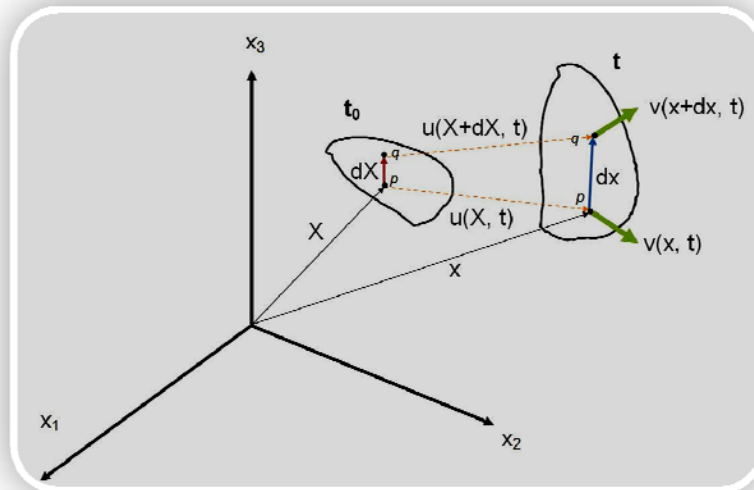




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA



INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO



Armando Ortiz Prado
Juan Armando Ortiz Valera
Osvaldo Ruiz Cervantes

DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN Y ASISTENCIA TÉCNICA EN MATERIALES



ORTIZ PRADO, Armando, J. A. Ortiz Valera y O. Ruiz Cervantes. *Introducción a la mecánica del medio continuo*. México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, 2013, 510 p.

Introducción a la mecánica del medio continuo

Primera edición: 14 de febrero de 2013

D.R. © 2013, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, México, D.F. C.P. 04510

ISBN 978-607-02-4067-6

FACULTAD DE INGENIERÍA
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en México.

PRÓLOGO

El aprendizaje de la Mecánica del Medio Continuo, en la opinión de este autor, constituye una base fundamental en la formación de los futuros ingenieros; sin embargo, las asignaturas que estudian este tema se han caracterizado por un elevado índice de reprobación. Lo anterior ha sido en gran parte resultado de la limitada bibliografía que existe en español (debemos recordar que las primeras obras se publicaron hace más de tres décadas, esfuerzo del Dr. Enzo Levy (†)), y sobre todo de las diferencias en notación. Por otra parte, la presente obra se ha orientado a cumplir las condiciones como texto para el curso de Elementos de Mecánica del Medio Continuo, así como herramienta de consulta para quienes están matriculados en cursos posteriores o al inicio del posgrado.

Del análisis efectuado en una serie de obras modernas (con no más de 10 años de publicación), las cuales se han editado, sobre todo, en inglés, me ha permitido estructurar una obra básica, con un lenguaje simple y donde se combine la notación índice con la general, esto con la finalidad de que el lector se habitúe a las diferentes notaciones empleadas. Se ha pretendido, también, explicar con claridad el desarrollo matemático a la vez de la comprensión de los conceptos.

Esta obra ha surgido a través de las diversas ocasiones en que he impartido el curso pasando de unas simples notas de clase, resultado de la combinación de lo publicado por diversos autores, buscando siempre el balance entre definición y desarrollo matemático. La mayoría de estas anotaciones permanecen en los cuadernos que me acompañan cada semestre. Sin embargo, en cada curso fue necesario incluir materiales que permitieran clarificar las dudas surgidas durante el mismo; todo esto dio como resultado que estas notas se fueran haciendo más extensas y completas.

A petición de los estudiantes he recopilado dichas notas y se presentan como un apoyo más para la formación de futuros ingenieros. La organización del texto consta de nueve capítulos, y pretendiendo de inicio homogenizar el manejo matemático de los alumnos, en el primer capítulo se presentan los antecedentes necesarios que permitirán a los alumnos entender los

conceptos básicos del álgebra y cálculo de tensores. El capítulo 2 se enfoca en la cinemática de movimiento para un medio continuo, donde se hace énfasis en sus descripciones material y espacial. Los conceptos de deformación se estudian en el capítulo 3, mientras que el capítulo 4 se orienta a la determinación del tensor de esfuerzos; con todos estos conceptos ya explicados, se estudian las ecuaciones generales en el capítulo 5 para, de esta forma, proceder a las aplicaciones a través del análisis del comportamiento elástico que se explica en el capítulo 6, y de los fluidos newtonianos, en el capítulo 7. Como material complementario, en el capítulo 8 se estudia el comportamiento viscoelástico, mientras que el capítulo 9 se orienta a una descripción introductoria de los medios porosos. En todos los capítulos se ha tratado de presentar la teoría y una serie de ejercicios ya resueltos, así como una amplia gama de problemas propuestos.

La realización de estas notas ha requerido una considerable inversión de tiempo. Por el momento, se cumple completamente con el contenido del programa, aunque esto no será un impedimento para agregar nuevo material en las siguientes revisiones.

Por otra parte, quiero agradecer la activa participación de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería de la UNAM en la edición de esta obra, de manera especial a la maestra en letras María Cuairán Ruidíaz, jefa de la Unidad, y a la Lic. Elvia Angélica Torres Rojas por la revisión editorial, consejos y paciencia.

Finalmente, quiero agradecer a mi grupo de colaboradores en la UDIATEM que me han apoyado para lograr este trabajo; en especial, al ingeniero Roberto Cisneros por la ayuda proporcionada durante todo este tiempo para la captura y revisión de estas notas.

Armando Ortiz Prado

*Unidad de Investigación y Asistencia Técnica en Materiales
Facultad de Ingeniería, UNAM*

CONTENIDO

PRÓLOGO

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES GENERALES DE LA MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO 1

1.1	INTRODUCCIÓN	1
1.2	TENSORES	4
1.3	OPERACIONES CON TENSORES	9
	<i>Producto de tensores</i>	11
	<i>Multiplicación de tensores</i>	13
1.4	OPERADORES TENSORIALES	18
	<i>Delta de Kroneker</i>	18
	<i>Permutador</i>	19
1.5	FACTORIZACIÓN	21
1.6	TENSORES CON CARACTERÍSTICAS PARTICULARES	22
	<i>Tensor ortogonal</i>	22
	<i>Tensor isotrópico</i>	24
	<i>Componentes esférica y desviadora de los tensores</i>	
	<i>simétricos de rango dos</i>	26
1.7	EIGENVALORES Y EIGENVECTORES	27
	<i>Valores y direcciones principales</i>	29
1.8	LEYES DE TRANSFORMACIÓN DE TENSORES	35
	<i>Ley de transformación para componentes cartesianos de vectores</i>	37
	<i>Ley de transformación entre tensores</i>	38
1.9	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL APLICADO A TENSORES	41
	<i>Operador diferencial (∇)</i>	43
	<i>Divergencia de una díada</i>	47
	<i>Identidades de interés</i>	49
	<i>Operador gradiente</i>	50
	<i>Laplaciano de un tensor de segundo rango</i>	51
	<i>Derivada direccional y derivada normal</i>	52
1.10	TEOREMAS INTEGRALES PARA VECTORES	53
	<i>Teorema de la divergencia</i>	53

	<i>Vector solenoidal</i>	54
	<i>Teorema de Stokes</i>	55
	<i>Vectores conservativos e irrotacionales</i>	57
	<i>Representación de Helmholtz</i>	58
1.11	FÓRMULAS DE TRANSPORTE	60
	<i>Teorema de transporte de Reynolds</i>	61
1.12	COORDENADAS CURVILÍNEAS	61
	<i>Coordenadas cilíndricas</i>	61
	<i>Componentes de la divergencia de un tensor de 2.º orden</i>	64
	<i>Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)</i>	66
	EJERCICIOS RESUELTOS	68
	EJERCICIOS PROPUESTOS	73
 CAPÍTULO 2		
CINEMÁTICA DEL CONTINUO		81
<hr/>		
2.1	INTRODUCCIÓN	81
	<i>Noción de continuo</i>	82
2.2	CONCEPTOS GENERALES DE CINEMÁTICA DEL CONTINUO	82
2.3	DESCRIPCIÓN MATERIAL Y DESCRIPCIÓN ESPACIAL	84
2.4	DERIVADA MATERIAL	85
	<i>Derivada material de un tensor de primer rango</i>	86
2.5	CAMPO DE DESPLAZAMIENTO	89
	<i>Ecuación de movimiento para un cuerpo rígido</i>	89
2.6	CONCEPTOS Y DEFINICIONES	91
	<i>Condiciones estacionarias (Estacionalidad)</i>	91
	<i>Trayectoria –Líneas de Trayectoria (Pathline)</i>	91
	<i>Líneas de Corriente (Streamline)</i>	93
	<i>Líneas de traza (Streakline)</i>	94
	EJERCICIOS RESUELTOS	96
	EJERCICIOS PROPUESTOS	99
 CAPÍTULO 3		
DEFORMACIÓN		103
<hr/>		
3.1	CONCEPTOS GENERALES	103
	<i>Cinemática del continuo</i>	103
3.2	DEFORMACIÓN INFINITESIMAL	105
	<i>Dilatación unitaria</i>	111
	<i>Tensor infinitesimal de rotación</i>	112

3.3	TENSOR DE RAPIDEZ DE DEFORMACIÓN (D)	113
	<i>Rapidez de cambio unitario de volumen ($\dot{\delta}$)</i>	117
3.4	ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD	117
3.5	GRADIENTE DE DEFORMACIÓN (F)	119
	<i>Tensor de deformación de Cauchy – Green por derecha (c)</i>	123
3.6	TENSOR LAGRANGIANO DE DEFORMACIONES FINITAS (TENSOR LAGRANGIANO DE DEFORMACIÓN)	125
3.7	TENSOR DE DEFORMACIÓN CAUCHY-GREEN POR IZQUIERDA	127
3.8	TENSOR DE DEFORMACIÓN EULERIANA	128
3.9	CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD PARA EL TENSOR DE DEFORMACIONES FINITAS	132
3.10	CAMBIO DE ÁREA DEBIDO A DEFORMACIÓN	132
3.11	CAMBIO DE VOLUMEN DEBIDO A DEFORMACIÓN	134
3.12	DESCRIPCIÓN DEL GRADIENTE DE DEFORMACIÓN PARA UNA REFERENCIA CILÍNDRICA (r, θ, z) Y PARA UNA BASE ESFÉRICA (r, θ, ϕ)	135
	EJERCICIOS PROPUESTOS	136
 CAPÍTULO 4		
ESFUERZOS		143
<hr/>		
4.1	CONCEPTOS GENERALES	143
4.2	VECTOR DE ESFUERZOS	145
4.3	TENSOR DE ESFUERZOS DE CAUCHY	147
	<i>Componentes del tensor de esfuerzos</i>	148
	<i>Simetría del tensor de esfuerzos de Cauchy</i>	149
	<i>Esfuerzos principales</i>	150
	<i>Esfuerzos cortantes máximos (σ_i)</i>	151
4.4	CÍRCULO DE MOHR PARA ESFUERZOS	155
	<i>Cortante octaédrico</i>	158
4.5	TENSORES DE ESFUERZOS DE PIOLA-KIRCHHOFF O TENSOR DE ESFUERZOS LAGRANGIANO	161
	<i>Primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff o tensor de esfuerzos lagrangiano</i>	161
	<i>Segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff (\bar{T})</i>	163
	EJERCICIOS PROPUESTOS	165
 CAPÍTULO 5		
ECUACIONES GENERALES		171
<hr/>		
5.1	INTRODUCCIÓN	171
5.2	ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE MASA	172
5.3	ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD EN FORMA MATERIAL	174

5.4	ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO (ECUACIÓN DE CAUCHY)	177
	<i>Desarrollo de la Ecuación de conservación de movimiento en forma integral</i>	177
	<i>Simplificaciones de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento</i>	183
	<i>Ecuación de movimiento en forma material</i>	183
5.5	PRINCIPIO DE ESFUERZOS DE CAUCHY	185
5.6	ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA	187
5.7	ECUACIÓN DE LA ENERGÍA EN FORMA MATERIAL	192
5.8	DESIGUALDAD ENTRÓPICA	193
5.9	DESIGUALDAD ENTRÓPICA EN FORMA MATERIAL	195
	EJERCICIOS PROPUESTOS	196

CAPÍTULO 6

COMPORTAMIENTO ELÁSTICO

6.1	ANTECEDENTES	199
6.2	DESCRIPCIÓN DEL COMPORTAMIENTO	200
6.3	IDEALIZACIONES PARA EL COMPORTAMIENTO ELÁSTICO	207
	<i>Simetría elástica</i>	208
	<i>Sólido elástico, homogéneo, lineal y monotrópico</i>	210
	<i>Constantes elásticas para un material monotrópico (monoclínico)</i>	214
	<i>Sólido elástico, homogéneo, lineal y ortotrópico</i>	217
	<i>Determinación de las constantes elásticas independientes con base en la notación tensorial</i>	220
	<i>Sólido elástico, homogéneo, lineal y transversalmente isotrópico</i>	222
	<i>Ecuación constitutiva para un material elástico transversalmente isotrópico</i>	222
	<i>Sólido elástico lineal, homogéneo e isotrópico</i>	230
	<i>Otras constantes elásticas</i>	235
6.4	APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD EN EL ANÁLISIS DE DIFERENTES PROBLEMAS BÁSICOS	241
	<i>Estudio de una barra circular sometida a torsión</i>	241
	<i>Esfuerzos principales</i>	248
	<i>Barra sometida a carga uniaxial (tracción o compresión)</i>	250
	<i>Principio de Saint Venant</i>	253
	<i>Viga (barra) sometida a flexión pura</i>	253
	<i>Efecto combinado de flexión y torsión</i>	261
6.5	ESTADOS PARTICULARES DE ESFUERZO Y DEFORMACIÓN	262
	<i>Estado plano de esfuerzos (Estado biaxial de esfuerzos)</i>	263
	<i>Estado de deformación biaxial</i>	264
	<i>Función de esfuerzos de Airy</i>	268

	Aplicación de las funciones de esfuerzo de Airy en la determinación del estado de esfuerzos y deformaciones asociados a la presencia de una dislocación de borde	271
	<i>Viga curvada sometida a flexión pura</i>	273
6.6	ECUACIONES DE LA TEORÍA INFINITESIMAL DE LA ELASTICIDAD	276
	<i>Ecuaciones de Navier</i>	279
	<i>Ecuación de Navier en coordenadas rectangulares</i>	280
	<i>Ecuaciones de Navier en coordenadas cilíndricas</i>	280
	<i>Ecuaciones de Navier en coordenadas esféricas</i>	283
6.7	ANÁLISIS DEL DESPLAZAMIENTO DE ONDAS ELÁSTICAS A TRAVÉS DE UN SÓLIDO	284
	<i>Análisis de una onda plana irrotacional</i>	284
	<i>Onda plana de equivolumen</i>	289
6.8	ELASTICIDAD NO LINEAL	292
	EJERCICIOS RESUELTOS	294
	EJERCICIOS PROPUESTOS	324

CAPÍTULO 7

FLUIDOS VISCOSOS NEWTONIANOS

343

7.1	CONCEPTOS GENERALES	343
7.2	FLUIDOS COMPRESIBLES E INCOMPRESIBLES	347
7.3	ECUACIONES DE LA HIDROSTÁTICA	345
7.4	MOVIMIENTO DE CUERPO RÍGIDO DEL FLUIDO	349
7.5	FLUIDO NEWTONIANO	354
	<i>Fluido newtoniano incompresible</i>	357
	<i>Ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles</i>	359
	<i>Ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas</i>	361
	<i>Ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas esféricas</i>	363
7.6	LÍNEAS DE TRAYECTORIA Y LÍNEAS DE CORRIENTE.	365
7.7	FLUJO ESTABLECIDO Y FLUJO TRANSITORIO	369
7.8	FLUJO LAMINAR Y FLUJO TURBULENTO	369
7.9	FLUJO DE COUETTE	370
7.10	FLUJO UNIAXIAL PRODUCIDO POR PRESIÓN (FLUJO DE POISEUILLE)	373
7.11	FLUJO INDUCIDO POR PRESIÓN A TRAVÉS DE UN CONDUCTO DE SECCIÓN CIRCULAR (TUBO)	375
7.12	FLUJO INDUCIDO POR VELOCIDAD ENTRE DOS CILINDROS CON LONGITUD INFINITA	381
7.13	FLUJO ROTACIONAL E IRROTACIONAL	388
	<i>Flujo irrotacional</i>	390
	<i>Estado de esfuerzos para un flujo irrotacional de un fluido incompresible de densidad homogénea</i>	392

7.14	FUNCIONES DISIPATIVAS EN FLUIDOS NEWTONIANOS	393
	<i>Función disipativa para un fluido newtoniano compresible</i>	396
7.15	DIFUSIVIDAD TÉRMICA	397
7.16	FLUJO IRROTACIONAL DE UN FLUIDO NO VISCOSO DE DENSIDAD HOMOGÉNEA	399
	<i>Ecuación de Bernoulli</i>	399
	<i>Ecuación de Torricelli</i>	401
	<i>Flujos irrotacionales como solución a la ecuación de Navier-Stokes</i>	402
7.17	ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE VORTICIDAD PARA UN FLUIDO VISCOSO	
	INCOMPRESIBLE DE DENSIDAD HOMOGÉNEA	403
7.18	EL CONCEPTO DE CAPA LÍMITE	405
	<i>Ecuación de transporte de vorticidad para fluidos viscosos</i>	
	<i>incompresibles de densidad constante (homogénea)</i>	406
	<i>Flujo irrotacional como solución de las ecuaciones de Navier-Stokes</i>	406
	<i>Demostración de la imposibilidad de cumplimiento de la</i>	
	<i>ecuación de Laplace</i>	408
7.19	FLUIDO NEWTONIANO COMPRESIBLE	410
7.20	ONDAS ACÚSTICAS	413
	EJERCICIOS RESUELTOS	418
	EJERCICIOS PROPUESTOS	442

CAPÍTULO 8

VISCOELASTICIDAD LINEAL

451

8.1	CONCEPTOS BÁSICOS	451
8.2	COMPORTAMIENTO CARACTERÍSTICO DE LOS FLUIDOS NO NEWTONIANOS	455
8.3	TEORÍA UNIAXIAL	457
	<i>Fluido lineal viscoelástico (fluido de Maxwell)</i>	457
	<i>Modelo de Kelvin</i>	461
8.4	MODELOS COMPUESTOS	462
	<i>Modelos de 3 elementos</i>	462
	<i>Modelo de cuatro elementos</i>	467
8.5	MODELOS GENERALIZADOS	469
	<i>Modelo generalizado de Kelvin</i>	469
	<i>Modelo generalizado de Maxwell</i>	471
8.6	FLUENCIA Y RELAJACIÓN DE ESFUERZOS	472
8.7	INTEGRALES HEREDITARIAS	475
	EJERCICIOS RESUELTOS	476
	EJERCICIOS PROPUESTOS	482

CAPÍTULO 9

MATERIALES POROSOS

487

9.1	INTRODUCCIÓN	487
9.2	PRINCIPIOS FUNDAMENTALES	488
	<i>Hipótesis de continuidad</i>	488
	<i>Porosidades lagrangiana y euleriana</i>	489
	<i>Ecuación de continuidad</i>	490
	<i>Balance de masa considerando una discontinuidad</i>	491
	<i>Balance de cantidad de movimiento</i>	492
	<i>Energía cinética</i>	494
	<i>Conservación de energía y balance de entropía</i>	494
9.3	COMPORTAMIENTO POROELÁSTICO	496
9.4	CASOS DE ESTUDIO PARA MATERIALES POROSOS	498
	<i>Inyección de un fluido</i>	498
	<i>Sedimentación no lineal</i>	500
	<i>Histéresis capilar de materiales porosos</i>	503
	<i>Drenado de materiales porosos de baja permeabilidad</i>	503
9.5	POROPLASTICIDAD	503
	<i>Ecuaciones de estado para el comportamiento poroplástico de la matriz</i>	505
	<i>Ecuaciones de estado para el comportamiento poroplástico del estado poroso</i>	506
9.6	POROVISCOELASTICIDAD	507
	<i>Consolidación primaria y secundaria de suelos</i>	508
	BIBLIOGRAFÍA	509

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES GENERALES DE LA MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO

1.1 INTRODUCCIÓN

Teoría del continuo. La materia, en términos generales, está formada por moléculas, átomos e iones. En cualquiera de los casos, la unidad fundamental se reduce a los átomos, los cuales están constituidos a su vez por partículas subatómicas. Las dimensiones del radio atómico equivalente de los elementos es del orden de 10^{-10} m; por su parte, los datos recabados por la física permiten estimar que el radio del núcleo atómico es menor a 10^{-13} m. Del análisis comparativo de estos dos valores se constata que el átomo dista mucho de ser un continuo; por consecuencia, la materia cualquiera que sea su estado no lo será. Es entonces que se concluye que cualquier cuerpo ocupa un lugar en el espacio y que ningún otro podrá ocupar el mismo lugar al mismo tiempo, sin embargo, no lo ocupa en su totalidad. A pesar de lo antes expuesto, mucho del comportamiento de los materiales ante las sollicitaciones que le son impuestas se puede describir a partir de considerarlos como continuos.

Los análisis tradicionalmente efectuados para describir el comportamiento tanto de fluidos como de sólidos, e incluso en el caso de materiales porosos, se pueden realizar considerando a éstos como medios infinitamente divisibles. Es por tanto que la teoría que permite describir el comportamiento macroscópico de los materiales, negando su microestructura, es conocida como *Teoría del continuo*.

Resulta evidente que la Teoría del continuo permitirá la prospección de los fenómenos a partir de ciertas dimensiones mínimas, estos valores límite dependerán del material y del fenómeno en estudio; por ejemplo, en el análisis de los estados de esfuerzos y

deformaciones para los metales, las dimensiones mínimas para realizar la idealización de continuo son del orden de 10^{-8} m, esto es cien veces las dimensiones del átomo. En consecuencia, se tiene que al aplicar la teoría del continuo en un metal en el cual existen dislocaciones, es posible describir el campo de esfuerzos, de deformaciones y la energía asociada a la presencia de estas dislocaciones; lo anterior en consideraciones de continuo, condición que puede ser aplicada a la totalidad de la dislocación con excepción del núcleo de la misma, esto es para dimensiones por debajo de 10^{-8} m.

Considerando lo antes expuesto, se concluye que si bien la teoría del continuo es muy útil para el análisis de una gran variedad de situaciones, ésta no podrá ser utilizada en el caso de que los fenómenos se describan a través de parámetros que estén por debajo de la dimensión límite para la cual el material pueda ser considerado como continuo. Por ejemplo, algunos fenómenos de propagación de ondas de muy reducida longitud no pueden ser descritos a través de esta teoría.

Por consecuencia, la aplicación de la mecánica del continuo no depende de la conceptualización filosófica, ya que ningún medio es infinitamente divisible, sino de la congruencia existente entre el comportamiento observado y los resultados que se desprenden de la aplicación de la teoría y de la idealización del comportamiento del material. Afortunadamente en muchos casos, los resultados que emergen de la aplicación del concepto de continuo son congruentes con lo observado experimentalmente, lo que ha permitido el desarrollo de muchas teorías de amplia aplicación en la actualidad.

