Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Einführung in die Astronomie I
Wintersemester 2008/2009
Übungsaufgaben 5 – Musterlösung
J. Wilms/M. Kadler
02. Dezember 2008

Frage 1: *Sonnenbeobachtung*

Die Leuchtkraft der Sonne beträgt $L_\odot = 4 \times 10^{26}$ W.

a) Berechne die sogenannte Solarkonstante, d.h. die pro Quadratmeter Fläche aufgenommene Strahlungsleistung der Sonne. Gehe davon aus, daß die Sonne im Zenit steht, d.h. daß die Sonnenstrahlung senkrecht auf die Erdoberfläche einfällt, und daß die Abschwächung der Strahlung der Sonne in der Erdatmosphäre vernachlässigbar ist (*Anmerkung:* Letztere Annahme ist so nicht ganz richtig, für den Zweck dieser Aufgabe aber ausreichend.).

Lösung: Die Solarkonstante ist der Strahlungsfluß bei einer Astronomischen Einheit (=150 Mio km):

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{4 \times 10^{26}\,\mathrm{W}}{4\pi \cdot (150 \times 10^9\,\mathrm{m})^2} = 1400\,\mathrm{W} \tag{s1.1}$$

b) Ein unvernünftiger Studierender versucht, die Sonne mit dem Bamberger Spiegelteleskop (Spiegeldurchmesser 60 cm) mit dem blossen Auge zu beobachten. Nimm an, daß die vom Teleskop aufgenommene Strahlungsleistung im Auge des Studierenden in einem Volumen von 1 mm^3 konzentriert wird. Wie lange dauert es, bis das Eiweiß in diesem Volumen geronnen ist und ein toter Fleck im Gesichtsfeld entsteht? Der Einfachheit halber soll angenommen werden, daß das Augeninnere wie Eiklar bei 62°C gerinnt und dass es ansonsten die Dichte und spezifische Wärmekapazität von Wasser hat (also $c = 4.187\,\mathrm{J\,g^{-1}\,K^{-1}}$).

Lösung: Zur Erhöhung der Temperatur um ΔT wird die Energie

$$E = cm\Delta T = cV\rho\Delta T \tag{s1.2}$$

benötigt. Bei einer Leistung P dauert dieser Vorgang insgesamt die Zeit

$$t = \frac{cV\rho\Delta T}{P} \tag{s1.3}$$

Das 60 cm Teleskop hat eine Fläche von 0.28 m^2, die eingefangene Strahlungsleistung beträgt damit $P = 392$ W. Unter der Annahme, daß der Augapfel eine Temperatur von 36°C hat, dauert daher die Aufheizung

$$t = \frac{4187\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}} \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m^3} \cdot 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot (62-36)\,\mathrm{K}}{392\,\mathrm{J\,s^{-1}}} = 2.8 \times 10^{-4}\,\mathrm{s} \tag{s1.4}$$

Die Reaktionsgeschwindigkeit des Auges ist deutlich langsamer, d.h. es ist davon auszugehen, daß selbst beim kürzesten Blick durch das Teleskop ein blinder Fleck im Auge übrigbleibt.

Frage 2: *Doppelsternsysteme, Planeten und Bahnbewegung*

a) Ein Doppelsternsystem bestehe aus einem Stern A mit einer Masse von $M_A = 5\,M_\odot$ und einem Stern B mit Masse $M_B = 2\,M_\odot$. Die Zentren der Sterne haben voneinander einen Abstand von $R = 25\,R_\odot$, die Sterne bewegen sich auf Kreisbahnen umeinander ($M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg, $R_\odot = 7 \times 10^8$ m).

(i) Was ist die Bahnperiode der Sterne?

Lösung: Mit Hilfe des 3. Kepler'schen Gesetzes ergibt sich

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} R^3 = \frac{4\pi^2 \cdot \left(25 \cdot 7 \times 10^8\,\mathrm{m}\right)^3}{6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \cdot (7 \cdot 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg})} = 2.27 \times 10^{11}\,\mathrm{s}^2$$

$$\Longrightarrow \quad P = 4.76 \times 10^5\,\mathrm{s} = 5.5\,\mathrm{d} \quad \text{(s2.1)}$$

(ii) Was ist die Bahngeschwindigkeit des Sterns B?

