



# Fundamento de la Mecánica de los Medios Continuos

---

## UNIDAD I

Nombre de Tema:  
Fundamentos Matematicos

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

# MECANICA DEL MEDIO CONTINUO

# DEFINICION DE MECANICA

Mecánica es el estudio del movimiento o equilibrio de la materia y de las fuerzas que causan dicho movimiento o equilibrio.

La mecánica esta basada en el concepto de tiempo, espacio, fuerza, energía y materia

# RAMAS DE LA MECANICA

## a) Mecánica Analítica

- Estática
- Dinámica.

## b) Mecánica de Cuerpos Deformables

- Mecánica de Fluidos
- Mecánica de Sólidos
- Mecánica de Suelos
- Mecánica de Fracturas

# HISTORIA DE LA MECÁNICA

- Galileo en 1600 creó la resistencia de materiales y la cinemática.
- Torricelli dividió la mecánica de fluidos y la mecánica de sólidos.
- Newton estudió la cinemática.
- Bernoulli, Euler y Lagrange estudiaron problemas de vigas y columnas.
- Navier y Cauchy establecieron la Teoría de la Elasticidad.

# HISTORIA DE LA MECÁNICA

- Idealización de la Mecánica del Medio continuo como única Ciencia
- Diferente Ciencias: Hidráulica, resistencia de material, elasticidad y mecánica de suelos.
- Resistencia de Materiales nació con Galileo en 1638
- Torrecalli, la Mecánica de fluidos en 1644.
- En el siglo XVII solo se estudio la mecánica de fluidos y la mecánica de cuerpos rígidos.
- A principio del siglo XVIII se estudiaron vigas y columnas deformables ( Euler, Bernoulli).
- Prandtl unió el estudio de los gases y de los líquidos estableciendo la mecánica de fluidos
- Con el tiempo se unió la mecánica de materiales y la mecánica de fluidos para establecer el de Medio continuo

# MECÁNICA DE CUERPOS DEFORMABLES.

- Mecánica de Fluidos
- Mecánica de Sólidos
- Un Sólido se puede considerar como un Fluido de alta viscosidad.
- Un fluido se puede considerar como un sólido sujeto a grandes deformaciones y esfuerzos.

# MEDIO CONTINUOS

- Numero Reales
- Tiempo
- Espacio
- Fluido como el agua

Se puede decir que un medio continuo es aquel que no tiene grietas, tiene el mismo comportamiento y sin huecos



# MECÁNICA DE CUERPOS RÍGIDOS Y DEFORMABLES

## A) Mecánica Analítica

- Mecánica de Partículas
- Mecánica de Cuerpos Rígidos

## B) Mecánica del Medio Continuo

- Mecánica de Solidos

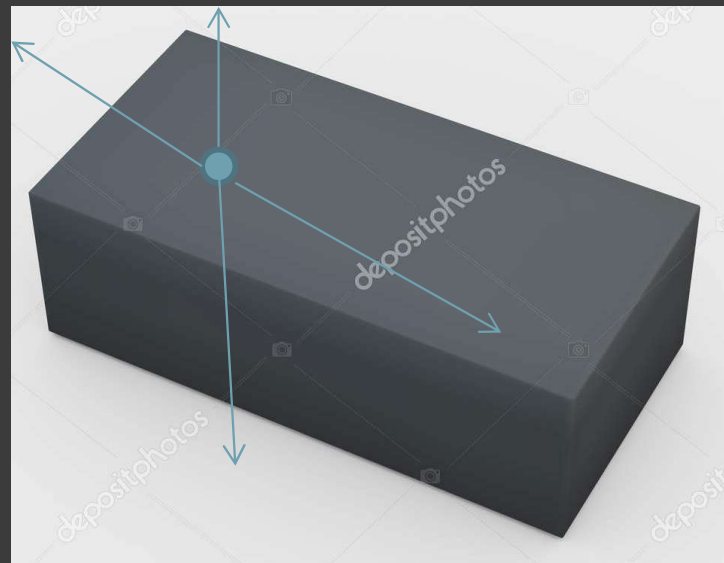
# HOMOGENIDAD

- Un material es homogéneo si sus propiedades no cambian



# ISOTROPÍA

- Cuando las partículas están distribuidas al azar y no existen direcciones preferenciales



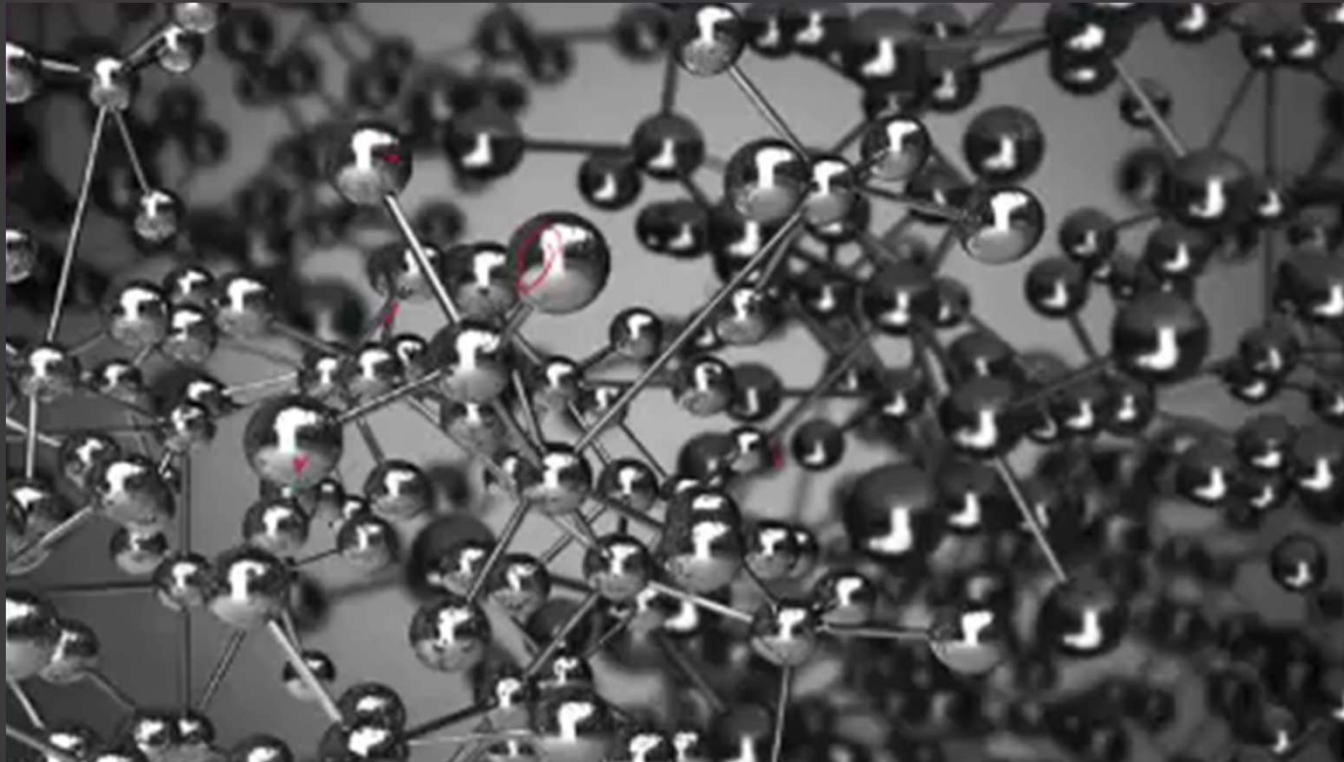
## ELASTICIDAD

- Es la propiedad de un cuerpo solido para recuperar su forma cuando cesa la fuerza que lo altera

## INELASTICIDAD O PLASTICIDAD

- Es cuando no tiene la propiedad de un cuerpo solido para recuperar su forma

# PROPIEDADES DEL MATERIAL



# CONCEPTO DE ESFUERZO

Las fuerzas externas que actúan en un instante en una cierta porción de cuerpo libre dentro de un medio continuo se clasifican en dos clases: fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie.

Las fuerzas de cuerpo actúan sobre elementos de masa o de volumen dentro del cuerpo (por ejemplo, la acción de la gravedad). Estas son fuerzas de acción a distancia, usualmente se consideran por unidad de masa o en ocasiones por unidad de volumen.

Las fuerzas de superficie son fuerzas de contacto que actúan sobre un diagrama de cuerpo libre, sobre su superficie. Usual mente se consideran por unidad de área de la superficie sobre la cual actúan.

# CONCEPTO DE ESFUERZO

En mecánica, las fuerzas reales siempre se ejercen de un cuerpo sobre otro cuerpo (posiblemente por una parte de un cuerpo actuando sobre una parte del otro) , independientemente de si ellas son fuerzas de cuerpo o fuerzas de superficie. Siempre están involucrados dos cuerpos, y por la tercera Ley de Newton, la fuerza ejercida por un cuerpo sobre otro es igual en magnitud, y de sentido contrario a la fuerza ejercida por el segundo cuerpo sobre el primero.

Las llamadas fuerzas de inercia utilizadas para establecer un estado de equilibrio ficticio en dinámica no son fuerzas reales, puesto que no son ejercidas por cuerpos; la tercera Ley de Newton no se aplica a estas fuerzas ficticias. Cuando el método de las fuerzas de inercia se utiliza en mecánica del medio continuo, las fuerzas de inercia ficticias se incluyen como fuerzas de cuerpo.

# DEFINICIÓN DE ESFUERZO

Consideremos un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas de superficie en equilibrio.

Hagamos un corte en cualquier dirección definiendo una superficie plana.

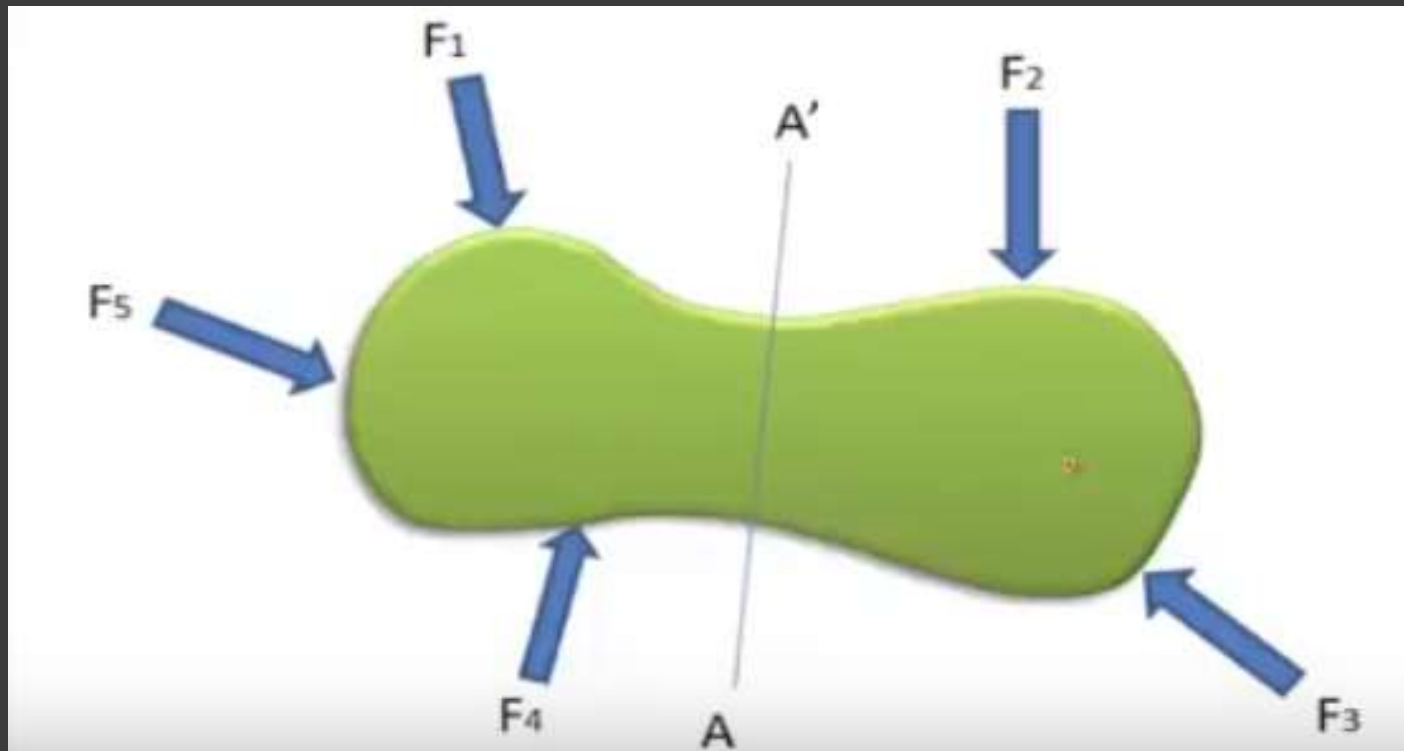
La fuerza  $F$  es resultante de las fuerzas exteriores que actúan en la porción separada.