Los conceptos que se derivan de la Mecánica del Medio Continuo (MMC), por el espectro de aplicación de los resultados obtenidos, se pueden agrupar en dos grandes áreas:

- a. *Principios generales* que son comunes a todos los medios. Éstas son leyes de la física ampliamente demostradas y que deben de ser cumplidas por cualquier medio. Por ejemplo, las leyes de conservación de masa o de energía.
- b. *Ecuaciones constitutivas* que definen el comportamiento de materiales idealizados, por ejemplo, sólidos elásticos lineales o fluidos newtonianos.

Los principios generales son elementos evidentes de nuestra realidad física, entre los que se pueden mencionar están las leyes de conservación de masa y de conservación de energía, balance de momentum lineal y de momento de momentum y la ley de desigualdad entrópica. Matemáticamente existen dos formas de presentar estos principios:

1. *Forma integral*, en este caso corresponde a un volumen finito de material.
2. *Forma diferencial o ecuaciones de campo*, el principio corresponde a un volumen diferencial del material (partícula) de cada punto del campo bajo análisis.

Como ha sido antes mencionado, las ecuaciones constitutivas representan la otra parte fundamental de la Mecánica del Continuo. Éstas se desarrollan para materiales idealizados; por ejemplo, para aquellos en que la deformación solo depende de las solicitaciones aplicadas y dicha deformación desaparece al eliminar las solicitaciones (sólido elástico). Cuando las deformaciones son además infinitesimales se puede realizar la idealización de que las deformaciones son linealmente proporcionales con las solicitaciones (sólido elástico lineal), material en el cual además las propiedades no se modifican con la posición y son iguales en todas direcciones (sólido elástico lineal homogéneo e isotrópico). Ésta última descripción, si bien representa un alto grado de idealización, es muy útil para describir el comportamiento de los metales recocidos o provenientes de fundición. En el caso de muchos líquidos, como por ejemplo el agua, se tiene que los esfuerzos de corte son linealmente proporcionales con la velocidad de deformación, de lo que se desprende el concepto de viscosidad y se definen los fluidos denominados como newtonianos. Con todo lo expuesto se pueden mencionar algunos de los comportamientos idealizados como:

- a. Sólido elástico homogéneo, lineal e isotrópico
- b. Sólidos elásticos lineales y anisotrópicos
- c. Sólido elástico no lineal
- d. Fluidos no viscosos
- e. Fluidos linealmente viscosos compresibles e incompresibles
- f. Fluidos no newtonianos
- g. Sólidos elastoviscosos
- h. Materiales poroelásticos, etc.

1.2 TENSORES

Una herramienta fundamental para la Mecánica del Medio Continuo (MMC) son los tensores, ya que si bien desde el punto de vista del álgebra representan transformaciones lineales entre espacios vectoriales, en MMC se emplean también para representar cantidades físicas asociadas a los medios continuos (MC). Por tal motivo, en la primera etapa del texto se describirán éstos, así como las reglas fundamentales del álgebra y del cálculo que cumplen dichos tensores.

Notación índice. Las leyes de la mecánica del continuo deben ser formuladas de manera independiente a las coordenadas, de tal forma que el empleo de tensores permita el desarrollo de éstas. En un sistema escalar existe correspondencia de una cantidad (número) a un punto, esta situación se extiende a un espacio n dimensional. En el caso de emplear un sistema coordenado cartesiano, el uso de la notación índice permite una presentación simple y funcional, a la vez de elegante, de los conceptos.

Concepto de notación índice. La notación índice es una simplificación del concepto de sumatoria, de tal forma que si:

$$\alpha = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + + a_n x_n$$

expresión que se puede sintetizar como

$$\alpha = \sum a_i x_i$$

obviando el concepto de sumatoria, la igualdad se presenta sencillamente como

$$\alpha = a_i x_i$$

de lo expuesto resulta evidente que

$$\alpha = a_i x_i$$

$$\alpha = a_k x_k$$

$$\alpha = a_m x_m$$

Considerando que la mecánica del continuo permite describir el comportamiento de los cuerpos, donde éstos se relacionan con el espacio tridimensional, es entonces que la sumatoria se realiza de 1 a 3 y que la notación índice permite simplificar la presentación de los términos, por tanto:

$$\alpha = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_nx_n$$

En ocasiones se tiene, por ejemplo:

$$\beta = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_ix_j$$

$$\beta = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3$$

o

$$T_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}b_j$$

$$T_{ij} = a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3$$

Es por tanto que la presencia de dos índices representa una doble sumatoria, lo cual se puede extender al número de índices que se requiera.

En general *no se emplean como índices* las últimas letras del alfabeto. Enseguida se muestran algunos ejemplos de desarrollo de la notación índice:

$$x_i = C_{ij}r_j$$

$$x_1 = C_{11}r_1 + C_{12}r_2 + C_{13}r_3$$

$$x_2 = C_{21}r_1 + C_{22}r_2 + C_{23}r_3$$

$$x_3 = C_{31}r_1 + C_{32}r_2 + C_{33}r_3$$

Por otra parte, si:

$$A_{ij} = B_{ip}C_{jq}D_{pq} \quad \text{considerando que} \quad i, j = 1, 2$$

Se tiene entonces:

$$A_{11} = B_{11}C_{11}D_{11} + B_{12}C_{11}D_{21} + B_{12}C_{12}D_{22} + B_{11}C_{12}D_{12}$$

$$A_{12} = B_{11}C_{21}D_{11} + B_{11}C_{22}D_{12} + B_{12}C_{21}D_{21} + B_{12}C_{22}D_{22}$$

$$A_{21} = B_{21}C_{11}D_{11} + B_{21}C_{12}D_{12} + B_{22}C_{11}D_{21} + B_{22}C_{12}D_{22}$$

$$A_{22} = B_{21}C_{21}D_{11} + B_{21}C_{22}D_{12} + B_{22}C_{21}D_{21} + B_{22}C_{22}D_{22}$$

$$T_{ij} = A_{im}A_{jm} = C_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$T_{11} = A_{1m}A_{1m} = A_{11}A_{11} + A_{12}A_{12} + A_{13}A_{13}$$

$$T_{12} = A_{1m}A_{2m} = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23}$$

$$T_{13} = A_{1m}A_{3m} = A_{11}A_{31} + A_{12}A_{32} + A_{13}A_{33}$$

$$T_{21} = A_{2m}A_{1m} = A_{21}A_{11} + A_{22}A_{12} + A_{23}A_{13}$$

$$\vdots$$

$$T_{33} = A_{3m}A_{3m} = A_{31}A_{31} + A_{32}A_{32} + A_{33}A_{33}$$

de lo anterior se comprueba que $T_{ij} = T_{ji}$

Definición de tensor. De acuerdo con el álgebra, un tensor se define como una transformación lineal entre espacios vectoriales, de tal forma que si T es un tensor que transforma al vector a en c y al vector b en d , entonces se deberá cumplir que

$$Ta = c$$

$$Tb = d$$

De tal forma que

$$T(a + b) = Ta + Tb = c + d$$

$$T(\alpha a) = \alpha Ta = \alpha c$$

$$T(\alpha a + \beta b) = \alpha Ta + \beta Tb = \alpha c + \beta d$$

Si

$$Ta = c$$

$$Sa = c$$

$$\Rightarrow T = S$$

Por otra parte, si

$$Ta = n$$

$$\delta = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} = I_{1\varepsilon}$$

$$Tb = n$$

$$T(a + b) = n$$

entonces

$$T(a + b) \neq Ta + Tb$$

Por lo tanto, T no representa una transformación lineal y entonces no se trata de un tensor.

En particular, en la mecánica del medio continuo los tensores se emplean para describir las cantidades físicas asociadas a éstos. Resulta evidente que los efectos de cualquier sollicitación aplicada a un MC serán independientes de la base de referencia, por consecuencia, la descripción tensorial de una propiedad física asociada a un continuo existe de manera independiente a cualquier sistema coordenado. De lo antes expuesto, se concluye que los componentes del tensor pueden cambiar en función del origen definido o del sistema coordenado de referencia; sin embargo, los efectos serán únicos para una determinada sollicitación. Los componentes del tensor en un sistema de referencia definen a

éste bajo cualquier referencia. Dado que una sollicitación en particular representa una realidad física única es entonces que las leyes de la mecánica del continuo son expresadas en forma de ecuaciones tensoriales. La invariancia de estas ecuaciones es la razón del empleo de tensores en la MMC.

Las cantidades físicas asociadas a un medio continuo pueden estar definidas sin tener relación con la base coordenada de referencia y, por consecuencia, describirse exclusivamente a través de su magnitud (cantidades escalares tales como la densidad o la temperatura), estar referidas a cada uno de los vectores unitarios que describen la base (cantidades descritas vectorialmente, tales como la velocidad o la fuerza), o requerir para su precisa descripción de un par de o más ejes (descripción matricial, tales como los esfuerzos o deformaciones). El número de ejes requeridos para describir la cantidad tensorial, determina su rango (véase la tabla 1.1), siendo éste independiente de la base utilizada.

Dada la relación existente entre las cantidades tensoriales y la base, es común el empleo de notación índice para describir a los tensores, esto aplica en particular cuando se emplea un sistema coordenado cartesiano (base rectangular).

Existen varios tipos de notación índice, por ejemplo:

$$a_i, b_j, T_{ij}, \varepsilon_{ijk}, R^{pk}$$

Cuando un índice se repite se define como falso y no aporta al rango del tensor, mientras que cuando los índices no se repiten se definen como libres, describiéndose a través de éstos el rango del tensor, por ejemplo:

Tensor de 1.^{er} orden

$$a_i, b_i, a_{ij}b_j, F_{ikk}, R_{qp}^p, \varepsilon_{ijk}u_ju_k$$

Tensor de 2.^o orden

$$D_{ij}, D_j^i, D^{ij}, A_{iijp}, B_{jk}^{ij}, \delta_{ij}u_ku_k$$

TABLA 1.1 Rango de los diferentes tipos de tensores

Rango (r)	Representación		Aplicación	Ejemplos	Número de características que definen al tensor (n = 3')
Cero	Letras minúsculas del alfabeto griego	$\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \rho$, etc.	Cantidades físicas que no están relacionadas con los ejes y que por lo tanto se representan como escalares	Masa, densidad, volumen específico, temperatura, etc.	1
Uno	Letras minúsculas del alfabeto latino	b, c, d b_i, c_i , d_j, h_k	Cantidades asociadas a los medios continuos, las cuales se definen con relación a un eje. Por lo tanto se representan como vectores.	Velocidad (v_i), posición (X_i, x_j), desplazamiento (u_i), fuerza (f_i), etc.	3
Dos	Letras mayúsculas del alfabeto latino	T, C, F, A $H^{(2)}$ T_{ij}, C_{kl} , F_{mn}, A_{rs}	Propiedades asociadas con dos ejes a la vez. Éstos se denominan simplemente como tensores de rango dos o díadas.	Esfuerzo (T) Deformación (e, E) Rapidez de deformación (D)	9
Tres	Letras mayúsculas del alfabeto latino	$T, C, A^{(3)}$ T_{ijk}, C_{klm} , F_{mnj}, A_{rsk}	Propiedades asociadas con tres ejes	Propiedades de los cristales piezoeléctricos	27
Cuatro	Letras mayúsculas del alfabeto latino	$T, C, F^{(4)}$ T_{ijkl}, C_{klmn} , F_{mnrs}, A_{rsij}	Propiedades asociadas a dos pares de ejes.	Tensor de constantes elásticas C_{ijkl}	81

1.3 OPERACIONES CON TENSORES

Para los tensores se definen operaciones de adición, sustracción y producto. En el caso de la adición y sustracción el rango de los tensores involucrados en la operación deberá ser el mismo y estas operaciones se realizan término a término. Al hacer referencia a las propiedades es conveniente recordar la factibilidad de representar a los tensores de primer orden como vectores (matrices renglón o columna), a las díadas (tensores de segundo orden) como matrices de 3×3 y a los tensores de cuarto rango como matrices de 9×9,

entonces las propiedades con respecto a las operaciones serán las mismas que las descritas para las matrices.

i. Conmutatividad

$$a + b = b + a$$

$$a - b = -b + a$$

ii. Asociatividad con respecto a la adición

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

iii. Asociatividad, distributividad y conmutatividad con respecto a la multiplicación por un escalar. Sean α y β escalares (tensores de rango cero) y A , B tensores de rango superior, entonces:

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A) = A\alpha\beta$$

$$\alpha\beta = \varphi \Rightarrow (\alpha\beta)A = \varphi A$$

Por otra parte:

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

iv. Asociatividad de la adición con respecto al producto entre tensores de dimensión superior a la cero. Al igual que con las matrices no existe conmutatividad en la operación producto. Sean T , S tensores de rango dos (díadas) y a un tensor de rango uno, entonces:

$$(T + S)a = Ta + Sa$$

$$(T + S)a \neq a(T + S)$$

La adición de tensores se realiza término a término, de tal forma que:

$$T + S = W$$

En notación índice:

$$T_{ij} + S_{ij} = W_{ij}$$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

donde, desde luego, el tensor W tiene el mismo rango de sus predecesores.

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} + S_{11} & T_{12} + S_{12} & T_{13} + S_{13} \\ T_{21} + S_{21} & T_{22} + S_{22} & T_{23} + S_{23} \\ T_{31} + S_{31} & T_{32} + S_{32} & T_{33} + S_{33} \end{pmatrix}$$

Producto de tensores

v. Asociatividad de la operación producto. Como ya antes fue mencionado no existe conmutatividad en esta operación.

$$(TS)a = T(Sa)$$

$$TS \neq ST$$

$$(T(SV))a = T((SV)a) = T(S(Va))$$

$$(TS)(Va) = T(S(Va))$$

$$T(SV) = (TS)V$$

vi. Operaciones con la transpuesta del tensor

$$aTb = bT^T a$$

En el caso de que el tensor sea simétrico

$$T = T^T$$

$$\Rightarrow aTb = bT^T a = bTa$$

$$e_i T_{ij} e_j = e_j T_{ji} e_i$$

$$a_i T_{ij} b_j = b_j T_{ji} a_i$$

$$\Rightarrow T_{ij} = T_{ji}$$

El tensor T (de 2.º rango) se describe como

$$T = T_{ij} e_i e_j$$

$$T = T_{11}e_1e_1 + T_{12}e_1e_2 + T_{13}e_1e_3 + \dots + T_{33}e_3e_3$$

expresándose en forma matricial

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11}\hat{e}_1\hat{e}_1 & T_{12}\hat{e}_1\hat{e}_2 & T_{13}\hat{e}_1\hat{e}_3 \\ T_{21}\hat{e}_2\hat{e}_1 & T_{22}\hat{e}_2\hat{e}_2 & T_{23}\hat{e}_2\hat{e}_3 \\ T_{31}\hat{e}_3\hat{e}_1 & T_{32}\hat{e}_3\hat{e}_2 & T_{33}\hat{e}_3\hat{e}_3 \end{pmatrix}$$

O simplemente

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Multiplicación de tensores

- **Producto vectorial (producto cruz)**

A través de esta operación se define un nuevo tensor del mismo rango de sus predecesores. Esta operación se le relaciona comúnmente a tensores de rango uno, de tal forma que se da lugar a un nuevo vector el cual es normal al plano definido por sus factores.

$$a \times b = c$$

donde

$$c \perp a, b$$

$$a \times b = -b \times a$$

$$a \times b = (|a||b|\sin \theta) \hat{e}_i$$

θ : ángulo entre las direcciones a, b

\hat{e}_i : vector unitario normal al plano definido por a, b

- **Producto interno o producto punto**

Si bien este producto, como se definirá más adelante, se describe para cualquier tensor de rango mayor a cero, es usual su aplicación en tensores de rango uno; para los cuales representa la proyección de uno en otro

$$\eta = a \cdot b = b \cdot a = |a||b|\cos \theta$$

donde θ representa al ángulo menor definido entre los vectores a, b .

En notación índice equivale a

$$\alpha = a_i b_i$$

$$\alpha = a_1 b_1 (\hat{e}_1 \hat{e}_1) + a_2 b_2 (\hat{e}_2 \hat{e}_2) + a_3 b_3 (\hat{e}_3 \hat{e}_3)$$

$$\therefore \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$a \cdot b = b \cdot a = \lambda$$

$$a_i b_i = b_i a_i = \lambda$$

Este producto también se puede definir para tensores mayores del rango 1, por ejemplo:

$$T : M = T_{ij} M_{ij} = \eta = \text{traza}[T_{ij} M_{kl}]$$

donde $T : M$ es una descripción en notación general,

$$\eta = T_{11} M_{11} + T_{22} M_{22} + T_{33} M_{33} + T_{12} M_{12} + T_{13} M_{13} + T_{21} M_{21} + T_{23} M_{23} + T_{31} M_{31} + T_{32} M_{32}$$

Producto punto vector-díada

$$a \cdot E = b$$

$$a_i E_{ij} = b_j$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = (a_1 E_{11} + a_2 E_{21} + a_3 E_{31}) \hat{e}_1 \\ + (a_1 E_{12} + a_2 E_{22} + a_3 E_{32}) \hat{e}_2 \\ + (a_1 E_{13} + a_2 E_{23} + a_3 E_{33}) \hat{e}_3$$

Producto punto díada-vector

$$E \cdot a = c$$

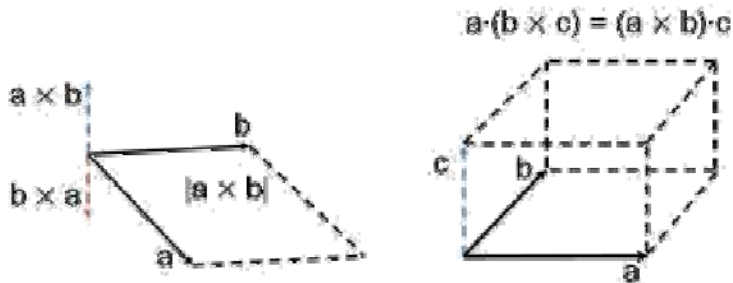
$$E_{ij} a_j = c_i$$

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (E_{11}a_1 + E_{12}a_2 + E_{13}a_3) \hat{e}_1 \\ (E_{21}a_1 + E_{22}a_2 + E_{23}a_3) \hat{e}_2 \\ (E_{31}a_1 + E_{32}a_2 + E_{33}a_3) \hat{e}_3 \end{bmatrix}$$

El *triple producto escalar* representa el producto punto de dos tensores de rango uno, donde uno de ellos es a su vez resultado de un producto vectorial. Donde el resultado representa el volumen (V) del prisma definido a través de los vectores a , b , c

$$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c = \lambda = V$$

Por razones de operación es evidente que primero se deberá realizar el producto cruz.



El *triple producto vectorial* representa el producto cruz de dos vectores; uno de los cuales es a su vez resultado de un previo producto vectorial, en este caso se cumplen las siguientes identidades:

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \quad \text{solamente si } b \times (c \times a) = 0$$

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

- **Producto interno entre díadas**

$$(A_{ij})^2 = A_{ij}A_{ij} = \lambda$$

$$A_{ij}(B_{ij})^T = A_{ij}B_{ji} \neq A_{ij}B_{ij}$$

$$A_{ij}(A_{ij})^{-1} = (A_{ij})^{-1}A_{ij} = I = \delta_{ij}$$

$$\text{Si } A_{ij}A_{ji} = I = \delta_{ij} \Rightarrow A_{ij} \quad \text{Tensor ortogonal}$$

$$\text{Si } \det[A_{ij}] = 1 \quad \text{Matriz ortogonal propia}$$

$$\text{Si } \det[A_{ij}] = -1 \quad \text{Matriz ortogonal impropia}$$

El *producto tensorial* equivale al producto de tensores con índices diferentes (libre), de tal forma que éstos se suman incrementando el rango del tensor resultante, por ejemplo:

$$a \otimes b = T$$

$$T_{ij}r_k = M_{ijk}$$

lo anterior se representa como:

$$T \otimes r = R$$

donde T es un tensor de segundo orden, r es de primer orden, y R es un tensor de tercer orden.

En la operación definida como *producto tensorial* \otimes , se incrementa el rango del tensor resultante, esto es equivalente a que todos los índices sean diferentes (libres) y, por lo tanto, se acumulen.

$$M_{ij}N_{kl} = R_{ijkl}$$

$$M \otimes N = R$$

En notación índice se expresa como:

$$a_i b_j = T_{ij}$$

$$v_i F_{jk} = T_{ijk}$$

$$D_{ij}T_{km} = M_{ijkm}$$

$$\varepsilon_{ijk}v_m = N_{ijkm}$$

Contracción o eliminación de índices falsos o repetidos. Como ya fue enunciado cuando los índices se repiten se anulan y por consecuencia se reduce el rango del tensor resultante:

$$T_{ii} = \lambda$$

$$E_{ij}a_j = b_i$$

$$a_i b_i = \alpha$$

$$E_{ii}a_j = b_j$$

$$E_{ij}F_{im} = G_{jm}$$

$$E_{ij}F_{kk} = M_{ij}$$

$$E_{ji}F_{ki} = H_{jk}$$

$$E_{ii}F_{km} = N_{km}$$

$$E_{ij}F_{kj} = B_{ik}$$

$$E_{ij}a_i = c_j$$

Es más adecuado escribir

$$a_i E_{ij} = c_j$$

$$E_{ij}F_{mj} = Q_{im}$$

- **Otras combinaciones de operaciones producto definidas para tensores**

La combinación de productos punto y productos cruz (doble producto interno y producto cruz) se puede expresar como:

$$a \otimes b : c \otimes d = R : M = (a \cdot c)(b \cdot d) = \beta$$

$$ab_{\bullet}^{\times}cd = (a \times c)(b \bullet d) = f_i$$

$$ab_{\times}^{\bullet}cd = (a \bullet c)(b \times d) = v_i \neq ab_{\bullet}^{\times}cd = (a \times c)(b \bullet d) = f_i$$

$$ab_{\times}^{\times}cd = (a \times c) \otimes (b \times d) = T_{ij}$$

1.4 OPERADORES TENSORIALES

Delta de Kronecker

En el caso de tensores de rango dos (díadas) se define un operador identidad con relación a la operación producto, a éste se le denomina como Delta de Kronecker (δ_{ij}), si la notación es general, simplemente se referirá como operador identidad (I).

La delta de Kronecker (δ_{ij}) se define entonces como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{kl} = \delta_{mn} = \delta_{rs} = I$$

Por lo tanto,

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

$$\delta_{1m}a_m = \delta_{11}a_1 + \delta_{12}a_2 + \delta_{13}a_3 = a_1$$

$$\delta_{2m}a_m = \delta_{21}a_1 + \delta_{22}a_2 + \delta_{23}a_3 = a_2$$

$$\delta_{3m}a_m = \delta_{31}a_1 + \delta_{32}a_2 + \delta_{33}a_3 = a_3$$

$$\therefore \quad \delta_{ij}a_j = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3 = a_i$$

$$\delta_{1m}T_{mj} = \delta_{11}T_{1j} + \delta_{12}T_{2j} + \delta_{13}T_{3j} = \delta_{11}T_{1j} = T_{1j}$$

$$\delta_{2m}T_{mj} = \delta_{21}T_{1j} + \delta_{22}T_{2j} + \delta_{23}T_{3j} = \delta_{22}T_{2j} = T_{2j}$$

$$\delta_{3m}T_{mj} = \delta_{31}T_{1j} + \delta_{32}T_{2j} + \delta_{33}T_{3j} = \delta_{33}T_{3j} = T_{3j}$$

$$\delta_{im}T_{mj} = T_{ij}$$

$$\delta_{im}\delta_{mj} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{im}\delta_{mn}\delta_{nj} = \delta_{ij}$$

Si e_1, e_2, e_3 son los vectores directrices $\Rightarrow e_i e_j = \delta_{ij}$

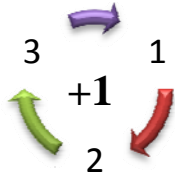
Permutador

Este término también conocido como alternador de Levy-Civita (definido así en honor del matemático italiano Levy-Civita (1873-1941)), es un operador empleado en notación tensorial como símbolo de permutación o alternador (ε_{ijk} o C_{ijk}). Facilita la presentación en notación

índice, solamente puede tomar valores $\varepsilon_{ijk} = 0, \pm 1$. El valor de $+1$ corresponde a una permutación natural 1,2,3;2,3,1;3,1,2, mientras que el valor de -1 corresponde al caso de que la permutación sea en sentido inverso 3,2,1;1,3,2;2,1,3. Por su parte, el valor cero corresponde al caso en que se ha perdido el orden, y los índices se repiten.

