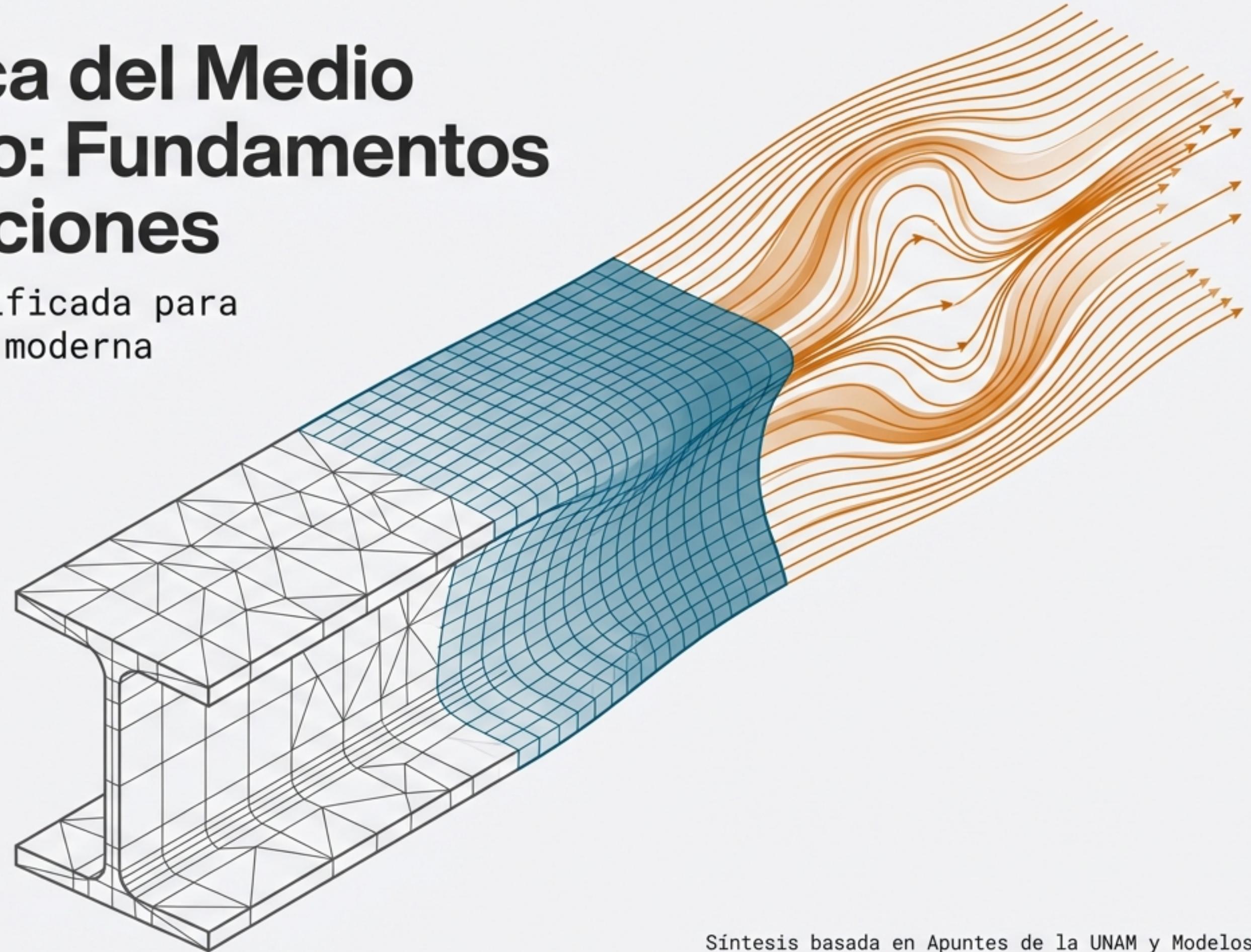


Mecánica del Medio Continuo: Fundamentos y Aplicaciones

Una visión unificada para la ingeniería moderna



La Misión del Ingeniero y la Hipótesis del Continuo

PHILOSOPHY

“La función más elevada del ingeniero consiste en mejorar mejorar la sociedad mediante la transformación de la naturaleza. Para transformarla, primero debe modelarla.”

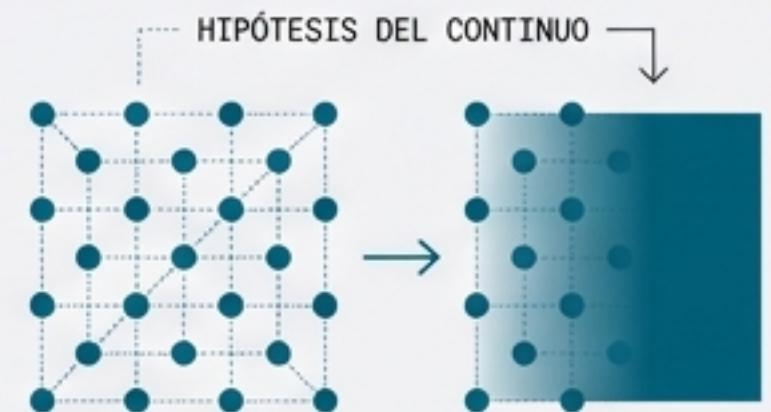
Basado en el concepto del ingeniero como agente de cambio y modelador de la realidad física.

MODELING

ROBOT MONO

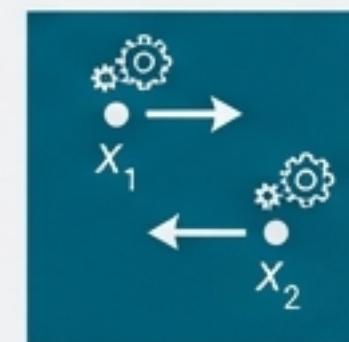
Continuidad

El material llena completamente el espacio; ignoramos la estructura molecular.



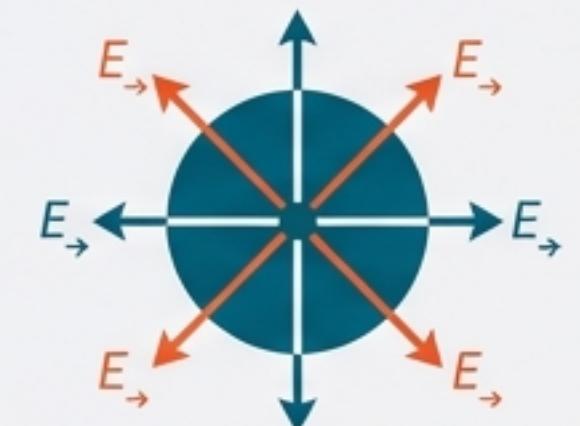
Homogeneidad

Propiedades idénticas en todos los puntos ($x_1 \approx x_2$).



Isotropía

Propiedades idénticas en todas las direcciones (independiente de la orientación).