Dividamos la fuerza  $F$  entre la magnitud del área cortada; a este cociente se le denomina esfuerzo medio en el área  $A$ .

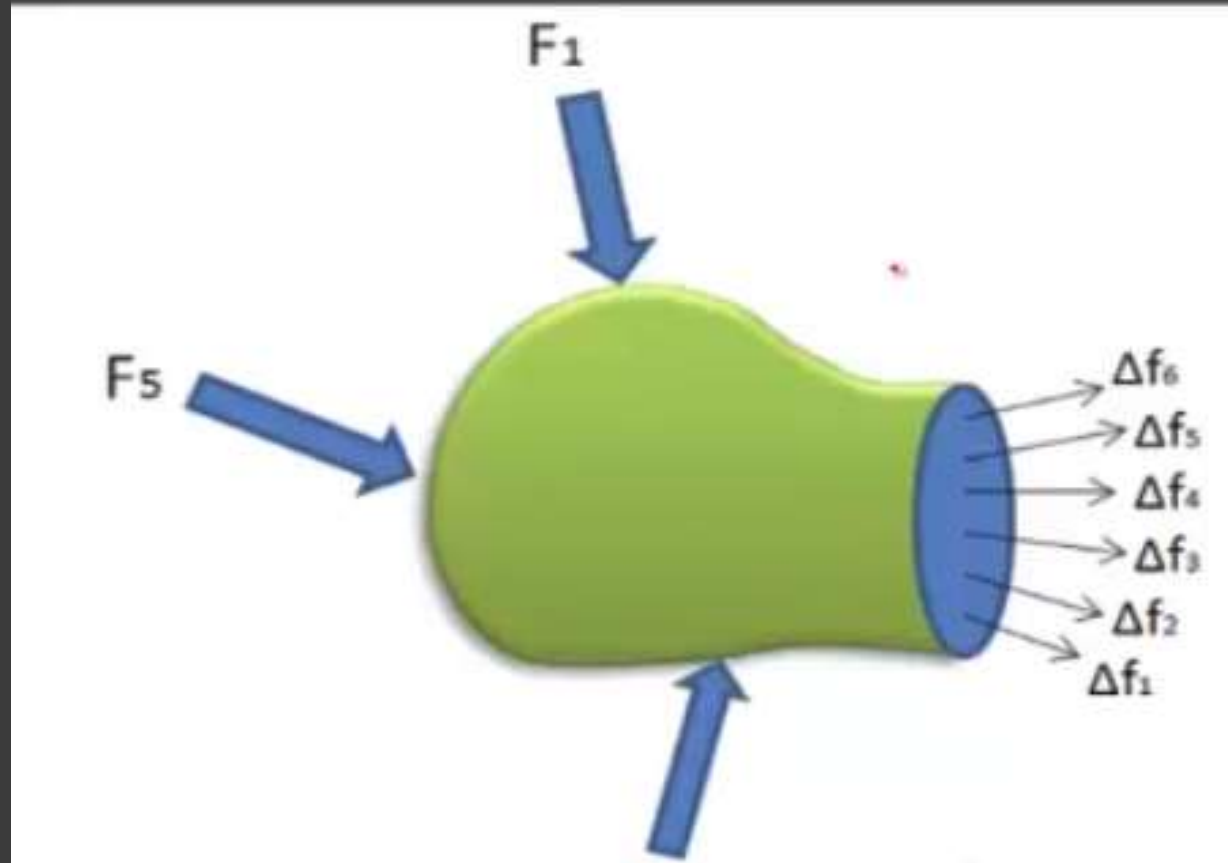
$$\overline{S}_m = \frac{\overline{F}}{A}$$



# CONCEPTO DE ESFUERZO



# CONCEPTO DE ESFUERZO



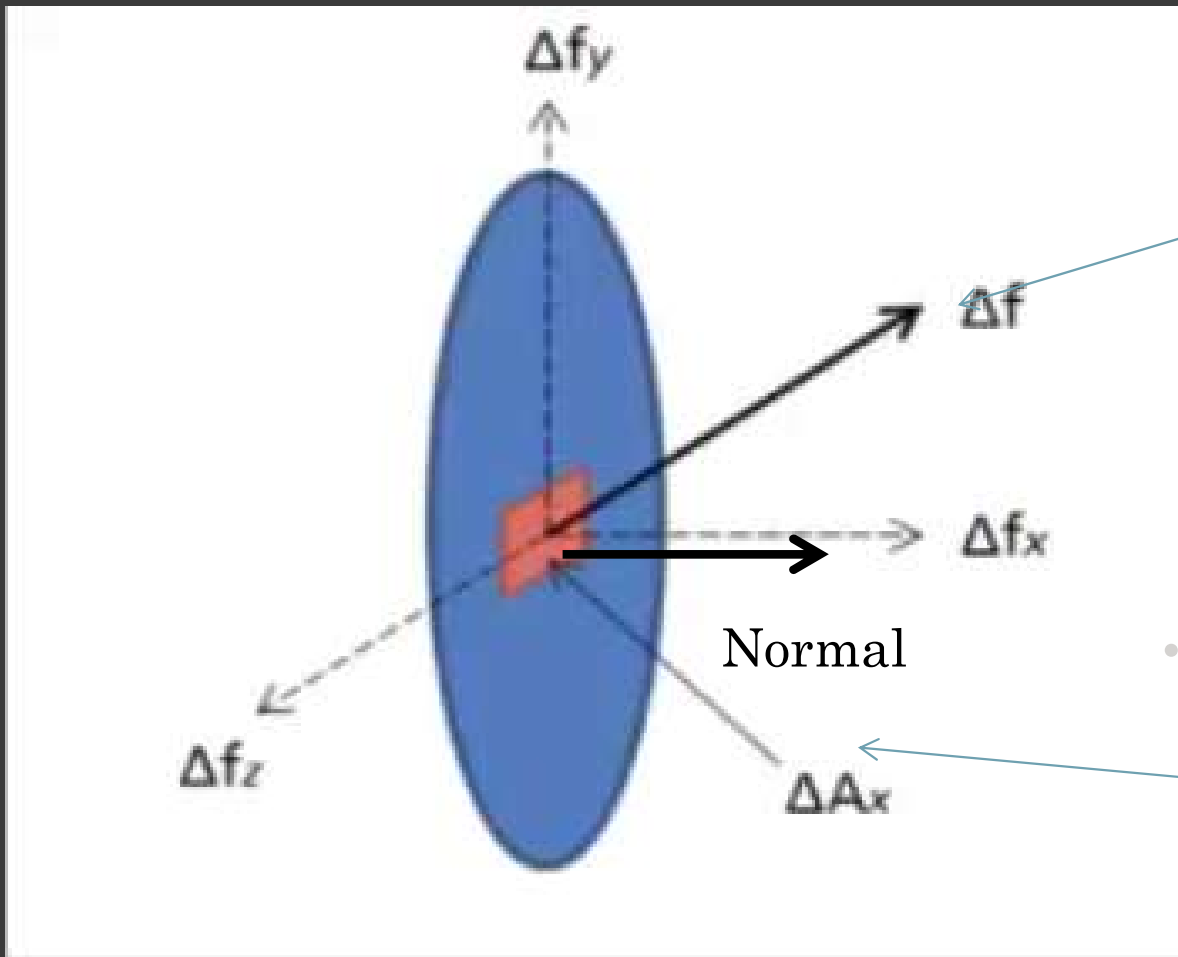
# ESFUERZO

El esfuerzo promedio o esfuerzo medio es el cociente de dividir la fuerza  $F$  que actúa sobre una cierta área  $A$  entre la misma área.

Consideremos ahora un área menor  $A_A$  contenida en el área cortada  $A$ , obtengamos la fuerza resultante  $A F$  sobre el área  $A$ .

En el caso general, la fuerza  $A F$  es diferente a la fuerza  $F$ , tanto en magnitud, dirección y sentido; por lo tanto, en el caso general, la fuerza  $A F$  no es proporcional a la fuerza  $F$ .

# CONCEPTO DE ESFUERZO



- Delta f

- Delta  $A_x$  (diferencial de area)

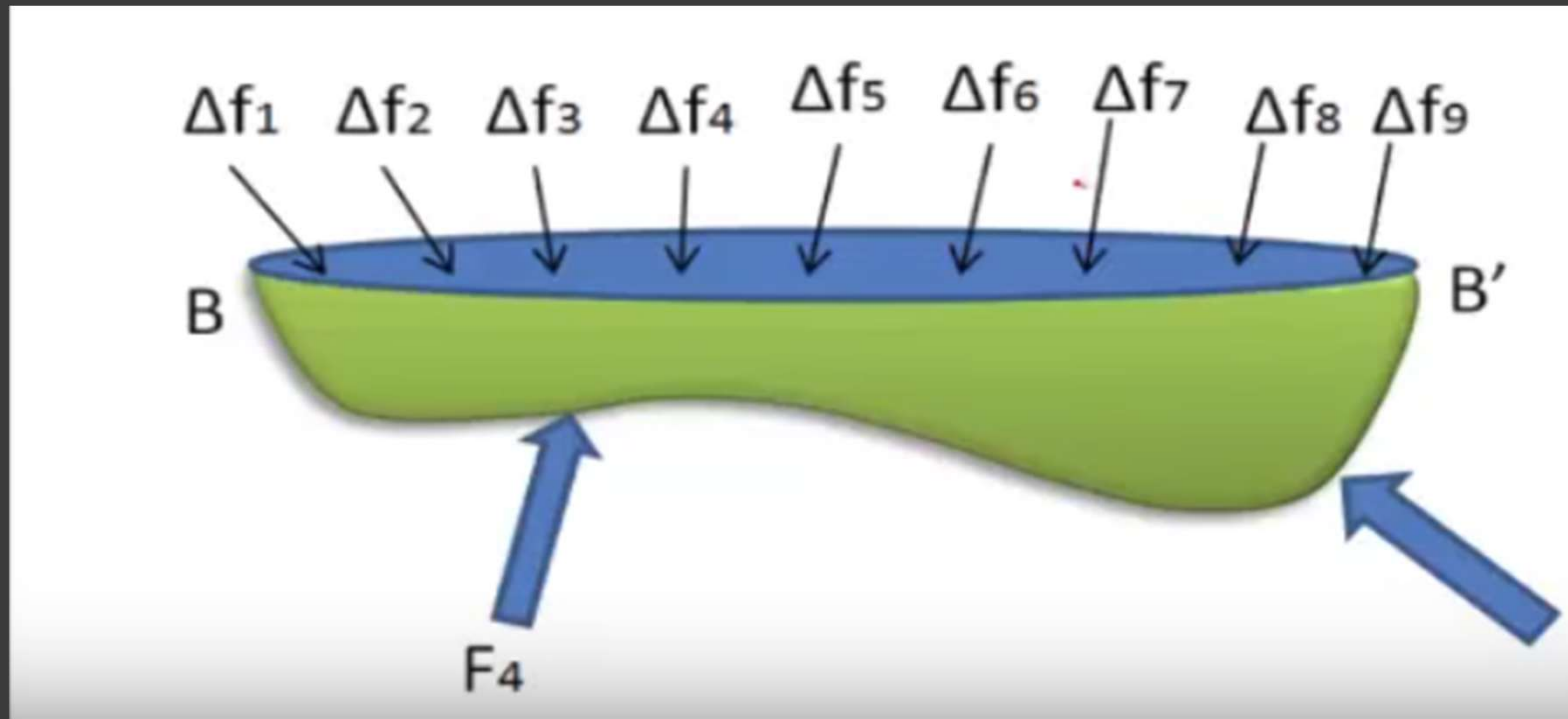
$$\bar{\sigma}_x = \Delta f_x / \Delta A_x$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \Delta f_y / \Delta A_x$$

