SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
4e Juni, 2021

Skrivtid: 14:00-17:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: John Andersson and Henrik Shahgholian

Tentamen består av tre delar; A, B och C, som vardera ger maximalt 12 poäng. Dina bonuspoäng adderas till del A, men den totala poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt, och antalet erhållna bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Del A.

Fråga A1. Låt $f(x,y) = \sin(xy) + e^{x^2-y^2}$.
a) Bestäm $\nabla f(0,0)$.

[1 p]

b) Bestäm den bästa linjära approximationen till f i origo.

[1 p]

c) Bestäm $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, samt $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$.

[2 p]

Lösningsförslag Fråga A1a) Vi beräknar de partiella derivatorna av $f(x,y)$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y\cos(xy) + 2xe^{x^2-y^2} \text{ och } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x\cos(xy) - 2ye^{x^2-y^2}.$$

Använder vi definitionen av gradienten så får vi vårt svar enligt $\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)$.

Svar Fråga A1a: $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

b) I origo så är $f(0,0) = 1$ så om vi använder formeln för linjärapproximation

$$z = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x-0, y-0) = 1 + 0 = 1$$

så får vi att den bästa linjärapproximationen är $z = 1$.

Svar Fråga A1b: *Den konstanta funktionen $z = 1$ är den bästa linjäraproximatinen i origo.*

c) För att beräkna andraderivatorna så använder vi svaret i a)-delen av uppgiften

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\cos(xy) + 2xe^{x^2-y^2}\right) =$$

$$-y^2\sin(xy) + 2e^{x^2-y^2} + 4x^2e^{x^2-y^2}.$$

På samma sätt så är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\cos(xy) - 2ye^{x^2-y^2}\right) = -x^2\sin(xy) - 2e^{x^2-y^2} + 4y^2e^{x^2-y^2}.$$

Om vi sätter in $(x, y) = (0, 0)$ i dessa uttryck så får vi vårt

Svar Fråga A1c: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2$.

Fråga A2. a)

En ekvation i polära koordinater i planet ges av $r = \sin\theta$. Skriv om ekvationen i kartesiska (x, y)-koordinater.

[2 p]

b) Kurvan γ ges som skärningen mellan planet $2x + 2y + z = 2$ och ytan $z = x^2 + y^2$. Hitta en parametrisering för kurvan.

[2 p]

Lösningsförslag Fråga A2a): Relationen mellan kartesiska och polära koordinater är $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ och θ är vinkeln mellan (x, y) och $x-$axeln. Vi kan därför skriva $\sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Om vi sätter in detta i $r = \sin(\theta)$ så får vi att

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 - y = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4,$$

dvs en cirkel med centroum i $(0, 1/2)$ och radie $1/4$.

Alternativ lösning: Vii kan multiplicera båda leden av ekvationen $r = \sin\theta$ med r och få $r^2 = r\sin\theta = y$, dvs $x^2 + y^2 = y$ och fortsätta med en kvadratkomplettering.

Svar A2a: Ekvationen är $x^2 + y^2 - y = 0$ i $(x, y)-$koordinater, eller mer beskrivande $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$.

b) Substituerar vi $z = 2 - 2x - 2y$ i $z = x^2 + y^2$ så får vi

$$2 - 2x - 2y = x^2 + y^2 \Rightarrow 4 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2.$$

Detta är en cirkel i $(x, y)-$planet med radie 2 och centrum i $(-1, -1)$. Vi kan parametrisera den cirkeln med standardparametriseringen

$$x(t) = 2\cos(t) - 1 \text{ och } y(t) = 2\sin(t) - 1.$$

Om vi sätter in parametriseringen av x och y i $z = 2 - 2x - 2y$ så får vi

$$z(t) = 6 - 4\cos(t) - 4\sin(t).$$

Detta ger följande svar:

Svar Fråga A2b:

$$(x(t), y(t), z(t)) = \Big(2\cos(t) - 1, 2\sin(t) - 1, 6 - 4\cos(t) - 4\sin(t)\Big), \qquad 0 \le t < 2\pi$$

är en parametrisering av skärningen.