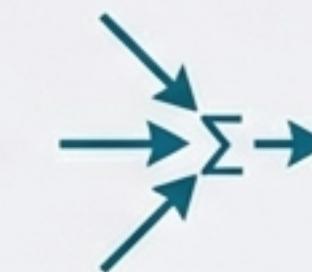
El Lenguaje Matemático: Tensores y Notación Índice

PHILOSOPHY

Convenio de Suma
(Einstein)

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Índices repetidos
implican sumatoria
automática.



TECHNICAL

Delta de Kronecker (δ_{pq})

$$\delta_{11} = 1, \quad \delta_{12} = 0$$

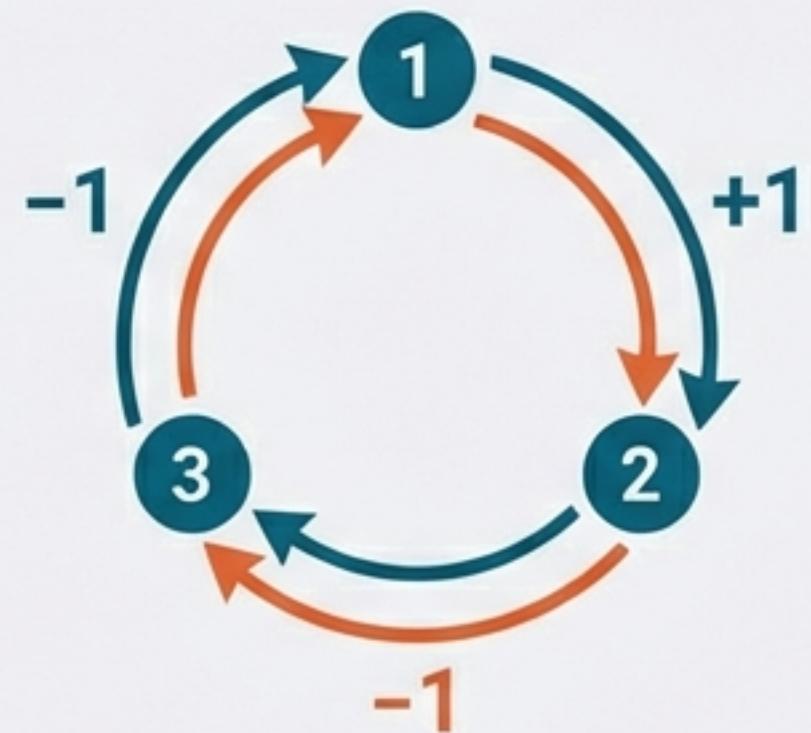
$$\delta_{ii} = 3 \text{ (en 3D)}$$

El operador
identidad.
 1 si $p = q$,
 0 si $p \neq q$.

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

ROBOTO MONO

Símbolo de Permutación
(e_{mnr})

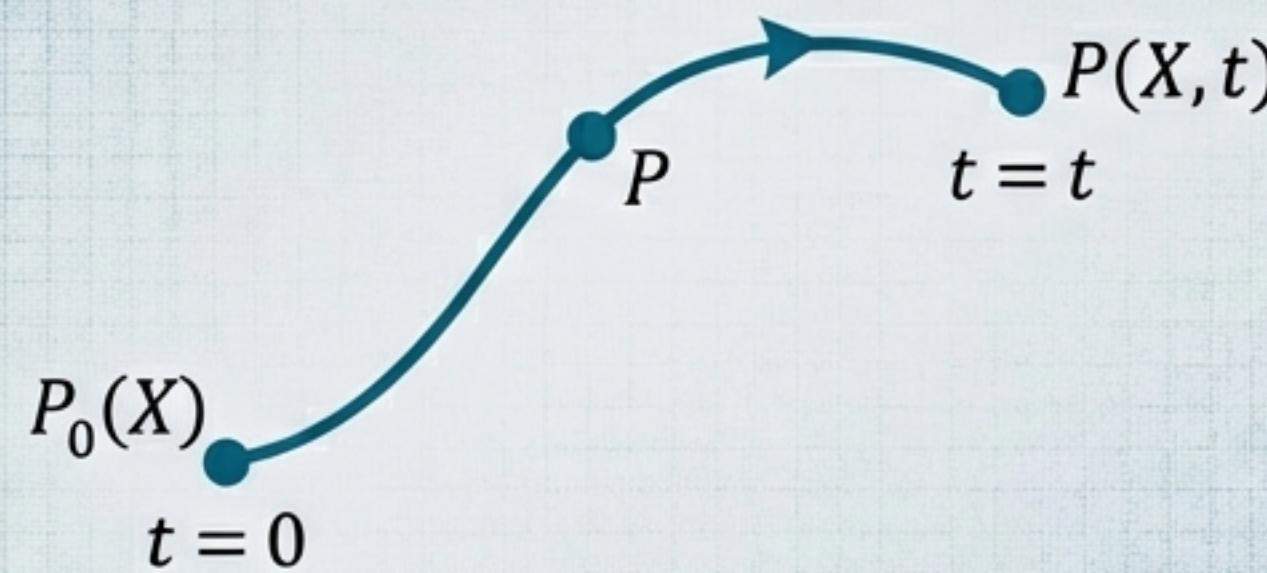


Define el producto
vectorial y determinantes.

Cinemática: Descripciones del Movimiento

PHILOSOPHY

Descripción Material (Lagrange)

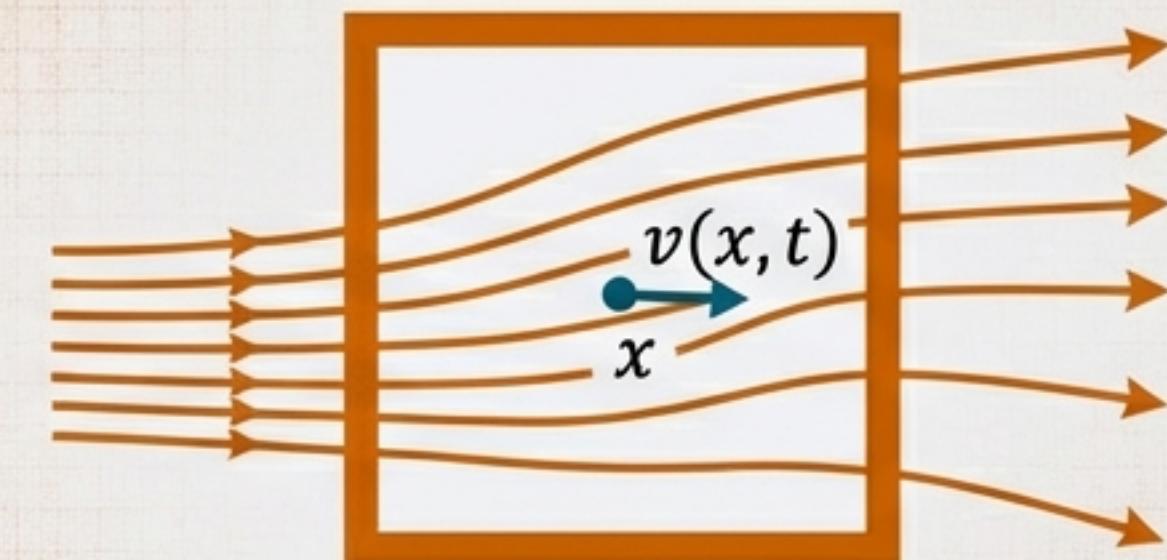


X (Coordenadas Materiales)