De lo expuesto se concluye

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}, \text{ de acuerdo con cualquier } ijk$$



Cualquier otro orden es cero.

$$\therefore \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik}$$

Considerando los vectores unitarios

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$

$$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$$

$$\varepsilon_{112} = \varepsilon_{333} = \varepsilon_{113} = 0$$

$$\varepsilon_{iii} = \varepsilon_{kki} = \varepsilon_{kjk} = 0$$

El producto vectorial (\times) también se emplea para el caso de tensores, de tal forma que:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k$$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2$$

empleando el permutador, la operación se expresa como:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k = \varepsilon_{jki} \hat{e}_k = \varepsilon_{kij} \hat{e}_k$$

El símbolo de permutación (ε_{ijk}) , alternador o permutador, es útil para expresar el producto vectorial, tal como $a \times b$ y el triple producto escalar, de tal forma que:

$$a \times b = a_i \hat{e}_i \times b_j \hat{e}_j = a_i b_j (\varepsilon_{ijk} \hat{e}_k)$$

$$\hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) = \varepsilon_{ijk}$$

dado que

$$a \times a = 0$$

entonces,

$$\varepsilon_{ijk} a_j a_k = 0$$

Por otra parte, sean los vectores a, b, c

$$a \times (b \times c) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kpq} a_j b_p c_q = a_j c_j b_i - a_j b_j c_i$$

1.5 FACTORIZACIÓN

En la notación índice se deberá tener cuidado en la factorización, ya que es muy fácil caer en incongruencias; por ejemplo, sea T una díada, n un tensor de primer orden, y λ un escalar, entonces, en notación matricial se tiene que si:

$$Tn = \lambda n$$

al igualar a cero, queda

$$Tn - \lambda n = 0$$

Factorizando se expresa como

$$(T - \lambda I)n = 0$$

lo que, en notación índice se expresa como:

$$T_{ij} n_j = \lambda n_i$$

igualando a cero, se tiene

$$T_{ij} n_j - \lambda n_i = 0$$

Lo que evidentemente no se puede factorizar en la forma $(T_{ij} - \lambda)\delta_{ij}n_j = 0$, ya que se estaría restando a una díada un escalar; por tal motivo, para la factorización es necesario desarrollar según:

$$T_{ij} n_j = \lambda n_i = \lambda \delta_{ij} n_j$$

por lo que al igualar a cero, se tiene

$$T_{ij} n_j - \lambda \delta_{ij} n_j = 0$$

y que al factorizar, queda

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0$$

descripción que corresponde a lo presentado en notación matricial.

1.6 TENSORES CON CARACTERÍSTICAS PARTICULARES

A partir del concepto general de tensor se pueden definir algunos que presentan determinadas peculiaridades, estos no necesariamente existirán para cualquier rango, y aun cuando muchos de estos tipos particulares se relacionan con las díadas, no necesariamente son exclusivos a éstas. Por ejemplo, se define:

- *Tensor simétrico.* Son aquellos en los que $T = T^T$ o en notación índice $T_{ij} = T_{ji}$.
- *Tensor antisimétrico.* Es aquel en el que $T = -T^T$, o $T_{ij} = -T_{ji}$, estos tensores se caracterizan en que su traza es igual a cero, es decir, $T_{ii} = 0$.

Con base en lo anterior, se tiene que todo tensor de rango dos (T) se puede descomponer en una componente simétrica (T^S) y una parte antisimétrica (T^A), de tal forma que:

$$T = T^S + T^A$$

En notación índice puede escribirse como

$$T_{ij}^S = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \quad \text{y} \quad T_{ij}^A = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$$

es decir,

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$$

Y en notación general,

$$T = \frac{1}{2}(T + T^T) + \frac{1}{2}(T - T^T)$$

Tensor ortogonal (Q o Q_{ij})

Se trata de aquella transformación lineal en donde los vectores o cantidades tensoriales a los cuales se les aplica la transformación Q conservan sus características (ángulos y longitudes en el caso de un vector).

Estos se caracterizan, además, en que su inversa está dada por la transpuesta del tensor:

$$Q^{-1} = Q^T$$

$$QQ^T = I$$

o, en notación índice

$$Q_{im}Q_{jm} = Q_{mi}Q_{mj} = \delta_{ij}$$

Estos tensores permiten el cambio de base de tal forma que para vectores se puede expresar como

$$v' = Qv$$

o, para díadas

$$B' = QBQ^T$$

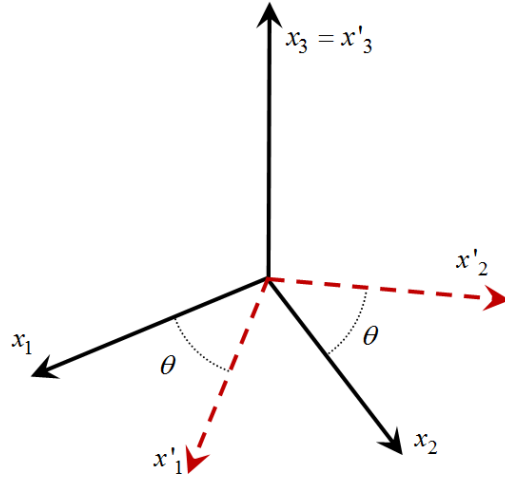
donde v' y B' son un vector y una díada definidos en una nueva base (x'), mientras que v y B están representados en la base original (x).

Suponga que Q_{ij} es un tensor que permite el cambio de la base x a la x' , entonces

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

Donde $Q_{ij} = \cos(\hat{e}'_i, \hat{e}_j)$, donde \hat{e}'_i representa la dirección de los vectores unitarios en la base x' , mientras que \hat{e}_j representa la dirección de los vectores unitarios en la base original x .

Por ejemplo, para realizar un cambio de base de tal forma que el eje $x'_3 = x_3$, esto representa que el nuevo sistema está dado al rotar el plano x_1x_2 un ángulo θ alrededor del eje x_3 .



Entonces, la matriz de transformación está dada por:

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) & \cos \theta & \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que:

$$\hat{e}'_1 = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2$$

$$\hat{e}'_2 = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2$$

$$\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$$

Tensor isotrópico

Se trata de aquellos tensores cuyos componentes permanecen sin cambio con cualquier modificación en el sistema coordenado, esto es, al modificar la base todos los componentes del tensor permanecen invariables.

$$a_i = a'_i$$

$$T_{ij} = T'_{ij}$$

$$C_{lkm} = C'_{lkm}$$

Sean A, B, C, D, E , tensores isotrópicos, si $\alpha B = H$, donde H es un nuevo tensor isotrópico (esto es, el producto de un escalar por un tensor isotrópico da lugar a otro tensor isotrópico). Por otra parte, si $A + B + C = F$, la suma de tensores isotrópicos da lugar a un nuevo tensor isotrópico (F). Considerando las dos condiciones antes expuestas, se cumple también que

$$\alpha A + \beta B + \chi C = D$$

donde D es también un tensor isotrópico.

Para el caso de $A \otimes B = E$, se tiene que E es también isotrópico (el producto tensorial de tensores isotrópicos da como resultado un nuevo tensor isotrópico).

Por otra parte, es importante mencionar que el único tensor isotrópico de rango dos es la delta de Kronecker δ_{ij} o tensor identidad.

Tensor isotrópico de orden 4

De acuerdo con lo antes planteado, un tensor isotrópico de rango 4 se puede describir a través de la sumatoria de tensores isotrópicos del mismo rango, los cuales son multiplicados por un escalar. A su vez, cada uno de éstos se define por medio del producto de tensores isotrópicos de orden dos (sólo es isotrópica la delta de Kronecker), lo anterior se puede expresar como:

$$A_{ij}A_{kl} = A_{ijkl}$$

$$A_{ij} = \delta_{ij} \quad ; \quad A_{kl} = \delta_{kl}$$

$$C_{ijkl} = \alpha A_{ijkl} + \beta B_{ijkl} + \gamma G_{ijkl}$$

en donde $A_{ijkl}, B_{ijkl}, C_{ijkl}, D_{ijkl}$ son tensores isotrópicos de 4.º orden.

Para aplicar los conceptos anteriores, suponga que C_{ijkl} es un tensor isotrópico, el cual permite la transformación lineal entre los espacios T_{ij} y E_{kl} , de tal forma que $T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$, donde

$$T_{ij} = T_{ji} \quad , \quad E_{kl} = E_{lk} \quad , \quad C_{ijkl} = C_{klij}$$

por lo que, además de isotrópicos, los tensores T_{ij}, E_{kl}, C_{ijkl} son simétricos; entonces C_{ijkl} se puede descomponer como:

$$C_{ijkl} = A_{ijkl} + B_{ijkl} + G_{ijkl}$$

$$A_{ijkl} = \alpha A_{ij} A_{kl} \quad , \quad A_{ij} = \delta_{ij} \quad , \quad A_{kl} = \delta_{kl} \quad \therefore \quad A_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl}$$

$$B_{ijkl} = \beta B_{ij} B_{kl} \quad , \quad B_{ij} = \delta_{ik} \quad , \quad B_{kl} = \delta_{jl} \quad \therefore \quad B_{ijkl} = \beta \delta_{ik} \delta_{jl}$$

$$G_{ijkl} = \eta G_{ij} G_{kl} \quad , \quad G_{ij} = \delta_{il} \quad , \quad G_{kl} = \delta_{jk} \quad \therefore \quad G_{ijkl} = \eta \delta_{il} \delta_{jk}$$

Sustituyendo:

$$T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$$

$$T_{ij} = (\alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \eta \delta_{il} \delta_{jk}) E_{kl} = (\alpha \delta_{ij} \delta_{kl} E_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} E_{kl} + \eta \delta_{il} \delta_{jk} E_{kl})$$

$$= \alpha \delta_{ij} E_{kk} + \beta \delta_{ik} E_{jk} + \eta \delta_{il} E_{jl}$$

$$T_{ij} = \alpha \delta_{ij} E_{kk} + \beta E_{ij} + \eta E_{ij} = \alpha \delta_{ij} E_{kk} + (\beta + \eta) E_{ij} = \alpha E_{kk} \delta_{ij} + \lambda E_{ij}$$

Componentes esférica y desviadora de los tensores simétricos de rango dos

Todo tensor simétrico de segundo rango T_{lm} , tal que $T_{lm} = T_{ml}$, se puede descomponer en dos tensores de la forma $T_{lm} = T_{lm}^{esf} + T_{lm}^d$, donde T_{lm}^{esf} es el denominado componente esférico del tensor T_{lm} y representa un tensor cuyo valor es igual en todas direcciones y de ahí su denominación (se trata entonces de un tensor isotrópico). Por otra parte, el componente desviador T_{lm}^d representa un tensor cuyo componente esférico es igual a cero.

El componente esférico se define como:

$$T_{ij}^{esf} = \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} = \frac{1}{3} (T_{11} + T_{22} + T_{33}) \delta_{ij}$$

o, en notación general

$$T^{esf} = \left(\frac{1}{3} \text{traza}[T] \right) I$$

Asimismo, el tensor desviador asociado a T se define como:

$$T^d = T_{ij}^{(d)} = T_{ij} - \frac{T_{kk}}{3} \delta_{ij}$$

o, en notación general

$$T^d = T - \frac{\text{traza}[T]}{3} I$$

Para el caso del tensor desviador su componente esférica es igual a cero

$$\text{traza}[T^{(d)}] = 0$$

Si se define:

$$\alpha = \frac{1}{3} \text{traza} T = \frac{T_{ii}}{3}$$

$$\Rightarrow T_{ij} = \alpha \delta_{ij} + T_{ij}^{(d)}$$

Dado que

$$T_{ij}^{des} = T_{ij} - T_{kk} \delta_{ij}$$

$$T_{ij}^{des} = \begin{pmatrix} \frac{2T_{11} - (T_{22} + T_{33})}{3} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & \frac{2T_{22} - (T_{11} + T_{33})}{3} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & \frac{2T_{33} - (T_{11} + T_{22})}{3} \end{pmatrix}$$

1.7 EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

Los términos eigenvalores y eigenvectores, denominados también como valores y vectores característicos asociados a un tensor, se definen a partir de considerar una transformación lineal (T) tal que al aplicarla a un vector (a), éste se transforme en colineal a sí mismo, entonces:

$$Ta = \lambda a$$

donde a se define como eigenvector y λ como eigenvalor, ambos asociados a la transformación lineal T .

Todo vector paralelo a a es también un eigenvector con eigenvalor λ , de tal modo que

$$T(\alpha a) = \alpha Ta = \alpha \lambda a = \lambda (\alpha a)$$

Generalmente, los eigenvectores son unitarios, sin embargo, se definen de longitud arbitraria. Si n es un eigenvector unitario, entonces

$$Tn = \lambda n$$

En notación matricial $Tn = \lambda In$ y en notación índice $T_{ij}n_j = \lambda \delta_{ij}n_j$, lo cual, al igualar a cero y factorizando, queda:

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_j = 0$$

Ecuación que tiene la solución trivial $n_j = 0$ y, por otra parte, al ser un sistema compatible indeterminado, la solución generada a partir de

$$\left| T_{ij} - \lambda \delta_{ij} \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

da lugar a una ecuación cúbica en λ , de la forma

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

donde los términos I_i son definidos como los invariantes asociados al sistema. Estos deben su nombre a que se trata de magnitudes que no se verán alteradas al modificar la base y representan propiedades propias del estado físico cuantificado por el tensor.

Al desarrollar el sistema antes expuesto se puede comprobar que

$$I_1 = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{Traza del tensor}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ji}) = \Sigma \text{ menores principales de } T_{ij}$$

$$I_2 = T_{11} T_{22} + T_{22} T_{33} + T_{33} T_{11} - (T_{12} T_{21} + T_{23} T_{32} + T_{31} T_{13})$$

En el caso de que el tensor sea simétrico

$$I_2 = T_{11} T_{22} + T_{22} T_{33} + T_{33} T_{11} - (T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{31}^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{6} (T_{ii} T_{jj} T_{kk} + 2 T_{ij} T_{jk} T_{ki} - 3 T_{ii} T_{jk} T_{kj})$$

$$I_3 = \left| T_{ij} \right| = T_{11} T_{22} T_{33} + T_{12} T_{23} T_{31} + T_{13} T_{32} T_{21} - (T_{11} T_{23} T_{32} + T_{22} T_{13} T_{31} + T_{33} T_{12} T_{21})$$

Igualmente en el caso de que el tensor sea simétrico, el tercer invariante se puede expresar como:

$$I_3 = T_{11} T_{22} T_{33} + 2 T_{12} T_{23} T_{31} - (T_{11} T_{23}^2 + T_{22} T_{31}^2 + T_{33} T_{12}^2)$$

Valores y direcciones principales

Los valores y direcciones principales (eigenvalores y eigenvectores) asociados a un tensor tienen las siguientes propiedades:

- i) Los eigenvalores de un tensor real también son reales.
- ii) Para un tensor simétrico real siempre existen al menos tres eigenvectores.
- iii) Los eigenvectores asociados a un tensor simétrico real forman base y son mutuamente ortogonales.
- iv) Existirá siempre cuando menos un sistema coordenado para el cual el tensor A se puede representar como tensor diagonal.
- v) En el caso de que dos de los eigenvalores sean iguales, la dirección de los eigenvectores respectivos estará indeterminada, quedando contenidos en el plano normal al tercer eigenvector. Cualesquiera dos vectores mutuamente perpendiculares contenidos en dicho plano serán vectores característicos.
- vi) En el caso de que los tres valores característicos sean iguales, lo cual representa que cualesquiera tres vectores mutuamente perpendiculares serán eigenvectores asociados al tensor, y éste será isotrópico.

Sean n_1 y n_2 los eigenvectores asociados a los eigenvalores λ_1 y λ_2 , respectivamente, entonces

$$Tn_1 = \lambda_1 n_1$$

$$Tn_2 = \lambda_2 n_2$$

$$\Rightarrow n_2 \cdot (Tn_1 = \lambda_1 n_1) \quad ; \quad n_2 Tn_1 = \lambda_1 n_1 n_2$$

$$\Rightarrow n_1 \cdot (Tn_2 = \lambda_2 n_2) \quad ; \quad n_1 Tn_2 = \lambda_2 n_2 n_1$$

$$\Rightarrow n_2 Tn_1 - n_1 Tn_2 = \lambda_1 n_1 n_2 - \lambda_2 n_2 n_1$$

$$n_1 n_2 = n_2 n_1$$

$$n_2 Tn_1 = n_1 T^T n_2$$

Si el tensor es simétrico $T = T^T$, implica que

$$n_2 T n_1 = n_1 T n_2$$

$$\therefore \quad \lambda_1 n_1 n_2 = \lambda_2 n_2 n_1$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) n_1 n_2 = 0$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\Rightarrow \quad n_1 n_2 = 0 \quad \therefore \quad \text{son perpendiculares}$$

Generalizando lo antes obtenido, se tiene que $n_1 \perp n_2 \perp n_3$, por lo que los vectores unitarios obtenidos forman una base, cuyos ejes son mutuamente perpendiculares.

EJEMPLO 1. Para el tensor T_{ij} , determine los eigenvalores y eigenvectores asociados.

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

A partir de los invariantes se determina el polinomio característico. Las soluciones de este polinomio de tercer grado representan los eigenvalores del sistema.

$$I_1 = 26, \quad I_2 = 212, \quad I_3 = 552$$

$$\lambda^3 - 26\lambda^2 + 212\lambda - 552 = 0$$

$$\lambda_3 = 6, \quad \lambda_2 = 7.1715, \quad \lambda_1 = 12.8284$$

$$T_{ijP} = \begin{pmatrix} 12.82 & 0 & 0 \\ 0 & 7.1715 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Para determinar los eigenvectores se deberá cumplir que:

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0$$

Entonces, para el eigenvector asociado al eigenvalor $\lambda = 12.82$

$$\begin{pmatrix} (12-12.82) & 2 & 0 \\ 2 & (8-12.82) & 0 \\ 0 & 0 & (6-12.82) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-0.8284a_1^1 + 2a_2^1 = 0$$

$$2a_1^1 - 4.8284a_2^1 = 0$$

$$-6.8282 a_3^1 = 0$$

$$a_3^1 = 0$$

$$(a_1^1)^2 + (a_2^1)^2 + (a_3^1)^2 = 1$$

$$\therefore (a_1^1)^2 + (a_2^1)^2 = 1$$

$$a_1^1 = 2.41a_2^1$$

$$(2.41a_2^1)^2 + (a_2^1)^2 = 1$$

$$6.82(a_2^1)^2 = 1$$

$$a_2^1 = 0.3827$$

$$\theta_{12} = 67.5^\circ$$

$$a_1^1 = 0.92$$

$$\theta_{11} = 22.72^\circ$$

$$a_3^1 = 0$$

$$\theta_{13} = 90^\circ$$

Para el segundo eigenvalor $\lambda_2 = 7.17$, el sistema de ecuaciones se expresa como:

$$\begin{pmatrix} (12-7.17) & 2 & 0 \\ 2 & (8-7.17) & 0 \\ 0 & 0 & (6-7.17) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4.83a_1^2 + 2a_2^2 = 0$$

$$2a_1^2 + 0.8285a_2^2 = 0$$

$$-1.1715a_3^2 = 0$$

$$\Rightarrow a_3^2 = 0$$

$$a_1^2 = -0.4142a_2^2$$

$$(0.4142a_2^2)^2 + (a_2^2)^2 = 1$$

$$a_2^2 = 0.9238$$

$$\theta_{22} = 22.5^\circ$$

$$a_1^2 = -0.3826$$

$$\theta_{21} = 112.5^\circ$$

Para el tercer eigenvalor $\lambda = 6$, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} (12-6) & 2 & 0 \\ 2 & (8-6) & 0 \\ 0 & 0 & (6-6) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1^3 \\ a_2^3 \\ a_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$6a_1^3 + 2a_2^3 = 0$$

$$2a_1^3 + 2a_2^3 = 0$$

$$0a_3^3 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 4a_1^3 = 0 \\ -4a_2^3 = 0 \end{array} \right\} \therefore a_1^3 = a_2^3 = 0$$

$$\theta_{31} = \theta_{32} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{como } (a_1^3)^2 + (a_2^3)^2 + (a_3^3)^2 = 1$$

$$\Rightarrow a_3^3 = 1 \therefore \theta_{33} = 0$$

Ensamblando los tres eigenvectores para definir así la matriz de rotación (cambio de base), se tiene:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.38 & 0 \\ -0.38 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad A_{ji} = \begin{pmatrix} 0.92 & -0.38 & 0 \\ 0.38 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como es descrito en líneas posteriores, este tensor de cambio de base es ortogonal, por lo cual se cumple que $AA^T = I$, es decir,

$$A_{ij}A_{ji} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Asimismo, se deberá cumplir la ley de transformación para tensores

$$T' = QTQ^T$$

Por lo que al aplicar esta transformación al tensor original se llega a la representación en valores principales, se concluye entonces que la matriz de rotación describe la relación existente entre los vectores unitarios correspondientes a la base original \hat{e}_j con los de la base en valores principales \hat{e}'_i :

$$Q = \cos(\hat{e}'_i \hat{e}_j)$$

Efectuando las operaciones se tiene

$$\begin{aligned} T' &= \begin{pmatrix} 0.92 & 0.38 & 0 \\ -0.38 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.92 & -0.38 & 0 \\ 0.38 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11.8 & 4.9 & 0 \\ -2.75 & 6.59 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.92 & -0.38 & 0 \\ 0.38 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T_{ijP} &= \begin{pmatrix} 12.7 & 0 & 0 \\ 0 & 7.1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Con lo cual se comprueba lo expuesto.

1.8 LEYES DE TRANSFORMACIÓN DE TENSORES

Como ha sido mencionado con antelación, es factible describir las propiedades asociadas a un medio continuo a través de un infinito número de bases, dando lugar a igual número de representaciones que son equivalentes en todos los casos. Esto se puede conceptualizar a través de la existencia de los invariantes asociados al tensor, los cuales no se modifican al cambiar el sistema o la base de referencia. Es por tanto necesario considerar las reglas que permiten la rotación de la base de referencia. Para esto se define la matriz de transformación o rotación, la cual, por definición es ortogonal y está dada por los cosenos directores de cada una de las direcciones de la base nueva con respecto a la base original.

