MECANICA DEL MEDIO CONTINUO

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

UNIDAD II
ESTADOS DE ESFUERZOS

UNIDAD II.- ESTADO DE ESFUERZOS

En esta Unidad se dedicara a *organizar la teoría general de la mecánica del medio continuo*. Los conceptos que desempeñan el papel principal en esta teoría son dos: *el de esfuerzo y el de la deformación*. Estos conceptos ya los conocemos, pero tendremos que representarlos por medio de operadores tensionales adecuados, muy semejantes entre si, a fin de poder correlacionarlos , para expresar vectorialmente las ecuaciones constitutivas fundamentales para medio elásticos y para medios viscosos.

UNIDAD II.- ESTADO DE ESFUERZOS

Tales ecuaciones se ampliarían, con el objeto de tener en cuenta fenómenos termoplásticos, transferencia de calor en corrientes fluidas y efectos magneto hidrodinámicos.

ESFUERZOS.-

Los esfuerzos se requiere algo mas que un vector, ya que, como sabemos, a través de un punto hay infinitos esfuerzos: uno para cada elemento de superficie trazado idealmente por el punto mismo.

La representación adecuada en el *Tensor de los esfuerzos* por medio del cual comprobaremos fácilmente que con solo conocer tres de los infinitos esfuerzos. Correspondiente a tres elementos de superficie mutuamente ortogonales.

UNIDAD II.- ESTADO DE ESFUERZOS

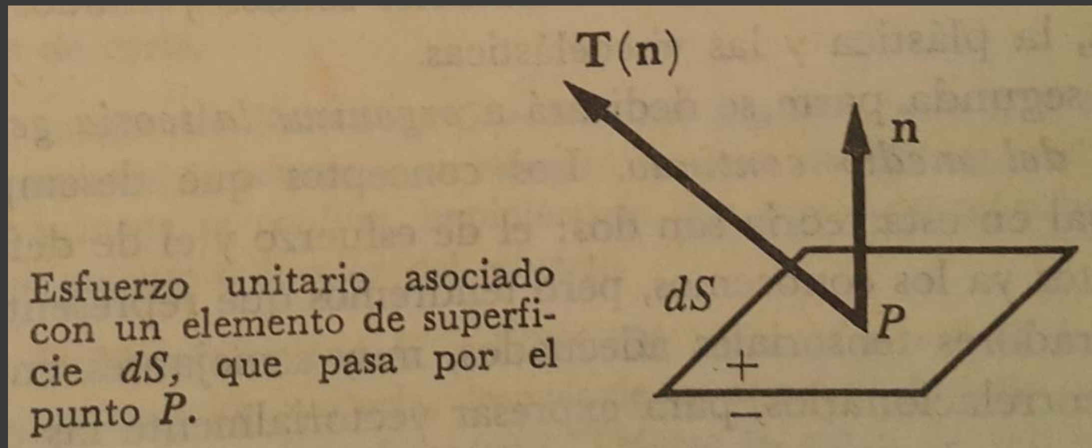
En esta unidad se establecerán las ecuaciones de equilibrio, que expresan el equilibrio necesarios entre fuerzas de inercia, de cuerpo y de superficie, en todo medio continuo.

El TENSOR DE LOS ESFUERZOS

Cada elemento *dS* de superficie trazado idealmente a través de un punto *P* interior a un medio continuo es posible asociar un vector que representan el esfuerzo *T* que actúa sobre el.

En tal sentido *T* resulta función de *dS,* y podría escribirse *T(dS).* Pero esta notación resultaría ambigua, debido a que *dS, siendo un escalar, no nos informa acerca de la orientación , en el espacio, del área elemental que representa.*

UNIDAD II.- ESTADO DE ESFUERZOS



Se debe considerar como positiva a una de las caras del elemento y negativa a la otra, siguiendo la regla y luego trazar a través del punto *P*, normalmente al elemento *dS* y en una dirección positiva, un vector unitario.

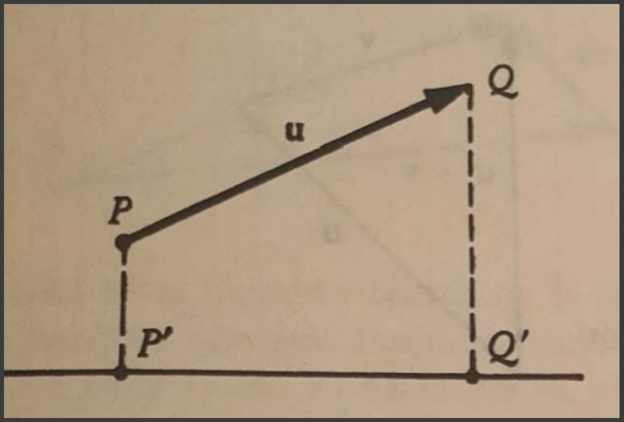
Este vector n ofrece una representación completa de la ubicación del elemento *dS*, porque representa, con su punto de aplicación , el centro del elemento *dS*, porque representa, con su punto de aplicación, el centro del elemento con su orientación del mismo elemento mismo queda perpendicular.