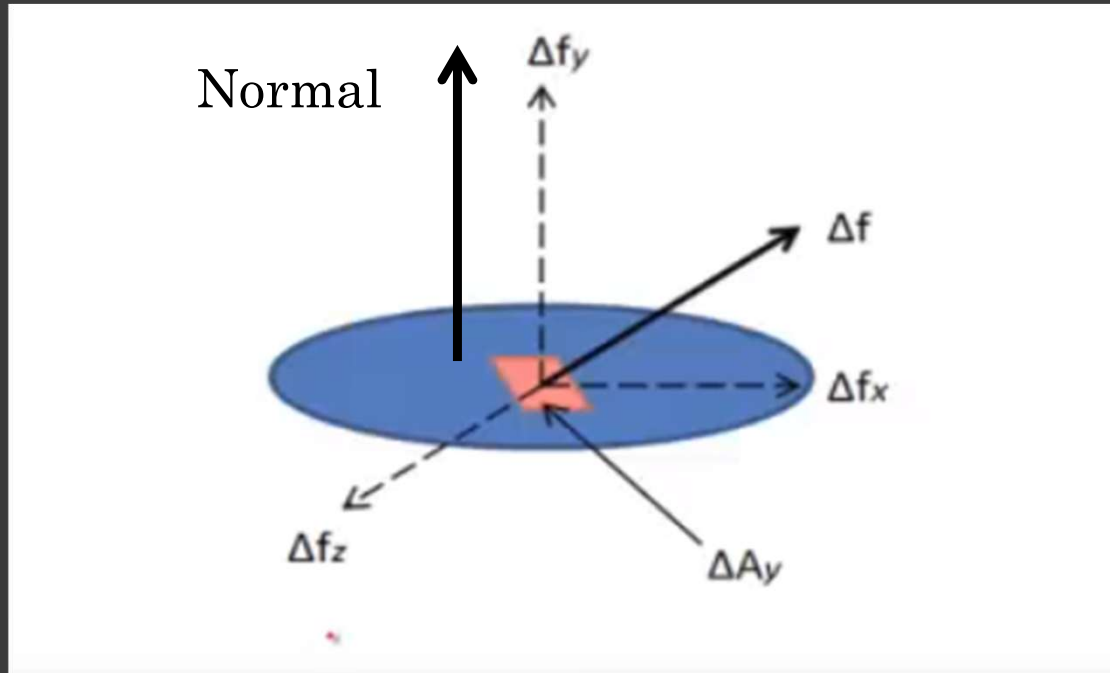
- Sigma

- Tau

# CONCEPTO DE ESFUERZO



# CONCEPTO DE ESFUERZO

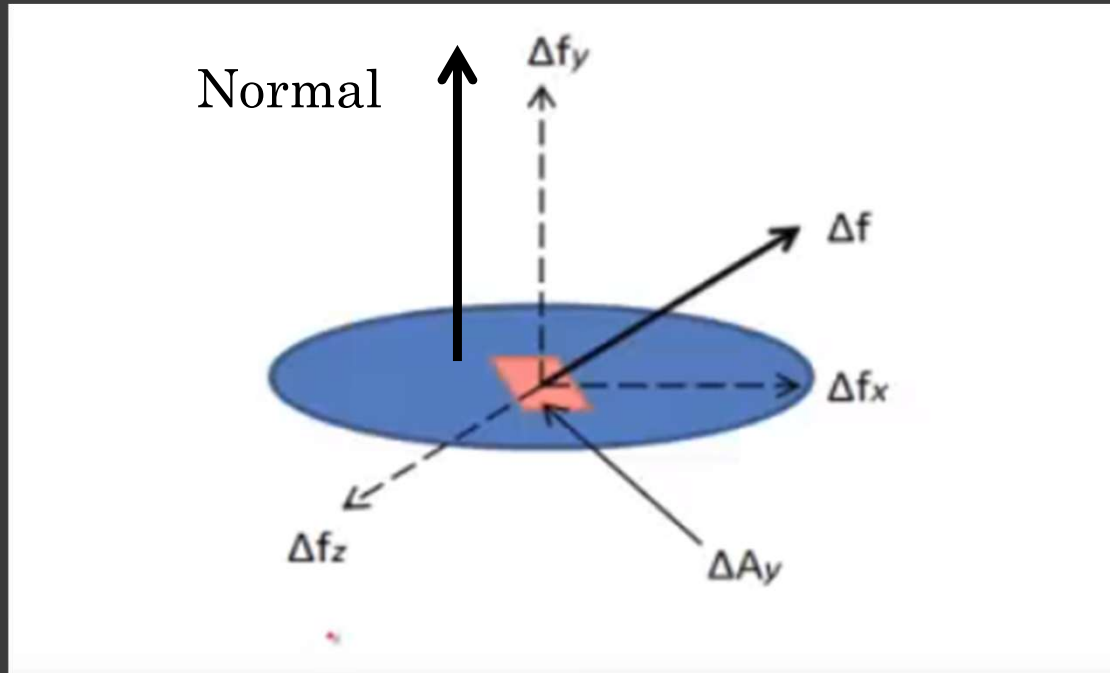


$$\bar{\sigma}_y = \Delta f_y /$$

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta f_x}{\Delta A_x} = \frac{df_x}{dA_x},$$

$$\tau_{xy} = \frac{df_y}{dA_x},$$

# CONCEPTO DE ESFUERZO



$$\bar{\sigma}_y = \Delta f_y /$$

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta f_x}{\Delta A_x} = \frac{df_x}{dA_x},$$

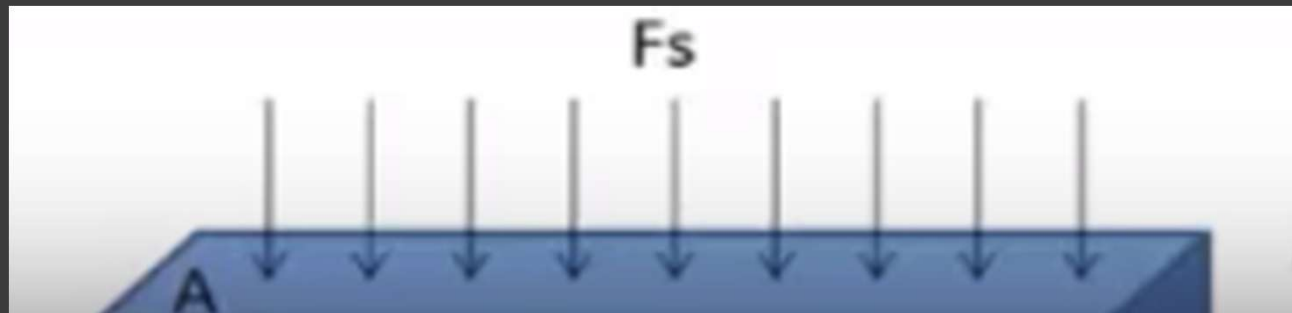
• Sigma

$$\tau_{xy} = \frac{df_y}{dA_x},$$

• Tau

# TIPOS DE FUERZAS

- FUERZAS DE SUPERFICIE.-
  - Son aquellas que actúan sobre la superficie del cuerpo y que se deben a un contacto directo con otro cuerpo. Son fuerzas de tracción y su intensidad esta dada por fuerza sobre unidad de área





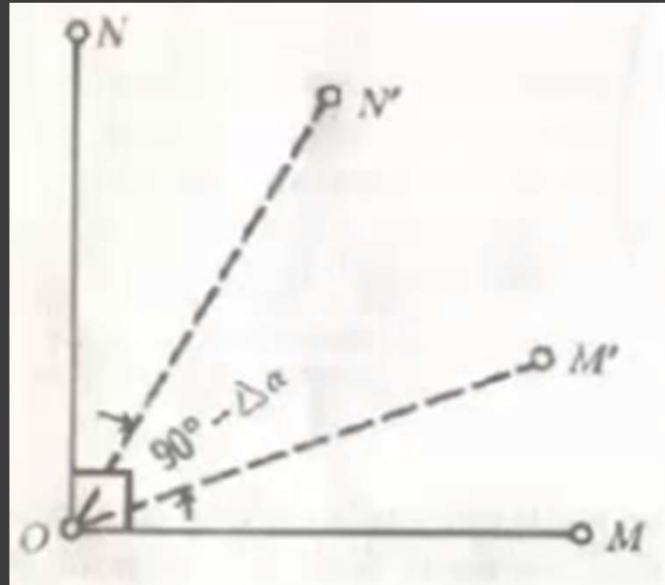
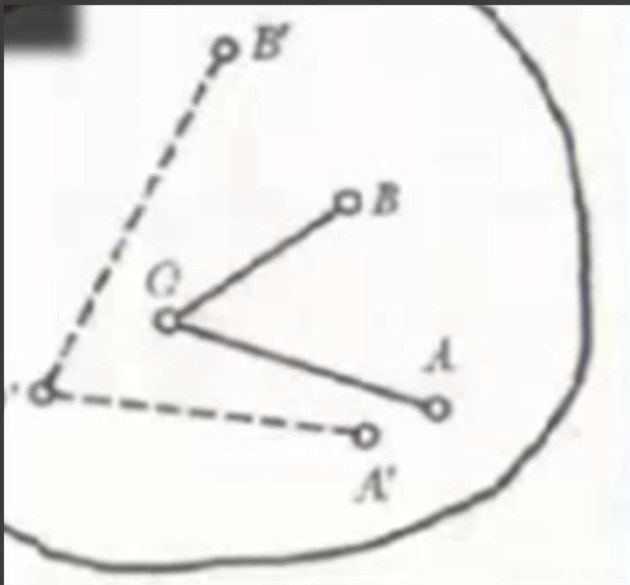
# TIPOS DE FUERZAS

- FUERZAS DE CUERPO
  - Son aquellas que están distribuida de manera continua en el medio o elemento y no se deben a un contacto directo con otro cuerpo, son fuerzas que actúan a distancia. Su intensidad esta dad en fuerza por unidad de volumen, ejemplo: la gravedad.