Sólidos / Historia de la partícula

ROBOT MONO

Descripción Espacial (Euler)



x (Coordenadas Espaciales)

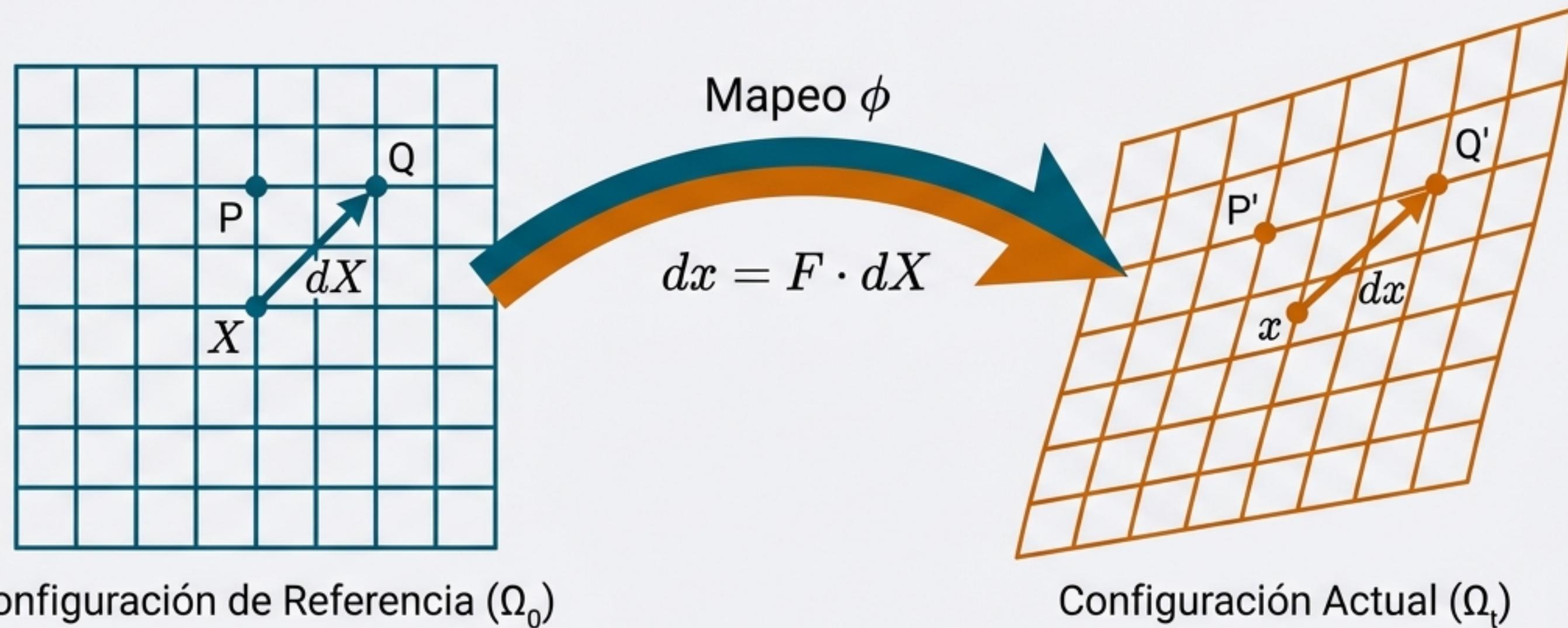
Fluidos / Estado actual

Cambio Local

Cambio Convectivo

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nu \cdot \nabla \rho$$

El Tensor Gradiente de Deformación (F)



- Definición: $F = \frac{\partial x}{\partial X}$
- Jacobiano (J): $J = \det(F)$ represents el cambio de volumen ($dV = JdV_0$).
- Si $J=1$, el material es incompresible.

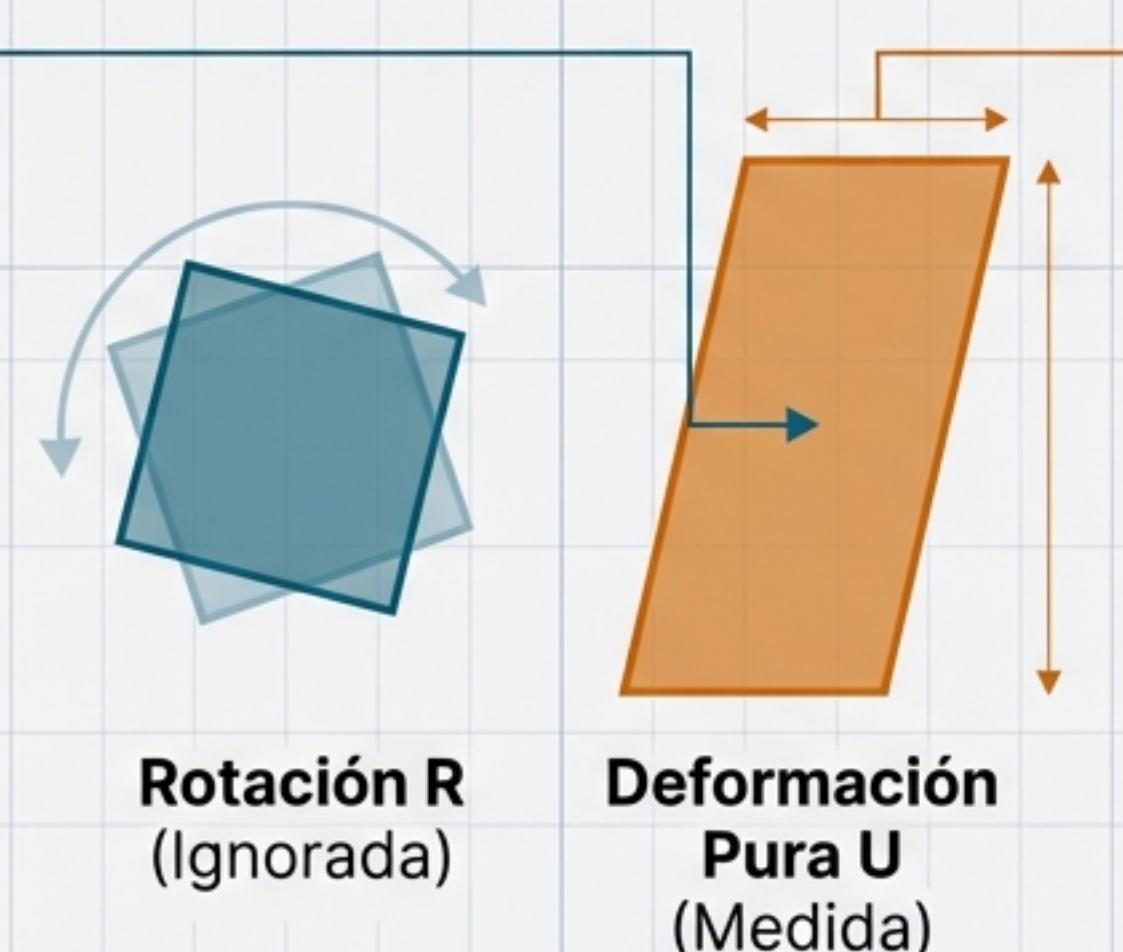
Medidas de Deformación: Eliminando la Rigididad

Separando la Rotación (R) de la Deformación Pura (U)

Tensor de Green-Lagrange (E)

$$E = \frac{1}{2} (C - I) = \\ = \frac{1}{2} (F^T F - I)$$

Referencia Material (X).
Usado en Sólidos con grandes deformaciones.



