Sur la conjecture d'Atiyah-Floer

Noé Aubin-Cadot

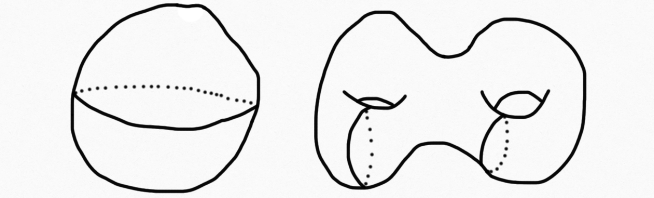
DMS - Université de Montréal

XX-ième Colloque panquébécois des étudiants de l'ISM
(à l'Université du Québec à Trois-Rivières)
13 mai 2017

Plan

1. Motivation.
2. Théorie de Morse.
3. Deux homologies de Floer.
4. Conjecture d’Atiyah-Floer.
5. Deux arguments d’Atiyah + un bonus de Taubes.

Motivation



Motivation :

On peut dessiner des espaces topologiques de dimension 2.

Mais en dimensions supérieures ?

$\rightsquigarrow$ approche algébrique : dessiner des symboles (π_1, H_k, etc.)

Théorie de Morse (20's)

Morse :

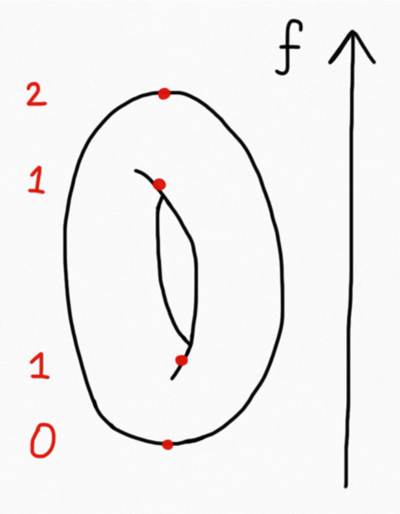
Étudier la topologie d'une variété M en étudiant l'ensemble des points critiques

$$\mathrm{crit}(f) := \{x \in M : \mathrm{d}f|_x = 0\}$$

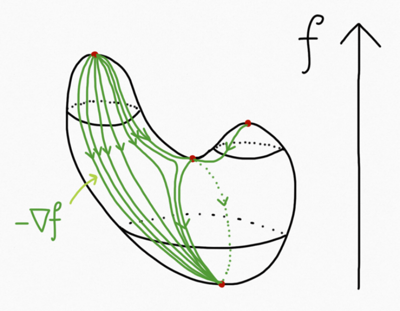
d'une fonction de Morse

$$f : M \to \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ inégalités de Morse.



Homologie de Morse (40's $\rightsquigarrow$ 60's)



Thom, Smale et Milnor :

Paire *Morse-Smale* (f, g).

$\rightsquigarrow$ Complexe engendré par crit(f).

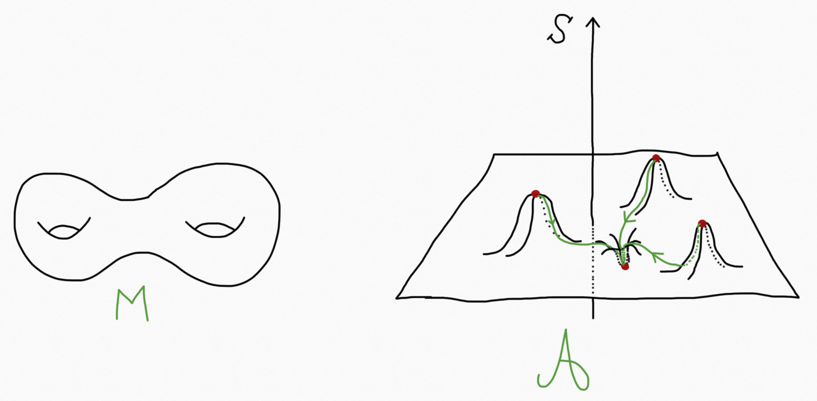
$\rightsquigarrow$ ∂ dénombre les courbes gradient.

$\rightsquigarrow$ $\partial^2 = 0 \Rightarrow$ Homologie de Morse !