# TIPOS DE FUERZAS

- Diferencia entre Fuerzas de Superficie y Esfuerzo
- Una Fuerza de Superficie actúa en la parte exterior de un cuerpo mientras que el esfuerzo en su parte inferior

# DEFORMACIONES ISOTRÓPICAS Y DISTORSIONALES



$$\epsilon_l = \Delta l / l,$$

$$M'ON' = 90^\circ - \Delta\alpha,$$

$$\gamma_\alpha = \tan \Delta\alpha$$

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{2} \tan \Delta\alpha.$$

Una información isotrópica implica cambio de Volumen

La Deformación (E) es una propiedad Intensiva.

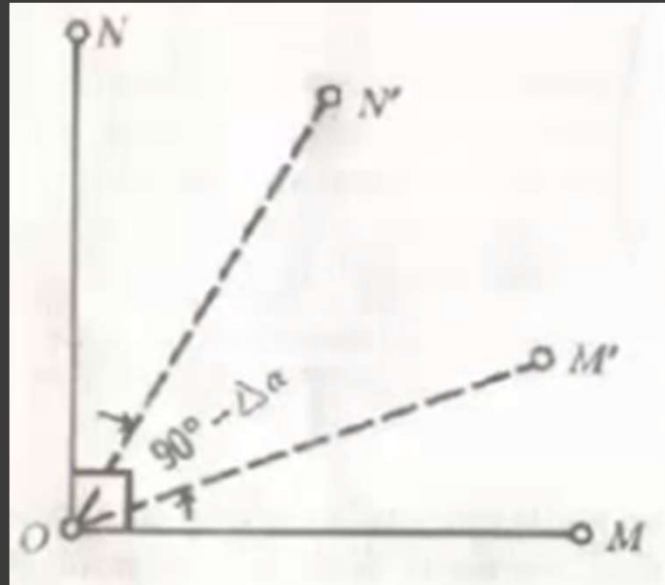
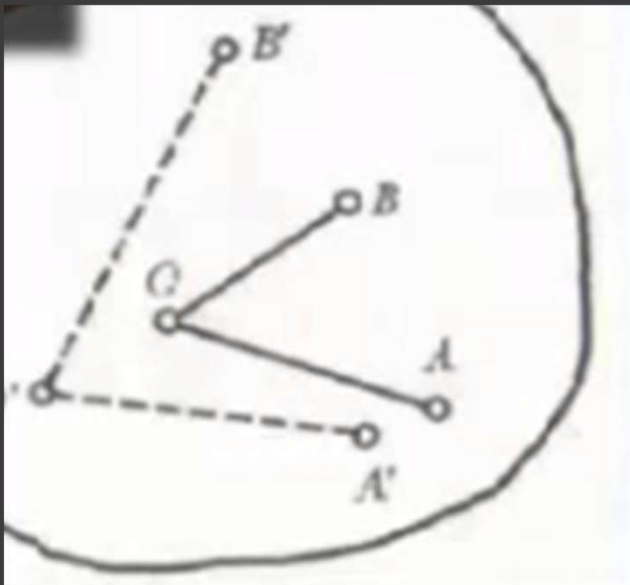
$$E = \Delta L / L$$

L= la longitud inicial.

$\Delta L$ = es el desplazamiento

La Deformación Distorsional cuando el elemento tiene cambio de Forma

# DEFORMACIONES ISOTRÓPICAS Y DISTORSIONALES



$$\epsilon_l = \Delta l / l,$$

$$M'ON' = 90^\circ - \Delta\alpha,$$

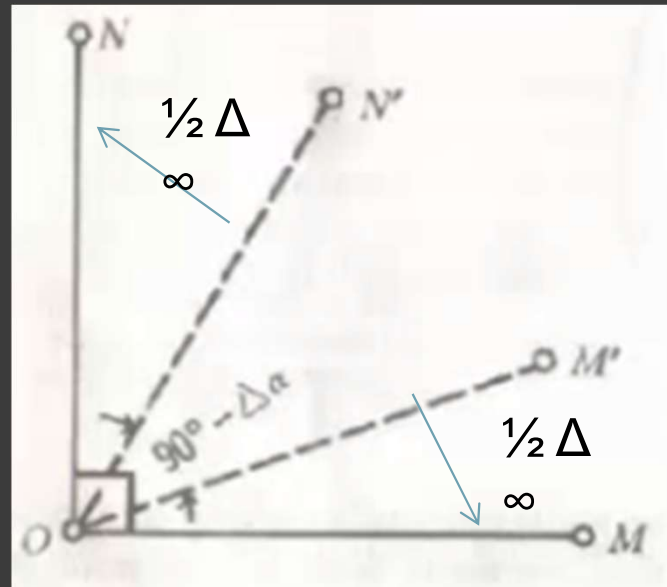
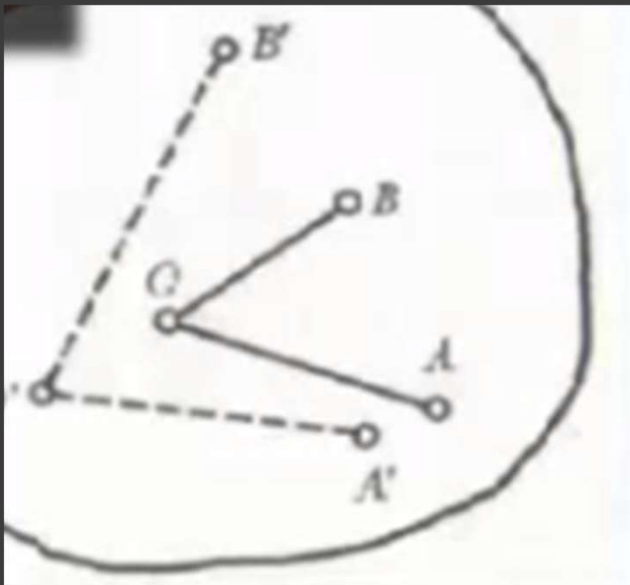
$$\gamma_\alpha = \tan \Delta\alpha$$

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{2} \tan \Delta\alpha.$$

A' y B' en el cual este punto se va a expresar al punto (A) y (B), lo cual vamos a tener una deformación y una deformación angular que le vamos a llamar gamma  $\infty$

Cuando la deformación de A' y B' en dirección de (A) y (B), es una deformación positiva y de lo contrario seria negativa.

# DEFORMACIONES ISOTRÓPICAS Y DISTORSIONALES



$$\epsilon_l = \Delta l / l,$$

$$M'ON' = 90^\circ - \Delta\alpha,$$

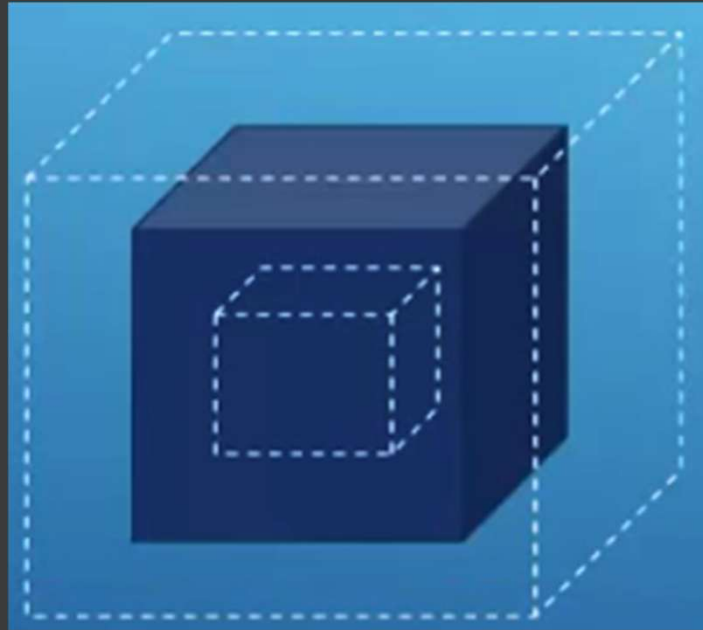
$$\gamma_\alpha = \tan \Delta\alpha$$

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{2} \tan \Delta\alpha.$$

$\Delta L = L \text{ final} - L \text{ Inicial}$

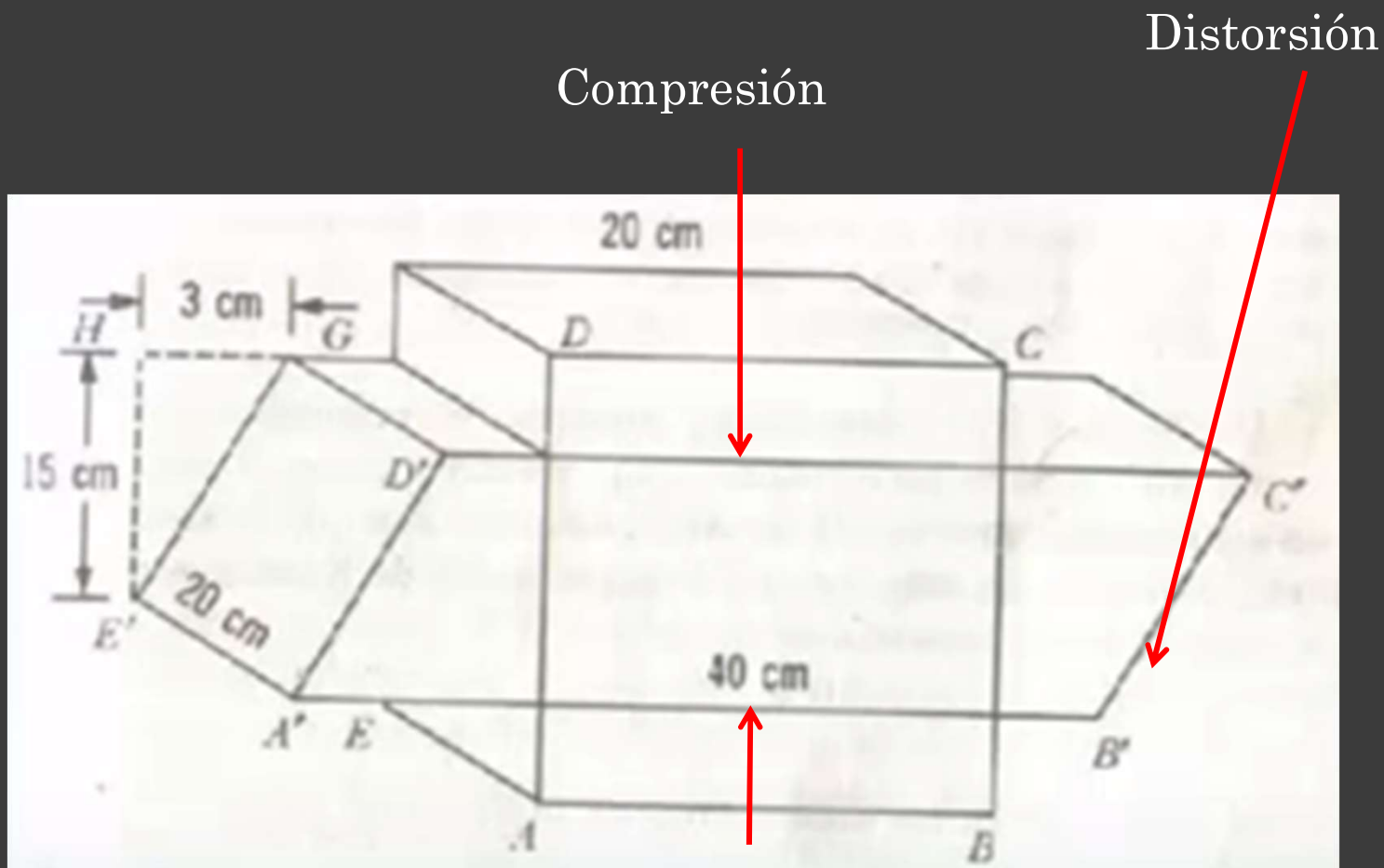
Donde la deformación Angular es igual  $\frac{1}{2} \tan \Delta \infty$  de los 2 ángulos, por lo cual el Angulo inicial de  $90^\circ$ , cuando el Angulo Inicial es obtuso se considera negativo.

