Modul 114

- Block 1 -

Zusatzhilfe zu Zahlensysteme

08. Januar 2006

Inhalt:

Einstieg

Ein wichtiger Bereich der Informatik ist das Verarbeiten und Darstellen von Informationen. Da Verarbeitungseinheiten, aufgrund der einfachen physikalischen Realisierung, lediglich die Informationen 0 und 1 (Spannung und keine Spannung) unterscheiden können, müssen sämtliche Informationen (Zeichen und Zahlen) in dieser Form dargestellt und verarbeitet werden können.
Als Informatiker, werden Sie häufig Informationen in verschiedenen Formen begegnen. Sei es in einer Entwicklungsumgebung (Programmierung) oder z.B. an einem Bus- oder Netzwerk-Analyse-Gerät.

1 Zahlensysteme

Die ersten Menschen begannen etwa 30.000 v. Chr. zu Zählen. Der Beweis ist gefundenes Kerbholz oder Knochen mit Kerben. Vieh, Sklaven usw. wurden durch die gleiche Anzahl von Steinen, Körnern, Stäbchen oder Kerben im gleichnamigen Kerbholz repräsentiert.

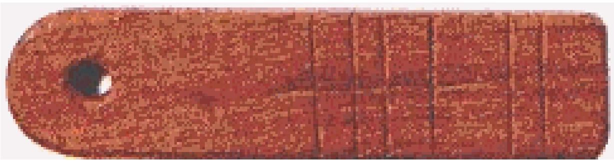
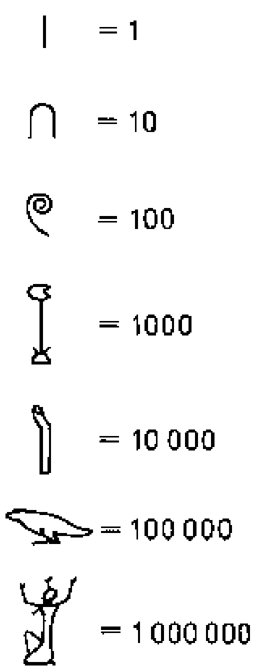


Abbildung 1: Kerbholz

Schon sehr früh stand die Menschheit vor dem Problem, Zahlen aufschreiben zu müssen.
Ein möglicher Ansatz wäre, dass für jede Zahl ein bestimmtes Zeichen definiert wird.
z.B. 1,2,3,4,5,6,7,8,9, X, Y, Z, ¢ @, #,*, etc.
Der Nachteil dieser Schreibweise ist aber, dass unendlich viele Zeichen definiert und auswendig gelernt werden müssten.

Ein anderer Ansatz ist, ein Zeichen mehrmals zu wiederholen (Abbildung 1).
z.Bsp. I = 1; IIIIII = 6, IIIIIIIIIII = 11 , etc.
Diese Variante wurde von unseren Vorfahren verwendet, da sie sehr einfach zu erlernen war. Das Problem jedoch ist, dass eine grössere Zahl sehr aufwendig zu schreiben ist und unübersichtlich wirkt.

1.1 Zahlensysteme mit codierten Wertigkeiten (Bündelungen)



Die Ägypter umgingen dieses Problem, indem Sie eine (Zehner-) Bündelung verwendeten: Das heisst, anstelle von 10 Strichen wurde ein Zehner-Symbol, anstelle von 10 Zehner-Symbolen ein Hunderter-Symbol, etc. geschrieben.

Römisches Zahlensystem:

Das bei uns weitaus bekanntere gebündelte System ist das Römische Zahlensystem. Das Römische Zahlensystem verwendet eine geschachtelte Zweier und Fünfer-Bündelung.

Die Wertigkeiten wurden folglich durch *verschiedene Zeichen* (Ziffern) codiert.

Die Grundsymbole:

I	=	1
V	=	5
X	=	10
L	=	50
C	=	100
D	=	500
M	=	1000

Die **Regeln** für die Schreibweise einer Zahl:

1. Links beginnend mit dem Symbol der grössten Zahl.
2. Die Symbole I, X, C werden bis zu dreimal geschrieben.
3. Die Symbole V, L, D werden nur einmal geschrieben.
4. Steht ein Symbol einer kleineren Zahl vor dem einer grösseren, so wird sein Wert von dem folgenden grösseren subtrahiert.