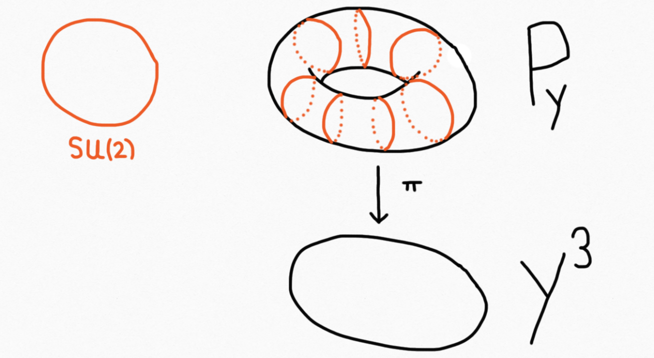
$$H_*(M; \mathbb{Z}) \cong H_*(M, (f, g))$$

Homologie de Floer (80's)

Floer : Étudier la topologie d'une variété M en étudiant les points critiques de $S : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ sur un espace auxiliaire $\mathcal{A}$.



Homologie de Floer d'instantons (80's)



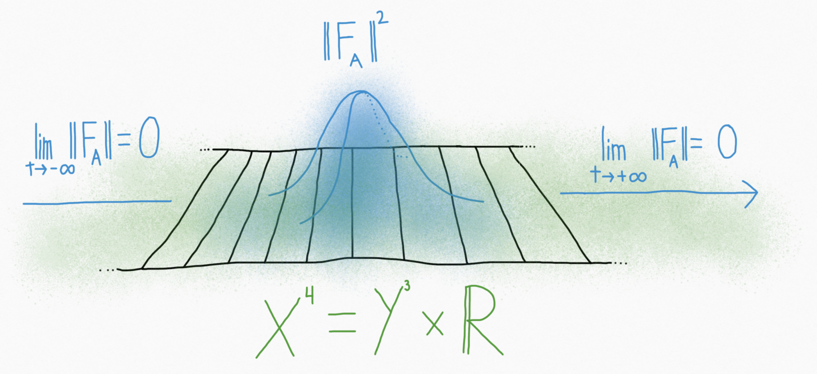
SU(2)-fibré principal (forcément) trivial $SU(2) \hookrightarrow P_Y \to Y^3$.

Espace de connexions $\mathcal{A}_Y := \Omega^1(Y; \mathfrak{su}(2))$ (+ propriétés techniques).

Homologie de Floer d'instantons

$$S_{\mathrm{CS}} : \mathcal{A}_Y \to \mathbb{R} \; ; \quad S_{\mathrm{CS}}(A) = \int_Y \mathrm{Tr}\left(A \wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

$$\mathrm{crit}(S_{\mathrm{CS}}) = \mathcal{A}_Y^{\mathrm{fl}} \quad \text{et} \quad \nabla S_{\mathrm{CS}} \text{ décrit ASD sur } X^4$$



Homologie de Floer d'int. lagr. (80's-...)

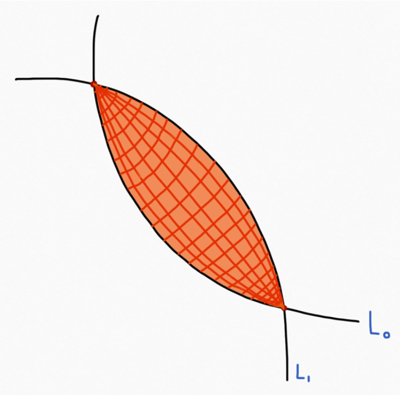
Considérons deux sous-variétés lagrangiennes $L_0, L_1 \subset (M, \omega)$.
Considérons $\Omega := \{\gamma : [0, 1] \to M | \gamma(0) \in L_0, \gamma(1) \in L_1\}$.
Considérons $S : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathrm{crit}(S) = L_0 \cap L_1$$

et telle que ∇S décrit des courbes J-holomorphes

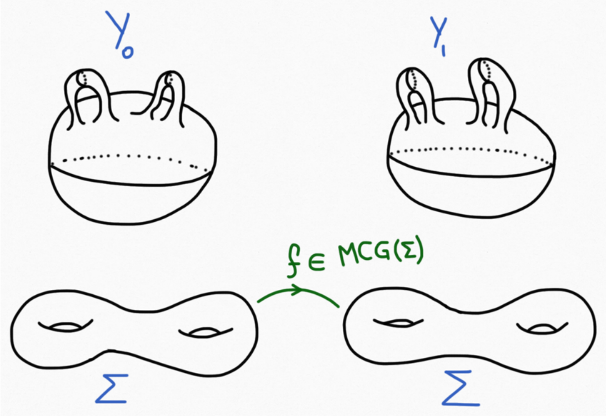
$$u : [0, 1] \times \mathbb{R} \to M \quad \text{où} \quad \overline{\partial} u = 0$$

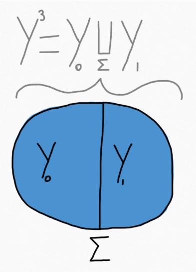
Visuellement :



Conjecture d'Atiyah-Floer (80's)

<u>*Atiyah :*</u> Considérons une 3-sphère d'homologie $Y = Y_0 \bigsqcup_{\Sigma} Y_1$ munie d'un scindement de Heegaard.

