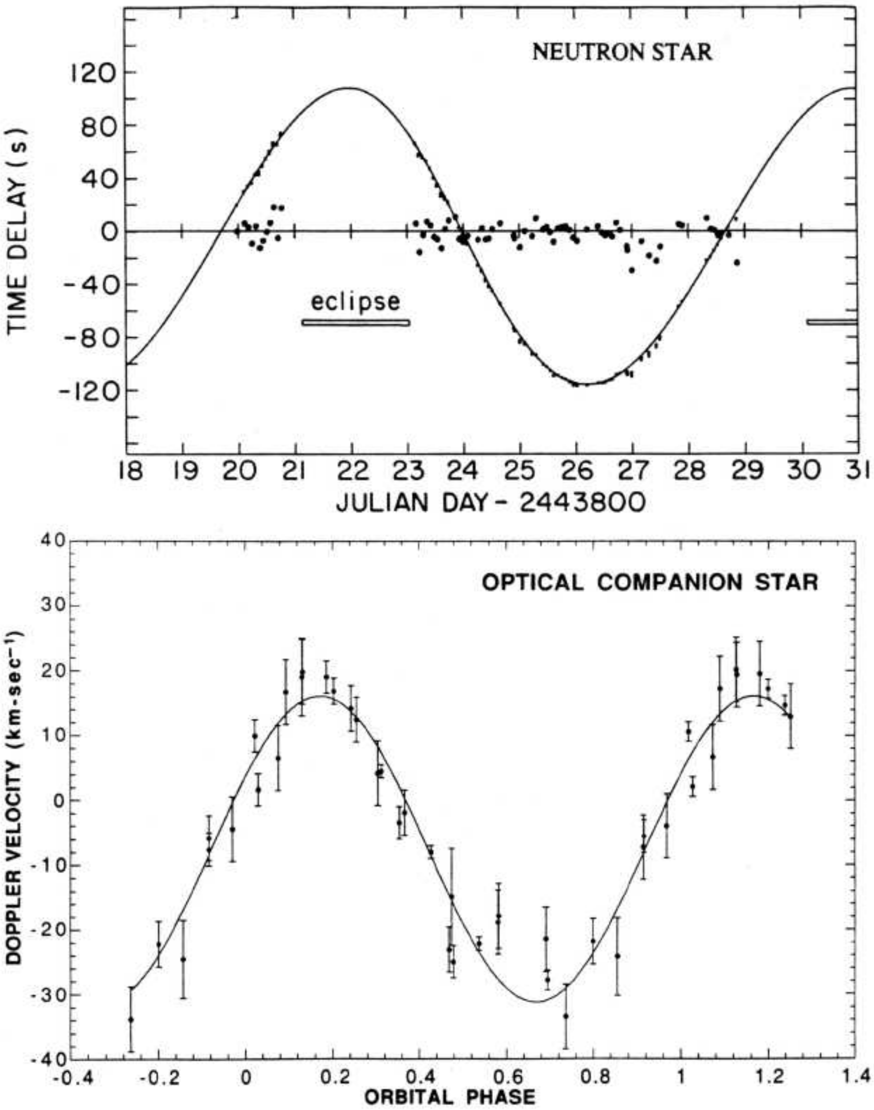
Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Einführung in die Astronomie I
Wintersemester 2008/2009
Übungsaufgaben 7 – Musterlösung
J. Wilms/M. Kadler
16. Dezember 2008

Frage 1: *Die Masse eines Neutronensterns*

Diese Aufgabe wird in den Übungen als Präsenzaufgabe gelöst werden.
(Aufgabe übernommen aus der "Introduction to Astrophysics" des MIT)
Das Doppelsternsystem Vela X-1 (4U0900−40) besteht aus einem sogenannten Neutronenstern und aus einem normalen Stern. Der Neutronenstern ist stark magnetisiert und rotiert. Material fällt vom normalen Stern auf die magnetischen Pole des Neutronensterns, wo es sich aufheizt und im Röntgenbereich zu strahlen beginnt. Daher sehen wir den Neutronenstern als sogenannten "Röntgenpulsar". Die folgende Abbildung gibt die Ergebnisse von Beobachtungen dieses Systems wieder:



