Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Einführung in die Astronomie I
Wintersemester 2008/2009
Übungsaufgaben 1 – Musterlösung
J. Wilms/M. Kadler
4. November 2008

Nützliche Konstanten

Ohne Garantie auf Vollständigkeit!

Astronomische Einheit	$1\,\mathrm{AU} = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$
Boltzmann Konstante	$k = 1.3807 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
Stefan-Boltzmann Konstante	$\sigma_{\mathrm{SB}} = 5.7 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Gravitationskonstante	$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Sonnenmasse	$M_\odot = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Sonnenleuchtkraft	$L_\odot = 4 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$
Absolute Helligkeit der Sonne	$M_\odot = 4.8\,\mathrm{mag}$
Erdmasse	$M_\oplus = 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 300000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Masse des Protons	$m_{\mathrm{p}} = 1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Frage 1: *Massenbestimmung eines Zwergplaneten*

Dysnomia, der vor einigen Jahren entdeckte Mond des Zwergplaneten Eris bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Periode $P = 15.773$ days um Eris herum. Der Bahnradius ist $R = 37400\,\mathrm{km}$ (Brown & Schaller, Science Vol 316, 15 June 2007). Der Durchmesser von Eris wurde mit Hilfe des Hubble Space Telescope zu 2400 km bestimmt (Brown et al. 2006, Astrophysical Journal 643, L61).
Bestimme die Masse und Dichte von Eris und vergleiche diese mit Pluto. Es darf angenommen werden, daß Eris kugelförmige Gestalt hat.

Lösung: Mit $a = 3.74 \times 10^7$ m und $P = 8.177 \times 10^7$ s gibt Keplers 3. Gesetz

$$M_{\mathrm{Eris}} + M_{\mathrm{Dysnomia}} = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = 1.62 \times 10^{22}\,\mathrm{kg} \tag{s1.1}$$

Da $M_{\mathrm{Dysnomia}} \ll M_{\mathrm{Eris}}$ ist die obige Masse diejenige von Eris.
Die Dichte von Eris ist

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} = 2240\,\mathrm{kg\,m^{-3}} = 2.24\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \tag{s1.2}$$

Sie ist damit der des Pluto sehr ähnlich.
Die Masse des Pluto ist $0.002\,M_\oplus = 1.2 \times 10^{22}$ kg. Damit hat Eris eine höhere Masse als Pluto.

Frage 2: *Stabilität von Planetenatmosphären*

Manche Planeten und Monde haben Atmosphären, andere nicht. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, daß manche Objekte ihre Atmosphäre behalten können, während andere ihre Atmosphäre verdampfen. In der kinetischen Gastheorie wird gezeigt, daß für die mittlere Geschwindigkeit eines Moleküls in einem Gas der Temperatur T

$$v_{\mathrm{mol}} := \sqrt{\langle v_{\mathrm{mol}} \rangle^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\mathrm{mol}}}} \tag{2.1}$$

gilt. Hier ist T die Temperatur (gemessen in K), m die Masse des Moleküls und k die Boltzmann-Konstante.
Ein Molekül kann dann von einem Planeten entweichen, wenn seine kinetische Energie

$$E_{\mathrm{kin}} \sim \frac{1}{2} m_{\mathrm{mol}} v_{\mathrm{mol}}^2 \tag{2.2}$$

größer ist als seine Bindungsenergie

$$E_{\mathrm{pot}} \sim \frac{G M_{\mathrm{planet}} m_{\mathrm{mol}}}{R_{\mathrm{planet}}} \tag{2.3}$$

a) Bestimme die Entweichgeschwindigkeit eines Planeten, also die Geschwindigkeit, bei der $E_{\mathrm{kin}} = E_{\mathrm{pot}}$.

