ESTÁTICA

Grupo Editorial Patria

ESTÁTICA

Jacqueline Rodríguez Aguilera

Tecnológico de Estudios Superiores
Jilotepec

PRIMERA EDICIÓN EBOOK
MÉXICO, 2014

GRUPO EDITORIAL PATRIA

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:

correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.

fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102

e-mail:
info@editorialpatria.com.mx

home page:
www.editorialpatria.com.mx

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinación editorial: Estela Delfín Ramírez
Producción: Gerardo Briones González
Diseño de interiores y portada: Juan Bernardo Rosado Solís
Ilustraciones: Gustavo Vargas M. y Jorge Martínez J.
Fotografías: Thinkstockphoto
Diagramación: Gustavo Vargas M. y Jorge Martínez J.

Revisión técnica:
M. en C. Sergio Saldaña Sánchez
Instituto Politécnico Nacional
M. en C. Hugo Gustavo González Hernández
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Estática

Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro Núm. 43

ISBN ebook: 978-607-438-911-1

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición ebook: 2014

Dedicatoria

A mis padres Indalecio y Rosaura por todo su amor.

Agradecimientos

Agradezco a mi esposo Roberto y a mis hijos Jacqueline y Roberto por toda la paciencia, tolerancia y amor que me dieron durante la realización de esta obra.

Agradezco a la ingeniera Estela Delfín Ramírez por darme la oportunidad de hacer realidad un sueño, así como todo su apoyo y paciencia.

Presentación

Esta obra está formada por cuatro unidades y pretende ser de gran utilidad para los estudiantes de ingeniería, pues contiene una gran cantidad de problemas resueltos que muestran paso a paso los cálculos realizados para llegar a la solución, haciendo uso de conocimientos básicos necesarios como aritmética, geometría, álgebra y trigonometría, así como también una gran cantidad de problemas propuestos para que se apliquen los conceptos de la estática, los cuales se abordan con gran simplicidad para su fácil comprensión.

- La primera unidad aborda temas fundamentales como las leyes de Newton, los sistemas de unidades, vectores y equilibrio de la partícula, puesto que estos temas se aplicarán en la mayoría de los problemas de los siguientes capítulos.
- La segunda aborda temas como equilibrio de cuerpo rígido, momento de una fuerza y sistemas equivalentes de equilibrio. Se hace una clara diferencia entre el equilibrio de una partícula y el de un cuerpo rígido, aplicando conceptos como el principio de la transmisibilidad y fuerzas concurrentes y coplanares.
- En la tercera unidad se aplican las leyes de Newton, para entender los conceptos de acciones y reacciones, aplicándolas en estructuras tales como vigas, armaduras, marcos y cables en forma de cargas y apoyos.
- En la cuarta y última unidad se calculan las propiedades de secciones planas, tales como centroides, momentos de inercia, radios de giro y módulos de sección, entre otros, como conceptos abstractos que tendrán su aplicación final en temas como cálculo de esfuerzos. También se aborda el tema de la fricción, de una forma sencilla, con problemas enfocados al análisis de diversas situaciones para que su comprensión sea simple.

Cabe mencionar que todos los temas que comprende esta obra son la base para entender y poder resolver problemas de resistencia de materiales, que es también una parte fundamental en la formación de un ingeniero.

La autora

Contenido

UNIDAD 1

Introducción

OBJETIVOS

- Entender los conceptos de estática, espacio, tiempo, masa y fuerza.
- Conocer las Leyes de Newton.
- Reconocer las unidades de los diferentes sistemas de unidades.
- Entender el concepto de vector como una fuerza.
- Entender los conceptos de concurrentes, coplanares, resultante y componentes, así como equilibrio de una partícula
- Conocer la aplicación de las operaciones entre vectores, como suma y resta.
- Conocer la aplicación de vectores unitarios.
- Conocer las componentes rectangulares de un vector.
- Construir diagramas de cuerpo libre.

¿QUÉ SABES?

- ¿Cuál es la diferencia entre masa y fuerza?
- ¿Qué significa 1 N?
- ¿Cómo se convierten unidades de un sistema a otro sistema?
- ¿Cuál es la diferencia entre una cantidad vectorial y una escalar?
- ¿Cuáles son los elementos de un vector?
- ¿Cómo idealizar un problema con vectores y a partir de este construir un diagrama de cuerpo libre?
- ¿Cuáles son los tipos de componentes que puede tener un vector y cómo se obtienen?
- ¿Qué es el concepto de resultante de fuerzas?

1.1 ¿Qué es la Estática?

Hasta la fecha, hay diversas definiciones de Estática, pero todas estas se basan en la Mecánica.

La **Mecánica** es una ciencia que estudia el comportamiento de los cuerpos sometidos a fuerzas, ya sea que estos se encuentren en reposo o en movimiento.

La Mecánica se divide en tres ramas principales: 1) Mecánica de los cuerpos rígidos; 2) Mecánica de los cuerpos deformables; 3) Mecánica de fluidos.

Para su estudio, la Mecánica de los cuerpos rígidos, a su vez, se divide en Estática (estudio de los cuerpos en reposo o que se mueven con una velocidad constante) y Dinámica (estudio de los cuerpos en movimiento acelerado).

Cuando varias fuerzas actúan sobre un cuerpo, cada una de dichas fuerzas lo desplaza en una dirección y con una intensidad que depende de la fuerza aplicada. Si, a pesar de la aplicación de las fuerzas, el cuerpo permanece en reposo y no se mueve, se dice que está en estado de equilibrio.

Al estudio de las fuerzas aplicadas a cuerpos en estado de equilibrio se le llama **Estática**.

1.2 Conceptos fundamentales

Los conceptos fundamentales que se emplean en la Mecánica son: espacio, tiempo, masa y fuerza.

El **espacio** se refiere a la posición de una partícula en tres dimensiones; el **tiempo** sirve para medir los intervalos entre eventos; la **masa** es una forma cuantitativa de medir la resistencia de un cuerpo a ser acelerado, y la **fuerza** es la acción sobre un cuerpo, que se caracteriza por tener punto de aplicación, magnitud, dirección y sentido; por lo general, esta última (fuerza) se representa mediante un vector.

1.3 Leyes de Newton

Las leyes de Newton se refieren al movimiento de las partículas y son:

- **1ª Ley.** Una partícula permanecerá en reposo o se moverá a velocidad constante si la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella es cero.
- **2ª Ley.** Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es diferente de cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en el sentido de esta. Se representa mediante la expresión:

$$\vec{F} = m \times \vec{a}$$

- **3ª Ley.** A toda acción corresponde una reacción de igual magnitud, pero de sentido contrario.

1.4 Sistemas de unidades

Existen unidades para medir la longitud, la masa, el tiempo y la fuerza, para eso se utiliza el Sistema Internacional de Unidades (SI) o el Sistema Inglés de Unidades.

Sistema Internacional de Unidades

El Sistema Internacional de Unidades (SI) se usa de manera universal, en este la longitud se mide en metros (m), la masa en kilogramos (kg), el tiempo en segundos (s) y la fuerza en Newtons (N).

Las unidades fundamentales del SI son kg, m y s; la unidad de fuerza es derivada y se obtiene por medio de la 2ª ley donde para acelerar 1 kg 1 m/s^2 se necesita aplicar una fuerza de 1 N.

$$F = 1\ \text{kg}\,(9.807\ \text{m/s}^2) = 9.81\ \text{N}$$

Cuando las cantidades numéricas son demasiado grandes o pequeñas, se pueden usar prefijos como los que se listan en la siguiente tabla:

Tabla 1.1

Múltiplos	Forma exponencial	Prefijo	Símbolo
1 000	10^3	Kilo	k
1 000 000	10^6	Mega	M
1 000 000 000	10^9	Giga	G
Submúltiplos			
0.001	10^{-3}	Mili	M
0.000 001	10^{-6}	Micro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	Nano	N

1.5 Conversión de unidades

En ocasiones, para solucionar un problema, es necesario convertir algunas unidades de un sistema a otro, a fin de que exista congruencia; asimismo, también es necesario convertir algunas unidades a su forma básica, para obtener unidades derivadas, como el Newton (N).