Sea A un tensor de transformación tal que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El vector unitario a lo largo del eje X'_1 está dado por

$$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3$$

La generalización de lo antes expuesto es

$$e'_i = A_{ij}e_j \quad (1.1)$$

Un vector arbitrario n definido en la base original se expresa como

$$n = n_j e_j \quad (1.2)$$

y en el sistema nuevo

$$n' = n'_i e'_i \quad (1.3)$$

Considerando la matriz de transformación A_{ij}

$$n' = A_{ij}n_j \quad (1.4)$$

En particular, los tensores de rotación conservan ángulos y magnitudes, razón por la que se definen como ortonormales.

Por tanto, para un tensor que define un cambio a una base ortonormal, se cumple que:

$$Q_{im}Q_{jm} = \delta_{ij}$$

Por definición $A^{-1} = A^T$ $\therefore AA^T = I$ y entonces A representa un tensor ortogonal que se define como

$$A_{ij} = \cos(\hat{e}'_i \hat{e}_j)$$

De tal forma que un sistema de ejes $x'_1 x'_2 x'_3$ se obtiene a partir de la rotación de un sistema $x_1 x_2 x_3$.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}
x'_2	θ_{21}	θ_{22}	θ_{23}
x'_3	θ_{31}	θ_{32}	θ_{33}

Para pasar del eje nuevo al original se intercambian renglones por columnas, esto es la transformación inversa (A^{-1}) que se define como $A^{-1} = A^T$, donde $A^{-1} = A^T = \cos(\hat{e}_i \hat{e}'_j)$

	x'_1	x'_2	x'_3
x_1	a_{11}	a_{21}	a_{31}
x_2	a_{12}	a_{22}	a_{32}
x_3	a_{13}	a_{23}	a_{33}

Los ángulos entre los sistemas están dados por $\theta_{ij} = \theta(\hat{e}'_i \hat{e}_j)$, mientras que $\theta_{ji} = \theta(\hat{e}_j \hat{e}'_i)$

$$A_{ji} = \cos(\hat{e}_j \hat{e}'_i)$$

$$A_{ji} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

En general, la matriz de cosenos directores se puede escribir como

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de transformación entre } (\hat{e}_i) \text{ y } (\hat{e}'_j)$$

Ley de transformación para componentes cartesianos de vectores

Sea cualquier vector a , entonces los componentes de a con respecto a (\hat{e}_i) son

$$a'_i = Q_{ij} \cdot a_j$$

Dado $v = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3$, defina v'

$$v'_1 = q_{1j} v_j = q_{11} v_1 + q_{12} v_2 + q_{13} v_3$$

$$v'_2 = q_{2j} v_j = q_{21} v_1 + q_{22} v_2 + q_{23} v_3$$

$$v'_3 = q_{3j} v_j = q_{31} v_1 + q_{32} v_2 + q_{33} v_3$$

Ley de transformación entre tensores

En notación matricial se expresa como

$$T' = QTQ^T$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2. Una base, a la cual se define como original (x_i) con vectores unitarios \hat{e}_i , se va a transformar a una nueva referencia la cual se denomina como (x'_i) con vectores unitarios \hat{e}'_i . Suponga que los ángulos entre ambas bases están dados por

	x_1	x_2	x_3
x'_1	135°	60°	120°
x'_2	90°	45°	45°
x'_3	45°	60°	120°

Determine la matriz de cambio de base.

SOLUCIÓN

La matriz de cambio de base queda:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior es ortogonal y unitaria ya que la suma de los cuadrados de los elementos renglón y elementos columna es igual a uno.

Un vector v_i descrito en la base x_i , se define como

$$v = 12\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 8\hat{e}_3$$

Para describir al vector v_i en la nueva base x'_i , se tiene entonces que

$$v'_i = A_{ij}v_j = \begin{pmatrix} -0.7071 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Por consecuencia,

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-0.7071 \times 12 + 0.5 \times 2 - 0.5 \times 8)e'_1 \\ (0.7071 \times 2 + 0.7071 \times 8)e'_2 \\ (0.7071 \times 12 + 0.5 \times 2 - 0.5 \times 8)e'_3 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 3. La siguiente tabla presenta los cosenos directores descritos entre la base original x_i , y la nueva base x'_i . Determine los cosenos de la tercera línea.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$3/5$	$-4/5$	0
x'_2	0	0	1
x'_3			

SOLUCIÓN

Se debe cumplir que $\hat{e}'_3 = \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{4}{5}e_1 - \frac{3}{5}e_2 + 0e_3$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 4. Verifique si el siguiente tensor es ortonormal.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Para lo anterior se debe cumplir que $AA^T = I$, o que cada renglón y cada columna cumpla con que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es igual a uno, lo cual se puede verificar con facilidad. La condición $(\sum \cos^2 \theta_{ij} = 1)$ no se cumple para el segundo renglón y la segunda columna, por lo que no se trata de un tensor ortogonal.

EJEMPLO 5. Para los siguientes cosenos directores definidos entre la base x_i y la x'_i , determine la última línea.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x'_2	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x'_3			

SOLUCIÓN

Considerando que la suma de los cuadrados de los cosenos directores debe ser igual a uno, y partiendo de que los vectores deben ser mutuamente perpendiculares, se tiene que $a \times b = c$, por lo que

$$e'_3 = -\frac{3}{5\sqrt{2}}\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_2 - \frac{4}{5\sqrt{2}}\hat{e}_3$$
$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -3/5\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -4/5\sqrt{2} \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ -3/5\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -4/5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

1.9 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL APLICADO A TENSORES

Esta parte del capítulo se orientará al estudio del cálculo diferencial e integral aplicado a funciones tensoriales.

Por función tensorial se entiende aquella transformación lineal entre espacios vectoriales que permite representar cantidades físicas asociadas a los medios continuos. Cualquier tensor A , y de acuerdo al rango, estará constituido por funciones representadas en el espacio de los números reales, de tal forma que:

$$A = a_{ij}(x_i, t)$$

donde a_{ij} son las componentes del tensor A de rango 2 y pertenecen al campo de los números reales. Por lo tanto,

$$\frac{dA(x_i, t)}{dt} = \frac{da_{ij}(x_i, t)}{dt}$$

descripción que se puede extender a la derivada n -sima,

$$\frac{d^n A(x_i, t)}{dt^n} = \frac{d^n a_{ij}(x_i, t)}{dt^n}$$

de tal forma que al derivar con relación al tiempo el rango del tensor no se altera.

Considerando lo antes expuesto, y en virtud de que las funciones tensoriales son, en general, de la forma $a_{ij} = f(x_i, t)$, las siguientes reglas aplicadas a las operaciones de derivación se extienden al cálculo diferencial con cantidades tensoriales, las cuales son demostradas en textos básicos de Cálculo.

Derivada con respecto al tiempo

Sean a , b tensores de rango uno, A , B tensores de rango dos, y α y ϕ escalares, todos ellos funciones del tiempo. Entonces se cumple lo siguiente:

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_i = \frac{da_i}{dt} = \frac{d}{dt}(a_i)$$

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{ij} = \frac{d}{dt}(a_{ij}(t))$$

$$\frac{d(a+b)}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{db}{dt}$$

$$\frac{d\alpha a}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}a + \alpha \frac{da}{dt}$$

$$\frac{d(a \cdot b)}{dt} = a \cdot \frac{db}{dt} + b \cdot \frac{da}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(a \times b) = a \times \frac{db}{dt} + \frac{da}{dt} \times b$$

$$\frac{d}{dt}(a \otimes b) = a \otimes \frac{db}{dt} + \frac{da}{dt} \otimes b$$

$$\frac{d}{dt}AB = \frac{dA}{dt}B + A \frac{dB}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(A \pm B) = \frac{dA}{dt} \pm \frac{dB}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\phi A = \frac{d\phi}{dt}A + \phi \frac{dA}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(A^T) = \left(\frac{dA}{dt}\right)^T$$

$$\frac{d}{dt}A_{ij}B_{kj} = \frac{dA_{ij}}{dt}B_{kj} + A_{ij}\frac{dB_{kj}}{dt}$$

Operador diferencial (∇)

En el caso de que la derivación se efectúe con respecto a un campo vectorial, el rango del tensor resultante se verá afectado. Para el empleo del operador ∇ (gradiente) es necesario considerar el tipo de operación que se va a realizar ya que esto determinará el rango del tensor al que se dé lugar.

Se presentan tres operaciones al utilizar el operador ∇ , éstas son:

- **Gradiente.** En notación índice se expresa como $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Sea $f(x_i)$ una función descrita en el campo de los reales, la cual en MMC representa un tensor de cualquier rango, se tiene entonces que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \nabla f = f_{,i}$. Por consecuencia,

la aplicación del operador ∇ equivale a incrementar en uno el rango del tensor. Por su parte, el operador divergencia equivale al producto punto del tensor por el operador gradiente, de tal forma que $\text{div } f = \nabla \cdot f$, lo que se traduce en la reducción del rango del tensor resultante. Se tiene que el operador rotacional da lugar a un nuevo tensor del mismo rango del original $\nabla \times u = \text{rot } u$

La notación empleada para describir diferentes operaciones en la literatura es muy variada, como se mostrará más adelante.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i = \hat{e}_i \partial_i$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \phi_{,i} \qquad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = v_{i,jk}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j} = \partial_j v_i \qquad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k} = \nabla T$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = v_{j,i} \qquad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = T_{ij,j} = \nabla \cdot T_{ij}$$

En las expresiones anteriores, ϕ representa un tensor de rango cero, v_i un tensor de rango uno, y T_{ij} uno de rango dos. Se constata que el operador $\partial/\partial x_i$ o ∂_i incrementa en uno el orden del tensor cuando i es índice libre, y reduce en uno el rango del tensor cuando el índice es falso (se repite); por lo tanto,

Gradiente: $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \hat{e}_i$

Divergencia: $\text{div } v = \nabla \cdot v$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \partial_i v_i = v_{i,i}$$

Rotacional: $\text{rot } v = \nabla \times v$

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j v_k = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}$$

Laplaciano: $\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi$

$$\partial_{ii} \varphi = \varphi_{,ii} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i}$$

Sea ϕ una función escalar (tensor de rango cero), se tiene entonces que:

$$\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \hat{e}_3$$

El gradiente de la función escalar es un tensor de rango uno.

Sea f un tensor de rango uno, entonces

$$f_{j,ii} = \nabla \cdot \nabla f = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \hat{e}_1 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \hat{e}_2 + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2} \hat{e}_3 = \nabla^2 f$$

$\nabla^2 f$ = laplaciano del tensor f

$$f_{j,ij} = f_{,ji} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_j} = \nabla(\nabla \cdot f) = \text{grad}(\text{div } f) \neq \nabla^2 f$$

$$\nabla^2 \varphi = \text{tr}(\nabla(\nabla \varphi))$$

$$\nabla^2 f = \nabla(\nabla \cdot f) - \nabla \times (\nabla \times f)$$

Extendiendo el concepto de laplaciano a un tensor de 2.º rango, éste se expresará como:

$$(\nabla^2 A)_{ij} = \nabla^2 (a_{ij})$$

EJEMPLO 6. A partir de las reglas de derivación y considerando las propiedades de la delta de Kronecker y del permutador, se puede demostrar que:

$$\varepsilon_{imn} f_{,mn} = \varepsilon_{imn} f_{,nm} \Rightarrow \text{se debe cumplir que } \varepsilon_{imn} f_{,mn} = 0$$

$$\varepsilon_{imn} f_{mn} = \varepsilon_{imn} f_{nm}$$

$$\varepsilon_{imn}f_{mn} = -\varepsilon_{inm}f_{nm} \quad \text{por la definición del permutador}$$

$$\varepsilon_{imn}f_{mn} = -\varepsilon_{inm}f_{nm} \quad \therefore \quad f_{nm} = 0$$

Por otra parte, se tiene que:

$$x_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \text{ya que} \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad i = j$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i \neq j$$

$$x_{i,i} = \nabla \cdot x = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 3$$

$$(x_m x_n)_{,i} = x_{m,i} x_n + x_m x_{n,i} = \delta_{im} x_n + \delta_{in} x_m$$

$$\nabla^2 x_m x_n = (x_m x_n)_{,ii} = (x_{m,i} x_n + x_m x_{n,i})_{,i} = (\delta_{mi} x_n + \delta_{ni} x_m)_{,i}$$

$$= \delta_{mi} x_{n,i} + \delta_{ni} x_{m,i} = \delta_{mi} \delta_{ni} + \delta_{ni} \delta_{mi} = 2\delta_{mn}$$

Por su parte, la *divergencia de un campo vectorial* se describe como:

$$\nabla \cdot f = f_{m,m} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \alpha$$

$$\text{div } u = \nabla \cdot u = u_{i,i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \beta$$

$$\text{div}(\phi u) = \phi \text{div } u + \nabla \phi \cdot u$$

$$\nabla \cdot (\alpha u + \beta g) = \alpha (\nabla \cdot u) + \beta (\nabla \cdot g)$$

donde α y β en la última ecuación son constantes que multiplican a las funciones tensoriales u , g .

Divergencia de una díada

La divergencia de un tensor de rango mayor o igual a dos se puede expresar como:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = T_{ij,j} = \nabla \cdot T = t_i$$

$$\nabla \cdot A^T = A_{ji,j} = a_i$$

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u$$

$$\nabla \cdot (\nabla u)^T = u_{j,ij} = u_{j,ji} = \nabla (\nabla \cdot u)$$

Sea $T(r)$ un campo tensorial de 2.º orden. La divergencia de $T(r)$ es definida como el campo vectorial, tal que para cualquier vector a

$$(\operatorname{div} T) \cdot a = \operatorname{div} (T^T a) - \operatorname{tr} (T^T (\nabla a))$$

Considerando coordenadas rectangulares y los vectores unitarios de la base dada

$$\nabla \hat{e}_i = 0$$

Sea $b = \operatorname{div} T$

$$\operatorname{div} T_{ij} = b_i = b \hat{e}_i = \operatorname{div} (T^T \hat{e}) - \operatorname{tr} (T^T \nabla \hat{e}_i)$$

$$= \operatorname{div} (T_{im} \hat{e}_m) - 0 = \frac{\partial T_{im}}{\partial x_m}$$

$$\operatorname{div} T = \frac{\partial T_{im}}{\partial x_m} \hat{e}_i$$

Para coordenadas cilíndricas la divergencia de $T_{r\theta z}$ está dada por:

$$(\operatorname{div} T)_r = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z}$$

$$(\operatorname{div} T)_\theta = \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}$$

$$(\operatorname{div} T)_z = \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r}$$

Mientras que para coordenadas esféricas $\nabla \cdot T_{(r\theta\phi)}$ está dada por:

$$(\operatorname{div} T)_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (T_{r\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r}$$

$$(\operatorname{div} T)_\theta = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 T_{\theta r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (T_{\theta\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\theta} - T_{\theta r} - T_{\phi\phi} \cot \theta}{r}$$

$$(\operatorname{div} T)_\phi = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 T_{\phi r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (T_{\phi\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\phi} - T_{\phi r} + T_{\theta\phi} \cot \theta}{r}$$

El **rotacional** ($\nabla \times$) se caracteriza por no modificar el rango del tensor, de tal forma que el tensor resultante tendrá el mismo rango del original, en particular para un campo vectorial se describe como:

$$\nabla \times u = \operatorname{rot} u$$

Por otra parte, se define al **vector dual** (ζ) como el resultado de la operación $\zeta = -\varepsilon_{ijk} \omega_{ij}$; donde ω_{ij} es $(\nabla v)^A$. El rotacional de un vector v es definido por el campo vectorial dado por dos veces el vector dual 2ζ de la parte antisimétrica de ∇v .

Empleando el permutador, se expresa también como

$$a_i = \varepsilon_{imn} u_{m,n} \quad \text{o} \quad a_i = \varepsilon_{imn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}$$

Si el campo vectorial u se define a partir del gradiente de una función escalar, de la forma $u = \nabla \phi$, entonces se cumplirá que el campo resultante se define como irrotacional, lo cual implica que $\nabla \times u = 0$, por lo tanto

$$\nabla \times u = \nabla \times (\nabla \phi) = \varepsilon_{imn} \phi_{,mn} = \varepsilon_{imn} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_m \partial x_n} = 0$$

Se cumplirá también que $\nabla \times (\alpha u) = \alpha (\nabla \times u) + \nabla \alpha \times u$, donde α es un tensor de rango cero.

Identidades de interés

Si α, β son constantes y u, g, v funciones vectoriales, se cumple que

$$\nabla \times (\alpha u + \beta g) = \alpha (\nabla \times u) + \beta (\nabla \times g)$$

$$\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot (\nabla \times v)$$

$$\nabla \times (u \times v) = v \cdot \nabla u - v (\nabla \cdot u) + u (\nabla \cdot v) - u \cdot \nabla v$$

$$\nabla (u \cdot v) = v \times (\nabla \times u) + u \times (\nabla \times v) + (v \cdot \nabla) u + (u \cdot \nabla) v$$

$$\nabla \times (\nabla \times u) = \nabla (\nabla \cdot u) - \nabla^2 u ; \text{ donde } \nabla^2 u \text{ representa al laplaciano } u = \nabla \cdot \nabla u$$

$$\Rightarrow \nabla^2 v = \nabla (\nabla \cdot v) - \nabla \times (\nabla \times v)$$

Para el rotacional de un campo tensorial se tiene que

$$(\nabla \times A)^T \neq \nabla \times A^T$$

Si A es un tensor de 2.º orden, $\nabla \times A$ será también tensor de 2.º orden.

Operador $u \cdot \nabla$

En análisis que involucra escalares y vectores es usual que aparezca el término $u \cdot \nabla$, en notación índice se expresa como:

$$u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$(u \cdot \nabla)\varphi = u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = u_j \varphi_{,j} = u \cdot \nabla \varphi$$

$$(u \cdot \nabla)v = u_j v_{i,j}$$

$$(u \cdot \nabla)u = \frac{1}{2} \nabla(u^2) - u \times (\nabla \times u) = \frac{1}{2} \nabla(u^2) + (\nabla \times u) \times u$$

donde $u^2 = u \cdot u$

Otras descripciones

En el caso del gradiente de un vector se tiene que

$$(\nabla u)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}$$

$$(\nabla u^T)_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = u_{j,i}$$

La aplicación sucesiva del operador gradiente se expresa

$$(\nabla \nabla \phi)_{ij} = \phi_{,ij}$$

$$(\nabla \nabla \phi)^T = \nabla \nabla \phi$$

donde ϕ representa un tensor de rango cero. De lo antes expuesto se concluye que el número de veces en que se aplique el operador gradiente será igual al incremento en el rango del tensor resultante.

Para el caso del gradiente de un campo tensorial en coordenadas rectangulares se tiene

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k} = M_{ijk}$$

$$(\nabla A)_{ijk} = a_{ij,k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}$$

Si $A = \nabla u$, entonces

$$\nabla A = \nabla(\nabla u) = \nabla \nabla u = u_{i,jk}$$

A lo cual se denomina como segundo gradiente de u ; por su parte $\nabla^2 u = u_{i,kk}$, y por esta razón, el laplaciano del vector representa, como ya fue mencionado, también un vector.

Laplaciano de un tensor de segundo rango

Sean a_{ij} las componentes de un tensor de segundo rango A , por lo que $c_{ijk} = a_{ij,k}$ son términos que representan el tensor de tercer orden generado por ∇A . Resulta evidente que $c_{ijk,m} = a_{ij,km} = A_{ijk,m}$, el cual representa un tensor de cuarto rango. Este tensor es denominado segundo gradiente de A y descrito como $\nabla \nabla A$. Por su parte, el tensor $a_{ij,kk}$ representa las componentes de un tensor de segundo orden que se define como laplaciano de $\nabla^2 A$, entonces resulta que si A representa un tensor de segundo grado, el laplaciano de éste estará dado también por un tensor del mismo rango.

Por último, se puede constatar que los operadores ∇ , $\nabla \cdot$, $\nabla \times$ y ∇^2 son operadores diferenciales lineales en el cálculo tensorial. Se cumplirá entonces que:

$$\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v$$

$$\nabla(\alpha A + \beta B) = \alpha \nabla A + \beta \nabla B$$

$$\nabla \cdot (\alpha A + \beta B) = \alpha \nabla \cdot A + \beta \nabla \cdot B$$

$$\nabla \times (\alpha A + \beta B) = \alpha \nabla \times A + \beta \nabla \times B$$

$$\nabla^2 (\alpha A + \beta B) = \alpha \nabla^2 A + \beta \nabla^2 B$$

donde u, v son tensores de rango uno (vectores); A, B son tensores de rango superior y α, β son escalares.

Derivada direccional y derivada normal

Una ecuación de la forma $\phi(x_i) = K$, donde K es una constante, representa una superficie en el espacio tridimensional, para la cual su normal está dada por $\nabla \phi$. Es por tanto que en cualquier punto x de la superficie $\phi(x_i) = K$, el vector $\nabla \phi$ está dirigido a lo largo de la normal de la superficie; por lo que el vector normal unitario está dado por

$$n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

Sea a un vector unitario inclinado un ángulo θ con respecto a la normal $\nabla \phi$, entonces:

$$\nabla \phi \cdot a = |\nabla \phi| (n \cdot a) = |\nabla \phi| \cos \theta$$

El escalar $\nabla \phi \cdot a$ representa la componente de $\nabla \phi$ a lo largo de a , lo cual es usualmente descrito como $\frac{\partial \phi}{\partial a} = \nabla \phi \cdot a$, lo que se denomina como derivada direccional de ϕ a lo largo de a . La derivada direccional de ϕ sobre la normal n es denominada derivada normal de ϕ $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)$. Por tal motivo se tiene que $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \phi \cdot n = |\nabla \phi|$

Resulta por demás evidente que $\frac{\partial \phi}{\partial a}$ es máxima cuando el ángulo θ descrito entre estos vectores es igual a cero, por tanto, se cumple que $\left| \frac{\partial \phi}{\partial a} \right|_{\text{máx}} = \frac{\partial \phi}{\partial n}$, por lo que la derivada normal representa el máximo de todas las derivadas direccionales del campo escalar ϕ que describe la superficie.

$$\nabla \phi = |\nabla \phi| \cdot n = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \cdot n$$

1.10 TEOREMAS INTEGRALES PARA VECTORES

En esta parte del curso se presentarán los teoremas integrales de mayor relevancia en el estudio de la MMC, éstos son el teorema de la divergencia y el de Stokes. Por sus consecuencias en el desarrollo de la MMC, se hará énfasis en las implicaciones que estos teoremas tienen.

Teorema de la divergencia

Sea V el volumen de una región tridimensional limitada por una superficie cerrada S , entonces para un campo vectorial u definido en V y en S , se cumplirá que:

$$\int_V (\nabla \cdot u) dV = \int_S (u \cdot n) dS$$

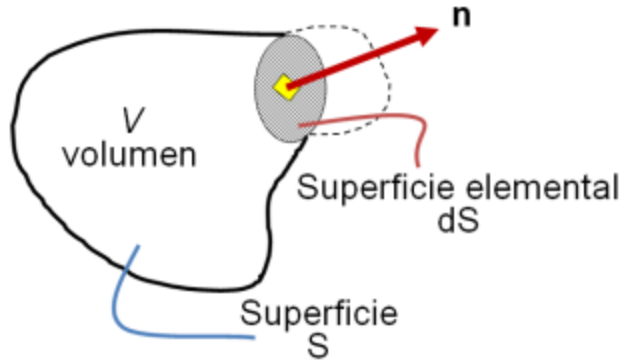
donde n es el vector normal unitario a S . En notación índice la relación anterior se expresa como

$$\int_V u_{k,k} dV = \int_S u_k n_k dS$$

$$\int_S u_i n_i dS = \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV$$

El teorema de la divergencia (TD) permite relacionar una integral de volumen para transformarla en una de superficie a través del vector normal unitario n .