RESUMEN DE CALCULO VECTORIAL

Se llama *escalar* a una cantidad caracterizada por su magnitud, se llama un *vector* a una cantidad caracterizada por su magnitud y su dirección.

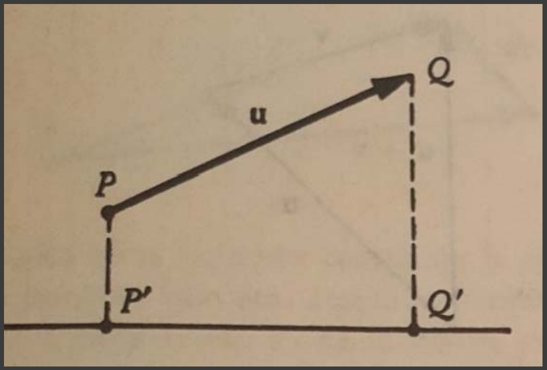
Se indica con $u = PQ$ al vector generado por el transporte de un punto móvil desde una posición P a otra posición Q, siguiendo la recta PQ.

Modulo de un vector es su magnitud; esta se indica con u, o bien con PQ. El modulo de un vector es un escalar.

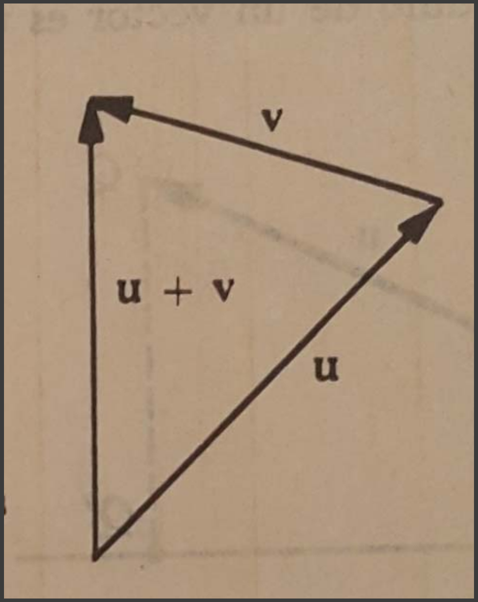


RESUMEN DE CALCULO VECTORIAL

Llamase componente de un vector PQ, con respecto a una recta, la magnitud de su proyección ortogonal P´Q´ sobre la recta .



La suma de 2 vectores se define por medio de la conocida regla del paralelogramo



Producto de un vector *u* por un escalar *m*, es un vector de modulo igual al producto *mu* cuya dirección es la misma del vector *u* o bien la opuesta, según si m es positivo o negativo.

RESUMEN DE CALCULO VECTORIAL

Dados tres vectores cualesquiera no coplanares *a,b,c,* todo vector *u* puede expresarse como combinación lineal de ellos:

$$\mathbf{u} = u_a\mathbf{a} + u_b\mathbf{b} + u_c\mathbf{c},$$

En particular, tomando los tres vectores unitarios *i,j,k* orientados respectivamente como los ejes coordenados *x,y,z,* todo vector *u* puede expresarse como

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$$

Siendo u_x, u_y, u_z sus componentes con respecto a los ejes

RESUMEN DE CALCULO VECTORIAL

Vector de posición r relativo al punto *P* es el vector *OP* que proyecta el punto *P* desde un punto fijo *O.* si las coordenadas cartesianas de O son 0,0,0 y las *P* son *x,y,z,* se tiene

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Producto escalar de dos vectores *u* y *v* es el escalar que se obtiene multiplicando los módulos de ambos vectores entre si y por el coseno del Angulo *(u,v)* formando sus direcciones:

$$\mathbf{u}\ \ \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = uv \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

En particular se tiene que :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = u_x, \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{j} = u_y, \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = u_z.$$

RESUMEN DE CALCULO VECTORIAL

El producto Vectorial o cruzado de *u* y *v* se define como

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Es un vector cuyo modulo es igual al área del paralelogramo cuyos lados son *u* y *v*, y cuya dirección es normal al plano común a dichos vectores, y orientada en el sentido del avance de un tornillo que gire desde *u* hacia *v*, por lo tanto se tiene que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