Beispiele:
1972 = MCMLXXII
1993 = MCMXCIII

Aufgabe:

Stellen Sie die aktuelle Jahreszahl und die Zahl 3354 im römischen Zahlensystem dar:

Im Römischen Zahlensystem ist es vergleichsweise schwierig Rechenoperationen auszuführen (V + V = X, aber VL + V = L != XL). Ein weiteres Problem ist die unübersichtliche Darstellung sehr grosser Zahlen.

Ein Zahlensystem ist die Gesamtheit der zur Darstellung einer Zahl verwendeten Zahlzeichen (Ziffern) und Regeln für deren Zusammensetzung

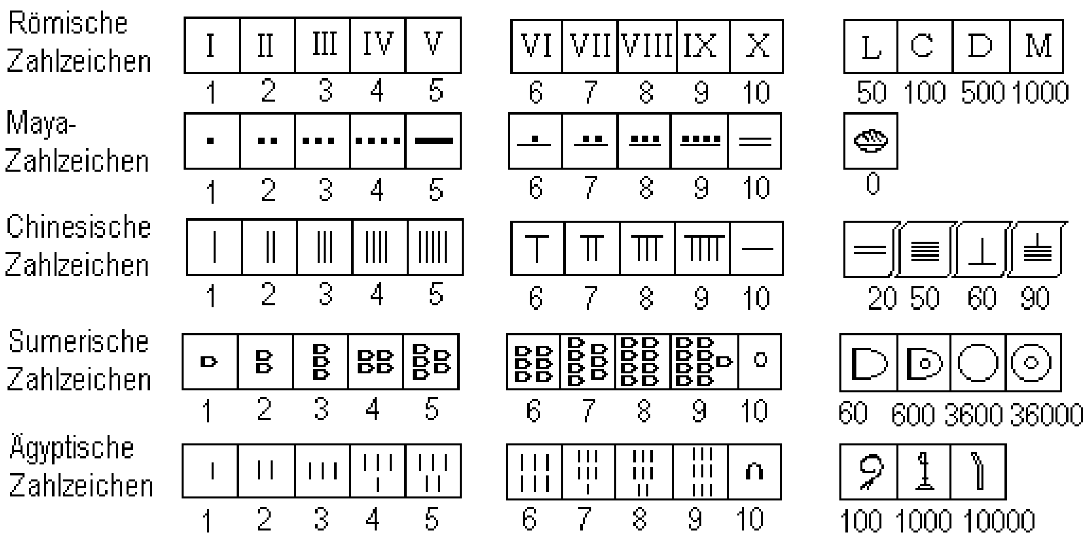


Abbildung 2: Zahlzeichen alter Zahlensysteme

1.2 Zahlensysteme mit Stellenschreibweise

Eine deutliche Verbesserung stellen Zahlensysteme mit Stellenschreibweise dar. In diesen Systemen bestimmt die Stellung eines Symbols in einer Symbolfolge seinen Stellenwert. Darüber hinaus ist die Null bekannt.

$$Z = \sum_{k=1}^{n} a_k * W_k$$

Formel 1: Zahlensystem mit Stellenschreibweise

Z = darzustellende Zahl
a_k = Nennwert des Symbols an der Stelle k
W_k = Stellenwert der Stelle k
n = Anzahl der Stellen

Ein Beispiel anhand des Zeit-Zahlensystems:
➔ 3Wochen, 4Tage, 2 Stunden, 0 Minuten, 23 Sekunden
Z = 3*(7*24*60*60) + 4*(24*60*60) + 2*(60*60) + 0*(60) + 23*(1) = 2’167'223 Sekunden

Im Beispiel gilt:
a_5= 3, W_5 =604800, a_4=4 , W_4=86400, a_3=2, W_3=3600, a_2=0, W_2=60, a_1=23, W_1=1

1.3 Polyadisches Zahlensystem (Heute übliche Zahlensysteme)

Polyadische Zahlensysteme sind Zahlensysteme mit Stellenschreibweise, wobei zusätzlich die einzelnen Stellenwerte nach einem exponentiellen Bildungsgesetz gestuft werden.