Fråga A3. Låt D_1 och D_2 vara två trianglar som har hörn i punkterna $(0,0)$, $(-1,1)$, och $(2,2)$, respektive $(-1,1)$, $(1,1)$, och $(2,2)$. Sätt

$$I_1 = \iint_{D_1} xy\,dA, \qquad I_2 = \iint_{D_2} xy\,dA.$$

a) Använd egenskaper hos D_1, D_2 samt integranden $f(x,y) = xy$ för att utan exakta integralberäkningar visa att visa att $I_1 = I_2$.

[2 p]

b) Beräkna I_1.

[2 p]

Lösningsförslag Fråge A3a: Vi låter D_3 vara triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(-1,1)$ och $(1,1)$. Då kommer $D_1 = D_2 \cup D_3$. Därför så kommer

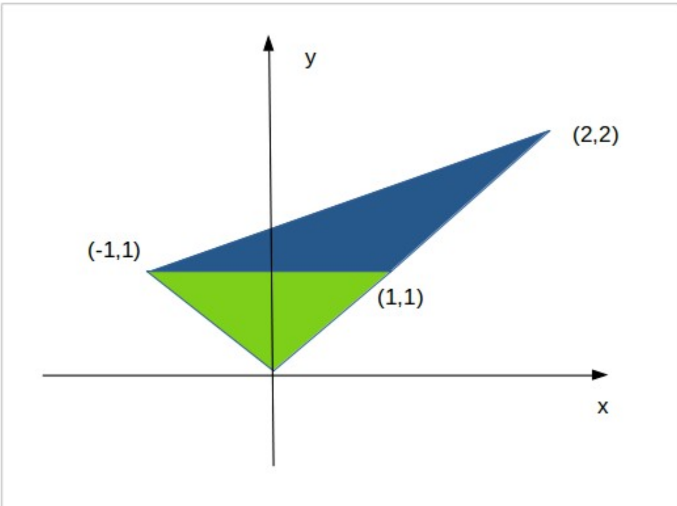
$$\iint_{D_1} xydA = \iint_{D_2\cup D_3} xydA = \iint_{D_2} xydA + \iint_{D_3} xydA, \tag{1}$$

där vi använde att D_2 och D_3 är disjunkta (utom möjligtvis ränderna som inte påverkar integralens värde).

Triangeln D_3 är en jämn domän kring $y-$axeln men integranden xy är udda i $x-$variabeln så

$$\iint_{D_3} xydA = 0.$$

Sätter vi in detta i (1) så följer det att $I_1 = I_2$.



Figur: *I figuren ovan så har vi skissat D_2 som en blå triangel, D_3 som en grön triangel och D_1 är unionen av båda trianglarna.*

b) Vi använder svaret från A3a och beräknar integralen I_2 istället då integralernas värden är samma. Vi det att vi kan parametrisera D_2 som $1 \le y \le 2$ och $3y-4 \le x \le y$. Vi får då att

$$I_1 = I_2 = \int_1^2 \left[\int_{3y-4}^{y} xydx\right] dy =$$

$$\int_1^2 \left[\frac{x^2y}{2}\right]_{3y-4}^{y} dy = \int_1^2 \left(\frac{-8y^3+24y^2-16y}{2}\right) dy =$$

$$\left[-y^4+4y^3-4y^2\right]_1^2 = 1.$$

Svar Fråga A3b: $I_1 = 1$.

Del B.

Fråga B1.

Området D i planet begränsas av kurvan $(x(t), y(t)) = (t\cos t, t\sin t)$ där $0 \le t \le 3\pi/2$, och linjesegmentet $(0, t)$ där $-3\pi/2 \le t \le 0$.

a) Rita området D.

