# ÁLGEBRA LINEAR III

Departamento de Estrutura Matemática - IME - UERJ
Prof. Jessica Gavia

# Capítulo 1

# Matrizes Sistemas e Determinantes

## 1.1 Definições e Exemplos

Uma ***matriz*** é um elemento representado na forma de arranjo retangular com $m$ linhas e $n$ colunas, composto por números reais ou complexos.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

- O elemento $a_{ij}$ é um número real ou complexo que representa o elemento localizado na ***posição (i,j)***, esses elementos também são chamados ***entradas da matriz***.

- O símbolo $m \times n$ representa o "tamanho da matriz", é chamado ***ordem da matriz***.

- Os úmeros reais ou complexos também serão chamados ***escalares***.

- A matriz também é denotada como,

$$A = A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}.$$

- O conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$ e entradas reais será denotado $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se as entradas são números complexos a notação é $M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

**Exemplo 1.1.**

$$A_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 50 & 30 & 10 \\ 5 & 20 & 40 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 1.2.** Consideremos duas ligas de aço A e B, com componentes adicionais: carbono (C), Silício (Si), Manganês (Mn), Cromo (Cr), Níquel (Ni), Molibdênio (Mo) que são dadas em % na tabela abaixo:

| Liga | % C | %Si | %Mn | %Ni | %Cr | %Mo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Liga A | 0,85 | 1,50 | 1,50 | 0,50 | 1,30 | 0,30 |
| Liga B | 0,84 | 2,00 | 1,48 | 0,48 | 1,32 | 0,28 |

estes dados podem ser representados pela matriz,

$$\begin{bmatrix} 0,85 & 1,50 & 1,50 & 0,50 & 1,30 & 0,30 \\ 0,84 & 2,00 & 1,48 & 0,48 & 1,32 & 0,28 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 1.3.** $A = [a_{ij}]_{2\times 4}$, onde $a_{ij} = (i - j)\boxed{\cos j\pi,}$ para todos $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3, 4$; daí obtemos:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{2} & \boxed{-3} \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Definição 1.4.** Duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são ***iguais***, se são da mesma ordem e,

$$a_{ij} = b_{ij}, \text{ para todos } i, j.$$

## 1.2 Tipos de Matrizes

1. **Matriz nula**. Matriz de ordem qualquer, cujas entradas são todas nulas, esta matriz é denotada $\boxed{0_{m\times n}.}$

2. **Matriz linha**. Matriz com uma única linha.

$$\boxed{A_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}.}$$

3. **Matriz coluna**. Matriz com uma única coluna. A matriz coluna é interpretada como um vetor com $m$ componentes.

$$\boxed{A_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.}$$

4. **Matriz quadrada**. Chamada matriz quadrada de ordem $m$.

$$A_{m\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}.$$

em uma matriz quadrada de ordem $m$, $A = [a_{ij}]$, chamamos de ***diagonal principal*** a sequência,

$$\boxed{a_{11}\ a_{22} \dots\ a_{mm}.}$$

A ***diagonal secundária*** é a sequência

$$\boxed{a_{1m}\ a_{2(m-1)} \dots\ a_{m1}.}$$

Alguns tipos especiais de matrizes quadradas são:

5. **Matriz diagonal**. Matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, onde $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

6. **Matriz identidade**. Matriz diagonal da forma,

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

7. **Matriz triangular superior**. Matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, onde todos os elementos "abaixo" da diagonal principal são nulos, isto é $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

8. **Matriz triangular inferior**. Matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, onde $a_{ij} = 0$, para todo $i < j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

9. **Matriz simétrica**. Matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, onde $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b & c \\ b & a_{22} & d \\ c & d & a_{33} \end{bmatrix}$$

10. **Matriz anti-simétrica**. Matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, com a propriedade $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo $i, j$.

Note que na diagonal:
x=-x $\rightarrow$ x=0.

$$\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & d \\ -c & -d & 0 \end{bmatrix}$$

**Observação 1.5.** Uma matriz de ordem $1 \times 1$ será considerada também como um número.

## 1.3 Operações com Matrizes

### Adição de Matrizes

Dadas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, de ordem $m \times n$, a ***matriz soma*** de $A$ e $B$, denotada $A + B$, é

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

**Exemplo 1.6.** Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \text{ temos } \quad A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Propriedades 1.7.** (a) **Associativa**: $(A + B) + C = A + (B + C)$

(b) **Comutativa**: $A + B = B + A$
=A

(c) **Matriz Nula**: $A+0 = 0+A$, onde 0 é a matriz nula na ordem respectiva.