Beispiel 1: W1=10^0=1, W2=10^1=10, W3=10^2=100, W4=10^3=1000
Beispiel 2: W1=5^0=1, W2=5^1=5, W3=5^2=25, W4=5^3=125

$$Z = \sum_{k=0}^{n} a_k * B^k$$

Formel 2: polyadisches Zahlensystem

Z = Wert der Zahl im Dezimalsystem
a = Nennwert der Ziffer
B = Basis
n = Anzahl der Stellen

Basis:

Die Basis (B) ist eine natürliche Zahl > 1.
Im uns gewohnten Dezimalsystem ist die Basis z.B. gleich 10.
- *) Dualsystem (Basis B=2) → Zeichenvorrat {0,1}
- *) Oktalsystem (Basis B=8)
- *) Dezimalsystem (Basis B=10)
- *) Hexadezimalsystem, Sedezimalsystem (Basis B=16)

Ziffer:

Die Ziffer ist ein Zeichen aus dem Zeichenvorrat von B Zeichen.
Der Nennwert der Ziffer ist eine Zahl aus der Menge {0,1, … B-1}.
- *) Dualsystem (Basis B=2) → Zeichenvorrat {0,1}
- *) Oktalsystem (Basis B=8)→ Zeichenvorrat {0,1,2,3,4,5,6,7}
- *) Dezimalsystem (Basis B=10)→ Zeichenvorrat {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
- *) Hexadezimalsystem(Basis B=16)→Zeichenvorrat {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F}

Stellenwert, Nennwert und Ziffernwert:

Der Stellenwert entspricht der Stelle innerhalb der Ziffernfolge.
Der Ziffernwert ist gleich dem Produkt von Nennwert und Stellenwert.

Beispiel: Betrachten Sie die Ziffer in der Mitte der folgenden Dezimalzahl: 26**5**48
→ Nennwert = 5, Stellenwert = 10^2=100, Ziffernwert = 5 * 100 = 500

Zahl:

Die Zahl ist eine Folge von Ziffern des verwendeten Ziffernsystems.
Der Wert der Zahl ist die Summe der einzelnen Ziffernwerte.

1.3.1 Dezimales Zahlensystem

Das Dezimale Zahlensystem ist ein polyadisches Zahlensystem mit der Basis 10 (B= 10). Zulässige Ziffern sind {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Wenn wir die Basis B der Formel 2 durch die Zahl 10 ersetzen, erhalten wir die folgende Formel:

$$Z = \sum_{k=0}^{n} a_k * 10^k$$

Formel 3: Dezimales Zahlensystem

Mit diesem Zahlensystem kommen wir am einfachsten klar, da wir dieses System in unserer Schulzeit erlernten (z.B. Kopfrechnen, etc.) Es wurde vor einigen hundert Jahren vom Zählmeister Adam Riese eingeführt.

Syntax: Wenn wir keine Basis zu einer Zahl angeben, gilt die Zahl als Dezimalzahl → $123 = 123_{10}$

Beispiel: Die Zahl $3165{,}4_{10}$ setzt sich aus folgendem Sachverhalt zusammen:

$Z = 3*(10^3) + 1*(10^2) + 6*(10^1) + 5*(10^0) + 4*(10^{-1}) = 3165{,}4_{10}$

Im Beispiel gilt: $a_3= 3$, $B^3 =1000$, $a_2= 1$, $B^2 =100$, $a_1= 6$, $B^1 =10$,
$a_0= 5$, $B^0 =0$, $a_{-1}= 4$, $B^{-1} =0.1$

3	1	6	5	,	4	Stelle (Position)
10^3	10^2	10^1	10^0		10^{-1}	**Stellenwert als 10er-Potenz**
1000	100	10	1		0.1	**Stellenwert als Zahl**
3	1	6	5		4	**Nennwert**
3*1000	1*100	6*10	5*1		4*0.1	**Ziffernwerte als Produkt**
3000	100	60	5		0.4	**Ziffernwerte**

1.3.2 Binäres Zahlensystem

Das binäre Zahlensystem ist ein polyadisches Zahlensystem mit der Basis 2 (B= 2). Zulässige Ziffern sind {0,1}. Wenn wir die Basis B der Formel 2 durch die Zahl 2 ersetzen, erhalten wir die folgende Formel:

$$Z = \sum_{k=0}^{n} a_k * 2^k$$

Formel 4: binäres oder dyadisches Zahlensystem

Für die Verarbeitung von Zahlenwerten in Rechenanlagen erweist sich das binäre Zahlensystem (Basis $B = 2$) als optimal, da es zur Darstellung nur zwei unterscheidbare Zeichen, 0 und 1, benötigt. Es ergeben sich einfache Verarbeitungsregeln und technische Realisierungen, weil man nur zwischen zwei Werten einer Größe entscheiden muss. Es wird sich auch zeigen, dass das Rechnen im Dualsystem bedeutend einfacher ist als im Dezimalsystem, was zu einfacheren Schaltungen in Rechenwerken führt.
Das Dualsystem hat aber auch einen grossen Nachteil: Da das binäre Zahlensystem das System mit der kleinsten Basis ist, benötigt man zur Darstellung auch die meisten Stellen. Die Dualzahlen sind wegen ihrer Länge sehr unhandlich.

Syntax: Dualzahlen werden mit der Basis “2“ oder “B“ dargestellt → $1010_2= 1101_B$

Beispiel: Die Binärzahl $11001111{,}01_2$ setzt sich aus folgendem Sachverhalt zusammen:

$$\begin{aligned} Z = 11001111{,}01_2 &= 1\cdot2^7 + 1\cdot2^6 + 0\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 + 0\cdot2^{-1} + 1\cdot2^{-2} \\ &= 1\cdot128 + 1\cdot64 + 0\cdot32 + 0\cdot16 + 1\cdot8 + 1\cdot4 + 1\cdot2 + 1\cdot1 + 0\cdot0.5 + 1\cdot0.25 \\ &= 207{,}25_{10} \end{aligned}$$

1.3.3 Oktales Zahlensystem

Das oktale Zahlensystem ist ein polyadisches Zahlensystem mit der Basis 8 (B= 8). Zulässige Ziffern sind {0,1,2,3,4,5,6,7}. Wenn wir die Basis B der Formel 2 durch die Zahl 8 ersetzen, erhalten wir die folgende Formel:

$$Z = \sum_{k=0}^{n} a_k * 8^k$$

Formel 5: oktales Zahlensystem

Genauso, wie es möglich ist, ein Zahlensystem auf den Ziffern 0 und 1 aufzubauen, kann man auch auf anderen Ziffernfolgen Zahlensysteme aufbauen. Die Zahlen aus dem Zahlensystem zur Basis 8 heißen Oktalzahlen. Die Oktalzahlen benutzen nur die Ziffern von 0 bis 7. Genau wie im Dezimalsystem werden beim Zählen die Ziffern der niedrigsten Stelle solange erhöht, bis die höchste Ziffer erreicht ist, in diesem Fall also die 7, und danach wird die nächsthöhere Stelle um eins erhöht und so weiter.
Der Vorteil des oktalen Zahlensystems besteht in der leichten Umrechenbarkeit von Oktalzahlen in Binärzahlen und umgekehrt. Weil die Oktalzahlen ,,handlicher`` sind als ihre binären Äquivalente, werden sie gern zur Darstellung von Bytes verwendet.

Syntax: Oktalzahlen werden mit der Basis “8“ oder “O“ dargestellt → $127_8 = 127_O$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 125{,}4_8 &= 1\cdot8^2 + 2\cdot8^1 + 5\cdot8^0 + 4\cdot8^{-1} \\ &= 1\cdot64 + 2\cdot8 + 5\cdot1 + 4\cdot0{,}125 \\ &= 85{,}5_{10} \end{aligned}$$

1.3.4 Hexadezimales Zahlensystem

Das hexadezimale Zahlensystem, auch Sedezimalsystem genannt, ist ein polyadisches Zahlensystem mit der Basis 16 (B= 16). Zulässige Ziffern sind {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}. Wenn wir die Basis B der Formel 2 durch die Zahl 16 ersetzen, erhalten wir die folgende Formel:

$$Z = \sum_{k=0}^{n} a_k * 16^k$$

Formel 6: hexadezimales Zahlensystem

Es gibt in unserem Kulturkreis nur 10 gebräuchliche Ziffern. Aber es gibt eigentlich keinen Grund, auf Zahlensysteme mit mehr Ziffern zu verzichten. Das im Computerbereich gebräuchliche Hexadezimalsystem benutzt 16 Ziffern. Zusätzlich zu den Ziffern 0 bis 9 werden hier die Buchstaben a bis f als elfte bis sechzehnte Ziffer benutzt. Dieses Zahlensystem erlaubt auch eine relativ einfache Umrechnung von Binärzahlen in Hexadezimalzahlen und umgekehrt. Hierzu werden in der gleichen Weise wie bei den Oktalzahlen die Hexadezimalziffern in vierstellige Binärzahlen und Gruppen zu je vier Binärziffern zu Hexadezimalziffern gewandelt.
Im Hexadezimalsystem entspricht ein Byte aus acht Bits genau einer zweistelligen Hexadezimalzahl.