# DILATACIÓN VOLUMÉTRICA



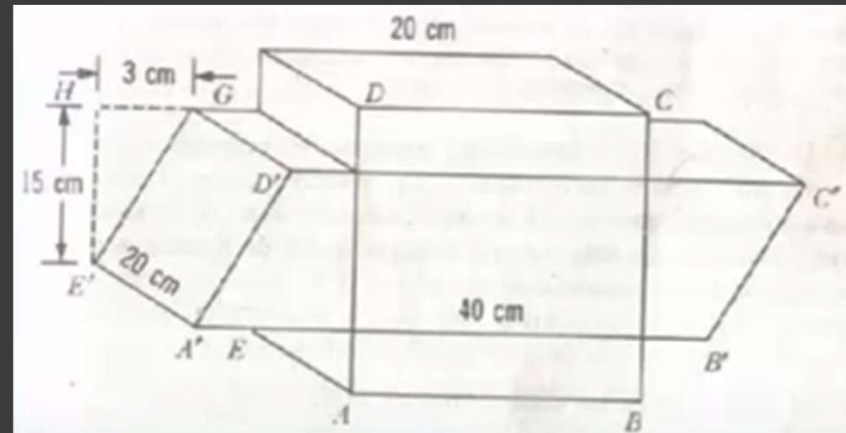
Ejemplo es cuando tenemos un cubo este que esta Azul Marino se va expandir por lo cual sufre una deformación volumétrica, lo cual la deformación es positiva, cuando se contrae la Deformación volumétrica es negativa

# PROBLEMA



$$\text{Deformación Total (Et)} = \text{Deformación Distorcional (Eo)} + \text{Deformación Volumétrica (Ev)}$$

# PROBLEMA



$$\epsilon(AB) = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{40 - 20}{20} = 1.00$$

$$\epsilon(AD) = \frac{E'H - AD}{AD} = \frac{15 - 20}{20} = -0.25$$

$$\epsilon(AE) = \frac{A'E' - AE}{AE} = \frac{20 - 20}{20} = 0$$

$$\gamma(\hat{BAD}) = \tan \hat{GE'H} = \frac{3}{15} = 0.20$$

$$40 \times 20 \times 15 = 12,000 \text{ cm}^3.$$

$$\sqrt[3]{12,000} = 22.9 \text{ cm}$$

$$\epsilon_v = \frac{22.9 - 20}{20} = 0.145$$

$$\epsilon_0(AB) = \epsilon(AB) - \epsilon_v = 1.00 - 0.145 = 0.855$$

$$\epsilon_0(AD) = \epsilon(AD) - \epsilon_v = -0.25 - 0.145 = -0.395$$

$$\epsilon_0(AE) = \epsilon(AE) - \epsilon_v = -0.145$$

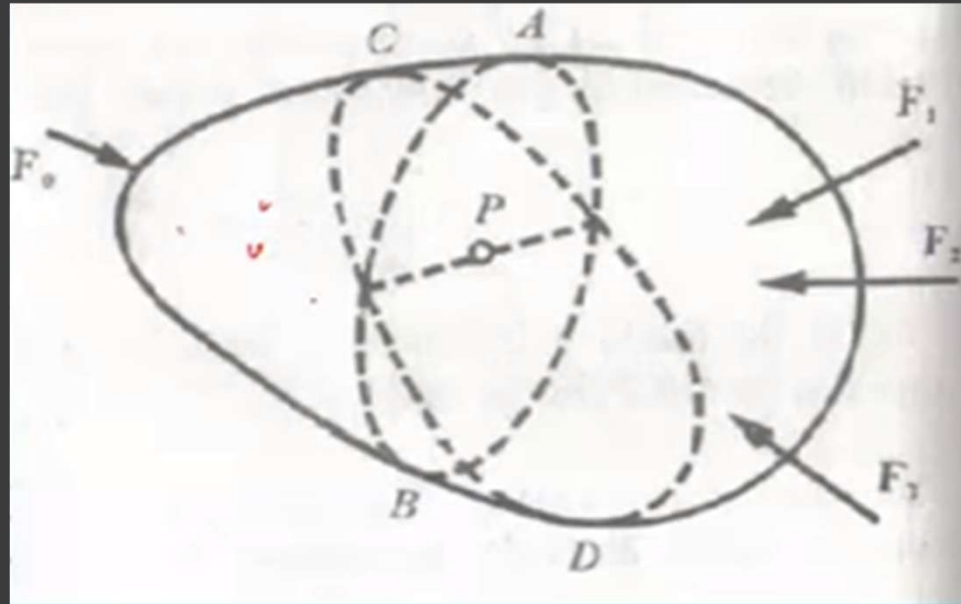


# FUERZAS Y ESFUERZOS

- Fuerza de Cuerpo.- es una fuerza por Unidad de Volumen. Es una unidad Intensiva
- Fuerza de Masa.- es una fuerza por unidad de Masa.
- Fuerzas de Superficie es una fuerza por unidad de Superficie. Es una unidad Extensiva.

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}$$

# ESFUERZOS INTERNOS



- Fuerza se puede medir con el dinamómetro
- El Dinamómetro.- es el Instrumento para medir fuerzas, basado en la capacidad de deformación de los cuerpos elásticos.

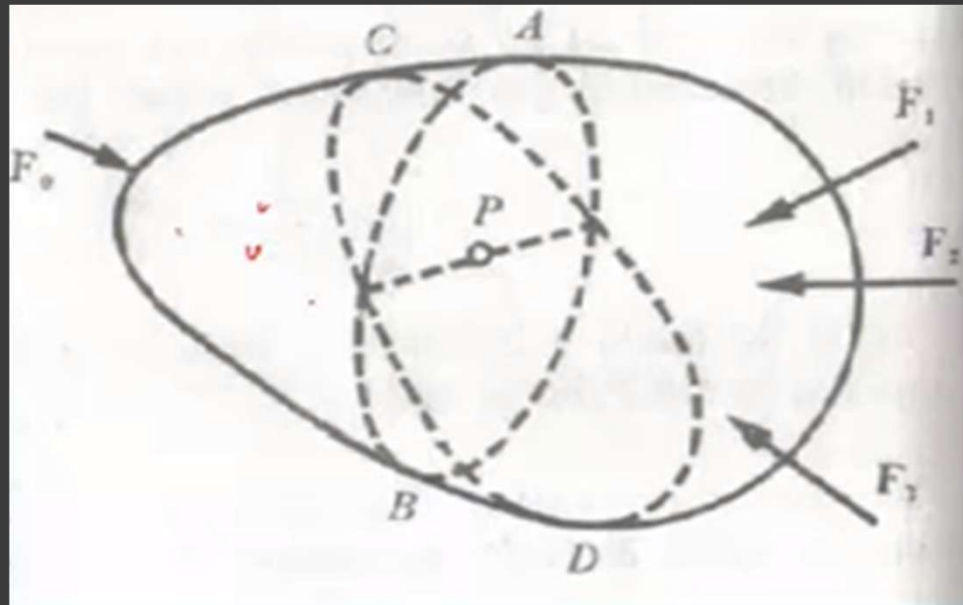
# ESFUERZOS INTERNOS

Las fuerzas que actúan sobre el contorno de un cuerpo sólido o fluido se transmite por acción molecular al interior del medio. Aun que tales esfuerzos se pueden apreciar solo de manera indirecta, a través de las deformaciones producidas.

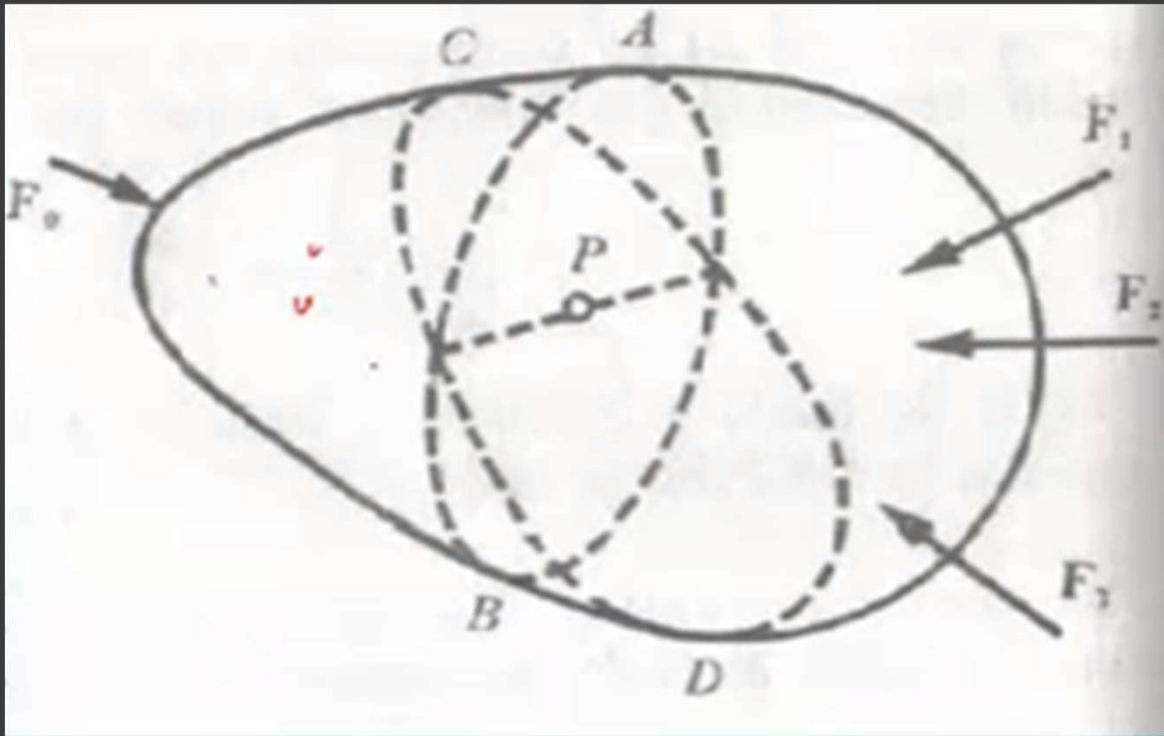
La tarea de la mecánica del medio continuo cuyo el objetivo principal es determinar las relaciones entre las deformaciones producidas y los esfuerzos que se producen.

# ESFUERZOS DE FUERZAS SUPERFICIALES

Si consideramos un punto en el interior de un medio continuo, no tiene sentido hablar de esfuerzos en dicho punto, si no se relaciona con un plano ideal que pase por el.

