SF1626 Flervariabelanalys
Exam
15e Mars 2021

Tid: 8:00-11:00
Inga hjälpmedel är tillåtna!
Examinator: John Andersson and Henrik Shahgholian

Del A.

Fråga A1. Betrakta ytan i $\mathbb{R}^3$ som definieras av ekvationen

$$(x+y)^2 + (2x-y)^2 + z^2 = 9.$$

a) Hitta en normalvektor till ytan i punkten $(1,-1,0)$.

[2 poäng]

b) Hitta en ekvation för tangentplanet till ytan i punkten $(1,-1,0)$.

[2 poäng]

Lösningsförslag Fråga A1:
a) Ytan är en nivåyta till funktionen

$$f(x,y,z) = (x+y)^2 + (2x-y)^2 + z^2.$$

Vi vet att en normal till nivåytan som går genom punkten $(1,-1,0)$ ges av $\nabla f(1,-1,0)$. Vi beräknar

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right) =$$
$$\big(2(x+y) + 4(2x-y), 2(x+y) - 2(2x-y), 2z\big) =$$
$$\big(10x - 2y, -2x + 4y, 2z\big).$$

Sätter vi in $(x,y,z) = (1,-1,0)$ i gradienten får vi svaret $(12,-6,0)$.
Svar fråga A1a: En normal ges av $\nabla f(1,-1,0) = (12,-6,0)$.

b) En tangents ekvation i en punkt (a,b,c) ges av

$$\nabla f(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0.$$

Om vi sätter in våra värden $(a,b,c) = (1,-1,0)$ i detta så får vi ekvationen för ett tangentplan.

Svar fråga A1b: En ekvation för tangentplanet är

$$12(x-1) - 6(y+1) = 0, \qquad \text{dvs} \qquad 2x - y = 3.$$

Fråga A2. Positionen för en partikel vid tidpunkten $t \geq 0$ beskrivs av

$$\mathbf{r}(t) = \big(2\cos(2t), A\sin(2t), 4t\big),$$

där $A \geq 0$ är ett reellt tal.

a) Beräkna partikelns hastighet och fart som funktioner av tiden t. Observera att ditt svar ska innehålla den obestämda konstanten A.

[2 poäng]

b) Välj konstanten A så att partikelns hastighet och acceleration är ortogonala mot varandra.

[2 poäng]

Lösningsförslag Fråga A2:
a) Hastigheten ges av $\mathbf{r}'(t)$. Vi beräknar

$$\mathbf{r}'(t) = \big(-4\sin(2t), 2A\cos(2t), 4\big).$$

Farten ges av $|\mathbf{r}'(t)|$. Detta ger

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{16\sin^2(2t) + 4A^2\cos^2(2t) + 16}.$$

Svar fråga A2a: Hastigheten av partikeln i tiden t ges av

$$\big(-4\sin(2t), 2A\cos(2t), 4\big).$$

Farten är $\sqrt{16\sin^2(2t) + 4A^2\cos^2(2t) + 16}$.

b) Accelerationen av partikeln är

$$\mathbf{r}''(t) = \big(-8\cos(2t), -4A\sin(2t), 0\big) = 2\big(-4\cos(2t), -2A\sin(2t), 0\big).$$

Om hastigheten är ortogonal mot accelerationen så måste $\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t) = 0$ d.v.s.

$$0 = \big(-2\sin(2t), A\cos(2t), 2\big)\cdot\big(-4\cos(2t), -2A\sin(2t), 0\big) =$$

$$8\sin(2t)\cos(2t) - 2A^2\sin(2t)\cos(2t) + 2\cdot 0 = 2\sin(2t)\cos(2t)(4 - A^2).$$

Detta innebär att $A = \pm 2$, men i uppgiftsformuleringen så har vi specifikationen att $A \geq 0$ så $A = 2$.

Svar Fråga A2b: Konstanten $A = 2$.

Fråga A3. Betrakta trippelintegralen

$$\iiint_K \frac{z}{2 + x^2 + y^2}dV,$$

där K är området som definieras av $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ och $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.
a) Skriv om området K i cylindriska koordinater.