El TD físicamente relaciona el intercambio de una propiedad (por ejemplo calor) del MC con su entorno, e indica que la pérdida o ganancia de ésta es igual a su variación al interior del MC.



El teorema de la divergencia permite desarrollar algunas relaciones, de tal forma que se cumplirá que:

$$\int_V \nabla \phi \, dV = \int_S \phi \mathbf{n} \, dS \quad \text{o, en notación índice, } \int_V \phi_{,k} \, dV = \int_S \phi n_k \, dS$$

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{u}) \, dV = \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \, dS \quad \text{o } \int_V \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \, dV = \int_S \varepsilon_{ijk} n_j u_k \, dS$$

$$\int_V \nabla^2 \phi \, dV = \int_S (\mathbf{n} \cdot \nabla) \phi \, dS \quad \text{o } \int_V \phi_{,kk} \, dV = \int_S n_k \phi_{,k} \, dS$$

$$\int_V (\nabla^2 \mathbf{u}) \, dV = \int_S (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} \, dS \quad \text{o } \int_V u_{i,kk} \, dV = \int_S n_k u_{i,k} \, dS$$

donde ϕ es una función escalar y \mathbf{u} una función vectorial.

Vector solenoidal

La integral de superficie $\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS$ es denominada como *flujo normal de salida o flujo de \mathbf{u} a través de S* . Un vector será solenoidal en una región si su flujo a través de cualquier superficie cerrada es cero. A partir del teorema de la divergencia se cumple que \mathbf{u} es *solenoidal en una región conectada simple, si y sólo si* $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en esa región. Un campo

vectorial cuya divergencia es igual a cero se denomina vector libre de divergencia (*divergence free vector*). Un campo vectorial es solenoidal en una región conectada simple, si y sólo si es libre de divergencia.

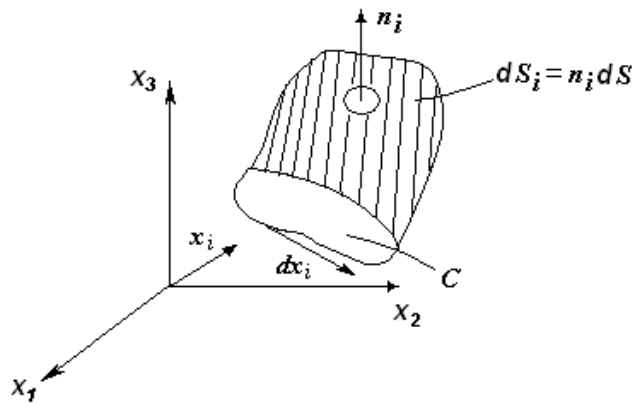
Cuando se cumple que $\text{div}(\text{rot } u) = 0$, lo que representa es que el vector definido por $\text{rot } u$ es un vector libre de divergencia para cada vector en u . Esto permite demostrar que cualquier vector libre de divergencia u definido en una región conectada simple puede ser representado como:

$$u = \nabla \times w$$

donde w es asimismo un vector libre de divergencia y se le conoce como vector potencial de u .

Teorema de Stokes

Así como el *teorema de Gauss* relaciona una integral sobre un volumen cerrado con una integral sobre su superficie límite, el *teorema de Stokes* relaciona una integral de línea alrededor de la curva límite de la superficie, de tal forma que la integral de superficie del rotacional de una función vectorial tomada sobre cualquier superficie es igual a la integral de trayectoria de la función vectorial sobre el borde de la superficie.



Sea C una curva cerrada en un espacio tridimensional y S una superficie regular abierta limitada por C , entonces, para un campo vectorial u definido tanto en S como en C , se cumple:

$$\oint_C u \cdot t \, ds = \int_S (\nabla \times u) \cdot n \, dS$$

donde t es un vector tangente unitario a C , el cual se asume que está orientado positivamente en relación al vector normal unitario n de S .

La ecuación anterior en notación índice se expresa como:

$$\oint_C u_i t_i ds = \int_S \varepsilon_{ijk} u_{k,j} n_i dS \quad (1.5)$$

Si S es una superficie cerrada, entonces el lado izquierdo se reduce a cero, por tanto se cumplirá:

$$\int_S (\nabla \times u) \cdot n dS = 0 \quad \text{o} \quad \int_S \varepsilon_{ijk} u_{k,j} n_i dS = 0$$

Esta ecuación también se desarrolla a partir del teorema de la divergencia aplicado a $\nabla \times u$.

Un caso particular de la ecuación 1.5 es cuando C queda contenida en un plano $x_1 x_2$ y S es la parte del plano limitado por C .

La expresión 1.5 se reduce a

$$\int_C (u_1 dx_1 + u_2 dx_2) = \int_S (u_{2,1} - u_{1,2}) dx_1 dx_2 \quad (1.6)$$

donde u_1, u_2 son las componentes u en x_1, x_2 .

Este caso particular del teorema de Stokes se denomina como *teorema de Green en el plano*.

Algunas relaciones que se establecen con base en la ecuación 1.5 son:

$$\oint_C \phi t ds = \int_S n \times \nabla \phi dS \quad \text{o} \quad \oint_C \phi t_i ds = \int_S \varepsilon_{ijk} n_j \phi_{,k} dS$$

$$\oint_C (u \times t) ds = \int_S [(\nabla \cdot u) n - (\nabla u)^T n] dS$$

$$\oint_C \varepsilon_{ijk} u_j t_k ds = \int_S (u_{k,k} n_i - u_{k,i} n_k) dS$$

$$\oint_C \nabla \times u \cdot t ds = \int_S \left[\frac{\partial}{\partial n} (\nabla \cdot u) - n \cdot (\nabla^2 u) \right] dS$$

o bien,

$$\oint_C \varepsilon_{ijk} u_{k,j} t_i ds = \int_S \left[\frac{\partial}{\partial n} (u_{k,k}) - n_i u_{i,kk} \right] dS$$

donde ϕ representa un campo escalar, tanto definido en S como en la trayectoria C .

Frecuentemente, $t ds$ se describe a través de dx , por lo que el término queda como $\int_C (t) dx$ en lugar de $\int_C (t) ds$.

Vectores conservativos e irrotacionales

La integral de trayectoria $\oint_C u_i t_i ds$ o $\oint_C u \cdot t dS$ representa la integral de $u \cdot t$ alrededor de C y se denomina *circulación* de u alrededor de C .

Un vector u definido en una región se define como *conservativo* si su trayectoria (circulación) sobre una curva cerrada es cero o, de manera equivalente, si el valor de la integral $\int_A^B u \cdot t ds$ depende solamente de los límites A y B .

El vector se dice irrotacional si $\nabla \times u = 0$, y a partir del teorema de Stokes, esto representa, *en una región conectada simple, que un vector es conservativo si y sólo si es irrotacional en la región.*

Si $\nabla \times \nabla \phi = 0$, se tendrá entonces que $\nabla \phi$ es un vector irrotacional para cualquier campo escalar ϕ . Por lo tanto se puede probar que cualquier vector irrotacional u definido en una región simple conectada puede ser representado como:

$$u = \nabla \phi$$

En consecuencia, ϕ se denomina como potencial escalar (scalar potential) de u . Si el vector u es a la vez irrotacional, entonces $\nabla^2 u = 0$; en este caso se denomina al vector u como *vector armónico*.

Representación de Helmholtz

Un vector libre de divergencia tiene la representación:

$$u = \nabla \times w$$

Mientras que un campo de velocidades o desplazamientos se puede describir a partir de una función escalar ϕ , a través de la siguiente relación, donde u representa un vector irrotacional:

$$u = \nabla \phi$$

Una representación válida para un vector general, conocida como la *representación de Helmholtz* se expresa como:

$$v(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{u(\bar{x})}{|x - \bar{x}|} dV$$

donde u representa un campo vectorial a través del cual se define un campo v , de tal forma que V es el volumen de la región donde se define u y la integral es tomada variando \bar{x} sobre V , manteniendo a x como un punto fijo. Se puede probar que:

$$\nabla^2 v = u$$

$$u = \nabla \phi + \nabla \times w$$

$$\phi = \nabla \cdot v$$

$$w = -\nabla \times v$$

Entonces, dado un campo vectorial u , donde existe un campo escalar ϕ y un campo vectorial w , tal que u tiene una representación $u = \nabla \phi + \nabla \times w$. Esta es la representación de Helmholtz es conveniente notar que el vector w utilizado en la representación es un vector libre de divergencia.

- **Teoremas integrales para tensores de rango superior a uno**

Los teoremas de la divergencia y de Stokes se pueden extender a campos tensoriales de rango superior a uno; como en el caso de un campo vectorial, la integral de un campo tensorial es definida como el campo tensorial cuyos elementos son las integrales de las componentes del campo dado.

- **Teorema de la divergencia aplicado a una díada**

Sea V el volumen de una región tridimensional limitada por una superficie regular cerrada S , entonces el campo tensorial definido en V y en S es

$$\int_V \nabla \cdot A \, dV = \int_S A \cdot n \, dS$$

donde n representa el vector normal unitario asociado a la superficie S . Esto también se puede expresar como:

$$\int_S A_{ij} n_j \, dS = \int_V \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \, dV$$

- **Teorema de Stokes para una díada**

Sea C una curva cerrada en un espacio tridimensional y S una superficie limitada tanto en S como en C , entonces se cumplirá que:

$$\oint_C A \cdot t \, ds = \int_S (\nabla \times A)^T \cdot n \, dS$$

donde t es la tangente unitaria a C , la cual se asume que está orientada positivamente al vector normal unitario n de S .

1.11 FÓRMULAS DE TRANSPORTE

Estos teoremas son de gran utilidad en la MMC, en particular para el desarrollo de las ecuaciones generales, ya que permiten correlacionar derivadas materiales de integrales de trayectoria, superficie y volumen con sus correspondientes ecuaciones integrodiferenciales de trayectoria, superficie o volumen. Esto es, las fórmulas de transporte permiten correlacionar la variación por unidad de tiempo de una propiedad A sobre un elemento de control, igualando esto con la variación debida al cambio de la propiedad de las partículas que integran el sistema menos la variación debida a los flujos convectivos netos de la propiedad A a través del entorno.

Lo antes expuesto se expresa como sigue:

$$\frac{D}{Dt} \int_C \phi dx = \int_C \left\{ \frac{D\phi}{Dt} + \phi \nabla \cdot v \right\} dx$$

$$\frac{D}{Dt} \int_S T ndS = \int_S \left[\frac{DT}{Dt} + T(\nabla \cdot v) - T(\nabla v)^T \right] ndS$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \phi dV = \int_V \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi(\nabla \cdot v) \right) dV$$

siendo

ϕ - componente escalar de un vector o tensor descrito en forma euleriana

C - curva o trayectoria material

S - superficie material (del medio continuo)

B - cuerpo o medio continuo cuya superficie es S y la curva que la delimita es C

V - volumen de B

v - velocidad

T - tensor de segundo orden

Teorema de transporte de Reynolds

Considere una función de la forma $T(x_i, t)$, la cual corresponde con un tensor de cualquier rango. Esta función se expresa en coordenadas espaciales (eulerianas y tiempo). Por ejemplo, $T(x_i, t)$ puede representar la función densidad $\rho(x_i, t)$, cantidad de movimiento $\rho(x_i, t)v(x_i, t)$, etc. Por lo que la cantidad de la propiedad $T(x_i, t)$ en el cuerpo B cuyo volumen en el instante t es V , está dada por:

$$\int_V T(x_i, t) dV$$

El volumen contiene la misma cantidad de partículas materiales para cualquier tiempo, asociado a éste se define una superficie $S(t)$ que contiene en su interior al volumen V . Si se pretende evaluar el cambio de la propiedad $T(x_i, t)$ asociada al cuerpo B de volumen V , se tendrá que:

$$\frac{D}{Dt} \int_V T(x, t) dV = \int_V \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dV + \int_S T(v \cdot n) dS$$

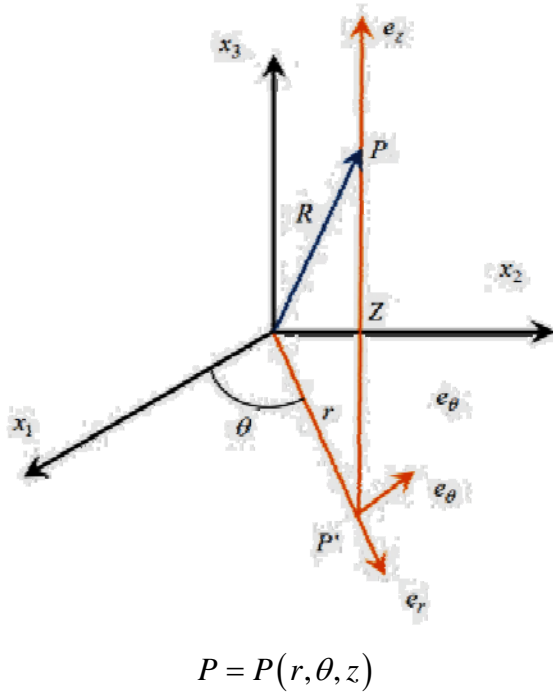
o

$$\frac{D}{Dt} \int_V T(x, t) dV = \int_V \left(\frac{DT(x, t)}{Dt} + T(\nabla \cdot v) \right) dV$$

Esta última expresión corresponde precisamente con la tercera ecuación que se planteó anteriormente como fórmula de transporte al considerar el análisis a través de un volumen material (V).

1.12 COORDENADAS CURVILÍNEAS**Coordenadas cilíndricas**

Para el caso de una base curvilínea de la forma:



Se tiene que:

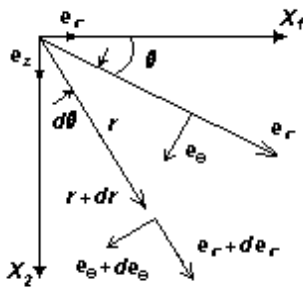
$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}$$

Pudiendo definirse los vectores unitarios del sistema coordenado cilíndrico respecto de vectores unitarios de la base rectangular.

$$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2$$



Los vectores base unitarios \hat{e}_r y \hat{e}_θ varían en dirección cuando la coordenada se modifica, por consecuencia, de las expresiones anteriores, se tiene que:

$$\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = \cos \theta d\hat{e}_1 - \sin \theta \hat{e}_1 + \sin \theta d\hat{e}_2 + \cos \theta \hat{e}_2$$

$$d\hat{e}_1 = d\hat{e}_2 = 0$$

$$d\hat{e}_r = (-\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2) d\theta = \hat{e}_\theta d\theta$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\cos \theta \hat{e}_1 - \sin \theta d\hat{e}_1 - \sin \theta \hat{e}_2 + \cos \theta d\hat{e}_2$$

$$d\hat{e}_\theta = (-\cos \theta \hat{e}_1 - \sin \theta \hat{e}_2) d\theta = -\hat{e}_r d\theta$$

$$\Rightarrow d\hat{e}_r = \hat{e}_\theta d\theta$$

$$d\hat{e}_\theta = -\hat{e}_r d\theta$$

Sea $r = r\hat{e}_r$ del vector de posición, entonces:

$$dr = (dr)\hat{e}_r + r d\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow dr = (dr)\hat{e}_r + rd\theta(\hat{e}_\theta)$$

Ahora, sea $\rho(r, \theta)$ un campo escalar, entonces

$$d\rho = \nabla\rho \cdot dr = [a_r\hat{e}_r + a_\theta\hat{e}_\theta] \cdot [dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta]$$

donde a_r, a_θ son las componentes del gradiente de ρ ($\nabla\rho$) en las direcciones \hat{e}_r y \hat{e}_θ respectivamente;

$$d\rho = a_r dr + a_\theta r d\theta \quad (1.7)$$

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial r} dr + \frac{\partial\rho}{\partial\theta} d\theta \quad (1.8)$$

Entonces de 1.7 y 1.8 deben representar el mismo resultado para todo incremento $dr, d\theta$

$$a_r = \frac{\partial\rho}{\partial r}; \quad ra_\theta = \frac{\partial\rho}{\partial\theta}$$

Entonces

$$\nabla\rho = \frac{\partial\rho}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\rho}{\partial\theta} e_\theta$$

$$\left[\frac{\partial\rho}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\rho}{\partial\theta} e_\theta \right] [dre_r + rd\theta e_\theta] = \frac{\partial\rho}{\partial r} dr + \frac{\partial\rho}{\partial\theta} d\theta$$

De lo antes expuesto se tiene que el gradiente de una función escalar $\rho(r, \theta, z)$ está dado por

$$\nabla\rho = \frac{\partial\rho}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\rho}{\partial\theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial\rho}{\partial z} \hat{e}_z$$

Siguiendo el mismo procedimiento para una función vectorial en coordenadas polares

$$v = v(r, \theta) = v_r(r, \theta)e_r + v_\theta(r, \theta)e_\theta$$

$$\Rightarrow [\nabla v] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \end{bmatrix}$$

Por lo que para una función vectorial $v = v(r, \theta, z)$, su gradiente está definido por

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\text{div } v = \nabla \cdot v = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Componentes de la divergencia de un tensor de 2.º orden

La definición de divergencia para un vector arbitrario a

$$(\text{div } T) \cdot a = \text{div}(T^T a) - \text{tr}((\nabla a)T^T)$$

Si $a = \hat{e}_r$, entonces

$$(\text{div } T)_r = \text{div}(T^T \hat{e}_r) - \text{tr}((\nabla \hat{e}_r)T^T)$$

$$T^T \hat{e}_r = T_{rr} \hat{e}_r + T_{r\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\operatorname{div}\left(T^T \hat{e}_r\right)=\operatorname{div}\left(\left(T_{rr} \hat{e}_r\right)+\left(T_{r \theta} \hat{e}_\theta\right)\right)$$

$$\operatorname{div}\left(T^T \hat{e}_r\right)=\frac{\partial T_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r} \frac{\partial T_{r \theta}}{\partial \theta}+T_{rr}$$

$$\operatorname{tr}\left(\nabla \hat{e}_r\right) T^T=\frac{T_{\theta \theta}}{r}$$

$$\therefore \quad\left(\operatorname{div} T\right)_r=\frac{\partial T_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r} \frac{\partial T_{r \theta}}{\partial \theta}+\frac{T_{rr}-T_{\theta \theta}}{r}$$

$$\left(\operatorname{div} T\right)_\theta=\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta \theta}}{\partial \theta}+\frac{T_{r \theta}+T_{\theta r}}{r}$$

Para un tensor $T=T(r, \theta, z ; t)$

$$T(r, \theta, z ; t)=\left[\begin{array}{ccc} T_{rr} & T_{r \theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta \theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z \theta} & T_{zz} \end{array}\right]$$

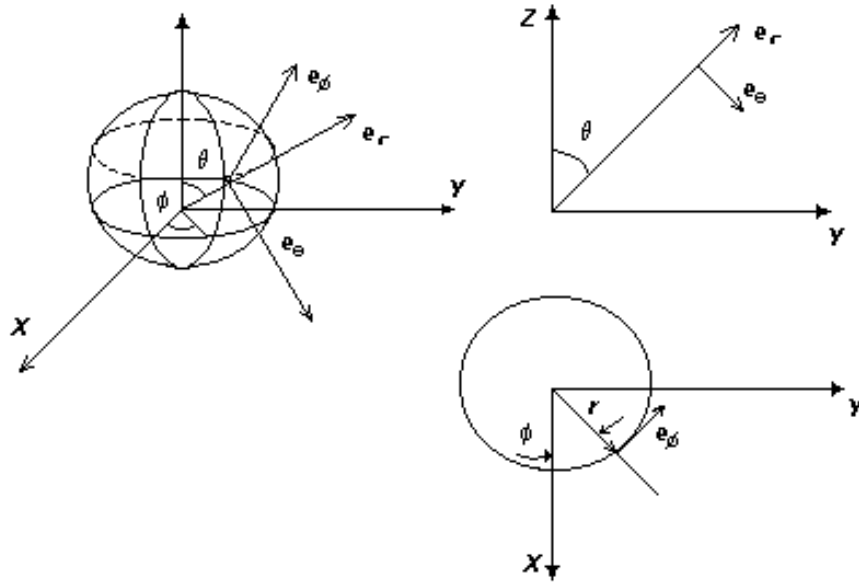
y considerando coordenadas cilíndricas, se tiene que $\nabla \cdot T(r, \theta, z, t)$ está dada por

$$\left(\operatorname{div} T\right)_r=\frac{\partial T_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r} \frac{\partial T_{r \theta}}{\partial \theta}+\frac{T_{rr}-T_{\theta \theta}}{r}+\frac{\partial T_{rz}}{\partial z}$$

$$\left(\operatorname{div} T\right)_\theta=\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta \theta}}{\partial \theta}+\frac{T_{r \theta}+T_{\theta r}}{r}+\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}$$

$$\left(\operatorname{div} T\right)_z=\frac{\partial T_{zr}}{\partial r}+\frac{1}{r} \frac{\partial T_{z \theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}+\frac{T_{zr}}{r}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)



Las reglas de transformación son

$$r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1} \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{x_3} \quad ; \quad \phi = \tan^{-1}(x_2/x_1)$$

El gradiente de una función escalar de la forma $\rho = \rho(r, \theta, \phi)$ se expresa como

$$\nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} e_\phi$$

Sea $v = v(r, \theta, \phi)$ una función vectorial, entonces:

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \sin \theta \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cos \theta \right) \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v} = & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{e}_r \\ & + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r v_\phi}{\partial r} \right) \right) \hat{e}_\theta \\ & + \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} = & \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \\ = & \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\end{aligned}$$

Para un tensor $T(r, \theta, \phi)$ de rango 2

$$T(r, \theta, \phi) = \begin{Bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{r\phi} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta\phi} \\ T_{\phi r} & T_{\phi\theta} & T_{\phi\phi} \end{Bmatrix}$$

$$(\text{div } T)_r = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial (r^2 T_{rr})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r}$$

$$(\text{div } T)_\theta = \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial (r^3 T_{\theta r})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\theta} - T_{\theta r} - T_{\phi\phi} \cot \theta}{r}$$

$$(\text{div } T)_\phi = \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial (r^3 T_{\phi r})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{\phi\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\phi} - T_{\phi r} + T_{\theta\phi} \cot \theta}{r}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. El tensor deformación infinitesimal (ε) se expresa como:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[B - I]$$

donde

$$B = FF^T$$

B : Tensor de deformación Cauchy-Green por izquierda

$$F = I + \nabla_X u$$

F : Gradiente de deformación

$$u_i(X, t) = u_1(X_i, t)\hat{e}_1 + u_2(X_i, t)\hat{e}_2 + u_3(X_i, t)\hat{e}_3$$

$\nabla_X u$: Gradiente del vector de desplazamientos

Con base en lo antes expuesto, determine el tensor de deformación infinitesimal en función del gradiente del vector desplazamientos ($\nabla_X u$); asimismo, exprese ε_{ij} en notación índice.