Lösung: Die Sterne bewegen sich um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Damit gilt für die Abstände r_A und r_B vom Schwerpunkt

$$R = r_A + r_B \quad \text{(s2.2)}$$

$$M_A r_A = M_B r_B \quad \text{(s2.3)}$$

$$\text{(s2.4)}$$

so daß

$$r_A = \frac{M_B}{M_A} r_B \quad \Longrightarrow \quad R = r_B \left(1 + \frac{M_B}{M_A}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad r_B = R\left(1 + \frac{M_B}{M_A}\right)^{-1} = 17.86\,R_\odot = 1.25 \times 10^{10}\,\mathrm{m} \quad \text{(s2.5)}$$

Damit ist

$$v_B = \frac{2\pi r_B}{P} = 165\,\mathrm{km\,s^{-1}} \quad \text{(s2.6)}$$

(iii) Unter der Annahme, daß wir als Beobachter das System in seiner Bahnebene beobachten, was ist die maximale relative Verschiebung von Spektrallinien, die von diesem System beobachtet werden? Wie groß ist die Verschiebung, wenn wir es unter einem Winkel von 45° zur Normalen der Bahnebene beobachten?

Lösung: Es gilt für Stern B

$$z_B = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_B}{c} = 5.5 \times 10^{-4} \quad \text{(s2.7)}$$

Für Stern A ist $r_A = (25 - 17.86)\,R_\odot = 7.14\,R_\odot = 5 \times 10^9$ m und damit $v_A = 66\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Damit ist $z_A = 2.2 \times 10^{-4}$.

b) Wie groß ist die maximale Winkelauslenkung, die ein Stern von einer Sonnenmasse als Reaktion auf die Bahnbewegung eines Planeten mit 10 Jupitermassen erfahren würde, der sich in einem Abstand von 50 AU um die Sonne bewegt? Nehmen Sie an, daß der Stern aus einer Entfernung von 10 pc beobachtet wird. Was ist die maximale Dopplerverschiebung, die für den Stern beobachtet werden kann?

Lösung: Im Prinzip ist dies die gleiche Frage wie oben, nur mit etwas extremeren Zahlenwerten. Die Jupitermasse ist 318 Erdmassen bzw. 1.9×10^{27} kg, d.h. für den Planeten ergibt sich eine Masse von 2×10^{28} kg.

Der Abstand Stern – Schwerpunkt beträgt $r = 7.9 \times 10^9$ m = 0.5 AU.

Bei 10 pc erscheint 1 AU unter einem Winkel von $0.1''$ und damit ist der Abstand Stern – Schwerpunkt $0.05''$, also gerade noch meßbar.

Anmerkung: Der Parsec wurde in der Vorlesung nur mündlich eingeführt, daher ist natürlich auch der alternative trigonometrische Weg korrekt, wenn auch deutlich umständlicher.

Für die Bahnperiode ergibt sich wie oben $P = 1.12 \times 10^{10}$ s = 354 Jahre, so daß $v = 450\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ bzw. $z = 1.5 \times 10^{-6}$.

Unter einem Winkel von 45° ist die Radialgeschwindigkeit $v_{45} = v \cos 45° = 320\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

c) Vor einem Stern mit Leuchtkraft und Radius der Sonne zieht ein Planet mit 1 Jupiterradius Radius vorbei. Was ist die relative Änderung des von diesem Stern beobachteten Strahlungsflusses?

Lösung: Der Jupiterradius beträgt knappe $r = 70000$ km (hier wird ignoriert, daß der Jupiter stark abgeplattet ist; das ist für eine grobe Abschätzung voll und ganz in Ordnung). Für die Flußreduktion wird eine Fläche πr^2 des Sterns abgedeckt. Damit ergibt sich für die relative Flußänderung

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\pi R^2 - (\pi R^2 - \pi r^2)}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = 0.01 \qquad \text{(s2.8)}$$