[1 poäng]

b) Skriv om integralen i cylindriska koordinater.

[1 poäng]

c) Beräkna integralen.

[2 poäng]

Lösningsförslag Fråga A3:
a) I cylindriska koordinater (r, θ, z) så är $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ och $z = z$, där $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ och $-\infty < z < \infty$. Vidare så ger trigonometriska ettan att $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Detta gör att $z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ i kartesiska koordinater motsvarar $z \geq r$ is cylinder koordinater.
På samma sätt så motsvarar $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ i kartesiska koordinater att $r^2 + z^2 \leq 9$. Om vi tar hänsyn till att $z \geq r \geq 0$ så får vi att $r \leq z \leq \sqrt{9 - r^2}$.
Eftersom $0 \leq r \leq z \leq \sqrt{9 - r^2}$ så måste $r \leq \sqrt{9 - r^2}$ vilket betyder att $0 \leq r \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Svar Fråga A3a: I cylindriska koordinater så ges mängden K av

$$\begin{aligned}&0 \le \theta < 2\pi,\\ &0 \le r < \tfrac{3}{\sqrt{2}},\\ &r \le z \le \sqrt{9-r^2}.\end{aligned}$$

b) I cylinder koordinater så är $dV = rdzdrd\theta$ så integralen blir

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\int_r^{\sqrt{9-r^2}} \frac{zr}{2+r^2}dzdrd\theta.$$

c) Vi börjar med att beräkna integralen i θ, därefter med avseende på z och slutligen m.a.p. r, och får då

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\int_r^{\sqrt{9-r^2}} \frac{zr}{2+r^2}dzdrd\theta = 2\pi\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\int_r^{\sqrt{9-r^2}} \frac{zr}{2+r^2}dzdr =$$

$$2\pi\int_0^{3/\sqrt{2}}\left[\frac{z^2r}{2(2+r^2)}\right]_r^{\sqrt{9-r^2}}dr = \pi\int_0^{3/\sqrt{2}}\frac{9r-2r^3}{2+r^2}dr =$$

$$\pi\int_0^{3/\sqrt{2}}\left(\frac{13r}{2+r^2}-2r\right)dr = \left[\frac{13\pi}{2}\ln|2+r^2| - \pi r^2\right]_0^{3/\sqrt{2}} =$$

$$\frac{13\pi}{2}\ln\left(\frac{13}{4}\right) - \frac{9\pi}{2}.$$

Svar Fråga A3c: Integralens värde är $\frac{13\pi}{2}\ln\left(\frac{13}{4}\right) - \frac{9\pi}{2}$.

Del B.

Fråga B1. Låt D vara det begränsade området i första kvadranten i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av kurvorna

$$x^2+16y^2=16, \quad x^2+16y^2=1, \quad x=y$$

samt den positiva $y-$axeln.

a) Beskriv D i $(u,v)-$planet då $u = x^2+16y^2$ och $v = \frac{y}{x}$.

[2 poäng]

b) Beräkna jacobianen för transformationen ovan.

[2 poäng]

c) Beräkna integralen

$$\int\int_D \frac{y}{x}dA.$$

[2 poäng]

Lösningsförslag Fråga B1:

a) Vi får direkt $1 \le u \le 16$. Vidare, eftersom $x, y \ge 0$ och området ligger över $y = x$ så kommer $v = \frac{y}{x} \ge 1$.