(d) **Matriz Oposta**: Para cada matriz $A = [a_{ij}]$ define-se a ***matriz oposta*** **de** $A$, como $-A = [-a_{ij}]$. A matriz $-A$ é a única com a propriedade: $A + (-A) = 0$.

### Multiplicação por Escalar

Dados $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e um escalar $k$, a ***matriz multiplicação por escalar*** de $k$ e $A$ é dada por

$$k \cdot A = [ka_{ij}]_{m \times n}.$$

**Exemplos 1.8.**

$$-2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,2 & 0,5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix},$$

**Propriedades 1.9.** O produto de matriz por escalar possui as seguintes propriedades:

(a) $k \cdot (A + B) = kA + kB$

(b) $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 A + k_2 \cdot A$

(c) $k_1(k_2 A) = (k_1 k_2)A$

(d) $0 \cdot A = \mathbf{0}$

(e) $1 \cdot A = A$ e $-1 \cdot A = -A$.

**Produto de Matrizes**

Consideremos a matriz linha $L$, de ordem $1 \times n$ e a matriz coluna $C$, de ordem $n \times 1$,

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

definimos o produto das matrizes $L$ e $C$, como o escalar.

$$\begin{aligned} L \cdot C = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} &= \boxed{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.10.**

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = (4)(-2) + (12)(1) + (2)(\sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2}.$$

Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, denotaremos por

$$\boxed{L_i(A) = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}} \quad \text{e} \quad \boxed{C_j(A) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.}$$

**Forma geral o produto de matrizes.** Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, a ***matriz produto***, $A \cdot B$, é a matriz de ordem $m \times p$ definida como:

$$A\cdot B = [a_{ij}]_{m\times n}[b_{ij}]_{n\times p} = \boxed{[c_{ij}]_{m\times p},} \quad \text{onde} \quad \boxed{c_{ij} = L_i(A)\cdot C_j(B) = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}b_{kj},}$$

**Exemplo 1.11.** Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$$

temos:

$$\begin{array}{rcccl} c_{11} &=& (1)(2)+(-1)(-1) &=& 3; \\ c_{21} &=& (4)(2)+(0)(-1) &=& 8; \\ c_{31} &=& (2)(2)+(1)(-1) &=& 3; \end{array} \quad \begin{array}{rcccl} c_{12} &=& (1)(1)+(-1)(0) &=& 1 \\ c_{22} &=& (4)(1)+(0)(0) &=& 4 \\ c_{32} &=& (2)(1)+(1)(0) &=& 2 \end{array}$$

logo: $\quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$

**Exemplo 1.12.** Sejam $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$, onde $a_{ij} = i + j - 2$ e $B = [b_{ij}]_{3\times 4}$, onde $b_{ij} = i^2 - j$. Vamos determinar $\boxed{L_2(A \cdot B).}$

Considerando $A \cdot B = [c_{ij}]_{3\times 4}$, temos $\boxed{c_{2j} = L_2(A) \cdot C_j(B)}$, onde $L_2(A) = [1\ 2\ 3]$ e $C_j(B) = \begin{bmatrix} 1-j \\ 4-j \\ 9-j \end{bmatrix}$, logo

$$c_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = 30; \quad c_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = 24,$$

$$c_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = 18; \quad c_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 12.$$

$$\therefore\ L_2(A \cdot B) = \begin{bmatrix} 30 & 24 & 18 & 12 \end{bmatrix}.$$

**Observação 1.13.** Só tem sentido efetuar o produto $A \cdot B$ no caso,

$$\underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{B}_{n \times p} = \underbrace{C}_{m \times p}.$$

**Exemplo 1.14** (Um produto importante)**.** Sejam $C_1, \ldots, C_n$ as colunas de $A$; denotemos $A = [C_1 \ldots C_n]_{m \times n}$ e consideremos $b = [b_{i1}]_{n \times 1}$, logo

$$A \cdot b = b_{11}C_1 + \ldots + b_{n1}C_n.$$

No caso, $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned} A \cdot b = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} &= \boxed{\begin{bmatrix} 2b_1 + 6b_2 - 2b_3 \\ 0 + b_2 + 3b_3 \\ b_1 + 2b_2 + 4b_3 \end{bmatrix}} \\ &= \boxed{\begin{bmatrix} 2b_1 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6b_2 \\ b_2 \\ 2b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2b_3 \\ 3b_3 \\ 4b_3 \end{bmatrix}} \\ &= \boxed{b_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.} \end{aligned}$$