Tensor de Almansi (e)

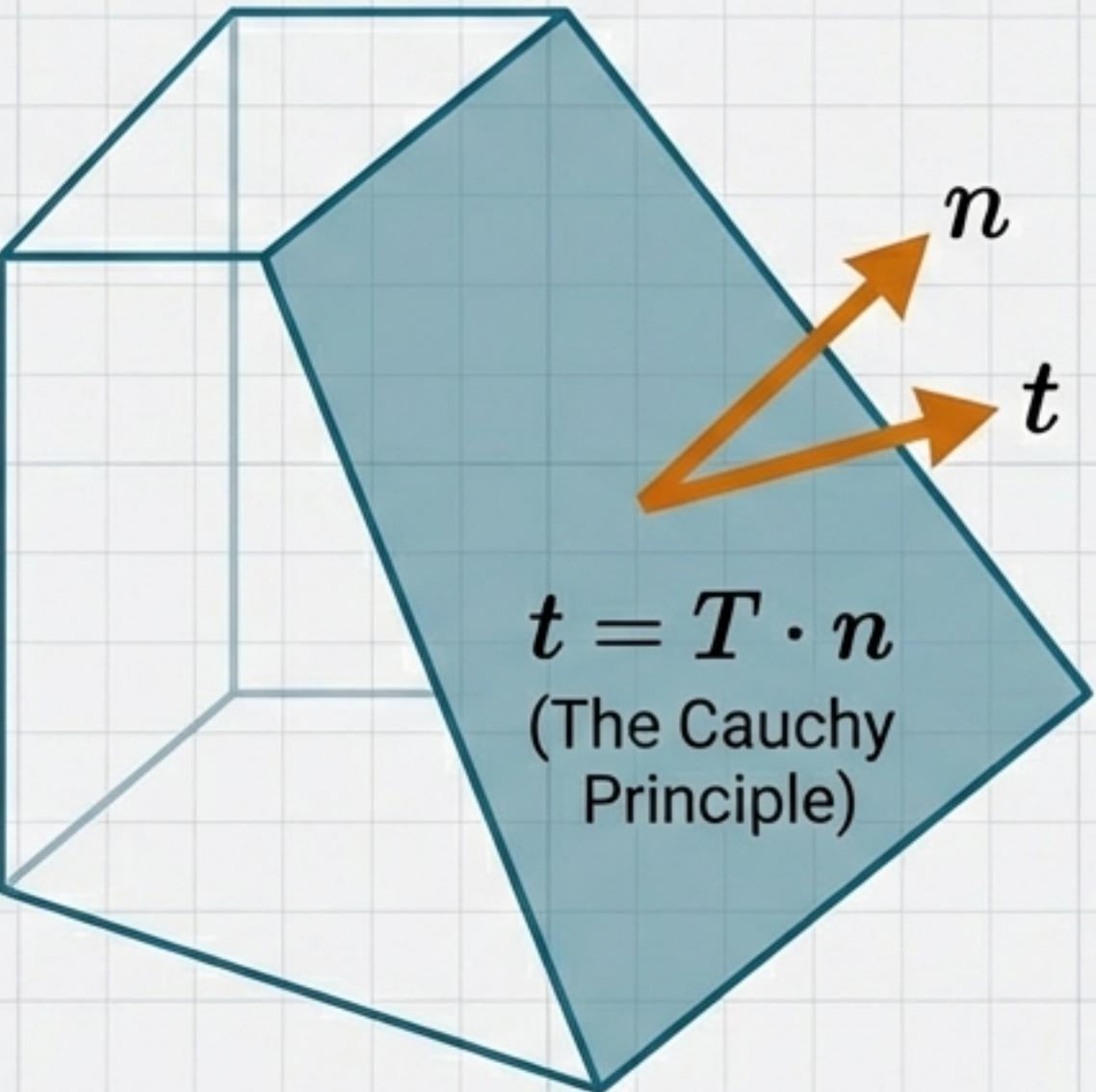
$$e = \frac{1}{2} (I - B^{-1}) = \\ = \frac{1}{2} (I - F^{-T} F^{-1})$$

Referencia Espacial (x).
Usado en Fluidos.

Cinética: El Concepto de Esfuerzo (Stress)