Tabla 1.2

Sistema	Longitud	Masa	Tiempo	Fuerza
Internacional	Metros m	Kilogramos kg	Segundos s	Newton N
Inglés	Pies ft	Slug $lb \times s^2/ft$	Segundos s	Libras lb

La conversión de unidades en el mismo sistema solo consiste en recorrer el punto decimal tres lugares, ya sea a la izquierda o a la derecha.

Para las unidades de masa:

- 1 ton = 1 000 kg
- 1 g = 0.001 kg
- 1 kg = 0.001 ton = 1×10^{-3} ton
- 1 kg = 1 000 g

Para las unidades de longitud:

- 1 km = 1 000 m = 1×10^3 m
- 123.4 mm = 0.1234 m = $1\,234 \times 10^{-4}$ m

Para las unidades de tiempo:

- 1 h = 60 min = 3 600 s

Para las unidades de fuerza:

- 1 kN = 1 000 N
- 5 432 N = 5.432 kN

Cuando la conversión de unidades es de un sistema a otro, es necesario utilizar los factores de conversión o equivalencias:

- 1 ft = 12 in
- 1 in = 25.4 mm = 2.54 cm

- $1\ \text{ft} = 12\ \text{in} \times \left(\dfrac{25.4\ \text{mm}}{1\ \text{in}}\right) = 304.8\ \text{mm} = 30.48\ \text{cm} = 0.3048\ \text{m}$
- $1\ \text{lb} = 0.4536\ \text{kg} = 453.6\ \text{g}$
- $1\ \text{slug} = 1\ \text{lb} \times \dfrac{\text{s}^2}{\text{ft}} = \dfrac{1\ \text{lbs}^2}{\text{ft}}$
- $1\ \text{lb} = (0.4536\ \text{kg})(9.807\ \text{m/s}^2) = 4.448\ \text{N}$

1.6 Vectores

Un **vector** es una representación gráfica que describe una cantidad física, como el peso de un objeto, la tensión en un cable, el empuje sobre un cuerpo, el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la posición, la fuerza y el momento.

Los elementos que conforman un vector son los siguientes:

- **Magnitud**. Determina la longitud de la flecha (vector) correspondiente y se representa con una línea. Muestra un valor numérico asociado con una unidad de medida en kg, N, kg/m, m/s, m/s^2 o N/m, m, ft, lb, kip.
- **Origen del vector**. Punto de inicio.
- **Dirección**. Orientación definida por el ángulo que forma el vector con un eje de referencia del sistema cartesiano.
- **Sentido**. Se representa con una flecha situada en un extremo de la línea, la cual indica hacia dónde se dirige el vector.

1.7 Suma de vectores

Existen dos formas de sumar vectores:

- Gráfica (mediante el método del paralelogramo, por la regla del triángulo y el método del polígono).
- Analítica (mediante las componentes rectangulares).

Método del paralelogramo

Este método consiste en sumar dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, los cuales se colocan en el mismo origen, al tiempo que se trazan líneas paralelas a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, para que coincidan con los extremos de los mismos, formando así un paralelogramo. Luego, si se traza una línea diagonal que una al punto origen con la intersección de esas líneas, se encuentra la resultante $\vec{R}$ de los vectores $\vec{A} + \vec{B}$, como se muestra en la figura 1.1.

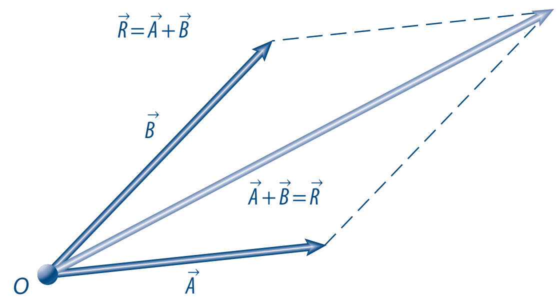

Figura 1.1
Resultante de dos vectores por el método del paralelogramo.

Regla del triángulo

La regla del triángulo consiste en utilizar, de manera indistinta, solo la mitad del paralelogramo, ya sea el superior o el inferior. El vector $\vec{B}$ se coloca donde termina el vector $\vec{A}$ y luego se unen mediante una diagonal, que va desde el origen de $\vec{A}$ hasta la punta de flecha de $\vec{B}$, con lo que se obtiene la resultante $\vec{R}$ de los vectores $\vec{A}+\vec{B}$, como se muestra en la figura 1.2.

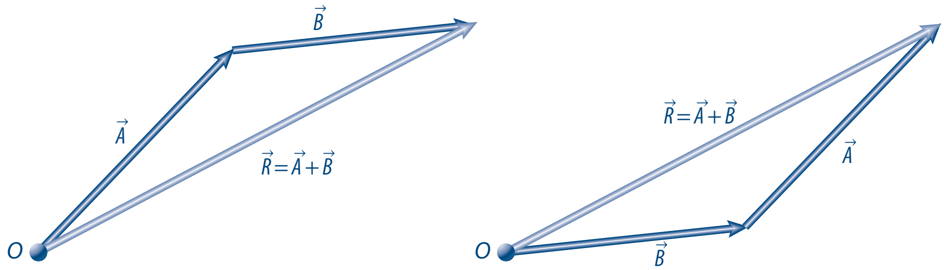

Figura 1.2

Resultante de dos vectores por la regla del triángulo.

Método del polígono

El método del polígono se utiliza cuando se tienen más de tres vectores. El procedimiento consiste en colocar el origen del vector $\vec{B}$ en el extremo de la flecha del vector $\vec{A}$, el origen del vector $\vec{C}$ en el extremo de la flecha del vector $\vec{B}$ y así sucesivamente; para obtener la resultante $\vec{R}$, se une el origen del primer vector con el extremo de la flecha del último vector, como se muestra en la figura 1.3.

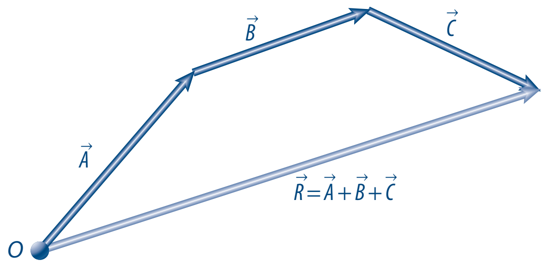

Figura 1.3

Suma vectorial de tres vectores por el método del polígono.

Componentes rectangulares

Este método es una forma analítica de sumar vectores, en la cual es necesario descomponer cada vector en sus componentes rectangulares, mediante la trigonometría o las proporciones.

Alerta

Recuerda que las fuerzas coplanares se encuentran contenidas en el mismo plano (véase figura 1.4).

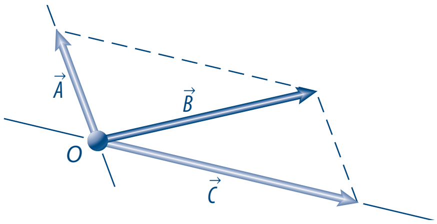

Figura 1.4

Representación de fuerzas contenidas en el mismo plano (fuerzas coplanares).