**Propriedades 1.15.**

1. **Associatividade.** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2. **Distributividade.**

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \qquad \text{Distributividade à esquerda ,}$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A, \qquad \text{Distributividade à direita.}$$

3. $I_m \cdot A = A$ e $A \cdot I_n = A$
4. $A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{0} \cdot A = \mathbf{0}$.
5. $(\alpha A) \cdot (\beta B) = (\alpha\beta) A \cdot B$, onde $\alpha$ e $\beta$ são escalares.

**Observação 1.16.** Multiplicando três matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ e $C = [c_{ij}]_{p\times q}$, temos $A(BC) = [d_{ij}]_{m\times q}$, onde

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} \sum_{l=1}^{l=p} b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{l=1}^{l=p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

Por exemplo: -35+28+5+2=0

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10+8-10-4 & 2-8+2+4 \\ -35+28+5+2 & 7-28-1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -24 \end{bmatrix}.$$

Algumas propriedades do produto usuais nos números, mas que não são verdadeiras para matrizes.

1. **O produto de matrizes não é comutativo**, ou seja que para algumas matrizes, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

3 1
-1 3

3 1
-1 3

temos, $A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = B \cdot A.$

Embora algumas matrizes como $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ comutam.

2. $A \cdot B = 0$ **não implica** $A = 0$ ou $B = 0$.

   Exemplo, $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, pois $A \cdot B = 0$, mas $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

3. $A \cdot B = A \cdot C,\ A \neq 0,$ **não implica** $B = C$.

   Exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, pois temos $A \cdot B = A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, mas $B \neq C$.

**Matrizes em Blocos**

Matriz em blocos é uma matriz cujos elementos são submatrizes. Por exemplo,

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

O produto de duas matrizes pode-se descrever em função de seus blocos. Por exemplo,

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Exemplo 1.17.** Sejam, $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ e

$B = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 4 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix}$.

Os blocos de $AB$ são:

$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$, $A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = 0$ e $A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix}$. Logo,

$$AB = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 5 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ -4 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ \hline -7 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -7 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right].$$

**Potenciação**

Dada a matriz quadrada $A$ de ordem $m$, definimos as potências de A como:

$$A^0 = I_m \quad \text{e} \quad A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ vezes}}, \text{ para } n \geq 1.$$

**Exemplo 1.18.**

1. Caculemos a expressão $A^2 - 3A$, para $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   De fato, $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

logo,

$A^2 - 3A = \begin{bmatrix} 16 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$

2. Mostre que $A^2 - 3A = A(A - 3I)$, onde $A$ é uma matriz quadrada qualquer e $I$ é a matriz identidade com a mesma ordem de $A$.

   De fato, $A(A-3I) = A \cdot A - A \cdot (3I) = A^2 - 3(A \cdot I) = A^2 - 3A$.

**Propriedades 1.19.** Sejam $A$ uma matriz quadrada, $m, n$ números naturais não nulos e $k$ um escalar, então valem as propriedades:

1. $A^{m+n} = A^m \cdot A^n$
2. $(A^m)^n = A^{mn}$
3. $(kA)^m = k^m A^m$.

(AB)$^2$ diferente de A$^2$ .B$^2$

Note que da propriedade 1 temos que as potências da mesma matriz comutam.

A.A.A=A.A=A

**Definição 1.20.** Diremos que uma matriz quadrada é ***Idempotente*** quando $A^2 = A$. $A$ será chamada ***Nilpotente***, se existir um natural $k$, tal que $A^k = 0$. Exemplos:

$0,\ I_m,\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}$, são matrizes idempotentes.

$0,\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ são matrizes nilpotentes.

**Transposição**

Dada $A = [a_{ij}]$ de ordem $m \times n$, chamamos ***matriz transposta* de** $A$ à matriz de ordem $n \times m$, denotada $A^t$ e dada por:

$$A^t = [b_{ij}], \quad \text{onde } b_{ij} = a_{ji}.$$

**Exemplos 1.21.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

**Observações 1.22.**

1. Seja $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ temos,

$$\boxed{(L_i(A))^t = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix} = C_i(A^t), \quad (C_j(A))^t = \begin{bmatrix} a_{1j} & \cdots & a_{mj} \end{bmatrix} = L_j(A^t).}$$

2. Para $A$ matriz quadrada,

- $A$ é simétrica, se e somente se $A^t = A$
- $A$ é antisimétrica, se e somente se $A^t = -A$.