[2 p]

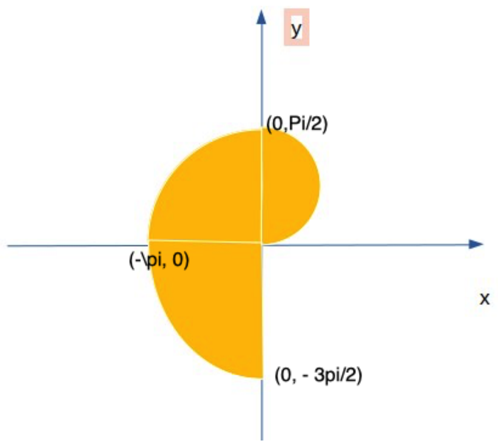
b) Skriv arean för D som en linjeintegral över randen av D.

[2 p]

c) Beräkna arean av D.

[2 p]

Lösningsförslag Fråga B1a:



Figur: *Figuren ovan är en schematisk skiss av området D.*

B1b: Från Green's Sats i planet så får vi att

$$\frac{1}{2}\oint_\gamma -ydx + xdy = \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{\partial x}{dx} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dA = \iint_D dA,$$

där D är kurvan som inesluts av den slutna kurvan γ.

B1c:

Arean kan fås antingen på 2 olika sätt.

Alternativ 1: enkel lösning: Polära koordinater

$$Arean(D) = \iint_D 1dA = \int_0^{3\pi/2}\int_0^t rdrdt = \int_0^{3\pi/2} \frac{t^2}{2}dt = \frac{9\pi^3}{16}.$$

Alternativ 2: svårare lösning: I vårt fall så kan vi parametrisera randkurvan till D med den kontinuerliga och styckvis kontinuerligt deriverbara kurvan

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t\cos t, t\sin t) & \text{för } 0 \le t \le \frac{3\pi}{2} \\ (0, t - 3\pi) & \text{för } \frac{3\pi}{2} < t < 3\pi. \end{cases}$$

Vi får därför att arean av D kan skrivas som

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \big(-t\sin(t), t\cos(t)\big)\cdot\gamma'(t)dt + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{3\pi} \big(t-3\pi, 0\big)\cdot\gamma'(t)dt}_{=0} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \Big(-t\cos(t)\sin(t) + t^2\sin^2(t) + t\cos(t)\sin(t) + t^2\cos^2(t)\Big)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} t^2 dt = \frac{9\pi^3}{16},$$

där vi även använde att $(t-3\pi,0)\cdot\gamma'(t) = (t-3\pi,0)\cdot(0,1) = 0$ för att dra lutsatsen att den andra integralen är noll.

Svar Fråga B1c: Arean av D är $\frac{9\pi^3}{16}$.

Fråga B2.

En konstnär har byggt ett skålliknande konstverk på en platta P, som ges av $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$. Grafen av konstverket ges av funktionen $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - y^4$.

a) Bestäm det största och det minsta värdet till funktionen $f(x,y)$ på denna platta.

[4 p]

b) Om man fyller den skål som funktionsytan $z = f(x,y)$ bildar nära origo med vatten, till vilken höjd kan skålen fyllas?

[2 p]

Lösningsförslag B2a: Vi börjar med att observera att f är differentierbar i hela området $-2 \le x \le 2$ och $-2 \le y \le 2$ så inre extrempunkter inträffar där $\nabla f(x,y) = (2x, 8y - 4y^3) = (0,0)$. Vi ser direkt att gradienten är noll då $x = 0$ och $4y(2-y^2) = 0$ vilket ger tre inre punkter $(0,0)$ och $(0,\pm\sqrt{2})$. Sätter vi in dessa i ekvationen så får vi $f(0,0) = 0$ och $f(0,\pm\sqrt{2}) = 0+8-4 = 4$. Så de inre möjliga värderna på max/min är 0 i $(0,0)$ och 4 i punkterna $(0,\pm\sqrt{2})$.