Syntax: Hexadezimalzahlen werden mit der Basis “16“ oder “H“ dargestellt → $A09D_{16} = A09D_H$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 4BF{,}5_{16} &= 4\cdot16^2 + B\cdot16^1 + F\cdot16^0 + 5\cdot16^{-1} \\ &= 4\cdot16^2 + 11\cdot16^1 + 15\cdot16^0 + 5\cdot16^{-1} \\ &= 4\cdot256 + 11\cdot16 + 15\cdot16 + 5\cdot0{,}0625 \\ &= 1215{,}3125_{10} \end{aligned}$$

1.4 Umrechnung zwischen den polyadischen Zahlensystemen

1.4.1 Vom Dezimalsystem zu Zahlen anderer Basis umrechnen

Im folgenden Abschnitt möchten wir ein Verfahren betrachten, mit dem wir Dezimalzahlen in Zahlen zur Basis B umwandeln können.

Die Vorgehensweise bei der Umwandlung einer Dezimalzahl in eine Zahl zur Basis B ist für beliebige Basen anwendbar. Wir betrachten an dieser Stelle ein Beispiel für die Umwandlung zum Zahlensystem mit der Basis 2 (Dualsystem):

Aufgabe: Die Zahl $207{,}22_{10}$ soll in das Dualsystem (Basis = 2) umgerechnet werden

Schritt 1:(Aufteilen)

Die Dezimalzahl wird in den ganzzahligen Anteil und in die Nachkommastellen aufgeteilt.

→ $207{,}22_{10} = 207_{10} + 0.22_{10}$

Schritt 2:(Der ganzzahlige Anteil)

Man teilt die Zahl so oft durch die Basis (2), bis das Ergebnis Null wird. Die Reste der Division (jeweils 0 oder 1) ergeben die neuen (binären) Ziffern mit steigender Wertigkeit.
Die Zahl 207_{10} ins binäre Zahlensystem umrechnen:

207 : 2 = 103 Rest 1
103 : 2 = 51 Rest 1
51 : 2 = 25 Rest 1
25 : 2 = 12 Rest 1
12 : 2 = 6 Rest 0
6 : 2 = 3 Rest 0
3 : 2 = 1 Rest 1
1 : 2 = 0 Rest 1 ↑ => 207_{10} = 11001111

Schritt 3:(Die Nachkommastellen)

Die Nachkommastellen werden mit der Basis B (2) multipliziert. Das Produkt besteht aus einem ganzzahligen Anteil und aus neuen Nachkommastellen. Der ganzzahlige Anteil ist schon Teil des Umwandlungsergebnisses. Die neu entstandenen Nachkommastellen werden wieder mit der Basis B multipliziert, usw. Das Verfahren ist fortzusetzen, bis die Nachkommastellen Null werden oder bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Die Zahl 0.22_{10} ins binäre Zahlensystem umrechnen.

0,22 * 2 = 0.44 + ganzzahliger Teil = 0
0,44 * 2 = 0.88 + ganzzahliger Teil = 0
0,88 * 2 = 0.76 + ganzzahliger Teil = 1
0,76 * 2 = 0.52 + ganzzahliger Teil = 1
0,52 * 2 = 0.04 + ganzzahliger Teil = 1
0,04 * 2 = 0.08 + ganzzahliger Teil = 0 ↓ => $0.22_{10} = 0.00111_2$

Schritt 4:(Zusammenfassen)

Die Teilergebnisse der Schritte 2 & 3 zusammenfassen:

$207{,}24_{10}$ = 11001111_2 + '.' + 00111_2 = 11001111.00111_2

1.4.2 Von Zahlensystemen beliebiger Basis zum Dezimalsystem umrechnen

Auch die Vorgehensweise bei der Rückwandlung einer Zahl zur Basis B in eine Dezimalzahl ist für beliebige Basen anwendbar.
Wir betrachten an dieser Stelle das unter 1.4.1 verwendete Beispiel zur Rückwandlung.