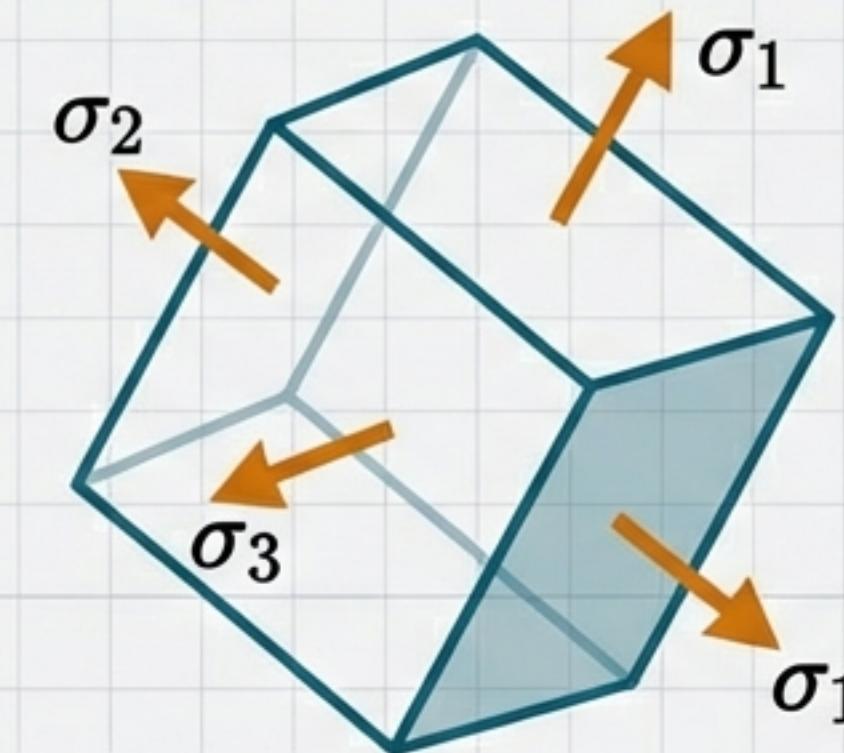
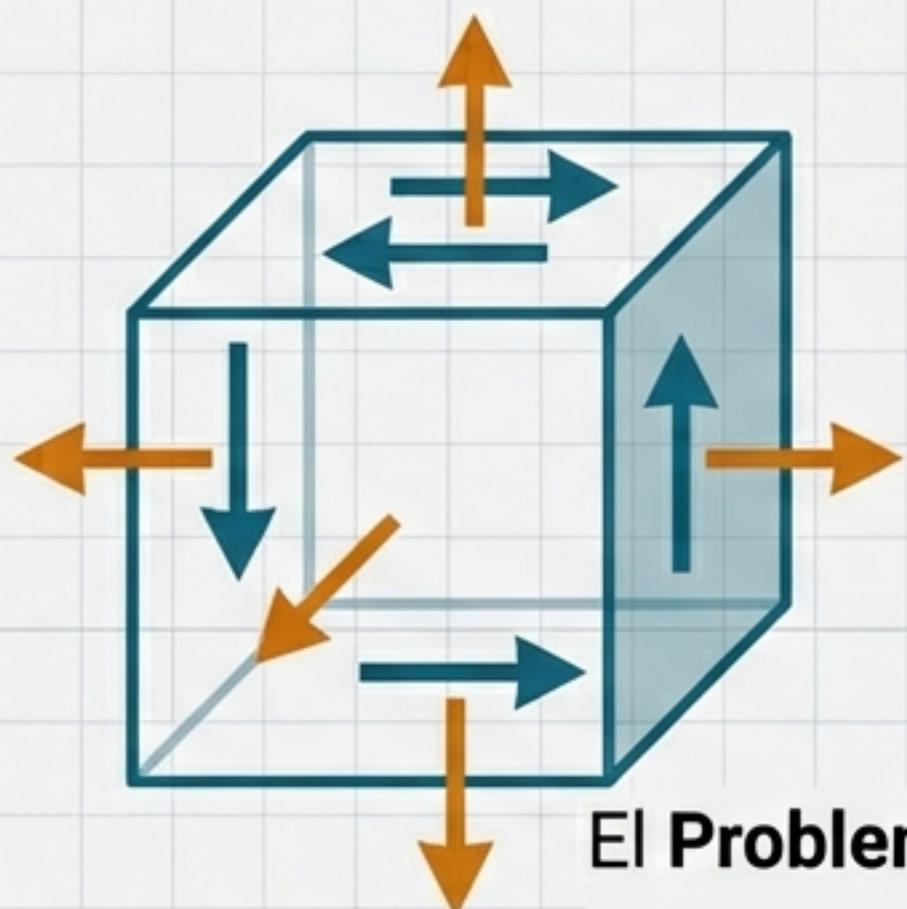
Fuerzas de Cuerpo (b):
Actúan en el volumen
(ej. Gravedad).

Fuerzas de Superficie (t):
Actúan en el área
(ej. Presión,
Contacto).



El Tensor de Esfuerzos (T):
Mapea la normal n al vector de fuerza t .

Esfuerzos Principales e Invariantes



El Problema de Valores Propios (Eigenvalues):

$$\det(T - \lambda I) = 0$$

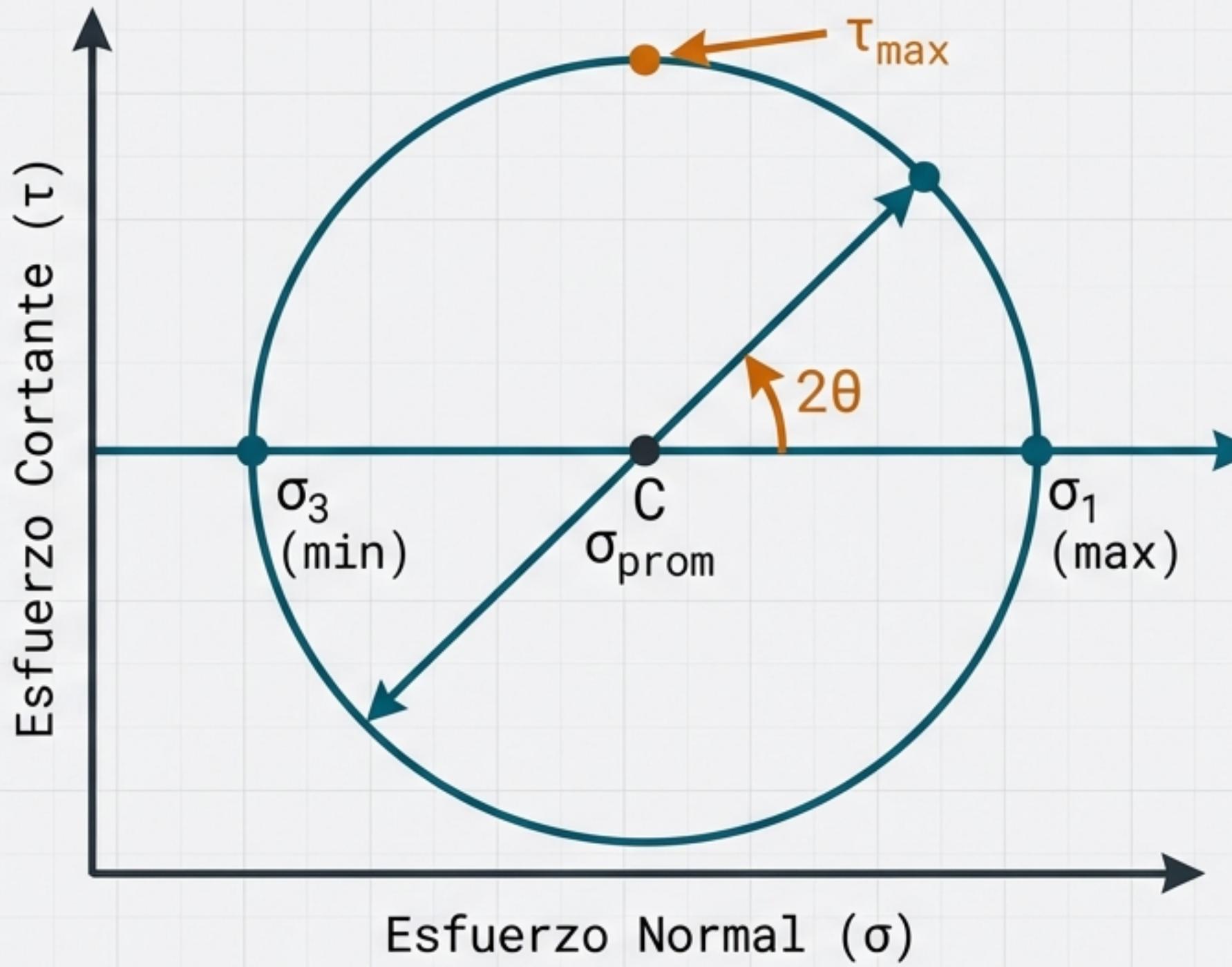
Las raíces son los **Esfuerzos Principales** ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).

En estos planos, el cortante es cero.