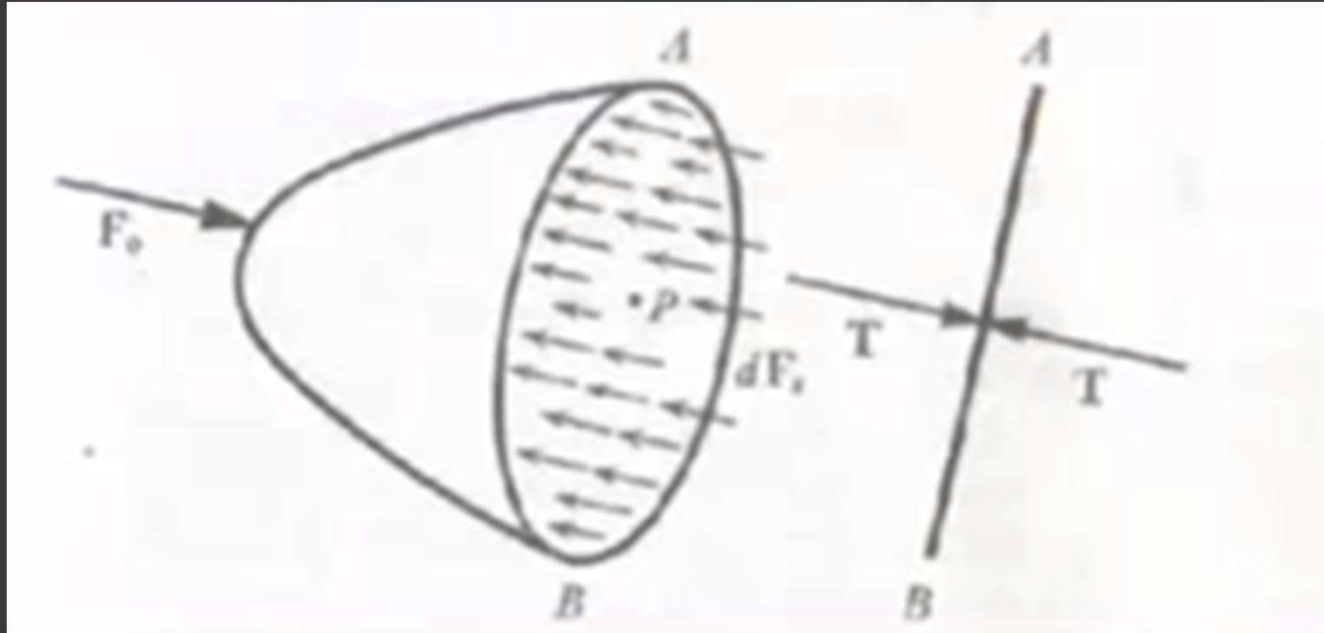


# ESFUERZOS DE FUERZAS SUPERFICIALES



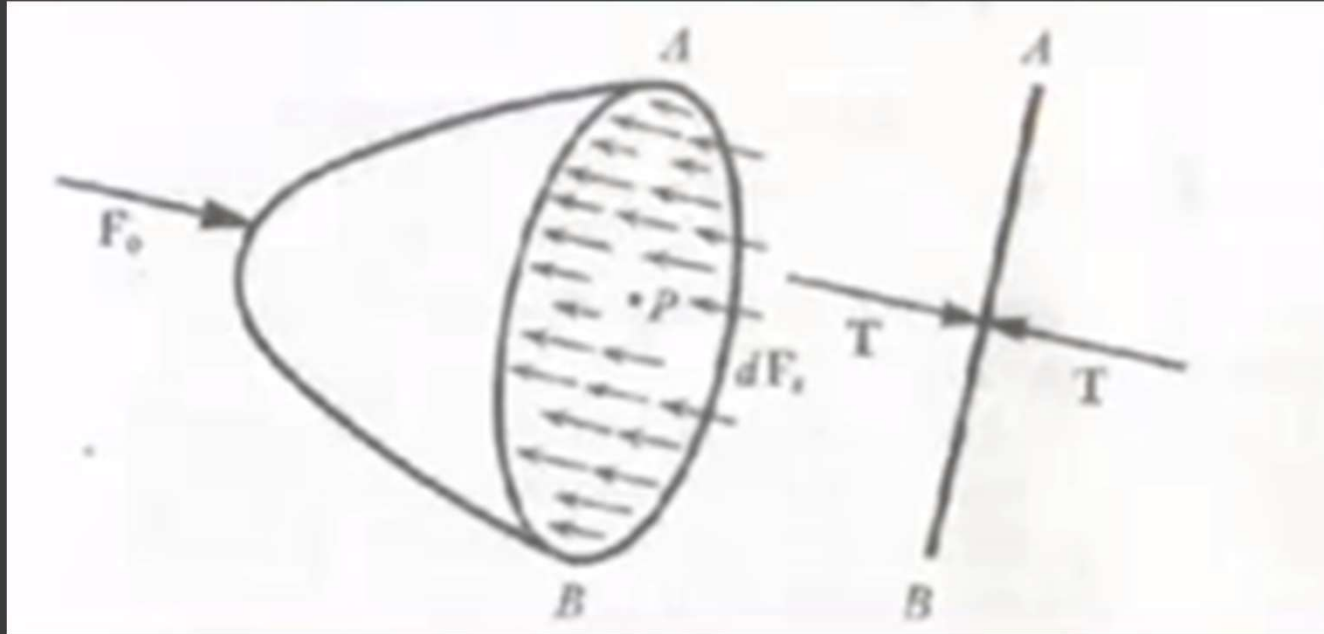
Un cuerpo ABCD como en la figura, en equilibrio bajo la acción de ciertas fuerzas  $F_0$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ , si consideramos un punto P interior y tomemos de acuerdo con el planos seccionantes ideales que supondremos.

# ESFUERZOS DE FUERZAS SUPERFICIALES



Al plano sección  $AB$ , perpendicular a la dirección de  $F_0$ , si nos imaginamos que se corta el cuerpo según dicho el plano, pero que el equilibrio se conserva, hay que imaginar, distribuida sobre todo el corte, una fuerza de superficie  $F$  cuya resultante es igual y contraria a  $F_0$ .

# ESFUERZOS DE FUERZAS SUPERFICIALES



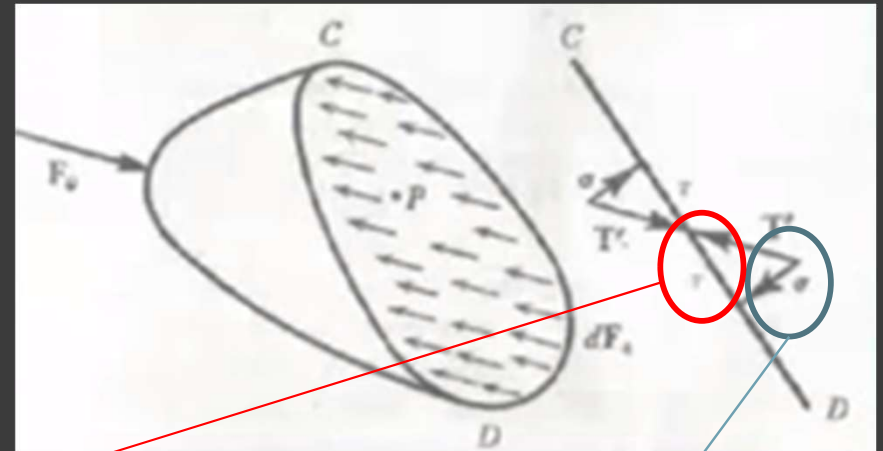
El esfuerzo correspondiente será  $T=dF/dS$  y resultara la normal a AB, actuara una fuerza de superficie igual y contraria a  $F$ , el esfuerzo  $T$  debe de estar acompañado en condiciones de equilibrio.

$$T = dF_s/dS$$

# ESFUERZOS EN PLANOS OBLICUOS

$$T' = dF_s / ds'$$

- En el Área de CD este esfuerzo resulta, ahora, oblicuo con respecto a la superficie de corte, por lo que puede descomponerse en una componente esfuerzo Normal  $\sigma$  (conocido como sigma) y un esfuerzo tangencial  $\tau$  esfuerzo cortante



- Componente Tangencial conoce como “Tau”, que es el Esfuerzo Cortante
- Esfuerzo en Sigma.- En dirección a la Normal

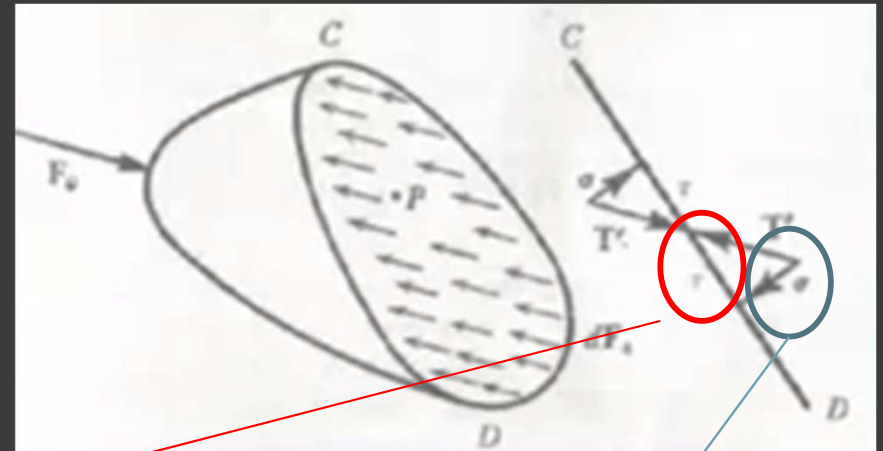
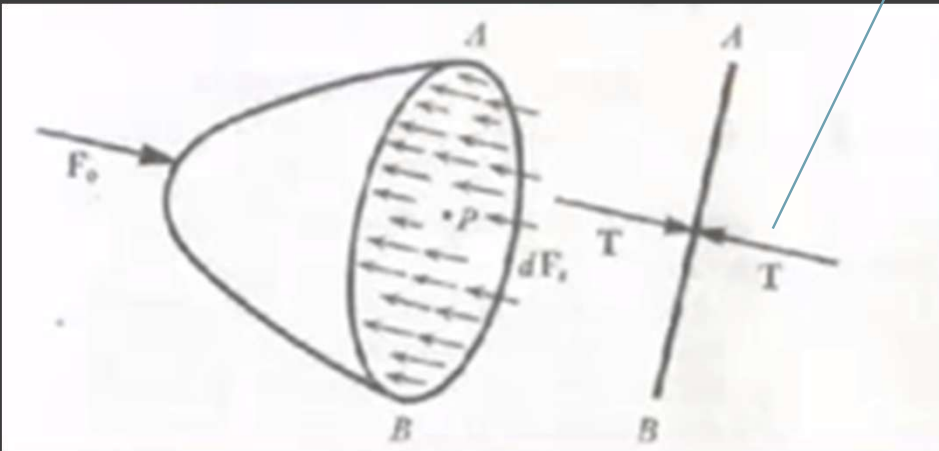


# ESFUERZOS EN PLANOS OBLICUOS

$$T = dF_s / dS$$

$$T' = dF_s' / ds'$$

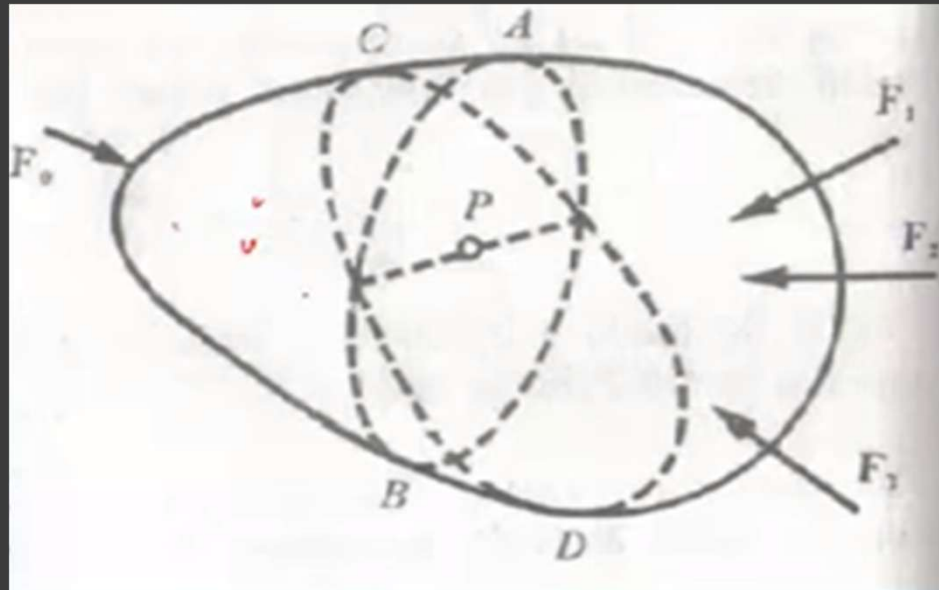
- Esfuerzo a compresión



- Componente Tangencial conoce como “Tau”, que es el Esfuerzo Cortante
- Esfuerzo en Sigma.- En dirección a la Normal