RESUMEN DE CALCULO VECTORIAL

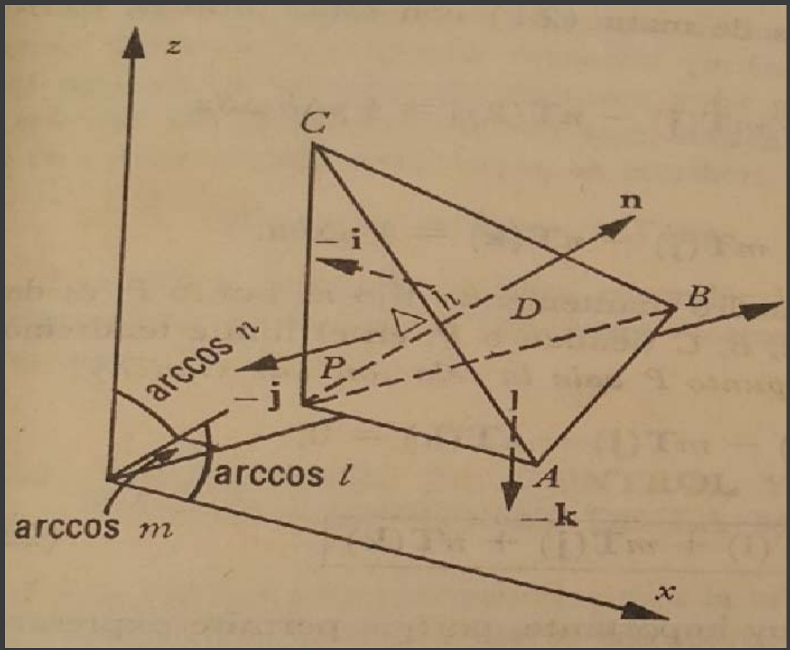
Producto Mixto de tres vectores no coplanares u,v, w es el escalar u*v x w se tiene

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\times\mathbf{u}=\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

EQUILIBRIO DINÁMICO

Esto no significa que en el medio no hay movimiento, mas bien como sabemos por ejemplo, en el caso de materiales viscosos sujetos a fuerzas distorsiónales, no puede haber equilibrio sin que haya movimiento.

Consideremos dentro del medio a un pequeño tetraedro ideal *PABC*, con vértice en *P*, y aristas *PA*, *PB, PC,* respectivamente, paralelas a los ejes coordenados *x, y, z* donde *n* el vector unitario.



EQUILIBRIO DINÁMICO

Normal a la base *ABC*, los vectores unitarios normales a las otras tres caras serán, evidentemente, *-i, -j, -k*. Sea ΔV el volumen del tetraedro, ΔS el área de la base *ABC*, ΔS_{X}, ΔS_{Y}, ΔS_{Y}, ΔS_{Z} las áreas de las caras *PBC, PCA, PAB* respectivamente, Δh la altura *DP*. El tetraedro esta sujeto a una Fuerza de cuerpo F que, indicando con *m* la masa del tetraedro con ρ su densidad y con a su aceleración.

Esta fuerza debe equilibrarse con la resultante *R* de las fuerzas producidas por los esfuerzos superficiales sobre las caras del tetraedro que calculamos a continuación.

Llamemos *l, m, n,* las componentes (cosenos directores) del vector *n*:

$$\mathbf{n} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}.$$

ESFUERZOS NORMALES Y TANGENCIALES

Si escribimos los vectores *T(i), T(j), T(k)* como sigue:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{i}) &= \sigma_x\mathbf{i} + \tau_{xy}\mathbf{j} + \tau_{xz}\mathbf{k} \\ \mathbf{T}(\mathbf{j}) &= \tau_{yx}\mathbf{i} + \sigma_y\mathbf{j} + \tau_{yz}\mathbf{k} \\ \mathbf{T}(\mathbf{k}) &= \tau_{zx}\mathbf{i} + \tau_{zy}\mathbf{j} + \sigma_z\mathbf{k} \end{aligned}}$$

La matriz del tensor de los esfuerzos resulta

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Procuremos interpretar físicamente los términos de esta matriz. Multiplicando escalarmente por i la primera ecuación obtenemos

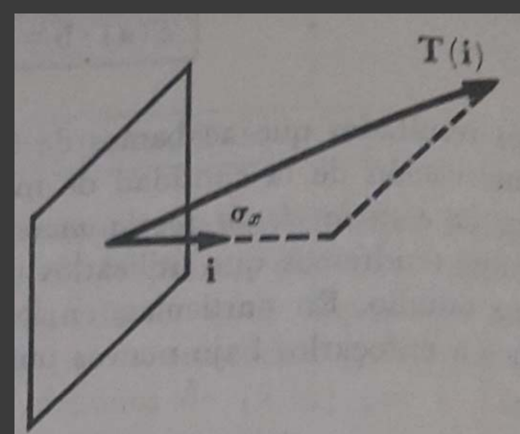
$$\sigma_x = \mathbf{T}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{i},$$

ESFUERZOS NORMALES Y TANGENCIALES

Es decir que σ_x representa la componente normal del esfuerzo ejercido sobre un elemento de superficie normal al eje x, o bien, como suele decirse, el esfuerzo normal paralelo al eje x. Análogamente σ_y y σ_z representa, respectivamente los esfuerzos normales en las direcciones de los ejes y y z.

