SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
19e Augusti, 2021

Skrivtid: 14:00-17:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: John Andersson and Henrik Shahgholian

Tentamen består av tre delar; A, B och C, som vardera ger maximalt 12 poäng. Dina bonuspoäng adderas till del A, men den totala poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt, och antalet erhållna bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Del A.

Fråga A1. Låt

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} + 4y.$$

a) Skissa några representativa nivåkurvor till funktionen $f(x, y)$. **2 p.**

b) Beräkna en enhetsnormal till nivåkurvan $f(x, y) = 5$ i punkten $(1, 1)$ **2 p.**

Lösningsförslag Fråga A1a) Låt oss betrakta nivåkurvan

$$\frac{x^2}{y} + 4y = a \Leftrightarrow x^2 + 4\left(y - \frac{a}{8}\right)^2 = \frac{a^2}{16}.$$

Vi ser att nivåkurvan är en ellips med centrum i $(x, y) = (0, a/8)$ med storaxel $a/4$ och lillaxel $a/8$. Nivåkurvorna är därför ellipser som alla är centrerade på $y-$axeln, tangerar $x-$axeln i origo samt är dubbelt så breda som höga.

Vi kan skissa några representativa nivåkurvor enligt följande:

A1b) En normal i punkten $(1, 1)$ ges av

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{2x}{y}, -\frac{x^2}{y^2} + 4 \right) \Big|_{(1,1)} = (2, 3).$$

Eftersom vi vill ha en enhetsnormal så delar vi med $|(2, 3)| = \sqrt{13}$. Detta ger följande svar:

Svar Fråga A1b) En enhetsnormal till nivåkurvan i $(1, 1)$ ges av $\frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3)$.

Fråga A2a. Avgör vilka av följande mängder som är öppna, slutna eller varken öppna eller slutna. Ingen motivering krävs.

i) Mängden av alla punkter (x, y) i planet så att $x > 3$ och $y \leq x$.

ii) Mängden av alla punkter i planet så att $f(x, y) = \frac{3+x}{x^2+y^2}$ är definierad och $|f(x, y)| \geq 4$.

iii) Mängden av alla punkter i $\mathbb{R}^3$ så att $x^2 + z + \sin(y) = 16$.

vi) Mängden av alla punkter (x, y) i planet så att $x^2 + y^2 \leq 1$ och $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} < 4$.

2 p. Fyra rätt ger 2 poäng, tre rätt ger 1 poäng och två eller färre rätt ger 0 poäng.

b) Parametrisera skärningen mellan mängderna i $\mathbb{R}^3$ som ges av $x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2 = z^2$ och $x + y + 2z = 2$. **2 p.**

Lösningsförslag Fråga A2a) Vi får (Kommentarer i parentes är inte nödvändiga för poäng utan endast där som förklaring.)

i) Varken öppen eller sluten.

ii) Varken öppen eller sluten (Detta eftersom punkten $(x, y) = (0, 0)$ inte ligger i mängden.)

iii) Sluten. (Komplementet till mängden är öppen eftersom om (x, y, z) inte uppfyller ekvationen så finns det en liten omgivning av (x, y, z) som inte heller gör det eftersom $x^2 + z + \sin(y)$ är kontinuerlig.)

vi) Sluten. (Observera att den strikta olikheten inte behövs då mängden av alla punkter som uppfyller den första likheten uppfyller den strikta olkheten så mängden karakteriseras av $x^2 + y^2 \leq 1$ vilket ger en sluten mängd.)

A2b) Sätt in $z = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$ i $x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2 = z^2$ ger

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 + x + y = 1.$$

Vi kan skriva om detta som

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}.$$

Vilket är en cirkel i $(x, y)-$planet. Vi kan parametrisera

$$x(t) = \frac{\sqrt{20}}{3}\cos(t) - \frac{2}{3} \quad \text{och} \quad y(t) = \frac{\sqrt{20}}{3}\sin(t) - \frac{2}{3},$$

där $t \in [0, 2\pi)$. Om vi sätter in detta i $z = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$ så får vi

$$z(t) = -\frac{\sqrt{5}}{3}\cos(t) - \frac{\sqrt{5}}{3}\sin(t) + \frac{5}{3}.$$

Svar Fråga A2b) En parametrisering ges av

$$x(t) = \frac{\sqrt{20}}{3}\cos(t) - \frac{2}{3},$$
$$y(t) = \frac{\sqrt{20}}{3}\sin(t) - \frac{2}{3}$$

och

$$z(t) = -\frac{\sqrt{5}}{3}\cos(t) - \frac{\sqrt{5}}{3}\sin(t) + \frac{5}{3},$$

där $t \in [0, 2\pi)$.