Svar Fråga B1a: I $(u,v)-$koordinater så beskrivs området av $1 \le u \le 16$ och $1 \le v$.

b) För att beräkna integralen så måste vi först beräkna Jacobianen som är

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 32y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 + 32\frac{y^2}{x^2} = 2 + 32v^2.$$

Svar Fråga B1b: Jacobianen är $2 + 32v^2$.

c) Vi beräknar, där vi använder att ett areaelement i (u, v)-koordinater ges av

$$\frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} dudv = \frac{1}{2 + 32v^2} dudv,$$

den generaliserade integralen

$$\int\int_D \frac{y}{x} dA = \int_1^{\infty} \int_1^{16} \frac{v}{2 + 32v^2} dudv =$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \int_1^{16} \frac{v}{2 + 32v^2} dudv = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{15v}{2 + 32v^2} dv =$$

$$\lim_{R\to\infty} \left[\frac{15}{64} \ln(2 + 32v^2)\right]_1^R = \lim_{R\to\infty} \frac{15}{64} \ln\left(\frac{1 + 16R^2}{17}\right) = \infty.$$

Så den generaliserade integralen divergerar.

Svar Fråga B1c Integralen är divergent.

Fråga B2. En snickare vill tillverka en låda med volym $1m^3$. Lådan har sidorna parallella med koordinatplanen och sidlängderna ges av x, y och z,

$$0 \le x \le 10, \quad 0 \le y \le 10 \quad 0 \le z \le 10.$$

Lådans framsida och ovansida skall tillverkas i ett fint träslag som kostar $900kr/m^2$ och undersidan och de övriga sidorna tillverkas av ett billigare träslag som kostar $300kr/m^2$. Snickaren vill välja sidlängderna så att kostnaden blir så låg som möjligt.

a) Formulera snickarens problem matematiskt som ett minimeringsproblem med bivillkor.

[2 poäng]

b) Använd Lagrange multiplikatormetod för att lösa minimeringsproblemet i a) delen av uppgiften. Andra metoder ger inga poäng.

[4 poäng]

Lösningsförslag Fråga B2:

a) Volymen är lika med 1 vilket ger $xyz = 1$. Om vi säger att framsidan av lådan är den sida med sidlängder x och z så blir kostnaden för framsidan $900xz$, kostnaden för toppen blir $900xy$. Totala kostnaden för det dyra materialet blir $900xz + 900xy$.

Arean av de övriga sidorna är: botten xy, baksidan xz och de två andra sidorna har arean yz. Detta ger att kostnaden för det billiga materialet är $300xy + 300xz + 2 \cdot 300yz$.

Totala kostnaden blir därför, mätt i kr,

$$900xz + 900xy + 300xy + 300xz + 600yz = 1200yx + 1200zx + 600yz.$$

Om vi också tar hänsyn till bivillkoren att $0 \le x, y, z \le 10$ så får vi minimeringsproblemet (och vårt **Svar Fråga B1b**:

Minimera $f(x, y, z) = 1200yx + 1200zx + 600yz$ under bivillkoren
$xyz = 1$ och
$0 \le x, y, z \le 10$.

b) Eftersom $f(x, y, z)$ är kontinuerlig och området är slutet så existerar ett minimum. Vi observerar att eftersom $x, y, z \leq 10$ och $xyz = 1$ så måste $x, y, z \geq \frac{1}{100} > 0$. Specifikt så kan vi dela med x, y och med z utan att riskera att dela med noll.

För att se om minimum inträffar för inre punkter, $0 < x, y, z < 10$, så använder vi Lagranges multiplikatormetod. Om ett minimum inträffar i en inre punkt så måste det finnas en Lagrange-multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ så att

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla(xyz).$$

Om vi skriver upp detta komponentvis så får vi

$$\left.\begin{array}{r} 1200y + 1200z = \lambda yz \\ 1200x + 600z = \lambda xz \\ 1200x + 600y = \lambda xy \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1200xy + 1200xz = \lambda xyz = \lambda \\ 1200xy + 600yz = \lambda xyz = \lambda \\ 1200xz + 600yz = \lambda xyz = \lambda, \end{array}\right. \tag{1}$$

där vi multiplicerade respektive rad med x, y och z (som alla är $\neq 0$ enligt första stycket i lösningen) samt använde att $xyz = 1$.

Om vi subtraherar 3e från 2a raden i (1) så får vi

$$1200(y - z)x = 0 \Rightarrow y = z,$$

där implikationen följer eftersom $x \neq 0$.

