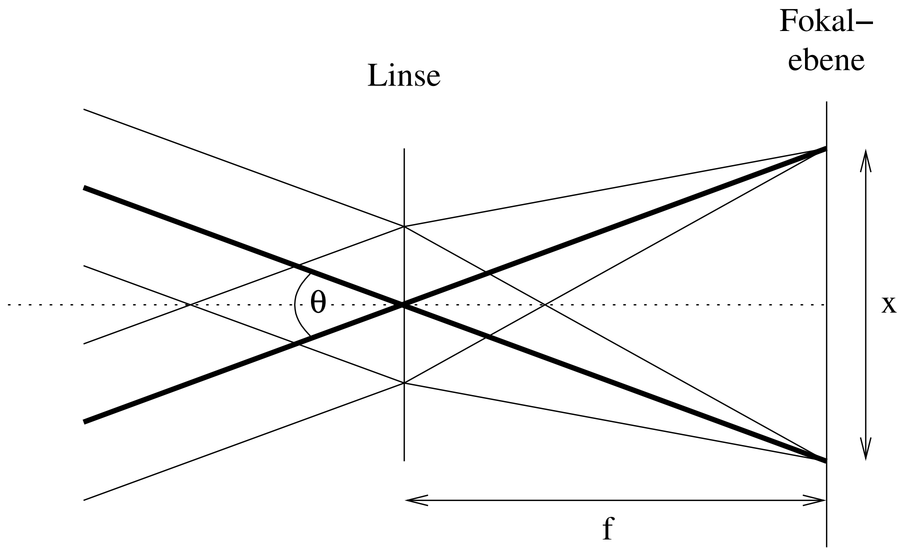
Einführung in die Astronomie I
Wintersemester 2008/2009
Übungsaufgaben 6 – Musterlösung
J. Wilms/M. Kadler
10. Dezember 2008

Frage 1: *Teleskope*

a) Zeige, daß der lineare Abstand x der Bilder zweier Sterne, die am Himmel einen Winkelabstand θ haben, für astronomisch relevante (kleine) Winkel gleich $x = f\theta$ ist, wo f die Brennweite des Teleskops ist.



Lösung: Einfach:

$$\tan(\theta/2) = \frac{x/2}{f} \quad \Longrightarrow \text{da } \theta \text{ klein:} \quad \frac{\theta}{2} = \frac{x}{2f} \tag{s1.1}$$

b) Zeige, daß die Flächenhelligkeit einer ausgedehnten Quelle in einem Teleskop der Öffnung D proportional zu $(D/f)^2$ ist.

Anmerkung: Das Verhältnis f/D wird in der Fotografie die "Blende" genannt, die Bildhelligkeit ist damit proportional zu $(1/\text{Blende})^2$.

Lösung: Die Sammelfläche eines Teleskops ist proportional D^2, d.h. die insgesamt eingefangene Leistung ist proportional D^2. Diese Leistung wird aber nach der obigen Teilaufgabe über eine Fläche f^2 verschmiert, so daß die Helligkeit des Bildes proportional $(D/f)^2$ ist.

Frage 2: *Beobachtungen im Infraroten*

Wir beobachten mit eine Infrarotquelle bei einer Entfernung von 500 pc. Die Quelle sei kugelförmig, habe einen Radius von 1 pc, und strahle wie ein Schwarzkörper mit einer Temperatur von 50 K.
ACHTUNG: Diese Aufgabe ist Kutner, Aufgabe 4.23, entnommen. Leider ist die Aufgabenstellung nicht korrekt: Teilaufgaben b–d sind in der in der Vorlesung ausgeteilten Form *nicht* lösbar, Teilaufgabe a ist lösbar, allerdings mit einem recht komplizierten Lösungsweg.

a) Was ist der bolometrische Strahlungsfluß dieser Quelle, also der über alle Wellenlängen integrierte Strahlungsfluß?