Alerta

Recuerda que las fuerzas concurrentes pasan por el mismo punto (véase figura 1.5).

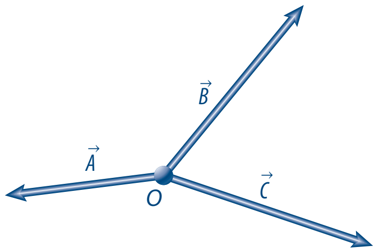

Figura 1.5

Fuerzas concurrentes.

1.8 Componentes rectangulares de un vector en el plano

Así como la suma de dos o más vectores origina un vector llamado resultante, mediante el proceso inverso se obtienen las componentes rectangulares de un vector o del vector resultante.

Las componentes rectangulares se llaman así porque son perpendiculares entre sí y forman un ángulo recto.

Si se utiliza un marco de referencia, como el plano cartesiano *xy*, las componentes rectangulares se pueden representar por medio el uso de la trigonometría como la proyección del vector sobre los ejes *x* y *y* (véase figura 1.6).

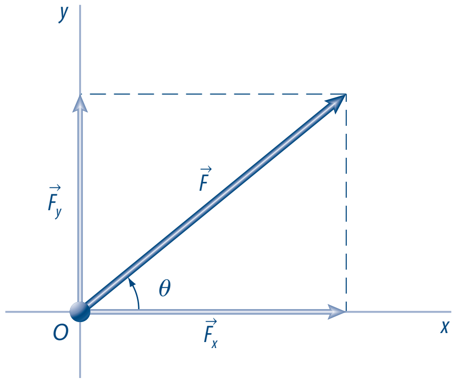

Figura 1.6
Proyección de una fuerza (componentes rectangulares de un vector).

Las componentes rectangulares de $\vec{F}$ son $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$, y se obtienen de la siguiente forma:

$$\vec{F}_x = \vec{F}\cos\theta \qquad \vec{F}_y = \vec{F}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

A las cantidades escalares F_x y F_y se les llama componentes escalares de $\vec{F}$, de modo que los vectores tienen componentes vectoriales y componentes escalares.

Alerta

Recuerda que la Ley de los senos es:

$$\frac{A}{\mathrm{sen}\,a} = \frac{B}{\mathrm{sen}\,b} = \frac{C}{\mathrm{sen}\,c}$$

Y se representa de la siguiente forma:

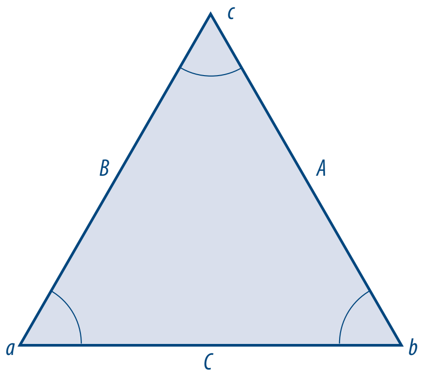

Figura 1.7
Ley de senos y cosenos.

Alerta

Recuerda que la Ley de los cosenos es:

$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos a \qquad A = \sqrt{B^2 + C^2 - 2\,BC\cos a}$

$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC\cos b \qquad B = \sqrt{A^2 + C^2 - 2\,AC\cos b}$

$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos c \qquad C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2\,AB\cos c}$

Problema resuelto

Dos fuerzas $\vec{A}$ y $\vec{B}$ actúan sobre un tornillo, como se muestra en la figura 1.8. Calcular la magnitud de la resultante $\vec{R}$ y su dirección, por la regla del triángulo.

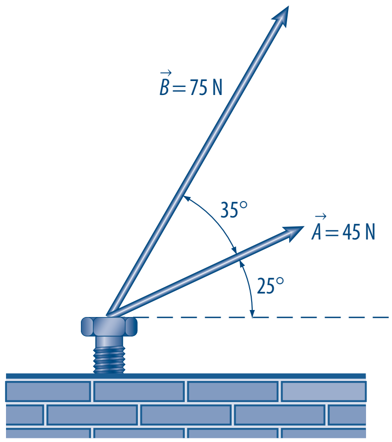

Figura 1.8
Fuerzas sobre un tornillo.

Solución

Primero, se dibuja el vector $\vec{A}$ y en su extremo final el vector $\vec{B}$; a continuación, el origen del vector $\vec{A}$ se une con el final del vector $\vec{B}$ mediante una diagonal (que representa la resultante $\vec{R}$), como se muestra en la figura 1.9.

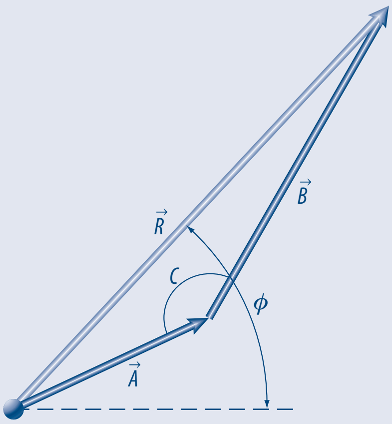

Figura 1.9
Resultante de dos vectores.

Luego, se calculan los ángulos interiores del triángulo, donde:

$$C = 180° - 35° = 145°$$

En seguida, mediante la Ley de los cosenos y la Ley de los senos se calcula el valor de la resultante y los ángulos faltantes, así:

$$R^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c = 45^2 + 75^2 - (2)(45)(75) \cos 145°$$
$$= 13\,179.2763$$

$$R = \sqrt{13\,179.2763} = 114.8010 \text{ N}$$

La comprobación de la solución se puede realizar por medio de la Ley de los senos:

$$\frac{A}{\text{sen } a} = \frac{B}{\text{sen } b} = \frac{C}{\text{sen } c} \qquad \frac{45}{\text{sen } a} = \frac{75}{\text{sen } b} = \frac{114.8010}{\text{sen } 145°}$$

$$\frac{45 \times \text{sen } 145°}{114.8010} = \text{sen } a \qquad a = \text{sen}^{-1}\, 0.2248 = 12.99 \approx 13°$$

$$\frac{75 \times \text{sen } 145°}{114.8010} = \text{sen } b \qquad b = \text{sen}^{-1}\, 0.3747 = 22.00 \approx 22°$$

Para determinar la dirección de la resultante, se debe sumar el ángulo al cual se encuentra el vector $\vec{A}$ (que es de 25°) más el ángulo interior b. De la figura 1.10, se tiene que:

$$\phi = 25° + b = 25 + 22 = 47°$$

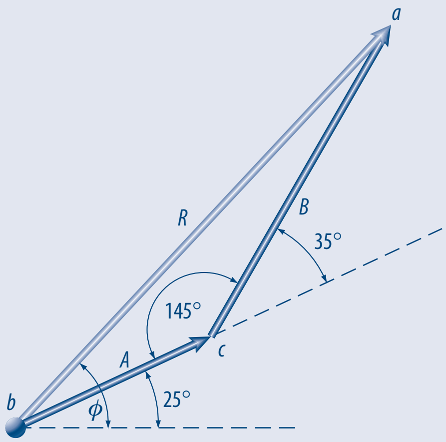

Figura 1.10
Suma vectorial del problema resuelto.

Problema resuelto

Ahora, se pide que se resuelva el mismo problema por el método de las componentes rectangulares. Para ello, primero se debe descomponer cada vector, obteniendo su componente en dirección *x* y *y* (véase figura 1.11).