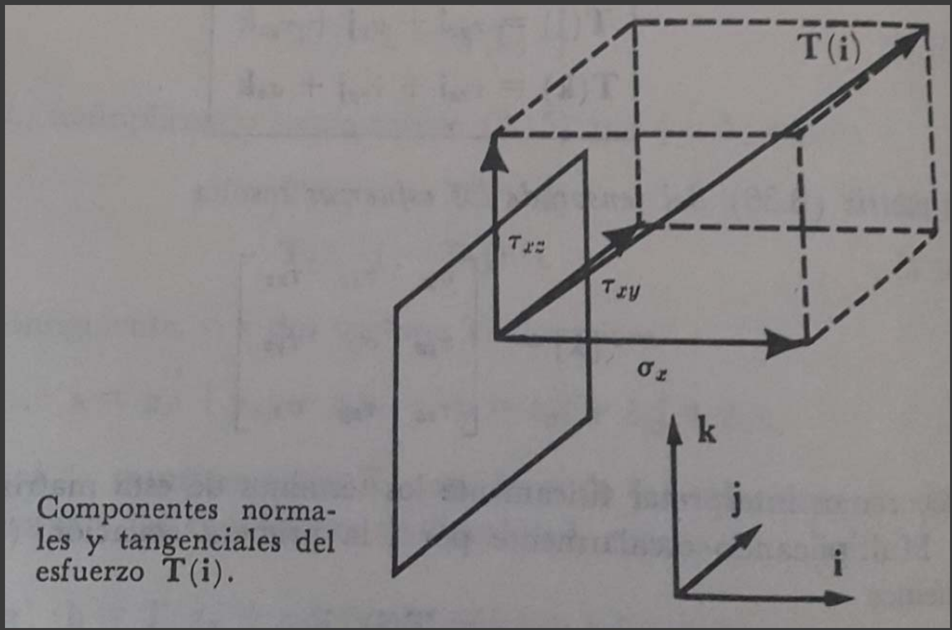
$$\tau_{xy} = \mathbf{T}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{j}$$

Por otro lado se tiene es decir que σ_{xy} representa la Componente tangencial del esfuerzo ejercido sobre un elemento de superficie normal al eje x, dirigida igual que el eje y inter presentación análogas puede hacerse para todos los coeficientes σ



ESFUERZOS NORMALES Y TANGENCIALES

El primer subíndice indica la dirección de la normal al elemento de superficie al cual el esfuerzo resulta tangente; el segundo subíndice señala la dirección del esfuerzo mismo



Componentes normales y tangenciales del esfuerzo $\mathbf{T}(\mathbf{i})$.

Los esfuerzos normales y tangenciales, los cuales acostumbra representar en forma escalar, de hecho son vectores, debido a que, por intermedio de sus subíndices, queda definida su dirección.