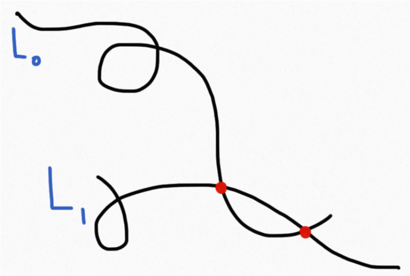




Conjecture d'Atiyah-Floer

L'ensemble des classes de jauges de connexions plates sur Σ qui s'étendent à des classes de jauges de connexion plates sur le corps à anses Y_0 (resp. Y_1) décrit une sous-variété lagrangienne L_0 (resp. L_1) singulière et immergée (après perturbations) dans l'orbifold symplectique « espace de module de connexions plates sur Σ » :

$$L_0, L_1 \subset \mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}} := \mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}} / \mathcal{G}_\Sigma$$



Conjecture d'Atiyah-Floer

Atiyah [1] : $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{lag}}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, L_0, L_1) \cong \mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y)$?

Argument 1 d'Atiyah

Argument 1 d'Atiyah :

La bijection

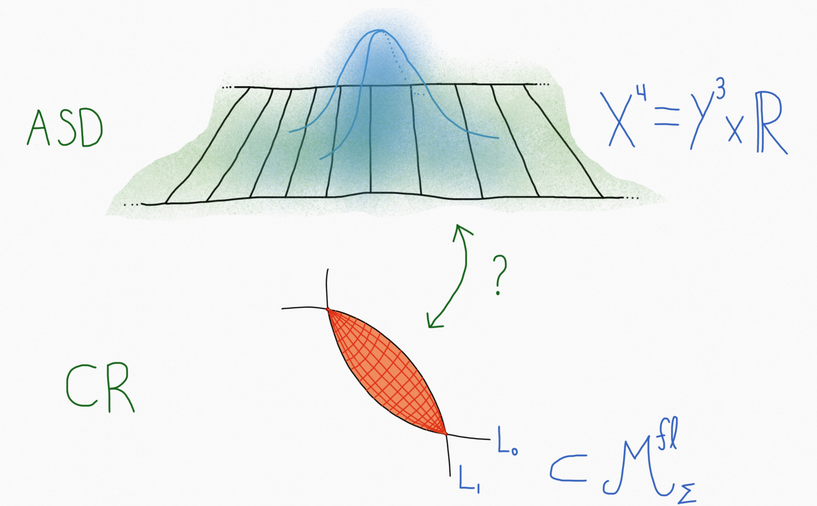
$$L_0 \cap L_1 \leftrightarrow \mathcal{M}_Y^{\mathrm{fl}}$$

fait correspondre les générateurs des deux complexes de Floer

$$\mathrm{CF}_*^{\mathrm{lag}}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, L_0, L_1) \quad \text{et} \quad \mathrm{CF}_*^{\mathrm{inst}}(Y)$$

Argument 1 d'Atiyah

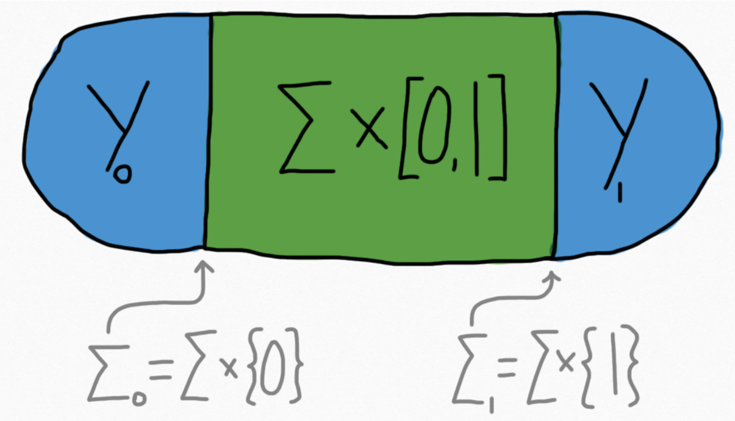
Il reste alors à montrer que la différentielle des complexes concorde. C'est-à-dire :