SOLUCIÓN

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[B - I]$$

$$B = FF^T; F = I + \nabla u$$

$$B = FF^T = (I + \nabla u) + (I + (\nabla u)^T) = I + (\nabla u)^T + \nabla u + \nabla u (\nabla u)^T$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T] + \frac{1}{2}\nabla u (\nabla u)^T$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial X_m}\frac{\partial u_j}{\partial X_m}$$

2. El tensor lagrangiano de deformación (E) se expresa en notación índice como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_i} \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right)$$

Con base en lo antes expuesto, desarrolle las componentes de deformación E_{11} , E_{31} , E_{23} ; asimismo, compruebe si en notación general la siguiente expresión es equivalente a:

$$E = \frac{1}{2} \left(\nabla_X u + (\nabla_X u)^T \right) + \frac{1}{2} \left((\nabla_X u)^T \nabla_X u \right)$$

SOLUCIÓN

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right]$$

$$E_{31} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \right\}$$

$$E_{23} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \right\}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_i} \right) \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \nabla u + (\nabla u)^T \right\} + \frac{1}{2} (\nabla u)^T \nabla u$$

3. Desarrolle la expresión $A_{ik} x_k x_j$. Por facilidad sólo trabaje con los índices i, j . ¿Cuál es el rango del tensor que describe la expresión anterior?

SOLUCIÓN

$$A_{ik} x_k x_j = B_{ij} \quad \text{Tensor de rango dos}$$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} A_{1k} x_k x_1 & A_{1k} x_k x_2 & A_{1k} x_k x_3 \\ A_{2k} x_k x_1 & A_{2k} x_k x_2 & A_{2k} x_k x_3 \\ A_{3k} x_k x_1 & A_{3k} x_k x_2 & A_{3k} x_k x_3 \end{bmatrix}$$

4. La rotación entre bases se expresa mediante un tensor ortogonal Q , el cual se define a través de los cosenos directores definidos entre la nueva base (x'_i) y la base original (x_j) , de tal forma que:

$$Q_{ij} = \cos x'_i x_j$$

y considerando que $\sum \cos^2 x'_i x_j = 1$, verifique si los valores que se presentan en la siguiente tabla permiten describir la rotación de los ejes:

	\hat{e}_1	\hat{e}_2	\hat{e}_3
\hat{e}'_1	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$
\hat{e}'_2	$\frac{3}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{2}{7}$
\hat{e}'_3	-	-	-

Asimismo, determine los cosenos directores que permiten definir a \hat{e}'_3

SOLUCIÓN

Cosenos directores

$$Q_{ij} = \cos x'_i x_j$$

De $\sum \cos^2 x'_i x_j = 1$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{4}{49} + \frac{9}{49} + \frac{36}{49} = 1$$

\Rightarrow

$$\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{9}{49} + \frac{36}{49} + \frac{4}{49} = 1$$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{vmatrix} = \left(\frac{6+36}{49}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{18-4}{49}\right)\hat{e}_2 + \left(\frac{-12-9}{49}\right)\hat{e}_3$$

Por lo que el vector de cosenos directores se expresa

$$Q_{3i} = \frac{6}{7}\hat{e}_1 + \frac{2}{7}\hat{e}_2 - \frac{3}{7}\hat{e}_3$$

	\hat{e}_1	\hat{e}_2	\hat{e}_3
\hat{e}_1	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$
\hat{e}_2	$\frac{3}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{2}{7}$
\hat{e}_3	$\frac{6}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$

5. Si v es una función vectorial $v(x_1, x_2, x_3)$, determine:

- a) ∇v
- b) $\nabla \cdot v$
- c) $\nabla \times v$
- d) $\nabla \cdot (\nabla v)$

SOLUCIÓN

a)

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix}$$

b)

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

c)

$$\nabla \times v = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \hat{e}_3$$

d)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla v) &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial v_n}{\partial x_m} \right) = \frac{\partial}{\partial x_m} V_{nm} = \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_m \partial x_m} \\ &= \left[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) \right] \hat{e}_1 + \left[\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) \right] \hat{e}_2 \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) \right] \hat{e}_3 \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Desarrolle $a_{ij}x_j = b_i$
2. Desarrolle $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}b_{ij}$
3. Desarrolle $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ij}b_{ij}c_{ki}$
4. Determine si se cumple que $a_{ij}b_{ij} = a_{ji}b_{ji}$
5. Verifique si $(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij})x_i x_j x_k = 3a_{jik}x_i x_j x_k$
6. Verifique si $\det a_{ij} = \det a_{ji} = \det(a)^T$
7. El tensor lagrangiano de deformación (E) se expresa en notación índice como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_i} \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right)$$

Con base en lo antes expuesto, desarrolle las componentes de deformación E_{33} , E_{31} , E_{23}

8. Desarrolle la expresión $A_{im}x_n x_j$. Por facilidad sólo trabaje con los índices i, j , ¿cuál es el rango del tensor que describe la expresión anterior?
9. Explique lo que es un tensor. ¿Qué representa su rango? ¿Cuántos elementos se necesitan para definirlos?

Con relación a las cantidades físicas asociadas a un medio continuo, indique cuando menos una que se represente con un tensor de rango:

- Cero
- Uno

- Dos
- Tres

10. Si T_{ij} representa un tensor de 2° orden, n_i es uno de primer orden, λ y α representan constantes. Entonces escriba en forma desarrollada la siguiente expresión:

$$\alpha T_{ij} n_j - \lambda n_i = 0$$

Asimismo, verifique la validez de la siguiente expresión:

$$\alpha T_{ij} n_j - \lambda n_i = 0 = \left(T_{ij} - \frac{\lambda}{\alpha} \delta_{ij} \right) n_j$$

11. Desarrolle la siguiente expresión:

$$T_{ij} = \lambda E_{ii} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$

12. Verifique si dado $T_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda(E_{kk})\delta_{ij}$, y si $W = \frac{1}{2} T_{ij} E_{ij} \Rightarrow W = \mu E_{ij} E_{ij} + \frac{\lambda}{2} (E_{kk})^2$

13. ¿Qué se deberá cumplir para que $a_{ij} x_i x_j = 0$ para toda x_i ?

14. Aplicando la identidad $\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$ verifique si $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$

15. Si $a_{ij} = a_{ji}$ y $b_{ij} = \frac{1}{2} (c_{ij} + c_{ji})$, verifique que $a_{ij} b_{ij} = a_{ij} c_{ij}$

16. ¿Cuáles de las siguientes expresiones tienen el mismo significado?

$$a_{ij} b_j, a_{rs} b_s, a_{pq} b_p, a_{ij} b_i b_j, a_{pq} b_p b_q, a_{sr} b_s b_r$$

17. Si $a_{ij} = \frac{1}{2} (b_{ij} + b_{ji})$ y $c_{ij} = \frac{1}{2} (b_{ij} - b_{ji})$ verifique que $a_{ij} c_{ij} = 0$

18. Verifique si $\delta_{ij} \delta_{mj} = 3$, $\delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{ik} = 3$, $\delta_{jk} \delta_{jm} \delta_{ij} = \delta_{km}$

19. Si $T_{ij} = T_{ji}$ determine si $t_k = 0$ para $\varepsilon_{ijk} T_{ij} = t_k$, ¿ahora bien, la misma relación se cumple para $T \neq T^T$?

ε_{ijk} representa al permutador, de tal forma que si la permutación es natural $[1 \rightarrow 2 \rightarrow 3] \Rightarrow \varepsilon_{ijk} = 1$; si es antinatural $[3 \rightarrow 2 \rightarrow 1] \Rightarrow \varepsilon_{ijk} = -1$ y si los índices se repiten $\Rightarrow \varepsilon_{ijk} = 0$.

20. Demuestre si $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

21. Se presentan los siguientes tensores:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad a_i = [1, 2, 3]$$

Determine:

- a) $S_{ij} S_{ij}$
 - b) $a_m a_m$
 - c) $S_{ij} a_j$
 - d) S_{ii}
 - e) $S_{mn} a_n a_m$
22. Demuestre si $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ si y sólo si $b \times (c \times a) = 0$
23. Demuestre si para tensores arbitrarios A y B , y vectores a , b se cumple que:

- a) $(A \cdot a) \cdot (B \cdot b) = a \cdot (A^T \cdot B) \cdot b$
- b) $b \times a = \frac{1}{2} (B - B^T) \cdot a$, si $2b_i = \varepsilon_{ijk} B_{kj}$
- c) $a \cdot A \cdot b = b \cdot A^T \cdot a$

24. Demuestre si existe correspondencia entre las ecuaciones indicadas con subíndices y las matriciales

$$D_{ij} = B_{ji} \quad [D] = [B]^T$$

$$b_i = B_{ij}a_j \quad [b] = [B][a]$$

$$D_{ik} = B_{ij}C_{kj} \quad [D] = [B][C]$$

25. ¿Qué representan los eigenvalores y los eigenvectores de un tensor?
26. Demuestre que para un tensor ortogonal $QQ^T = Q^TQ = I$
27. ¿Qué caracteriza a un tensor isotrópico?
28. Para la díada que se presenta, determine:
- a) Eigenvalores.
 - b) Matriz de transformación Q de la base original a la definida por las direcciones de los valores característicos.
 - c) ¿Qué características deberá cumplir la matriz de transformación Q ? Compruebe esto.
 - d) Compruebe que la matriz Q permite transformar de la base original a la base nueva.
 - e) La componente esférica y desviadora del tensor

$$T = \begin{pmatrix} 20 & 4.9 & 0 \\ 4.9 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

29. Sea T una transformación la cual al operar el vector a se define como $Ta = \frac{a}{|a|}$, donde $|a|$ es el módulo del vector a . Verifique si T representa una transformación lineal.
30. Sean T y S dos tensores, verifique si se cumplen las siguientes afirmaciones:
- a) T^T es un tensor
 - b) $T^T + S^T = (T + S)^T$
 - c) $(TS)^T = T^T + S^T$

31. Si \hat{e}_i y \hat{e}'_i son los vectores unitarios que corresponden a 2 sistemas coordenados cartesianos, donde \hat{e}'_i corresponde con la rotación de \hat{e}_i , desarrolle el sistema de ecuaciones que permiten transformar \hat{e}'_i a partir de \hat{e}_i ($\hat{e}'_i = Q_{ni}\hat{e}_n$), donde Q_{ij} es la matriz de transformación entre \hat{e}_i y \hat{e}'_i .
32. Un sistema de ejes coordenados cartesianos x'_1, x'_2, x'_3 es obtenido por la rotación de un ángulo θ alrededor del eje x_3 . Con base en lo anterior, defina las componentes del vector $v = \left\{ \frac{x_1^2 x_2}{x_3^2} \hat{e}_1 + \frac{x_3^2}{x_1} \hat{e}_2 + x_2 \hat{e}_3 \right\} \alpha$ en la nueva base cuyos vectores unitarios son \hat{e}'_i .
33. ¿Qué es un tensor ortogonal? ¿Qué propiedades tienen estos tensores?
34. Demuestre que un tensor de segundo orden se puede descomponer en un tensor simétrico y en otro antisimétrico. ¿Cuántos términos linealmente independientes se requieren para definir a cada uno de estos nuevos tensores?
35. Determine los eigenvalores y eigenvectores asociados a

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 4 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

36. Determine los valores principales de

$$N_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 8 & 11 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 10 \end{pmatrix}$$

37. El estado de esfuerzos T_{ij} en un punto de un MC está dado por:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 30 & 8 & 10 \\ 8 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & -15 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

- Determine el vector de esfuerzos t_i en dicho punto para un plano $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 15$, el cual pasa por el punto $(3, 3, 3)$.
- Determine la magnitud del esfuerzo normal $\sigma_N = t_i n_i$ y cortante $\sigma_c = \tau_c = \left(|t|^2 - \sigma_n^2\right)^{1/2}$ en dicho plano
- Determine los esfuerzos principales.
- ¿El siguiente tensor de esfuerzos será equivalente?

$$T'_{ij} = \begin{pmatrix} 50 & -20 & 10 \\ -20 & -5 & 14 \\ 10 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$

38. Determine los eigenvalores y los eigenvectores asociados al siguiente tensor:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 45 & 8 & -15 \\ 8 & 10 & 20 \\ -15 & 20 & -5 \end{pmatrix}$$

39. Determine los eigenvalores y los eigenvectores asociados al siguiente tensor:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

40. La ecuación característica del sistema $T_{ij}n_j = \lambda n_i \Rightarrow (T_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_j = 0$ presenta la solución trivial $n_j = 0$ y la no trivial $|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$, siendo ésta una ecuación cúbica en λ , de la forma:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

demuestre que

$$I_1 = T_{ii} = \text{traza del tensor } T_{ij}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ji})$$

$$I_3 = \det [T_{ij}] = \frac{1}{6} (2T_{ij} T_{jk} T_{ki} - 3T_{ji} T_{ji} T_{kk} + T_{ii} T_{jj} T_{kk})$$

41. Los ángulos entre el sistema de referencia original y el nuevo sistema coordinado están, posiblemente, dados por los datos de la tabla. Compruebe si este conjunto de ángulos representa el tensor de transformación entre los sistemas \hat{e}_i y \hat{e}'_i

	X_1	X_2	X_3
X'_1	90°	135°	45°
X'_2	135°	90°	45°
X'_3	45°	45°	90°

Si el desplazamiento se expresa en el sistema original como

$$\bar{u} = \frac{x_1 x_2}{x_3} \hat{e}_1 + \frac{x_2^2}{x_1} \hat{e}_2 + x_3 \ln \frac{x_2}{x_1} \hat{e}_3$$

- Defina el desplazamiento con relación a la nueva base.
 - Defina el tensor de deformación en la nueva base, así como en la base original.
43. El tensor lagrangiano de deformación E se expresa en notación general como

$$E = \frac{1}{2} \left(\nabla_X u + (\nabla_X u)^T \right) + \frac{1}{2} \left((\nabla_X u)^T \nabla_X u \right)$$

Desarrolle los términos E_{rr} , E_{zr} , $E_{\theta\theta}$ si $u = u(r, \theta, z)$

44. El tensor Q define una transformación entre ejes. Si el cambio de base se produce al rotar 30° al sistema alrededor del eje x_1 , determine Q . Asimismo compruebe que se trata de un tensor ortogonal.

45. Calcule $\text{div } T$ para el siguiente campo tensorial en coordenadas esféricas:

$$T_{rr} = A - \frac{2B}{r^3}, \quad T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3}, \quad T_{r\theta} = T_{\phi r} = T_{\theta\phi} = 0$$

46. Considere el vector $\bar{v} = \eta(x_1^2 e_1 + x_3^2 e_2 + x_2^2 e_3)$, para el punto $(1, 1, 0)$ determine:

- $\nabla \bar{v}$
- $(\nabla \bar{v}) \bar{v}$
- $\text{div } \bar{v}$

47. Para una rotación de $\frac{\pi}{6}$ sobre el eje x_3 , determine el estado de esfuerzos para esta nueva base.

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

48. Si ρ, ν, T representan tensores de rango cero, uno y dos, respectivamente, defina en coordenadas rectangulares, esféricas y cilíndricas lo siguiente:

- a) $\nabla \rho$
- b) $\nabla \nu$
- c) $\nabla \cdot T$

49. Calcule la $\text{div } \bar{u}$ para los siguientes campos vectoriales (definidos estos campos en coordenadas cilíndricas)

- a. $u_r = u_\theta = 0, u_z = A + Br^2$
- b. $u_r = \frac{\sin \theta}{r}, u_\theta = 0, u_z = 0$
- c. $u_r = \frac{\sin \theta}{r^2}, u_\theta = -\frac{\cos \theta}{r^2}, u_z = 0$

50. Si λ es una función escalar de la forma $\lambda(r, \theta, z)$, determine $\nabla \lambda$.

51. Si ν es una función vectorial $\nu(r, \theta, z)$, determine:

- a. $\nabla \nu$
- b. $\text{div } \nu$
- c. $\text{rot } \nu$
- d. $\text{div } (\nabla \nu)$

52. Si λ es una función escalar de la forma $\lambda(r, \theta, \phi)$, determine $\nabla \lambda$.

53. Si ν es una función vectorial $\nu(r, \theta, \phi)$, determine:

- a. $\nabla \nu$
- b. $\text{div } \nu$
- c. $\text{rot } \nu$
- d. $\text{div } (\nabla \nu)$

54. Para $u = u(r, \theta, z)$, donde u está definida como:

a. $u_r = \frac{r}{2} \sin \theta$, $u_\theta = \frac{r}{2} \cos \theta$, $u_z = 0$

b. $u_r = \frac{\sin \theta}{r^2}$, $u_\theta = \frac{\cos \theta}{r^2}$, $u_z = 0$

Determine, para cada inciso, ∇u , $\nabla \cdot u$, $\nabla \times u$

55. Calcule $\nabla u(r, \theta, \phi)$ para

$$u_r = Ar + \frac{B}{r^2}, \quad u_\theta = u_\phi = 0$$

56. Sea T un tensor de segundo orden $T = T(r, \theta, z)$, tal que

$$T_{rr} = \frac{Az}{R^3} - \frac{3r^2 z}{R^5}, \quad T_{\theta\theta} = \frac{Az}{R^3}, \quad T_{zz} = -\left[\frac{Az}{R^3} + \frac{3z^3}{R^5}\right], \quad T_{rz} = -\left[\frac{A}{R^3} + \frac{3rz^2}{R^5}\right]$$

$$T_{z\theta} = T_{r\theta} = 0, \quad \text{donde } R^2 = r^2 + z^2$$

Determine $\nabla \cdot T$

57. Para $T(r, \theta, z)$, determine $\text{div} T$

$$T_{rr} = A + \frac{B}{r^2}, \quad T_{\theta\theta} = A - \frac{B}{r^2}, \quad T_{zz} = C$$

$$T_{r\theta} = T_{rz} = T_{\theta z} = 0$$

58. Para $T(r, \theta, \phi)$, determine $\text{div} T$

$$T_{rr} = A + \frac{2B}{r^3}, \quad T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3}$$

$$T_{\theta r} = T_{\phi r} = T_{\phi\theta} = 0$$

59. Considerando que $T_{ij} = \frac{1}{2}(S_{ij} + S_{ji})$; y $R_{ij} = \frac{1}{2}(S_{ij} - S_{ji})$ demuestre que:

$$T_{ij} = T_{ji}, \quad R_{ij} = -R_{ji}, \quad S_{ij} = T_{ij} + R_{ij}$$

CAPÍTULO 2

CINEMÁTICA DEL CONTINUO

2.1 INTRODUCCIÓN

El objeto de la mecánica, en términos generales, es relativo al estudio del efecto que tienen solicitaciones tales como fuerzas o flujo de calor sobre un objeto físico. Tanto la mecánica de sólidos como la de fluidos fueron cimentadas durante la segunda mitad del siglo XVIII y primera del siglo XIX por notables científicos, como Leonard Euler (1707-1783), Agustín Louis Cauchy (1789-1857), Simeon Denis Poisson (1781-1840), George Green (1793-1841) y George Stokes (1819-1903), entre los más destacados. El examen de los fundamentos de estas disciplinas revela que los postulados básicos y los principios generales sobre los que se basan la mecánica de sólidos (MS) y la mecánica de fluidos (MF) son los mismos. Las ecuaciones matemáticas que describen leyes físicas aplicables a cualquier medio son denominadas como ecuaciones generales y son aplicadas a cualquier medio continuo (MC). Sin embargo, resulta evidente que fluidos y sólidos son diferentes en esencia, por lo que sus propiedades se describen en forma particular a través de las denominadas ecuaciones constitutivas. Como se mencionó al inicio del primer capítulo, las ecuaciones que describen el comportamiento de un medio idealizado infinitamente divisible, el cual se denomina *continuo*, se definen como ecuaciones generales y son formuladas con base en leyes fundamentales de la física (Conservación de Masa, de Momentum y de Energía).

Históricamente, los conceptos de esfuerzo y deformación fueron introducidos por Cauchy entre 1823 y 1827. El desarrollo de la cinemática del continuo y las ecuaciones de campo se deben en esencia a Euler. En cuanto a las ecuaciones constitutivas, éstas han sido desarrolladas por dos diferentes vías:

- i. *Experimental*: Por ejemplo, Ley de Hooke para sólidos elásticos, Ley de Newton para fluidos viscosos.
- ii. *A partir de postulados teóricos*

Noción de continuo

Como ya fue mencionado en el capítulo 1, los constituyentes de cualquier continuo (átomos, moléculas, fases o partículas) no se encuentran continuamente distribuidos sobre el cuerpo, es por esto que la mecánica del continuo se basa en la condición macroscópica del objeto. En consecuencia, un MC será un objeto físico hipotético en el cual se desprecia su estructura a nivel atómico o molecular y, por consiguiente, se considera que la materia está continuamente distribuida sobre la totalidad del objeto. Por lo tanto, un MC puede ser descrito como un conjunto de partículas interconectadas de forma tal, que cada una de éstas es descrita por su posición espacial.

En este punto vale la pena reflexionar que existe una relación única de cualquier partícula del MC con su posición para un tiempo determinado y que, por consecuencia, será imposible que más de una ocupen el mismo lugar en el espacio para el mismo tiempo y que una partícula esté en dos posiciones diferentes a un mismo tiempo. Es entonces que para cualquier tiempo la posición de cualquier partícula de un continuo y la configuración de éste son unívocamente determinadas. Una parte de un continuo cuya posición es referida a un punto geométrico se describe como punto material, y si se identifica a través de una curva se denomina curva material o arco material. Un arco material de longitud infinitesimal se denomina arco material elemental. Un cuerpo material ocupa una posición en el espacio tridimensional y será parte total o parcial de un continuo. Por último, es conveniente mencionar que cuando una descripción se realiza con base en la partícula, ésta se define como descripción material, mientras que cuando la atención (descripción de fenómeno) se orienta a un punto en el espacio y se analiza lo que sucede en dicho punto, se refiere entonces a una descripción espacial. En la mecánica de sólidos es más útil la descripción material, mientras que en la mecánica de fluidos es más adecuada la descripción espacial.

2.2 CONCEPTOS GENERALES DE CINEMÁTICA DEL CONTINUO

La descripción del movimiento de un continuo es mucho más compleja que lo que corresponde a una partícula o a un conjunto de ellas. En cinemática de partículas la trayectoria es descrita por un vector función del tiempo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{r}(t) = x_1(t)\hat{e}_1 + x_2(t)\hat{e}_2 + x_3(t)\hat{e}_3 \text{ es el vector de posición}$$

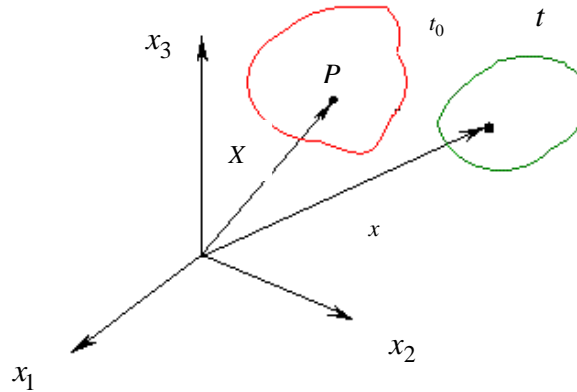
Resulta evidente que si se describe el movimiento de N partículas será necesario definir igual número de funciones de trayectoria.

$$r_n = r_n(t) \quad n = 1, 2, 3, \dots, N$$

Por su parte, un medio continuo está formado (considerando su definición) por un número infinito de partículas, con un infinito número de vecinos en el tiempo. Es por consecuencia que resulta imposible describir su movimiento a través de simples funciones de trayectoria, por extensión del concepto empleado para un grupo de partículas. Sin embargo, existe una relación unívoca entre cada uno de los elementos que constituye el medio continuo y la posición que éstos ocupan a un tiempo determinado. Como resultado es factible identificar a cualquier elemento diferencial del cuerpo, y para cualquier tiempo, por la posición que ocupa para un tiempo de referencia t_0 .