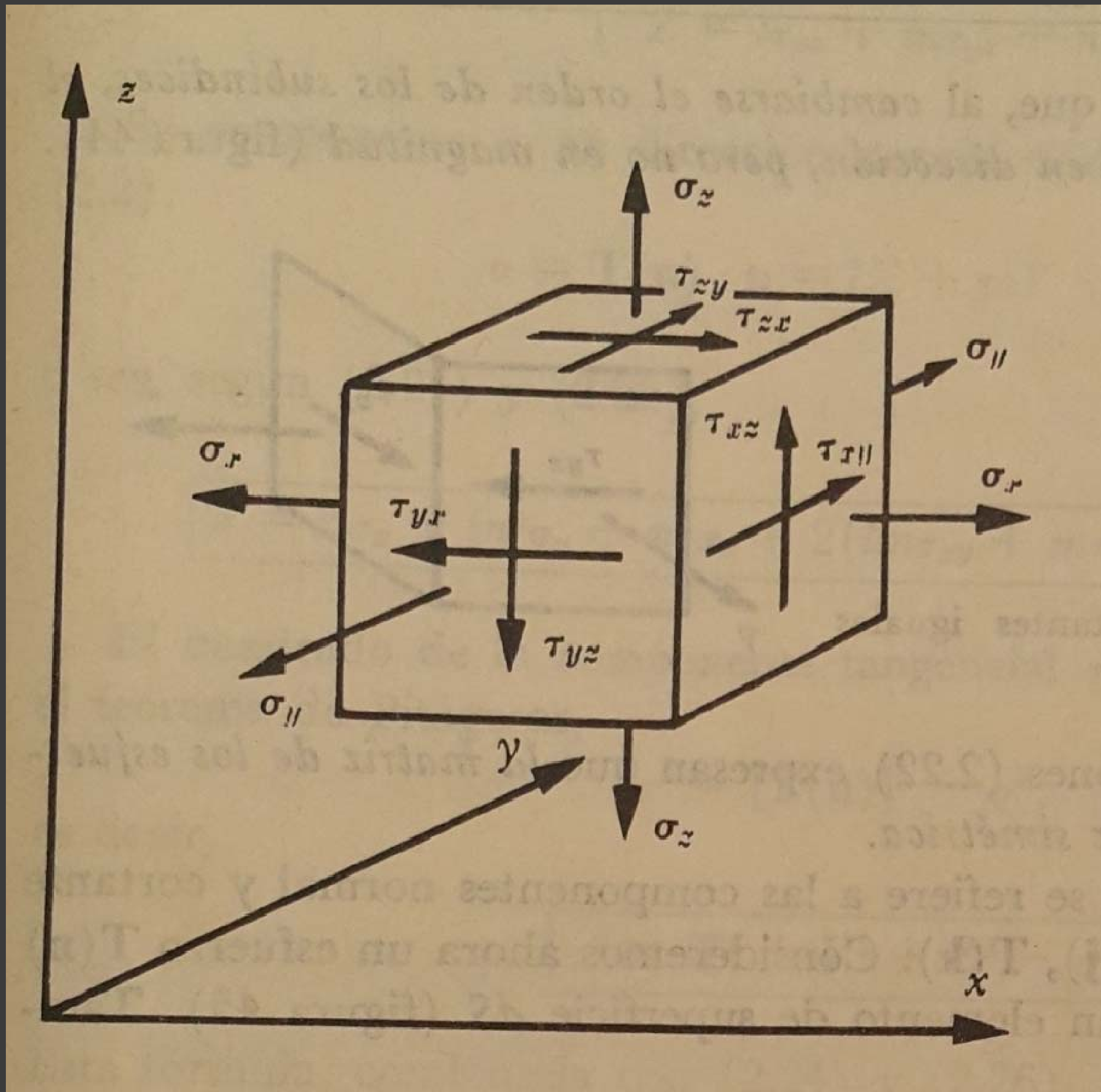
ESFUERZOS NORMALES Y TANGENCIALES

El signo positivo o negativo que le afecta debe interpretarse como sigue:

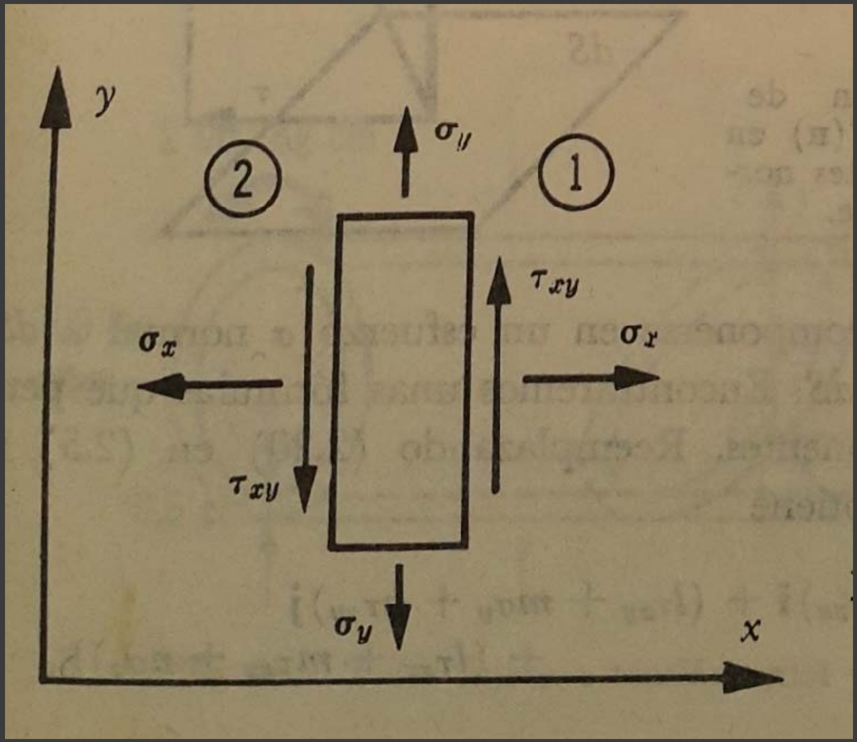
a) Esfuerzos normales σ se consideran positivos cuando representan tensiones y negativos, cuando representan compresiones.

b) Esfuerzos Tangenciales τ relativos a cierto elementos superficie, debemos asociarlos con el esfuerzo normal de tensión relativo al mismo elemento. Si se ultimo esta orientado de acuerdo con la dirección positiva del eje correspondiente al primer subíndice de τ.