Lösung: Der von der Quelle pro m^2 emittierte Strahlungsfluß wird durch das Stefan-Boltzmann'sche Gesetz gegeben. Die Gesamtleuchtkraft der Quelle ist

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma_{\rm sb} T^4 = 4\pi \cdot 9.6\times 10^{32}\,\mathrm{m}^2 \cdot 5.67\times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}} \cdot 6.25\times 10^6\,\mathrm{K}^4 = 4.3\times 10^{33}\,\mathrm{W} = 10^7\,L_\odot \tag{s2.1}$$

Damit ist der Strahlungsfluß

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{4.3\times 10^{33}\,\mathrm{W}}{4\pi \cdot 2.4\times 10^{38}\,\mathrm{m}^2} = 1.4\times 10^{-6}\,\mathrm{W\,m^{-2}} \tag{s2.2}$$

b) Wir beobachten die Quelle mit einem Satelliten mit einem Spiegeldurchmesser von 1 m bei einer Wellenlänge von $100\,\mu$m. Was ist der von der Quelle bei dieser Wellenlänge detektierte differentielle Strahlungsfluß F_λ (Einheit: $\mathrm{J\,s^{-1}\,\mu m^{-1}}$).

Lösung: Anmerkung: Diese Aufgabe ist aus Kutner, Aufgabe 4.23. Ausgehend von der Diskussion im entsprechenden Kapitel von Kutner gehe ich aus, daß die dort erwartete Lösung deutlich einfacher, aber falsch, ausfällt. Eine korrekte Lösung der Aufgabe mit dem in der Vorlesung bisher behandelten Werkzeugen ist zwar möglich, wie im Folgenden gezeigt, geht aber weit über das erwartete Maß hinaus.

Der Strahlungsfluß ergibt sich aus dem von der Quelle bei $100\,\mu$m emittierten Leistung:

Nach dem Planck'schen Strahlungsgesetz ist

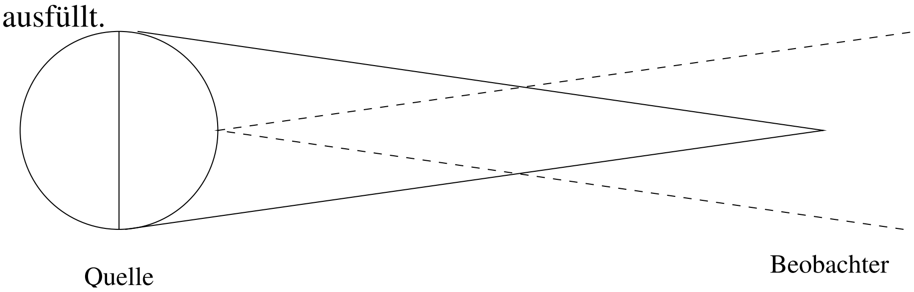
$$B_\lambda = \frac{2hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \tag{s2.3}$$

wo $h = 6.623\times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ und $k = 1.38\times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$. Für $\lambda = 100\,\mu\mathrm{m} = 100\times 10^{-6}\,\mathrm{m} = 10^{-4}\,\mathrm{m}$ ergibt sich:

$$B_\lambda = \frac{2\cdot 6.623\times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\cdot (3\times 10^8\,\mathrm{m})^2}{10^{-20}\,\mathrm{m}^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{6.623\times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\cdot 3\times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{10^{-4}\,\mathrm{m}\cdot 1.38\times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}\cdot 50\,\mathrm{K}}\right) - 1}$$
$$= 3700\,\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}\,sr^{-1}\,m^{-1}} \tag{s2.4}$$

Gefragt ist in der Aufgabe nach dem Strahlungsfluß pro μm. Da $1\,\mu\mathrm{m} = 10^{-6}\,\mathrm{m}$, ist B_λ in diesen Einheiten um einen Faktor 10^6 kleiner, d.h. $B_\lambda = 3.7\times 10^{-3}\,\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}\,sr^{-1}\,\mu m^{-1}}$.

Der obige Strahlungsfluß wird von jedem Quadratmeter Oberfläche der Quelle ausgesandt. Wir empfangen davon natürlich nur die Leistung, die auf das Teleskop fällt, d.h. die Leistung, die in einen Raumwinkel ausgesandt wird, der dem Raumwinkel, den die Quelle vom Teleskop aus betrachtet ausfüllt.