Tabla 1.3

Vector	Magnitud (N)	Componente x	Componente y
$\vec{A}$	45	$45 \cos 25° = 40.7838$	$45 \text{ sen } 25° = 19.0178$
$\vec{B}$	75	$75 \cos 60° = 37.5000$	$75 \text{ sen } 60° = 64.9519$
		$\sum F_x = 78.2838$ N	$\sum F_y = 83.9697$ N

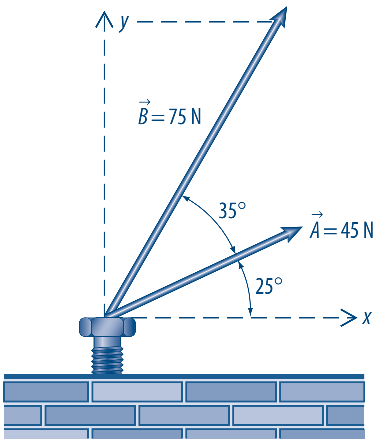

Figura 1.11
Fuerzas en el tornillo.

Solución

Para obtener el valor de la resultante, primero se aplica el teorema de Pitágoras, con el que se obtiene:

$$R^2 = F_x^{\,2} + F_y^{\,2} = (78.2838)^2 + (83.9697)^2 = 13\,179.2639$$

$$R = \sqrt{13\,179.2639} = 114.8010 \text{ N}$$

Para obtener la dirección de la resultante, se utiliza la siguiente función trigonométrica:

$$\tan \phi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{83.9697}{78.2838} \qquad \phi = \tan^{-1} 1.0726 = 47°$$

Problema resuelto

Varias fuerzas actúan de manera simultánea sobre una armella, como se muestra en la figura 1.12. Calcular la magnitud de la resultante y la dirección en la que actúa.

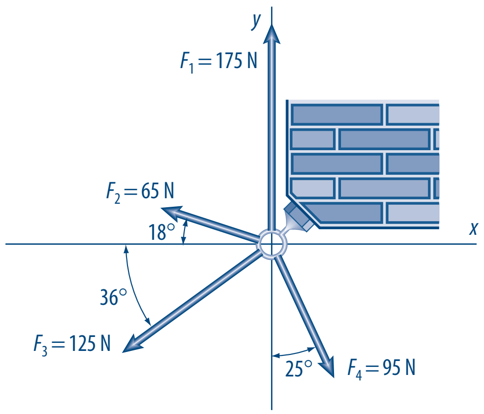

Figura 1.12
Fuerzas en la armella.

Solución

El método más recomendable para resolver este problema es mediante componentes rectangulares, ya que se trata de cuatro fuerzas que actúan simultáneamente. La figura 1.13 muestra las componentes rectangulares de cada vector.

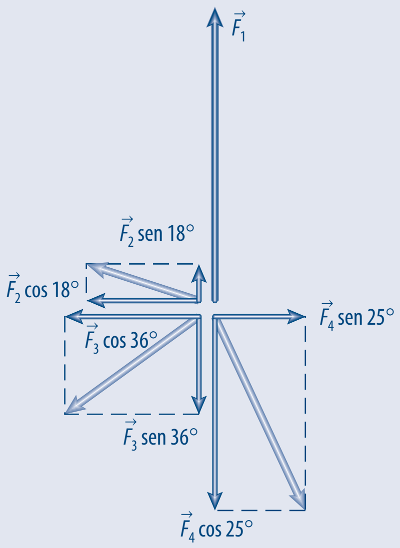

Figura 1.13

Descomposición de las fuerzas en la armella.

Primero, se procede a calcular las componentes de cada vector fuerza:

Tabla 1.4

Vector	Magnitud (N)	Componente $x(+)$	Componente $x(-)$	Componente $y(+)$	Componente $y(-)$
$\vec{F}_1$	175			175	
$\vec{F}_2$	65		65 cos 18° = 61.8187	65 sen 18° = 20.0861	
$\vec{F}_3$	125		125 cos 36° = 101.1271		125 sen 36° = 73.4732
$\vec{F}_4$	95	95 sen 25° = 40.1487			95 cos 25° = 86.0992
		= 40.1487 N	= 162.9458 N	= 195.0861 N	= 159.5724 N
		$\sum F_x(+)$	$\sum F_x(-)$	$\sum F_y(+)$	$\sum F_y(-)$

$$\sum F_x = 40.1487 - 162.9458 = -122.7971 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 195.0861 - 159.5724 = 35.5137 \text{ N}$$

$$R^2 = F_x^{\,2} + F_y^{\,2} = (-122.7971)^2 + (35.5137)^2 = 16\,340.3507$$

$$R = \sqrt{16\,340.3507} = 127.8294 \text{ N}$$

La dirección de la resultante está dada por:

$$\tan\phi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{35.5137}{122.7971} \qquad \phi = \tan^{-1} 0.2892 = 16.13°$$

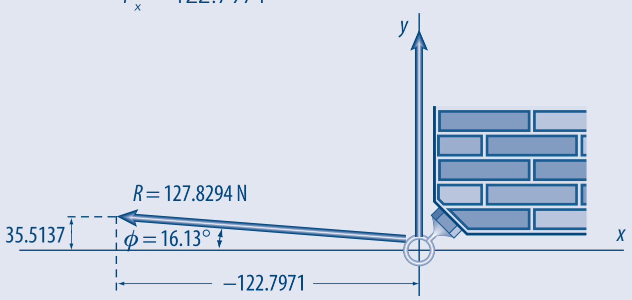

Figura 1.14

Problema resuelto

Dos cables de acero sostienen un equipo que será colocado sobre una lancha o balsa; el peso del equipo es de 875 kg. Determinar la fuerza de tensión que se presenta en cada cable, si el equipo se encuentra en la posición que se muestra en la figura 1.16.

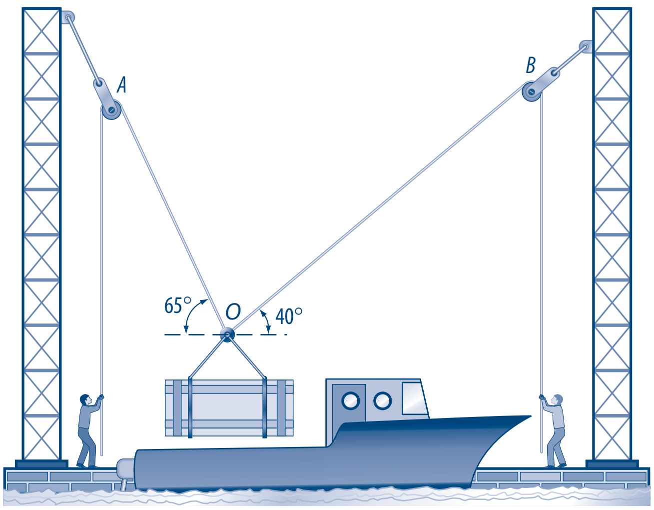

Figura 1.16

Solución

Primero, hay que convertir el peso del equipo a una fuerza atraída por la gravedad, con la cual se obtiene:

$$F = mg$$

Donde g es la aceleración debida a la gravedad:

$$g = 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{F} = 875\ \text{kg} \times \left(9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 8\,583.75\ \text{N}$$

Luego, se dibuja un diagrama de cuerpo libre (véase figura 1.17), donde se representen las fuerzas que actúan simultáneamente en el punto O.