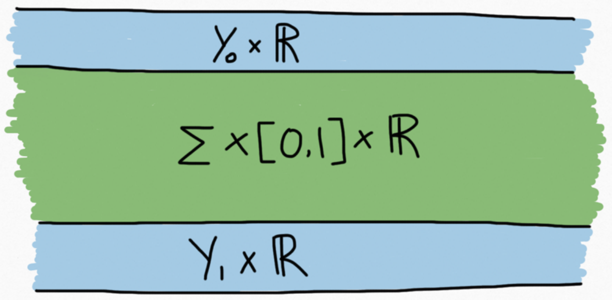
Argument 2 d'Atiyah

<u>*Argument 2 d'Atiyah :*</u> Épaississons Σ à $\Sigma \times [0,1]$:

$$Y = Y_0 \bigsqcup_{\Sigma_0} (\Sigma \times [0,1]) \bigsqcup_{\Sigma_1} Y_1$$



Argument 2 d'Atiyah



En jauge temporelle, l'équation ASD $\star_g F_A = -F_A$ se décompose, relativement à $g = \lambda^{-1} g_\Sigma + \lambda^2 \mathrm{d}s \otimes \mathrm{d}s + \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$ sur $\Sigma \times [0, 1] \times \mathbb{R}$, en les deux équations suivantes :

$$F_{A_{s,t}} = \lambda^{-1} \star_{g_\Sigma} \varphi^{(t)}_{s,t}$$

$$\lambda^{-1} A^{(s)}_{s,t} + \star_{g_\Sigma} A^{(t)}_{s,t} = \mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t}$$

Argument 2 d'Atiyah

En considérant

$$u(s,t) := A_{s,t} : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}_\Sigma$$

et

$$J := \star_{g_\Sigma} \quad (\text{car } \star_{g_s}^2 = -1 \text{ sur } \Omega^1(\Sigma; \mathfrak{su}(2))\,)$$

la seconde équation se reformule comme

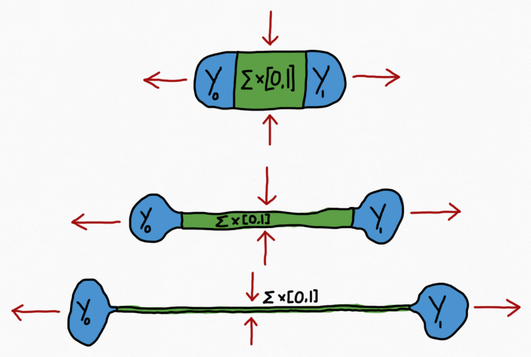
$$\lambda^{-1}\partial_s u(s,t) + J\partial_t u(s,t) = \mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t}$$

$\rightsquigarrow$ c'est *presque* comme l'éq. CR de courbes J-holom.

$$\overline{\partial} u = 0$$

Argument 2 d'Atiyah

Pour avoir u qui repose en $\mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_{\Sigma}$, Atiyah procède par limite adiabatique en *étirant le cou* $\Sigma \times [0,1]$ de Y :



En effet : $\lim_{\lambda \to +\infty} F_{A_{s,t}} = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-1} \star_{g_\Sigma} \varphi^{(t)}_{s,t} = 0.$

Argument 2 d'Atiyah

Problème 1 : $\lambda^{-1}\partial_s u(s,t) + J\partial_t u(s,t) = \mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t}$ tend, pour $\lambda \to +\infty$, à $J\partial_t u(s,t) = \mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t}$.

Ce qui est *moins* CR qu'avant...

Problème 2 : les conditions aux bords lagrangiennes (en $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$) seront-elles vérifiées ?

Néanmoins, argument bonus en faveur de la conjecture : En [6], Taubes a montré que la caractéristique d'Euler des deux complexes de Floer concordent.

[1] M. F. Atiyah, *New invariants of 3- and 4-dimensional manifolds*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **48** (1988).

[2] A. Floer, *An instanton-invariant for 3-manifolds*, Commun. Math. Phys. **118** (1988), 215–240.

[3] ______, *Morse theory for lagrangian intersections*, J. Differential Geometry **28** (1988), no. 3, 513–547.

[4] K. Fukaya, *Morse homotopy, A^∞-category, and floer homologies*, Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993), Lecture Notes Series, vol. 18, Seoul National University, 1993, pp. 1–102.

[5] D. A. Salamon, *Lagrangian intersections, 3-manifolds with boundary, and the atiyah-floer conjecture*, Proceedings of the International Congress of Mathematics, Birkäuser Verlag (1994).

[6] C. H. Taubes, *Casson's invariant and gauge theory*, J. Differential Geometry **31** (1990), 547–599.