Sen undersöker vi randpunkterna (utan hörnen på plattan vilka vi spar till senare). Randen har fyra delar (förutom hörnen) $x = \pm 2$ och $-2 < y < 2$ samt $-2 < x < 2$ och $y = \pm 2$. Om vi börjar med att undersöka den delen av randen där $y = \pm 2$ så får vi att

$$f(x,\pm 2) = x^2,$$

vilken uppenbarligen har ett lokalt minimum i $x = 0$. P.s.s. så kommer max/min punkter då $x = \pm 2$ att finnas när

$$\frac{df(\pm 2, y)}{dy} = 4y(2-y^2) = 0.$$

Som vi redan har sett så kommer detta ge möjliga max/min punkter på den del av randen där $x = \pm 2$ att fås när $y = 0$ eller $y = \pm\sqrt{2}$. Detta ger möjliga max/min värden $f(\pm 2, 0) = 4$, $f(\pm 2, \pm\sqrt{2}) = 8$.

I hörnpunkterna, när $x = \pm 2$ och $y = \pm 2$, så får vi $f(\pm 2, \pm 2) = 4$.

Genom att jämföra dessa möjliga max/min värden får vi

	x	y	$f(x,y)$
Inre punkt	0	0	0
Inre punkt	0	$\pm\sqrt{2}$	4
Rand $y = \pm 2$	0	± 2	0
Rand $x = \pm 2$	± 2	0	4
Rand $x = \pm 2$	± 2	$\pm\sqrt{2}$	8
Hörn	± 2	± 2	4

Det följer att vi får följande

Svar Fråga B2a: Maxvärdet är 8 och inträffar i fyra punkter $(x, y) = (\pm 2, \pm\sqrt{2})$.
Minvärdet är 0 och inträffar i tre punkter $(x, y) = 0$ eller $(x, y) = (0, \pm 2)$.

B2b: Den här frågan handlar mer om modellering och att resonera matematiskt än att direkt applicera en given metod. Vi kommer att argumentera i tre steg:

(a) Att det faktiskt bildas en liten “skål” kring origo genom att visa att origo är ett strängt lokalt minimum för skålen.
(b) Vi kommer sen att argumentera att om den maximala höjden sker i en inre punkt så måste det vara en kritisk punkt. Vi kommer att använda de inre kritiska punkterna och argumentera för att punkterna $(x, y) = (0, \pm\sqrt{2})$ är aktuella punkter där vätskan rinner över.
(c) Vi avslutar med att argumentera för att “skålen” maximalt kan innehålla $f(0, \pm\sqrt{2}) = 4$ enheters djup.

a) Kring origo så är gradienten 0 och Hessianen

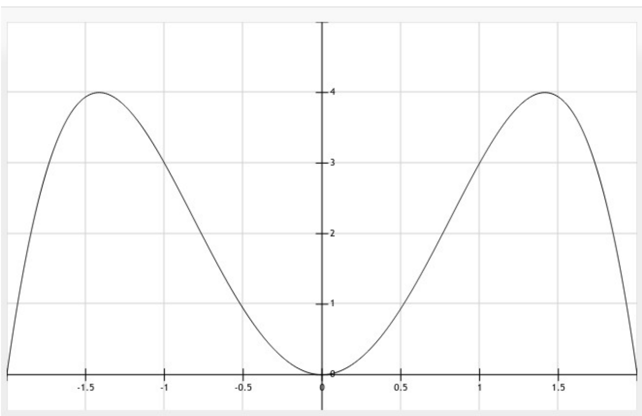
$$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

så vi har ett lokalt minimum, d.v.s. en skålform som kan innehålla vatten: den minimala höjden är strikt större än noll.