ESFUERZOS, DEFORMACIONES Y ECUACIONES CONSTITUTIVAS

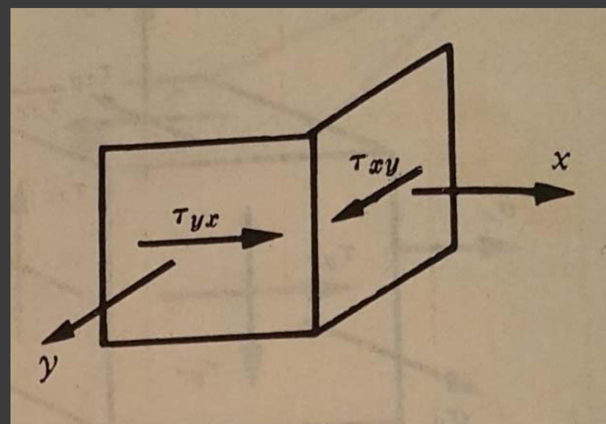


El esfuerzo tangencial será positivo si esta dirigido en el sentido positivo del eje correspondiente a su segundo subíndice, será negativo en caso contrario. La regla se invierte cuando el esfuerzo normal de tensión esta orientado a la dirección negativa



ESFUERZOS, DEFORMACIONES Y ECUACIONES CONSTITUTIVAS

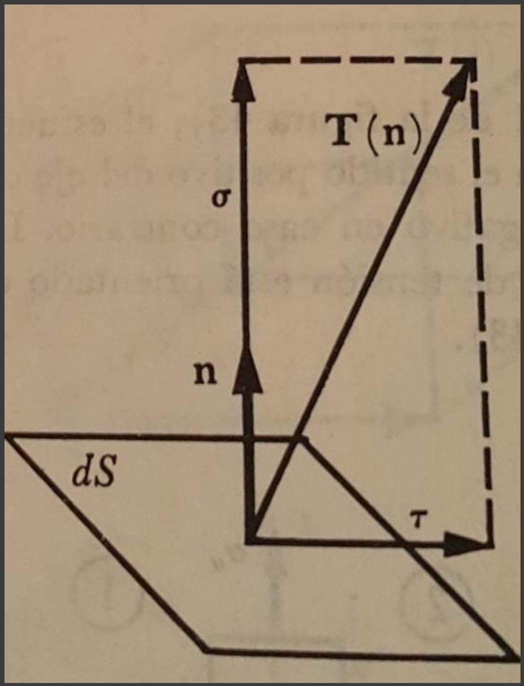
Estas formulas expresan que, al cambiarse el orden de los subíndices, el esfuerzo cortante cambia en dirección, pero no en magnitud



Expresan que la matriz de los esfuerzos es una matriz simétrica

$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Lo dicho hasta aquí se refiere a las componentes normal y cortante de los vectores *T(i), T(j), T(k)*. Consideremos ahora un esfuerzo *T(n)* cualquiera, aplicando a un elemento de superficie *dS*. También este esfuerzo puede descomponerse en un esfuerzo σ normal a *dS* y un esfuerzo *T* tangencial a *dS*. Encontraremos unas formulas que permiten calcular dichas componentes.



$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = (l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx})\mathbf{i} + (l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy})\mathbf{j} + (l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z)\mathbf{k},$$

Es decir, que el vector tiene componentes

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$$

$$\begin{cases} X = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ Y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ Z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z. \end{cases}$$

Su componente σ, en dirección normal a dS, será, de acuerdo con

$$\sigma = \mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = lX + mY + nZ,$$

ESFUERZOS NORMALES Y TANGENCIALES

O sea, según

$$\boxed{\sigma = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2(lm\tau_{xy} + mn\tau_{yz} + nl\tau_{zx})}$$

El cuadrado de la componente tangencial *(T)* sobre *dS* resulta, según el teorema de Pitágoras,