Die obere Abbildung zeigt die Zeitverzögerung in Sekunden von Röntgenpulsen, die von dem System detektiert wurden, als Funktion der Zeit (angegeben in Tagen) über den Umlauf des Neutronensterns um den Schwerpunkt des Systems. Die Verzögerung kommt dadurch zustande, daß das Röntgensignal je nach Position des Neutronensterns auf seinem Orbit länger oder kürzer benötigt, um auf der Erde detektiert zu werden (die Punkte auf der x-Achse können ignoriert werden).
Die untere Abbildung zeigt die aus der Dopplerverschiebung ermittelte Radialgeschwindigkeit des

Sterns. Die Zeit ist in dieser Abbildung als Funktion der Bahnphase gegeben, von Phase 0.0 bis Phase 1.0 läuft der Stern einmal um den gemeinsamen Schwerpunkt des Systems.

Im Folgenden nehmen wir an, daß sich beide Objekte auf Kreisbahnen bewegen und daß wir das System von der Seite aus betrachten.

a) Bestimme die Bahnperiode, P, in Tagen.

Lösung: In den Einheiten der x-Achse des oberen Plots beginnt ein Umlauf bei $\mathrm{JD} - 2443800 = 19.6$ Tagen und endet bei $\mathrm{JD} - 2443800 = 28.6$ Tagen, die Bahnperiode beträgt also ungefähr 9 Tage, entsprechend 778000 s (Literaturwert: 8.964 Tage).

b) Bestimme die Geschwindigkeitsamplitude des optischen Sterns, K_O, um seinen Schwerpunkt.

Lösung: Hier muß man etwas aufpassen, da die untere Abbildung die gemessene Dopplerverschiebung angibt, die die Bewegung des Schwerpunkts des Systems enthält. Aus den Fits der unteren Abbildung ergibt sich eine Minimalgeschwindigkeit von $-31\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ und eine Maximalgeschwindigkeit von $16\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Damit ist die Systemgeschwindigkeit $(-31+16)/2\,\mathrm{km\,s^{-1}} = -7.5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ (das System kommt also auf uns zu) und die Geschwindigkeit des Sterns um den Schwerpunkt des Systems ist $K_\mathrm{O} = (16-(-7.5))\,\mathrm{km\,s^{-1}} = 23.5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

c) Berechne aus diesen Ergebnissen den Bahnradius der Bahn des optischen Sterns, a_O.

Lösung:

$$K_\mathrm{O} = \frac{2\pi a_\mathrm{O}}{P} \quad a_\mathrm{O} = \frac{PK_\mathrm{O}}{2\pi} = \frac{9\cdot 86400\,\mathrm{s}\cdot 23500\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{2\pi} = 2.9\times 10^{9}\,\mathrm{m} = 0.02\,\mathrm{AU} \tag{s1.1}$$

d) Bestimme den Bahnradius der Bahn des Neutronensterns.

Lösung: Aus den Verzögerungen in der obigen Abbildung lese ich ab +110 Lichtsekunden und −118 Lichtsekunden, also 114 Lichtsekunden Bahnradius, entsprechend $3.4\times 10^{10}\,\mathrm{m} = 0.228\,\mathrm{AU}$.

e) Bestimme das Massenverhältnis von Neutronenstern und optischen Stern, $M_\mathrm{NS}/M_\mathrm{O}$.

Lösung: Aus dem Schwerpunktssatz folgt

$$\frac{M_\mathrm{NS}}{M_\mathrm{O}} = \frac{a_\mathrm{O}}{a_\mathrm{NS}} = \frac{2.9\times 10^{9}\,\mathrm{m}}{3.4\times 10^{10}\,\mathrm{m}} = 0.086 \tag{s1.2}$$

f) Bestimme die Gesamtmasse des Systems in Sonnenmassen und die Einzelmassen von Stern und Neutronenstern ($1\,M_\odot = 2\times 10^{30}\,\mathrm{kg}$; $G = 6.7\times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$).