b) Eftersom f är ett polynom, och därför kontinuerligt deriverbar, så måste $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ om (x, y) är en inre punkt där vattenytan når sin maximala höjd. Detta eftersom vattenytan kommer alltid att vara konstant och när vattnet rinner över kanten så måste ytan till vattnet tangera grafen av f. Det finns endast tre möjliga inre punkter där $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Dels $(x, y) = (0, \pm\sqrt{2})$ eller $(x, y) = (0, 0)$. Men $(x, y) = (0, 0)$ är inte punkten där vattnet rinner över kanten, då vi vet att konstverket formar en liten skål kring origo eftersom Hessianen har strikt positiva egenvärden. Vi får alltså att $(x, y) = (0, \pm\sqrt{2})$ är möjliga punkter där vattnet rinner över.
Vi observerar att i $(0, \pm\sqrt{2})$ så har vi att

$$D^2 f(0, \pm\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -16 \end{bmatrix}$$

så $(0, \pm\sqrt{2})$ är sadelpunkter. Detta gör att vattnet i alla fall rinner över ett lokalt krön i $(0, \pm 2)$ vilket ger $f(0, \pm\sqrt{2}) = 4$.



Figur: *Ovan har vi skissat en genomskärning av skålen för $x = 0$ och $-2 \le y \le 2$. Man ser direkt att det inte går att fylla skålen högre än $f(0, \pm\sqrt{2}) = 4$. Detta eftersom om skålen fylls till en högre nivå än 4 så kommer vattnet att rinna över det lokala maximum som $f(0, y)$ har när*

$y = \sqrt{2}$ *och* $y = -\sqrt{2}$. *Observera att det som gör att vi har ett lokalt maximum i* $y = \pm\sqrt{2}$ *är att andraderivatan är negativ.*

c) Vi hävdar att den maximala höjden faktiskt är $f(0, \pm\sqrt{2}) - f(0, 0) = 4$. Det är tydligt från genomskärningsbilden ovan att så fort vi försöker fylla skålen över höjden 4 så kommer vattnet att rinna över maxvärdet och rinna ner längs sluttningen för $\sqrt{2} < y < 2$. Det följer att vi aldrig kan fylla konstverket högre än till 4 enheters djup.

Svar Fråga B2b) Den maximala vattenhöjden som konstverket kan innehålla är 4 enheter.

Del C.

Fråga C1. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$, och kurvan C som ges av skärningen mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ med planet $y + z = 2$, negativt orienterad när vi ser den ovanifrån.

a) Beräkna integralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ genom att parametrisera kurvan och beräkna integralen.

[2 p]

b) Använd Stokes sats för att beräkna integralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

[4 p]

Lösningsförslag Fråga C1a: Cylindern $x^2 + y^2 = 1$ kan parametriseras $x(t) = \cos(t)$ och $y(t) = -\sin(t)$ för $-\pi < t \leq \pi$, där vi har valt minustecken i y för att få en negativ orientering. Med $y(t) = -\sin(t)$ så kommer $z(t) = 2 + \sin(t)$ när (x, y, z) ligger på ytan $y + z = 2$. En parametrisering av skärningen ges därför av

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \Big(\cos(t), -\sin(t), 2 + \sin(t)\Big), \ -\pi < t \leq \pi.$$

Integralen kan därför beräknas

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(-\sin^2(t), \cos(t), 4 + 4\sin(t) + \sin^2(t)\big) \cdot (-\sin(t), -\cos(t), \cos(t))\, dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(\sin^3(t) - \cos^2(t) + 4\cos(t) + 4\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t)\cos(t)\big)\, dt =$$

$$\left[-\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{\sin^3(t)}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\pi,$$

där vi använde att integranderna $\sin^3(t)$ samt $4\sin(t)\cos(t)$ är udda och därför har integralen noll över ett jämt intervall och att integralen av $4\cos(t)$ också är noll eftersom vi integrerar över en hel perjod.

Svar Fråga C1a: $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\pi$.