Esto es

$$x(t_0) = (X_1, X_2, X_3)$$



Por lo tanto, la posición que ocupa cualquier partícula del MC en el tiempo se puede describir como:

$$x = x(X, t) \quad \text{con } x(t_0) = X$$

$$x_1 = x_1(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$x_2 = x_2(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$x_i = x_i(X_i, t) \tag{2.1}$$

2.3 DESCRIPCIÓN MATERIAL Y DESCRIPCIÓN ESPACIAL

La descripción de la posición, para el tiempo de referencia, de cada uno de los elementos diferenciales que integran el medio continuo se conoce como coordenada material (X_i), mientras que las ecuaciones 2.1 permiten especificar el movimiento del continuo. Estas ecuaciones explican el concepto de líneas de trayectoria o funciones de trayectoria para cada partícula del continuo, las cuales también son denominadas como ecuaciones cinemáticas.

Cuando un continuo está en movimiento, las propiedades asociadas a éste, por ejemplo, temperatura θ , velocidad v_i o esfuerzos σ_{ij} , están relacionadas con cada uno de los elementos que constituyen el MC, razón por la cual se definirán en la forma:

$$\theta = \theta(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$v = v(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$\sigma = \sigma(X_1, X_2, X_3, t)$$

Cuando una propiedad φ (φ de cualquier rango) presenta la forma $\varphi = \varphi(X_i, t)$, se dice que está definida con una descripción material o **lagrangiana**. Dicha descripción permite conocer el comportamiento del MC para cualquier tiempo, pero no aporta datos con relación a la posición que ocupan las diferentes partículas para cualquier tiempo (t). La descripción material o lagrangiana describe el comportamiento en función de una referencia fija.

Por otra parte, cuando las propiedades asociadas al MC se describen para el espacio en cualquier tiempo, en la forma

$$\theta = \theta(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$v = v(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$\sigma = \sigma(x_1, x_2, x_3, t)$$

se dice que están definidas con una descripción espacial o **euleriana**. Si bien este tipo de descripción permite definir lo que pasa en el espacio, no ofrece información con relación a los elementos que constituyen el continuo (al comportamiento de las partículas en sí), ya que

una coordenada en el espacio puede ser ocupada por diferentes partículas para diferentes tiempos. Es por tanto necesario conocer las funciones de trayectoria (ecuación 2.1), para así relacionar las coordenadas espaciales x_i con las materiales X_j , y de tal forma describir el comportamiento de manera precisa y simple.

2.4 DERIVADA MATERIAL

Cuando se refiere a una propiedad cualquiera asociada a un medio continuo, de la forma $\varphi = \varphi(X_i, t)$, y en particular si se demanda analizar el cambio de dicha propiedad (temperatura, velocidad o esfuerzo) en el tiempo, se define el concepto de derivada material $\left(\frac{D}{Dt}\right)$. Ésta representa la rapidez de cambio de la propiedad para cada uno de los elementos diferenciales que constituyen el MC.

Cuando se tiene una descripción material, por ejemplo

$$\theta = \theta(X_1, X_2, X_3, t)$$

entonces, la derivada material se expresa en la forma

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{X_i \text{ fija}}$$

Por el contrario, si se presenta una descripción espacial del tipo $\theta = \theta(x_1, x_2, x_3, t)$, donde x_i son las posiciones de partículas materiales a un tiempo t y están relacionadas con las coordenadas materiales a través de

$$x_i = x(X_1, X_2, X_3, t)$$

De acuerdo con la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{X_i \text{ fija}} = \frac{\partial\theta}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{x_c \text{ fija}}$$

donde resulta evidente que

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = v_i$$

Considerando coordenadas rectangulares se tiene entonces que

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_{x_i \text{ fija}} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$$

En forma general

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + (\nabla \theta) \bullet \mathbf{v}$$

De lo antes expuesto, para coordenadas cilíndricas, se tiene:

$$\rho = \rho(r, \theta, z; t) \quad \text{Referencia espacial}$$

$$\rho = \rho(R, \Theta, Z; t) \quad \text{Referencia material}$$

donde ρ es una función escalar, entonces:

$$\frac{D\rho(t; R, \Theta, Z)}{Dt} = \frac{\partial \rho(t; r, \theta, z)}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + v_z \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)$$

Por su parte, en coordenadas esféricas se tiene

$$\rho = \rho(r, \theta, \phi; t) \quad \text{Referencia espacial}$$

$$\rho = \rho(R, \Theta, \Phi; t) \quad \text{Referencia material}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \phi} \right)$$

Derivada material de un tensor de primer rango

Sea a_i la aceleración de una partícula del continuo, ésta representa la rapidez de cambio de velocidad de cualquier partícula del MC, con respecto a la que la misma partícula presentaba para una diferencial de tiempo anterior.

Si el movimiento del continuo está dado por:

$$x = x(X, t) \quad \text{con} \quad X = x(X, t_0)$$

entonces, la velocidad v , a un tiempo t , de una partícula X está dada por

$$v = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{X_i \text{ fija}} = \frac{Dx}{Dt}$$

Por su parte, la aceleración queda

$$a = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{X_i \text{ fija}} = \frac{Dv}{Dt}$$

entonces, si se cuenta con una descripción de la velocidad de la forma $v(X, t)$, la obtención de la aceleración es trivial

$$a_i = \frac{\partial v_i(X_i, t)}{\partial t}$$

Por otra parte, si de lo que se dispone es $v(x_i, t)$, que además representa la forma más usual para describir la velocidad, entonces la aceleración queda

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

o, en notación general

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v) \bullet v$$

Dado que ∇v en coordenadas (r, θ, z) , está dado por

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Entonces, la aceleración en coordenadas cilíndricas es descrita como

$$a_r = \frac{Dv_r(R, \Theta, Z; t)}{Dt} = \frac{\partial v_r(r, \theta, z; t)}{\partial t} + v_r \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$a_\theta = \frac{Dv_\theta(R, \Theta, Z; t)}{Dt} = \frac{\partial v_\theta(r, \theta, z; t)}{\partial t} + v_r \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{Dv_z(R, \Theta, Z; t)}{Dt} = \frac{\partial v_z(r, \theta, z; t)}{\partial t} + v_r \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Para el caso de coordenadas esféricas, donde la velocidad se expresa en la forma

$$v = v_r(r, \theta, \phi; t)\hat{e}_r + v_\theta(r, \theta, \phi; t)\hat{e}_\theta + v_\phi(r, \theta, \phi; t)\hat{e}_\phi$$

y el gradiente se expresa como

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \sin \theta \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cos \theta \right) \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \end{bmatrix}$$

Entonces, la aceleración se describe a través de:

$$a_r = \frac{Dv_r(R, \Theta, \Phi; t)}{Dt} = \frac{\partial v_r(r, \theta, \phi; t)}{\partial t} + v_r \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \sin \theta \right)$$

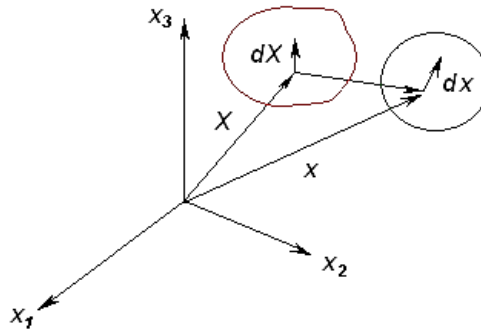
$$a_\theta = \frac{Dv_\theta(R, \Theta, \Phi; t)}{Dt} = \frac{\partial v_\theta(r, \theta, \phi; t)}{\partial t} + v_r \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cos \theta \right)$$

$$a_\phi = \frac{Dv_\phi(R, \Theta, \Phi; t)}{Dt} = \frac{\partial v_\phi(r, \theta, z; t)}{\partial t} + v_r \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \right)$$

2.5 CAMPO DE DESPLAZAMIENTO

El campo de desplazamiento de una partícula correspondiente a un MC está dado por un vector definido a partir de la posición de referencia, tal que

$$u = x(X, t) - X$$



De lo anterior queda claro que conocidas las líneas de trayectoria (ecuaciones de trayectoria) $x(X, t)$, entonces queda establecido el campo de desplazamientos $u(X, t)$. Es por consecuencia que el movimiento de un MC puede ser descrito a través de las ecuaciones de trayectoria o del campo de desplazamientos.

Ecuación de movimiento para un cuerpo rígido

Se puede describir como la suma de una traslación más una rotación, de tal forma que:

- i. Traslación de cuerpo rígido. Para este caso la ecuación de movimiento está dada por

$$x = X + c(t)$$

en consecuencia el vector de desplazamientos queda descrito como

$$u = c(t)$$

y entonces

$$\nabla u = 0$$

Esto significa que cada punto material perteneciente al continuo se desplaza de igual forma.

- ii. Rotación alrededor de un punto fijo. En este caso la ecuación de movimiento está descrita por

$$x - b = R(t)(X - b)$$

donde $R(t)$ representa una transformación ortogonal, para $R(t_0) = I$, y b es un vector constante. Para el punto material $X = b$ está siempre en la coordenada espacial $x = b$, y por lo tanto representa la coordenada fija alrededor de la cual se presenta la rotación del medio continuo. Si la rotación se define alrededor del origen, entonces $b = 0$ y $x = R(t)X$

- iii. Movimiento general de cuerpo rígido. La ecuación que describe este tipo de movimiento se expresa como

$$x = R(t)(X - b) + c(t)$$

donde R es el tensor de rotación, con $R(t_0) = I$ (no existe rotación alguna) y $c(t)$ es un vector para el cual $c(t_0) = b$. Esta ecuación establece que el movimiento es descrito por la traslación $c(t)$ de un elemento material arbitrario cualquiera $X = b$, más una rotación $R(t)$.

De lo anterior se concluye que la velocidad de un punto material del cuerpo rígido se expresará como

$$v = \dot{R}(X - b) + \dot{c}(t)$$

$$\Rightarrow (X - b) = R^T(x - c)$$

$$\Rightarrow v = \dot{R}R^T(x - c) + \dot{c}(t)$$

Pero $RR^T = I$ y $\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0$

$$\Rightarrow \dot{R}R^T = -R\dot{R}^T = -(\dot{R}R^T)^T$$

$\dot{R}R^T$ es un tensor antisimétrico el cual es equivalente al vector dual $\dot{\omega} \Rightarrow (\dot{R}R^T)a = \dot{\omega} \times a$ para cualquier vector a

$$\Rightarrow v = \dot{\omega} \times (x - c) + \dot{c}(t)$$

si se mide el vector de posición r de un punto material cualquiera para un tiempo t del punto base elegido $r = (x - c)$, entonces

$$v = \dot{\omega} \times r + \dot{c}(t)$$

2.6 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

Condiciones estacionarias (Estacionalidad)

En algunos casos las características asociadas al MC, tales como densidad, temperatura, velocidad, etc., no varían en su descripción espacial (euleriana); situación que no debe ser entendida como que las propiedades son constantes en el tiempo ya que la descripción material

$$\frac{D\varphi}{Dt} \neq 0, \text{ esto es } \varphi = \varphi(X, t)$$

Lo anterior supone que para un mismo punto en el espacio, la propiedad en cuestión no varía en el tiempo

$$\varphi = \varphi(x_i, t) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t}_{x_i \text{ fija}} = 0$$

Por ejemplo, para dos partículas distintas (a, b) cuya densidad se expresa como (ρ_a, ρ_b) se cumplirá que $(\rho_a = \rho_b)$ cuando se encuentren en la misma coordenada espacial x , esto para los tiempos t y t^* donde es por demás evidente que $t \neq t^*$. Razón por la que para un observador situado fuera del medio se tendrá que la propiedad, en este caso la densidad, será siempre la misma.

Trayectoria –Líneas de Trayectoria (Pathline)

La trayectoria es el lugar geométrico de las posiciones que ocupa una partícula a través del tiempo. Con base en el tiempo de referencia y las posiciones que las distintas partículas que integran el MC presentan en dicho tiempo, se generan las ecuaciones particulares de trayectoria de cada una de ellas.

Descritas las ecuaciones de movimiento $x = X + f(X_i, t)$ se tiene que por cada punto en el espacio podrá pasar una trayectoria descrita por las coordenadas materiales; es por consecuencia que las ecuaciones de movimiento definen una familia de curvas que representan las trayectorias de los diferentes elementos que constituyen el MC. Para obtener

la imagen de las líneas de trayectoria es necesario utilizar tiempos de exposición prolongados de flujos en los que se dispone de trazadores reflejantes. La ecuación de trayectoria de una partícula puede ser obtenida a partir del campo de velocidades, de tal forma que la partícula que en el tiempo de referencia t_0 se encontraba en X , para un tiempo t debe cumplirse lo siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t)$$

$$x(t_0) = X$$

Por ejemplo, sea el campo de velocidades

$$v(x, t) = \frac{x_1 t}{1 + \lambda t^2} \hat{e}_1 + \frac{x_2}{t} \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 t}{1 + \lambda t^2} \Rightarrow \int_{X_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \frac{1}{2\lambda} \int_{t_0}^t \frac{2\lambda t dt}{1 + \lambda t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Ln } x_1 - \text{Ln } X_1 = \frac{1}{2\lambda} \left[\text{Ln}(1 + \lambda t^2) - \text{Ln}(1 + \lambda t_0^2) \right]$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = X_1 \left(\frac{(1 + t^2)}{(1 + t_0^2)} \right)^{\frac{1}{2\lambda}}$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{t} \Rightarrow \int_{X_2}^{x_2} \frac{dx_2}{x_2} = \int_{t_0}^t \frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Ln } x_2 - \text{Ln } X_2 = \text{Ln } t - \text{Ln } t_0$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = X_2 \frac{t}{t_0}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = X_3$$

Líneas de corriente (Streamline)

Representan el trazo definido por las trayectorias de los diferentes elementos que constituyen el MC. Por definición, la tangente de una línea de corriente tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad en dicho punto del espacio. Experimentalmente las líneas de corriente en la superficie de un fluido son obtenidas a través de la inserción de partículas reflectivas y fotografiadas con un tiempo de exposición corto. Así, cada partícula generará una línea corta aproximadamente tangencial a la línea de corriente. Matemáticamente éstas pueden ser obtenidas a partir del campo de velocidades $v(x, t)$. Considere que $x = x(s)$ representa la ecuación paramétrica de una línea de corriente a un tiempo t , la cual pasa a través de un punto x_0 ; entonces cualquier s puede ser escogida tal que:

$$\frac{dx}{ds} = v(x, t)$$

$$x(0) = x_0$$

Por ejemplo, para el campo de velocidades dado por

$$v_1 = \frac{ax_1 t}{1+t^2} \quad v_2 = bx_2 \quad v_3 = 0$$

determine la línea de corriente que pasa por el punto (α, β, ϕ) para un tiempo t .

De lo antes expuesto se tiene que:

$$\frac{dx_1}{ds} = v_1 = \frac{ax_1 t}{1+t^2}; \quad \frac{dx_2}{ds} = v_2 = bx_2; \quad \frac{dx_3}{ds} = v_3 = 0$$

$$\int_{\alpha}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \int_0^s \frac{at}{1+t^2} ds; \quad \int_{\beta}^{x_2} \frac{dx_2}{x_2} = \int_0^s b ds; \quad \int_{\phi}^{x_3} dx_3 = 0$$

$$\ln x_1 - \ln \alpha = \frac{ats}{1+t^2}; \quad \ln x_2 - \ln \beta = bs; \quad x_3 = \phi$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \alpha \exp\left(\frac{ats}{1+t^2}\right)$$

$$\Rightarrow x_2 = \beta \exp(bs)$$

$$\Rightarrow x_3 = \phi$$

Líneas de traza (Streakline)

La línea de traza relativa a un punto fijo del espacio x' es el lugar geométrico de las posiciones que ocupan en un instante t todas las partículas que han pasado por x' entre t_0 y t .

Lo anterior correspondería con lo observado en un tiempo t en un flujo, si en éste se depositara un colorante en un punto definido como punto de vertido (a partir de un tiempo t_0), visualizándose así la traza (línea de color).

Sea $X = X(x, t)$ la función inversa a $x = x(X, t)$, entonces la partícula que se encontraba en x' a un tiempo τ tiene las coordenadas materiales dadas por $X = X(x', \tau)$; así, esta misma partícula se encontrará en $x = x(X(x', \tau), t)$, por tanto, la línea de traza a un tiempo t está dada por $x = x(X(x', \tau), t)$, para t fija y τ variable.

Sea el campo de velocidades

$$v(x, t) = \frac{x_1 t}{1 + ct^2} \hat{e}_1 + \frac{x_2}{t} \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3$$

determine la ecuación para la línea de traza que pasa por (α, β, ϕ) . Se ha demostrado que las ecuaciones de trayectoria para este campo de velocidades son:

$$x_1 = X_1 \sqrt{\frac{(1 + ct^2)}{(1 + ct_0^2)}}$$

$$x_2 = X_2 \frac{t}{t_0}$$

$$x_3 = X_3 \tag{2.2}$$

cuyas funciones inversas a su vez están dadas por:

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{x_1}{\sqrt{\frac{(1+ct^2)}{(1+ct_0^2)}}} \\X_2 &= x_2 \frac{t_0}{t} \\X_3 &= x_3\end{aligned}\tag{2.3}$$

Entonces, la partícula (α, β, ϕ) que pasa a un tiempo τ está dada por:

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{(1+c\tau^2)}{(1+ct_0^2)}}} \\X_2 &= \beta \frac{t_0}{\tau} \\X_3 &= \phi\end{aligned}\tag{2.4}$$

Sustituyendo 2.4 en 2.2 se obtiene la ecuación paramétrica

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha \sqrt{\frac{(1+ct^2)}{(1+c\tau^2)}} \\x_2 &= \beta \frac{t}{\tau} \\x_3 &= \phi\end{aligned}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. La posición de una partícula en un tiempo t , la cual inicialmente se encuentra en X es

$$x(t_0) = X$$

que está dada por

$$x_1 = X_1 - aX_2^2 t^2, \quad x_2 = X_2 - bX_3 t, \quad x_3 = X_3$$

$$a = -2 \left(\text{cm} \cdot \text{s}^2 \right)^{-1}$$

$$b = -3 \left(\text{s}^{-1} \right)$$

a) ¿Cuál será la velocidad para $t = 0.1$ min del elemento diferencial que originalmente se encontraba en (1, 3, 1)?

b) ¿Cuál será la velocidad para $t = 0.1$ min del elemento diferencial que para ese tiempo se encuentra en la coordenada (1, 3, 1)?

c) Si la temperatura está dada por

$$\theta = \theta_0 + c(x_1 + x_2)t$$

¿Cuál será el valor de ésta para el elemento diferencial anteriormente descrito a un tiempo $t_0 = 0$ y a un $t = 0.1$ min?

$$c = 1 \left(\frac{^\circ\text{C}}{\text{cm} \times \text{s}} \right)$$

$$\theta_0 = 30 \text{ } ^\circ\text{C}$$

d) ¿Cuál será la rapidez de variación de temperatura para (X, t) ?

SOLUCIÓN

a) Velocidad para $t = 0.1$ min del elemento diferencial que originalmente se encontraba en (1, 3, 1)

$$x_1 = X_1 - aX_2^2 t^2 \qquad v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$x_2 = X_2 - bX_3 t \quad v_1 = -2aX_2^2 t, \quad v_2 = -bX_3$$

$$x_3 = X_3 \quad v_3 = 0$$

$$t = 0.1 \text{ min} = 6 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \quad v_i = -2aX_2^2 t \hat{e}_1 - bX_3 \hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

$$v_1 = (-2)(-2)(3^2)(6) = 216 \text{ cm/s}$$

$$v_2 = 3 \text{ cm/s}$$

$$v_3 = 0 \text{ cm/s} \quad v_i = 216\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

- b) Velocidad para $t = 0.1 \text{ min}$ (6 s) del elemento diferencial que para ese tiempo se encuentra en la coordenada (1, 3, 1).

Para $t = 6 \text{ s}$

$$1 = X_1 - aX_2^2 6^2 \quad X_2 = 3 + bX_3 6 = -15, \quad X_3 = 1$$

$$3 = X_2 - bX_3 6 \quad X_1 = 1 + aX_2^2 36 = 1 + (-2)(-15)^2 (36) = -16199$$

$$1 = X_3$$

$$x(t_0) = (-16199, -15, 1) \text{ cm}$$

$$v(X_i, t) = 5400\hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

- c) Temperatura en (1, 3, 1) para un tiempo $t_0 = 0$ y a un $t = 0.1 \text{ min}$. Resulta por demás evidente que para un tiempo $t_0 = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0$; esto es, que la temperatura del cuerpo sea la de referencia.

$$\theta = \theta_0 + c(x_1 + x_2)t$$

para $t_0 = 0$ s

$$\theta_0 = 30^\circ\text{C}$$

para $t = 6$ s

$$\theta = 30 + c(1+3)6$$

$$\theta = 54^\circ\text{C}$$

d) Rapidez de variación de temperatura para cualquier posición y tiempo.

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + (\nabla\theta)v = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_1}v_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}v_2 + \frac{\partial\theta}{\partial x_3}v_3$$

Sustituyendo

$$x_1 = X_1 - aX_2^2t^2, \quad x_2 = X_2 - bX_3t^2 \quad \text{en } \theta$$

$$\theta = \theta_0 + c(X_1 - aX_2^2t^2 + X_2 - bX_3t^2)t$$

$$\theta = \theta_0 + c(X_1 + X_2 - (aX_2^2t^2 + bX_3t^2))t = \theta_0 + c(x_1t + X_2t) - (aX_2^2t^3 + bX_3t^2)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t}(X_i, t) = c(X_1 + X_2 - 3ax_2^2t^2 - 2bx_3t)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un medio continuo presenta un movimiento definido por:

$$x_1 = X_1 + \alpha X_2 t^2$$

$$x_2 = X_2 + \alpha X_1 t^2$$

$$x_3 = X_3 + \alpha X_3 t^2$$

donde las x_i representan coordenadas eulerianas y X_j , lagrangianas.

- a) Determine los componentes de la velocidad para $t=2$ de una partícula que se encontraba en (1, 2, 4) cuando $t=1$.
- b) Determine la ecuación de trayectoria de la partícula antes definida.
- c) Determine la aceleración para $t=4$.
- d) ¿Cuál es el tiempo de referencia?

2. La posición en un tiempo t de un medio continuo está dada por

$$x_1 = X_1(1 + \beta t)^2, \quad x_2 = X_2(1 + \kappa t^2), \quad x_3 = X_3(1 + \beta t)$$

Para el medio continuo antes definido, determine la velocidad y aceleración en coordenadas lagrangianas y eulerianas.

3. El movimiento de un medio continuo está dado por

$$x_1 = X_1 e^{\eta t} + X_3 (e^{\eta t} - 1)$$

$$x_2 = X_2 + X_3 (e^{\eta t} - e^{-\eta t})$$

$$x_3 = X_3$$

- a) ¿Cuál es el tiempo de referencia?
- b) ¿Existen las funciones inversas?
- c) Determine la velocidad de $x(X, t_0) = (1, 2, 5)$ para $t=2$.