Die Quelle erscheint im Teleskop unter einem Winkel von

$$\theta = \frac{1}{500}\,\mathrm{rad} = 0.1° \tag{s2.5}$$

Damit ist ihre Fläche am Himmel 0.03 □°. Da 1 sr = 3280 □°, entspricht die Fläche der Quelle am Himmel damit 9×10^{-6} sr. Somit ist der auf das Teleskop fallende Strahlungsfluß $F_{\lambda,\mathrm{Erde}} = 3.33 \times 10^{-8}\,\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}}\,\mu\mathrm{m}$. Da das Teleskop eine Fläche von $\pi(d/2)^2 = 0.79\,\mathrm{m}^2$ hat, ist damit der detektierte Strahlungsfluß $F_\lambda = 2.6 \times 10^{-8}\,\mathrm{J\,s^{-1}}\,\mu\,\mathrm{m}^{-1}$.

c) Nehmen wir an, daß der Teleskopspiegel wie ein schwarzer Körper bei einer Temperatur von 300 K strahle, aber mit einer Effizienz von 1% (d.h. daß das Spektrum wie ein schwarzer Körper aussieht, jedoch um einen Faktor 100 reduziert ist). Was ist der vom *Spiegel* emittierte differentielle Strahlungsfluß bei $100\,\mu$m? Vergleiche dieses Ergebnis mit dem Strahlungsfluß der Quelle.

In der ausgeteilten Version nicht enthalten: Nehmen Sie an, das Teleskop habe eine Brennweite von $f = 2$ m.

Lösung: Diese Teilaufgabe ist der Grund, warum ich glaube, daß die Aufgabe in Kutner falsch gestellt ist. Um diese Teilaufgabe zu lösen, muß eigentlich die Brennweite des Teleskops bekannt sein, d.h. es muß bekannt sein, unter welchem Raumwinkel der Spiegel in der Brennebene erscheint. Da diese Angabe nicht gegeben ist, ist diese Aufgabe nicht wirklich lösbar.

Ziel der Aufgabe ist es, zu zeigen, warum IR-Teleskope gekühlt werden müssen.

Für eine Temperatur von 300 K ist die pro Quadratmeter Teleskopspiegel bei $\lambda = 100\,\mu$m abgestrahlte Leistung $B_{\lambda,\mathrm{Hintergrund}} = 1.9 \times 10^{-2}\,\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}\,sr^{-1}}\,\mu\mathrm{m}^{-1}$.

Vom Brennpunkt aus nimmt der Teleskopspiegel einen Raumwinkel von

$$A = \frac{\pi(d/2)^2}{4\pi f^2} = 0.016\,\mathrm{sr} \tag{s2.6}$$

ein, in der Brennebene des Teleskops wird also unter Berücksichtigung der Spiegelfläche und der Effizienz von 1% eine Leistung von $F_{\lambda,\mathrm{Hintergrund}} = 0.01 \cdot 0.016\,\mathrm{sr} \cdot B_{\lambda,\mathrm{Hintergrund}} \cdot A_{\mathrm{Spiegel}} = 2.4 \times 10^{-6}\,\mathrm{J\,s^{-1}}\,\mu\mathrm{m}^{-1}$ detektiert. Diese ist um einen Faktor 90 höher, als der Fluß der Quelle.

d) Wiederhole die obige Teilaufgabe unter der Annahme, daß der Spiegel auf 30 K herabgekühlt werden kann (und immer noch eine Effizienz von 1% hat).

Lösung: Für eine Temperatur von 30 K ist die pro Quadratmeter Teleskopspiegel bei $\lambda = 100\,\mu$m abgestrahlte Leistung $B_{\lambda,\mathrm{Hintergrund}} = 10^{-4}\,\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}\,sr^{-1}}\,\mu\mathrm{m}^{-1}$, also um einen Faktor 200 schwächer als oben, so daß die Quelle detektierbar wird (in einem abbildenden Detektor ist die Quelle um knapp einen Faktor 2 heller, als die Umgebung der Quelle; dieser Kontrast ist natürlich ausreichend, die Quelle zu sehen).

Durch Kühlen ist es damit prinzipiell möglich, die Spiegelhelligkeit im IR so stark zu reduzieren, daß astronomische Quellen beobachtbar werden.

Frage 3: *Magnituden*

a) *Magnitude und Leuchtkraft:* Mit einer scheinbaren Helligkeit von $m = -1.5$ mag ist Sirius der hellste Stern am Himmel. Sirius hat eine Entfernung von $d = 8.6$ Lichtjahren von uns, d.h. der Stern ist uns sehr nahe. Nahe am Himmel von Sirius in der Schulter des Orions sitzt Beteigeuze. Mit einer scheinbaren Helligkeit von $m = 0.8$ mag ist Beteigeuze immer noch hell, erscheint aber deutlich lichtschwächer als Sirius. Beteigeuze ist jedoch 490 Lichtjahre entfernt. Berechne die absolute Helligkeit von Sirius und Beteigeuze und vergleiche die Leuchtkräfte dieser zwei Sterne.