Lösung: Nach dem 3. Kepler'schen Gesetz ist

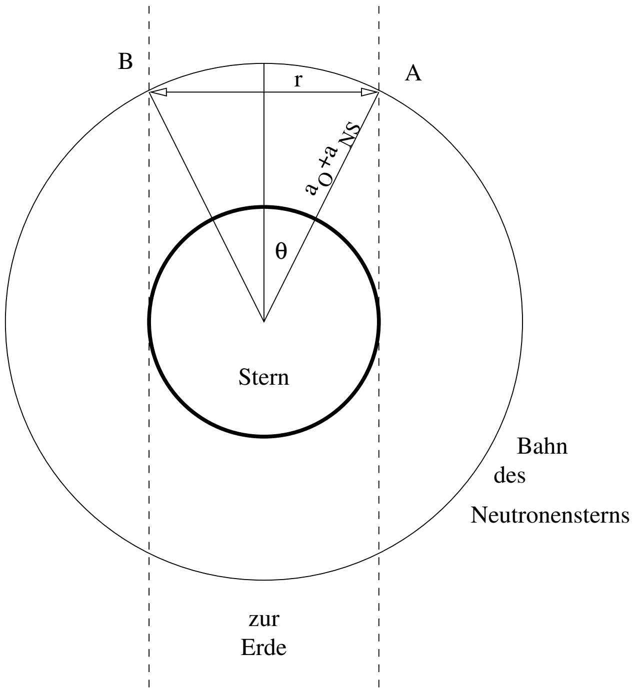
$$M_\mathrm{O} + M_\mathrm{NS} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{(a_\mathrm{O}+a_\mathrm{NS})^3}{P^2} = 4.9\times 10^{31}\,\mathrm{kg} = 24.5\,M_\odot \tag{s1.3}$$

Damit ist $M_\mathrm{O} = 22.6\,M_\odot$ und $M_\mathrm{NS} = 1.94\,M_\odot$.

(*Anmerkung:* Der Neutronenstern in Vela X-1 ist einer von nur wenigen Neutronensternen, die eine beobachtete Masse oberhalb der kanonischen Masse von $1.4\,M_\odot$ für diese Objekte haben).

g) Bestimme aus der Länge der Bedeckung des Neutronensterns durch den optischen Stern den Durchmesser des optischen Sterns. Drücke diesen in Einheiten des Sonnenradius aus ($r_\odot = 700000\,\mathrm{km}$).

Lösung: Die Länge der Bedeckung beträgt nach der oberen Abbildung 2 Tage. Da die Masse des Begleitsterns deutlich größer ist, als die Masse des Neutronensterns, ist der Stern in guter Näherung stationär.



Aus der Dauer der Bedeckung folgt für den Winkel θ (siehe Abbildung):

$$\theta = \frac{1}{9} \cdot 2\pi = 0.70\,\mathrm{rad} \tag{s1.4}$$

Damit gilt für den Radius des Sterns

$$r = (a_\mathrm{O} + a_\mathrm{NS}) \sin\theta = 2.37 \times 10^{10}\,\mathrm{m} = 34\,R_\odot \tag{s1.5}$$

(Literaturwerte: Dauer der Eclipse ca. 1.8 Tage, Sternradius $30\,R_\odot$).
Beachte: Der Abstand zwischen den Mittelpunkten von Stern und Neutronenstern beträgt damit nur 1.6 Sternradien. Die Zeichnung oben ist also maßstabsgetreu.

h) In dieser Aufgabe haben wir den häufigen Fall behandelt, daß die Geschwindigkeiten beider Objekte in einem Doppelsternsystem bestimmt werden konnten. Häufig ist dies nicht der Fall, z.B. wenn eine der Komponenten ein nichtrotierender Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch ist. In diesem Fall kann nur die Dopplerbewegung des optischen Sterns bestimmt werden, die eine Amplitude von K_1 habe. Zeige, daß in diesem Fall die *Massenfunktion*

$$f_\mathrm{M} := \frac{PK_1^3}{2\pi G} = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} \tag{1.6}$$

eine untere Grenze für die Masse M_2 des unsichtbaren Begleiters darstellt. Gehe davon aus, daß die Objekte sich wieder auf Kreisbahnen bewegen, die eine Inklination von i gegenüber der Sichtlinie haben, so daß die Geschwindigkeitsamplitude durch

$$K = \frac{2\pi a}{P} \sin i \tag{1.7}$$

gegeben ist.