Om vi subtraherar 3e raden i (1) från den första raden så får vi

$$600(2x - y)z = 0 \Rightarrow y = 2x,$$

där vi använde att $z \neq 0$ och att $y = z$.

Vi får därför att $2x = y = z$. Insatt i $xyz = 1$ ger detta att

$$x = 2^{-\frac{2}{3}}, \quad y = z = 2^{\frac{1}{3}}.$$

Vi observerar att dessa värden uppfyller $0 \leq x, y, z \leq 10$ så ett möjligt minimum är

$$f(2^{-\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}) = 1800 \cdot 2^{2/3}. \tag{2}$$

Härnäst måste vi kolla randpunkter, då $x = 10$, $y = 10$ eller $z = 10$. Om $x = 10$ så får vi minimeringsproblemet

$$\begin{array}{l} \text{Minimera } g(y, z) = 12000(y + z) + 600yz \\ \text{När } 10yz = 1. \end{array}$$

Om vi sätter in $y = \frac{1}{10z}$ (kom ihåg att $z \neq 0$) i minimeringsfunktionen g så får vi att vi ska minimera

$$\frac{1200}{z} + 12000z + 60, \tag{3}$$

för $0 \leq z \leq 10$. Om vi deriverar (3) och sätter lika med noll för att hitta kritiska punkter så får vi att

$$-\frac{1200}{z^2} + 12000 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Så vi får ett möjligt minimivärde då $x = 10$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}$ och $z = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Sätter vi in dessa värden i $f(x, y, z)$ så får vi att

$$f\left(10, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 2400\sqrt{10} + 60 > 7200. \tag{4}$$

Om vi jämför detta med det möjliga minimum vi hade i (2) så ser vi direkt att

$$f(2^{-\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}) = 1800 \cdot 2^{2/3} < 3600 < 7200 < f\left(10, \frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{1}\sqrt{10}\right).$$

Så minimivärdet inträffar inte då $x = 10$.

På samma sätt måste vi undersöka när $y = 10$ och när $z = 10$. Men eftersom $f(x, y, z)$ är symmetrisk i y och z så räcker det med att undersöka det ena fallet, säg $y = 10$. Vi får då minimeringsproblemet

$$\begin{aligned}&\text{Minimera } h(x,z) = 12000x + 6000z + 1200xz\\ &\text{När } 10xz = 1.\end{aligned}$$

Vi fortsätter som i föregående fall och substituerar $z = \frac{1}{10x}$ i funktionen $h(x, z)$ och får då att vi ska minimera

$$12000x + \frac{600}{x} + 120, \tag{5}$$

under villkoret att $0 < x < 10$. Om vi deriverar (5) och sätter lika med noll för att hitta kritiska punkter så får vi

$$12000 - \frac{600}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Sätter vi in $x = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, $y = 10$ och $z = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $f(x, y, z)$ så får vi kostnaden

$$f\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, 10, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2400\sqrt{5} + 600 > 3600 > f(2^{-\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}).$$

Det följer att vi inte kan ha något minumum när $y = 10$ eller, p.g.a. symmetri, då $z = 10$.

Det sista fallet vi måste undersöka är om två av $x = 10$, $y = 10$ eller $z = 10$ är uppfyllda. Men eftersom $x, y, z > 0$ så kommer $f(x, y, z) > 1200xy$, $f(x, y, z) > 1200xz$ och $f(x, y, z) > 600yz$. D.v.s. om två av x, y eller z är lika med 10 så kommer $f(x, y, z) > 60000$. Vilket innebär att dessa inte är minimum.

Vi får därför svaret:

Svar Fråga B2b: Minimum inträffar då $x = 2^{-\frac{2}{3}}$, $\quad y = z = 2^{\frac{1}{3}}$ och är då

$$f(2^{-\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}) = 1800 \cdot 2^{2/3}.$$

Del C.

Fråga C1. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(y + 2xz, y + z, -2x - z^2\big)$$

ut genom den yta som ges av $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och $x, y, z > 0$. Normalriktningen till ytan pekar bort från origo.