Anmerkung: Beteigeuze ist ein variabler Stern, daher können Angaben über seine Helligkeit je nach Quelle etwas voneinander abweichen.

Lösung: Die absolute Helligkeit, M, ist als die Helligkeit definiert, die ein Stern bei einer Entfernung von 10 pc hat. Es gilt

$$m - M = 5\log d - 5 \quad \text{so dass} \quad M = m - 5\log d + 5 \tag{s3.1}$$

wo d die Entfernung *in Parsec* ist. Da 1 pc = 3.26 ly ergibt sich $d_{\text{Sirius}} = 2.64$ pc und $d_{\text{Betelgeuse}} = 150$ pc. Damit ist $M_{\text{Sirius}} = 1.39$ mag und $M_{\text{Betelgeuse}} = -5.1$ mag[1]. Um die Leuchtkräfte von Sirius und Beteigeuze zu vergleichen, betrachte

$$m_1 - m_2 = 2.5\log(f_2/f_1)$$

wo f_1 und f_2 die Flüsse der zwei Sterne sind. Daher gilt

$$M_1 - M_2 = 2.5\log((L_2/4\pi d^2)/(L_1/4\pi d^2)) = 2.5\log(L_2/L_1)$$

da die absoluten Helligkeiten beide bei $d = 10$ pc gemessen wurden. Daher ist das Verhältnis der Leuchtkräfte

$$\frac{L_2}{L_1} = 10^{(M_1-M_2)/2.5}$$

Beteigeuze ist daher ein Faktor ~400 leuchtkräftiger als Sirius! (und daher ist Zaphod Beeblebrox so seltsam. Zu viel Sonne…).

b) *Zeilik & Gregory, Problem 11-10:* Ein Kugelsternhaufen enthalte 10^4 Sterne. Davon haben 100 eine absolute Helligkeit von $M = 0.0$ mag, der Rest eine absolute Helligkeit von $M = +5.0$ mag. Was ist die integrierte absolute Helligkeit des Haufens? (*Tip:* Als logarithmische Einheit können Magnituden *nicht* einfach addiert werden!)

Lösung: Hier müssen Magnituden in Flüsse umgerechnet werden, diese müssen addiert werden und dann muß alles wieder zurück in eine Magnitude umgerechnet werden. Wichtig ist es, zu beachten, daß die Magnitude immer relativ definiert wurde:

$$m_1 - m_2 = 2.5\log(f_2/f_1) \tag{s3.2}$$

Damit gilt

$$f_2 = 10^{-m_2/2.5} \cdot f_1 10^{m_1/2.5} =: 10^{-m_2/2.5} \cdot A \tag{s3.3}$$

wo A eine beliebige Konstante ist. Für einen der Sterne mit $M = 0.0$ mag, $f = A$, d.h. der Fluß von 100 Sternen mit $M = 0.0$ mag ist $f_{\text{tot},M=0.0} = 100A$. Von jedem der übrigen 9900 Sterne mit $M = +5$ mag wird ein Fluß von $f = 0.01A$ gemessen, d.h. der Gesamtfluß dieser Sterne ist $f_{\text{tot},M=+5.0} = 99A$. Die 100 hellsten Sterne im Haufen erzeugen daher genausoviel Energie, wie die übrigen 9900 Sterne (das ist normal). Der Gesamtfluß des Haufens ist daher $f_{\text{tot}} = f_{\text{tot},M=0.0} + f_{\text{tot},M=+5.0} = 199A$. Um dies in Magnituden zurückzurechnen benutzen wir wieder die obige Gleichung

$$f_{\text{tot}} = 199A = 10^{-m_{\text{tot}}/2.5}A \quad \text{bzw.} \quad m_{\text{tot}} = -2.5\log 199 = -5.75\,\text{mag}$$

[1]Zeilik & Gregory, Appendix 4, listen die absolute Helligkeit als −5.5 mag, das ist ein Druckfehler.