Lösung: Da sich die Massen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen gilt

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{K_2}{K_1} \quad \text{und daher} \quad K_1 M_1 = K_2 M_2 \tag{s1.6}$$

Ferner muß die Bewegung natürlich dem 3. Kepler'sche Gesetz folgen

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{GP^2} a^3 \tag{s1.7}$$

Wegen Gl. (1.7) ist

$$a = a_1 + a_2 = \frac{P}{2\pi} \frac{K_1}{\sin i} + \frac{P}{2\pi} \frac{K_2}{\sin i} = \frac{P}{2\pi \sin i} (K_1 + K_2) \tag{s1.8}$$

so daß

$$M_1 + M_2 = \frac{P}{2\pi G} \frac{(K_1 + K_2)^3}{\sin^3 i} \tag{s1.9}$$

bzw.

$$(M_1 + M_2) \sin^3 i = \frac{P}{2\pi G} (K_1 + K_2)^3 = \frac{P}{2\pi G} \left(K_1 + K_1 \frac{M_1}{M_2} \right)^3 = \frac{P K_1^3}{2\pi G} \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right)^3 \tag{s1.10}$$

Damit ist die Massenfunktion

$$f(M_1) := \frac{P K_1^3}{2\pi G} = \frac{(M_1 + M_2) \sin^3 i}{\left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)^3} = \frac{M_2 \left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right) \sin^3 i}{\left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)^3} = \frac{M_2 \sin^3 i}{\left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)^2} \tag{s1.11}$$

Da

$$f(M_1) = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} \le \frac{M_2^3 \sin^3 i}{M_2^2} = M_2 \sin^3 i \le M_2 \quad \text{oder schärfer} \quad \frac{f(M_1)}{\sin^3 i} \le M_2 \tag{s1.12}$$

ist $f(M_1)$ eine untere Grenze für M_2. Wenn z.B. die Massenfunktion eines Doppelsternsystems mit einem kompakten Objekt (also einem Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch) größer als 4 $M_\odot$ ist, dann kann daraus geschlossen werden, daß das kompakte Objekt ein schwarzes Loch sein muß, weil Neutronensterne Massen kleiner als ca. 3.5 $M_\odot$ haben müssen.

Frage 2: *Helligkeiten & Entfernungen*

a) Die scheinbare visuelle Helligkeit der Sonne beträgt $m_\mathrm{V} = -26.7\,\mathrm{mag}$. Berechne daraus ihre absolute visuelle Helligkeit.

Lösung: Entfernungsmodul: $m_\mathrm{V} - M_\mathrm{V} = 5 \log \frac{d}{10\,\mathrm{pc}}$; ferner ist $d = 1\,\mathrm{AU} = \frac{1}{206264}\,\mathrm{pc}$. Damit ist $M_\mathrm{V} = -26.7 - (-31.6) = 4.9\,\mathrm{mag}$

b) Um welchen Faktor unterscheiden sich die Strahlungsflüsse von Sonne und Vollmond ($m_\mathrm{V} = -12.5\,\mathrm{mag}$)?

Lösung:

$$\frac{f_\odot}{f_☾} = 10^{(m_\odot - m_☾)/2.5} = 4.8 \times 10^5 \tag{s2.1}$$

c) Der Stern Spica in der Jungfrau besitzt eine jährliche Parallaxe von 0.019″. Seine scheinbare Helligkeit beträgt 0.98 mag. Berechne seine absolute Helligkeit.

Lösung:

Parallaxe p: $\frac{d}{1\,\mathrm{pc}} = \frac{1''}{p}$

Damit ist $d = 1/0.019 = 52.6\,\mathrm{pc}$. Das Entfernungsmodul beträgt $m_\mathrm{V} - M_\mathrm{V} = 5\log\frac{d}{10\,\mathrm{pc}}$ so daß $M_\mathrm{V} = 0.98 - 5\log 5.3 = -2.64\,\mathrm{mag}$.

d) Für den hellen Schulterstern des Orion "Beteigeuze" kennt man auf Grund seines Spektrums die absolute Helligkeit $M = -5.7\,\mathrm{mag}$, wohingegen seine scheinbare Helligkeit $m_\mathrm{V} = 0.4\,\mathrm{mag}$ beträgt. Wie weit ist Beteigeuze entfernt ?

Lösung: Das Entfernungsmodul ist $m_\mathrm{V} - M_\mathrm{V} = 5\log\frac{d}{10\,\mathrm{pc}}$. Mit der scheinbaren Helligkeit $m_\mathrm{V} = 0.4\,\mathrm{mag}$ ergibt sich $d = 10\,\mathrm{pc}\cdot 10^{(m_\mathrm{V}-M_\mathrm{V})/5} = 166\,\mathrm{pc}$