Invariantes (I): Valores independientes del sistema de coordenadas.

$$I_1 = \text{tr}(T) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \text{ (Relacionado con la presión media).}$$

Representación Gráfica: El Círculo de Mohr



Herramienta visual para transformar estados de esfuerzo.

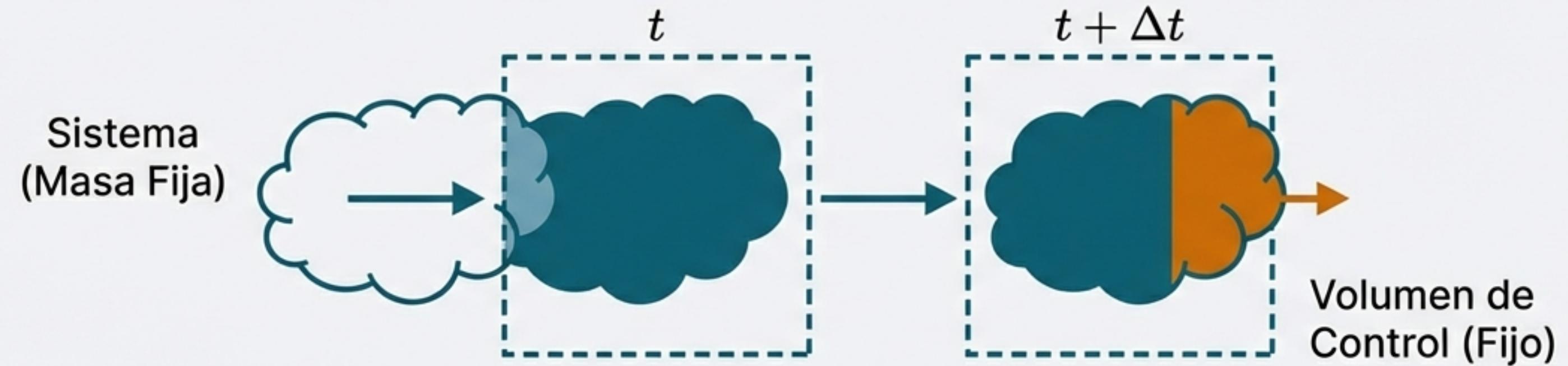
Permite calcular σ y τ en cualquier plano inclinado.

$$\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$$

Basado en Apuntes 2.8 - Representación gráfica de Mohr

El Teorema de Transporte de Reynolds

El puente entre Sistema y Volumen de Control



$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \Psi dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Psi) dV + \int_S \rho \Psi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$$

Cambio Total
del Sistema

Cambio Local
(dentro del VC)

Flujo a través de
la Superficie

Leyes de Conservación

Conservación de Masa

La materia no se crea ni se destruye.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Ecuación de
Continuidad

Balance de Momento Lineal

Newton ($F=ma$) aplicado al continuo.

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}$$

1º Ley de Cauchy

Balance de Momento Angular

Equilibrio rotacional.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$$

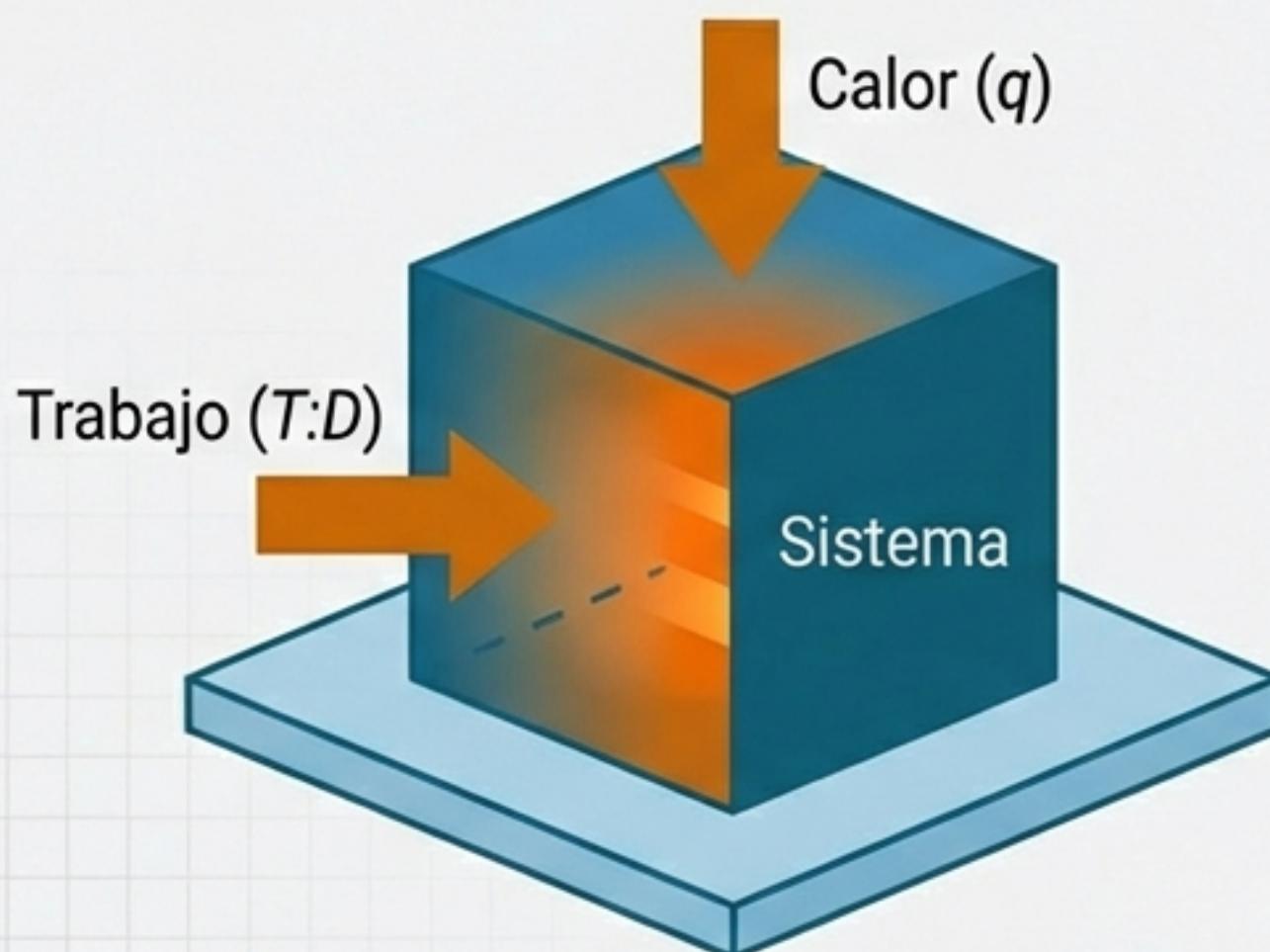
El tensor de esfuerzos
es simétrico: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

El tensor de esfuerzos
es simétrico: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Termodinámica: Energía y Entropía