Fråga A3. Låt K vara kroppen som ges av

$$x^2 + y^2 + |z| \leq 1.$$

a) Skriv området i cylindriska koordinater. För poäng krävs exakta gränser. **1 p.**

b) Beräkna integralen

$$\iiint_K (x^2 + y^2 + z^2)dV.$$

3 p.

Lösningsförslag Fråga A3a) Vi kan beskriva kroppen

$$-1 \leq z \leq 1,$$
$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ och}$$
$$0 \leq r \leq \sqrt{1 - |z|},$$

där (r, θ, z) är cylindriska koordinater

$$x = r\cos(\theta),$$
$$y = r\sin(\theta) \text{ och}$$
$$z = z.$$

A3b) Vi skriver integralen i cylinderkoordinater

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-|z|}}\int_{0}^{2\pi}(r^2 + z^2)rd\theta drdz = 2\pi\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-|z|}}(r^2 + z^2)rdrdz =$$

$$4\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} (r^2+z^2) r dr dz,$$

där vi använde att integranden är jämn över ett jämt intervall i z i den sista likheten, samt $|z| = z$ då $z \geq 0$.

Vi kan fortsätta vår beräkning

$$4\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} (r^2+z^2) r dr dz = 4\pi \int_0^1 \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2 z^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{1-z}} dz =$$

$$4\pi \int_0^1 \left(\frac{(1-z)^2}{4} + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2}\right) dz = 4\pi \left[-\frac{(1-z)^3}{12} + \frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

Svar Fråga A3b) $\iiint_K (x^2+y^2+z^2) dV = \frac{1}{8}$

Del B.

Fråga B1. En bagare bakar bröd av två sorter: vanligt bröd och ekologiskt bröd. Bagaren kan maximalt baka V limpor vanligt bröd och E limpor ekologiskt bröd där

$$\frac{4}{3}E + V = 200.$$

Den vinst profit ($P(E,V)$) bagaren gör om han bakar V limpor vanligt och E limpor ekologiskt bröd ges av formeln

$$P(E,V) = 3E + 2V - \frac{E^2}{75} - \frac{EV}{150} - \frac{V^2}{75}.$$

Bestäm hur många limpor vanligt respektive ekologiskt bröd som bagaren skall baka för att göra maximal vinst. **6 p.**

Lösningsförslag Fråga B1) Detta är ett maximeringsproblem där vi ska maximera profiten (P)

$$P(E,V) = 3E + 2V - \frac{E^2}{75} - \frac{EV}{150} - \frac{V^2}{75}$$

under bivillkoren

$0 \leq E$,
$0 \leq V$ och
$\frac{4}{3}E + V \leq 200$.

INRE PUNKTER: Eftersom P är ett polynom och därför differentierbar så kan maximum punkter i det inre av området endast inträffa då

$$(0,0) = \nabla P(E,V) = \left(3 - \frac{2E}{75} - \frac{V}{150}, 2 - \frac{E}{150} - \frac{2V}{75}\right).$$

Det är lätt att lösa detta ekvationssystem och se att det enda möjliga maximum i det inre inträffar då $(E,V) = (100,50)$ (vilket ligger i området eftersom $\frac{4}{3}100 + 50 < 200$) vilket ger ett möjligt maximumvärde

$$P(100,50) = 200.$$

RANDPUNKTER DÅ $E = 0$: På randen $E = 0$ och $0 \leq V \leq 200$ så är

$$P(0,V) = 2V - \frac{V^2}{75}.$$

Vifår möjliga maximum då $V = 0$ vilket ger $P(0,0) = 0$, $V = 200$ då $P(0,200) = -\frac{400}{3} < 0$ eller i punkter där

$$0 = \frac{\partial P(0,V)}{\partial V} = 2 - \frac{2V}{75} \Rightarrow V = 75.$$

När $(E, V) = (0, 75)$ så blir profiten

$$P(0, 75) = 75 < 200.$$

Vi kan sluta oss till att maximum inte inträffar på den del av randen där $E = 0$.