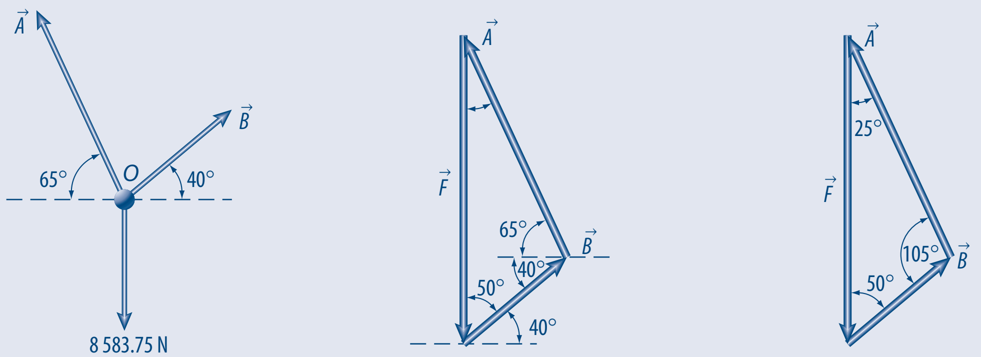

Figura 1.17

En seguida, se calculan los ángulos interiores del triángulo mediante geometría, sumas y restas.

Alerta

Recuerda que un **diagrama de cuerpo libre** es un dibujo simplificado que representa a la partícula y a las fuerzas que actúan en esta (véase figura 1.15).

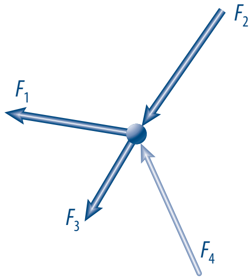

Figura 1.15
Diagrama de cuerpo libre.

Por último, a través de la Ley de los senos se obtiene finalmente la fuerza de tensión que se presenta en los cables A y B:

$$\frac{A}{\text{sen } a} = \frac{B}{\text{sen } b} = \frac{F}{\text{sen } c} \qquad \frac{A}{\text{sen } 50°} = \frac{B}{\text{sen } 25°} = \frac{8\,583.75}{\text{sen } 105°}$$

$$\frac{8\,583.75 \times \text{sen } 50°}{\text{sen } 105°} = A \qquad A = 6\,807.4937 \text{ N}$$

$$\frac{8\,583.75 \times \text{sen } 25°}{\text{sen } 105°} = B \qquad B = 3\,755.6191 \text{ N}$$

Problema resuelto

Un perfil de acero es levantado por una grúa, mediante dos cables A y B, como se muestra en la figura 1.18. Determinar la magnitud y dirección de la fuerza resultante R.

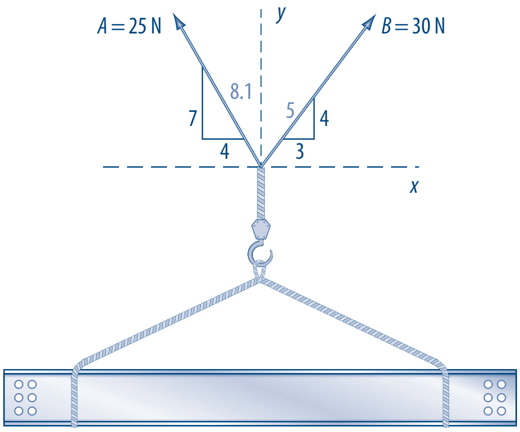

Figura 1.18

Solución

Para resolver este problema, primero se calculan las componentes de cada vector de la siguiente forma:

$$A_x = 25\left(\frac{4}{8.1}\right) = 12.3457 \text{ N} \qquad \text{en dirección } -x$$

$$A_y = 25\left(\frac{7}{8.1}\right) = 21.6049 \text{ N} \qquad \text{en dirección } +y$$

$$B_x = 30\left(\frac{3}{5}\right) = 18.00 \text{ N} \qquad \text{en dirección } +x$$

$$B_y = 30\left(\frac{4}{5}\right) = 24.00 \text{ N} \qquad \text{en dirección } +y$$

Tabla 1.5

Vector	Magnitud (N)	Componente x (+)	Componente x (–)	Componente y (+)	Componente y (–)
$\vec{A}$	25		12.3457	21.6049	
$\vec{B}$	30	18.0000		24.0000	
		= 18.0000 N	= 12.3457 N	= 45.6049 N	
		$\sum F_x(+)$	$\sum F_x(-)$	$\sum F_y(+)$	$\sum F_y(-)$

$$\sum F_x = 18.00 - 12.3457 = 5.6543 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 45.6049 = 45.6049 \text{ N}$$

$$R^2 = F_x^{\,2} + F_y^{\,2} = (5.6543)^2 + (45.6049)^2 = 2111.7780$$

$$R = \sqrt{2\,111.7780} = 45.9541 \text{ N}$$

La dirección de la resultante está dada por:

$$\tan\phi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{45.6049}{5.6543} \qquad \phi = \tan^{-1} 8.0655 = 82.93°$$

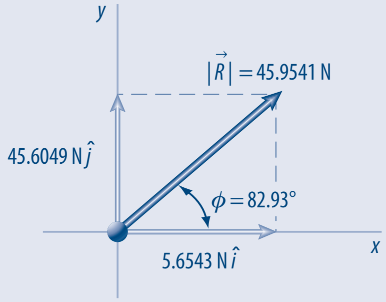

Figura 1.19

1.9 Componentes rectangulares de un vector en el espacio

Para el espacio, se tiene que las componentes de un vector son:

$$\vec{F} = \vec{F}_{xi} + \vec{F}_{yj} + \vec{F}_{zk}$$

Dichas componentes se obtienen proyectando el vector $\vec{F}$ sobre los ejes x, y y z, mediante los ángulos ϕ_x, ϕ_y y ϕ_z, que el vector forma con cada uno de los ejes. La componente en cada dirección se obtiene como sigue:

$$\vec{F}_{xi} = \vec{F} \cos\phi_x \qquad \vec{F}_{yj} = \vec{F} \cos\phi_y \qquad \vec{F}_{zk} = \vec{F} \cos\phi_z$$

A los cosenos de ϕ_x, ϕ_y y ϕ_z se les conoce como cosenos directores:

$$\cos\phi_x, \cos\phi_y, \cos\phi_z$$

La figura 1.20 representa las componentes rectangulares de un vector $\vec{F}$ en el espacio, donde F_y muestra la proyección vertical sobre el eje y, y F_h muestra la proyección sobre un plano horizontal xz. El vector F_h se proyecta nuevamente sobre los ejes x y z, obteniendo las componentes F_x y F_z.

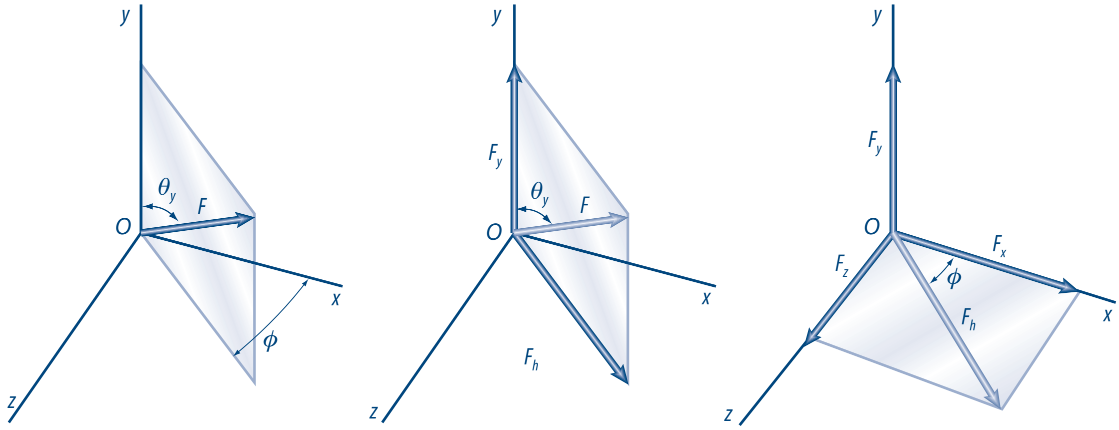

Figura 1.20

Por su parte, la figura 1.21 muestra la obtención de los vectores $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ y $\vec{F}_z$, a partir de sus cosenos directores.

