich alle Sterne um das “dynamische Zentrum” der Milchstrasse bewegen. An diesem Ort wurde im Optischen kein Objekt nachgewiesen. In der Abbildung befindet sich das dynamische Zentrum an der Position $\Delta\mathrm{RA} = 0$, $\Delta\mathrm{DEC} = 0$. Von besonderem Interesse für die Untersuchung des Zentrums ist der Stern S0-2. Reinhard Schödel und Mitarbeiter konnten nachweisen, daß sich dieser Stern auf einer elliptischen Bahn um das dynamische Zentrum bewegt. Die Bahnperiode beträgt 15.2 Jahre.

1. Bestimme die große Halbachse der Bahn von S0-2. Gib die Halbachse sowohl in AU als auch in Lichttagen an. Aufgrund von Projektionseffekten sehen wir die Ellipse verzerrt. Die projizierte Halbachse der Ellipse ist gegeben durch $a_{\text{projected}} = a_{\text{real}} \cos i$ (warum?), wo i die Inklination der Bahn ist, d.h. die Neigung der Ellipsenbahn gegen die Himmelsebene. Für S0-2 wurde die Inklination gemessen zu $i = 36°$.

Lösung: Aus der Abbildung kann die große Halbachse zu $0.18''$ abgeschätzt werde, so daß die wahre Halbachse $\theta = 0.09''$ beträgt. Da dies ein kleiner Winkel ist, gilt

$$\theta = \frac{a_{\text{projected}}}{d}$$

wo a die Halbachse und d die Entfernung zum Galaktischen Zentrum ist. Mit $d = 8.5\,\text{kpc}$ und $\theta = 4.36 \times 10^{-7}\,\text{rad}$, $a_{\text{projected}} = 0.0037\,\text{pc} = 765\,\text{AU}$. Die Entprojektion ergibt eine wahre Halbachse von 946 AU. Da ein Lichttag einer Entfernung von $300\,000\,\text{km}\,\text{s}^{-1} \cdot 86400\,\text{s} = 2.59 \times 10^{10}\,\text{km} = 173\,\text{AU}$, entspricht hat die Halbachse des Sterns eine Länge von 5.5 Lichttagen. Der Stern ist also sehr nahe am Galaktischen Zentrum.

2. Bestimme die Masse des Galaktischen Zentrums unter Benutzung der Kenntnis der Bahn von S0-2.

Lösung: In Einheiten von Jahren und AU ist das dritte Kepler'sche Gesetz

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{P^2}$$

so dass $M_1 + M_2 = 3.66 \times 10^6\, M_\odot$. Da für Sterne $M \sim 1\, M_\odot$, was hier vernachlässigbar ist, gilt dass die Masse des dynamischen Zentrums $3.66 \times 10^6\, M_\odot$ beträgt. Innerhalb eines Volumens der Größe des Sonnensystems befindet sich im Galaktischen Zentrum damit eine Masse von einigen Millionen Sonnenmassen. Aufgrund dieser großen Kompaktheit wird daher davon ausgegangen, dass es sich dabei um ein Schwarzes Loch handelt.

b) Nahe des Galaktischen Zentrums befindet sich ein Ring aus Molekülwolken mit einer geschätzten Gesamtmasse von $10^7\, M_\odot$ und einem Durchmesser von 200 pc. Dieser Ring expandiert mit einer Geschwindigkeit von $150\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Bestimme die kinetische Energie des Rings. Warum wird die Existenz des Rings als Hinweis für häufige Supernova-Explosionen nahe des Galaktischen Zentrums gesehen? Bestimme den Zeitpunkt, zu dem diese Explosionen stattfanden unter der Annahme, daß der Ring sphärisch symmetrisch ist und unter der Annahme, daß seine Expansion nicht durch Reibung am Interstellaren Medium abgebremst wurde ($1\, M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg).

Lösung: Die kinetische Energie des Rings ist

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = 2.25 \times 10^{47}\,\mathrm{J}$$

Eine Supernova gibt typischerweise 10^{46} J an Energie ab. Da kein anderer Mechanismus bekannt ist, der so viel Energie erzeugt, wird davon ausgegangen, daß der Ring durch Supernovae erzeugt wird (diese Vermutung wird auch durch die Existenz vieler Supernova-Überreste nahe des Galaktischen Zentrums bestärkt).

Der Radius des Rings beträgt $r = 100\,\mathrm{pc} = 100\,\mathrm{pc} \cdot 3 \times 10^{16}\,\mathrm{m\,pc^{-1}} = 3 \times 10^{18}\,\mathrm{m}$. Die Expansionsgeschwindigkeit ist $v = 150\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, und daher fanden die Explosionen vor $r/v = 2 \times 10^{13}\,\mathrm{s} \sim$ 600000 Jahren statt. Da die Milchstraße nur ca. 10 Mrd. Jahre alt ist, war dies vor sehr kurzer Zeit.