**Propriedades 1.23.** Sejam $A, B$ matrizes de ordens adequadas as operações.

1. $(A^t)^t = A$
2. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
3. $(A + B)^t = A^t + B^t$,
4. $\boxed{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t,}$

5. $(A^k)^t = (A^t)^k$.

**Exemplo 1.24** (Construção de matrizes simétricas e antisimétricas)**.**

1. Seja $A$ matriz de ordem $m \times n$, verifiquemos que

$$\boxed{A\overset{\text{mxn}}{}\overset{\text{nxm}}{A^t}} \text{ é simétrica de ordem } m \text{ e } \boxed{\overset{\text{nxm}}{A^t}\overset{\text{mxn}}{A}} \text{ é simétrica de ordem } n.$$

   De fato, no primeiro caso, $\boxed{(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t,}$ analogamente para $\boxed{A^t A.}$

2. Se $A$ ~~e $B$~~ são matrizes quadradas de ordem $m$ verifiquemos que $A + A^t$ é simétrica e $A - A^t$ é antisimétrica.

   De fato no primeiro caso, $\boxed{(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t,}$ analogamente para o segundo caso.

**Exemplo 1.25.** Suponha que uma variável passa sucessivamente por um número finito de estados fixos $E_1, \ldots, E_n$ e que a probabilidade de passagem do estado $E_j$ ao estado $E_i$ só depende do estado inicial $E_j$. Seja,

$$p_{ij} : \text{ probabilidade de passagem do estado } E_j \text{ ao estado } E_i,$$

$p_{ij}$ é chamada ***probabilidade de transição***. Este tipo de processo é chamado ***cadeia de markov***. A matriz ***matriz de transição de probabilidade*** é,

$$\boxed{T = [p_{ij}]_{n \times n}.}$$

Consideremos o caso: em uma determinada região o clima em cada período de tempo reveza-se entre chuva (C) e seca (S). Suponha que,

$$\begin{aligned}
p_{cc} &= \text{probabilidade de passagem de chuva para chuva} = 1/4, \\
p_{sc} &= \text{probabilidade de passagem de chuva para seca} = 3/4, \\
p_{c\cancel{c}} &= \text{probabilidade de passagem de seca para chuva} = 1/2, \\
p_{ss} &= \text{probabilidade de passagem de seca para seca} = 1/2.
\end{aligned}$$

A matriz de transição de probabilidades é,

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & S \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ S \end{array} & \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Usemos a notação,

$$\begin{aligned} p_c^0 &= \text{probabilidade inicial de chuva}, \\ p_s^0 &= \text{probabilidade inicial de seca}, \\ p_c^n &= \text{probabilidade de chuva no n-ésimo período}, \\ p_s^n &= \text{probabilidade de seca no n-ésimo período}. \end{aligned}$$

Supondo conhecidas as probabilidades iniciais $p_c^0$ e $p_s^0$, temos:

$$\begin{aligned} p_c^1 &= p_{cc}p_c^0 + p_{cs}p_s^0 = \frac{1}{4}p_s^0 + \frac{1}{2}p_s^0 \\ p_s^1 &= p_{sc}p_c^0 + p_{ss}p_s^0 = \frac{3}{4}p_c^0 + \frac{1}{2}p_s^0. \end{aligned}$$

Daí temos,

$$\begin{bmatrix} p_c^1 \\ p_s^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}p_c^0 + \frac{1}{2}p_s^0 \\ \frac{3}{4}p_c^0 + \frac{1}{2}p_s^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_c^0 \\ p_s^0 \end{bmatrix}.$$

Denotemos $X_n = \begin{bmatrix} p_c^n \\ p_s^n \end{bmatrix}$, daí $X_1 = \begin{bmatrix} p_c^1 \\ p_s^1 \end{bmatrix}$, $X_0 = \begin{bmatrix} p_c^0 \\ p_s^0 \end{bmatrix}$, logo

$$X_1 = T \cdot X_0.$$

Analogamente,

$$X_2 = TX_1 = T(TX_0) = T^2X_0, \quad X_3 = TX_2 = T(T^2X_0) = T^3X_0 \ldots$$

Em geral obtemos,

$$X_n = T^nX_0.$$

Considerando inicialmente $p_c^0 = 4/5, p_s^0 = 1/5$, temos no quarto período:

$$X_4 = T^4X_0 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}.$$

Portanto no quarto período a probabilidade de ter chuva é 0,4 e a de ter seca é de 0,6.