Aufgabe: Die Zahl 11001111.0011110_2 soll in das Dezimalsystem (Basis=10) umgerechnet werden.

Schritt 1:(Aufteilen)

Die Zahl wird in den ganzzahligen Anteil und in die Nachkommastellen aufgeteilt.

→ $11001111.\ 0011110_2 = 11001111_2 + 0{,}\ 0011110_2$

Schritt 2:(Der ganzzahlige Anteil)

Der ganzzahlige Anteil wird gemäss folgendem Schema mit der Basis B multipliziert.

$11001111_2 = ???_{10}$

		1	1	0	0	1	1	1	1_2		
2	*	1	+1							=	3
2	*	3		+0						=	6
2	*	6			+0					=	12
2	*	12				+1				=	25
2	*	25					+1			=	51
2	*	51						+1		=	103
2	*	103							+1	=	**207**

=> $11001111_2 = 207_{10}$

Schritt 3:(Die Nachkommastellen)

Die Nachlommastellen werdfen gemäss folgendem Schema durch die Basis B dividiert.

$0{,}\ 001111_2 = ???_{10}$

0	,	0	0	1	1	1_2				
						1		**/2**	=	0.5
					1		+0.5	**/2**	=	0.75
				1			+0.75	**/2**	=	0.875
			0				+0.875	**/2**	=	0.4375
		0					+0.4375	**/2**	=	**0.21875**

=> $0{,}\ 001111_2 = 0.21875_{10}$

Schritt 4: (Zusammenfassen)

Die Teilergebnisse der Schritte 2 & 3 zusammenfassen:

$207_{10} + 0.21875_{10} = 207{,}21875_{10}$

1.4.3 Umwandlung Dualzahl ↔ Hexadezimalzahl

Durch die Zusammenfassung von jeweils 4 nebeneinanderliegenden Ziffern kann eine Dualzahl in eine Hexadezimalzahl umgewandelt werden.
Für die Umwandlung einer Hexadezimalzahl in eine Dualzahl wird entsprechend jede Ziffer in eine Vierergruppe von Binärziffern umgerechnet (Nibbelbildung).
Ein Nibbel = 4 Bit

$$\underline{0011}\ \underline{0010}\ \underline{1011}\ \underline{0110}_B$$
$$3\quad 2\quad B\quad 6_H$$

Aufgabe: Vervollständigen Sie die folgende Tabelle:

Dual	Hexadezimal
1010’1011	
1’1111’1110	
1001’1001	
1000’0000’0000’0001	
	D16
	1234
	AB
	10011

1.4.4 Umwandlung Dualzahl ↔ Oktalzahl

Durch die Zusammenfassung von jeweils 3 nebeneinanderliegenden Ziffern kann eine Dualzahl in eine Oktalzahl umgewandelt werden.

Für die Umwandlung einer Oktalzahl in eine Dualzahl wird entsprechend jede Ziffer in eine Dreiergruppe von Binärziffern umgerechnet.

$$\underline{011}\ \underline{010}\ \underline{101}\ \underline{110}_B$$
$$3\quad 2\quad 5\quad 6_O$$

1.4.5 Aufgaben zum Thema Zahlensystemumwandlung

Die folgenden Aufgaben sind ohne Umwandlungsfunktionen des Taschenrechners auf einem Reinblatt zu lösen:

1. Wandeln Sie die folgenden Zahlen ins Dezimalsystem um:
- **a)** 1001110_2
- **b)** 1030_4
- **c)** $13401{,}21_5$
- **d)** 1057_9
- **e)** 1053_6
- **f)** $AF3{,}B_{16}$
- **g)** 11235.325_6
- **h)** 101.101_2

2. Wandeln Sie die drei Dezimalzahlen Zahlen 70, 65, 103 und 18 ins:
- **a)** Binärsystem,
- **b)** Hexadezimalsystem und
- **c)** Oktallsystem um.

3. Geben Sie für folgende Zahlen die vorhergehende und die nachfolgende Zahl im selben Zahlensystem an:
- **a)** 1010000_2
- **b)** 6565000_7
- **c)** 1022_3

4. Wandeln Sie die Zahl $SIEBEN_{28}$ ins Dezimal- und ins Hexadezimalsystem um. Die Ziffern und die Wertigkeiten des Siebenundzwanziger-Systems sind aus folgender Tabelle ersichtlich:

Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
Nennwert	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27