1^a Ley: Conservación de Energía

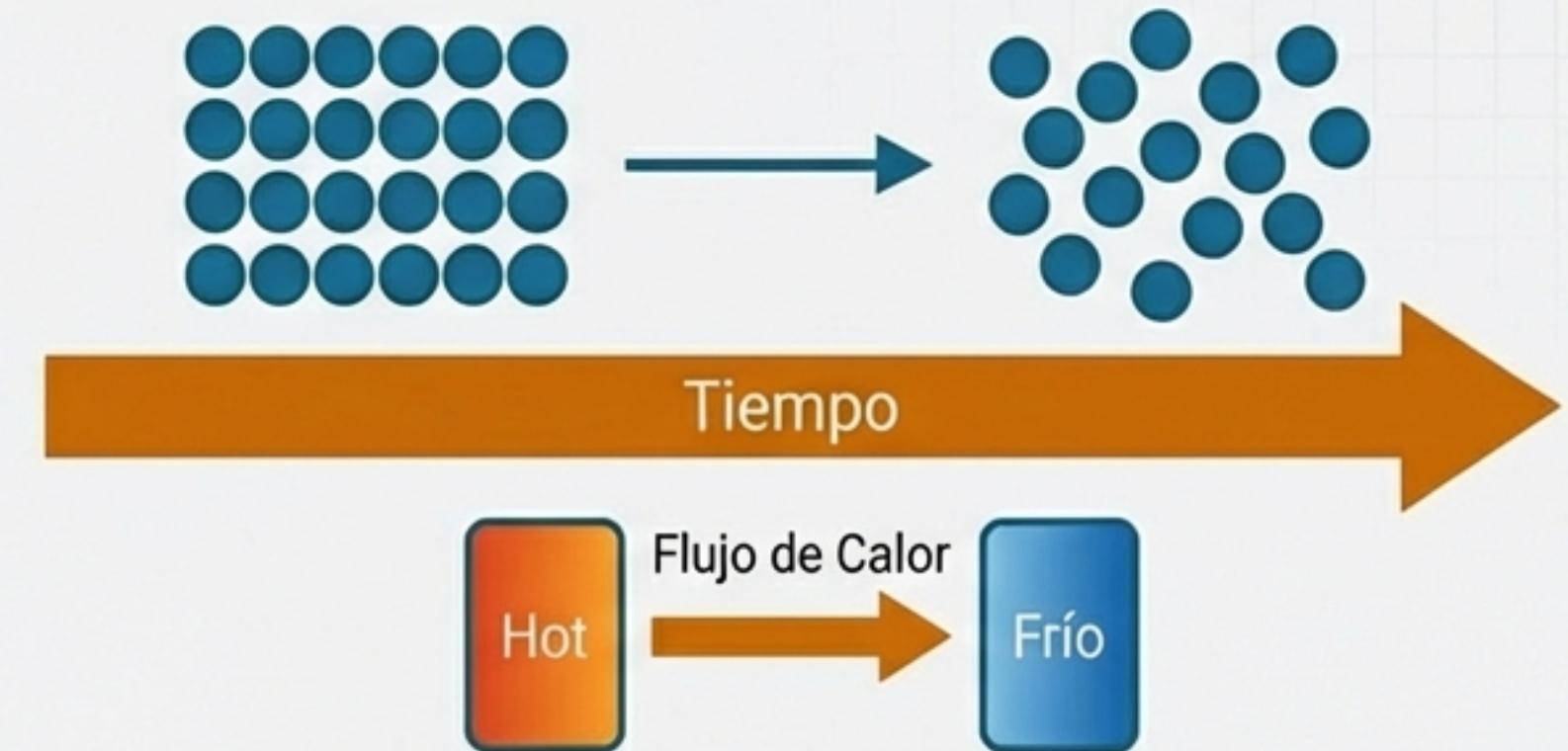
$$\rho \dot{u} = T : D - \nabla \cdot q + \rho r$$



2^a Ley: Desigualdad de Clausius-Duhem

$$\gamma \geq 0 \text{ (Producción de Entropía)}$$

Define la irreversibilidad. El calor fluye de caliente a frío. La energía mecánica se disipa en calor, no al revés.

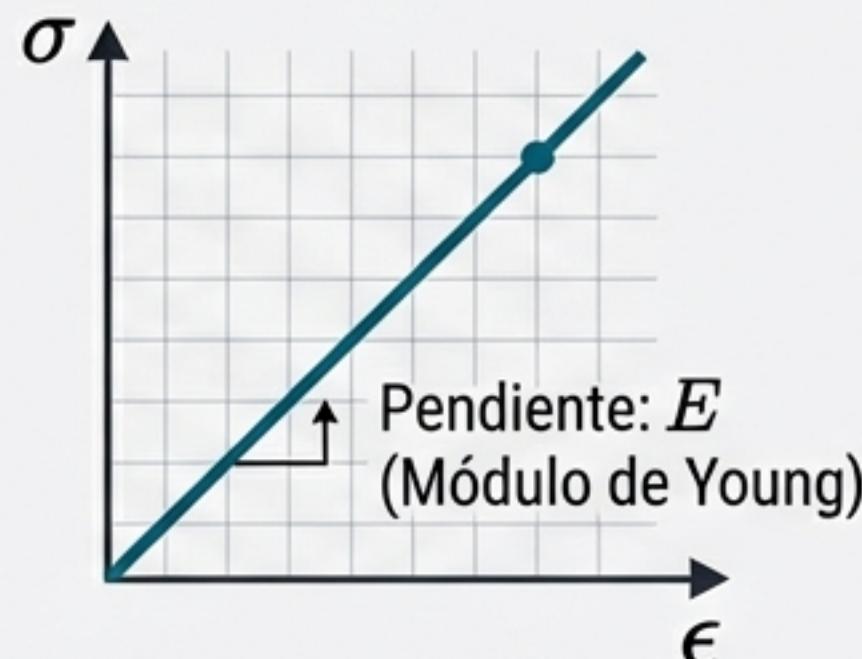


Ecuaciones Constitutivas: Definiendo el Material

Relacionando Causa (Esfuerzo) y Efecto (Deformación)

Sólido Elástico Lineal (Hooke)