Lösung: Es ergibt sich nach einfacher Rechnung

$$v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{s2.1}$$

b) Die obigen Aussagen sind nicht ganz exakt: Die Moleküle in einer Atmosphäre haben nicht alle die gleiche Geschwindigkeit, sondern unterliegen der sogenannten Maxwell-Boltzmann-Verteilung. Diese Geschwindigkeitsverteilung hat einen "Schwanz" bei hohen Geschwindigkeiten, d.h. manche Moleküle können entweichen, eben wenn ihre mittlere Geschwindigkeit größer ist als die Entweichgeschwindigkeit. Als Faustregel kann ein Planet die Hälfte seiner Atmosphäre für mehr als eine Milliarde Jahre halten, wenn die Entweichgeschwindigkeit größer als 20% der mittleren Gasgeschwindigkeit ist.

Erde und Mond bildeten sich vor ungefähr 4 Milliarden Jahren. Sie hatten beide ursprünglich Atmosphären, die aus H_2 und N_2 bestanden. Was passierte mit diesen Atmosphären?

Die mittlere Temperatur der Erdatmosphäre (korrigiert für den Treibhauseffekt) ist $T_{\oplus} = 255\,\mathrm{K}$, die des Mondes ist $T_{☾} = 274\,\mathrm{K}$. (Unsöld & Baschek, Der Neue Kosmos, Tab. 3.1).

Lösung: Für die Erde gilt

$$v(H_2) = 1.78\,\mathrm{km\,s^{-1}} \quad \text{und} \quad v(N_2) = 0.48\,\mathrm{km\,s^{-1}} \tag{s2.2}$$

sowie

$$v_{\mathrm{esc}} = 11.2\,\mathrm{km\,s^{-1}} \quad \text{und} \quad v_{\mathrm{crit}} = 0.2 v_{\mathrm{esc}} = 2.24\,\mathrm{km\,s^{-1}} \tag{s2.3}$$

Damit kann die Erde N_2 problemlos halten, während davon auszugehen ist, daß ein großer Teil des Wasserstoffs entwichen ist (letzteres wird durch die höhere Temperatur der Erdatmosphäre aufgrund des Treibhauseffekts noch begünstigt).

Für den Mond gilt

$$v(H_2) = 1.85\,\mathrm{km\,s^{-1}} \quad \text{und} \quad v(N_2) = 0.49\,\mathrm{km\,s^{-1}} \tag{s2.4}$$

sowie

$$v_{\mathrm{esc}} = 2.36\,\mathrm{km\,s^{-1}} \quad \text{und} \quad v_{\mathrm{crit}} = 0.2 v_{\mathrm{esc}} = 0.47\,\mathrm{km\,s^{-1}} \tag{s2.5}$$

Da die mittleren Geschwindigkeiten viel näher an der Entweichgeschwindigkeit liegen, kann davon ausgegangen werden, daß der Mond seine Atmosphäre so gut wie vollständig verdampft hat.

Frage 3: *Keplerbewegung und Satelliten*

In dieser Frage betrachen wir einige der praktischen Probleme, die die Weltraumindustrie hat, wenn Satelliten in die Erdumlaufbahn gebracht werden sollen.

a) Leite eine allgemeine Formel ab für die Energie, die benötigt wird, einen Satelliten der Masse m in eine Kreisbahn mit Radius r um die Erde zu bringen. Gehe davon aus, daß der Start des Satelliten an einem Ort am Äquator wie Kourou in Französisch-Guyana stattfinden wird. Bei der Herleitung sollte nicht vergessen werden, daß die Erde rotiert, d.h. daß der Satellit schon eine gewisse kinetische Energie hat, bevor er gestartet wird. Es kann angenommen werden, daß der Satellit genau nach Osten gestartet werden wird, d.h. in Richtung der Erdrotation.