$$\tau^2 = [\mathbf{T}(\mathbf{n})]^2 - \sigma^2;$$

Es decir,

$$\boxed{\tau^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - \sigma^2}$$

PROBLEMA

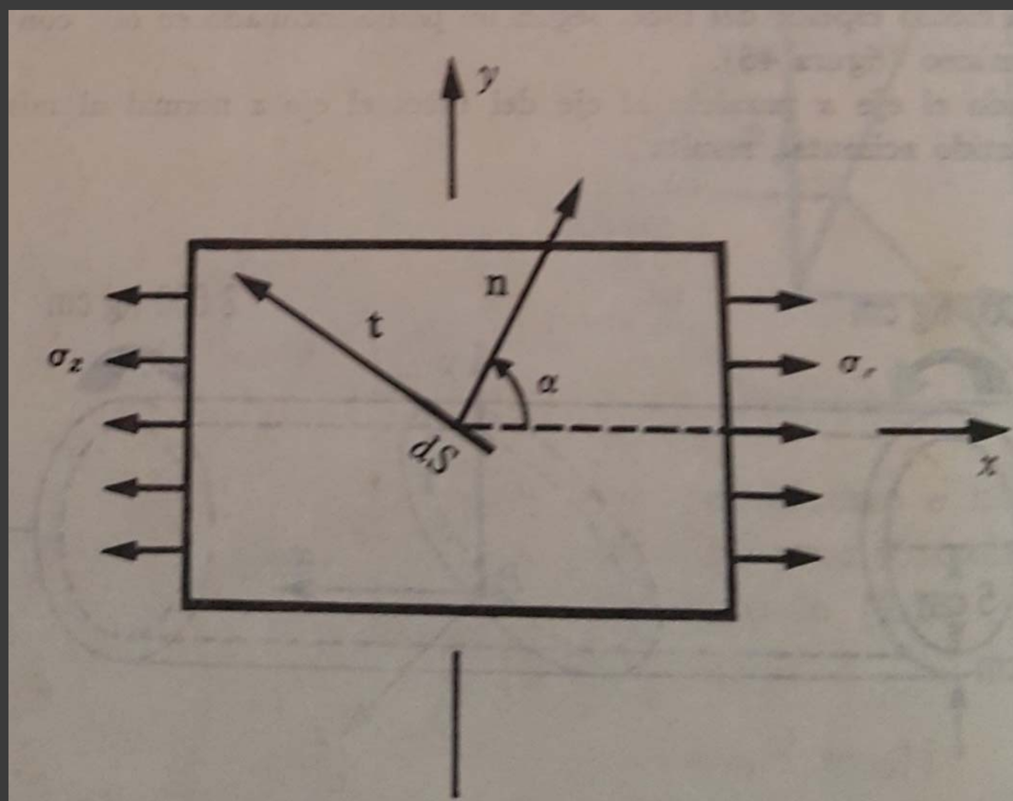
Un tubo de 15 cm de diámetro y 5 mm de espesor esta sometido a una tensión longitudinal de 1000 kg y un momento torsionante de 3000 kg cm, aplicado en sus extremos. Calcúlense los esfuerzos normal σ y cortante τ en un punto P, a medio espesor del tubo, según un plano inclinado en 60° con respecto al eje del mismo.

Tomando el eje x paralelo al eje del tubo, el eje z normal al mismo y el eje y en sentido acimutal, resulta

EJEMPLO 1

Un cuerpo esta sujeto a tensión σx únicamente (tensión uniaxial) No hay otros esfuerzos normales o tangenciales en las direcciones coordenadas; es decir, se tiene

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$



EJEMPLO 1

Encuéntrese los esfuerzos normal σ y tangencial τ , correspondientes a un plano dS cuya normal n esta en el plano xy y forma un Angulo ∞ con el eje x.

Siendo

$$l = \cos \alpha, \qquad m = \operatorname{sen} \alpha, \qquad n = 0,$$

Resulta de acuerdo con

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha.$$

Por otro lado , dice que X = $\sigma x \cos x$, y remplazando en que queda

$$\tau^2 = \sigma_x{}^2 \cos^2 \alpha - \sigma_x{}^2 \cos^4 \alpha = \sigma_x{}^2 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha;$$

Entonces

$$\tau = -\sigma_x \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha.$$

EJEMPLO 1

Aquí, el signo negativo resulta de la orientación escogida para el vector tangente *t*. de la ultima formula se desprende que la cortante *τ.* De la ultima formula se desprende que el cortante τ alcanza su valor máximo, que es igual a *σx /2, cuando en angulo* ∞= - 45°

