SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
19e Augusti, 2021

Skrivtid: 14:00-17:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: John Andersson and Henrik Shahgholian

Tentamen består av tre delar; A, B och C, som vardera ger maximalt 12 poäng. Dina bonuspoäng adderas till del A, men den totala poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt, och antalet erhållna bonuspoäng framgår av din resultatsida.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Del A.

Fråga A1. Låt

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} + 4y.$$

a) Skissa några representativa nivåkurvor till funktionen $f(x,y)$. **2 p.**

b) Beräkna en enhetsnormal till nivåkurvan $f(x,y) = 5$ i punkten $(1,1)$ **2 p.**

Fråga A2a. Avgör vilka av följande mängder som är öppna, slutna eller varken öppna eller slutna. Ingen motivering krävs.

i) Mängden av alla punkter (x,y) i planet så att $x > 3$ och $y \leq x$.

ii) Mängden av alla punkter i planet så att $f(x,y) = \frac{3+x}{x^2+y^2}$ är definierad och $|f(x,y)| \geq 4$.

iii) Mängden av alla punkter i $\mathbb{R}^3$ så att $x^2 + z + \sin(y) = 16$.

vi) Mängden av alla punkter (x,y) i planet så att $x^2 + y^2 \leq 1$ och $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} < 4$.

Fyra rätt ger 2 poäng, tre rätt ger 1 poäng och två eller färre rätt ger 0 poäng. **2 p.**

b) Parametrisera skärningen mellan mängderna i $\mathbb{R}^3$ som ges av $x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2 = z^2$ och $x + y + 2z = 2$. **2 p.**

Fråga A3. Låt K vara kroppen som ges av

$$x^2 + y^2 + |z| \leq 1.$$

a) Skriv området i cylindriska koordinater. För poäng krävs exakta gränser. **1 p.**

b) Beräkna integralen **3 p.**

$$\iiint_K (x^2 + y^2 + z^2)dV.$$

Del B.

Fråga B1. En bagare bakar bröd av två sorter: vanligt bröd och ekologiskt bröd. Bagaren kan maximalt baka V limpor vanligt bröd och E limpor ekologiskt bröd där

$$\frac{4}{3}E + V = 200.$$

Den vinst (profit $P(E,V)$) bagaren gör om han bakar V limpor vanligt och E limpor ekologiskt bröd ges av formeln

$$P(E,V) = 3E + 2V - \frac{E^2}{75} - \frac{EV}{150} - \frac{V^2}{75}.$$

Bestäm hur många limpor vanligt respektive ekologiskt bröd som bagaren skall baka för att göra maximal vinst. **6 p.**

Fråga B2. Låt en yta i $\mathbb{R}^4$, med koordinater (x, y, u, v), definieras av följande ekvationer

$$\begin{aligned} x &= u + v^3, \\ y &= uv + u + v, \\ -\infty &< u < \infty, \\ -\infty &< v < \infty. \end{aligned} \tag{1}$$

a) På ytan, i en liten omgivning av $(x, y, u, v) = (1, 1, 0, 1)$, så bestämmer ekvationerna (1) u och v som funktioner av x och y (du behöver inte visa detta). Beräkna $\frac{\partial u}{\partial x}$ och $\frac{\partial u}{\partial y}$ i punkten $(x, y, u, v) = (1, 1, 0, 1)$. **3 p.**

b) Medelst en linjärapproximation kring $(x, y) = (1, 1)$ beräkna ett approximativt värde av u i den punkten på ytan där $x = 1.01$ och $y = 1.01$. **3 p.**

Del C.

Fråga C1. a) Hitta en vektorpotential $\mathbf{A}$ till till vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(- zx\sin(xy) - y\cos(z), -x\sin(z) + yz\sin(xy), 1\big).$$

2 p.

b) Beräkna integralen

$$\iint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$$

där $\mathcal{C}$ är ytan

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$0 \leq z \leq \pi$$

4 p. och $\mathbf{N}$ är enhetsnormalen som pektar bort från $z-$axeln.

Fråga C2. Låt K vara området som ges av

$$0 \leq x \leq 10$$
$$0 \leq y \leq 10$$
$$y \geq 10 - x$$

och låt $\mathbf{F}(x, y)$ vara ett kontinuerligt deriverbart vektorfält definierat på K.

a) Använd divergenssatsen i planet för att skriva om integralen

$$\iint_K \text{div}(\mathbf{F}) dA$$

1 p. till en integral över randen av K.

5 p. **b)** Bevisa divergenssatsen för detta område K. För poäng så skall ditt bevis vara fullständigt.

Lycka till!