Lösung: Die Energie kann am einfachsten mit einem Energieerhaltungsargument berechnet werden. Am Boden und im Orbit ist die Gesamtenergie gegeben durch die Summe aus potentieller Energie

$$V(r) = -\frac{GM_{\oplus}m}{r_{\oplus}} \tag{s3.1}$$

und kinetischer Energie

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{s3.2}$$

Die Geschwindigkeit des Satelliten vor dem Start ist in einem nicht-rotierenden Bezugssystem am Äquator gegeben durch

$$v = \frac{2\pi r_{\oplus}}{t_{\oplus}} \tag{s3.3}$$

Damit ist die Gesamtenergie des Satelliten vor dem Start

$$E_{\text{prelaunch}} = V + T = \frac{1}{2}m\frac{4\pi^2 r_{\oplus}^2}{t_{\oplus}^2} - \frac{GM_{\oplus}m}{r_{\oplus}} \tag{s3.4}$$

Im Orbit sei der Bahnradius $r = r_{\oplus} + h$ und die Bahngeschwindigkeit ergibt sich zu

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{M_{\oplus}m}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r}} \tag{s3.5}$$

so daß

$$E_{\text{orbit}} = \frac{GM_{\oplus}m}{2r} - \frac{GM_{\oplus}m}{r} = -\frac{GM_{\oplus}m}{2r} \tag{s3.6}$$

Damit ist die zum Starten notwendige Energie

$$E_{\text{launch}} = E_{\text{orbit}} - E_{\text{prelauch}} = -\frac{GM_{\oplus}m}{2r} + \frac{GM_{\oplus}m}{r_{\oplus}} - \frac{2\pi^2 r_{\oplus}^2 m}{t_{\oplus}^2} = \frac{GM_{\oplus}m}{r_{\oplus}}\left(1 - \frac{r_{\oplus}}{2r}\right) - \frac{2\pi^2 r_{\oplus}^2 m}{t_{\oplus}^2} \tag{s3.7}$$

b) Berechne mit der oben hergeleiteten Gleichung die Energie, die benötigt wird, um 1 kg Material in einen "low Earth orbit" in einer Höhe von 300 km über den Erdboden zu bringen (300–500 km Höhe sind typische Werte für die bemannte Raumfahrt). Die Erde hat eine Masse von $M_{\oplus} = 6 \times 10^{24}$ kg, einen Radius von $r_{\oplus} = 6378$ km, und rotiert in 23 h 56 m 4.1 s ($t_{\oplus} = 86164$ sec) einmal um ihre Achse.

Lösung: Recht einfach:

$$E_{\text{launch}} = \frac{GM_{\oplus}m}{r_{\oplus}}\left(1 - \frac{r_{\oplus}}{2r}\right) - \frac{2\pi^2 r_{\oplus}^2 m}{t_{\oplus}^2} \tag{s3.8}$$

$$= \frac{6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}\cdot 6\times10^{24}\,\mathrm{kg}\cdot 1\,\mathrm{kg}}{6378\times10^{3}\,\mathrm{m}}\left(1 - \frac{6378\times10^{3}\,\mathrm{m}}{2\cdot 6678\times10^{3}\,\mathrm{m}}\right) - \frac{2\pi^2\cdot 4.0679\times10^{13}\,\mathrm{m^2}\cdot 1\,\mathrm{kg}}{7.424\times10^{9}\,\mathrm{s^2}} \tag{s3.9}$$

$$= 5.99\times10^{7}\,\mathrm{N\,m}\cdot(1 - 0.4775) - 1.082\times10^{5}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}} \tag{s3.10}$$

da $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ ergibt sich

$$= 3.1\times10^{7}\,\mathrm{N\,m} = 3.1\times10^{7}\,\mathrm{J} \tag{s3.11}$$

c) Warum hat Rußland aufgrund seiner geographischen Situation beim Start von Satelliten Nachteile?

Lösung: Da Rußland keinen Startort nahe des Äquators hat, ist die Anfangsgeschwindigkeit der Satelliten deutlich geringer (sie haben weniger "Schwung", wenn man so will), da $v_{\text{rot}} = v_{\text{Äquator}}\cos\varphi$ wo φ die geographische Breite ist. Daher muß beim Start von Rußland aus in eine Umlaufbahn gleicher Höhe mehr Energie aufgebracht werden, als bei einem Start vom Äquator aus.