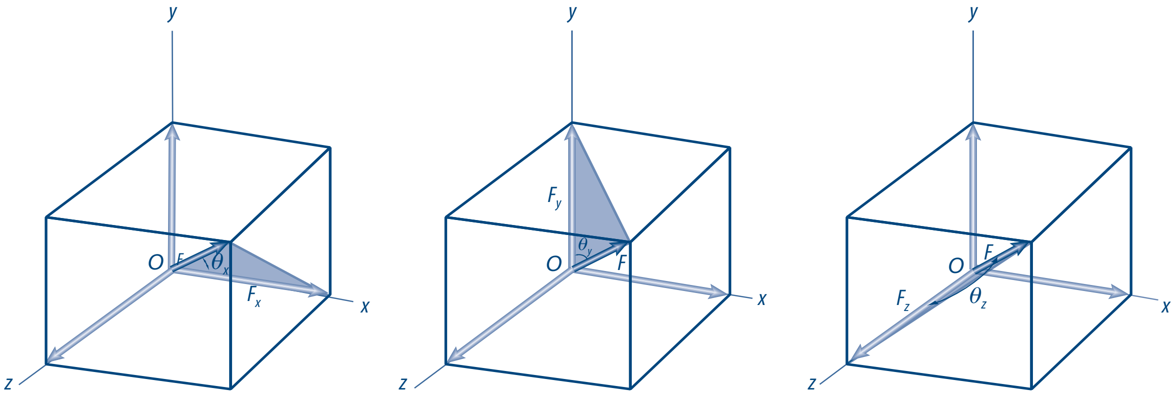

Figura 1.21

1.10 Vectores unitarios

Un vector unitario es aquel que posee las mismas propiedades que su vector original, pero su magnitud es la unidad, por lo que su dirección y sentido permanecen iguales. En la figura 1.22 se muestra el vector $\vec{F}$, con una magnitud de 5 N, y su vector unitario $\hat{f}$, con una magnitud de 1 N. La forma de obtener dicho vector es dividiendo cada una de sus componentes rectangulares $\vec{F}_{xi}$, $\vec{F}_{yj}$ y $\vec{F}_{zk}$, entre el módulo o la magnitud del vector, que se encuentra dado por:

$\vec{F} = \vec{F}_{xi} + \vec{F}_{yj} + \vec{F}_{zk}$ componentes del vector F.

$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ módulo del vector F para el espacio.

$\hat{f} = \dfrac{\vec{F}_{xi}}{|F|} + \dfrac{\vec{F}_{xj}}{|F|} = \hat{f}_{xi} + \hat{f}_{yj}$ componentes del vector unitario f en el plano.

$\hat{f} = \dfrac{\vec{F}_{xi}}{|F|} + \dfrac{\vec{F}_{xj}}{|F|} + \dfrac{\vec{F}_{zk}}{|F|} = \hat{f}_{xi} + \hat{f}_{yj} + \hat{f}_{zk}$ componentes del vector unitario f en el espacio.

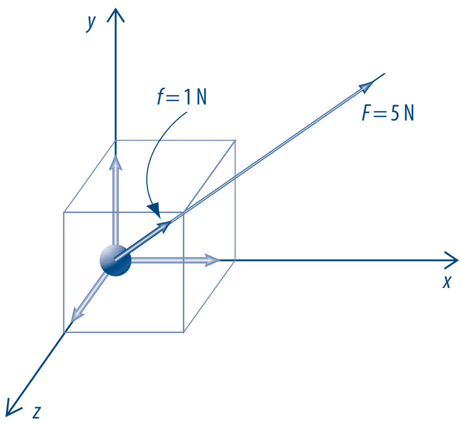

Figura 1.22

Problema resuelto

Una grúa sostiene una estructura metálica, como se muestra en la figura 1.23, hasta que el cable *AP* se tensa con una fuerza de 3.45 kN.

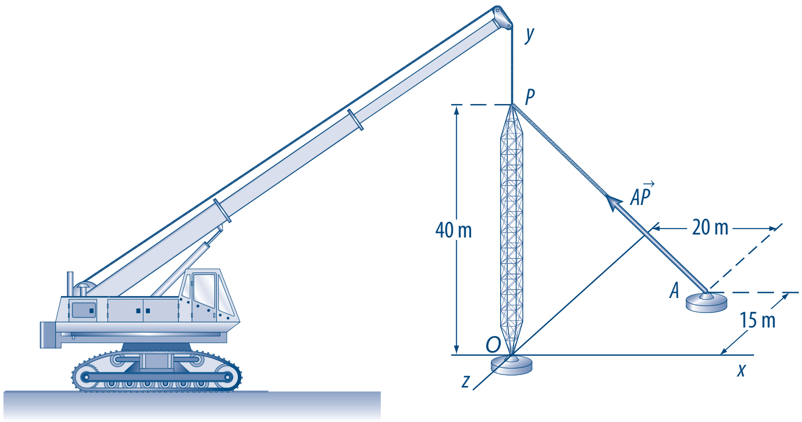

Figura 1.23

Determinar:

a) Las componentes F_x, F_y y F_z del vector $\overrightarrow{AP}$.

b) Los ángulos θ_x, θ_y y θ_z, que forman el vector $\overrightarrow{AP}$ con los ejes *x* y *z*.

Solución

a)

Primero, se calcula el vector distancia del punto *A* al punto *P*:

$$\overrightarrow{AP} = d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k} = -20\text{ m}\,\hat{i} + 40\text{ m}\,\hat{j} + 15\text{ m}\,\hat{k}$$

Luego, se calcula el módulo de $|\overrightarrow{AP}|$ como:

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{dx^2i + dy^2j + dz^2k} = \sqrt{(-20)^2 + (40)^2 + (15)^2} = \sqrt{2\,225} = 47.17$$

Después, se obtiene el vector unitario de $\overrightarrow{AP}$ de la siguiente manera:

$$\vec{U}_{AP} = \frac{d_x}{|\overrightarrow{AP}|}\hat{i} + \frac{d_y}{|\overrightarrow{AP}|}\hat{j} + \frac{d_z}{|\overrightarrow{AP}|}\hat{k} = \frac{-20\text{ m}}{47.17}\hat{i} + \frac{40\text{ m}}{47.17}\hat{j} + \frac{15\text{ m}}{47.17}\hat{k}$$

$$\vec{U}_{AP} = 0.4240\,\hat{i} + 0.8480\,\hat{j} + 0.3180\,\hat{k}$$

Por último, la fuerza de 3.45 kN se convierte en un vector fuerza, utilizando las propiedades del vector unitario (dirección y sentido), las cuales son las mismas que el vector distancia.

$$\vec{F}_{AP} = F(U_{APx}\hat{i} + U_{APy}\hat{j} + U_{APz}\hat{k}) = (3.45\text{ kN})(0.4240\,\hat{i} + 0.8480\,\hat{j} + 0.3180\,\hat{k})$$

$$\vec{F}_{AP} = F_{APx}\hat{i} + F_{APy}\hat{j} + F_{APz}\hat{k} = 1.4628\text{ kN}\,\hat{i} + 2.9256\text{ kN}\,\hat{j} + 1.0971\text{ kN}\,\hat{k}$$

$$F_{APx}\hat{i} = -1\,462.8\text{ N}\,\hat{i} \qquad F_{APy}\hat{j} = 2\,925.6\text{ N}\,\hat{j} \qquad F_{APz}\hat{k} = 1.0971\text{ N}\,\hat{k}$$

b)