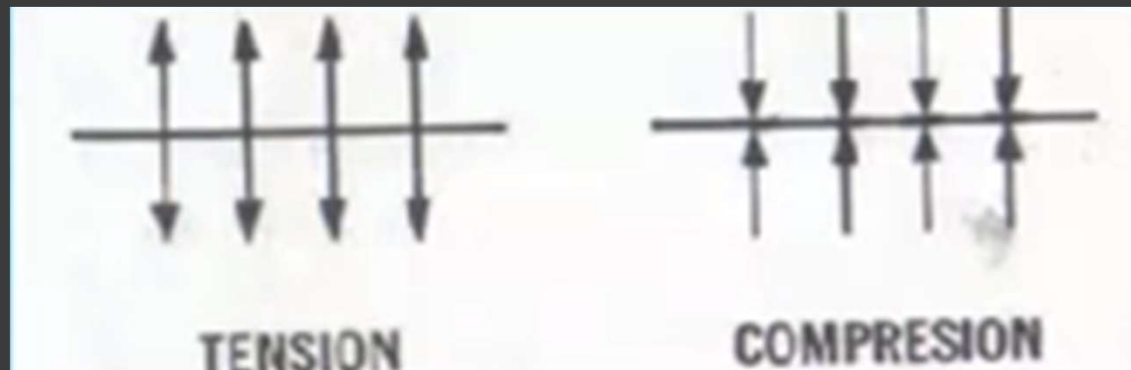
# TIPOS DE ESFUERZOS

- En el ejemplo anterior se supo para simplificar , una distribución uniforme de esfuerzos sobre toda la sección. De hecho, los esfuerzos varían de un punto a otro, por lo que convendrá hablar de un estado de esfuerzos en el punto  $P$ , constituido por todos los esfuerzos correspondientes a diferentes *elementos de superficie  $dS$  trazados por  $P$ , en todas las direcciones posibles.*



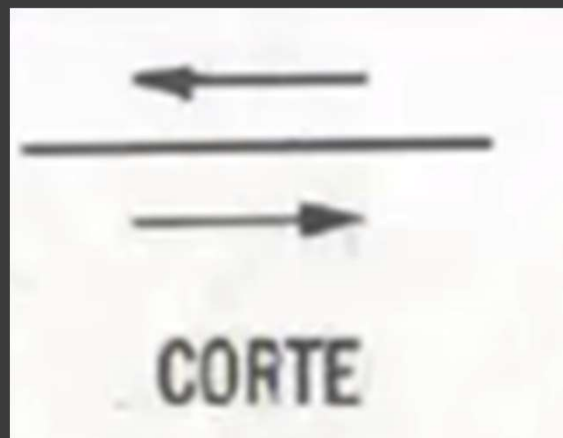
# ESFUERZOS NORMALES

También se llaman *Tensiones o compresiones*, según el sentido y en estado de equilibrio se indican convencionalmente.



# ESFUERZOS CORTANTE

Dichos esfuerzos en estado de equilibrio se manifiesta en sentido opuesto en las dos caras, se le da el nombre de Esfuerzo de corte o cortantes.



## PROBLEMA:

Una flecha de hierro, que mueve la bomba de un pozo minero, tiene 96 m de longitud y actúa con la fuerza de 2,200 kg. Calcúlese la sección de la flecha, sabiendo que el esfuerzo que se le permite realizar es de 1800 kg/cm<sup>2</sup>. Llamando A a la sección, L a la longitud de la flecha, a su peso específico y F a la fuerza necesaria para mover la bomba, la fuerza total se obtiene sumando a esta última al peso  $\gamma A L$  de la flecha. El esfuerzo será, por tanto:

## PROBLEMA:

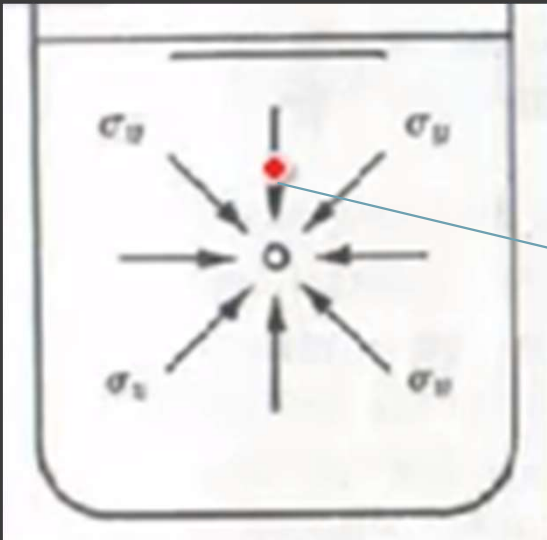
Una flecha de hierro, que mueve la bomba de un pozo minero, tiene 106 m de longitud y actúa con la fuerza de 3,200 kg. Calcúlese el esfuerzo de la flecha, sabiendo que el área es de 1.70 cm<sup>2</sup>. Llamando  $A$  la sección,  $L$  a la longitud de la flecha, a su peso específico y  $F$  a la fuerza necesaria para mover la bomba, la fuerza total se obtiene sumando a esta última al peso  $YA$  de la flecha. El esfuerzo será, por tanto:

# ISOTRÓPICOS

Es un estado de esfuerzo en cada punto del medio donde se manifiesta por medio de esfuerzos puramente normal, igual entre si para todos los elementos de superficie trazados idealmente por el punto.

Es conocido como La Presión hidrostática en los líquidos, o también el principio de PASCAL expresa justamente que el estado de esfuerzos engranado en un liquido en reposo por efecto de la atracción terrestre.

Esfuerzo de este tipo pueden producir contracciones o dilataciones uniformes.



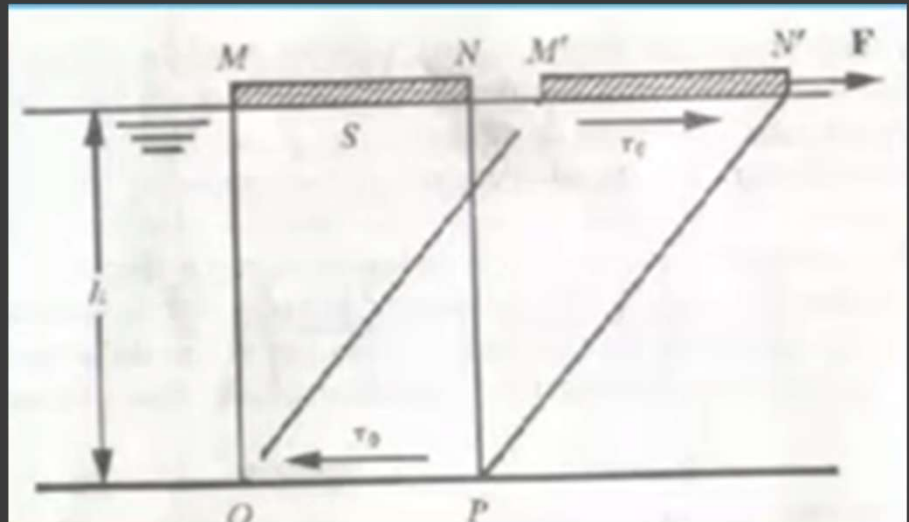
- El caso del Agua cuando se presiona es incompresible, cuando se aplica esfuerzos Isotrópicos al agua son iguales no pasa nada

# ESFUERZOS DISTORSIONALES

Es cuando no produce cambios de volumen, sino únicamente deformaciones angulares.

Ejemplo se coloca una tabla MN sobre la superficie de un liquido en reposo, y que luego se va arrastrando con una Fuerza. La capa liquida en contacto con la tabla se pondrá en movimiento con la velocidad de la tabla misma, mientras que la capa OP, en contacto con el fondo, quedara inmóvil. El prisma MNOP se deformara, inclinándose siempre mas, donde se tiene a bajo el efecto del Esfuerzo cortante =  $F/S$ , siendo S el área de la base.

El estado de esfuerzo resultante en el interior del fluido no produce cambios de volumen, sin distorsiónales puesto que las áreas de MNOP y M'N'OP





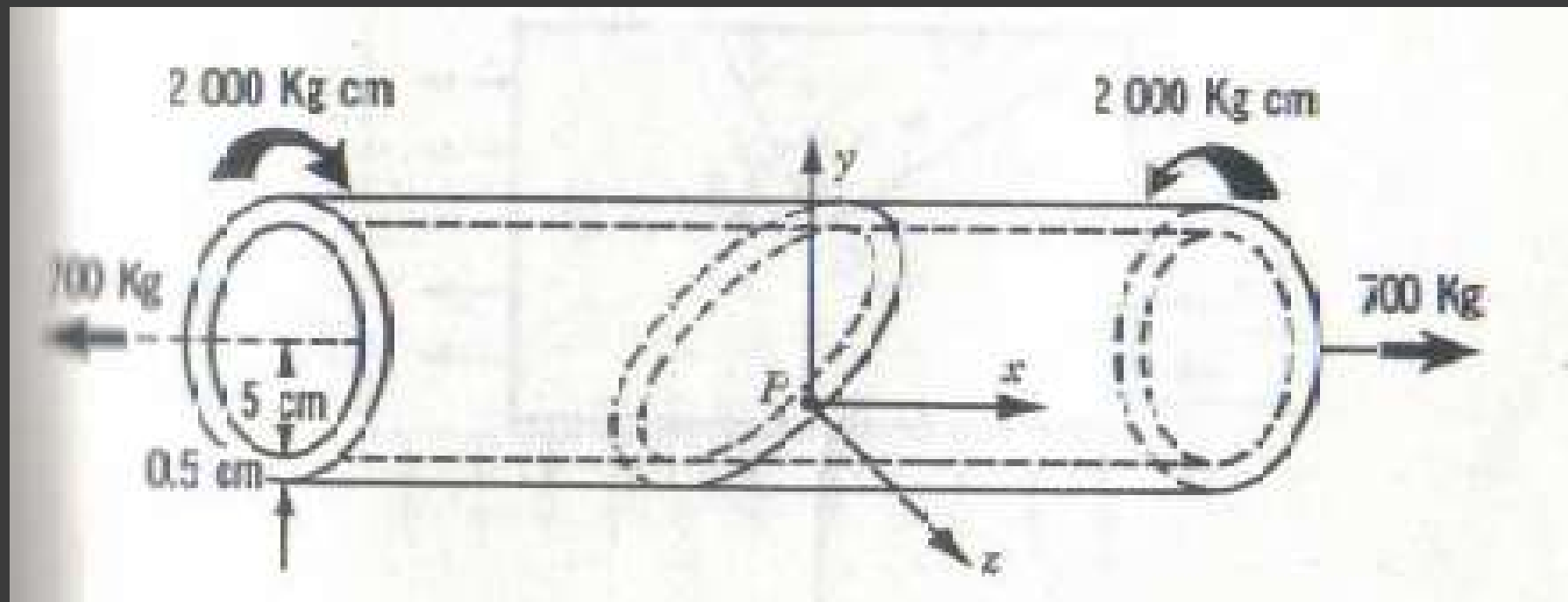
# RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

Las Deformaciones que resultan en el medio, cuando este se sujeta a un estado de esfuerzos determinado, el comportamiento de los materiales es tan variado, no solo comparando un material con otro, sino en un mismo material, al cambiar el orden de magnitud de los Esfuerzos.