RANDPUNKTER DÅ $V = 0$: Detta är helt analogt med föregående fall. När $V = 0$ och $0 \leq E \leq 150$ så kan maximum inträffa då

$$(E, V) = (0, 0) \Rightarrow P(0, 0) = 0 < 200,$$
$$(E, V) = (150, 0) \Rightarrow P(150, 0) = 150 < 200$$

eller då

$$0 = \frac{\partial P(E, 0)}{\partial E} = 3 - \frac{2E}{75} \Rightarrow E = \frac{225}{2} \in (0, 150).$$

Det sista fallet ger

$$P\left(\frac{225}{2}, 0\right) = \frac{225}{2} < 200.$$

Vi ser därför att max inte inträffar pe den del av randen där $V = 0$ heller.

RANDPUNKTER DÅ $V = 200 - \frac{4}{3}E$: På den delen av randen kommer $0 \leq V \leq 200$ vilket ger

$$P\left(E, 200 - \frac{4}{3}E\right) = -\frac{400}{3} + \frac{55}{9}E - \frac{13}{225}E^2.$$

Vi har redan kollat att maximum inte inträffar då $E = 0$ eller då $E = 150$. Det återstår därför bara att kontrollera om maximum inträffar i någon inre punkt av den delen av randen, d.v.s. om

$$0 = \frac{dP\left(E, 200 - \frac{4}{3}E\right)}{dE} = \frac{55}{9} - \frac{26}{225}E \Rightarrow E = \frac{25 \cdot 55}{26}.$$

Om vi sätter in detta i uttrycket för P så får vi

$$P\left(\frac{25 \cdot 55}{26}, 200 - \frac{4}{3}\frac{25 \cdot 55}{26}\right) = -\frac{400}{3} + \frac{55}{9}\frac{25 \cdot 55}{26} - \frac{13}{225}\left(\frac{25 \cdot 55}{26}\right)^2 =$$

$$-\frac{400}{3} + \frac{25 \cdot 55^2}{4 \cdot 9 \cdot 13} = \frac{25}{3}\left(\frac{55^2}{4 \cdot 3 \cdot 13} - 16\right).$$

Vi måste undersöka om detta är mindre än 200, vilket är detsamma som om

$$\frac{55^2}{4 \cdot 3 \cdot 13} - 16 < 3 \cdot 8 \Rightarrow \frac{55^2}{12 \cdot 13} < 40.$$

Vi ser direkt att detta gäller eftersom

$$\frac{55^2}{12 \cdot 13} < \frac{60^2}{12^2} = 5^2 = 25 < 40.$$

Det inträffar alltså inget maximum på den delen av randen heller.

Svar Fråga B1: Maximum inträffar då $(E, V) = (100, 50)$ och är då $P(100, 50) = 200$.

Fråga B2. Låt en yta i $\mathbb{R}^4$, med koordinater (x, y, u, v), definieras av följande ekvationer

$$\begin{aligned} &x = u + v^3, \\ &y = uv + u + v, \\ &-\infty < u < \infty, \\ &-\infty < v < \infty. \end{aligned} \qquad (1)$$

a) På ytan, i en liten omgivning av $(x, y, u, v) = (1, 1, 0, 1)$, så bestämmer ekvationerna (1) u och v som funktioner av x och y (du behöver inte visa detta). Beräkna $\frac{\partial u}{\partial x}$ och $\frac{\partial u}{\partial y}$ i punkten $(x, y, u, v) = (1, 1, 0, 1)$.

3 p.

b) Medelst en linjärapproximation kring $(x, y) = (1, 1)$ beräkna ett approximativt värde av u i den punkten på ytan där $x = 1.01$ och $y = 1.01$. **3 p.**

Lösningsförslag Fråga B2a) Det är givet att vi kan skriva u och v som funktioner av x och y så vi kan skriva

$$\begin{aligned} &x = u(x, y) + v(x, y)^3 \text{ och} \\ &y = u(x, y)v(x, y) + u(x, y) + v(x, y). \end{aligned}$$

Om vi deriverar med avseende på x så får vi att

$$\begin{aligned} &1 = u_x(x, y) + 3v(x, y)^2 v_x(x, y) \text{ och} \\ &0 = u_x(x, y)v(x, y) + u(x, y)v_x(x, y) + u_x(x, y) + v_x(x, y). \end{aligned} \tag{2}$$

Om vi använder att $(u, v) = (0, 1)$ då $(x, y) = (1, 1)$ så får vi att

$$\begin{aligned} &1 = u_x(1, 1) + 3v_x(1, 1) \text{ och} \\ &0 = 2u_x(1, 1) + v_x(1, 1). \end{aligned}$$

Om vi subtraherar tre gånger den andra ekvationen från den första och delar med -5 så får vi

$$u_x(1, 1) = -\frac{1}{5}.$$

Om vi deriverar (2) md avseende på y och sätter in $(x, y, u, v) = (1, 1, 0, 1)$ så får vi

$$\begin{aligned} &0 = u_y(1, 1) + 3v_y(1, 1) \text{ och} \\ &1 = 2u_y(1, 1) + v_y(1, 1). \end{aligned}$$

Om vi subtraherar tre gånger den andra ekvationen från den första och delar med -5 så får vi

$$u_y(1, 1) = \frac{3}{5}.$$

Svar Fråga B2a: Vi får att $u_x(1, 1) = -\frac{1}{5}$ och $u_y(1, 1) = \frac{3}{5}$.