Para calcular los ángulos directores, se utiliza la siguiente expresión:

$$\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{F_{APx}i}{F_{AP}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1\,462.8}{3\,450}\right) = \cos^{-1}(-0.424) = 115.1°$$

$$\theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{F_{APy}j}{F_{AP}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2\,925.6}{3\,450}\right) = \cos^{-1}(0.848) = 32.01°$$

$$\theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{F_{APz}k}{F_{AP}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1\,097.1}{3\,450}\right) = \cos^{-1}(0.318) = 71.16°$$

1.11 Equilibrio de la partícula

Se dice que una partícula se encuentra en equilibrio si la resultante de las fuerzas que actúan sobre esta es cero; es decir, se contrarrestan, como se muestra en la figura 1.24. Las ecuaciones que definen el equilibrio de la partícula son:

$$R = \sum F_i = 0 \qquad \sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$

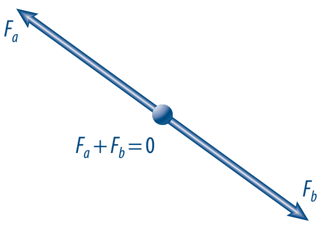

Figura 1.24

Problema resuelto

Determinar si la partícula *P* de la figura 1.25 se encuentra en equilibrio.

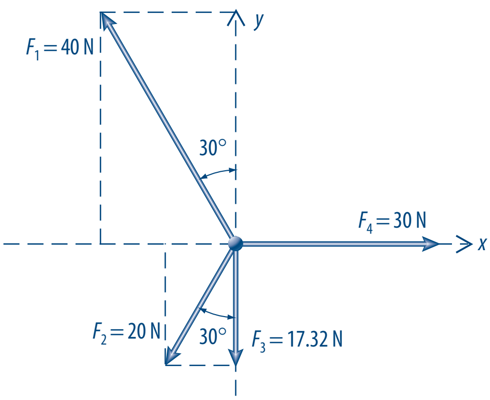

Figura 1.25

Solución

Primero, se calculan las componentes de cada vector en dirección *x* y *y*, a fin de formular las ecuaciones de equilibrio de la siguiente manera:

$\sum F_x = 0$ $\quad -F_{x_1} - F_{x_2} + F_{x_4} = 0$ $\quad -40 \text{ sen } 30° - 20 \text{ sen } 30° + 30 = 0$

$\sum F_x = 0$ $\quad -20 - 10 + 30 = 0$ $\quad -30 + 30 = 0$ $\quad 0 = 0$

$\sum F_y = 0$ $\quad F_{y_1} - F_{y_2} - F_{y_3} = 0$ $\quad 40 \cos 30° - 20 \cos 30° - 17.32 = 0$

$\sum F_y = 0$ $\quad 4.641 - 17.321 - 17.32 = 0$ $\quad 34.641 - 34.641 = 0$ $\quad 0 = 0$

De lo anterior, se puede concluir que la partícula *P* se encuentra en equilibrio.

Problema resuelto

Determinar la fuerza de tensión P_y con la cual una grúa jala a la torre en el punto *P*, si dicha torre está anclada por tres cables: *A*, *B* y *C*, y la tensión en el cable *AP* es de F_a = 1.350 kips, como se aprecia en la figura 1.26.

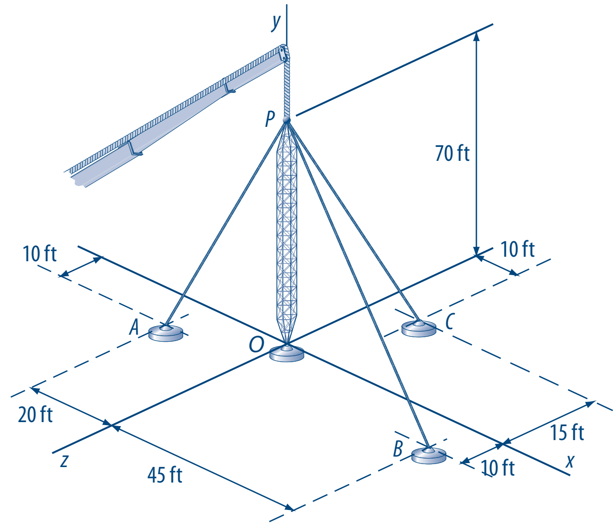

Figura 1.26

Solución

Primero, se calculan los vectores distancia del punto *P* a los puntos *A*, *B* y *C*:

$$\overrightarrow{AP} = d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k} = 20 \text{ ft } \hat{i} + 70 \text{ ft } \hat{j} - 10 \text{ ft } \hat{k}$$

$$\overrightarrow{BP} = d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k} = -45 \text{ ft } \hat{i} + 70 \text{ ft } \hat{j} - 10 \text{ ft } \hat{k}$$

$$\overrightarrow{CP} = d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k} = -10 \text{ ft } \hat{i} + 70 \text{ ft } \hat{j} - 15 \text{ ft } \hat{k}$$

Luego, se calculan los módulos de $|\overrightarrow{AP}|$, $|\overrightarrow{BP}|$ y $|\overrightarrow{CP}|$ como:

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(20)^2 + (70)^2 + (-10)^2} = \sqrt{5\,400} = 73.4847$$

$$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(-45)^2 + (70)^2 + (-10)^2} = \sqrt{7\,025} = 83.8153$$

$$|\overrightarrow{CP}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(-10)^2 + (70)^2 + (15)^2} = \sqrt{5\,225} = 72.2842$$

Aún faltan las unidades (ft).

Después, calculamos los vectores unitarios de $|\overrightarrow{AP}|$, $|\overrightarrow{BP}|$ y $|\overrightarrow{CP}|$ de la siguiente manera:

$$\vec{U}_{AP} = \frac{d_x\hat{i}}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{d_y\hat{j}}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{d_z\hat{k}}{|\overrightarrow{AP}|} = \frac{20 \text{ ft}}{73.4847}\hat{i} + \frac{70 \text{ ft}}{73.4847}\hat{j} + \frac{-10 \text{ ft}}{73.4847}\hat{k}$$

$$\vec{U}_{AP} = 0.2722\,\hat{i} + 0.9526\,\hat{j} - 0.1361\,\hat{k}$$

$$\vec{U}_{BP} = \frac{d_x\hat{i}}{|\overrightarrow{BP}|} + \frac{d_y\hat{j}}{|\overrightarrow{BP}|} + \frac{d_z\hat{k}}{|\overrightarrow{BP}|} = \frac{-45 \text{ ft}}{83.8153}\hat{i} + \frac{70 \text{ ft}}{83.8153}\hat{j} + \frac{-10 \text{ ft}}{83.8153}\hat{k}$$

$$\vec{U}_{BP} = -0.5369\,\hat{i} + 0.8352\,\hat{j} - 0.1193\,\hat{k}$$

$$\vec{U}_{CP} = \frac{d_x\hat{i}}{|\overrightarrow{CP}|} + \frac{d_y\hat{j}}{|\overrightarrow{CP}|} + \frac{d_z\hat{k}}{|\overrightarrow{CP}|} = \frac{-10\text{ ft}}{72.2842}\hat{i} + \frac{70\text{ ft}}{72.2842}\hat{j} + \frac{15\text{ ft}}{72.2842}\hat{k}$$

$$\vec{U}_{CP} = -0.1383\,\hat{i} + 0.9684\,\hat{j} - 0.2075\,\hat{k}$$

Por último, los vectores unitarios (distancia) se convierten en vectores fuerza y se plantean las ecuaciones de equilibrio, considerando que la fuerza de tensión que ejerce la grúa hacia arriba se denomina $P_y\hat{j}$:

$$\vec{F}_{AP} = Fa \times (U_{APx}\hat{i} + U_{APy}\hat{j} + U_{APz}\hat{k}) = (Fa)(0.2722\,\hat{i} + 0.9526\,\hat{j} - 0.1361\,\hat{k})$$

$$\vec{F}_{AP} = (1.350\text{ kips})(0.2722\,\hat{i} + 0.9526\,\hat{j} - 0.1361\,\hat{k})$$

$$\vec{F}_{AP} = (0.3675\,\hat{i} + 1.2860\,\hat{j} - 0.1837\,\hat{k})$$

$$\vec{F}_{BP} = Fb \times (U_{BPx}\hat{i} + U_{BPy}\hat{j} + U_{BPz}\hat{k}) = (Fb)(-0.5369\,\hat{i} + 0.8352\,\hat{j} - 0.1193\,\hat{k})$$

$$\vec{F}_{BP} = (-0.5369Fb\,\hat{i} + 0.8352Fb\,\hat{j} - 0.1193Fb\,\hat{k})$$

$$\vec{F}_{CP} = Fc \times (U_{CPx}\hat{i} + U_{CPy}\hat{j} + U_{CPz}\hat{k}) = (Fc)(-0.1383\,\hat{i} + 0.9684\,\hat{j} + 0.2075\,\hat{k})$$

$$\vec{F}_{CP} = (-1.1383Fc\,\hat{i} + 0.9684Fc\,\hat{j} + 0.2075Fb\,\hat{k})$$

$$\sum F_x i = 0 \qquad 0.3675\,\hat{i} - 0.5369Fb\,\hat{i} - 0.1383Fc\,\hat{i} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y j = 0 \qquad 1.2860\,\hat{j} + 0.8352Fb\,\hat{j} + 0.9684Fc\,\hat{j} + P_y\hat{j} = 0 \qquad (2)$$

$$\sum F_z k = 0 \qquad -0.1837\,\hat{k} - 0.1193Fb\,\hat{k} + 0.2075Fc\,\hat{k} = 0 \qquad (3)$$

El sistema de tres ecuaciones se resuelve con tres incógnitas:

$$0.3675 - 0.5369\,Fb = 0.1383\,Fc$$

Luego, se despeja Fc de la ecuación 1:

$$Fc = \frac{0.3675}{0.1383} - \frac{0.5369\,Fb}{0.1383} = 2.6573 - 3.8821\,Fb$$

$$-0.1837 - 0.1193\,Fb + (0.2075)(2.6573 - 3.8821\,Fb) = 0$$

Después, se sustituye el valor de Fc en la ecuación 3, para obtener Fb:

$$-0.1837 - 0.1193\,Fb + 0.5514 - 0.8055\,Fb = 0$$

$$0.3677 - 0.9251\,Fb = 0$$

$$0.3677 = 0.9251\,Fb$$

$$Fb = \frac{0.3677}{0.9251} = 0.3974\text{ kips}$$

$$Fc = 2.6573 - 3.8821(0.3974) = 1.1146\text{ kips}$$

$$1.2860 + 0.8352(0.3974) + 0.9684(1.1146) = -P_y$$

Finalmente, con el valor de Fc y Fb, se obtiene el valor de P_y de la ecuación 2.

$$1.2860 + 0.3319 + 1.0794 = -P_y$$

$$P_y\hat{j} = -2.6873\text{ kips}$$

Problemas para resolver

1.1 Para que un barco atraque se utilizan tres cables, como se muestra en la figura 1.27. Calcular:

a) Las componentes *x* y *y* de cada uno de cables.
b) La magnitud de la resultante.
c) La dirección de la resultante.

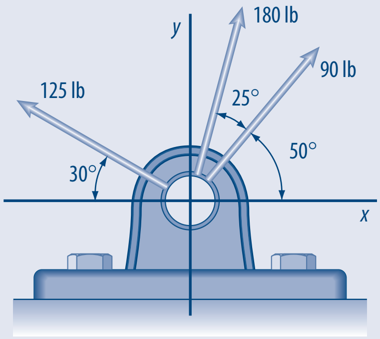

Figura 1.27

1.2 Para que un barco atraque en un puerto se utilizan tres cables, como se muestra en la figura 1.28. Calcular:

a) Las componentes *x* y *y* de cada uno de cables.
b) La magnitud de la resultante.
c) La dirección de la resultante.

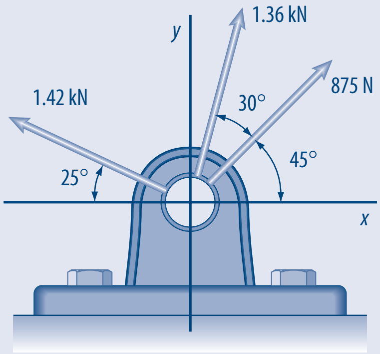

Figura 1.28

1.3 En el techo de un taller se coloca una argolla de la cual cuelgan tres cables, como se muestra en la figura 1.29. Calcular:

a) Las componentes *x* y *y* de cada uno de cables.
b) La magnitud de la resultante.
c) La dirección de la resultante.

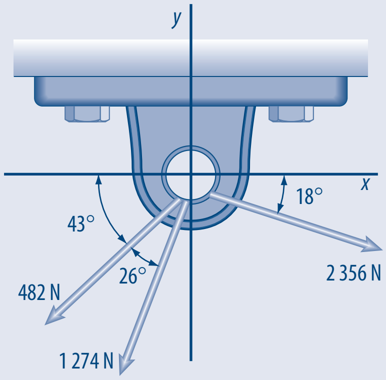

Figura 1.29

1.4 En la pared de una casa se coloca una argolla que sujeta tres cables, como se aprecia en la figura 1.30. Calcular:

a) Las componentes *x* y *y* de cada uno de cables.
b) La magnitud de la resultante.
c) La dirección de la resultante.

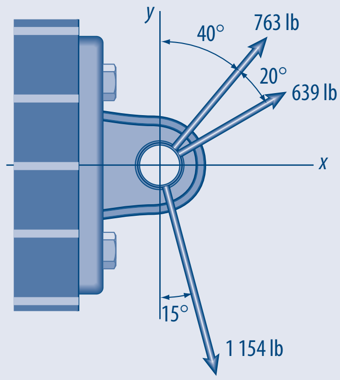

Figura 1.30

1.5 Una armella está sujeta a una losa, como muestra la figura 1.31, mientras tres cables están amarrados a esta. Calcular:

a) Las componentes *x* y *y* de cada uno de cables.
b) La magnitud de la resultante.
c) La dirección de la resultante.

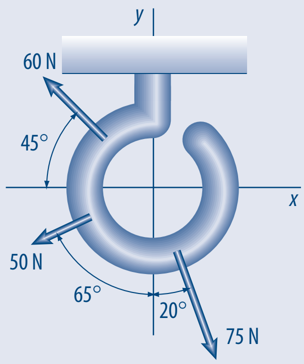

Figura 1.31

1.6 La armella que se representa en la figura 1.32 está sujeta a la acción de tres fuerzas. Calcular:

a) Las componentes *x* y *y* de cada uno de los cables.
b) La magnitud de la resultante.
c) La dirección de la resultante.

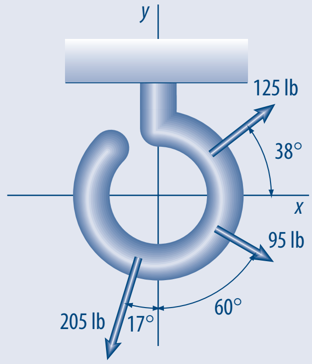

Figura 1.32