Podemos dar el comportamiento tan distintos del sólido y del fluido, cuando ambos se sujetan a esfuerzos distorsionales de pequeña intensidad.

EL SÓLIDO .- empieza deformándose con relativa rapidez, hasta alcanzar una deformación total, mientras el esfuerzo no aumente, la deformación no pasará de ese límite

# PROBLEMA:



# RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

EL FLUIDO.- un esfuerzo distorsional al mínimo es suficiente para ponerlo en movimiento, puedo decir que para provocar una deformación angular que crece y crece sin limite mientras el esfuerzo permanezca

## EJEMPLO:

El escurrimiento de los ríos, bajo la acción de la gravedad, mientras esta tenga la oportunidad de actuar distorsionalmente, cuando la corriente llega al mar, se aquieta, porque dicha oportunidad, ofrecida por el hecho de que el cauce tiene pendiente, se pierde



# ELASTICIDAD

Se dice que un material se comporta elásticamente cuando sus deformaciones son proporcionales a los esfuerzos locales. No existe ningún material que reaccione elásticamente a cualquier sistema de esfuerzos .

Ejemplo cuando se estira un resorte estirándolo excesivamente empieza perdiendo esta en forma proporcional.

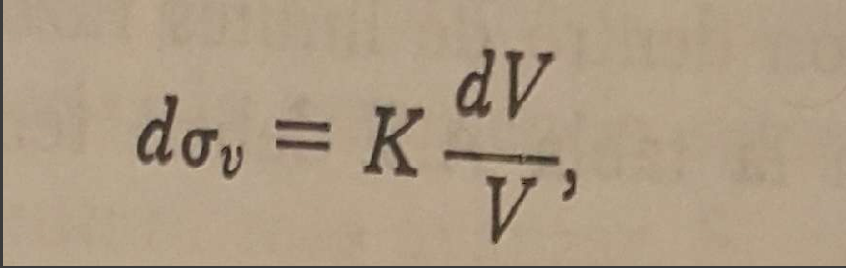
Por lo que puedo afirmar que prácticamente todos los materiales sean sólidos o fluidos, reaccionan elásticamente siempre que las fuerzas aplicadas sean bastante pequeñas.

# MODULO ELÁSTICO

El factor de proporcionalidad que correlaciona esfuerzos y deformación y a este factor se le llama Modulo de elasticidad, no solo depende del material , de la temperatura y de la presión.

Supongamos que se aplica a un volumen  $V$  de substancia un esfuerzo isotrópico infinitamente pequeño  $d\sigma_v$ . Si el incremento de volumen resultante es  $dV$ , la relación elástica se describe:

Siendo  $K$  el modulo elástico correspondiente


$$d\sigma_v = K \frac{dV}{V},$$

## MODULO ELÁSTICO

$$\frac{V + dV}{V} = (1 + d\epsilon_v)^3 \cong 1 + 3 d\epsilon_v$$

Siendo  $d\epsilon_v$  la deformación longitudinal que aplicada isotrópicamente, provoca la deformación de volumen  $dV/V$ . Resultando.

$$3d\epsilon_v = \frac{dV}{V}$$

Reemplazando en la relación anterior

$$d\sigma_v = 3K d\epsilon_v$$

Donde el factor de proporcionalidad diferente  $K$  se llama *modulo elástico isotrópico o coeficiente de compresibilidad*.

# MODULO ELÁSTICO

$$d\sigma_0 = 2Gd\epsilon_0$$

Para esfuerzos y deformaciones distorsiónales  $d\sigma_0$ ,  $d\epsilon_0$ , vale una proporcionalidad análoga.

Donde  $G$  se llama modulo de elástico distorcional o modulo de elasticidad al esfuerzo cortante.

Las dimensiones de un esfuerzo se mide en  $\text{kg/cm}^2$  o bien como a veces se refiere en  $\text{kg/mm}^2$ .

# VISCOSIDAD.-

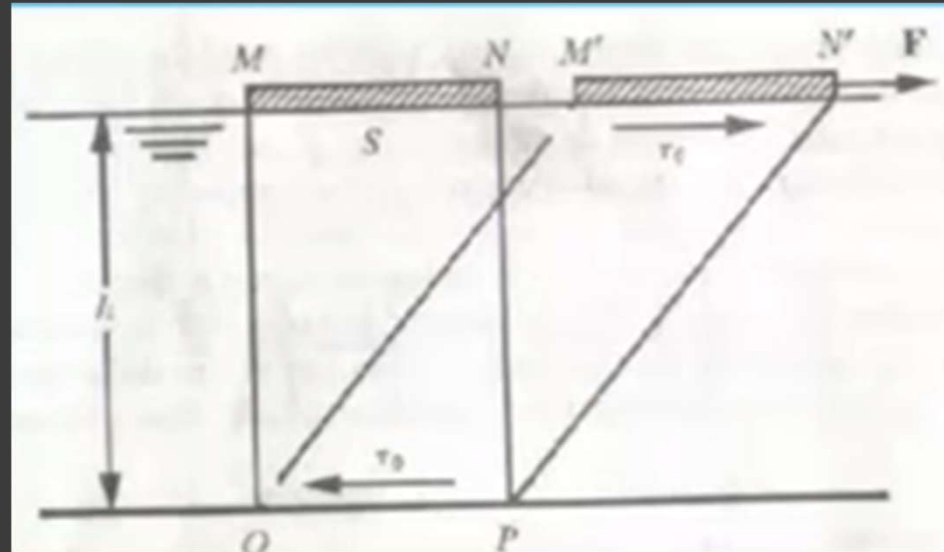
Para estudiar el efecto de un esfuerzo distorcional sobre un fluido, no hay que considerar las deformaciones, sino las *velocidades de deformación*.

El comportamiento elástico que acabamos de analizar, determinada deformación en un sólido permite deducir cual es el esfuerzo actuante, conocer la velocidad en cierta parte de un fluido no es suficiente para informarnos acerca del esfuerzo.

Sigamos con el ejemplo de la Tabla en contacto con el agua, pero supongamos ahora que el *agua* se reemplaza por *aceite*, la experiencia sugiere que igual la distancia *h*, a la tabla se le dificultara mas avanzar. Por lo contrario el fluido interpuesto entre la tabla y la pared es simplemente *aire* y la tabla se reemplaza por un cojín delgado que flota en el aire mismo, su avance resultara mucho mas fácil.



# VISCOSIDAD.-



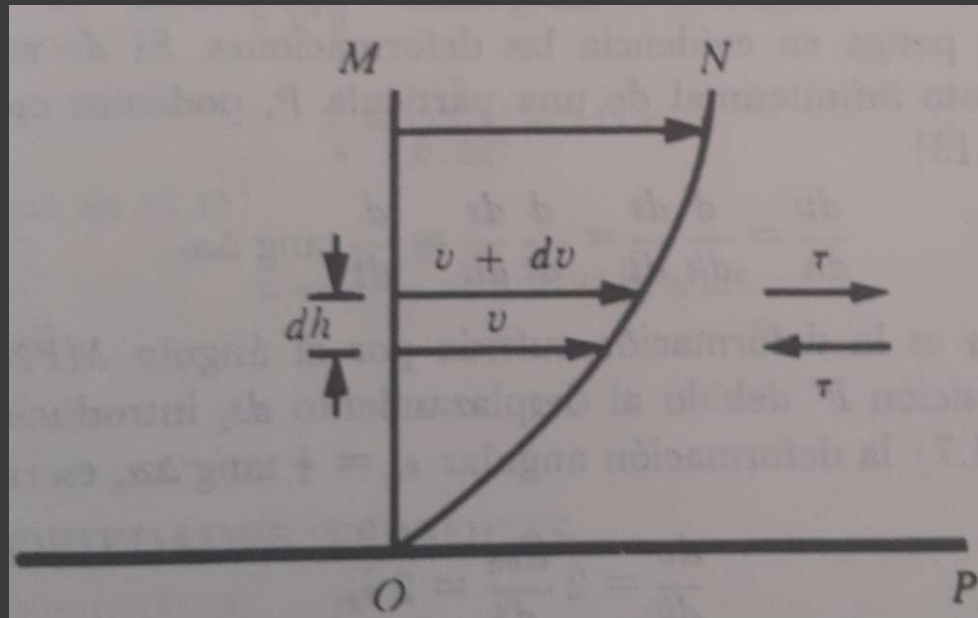
Esto se debe a que la atracción entre las moléculas fluidas, que es la que transmite paulatinamente el efecto resistente del fondo hasta arriba, es mayor en el *aceite* que en el *agua*, y mayor en esta que en el aire. Esta característica interna del medio es lo que se llama *Viscosidad*.

Evidentemente la *velocidad*  $v$  de la tabla crece con el esfuerzo  $\sigma_0$  aplicado y con la distancia  $h$ , disminuyendo al crecer la viscosidad. Si se tratara de una proporcionalidad simple podríamos escribir

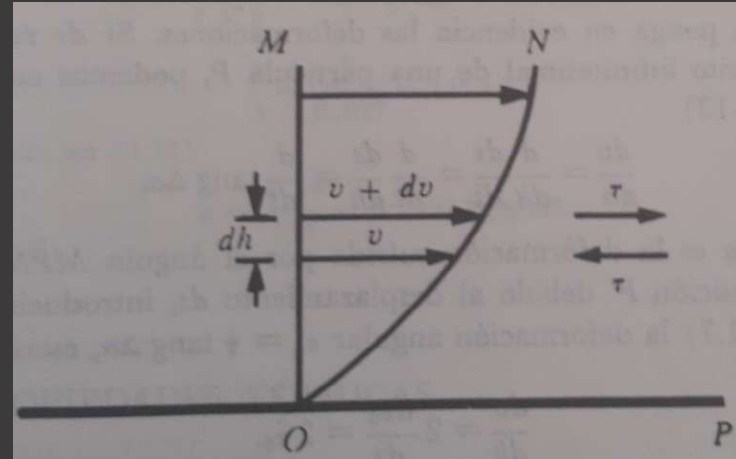
# VISCOSIDAD.-

$$v = \frac{\tau_0 h}{\mu},$$

Siendo  $\mu$  un conveniente *Coeficiente de viscosidad*, De hecho, esta ley lineal es cierta solo para distancias  $h$  muy pequeña, en cuanto el efecto viscoso suele ser mas notable cerca de la pared que lejos.



# VISCOSIDAD.-



Por lo tanto motivo en una sección OM normal al flujo, el “perfil de velocidades” ON no es, por lo general, una recta, sino una curva cóncava hacia arriba.

La relación vale estrictamente solo para distancia verticales y variaciones de velocidades infinitamente pequeñas, y tiene, consecuentemente, que escribirse con las notaciones

$$\tau = \mu \frac{dv}{dh}$$

Esta formula, fundamental para la mecánica de los medios viscosos, ya sean solidos, líquidos o gases, compendia que Newton estableció en 1687.

# PROBLEMA



# Álbum d