O comportamento do clima a longo prazo poderá ser previsto, caso os elementos da matriz $T^n$ se aproximem dos elementos de uma matriz fixa $P$. Caso contrário não poderemos fazer previsão a longo prazo, pois o processo modificará bastante a cada passo. Existem condições sob as quais podemos saber se $T$ terá esta propriedade ou não, mas não vamos abordar isso neste exemplo.

**Matriz Inversa**

Seja $A$ uma matriz de ordem $m \times n$.

- $A$ é dita ***invertível à direita***, se existir uma matriz $B$ de ordem $n \times m$, tal que $AB = I_m$.
- $A$ é dita ***invertível à esquerda***, se existir uma matriz $C$ de ordem $n \times m$, tal que $CA = I_n$.
- Se $A$ é quadrada de ordem $n$, $A$ é ***invertível***, quando e existe uma matriz $B = A^{-1}$, ~~assim~~ tal que,

  $$AA^{-1} = \boxed{A^{-1}A = I_n.}$$

  Para ser invertível é suficiênte que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$. Neste caso $B = A^{-1}$ é dita inversa de $A$

**Exemplos 1.26.**

1. A matriz identidade de ordem $n$ é invertível pois $I_nI_n = I_n$. A matriz nula não é invertível.
2. Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível e sua inversa é a

mxm .....= mxm

matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. De fato,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja $A$ é invertível e $A^{-1} = B$.

3. A inversa a esquerda de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, pois $B \cdot A = I_2$.

A inversa a direita de $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ é $D = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pois $C \cdot D = I_2$.

4. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível, se e somente se, $\triangle = ad - bc \neq 0$. Neste caso $A^{-1} = \dfrac{1}{\triangle}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

De fato se $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ é a inversa de $A$, então:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

. Daí temos os sistemas:

$$\begin{cases} ax+bz &= 1 \\ cx+dz &= 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ay+bw &= 0 \\ cy+dw &= 1. \end{cases}$$

No primeiro sistema:

$$\begin{cases} ax+bz &= 1 \\ cx+dz &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} acx+bcz &= c \\ acx+adz &= 0 \end{cases} \Rightarrow (ad-bc)z = -c,$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+bz & = & 1 \\ cx+dz & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} adx+bdz & = & d \\ bcx+bdz & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow (ad-bc)x = d.$$

Analogamente, do segundo sistema,

$$(ad-bc)y = -b \text{ e } (ad-bc)z = a.$$

Logo, o sistema terá solução se e somente se $\triangle = ad - bc \neq 0$ e:

$$x = \frac{d}{\triangle}, \quad z = \frac{-c}{\triangle},$$

analogamente

$$y = \frac{-b}{\triangle} \qquad w = \frac{a}{\triangle}.$$

Portanto $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\triangle}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, então $\triangle = 2 - (-1) = 3$, portanto $A$ é invertível e $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

**Propriedades 1.27.** Dados $A$ e $B$ matrizes invertíveis, $k \neq 0$ escalar e $m$ inteiro positivo, temos

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$
5. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

*Demonstração.*

2. Segue de: $(kA)(\frac{1}{k}A^{-1}) = (k \cdot \frac{1}{k})(AA^{-1}) = I$

3. Segue de: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$

5. Segue de: $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I$.

$\square$

**Exemplo 1.28.** Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Mostre que $A$ é invertível e resolva a equação: $I + AX^t = A^2$.

**Solução.** A matriz $A$ é invertível pois $\triangle = (3)(-1) - (2)(1) = -5 \neq 0$
Aplicando as propriedades das matrizes na equação, temos:

$$\begin{aligned} I + AX^t = A^2 &\Leftrightarrow AX^t = A^2 - I \\ &\Leftrightarrow A^{-1}AX^t = A^{-1}(A^2 - I) \\ &\Leftrightarrow X^t = A - A^{-1} \\ &\Leftrightarrow X = (A - A^{-1})^t. \end{aligned}$$

Sendo $A^{-1} = \dfrac{-1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned} X &= \left( \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \right)^t = \left( \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right)^t \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}^t \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$