C1b: Stokes sats säger att

$$-\iint_D \mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot N dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där vi har satt ett minus i VL eftersom kurvan är negativt orienterad, D är den del av planet $y+z = 2$ som ligger i cylindern $x^2+y^2 \leq 1$, N är enhetsnormalen till ytan d.v.s. $N = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$. Vi beräknar

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = \Big(\frac{\partial z^2}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial(-y^2)}{\partial z} - \frac{\partial z^2}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y^2)}{\partial y}\Big) = (0, 0, 1 + 2y).$$

Vi får därför att

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_D \frac{1+2y}{\sqrt{2}} dS.$$

Eftersom y är en udda funktion över det jämna integrationsområdet så kommer y termen inte att ha någon inverkan på integralens värde. Vi får att

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D dS. \tag{2}$$

Vi kan beräkna integralen $\iint_D dS$ genom att observera att planet D är grafen av $z = 2 - y$ över området $B_1(0) = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ vilket gör att

$$\int_D dS = \int_{B_1(0)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA = \sqrt{2}\pi,$$

där vi använde att ytan av grafen av f över ett område K kan beräknas med

$$\iint_K \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dA.$$

Sätter vi in vädret av $\iint_D dS$ i (2) så får vi

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\pi.$$

Svar Fråga C1b: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\pi$

Alternativt så kan man observera att vi kan skriva C som randen till området som ges av $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ där

$$\Sigma_1 = \{(x, y, 0);\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

orienterad så att normalen är $N = (0, 0, 1)$ och

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 2 - y\}$$

orienterad så att normalen pekar in mot $z-$axeln, observera att $z-$komponenten för normalen på Σ_2 är identiskt lika med noll. Vi får då att

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_{\Sigma_1} \text{curl}(\mathbf{F}) \cdot N dS - \iint_{\Sigma_2} \text{curl}(\mathbf{F}) \cdot N dS,$$

där vi igen har satt minustecken i HL eftersom kurvan är negativt orienterad.

Observera att eftersom curl$\mathbf{F} = (0, 0, 1 + 2y)$ och normalen på Σ_2 har $z-$komponent noll så kommer integranden i integralen över Σ_2 att vara noll. Det följer att

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_{\Sigma_1} (1 + 2y) dS = -\pi,$$

eftersom y är en udda funktion över det jämna integrationsområdet Σ_1 och Σ_1 har area π.

Fråga C2. Låt $\mathbf{x} = (x, y, z)$, och $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vara linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$ samt $a, b, c > 0$ reella tal. Betrakta parallellepipeden Π som begränsas av planen

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0, \qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0, \qquad \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = 0, \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \sqrt{2}a, \qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \sqrt{2}b, \qquad \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \sqrt{2}c.$$

Visa att

$$|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \iiint_\Pi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})\, dV = (abc)^2.$$

[6 p]

Lösningsförslag Fråga C2: Vi gör variabeltransformen

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{x}=\sigma,\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=\tau,\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{x}=\mu.$$

Där $0\leq\sigma\leq\sqrt{2}a$, $0\leq\tau\leq\sqrt{2}b$ och $0\leq\mu\leq\sqrt{2}c$. Vi behöver beräkna Jacobianen av variabelbytet

$$\left|\frac{\partial(\sigma,\tau,\mu)}{\partial(x,y,z)}\right| = \left|\det\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{w}\end{bmatrix}\right| = |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|,$$

där vi har tolkat $\mathbf{u},\ \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ som radvektorer (så att determinanten i mittenledet är matrisen med raderna $\mathbf{u},\ \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$).

Det följer att

$$|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|dxdydz = d\sigma d\tau d\mu.$$

Vi kan skriva integralen i uppgiften

$$|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|\iiint_\Pi(\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x})\,dV =$$

$$\int_0^{\sqrt{2}a}\int_0^{\sqrt{2}b}\int_0^{\sqrt{2}c}\sigma\tau\mu d\sigma d\tau d\mu =$$

$$\int_0^{\sqrt{2}a}\sigma d\sigma\int_0^{\sqrt{2}b}\tau d\tau\int_0^{\sqrt{2}c}\mu d\mu = \left[\frac{\sigma^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}a}\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}b}\left[\frac{\mu^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}c} = (abc)^2.$$