B2b) Vi använder linjärapproximationen

$$u(x, y) \approx u(1, 1) + u_x(1, 1)(x - 1) + u_y(1, 1)(y - 1).$$

Om vi sätter in beräkningarna från $a-$delen av uppgiften och sätter in $x = 1.01$ samt $y = 1,01$ så får vi

$$u(1.01, 1.01) \approx 0 - \frac{1}{5} \cdot 0.01 + \frac{3}{5} \cdot 0.01 = 0.004.$$

Svar Fråga B2b: En linjärapproximation ger att $u(1.01, 1.01)$ är 0.004.

Del C.

Fråga C1. a) Hitta en vektorpotential $\mathbf{A}$ till till vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(- zx\sin(xy) - y\cos(z), -x\sin(z) + yz\sin(xy), 1\big)$$

2 p.

b) Beräkna integralen

$$\iint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$$

där $\mathcal{C}$ är ytan

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 = z^2 \\ &0 \leq z \leq \pi \end{aligned}$$

och $\mathbf{N}$ är enhetsnormalen som pektar bort från $z-$axeln. **4 p.**

Lösningsförslag C1a) Om vi skriver $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ så kommer $\text{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$ att komponentvis bli

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} &= -xz\sin(xy) - y\cos(z), \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} &= -x\sin(z) + yz\sin(xy) \text{ och} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} &= 1. \end{aligned}$$

Genom att betrakta ekvationerna en stund så ser vi att liknande termer dyker upp i högerledet. Vi kommer därför att skriva $\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^2$ där

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3^1}{\partial y} - \frac{\partial A_2^1}{\partial z} &= -xz\sin(xy), \\ \frac{\partial A_1^1}{\partial z} - \frac{\partial A_3^1}{\partial x} &= yz\sin(xy) \text{ och} \\ \frac{\partial A_2^1}{\partial x} - \frac{\partial A_1^1}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3^2}{\partial y} - \frac{\partial A_2^2}{\partial z} &= -y\cos(z), \\ \frac{\partial A_1^2}{\partial z} - \frac{\partial A_3^2}{\partial x} &= -x\sin(z) \text{ och} \\ \frac{\partial A_2^2}{\partial x} - \frac{\partial A_1^2}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3^3}{\partial y} - \frac{\partial A_2^3}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial A_1^3}{\partial z} - \frac{\partial A_3^3}{\partial x} &= 0 \text{ och} \\ \frac{\partial A_2^3}{\partial x} - \frac{\partial A_1^3}{\partial y} &= 1. \end{aligned}$$

Vi kan se att lösningarna är

$$\mathbf{A}^1 = [0, 0, z\cos(xy)],$$
$$\mathbf{A}^2 = [x\cos(z), y\sin(z), 0]$$

samt

$$\mathbf{A}^3 = [-y, 0, 0].$$

Svar Fråga C1a: En vektorpotential ges av

$$\mathbf{A}(x, y, z) = [x\cos(z) - y, y\sin(z), z\cos(xy)]$$

C1b) Att $\text{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$ tillsammans med Stokes sats ger att

$$\iint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{\mathcal{C}} \text{rot}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{N} dS = \int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där γ är randkurvan som parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t), -\sin(t), \pi) \text{ för } 0 \leq t < 2\pi.$$

Vi har valt parametriseringen av randkurvan enligt högerhandsregeln. Det är också värt att påpeka att $\mathcal{C}$ har en singularitet i origo. Men eftersom $\text{rot}(\mathbf{A})$ är begränsad och ytan bara har en singulär punkt så kan vi ändå använda Stokes sats.