[6 poäng]

Lösningsförslag Fråga C1: Vi kommer att använda Gauss sats på området

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 4,\ x, y, z > 0\}.$$

Randen till K består av fyra delar: först den yta vi vill beräkna flödet igenom

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x, y, z > 0\},$$

och därtill tre ytor som ligger i koordinatplanen

$$A_x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ y, z > 0 \text{ och } x = 0\},$$

$$A_y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x, z > 0 \text{ och } y = 0\}$$

samt

$$A_z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x, y > 0 \text{ och } z = 0\}.$$

Vi får, från Gauss sats, att

$$\text{(6)} \qquad \iiint_K \operatorname{div}(\mathbf{F}(x,y,z))dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\mathbf{S}+$$

$$\iint_{A_x} \mathbf{F}(x,y,z))\cdot(-1,0,0)dA+\iint_{A_y} \mathbf{F}(x,y,z))\cdot(0,-1,0)dA+\iint_{A_z} \mathbf{F}(x,y,z))\cdot(0,0,-1)dA.$$

Om vi beräknar $\operatorname{div}(F(x,y,z)) = 1$ och sätter in i (6) så får vi, efter att ha flyttat om termerna,

$$\iint_S \mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\mathbf{S} = \iiint_K dV + \iint_{A_x} ydA + \iint_{A_y} zdA - \iint_{A_z} 2xdA.$$

Vi beräknar först

$$\iiint_K dV = \frac{4\pi}{3},$$

eftersom den integralen är en åttondel av volymen av sfären med radie 2. Sen observerar vi att, p.g.a. symmetri,

$$\iint_{A_x} ydA = \iint_{A_y} zdA = \iint_{A_z} xdA.$$

Detta gör att

$$\iint_S F(x,y,z)\cdot d\mathbf{S} = \underbrace{\iiint_K dV}_{=\frac{4\pi}{3}} + \underbrace{\iint_{A_x} ydA + \iint_{A_y} zdA - \iint_{A_z} 2xdA}_{=0} = \frac{4\pi}{3}.$$

Svar Fråga C1: Flödet ut genom ytan är $\frac{4\pi}{3}$.

Fråga C2. Låt Γ vara en enkel kurva som parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^2,$$

där $\mathbf{r}$ är en kontinuerlig och styckvis kontinuerligt deriverbar kurva från intervallet $[0,1]$ in i $\mathbb{R}^2$. Antag att kurvan är sluten; d.v.s. $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(1)$. Slutligen så antar vi att för alla $t \in [0,1]$ så kommer minst ett av $x(t), y(t)$ att vara heltal.

Avgör alla möjliga numeriska värden av linjeintegralen

$$\int_\Gamma (y,-x)\cdot d\mathbf{r}.$$

[6 poäng]

Lösningsförslag Fråga C2: Observera att om Γ är en sluten kurva som är orienterad moturs så kommer, enligt Greens Sats i planet,

$$\int_\Gamma (y,-x)\cdot d\mathbf{r} = \iint_A \left(-\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) dA = \iint_A (-2)dA,$$

där A är området som innesluts av kurvan. På samma sätt så kommer, om kurvan är orienterad medurs,

$$\int_\Gamma (y,-x)\cdot d\mathbf{r} = -\iint_A \left(-\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) dA = \iint_A 2dA.$$

Eftersom kurvan löper längs rutnätet som ges av $x \in \mathbb{Z}$ och/eller $y \in \mathbb{Z}$ hävdar vi att arean av det inneslutna området kommer att vara $1, 2, 3, ...$ Vi får därför att de möjliga värdena integralen kan anta är $\pm 2, \pm 4, \pm 8, ...$

Låt oss argumentera för att arean som innesluts av Γ är ett heltal. För det kommer vi att använda notationen Q_{ij} för den öppna kvadraten med hörn i (i,j), $(i+1,j)$, $(i+1,j+1)$ och $(i,j+1)$.