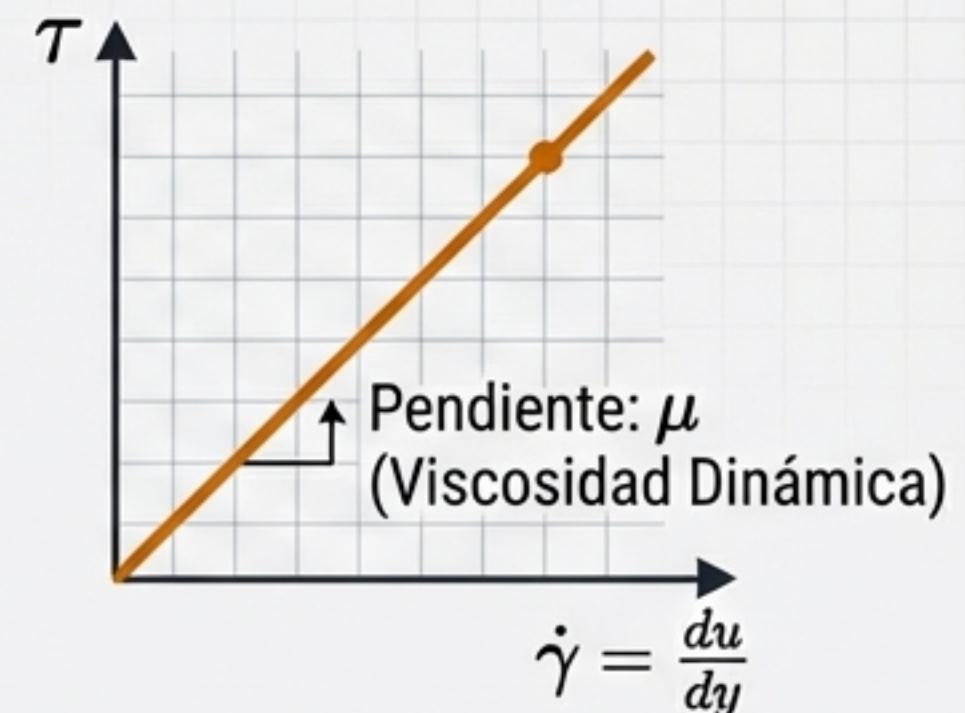
$$\sigma = E\epsilon$$



Módulo de Young (E), Coeficiente de Poisson (ν).

Fluido Newtoniano

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$



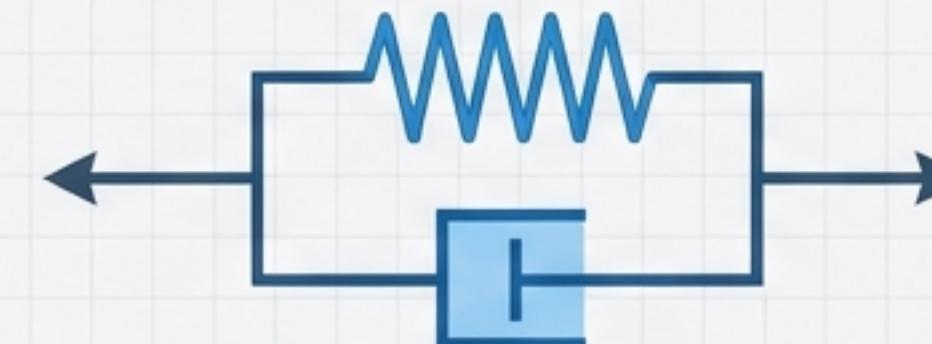
Viscosidad Dinámica (μ).

Comportamiento Complejo

Viscoelasticidad (Dependencia del Tiempo)



Modelo de Maxwell



Modelo de Kelvin-Voigt

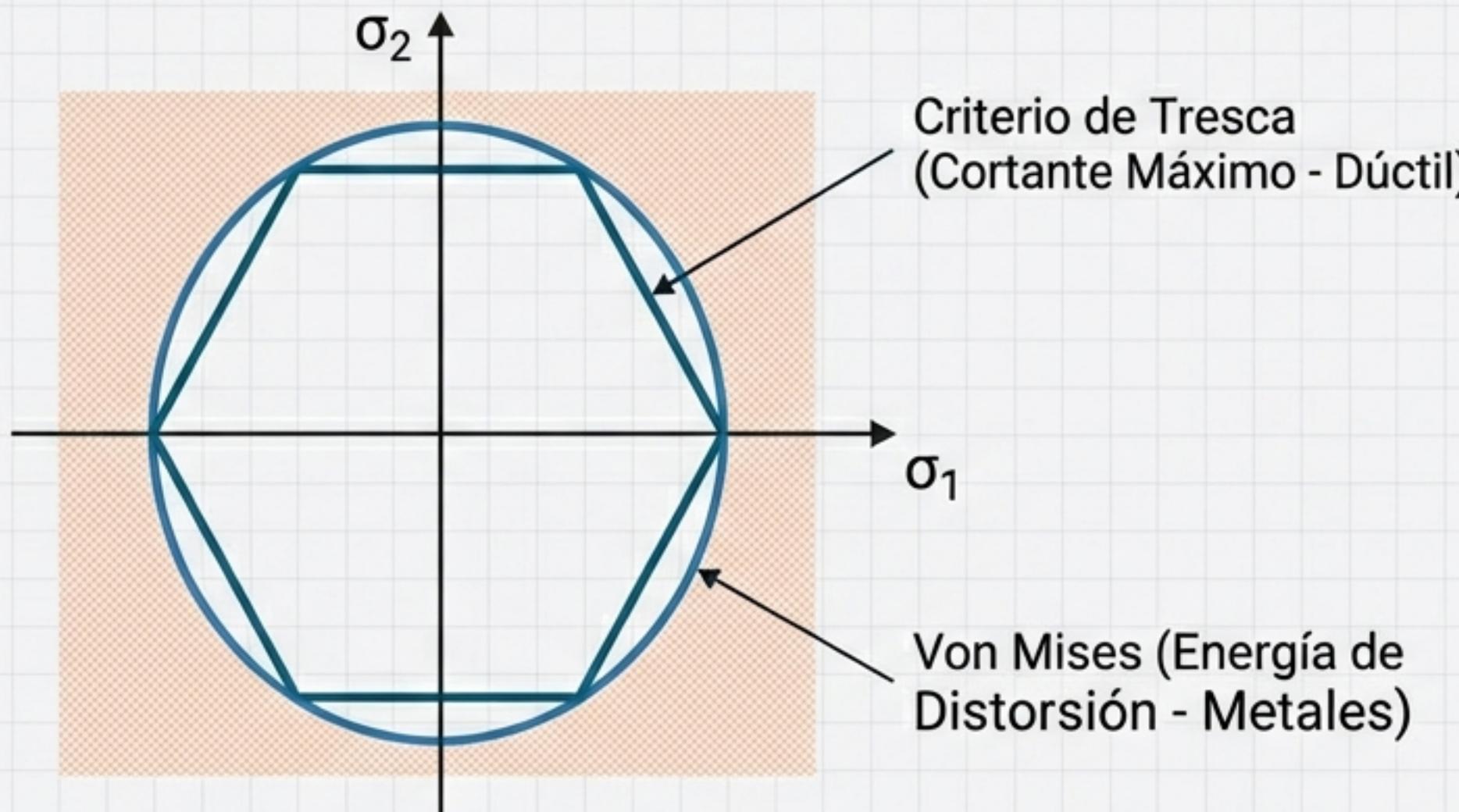
Combina elasticidad (resorte) y viscosidad (amortiguador).

Plasticidad (Deformación Permanente)



Teorías de Falla: Prediciendo el Límite

¿Cuándo dejará de funcionar el material?



Rankine: Máximo esfuerzo normal (Materiales frágiles como concreto/vidrio).

Von Mises: El estándar de oro para acero y metales.

La Mecánica del Medio Continuo transforma la física teórica en seguridad práctica.