Vi beräknar

$$\int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} =$$

$$\int_0^{2\pi} [\cos(t)\cos(\pi) + \sin(t), -\sin(t)\sin(\pi), \pi\cos(-\cos(t)\sin(t))] \cdot (-\sin(t), -\cos(t), 0) dt =$$

$$\int_0^{\pi} (\sin(t)\cos(t) - \sin^2(t)) dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin(2t) + (1 - \cos(2t))) dt = \pi.$$

Svar Fråga C1: $\iint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \pi.$

Fråga C2. Låt K vara området som ges av

$$\begin{gathered}0 \le x \le 10\\ 0 \le y \le 10\\ y \ge 10 - x\end{gathered}$$

och låt $\mathbf{F}(x, y)$ vara ett kontinuerligt deriverbart vektorfält definierat på K.

a) Använd divergenssatsen i planet för att skriva om integralen

$$\iint_K \operatorname{div}(\mathbf{F}) dA$$

till en integral över randen av K. **1 p.**

b) Bevisa divergenssatsen för detta område K. För poäng så skall ditt bevis vara fullständigt. **5 p.**

Lösningsförslag Fråga C2a) Divergenssatsen säger att om $\mathbf{F}$ är ett kontinuerligt deriverbart vektorfält på K (inklusive randen till K) där K är en domän med väldefinierad normal på randen så kommer

$$\iint_K \operatorname{div}(\mathbf{F}) dA = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma \tag{3}$$

där $\mathbf{N}$ är enhetsnormalen som pekar ut ur K, γ är randen till K och $d\sigma$ är ett längdelement av randen.

C2b) Randen till K har tre delar γ_1, γ_2 och γ_3 som parametriseras av respektive

$$\mathbf{r}_1(t) = (t, 10) \quad \text{för } 0 \le t \le 10,$$

$$\mathbf{r}_2 = (10, t) \quad \text{för } 0 \le t \le 10$$

samt

$$\mathbf{r}_3 = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 10 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{för } 0 \le t \le 10\sqrt{2},$$

där vi har parametriserat så att $\left|\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right| = 1$ för $i = 1, 2, 3$. Enhetsnormalen som pekar ut ur K längs γ_i är

$$\mathbf{N}_1 = (0, 1),\ \mathbf{N}_2 = (1, 0) \text{ samt } \mathbf{N}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1).$$

Vi kan därför skriva högerledet i (3) som

$$\int_0^{10} F_2(t, 10) dt + \int_0^{10} F_1(10, t) dt + \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{10\sqrt{2}} \left(-F_1\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 10 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - F_2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 10 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right) dt.$$

Vi måste visa att detta är lika med vänsterled i (3).

Vi börjar med att skriva om i (3) vänsterled med hjälp av itererade integraler

$$\iint_K \operatorname{div}(\mathbf{F}) dA = \int_0^{10} \left[\int_{10-y}^{10} \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} dx\right] dy + \int_0^{10} \left[\int_{10-x}^{10} \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} dy\right] dx, \tag{5}$$

där vi har valt integrationsordningen olika i de två integralerna vilket är tillåtet då $\mathbf{F}$ är kontinuerligt deriverbar.

Vi kan använda analysens huvudsats på de inre integralerna i (5) vilket ger

$$\int_0^{10} \left[F_1(10, y) - F_1(10 - y, y)\right] dy + \int_0^{10} \left[F_2(x, 10) - F_2(x, 10 - x)\right] dx =$$

$$(6) \qquad \int_0^{10} F_1(10,t)dt + \int_0^{10} F_2(t,10)dt - \int_0^{10} F_1(10-s,s)ds - \int_0^{10} F_2(s,10-s)ds,$$

där vi har bytt namnen på integrationsvariablerna i den sista olikheten.
Genom att göra variabelbytet $s = 10 - \frac{t}{\sqrt{2}}$ i den näst sista integralen i (6) så får vi

$$-\int_0^{10} F_1(10-s,s)ds = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{10\sqrt{2}} F_1\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 10 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) dt$$

och variabelbytet $s = \frac{t}{\sqrt{2}}$ i den sista integralen i (6) så får vi

$$-\int_0^{10} F_2(s,10-s)ds = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{10\sqrt{2}} F_2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 10 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) dt.$$

Om vi använder dessa variabelbyten i (6) så får vi att

$$\int_0^{10} \left[F_1(10,y) - F_1(10-y,y)\right] dy + \int_0^{10} \left[F_2(x,10) - F_2(x,10-x)\right] dx =$$

$$\int_0^{10} F_2(t,10)dt + \int_0^{10} F_1(10,t)dt +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{10\sqrt{2}} \left(-F_1\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 10 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - F_2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 10 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right) dt.$$

Detta är exakt lika med randintegralen i (4) vilket är det vi ville visa.