Vi hävdar att om centrum av en given kvadrat Q_{ij} ligger innanför kurvan Γ så ligger hela kvadraten i området som omges av kurvan Γ, och motsvarande om centrum ligger utanför området begränsat av Γ så ligger hela kvadraten utanför Γ. Låt oss säga att $(i+1/2, j+1/2)$ ligger innanför Γ och om det finns en punkt $(i+a, j+b) \in Q_{ij}$, d.v.s. $0 < a, b < 1$, som inte ligger innanför Γ så måste det finnas en punkt på linjen

$$(1-t)\big(i+1/2.j+1/2\big)+t\big(i+a,j+b\big), \quad t\in[0,1]$$

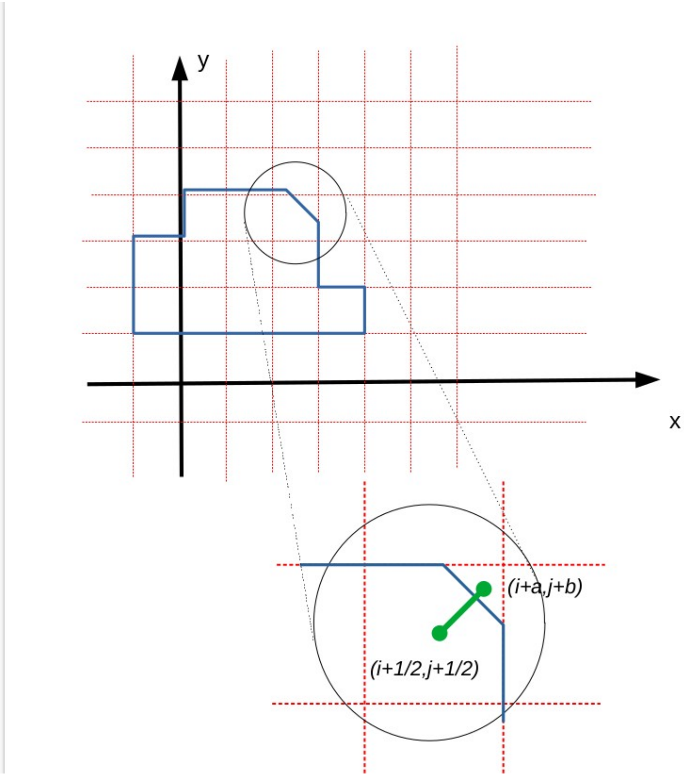
som ligger på Γ.[1] Men för alla $t \in [0,1]$ så kommer

$$\begin{aligned} i &< (1-t)\big(i+1/2\big)+t\big(i+a\big) = i+\tfrac{1}{2}+t(a-1/2) < i+1 \qquad \text{och} \\ j &< (1-t)\big(j+1/2\big)+t\big(j+b\big) = j+\tfrac{1}{2}+t(b-1/2) < j+1, \end{aligned}$$

där vi använde att $0 \le a, b \le 1$. Det följer att om centrum av kvadraten ligger innanför kurvan så ligger alla punkter i kvadraten innanför kurvan.

På samma sätt kommer hela det inre av Q_{ij} att ligga utanför området som innesluts av Γ om centrum av Q_{ij} gör det.

Det följer att innandömet av Γ består av ett antal enhetskvadrater och har därför en area som är ett heltal.



Figur: *I bilden ovan så har vi markerat heltalskoordinater med röda streckade linjer. Vi har även skissat en kurva Γ (blå linje). Om det skulle finnas två punkter i en kvadrat $Q_{i,j}$ så att den ena ligger innanför Γ och den andra utanför Γ, såsom högst uppe till höger på Γ. Då skulle vi kunna dra ett linjesegment mellan dessa punkter, skissat i grönt i den förstorade bilden, så att detta linjesegment skär Γ i koordinater som inte är heltal. Detta är en motsägelse.*

Svar Fråga C2: De möjliga värdena är $\pm 2n$ för $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

[1] Detta påstående kallas Jordans sats och är mycket djupare än det framstår, men ingen motivering krävs för full poäng.