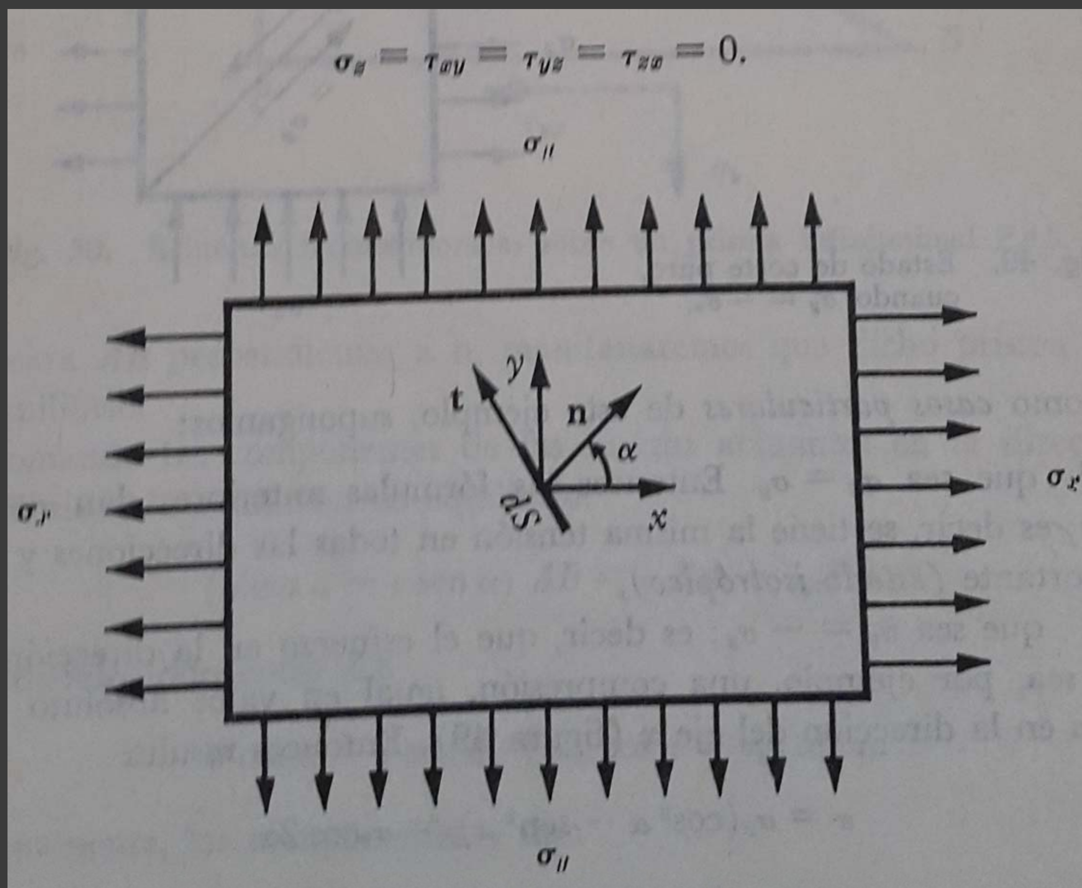
$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha.$$

Ejemplo 2

Un cuerpo esta sujeto a tensiones *σx y σy unicamente en tension biaxial. No hay*

EJEMPLO 2

Un cuerpo esta sujeto a tensiones *σx y σy* únicamente en *tensión biaxial.* No hay otro esfuerzos normales o tangenciales en la direcciones coordenada, es decir



EJEMPLO 2

Encuéntrese a los esfuerzos relativos a una dirección *n* como la del problema anterior, para la cual *l=cos ∞, m= sen ∞, n= 0.*

$$X = \sigma_x \cos \alpha, \qquad Y = \sigma_y \operatorname{sen} \alpha,$$

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Si despejamos σ del sistema formado por las dos ecuaciones anteriores, multiplicado la primera por *cos ∞,* la segunda por *sen ∞* y sumando, sin olvidar que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$

Teniendo como resultado:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2 \alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha$$

Para despejar *τ,* multipliquemos la primera ecuación por *sen ∞,* la segunda por *cos ∞* y restemos; queda

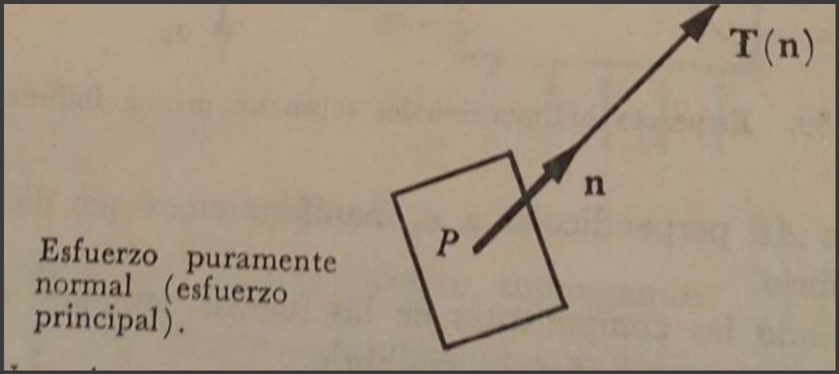
$$\tau = (\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Estas son las formulas que suelen utilizarse para el estudio de todos estado de esfuerzos plano. Incluyen como casos particulares las expresiones de *σ y τ.*

ESFUERZOS NORMALES PRINCIPALES

Si por un punto *P* de un medio continuo tomamos una dirección *n*, el esfuerzo *T(n)* correspondiente tendrá, por lo general, una dirección diferente de *n*.

Son muy importantes las *direcciones según las cuales el esfuerzos es puramente normal*. Tales direcciones se llaman *direcciones principales*; los esfuerzos correspondientes se llaman *esfuerzos principales*. A continuación mostraremos, por medio de un problema, como es que estas direcciones pueden determinarse en un caso especifico.



PROBLEMA 3.-

Una pieza prismática cuya sección horizontal A es de 2 cm2, se introduce en un bloque rígido y se carga uniformemente con las fuerzas normal F1 y cortante F2, orientadas como muestra en la figura, ambas iguales a 100 kg. Encuentre la magnitud y la dirección sobre el eje x de 31° 43´ de los esfuerzos principales que están en el plano de la figura.

Tomada la dirección de F2 como eje x , la de F1 como eje y, resulta