4. ¿Qué representa una descripción lagrangiana y a qué hace mención una euleriana?
5. Explique el concepto de derivada material. Además, si ρ es una función escalar, determine su derivada material considerando coordenadas cilíndricas, rectangulares y esféricas.
6. Si la aceleración se define como la derivada material de la velocidad $\left(\frac{Dv}{Dt}\right)$ que se expresa en notación índice como

$$\frac{Dv_i}{Dt} = a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

y en notación general

$$\frac{Dv}{Dt} = a = \frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v)v$$

Desarrolle las ecuaciones que representan la aceleración tanto en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

7. Si la velocidad en un continuo se describe en forma euleriana $v_r = v(r, \theta)$; $v_\theta = 0$; $v_z = 0$ determine la ecuación que representa las diferentes componentes de la aceleración.
8. Un medio continuo presenta el siguiente campo de desplazamientos:

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(X_2 + X_3)e^{\eta t} + \frac{1}{2}(X_2 - X_3)e^{-\eta t} - X_2$$

$$u_3 = \frac{1}{2}(X_2 + X_3)e^{\eta t} - \frac{1}{2}(X_2 - X_3)e^{-\eta t} - X_3$$

- a) Indique la ecuación de trayectoria.
- b) ¿En qué plano(s) se define el movimiento del medio?
- c) ¿Existirán funciones inversas de la forma $X_i = X(x, t)$?
- d) En el caso de existir las funciones inversas, determínelas.
- e) Determine la velocidad y aceleración tanto en referencia euleriana como lagrangiana.

9. La velocidad de un medio continuo está descrita por

$$v_i = \frac{x_1}{(1+t)} \hat{e}_1 + \frac{2x_2}{(1+t)} \hat{e}_2 + \frac{2x_3}{(1+t)} \hat{e}_3$$

Con base en lo anterior, determine:

- a) La ecuación de trayectoria.
- b) Aceleración en descripción euleriana y lagrangiana.

10. El movimiento de un medio continuo se describe como:

$$x_1 = kX_2^2 t + X_1$$

$$x_2 = aX_2 t + X_2$$

$$x_3 = X_3$$

- a) Para $t=0$ las esquinas de un cubo están en las coordenadas $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$, $D(1, 0, 0)$, indique las posiciones que ocuparán en $t=2$.
- b) Determine la descripción espacial de la velocidad y aceleración.
- c) Si la temperatura está por $\theta = Ax_1 + Bx_2$ determine la variación de la temperatura en el tiempo.

11. La velocidad de un medio continuo esta descrita por:

$$v_i = \frac{X_1}{(1+\eta t)} \hat{e}_1 + \frac{2X_2}{(1+\eta t)} \hat{e}_2 + \frac{2X_3}{(1+\eta t)} \hat{e}_3$$

Con base en lo anterior, determine la ecuación de trayectoria.

12. Considere la relación

$$x_1 = kX_2^2 (t^2 - a^2) + X_1$$

$$x_2 = \left(\frac{1+t}{1+a} \right) X_2$$

$$x_3 = X_3 (t-a)$$

- a) ¿Cuál es el valor del tiempo de referencia?
- b) Determine la velocidad en coordenadas materiales y espaciales.
- c) Si $a=2$ el tiempo de referencia es $t=2$, y $x(X, t_0) = (1, 1, 1)$, determine la posición de la partícula para $t=4$.
- d) Determine la velocidad de la partícula que en $t=4$ se encuentra en $(1, 2, 2)$.
- e) Si el campo de temperaturas $\theta = (x, t)$ se expresa en un sistema euleriano como:

$$\theta = c(x_2 + x_3)$$

determine la descripción material de la temperatura.

- f) Determine la rapidez de cambio de la temperatura para cualquier tiempo y posición, así como para $x(x, 4) = (1, 2, 2)$.

CAPÍTULO 3

DEFORMACIÓN

3.1 CONCEPTOS GENERALES

La deformación en cualquier medio continuo se puede describir como recuperable, condición que se define como elástica o, en su defecto, puede ser permanente o plástica. El rango elástico de la deformación se presenta previo a la existencia de las deformaciones no recuperables. En muchos de los casos, como por ejemplo metales y cerámicos, las deformaciones elásticas son muy pequeñas, razón por la cual se describen como infinitesimales; sin embargo, existen algunos materiales como los elastómeros (hules) que se caracterizan por presentar grandes deformaciones elásticas, las cuales se describen como finitas. Las deformaciones plásticas presentan, normalmente, mayores magnitudes que las encontradas en el rango elástico; no obstante, existen casos (materiales frágiles) en los que el rango plástico de la deformación puede ser despreciable o de magnitud comparable al elástico, por ejemplo en cerámicos y metales muy endurecidos. Por su parte, los metales suaves y muchos de los polímeros se caracterizan por alcanzar grandes deformaciones no recuperables antes de la fractura. Resulta evidente que la descripción de la deformación dependerá de las magnitudes que ésta alcance, ya que las condiciones de desplazamiento infinitesimal permitirán la simplificación de las expresiones, sin embargo, para el caso de deformaciones finitas, se incurrirá en graves errores si se tratan así.

Ahora bien, para describir la deformación de cualquier medio continuo se debe partir del análisis de su movimiento sin atender, por el momento, a las causas que lo producen.

Cinemática del continuo

En el capítulo 2 se ha explicado la forma en que el movimiento del medio continuo puede ser descrito. En principio es conveniente recordar que en los cursos básicos de mecánica, para definir el movimiento de los cuerpos, se declaran a estos como rígidos y por lo tanto

cualquier descripción de su desplazamiento se descompone, a lo más como la suma de traslación y rotación. Ahora bien, al considerar un cuerpo como deformable se deberán efectuar las observaciones que permitan la descripción de la deformación de cada uno de los elementos diferenciales en que se puede descomponer el MC. Como ya se mencionó en el capítulo anterior, dada la definición de MC, la descripción de sus movimientos se deberá realizar a partir de identificar cualquier elemento diferencial del cuerpo por la posición que ocupa para un tiempo de referencia t_0 ; esto es:

$$p(t_0) = (X_1, X_2, X_3)$$

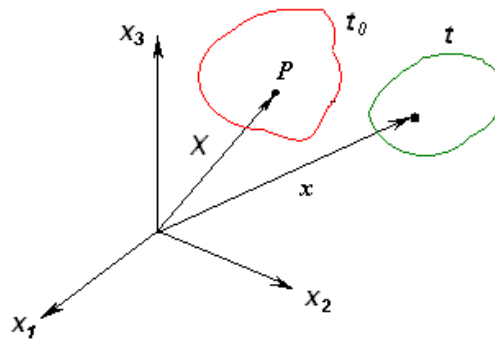


FIGURA 3.1 DESCRIPCIÓN DE LA POSICIÓN PARA UN TIEMPO CUALQUIERA DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL p DEL MEDIO CONTINUO

Con base en lo antes expuesto será factible describir el campo de desplazamiento $u(X, t)$ de cada una de las partículas correspondientes al MC. Para esto es necesario definir las ecuaciones de trayectoria $x(X, t)$, a partir de las cuales se tiene

$$u(X, t) = x(X, t) - X$$

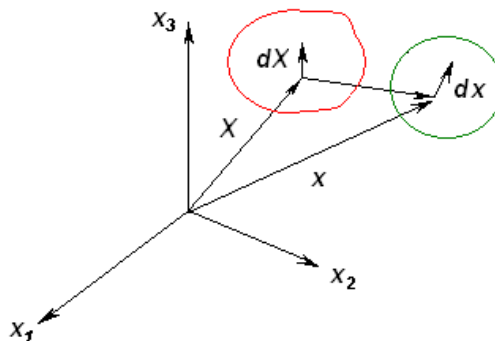


FIGURA 3.2 DEFINICIÓN DEL VECTOR DESPLAZAMIENTO u PARA UN TIEMPO CUALESQUIERA

Es por tanto que conocidas las líneas de trayectoria (ecuaciones de trayectoria) $x(X, t)$, entonces queda establecido el campo de desplazamientos $u(X, t)$, de tal forma que

$$x(X, t) = X + u(X, t)$$

3.2 DEFORMACIÓN INFINITESIMAL

En una gran variedad de aplicaciones de la mecánica de los sólidos se considera que el efecto de las solicitaciones a las que se somete el MC se traducen en pequeños desplazamientos de las partículas que forman el medio continuo, los cuales se definen como infinitesimales. Para lo anterior considere la figura 3.3, en ésta se presenta un MC a un tiempo de referencia t_0 . En este medio continuo se considerarán dos partículas, las cuales se encuentran originalmente a una distancia dX , donde dicha distancia se modifica a dx como consecuencia de la deformación del objeto. De la figura mencionada se constata que

$$dx = dX + u(X + dX, t) - u(X, t)$$

Esta ecuación, a partir de la definición de gradiente se expresa como

$$dx = dX + \nabla u dX$$

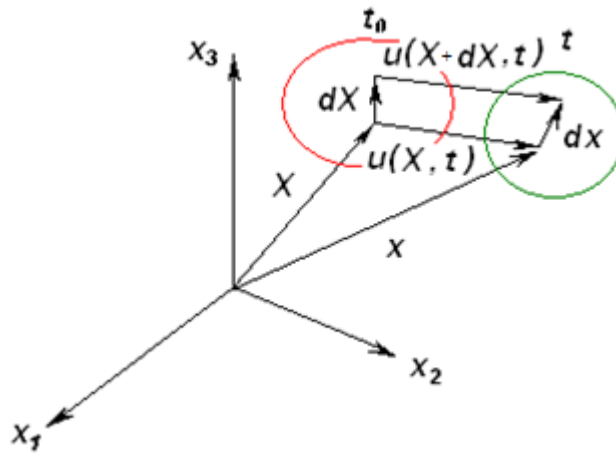


FIGURA 3.3 DESCRIPCIÓN DEL DESPLAZAMIENTO ENTRE DOS ELEMENTOS DIFERENCIALES VECINOS

donde ∇u es un tensor de segundo orden al cual se le denomina como gradiente de desplazamiento, que en coordenadas cartesianas se expresa como

$$\nabla_X u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Mientras que para una función vectorial $u = u(r, \theta, z)$, su gradiente está definido por

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

y para $u = u(r, \theta, \phi)$, su gradiente queda

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - u_\phi \sin \theta \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_r \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - u_\phi \cos \theta \right) \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \end{bmatrix}$$

Cualquiera que sea la base ∇u , al tratarse éste de un tensor de segundo rango se puede descomponer en su parte simétrica y su componente antisimétrica, de tal forma que

$$\nabla u = \frac{1}{2} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) + \frac{1}{2} \left(\nabla u - (\nabla u)^T \right)$$

En el caso del análisis de la deformación infinitesimal ambos términos tienen un significado físico. La parte simétrica se denomina deformación infinitesimal y se expresa como ε o E , que a su vez se representa en un espacio hexadimensional; por su parte, la componente antisimétrica tiene tres grados de libertad, por esta razón se puede presentar como un tensor de segundo grado o en forma vectorial por ζ_i , el cual se puede comprobar que es proporcional a

$$\nabla \times u = 2\zeta$$

Es entonces que el tensor ε caracteriza los cambios de longitud en el continuo para pequeñas deformaciones y también su distorsión angular. Para ejemplificar el significado de lo antes expuesto considere un pequeño elemento el cual es deformado de manera uniaxial (figura 3.4). En ésta se definen dos partículas adyacentes (p, q) , las cuales a un tiempo de referencia t_0 se encuentran a una distancia dX , al aplicar una carga colineal f_x las partículas (p, q) variarán su distancia a dx .

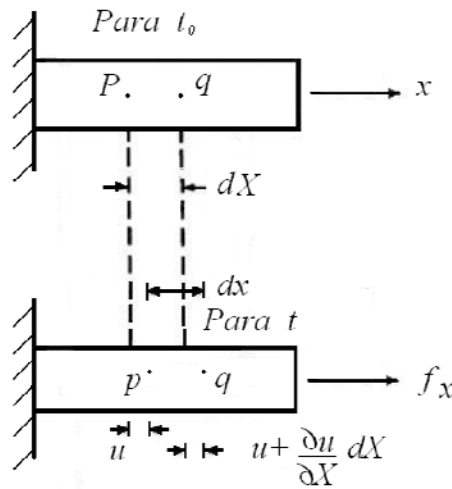


FIGURA 3.4 BARRA DE LONGITUD l SE ENCUENTRA ORIENTADA COLINEAL CON EL EJE x

Resulta entonces que

$$dx = dX + \left(u + \frac{\partial u}{\partial X} dX - u \right)$$

$$\therefore \quad dx = dX + \frac{\partial u}{\partial X} dX$$

por consecuencia, el incremento unitario de distancia entre las partículas p y q está dado por

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{dx - dX}{dX} = \frac{\partial u(X, t)}{\partial X}$$

Generalizando, se tiene que la deformación normal unitaria en cualquier dirección tendrá la forma

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3}$$

donde

$$u_i = u_1(X_i, t)\hat{e}_1 + u_2(X_i, t)\hat{e}_2 + u_3(X_i, t)\hat{e}_3$$

Representa, como ya ha sido mencionado, al campo de desplazamientos asociado al medio continuo.

Para el caso de deformación a corte, considérese de igual forma un elemento diferencial, el cual se presenta en el plano x_1x_2 ; donde para un tiempo t_0 no presenta deformación, sin embargo, a un tiempo t es sometido a un estado de corte puro (fuerzas tangenciales al plano, en equilibrio estático), de tal forma que se distorsiona de acuerdo con la figura 3.4.

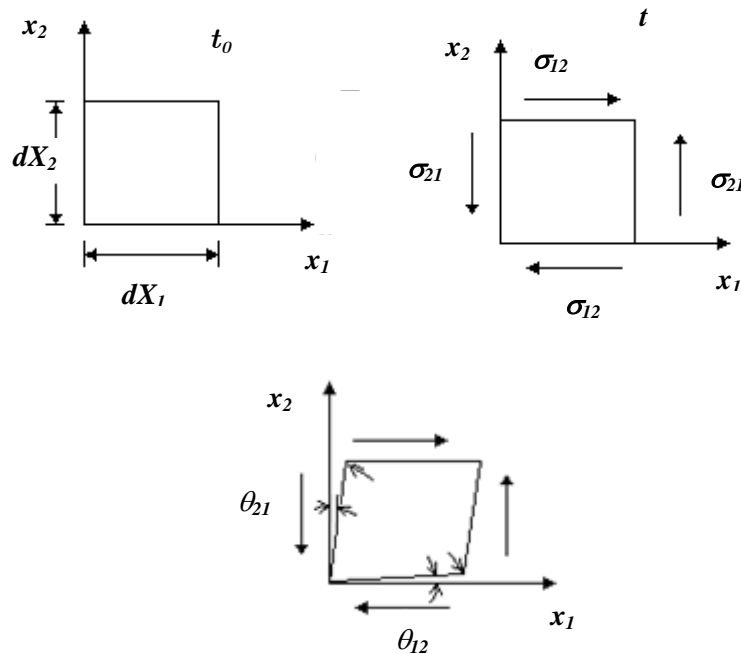


FIGURA 3.4 DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL POR CORTE PURO

La deformación en el elemento diferencial, considerando desplazamientos pequeños, se puede describir a través de la distorsión angular del elemento diferencial (γ_{12}), de tal forma que en el plano x_1x_2 se tiene:

donde

$$\theta_{12} = \tan^{-1} \frac{\partial u_2}{\partial X_1}$$

$$\theta_{21} = \tan^{-1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2}$$

Al ser los ángulos de distorsión muy pequeños, se puede considerar que

$$\theta \approx \tan \theta$$

$$\therefore \gamma_{12} \approx \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}$$

por lo que, generalizando, la distorsión angular se expresará como

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \quad \forall i \neq j$$

Se comprueba entonces que el tensor ε o E representa la deformación normal y angular, esto bajo la consideración de desplazamientos muy pequeños (infinitesimales), y está dada por la componente simétrica de ∇u . Al ser todas las componentes de ∇u parte de los reales se tiene entonces que el tensor ε (componente simétrica ∇u) tendrá asociados tres valores característicos (deformaciones principales: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$), las que a su vez tiene asociados tres direcciones (ejes principales), que al ser mutuamente perpendiculares forman una base.

Se tiene entonces que el tensor de deformación, considerando desplazamientos infinitesimales, en notación índice se puede describir como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

Por lo que en coordenadas cartesianas, queda:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Y en coordenadas cilíndricas y esféricas

$$\varepsilon_{(r, \theta, z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{(r, \theta, \phi)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi \cot \theta}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right) \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi \cot \theta}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right) \right) & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right) \end{bmatrix}$$

Para la determinación de los valores principales asociados al tensor de deformación es necesario resolver la siguiente ecuación cúbica característica

$$\varepsilon^3 - I_{1\varepsilon} \varepsilon^2 + I_{2\varepsilon} \varepsilon - I_{3\varepsilon} = 0$$

donde los invariantes del sistema están dados por

$$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$I_{2\varepsilon} = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)$$

$$I_{3\varepsilon} = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31} - (\varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{22}\varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{33}\varepsilon_{12}^2)$$

Con lo que se tendrá una representación del estado de deformaciones de la forma

$$\varepsilon_p = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Dilatación unitaria

Este concepto también es comúnmente descrito como cambio unitario de volumen, se representa a través de

$$\delta = \frac{\Delta(dV)}{dV} = \frac{V_f - V_0}{V_0}$$

la cual se puede expresar a partir de considerar un elemento diferencial que al tiempo de referencia t_0 presenta un volumen $dV_0 = dX_1 dX_2 dX_3$, mientras que para un tiempo t se ha deformado (dilatado) de tal manera que existe deformación normal en todas direcciones, entonces, el volumen estará dado por

$$dV_f = \left(dX_1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} dX_1 \right) \left(dX_2 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} dX_2 \right) \left(dX_3 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} dX_3 \right)$$

Por consecuencia,

$$\delta = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3}$$

Considerando que las deformaciones son infinitesimales, entonces es posible despreciar el efecto de los productos de las parciales, por lo que la expresión anterior se puede simplificar a

$$\delta = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} = I_{1\varepsilon}$$

Lo que significa que el primer invariante del tensor de deformación infinitesimal (traza del tensor) representa el cambio unitario de volumen asociado a la deformación (dilatación).

Tensor infinitesimal de rotación

Retomando la expresión $dx = dX + \nabla_X u(X, t) dX$ se tiene que ésta se puede presentar como $dx = dX + (\varepsilon + \Omega) dX$, donde Ω representa la parte antisimétrica de ∇u , a la cual se denomina como tensor de rotación infinitesimal. Se puede constatar que el cambio de dirección de dX puede provenir de dos fuentes; el tensor de deformación infinitesimal y el tensor de rotación infinitesimal. Sin embargo, para cualquier dX que se encuentra en la dirección de un eigenvector de ε , no habrá cambio en la dirección debida a ε y sólo será por efecto de Ω . Por lo tanto, el tensor Ω representa la rotación infinitesimal de la tríada de eigenvectores de ε , esto puede ser descrito a través de un vector g , de tal forma que se cumple

$$g \times dX = \Omega dX$$

donde

$$g = \Omega_{32} \hat{e}_1 + \Omega_{13} \hat{e}_2 + \Omega_{21} \hat{e}_3$$

Es entonces que

$$\Omega_{32}, \Omega_{13}, \Omega_{21}$$

son los ángulos de rotación con respecto a los ejes $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ de la tríada de direcciones principales de ε .

3.3 TENSOR DE RAPIDEZ DE DEFORMACIÓN (D)

Considérese un elemento material dX el cual emana a partir de un punto material X (figura 3.5). El término

$$\left(\frac{D}{Dt} \right) dx$$

representa la velocidad de cambio de longitud y dirección del elemento dx , a partir $x = x(X, t)$.

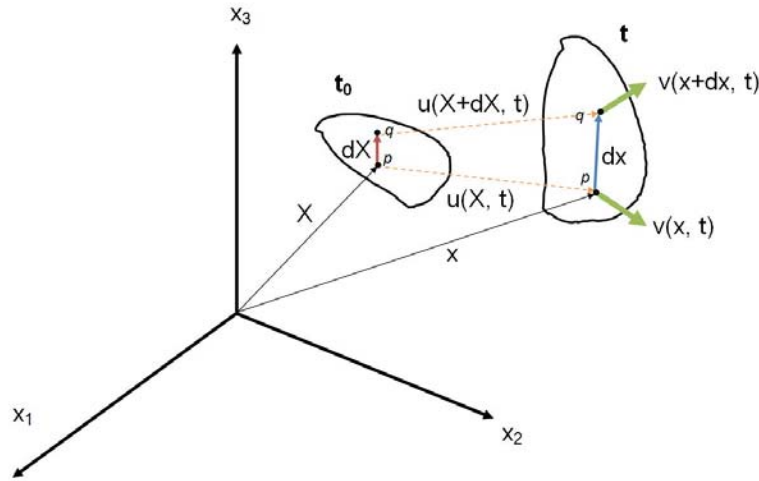


FIGURA 3.5 CONCEPTO DE RAPIDEZ DE DEFORMACIÓN

Se tiene que

$$dx = x(X + dX, t) - x(X, t)$$

tomando la derivada en el tiempo queda entonces

$$\left(\frac{D}{Dt} \right) dx = \left(\frac{D}{Dt} \right) x(X + dX, t) - \left(\frac{D}{Dt} \right) x(X, t)$$

Dado que

$$\left(\frac{D}{Dt} \right) x(X, t) = v(X, t) = v(x, t)$$

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)dx = v(X + dX, t) - v(X, t) = v(x + dx, t) - v(x, t)$$

Entonces, de la definición de gradiente, se tendrá que

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)dx = (\nabla_X v) dX = (\nabla_x v) dx$$

Esto representa que el gradiente del campo de velocidades, descrito con una referencia lagrangiana $\nabla_X v$ es igual al gradiente bajo una referencia euleriana $\nabla_x v$, por lo que en general este término se refiere simplemente como ∇v , sin enfatizar sobre la base de referencia, es decir

$$\nabla_X v = \nabla_x v = \nabla v$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)dx = (\nabla v) dx$$

La expresión

$$\left(\frac{1}{dx}\right)\left(\frac{D}{Dt}\right)dx = \nabla v$$

representa entonces la razón de cambio en el tiempo de una longitud unitaria.

Considerando una base rectangular (cartesiana) el gradiente del campo de velocidades está dado por

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Al tratarse de un tensor de segundo grado, éste se puede descomponer en su parte simétrica y su componente antisimétrica, por analogía se tiene que

$$\nabla v = D + \dot{\omega}$$

donde D describe la componente simétrica, por lo que la rapidez de cambio unitario de volumen se expresa a través de

$$\frac{1}{dV} \left(\frac{dV}{dt} \right) dV = \text{div } v = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = D_{11} + D_{22} + D_{33}$$

Se tiene entonces que:

$$D = \frac{1}{2} \left(\nabla v + (\nabla v)^T \right) \quad \dot{\omega} = \frac{1}{2} \left(\nabla v - (\nabla v)^T \right)$$

El tensor D o $\dot{\varepsilon}$ representa entonces la rapidez de deformación, mientras que $\dot{\omega}$ representa la rapidez de rotación, en coordenadas cartesianas (notación índice), la relación se expresa según

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Por lo que el tensor de rapidez de deformación en coordenadas cartesianas se expresa como

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Por su parte, el tensor de rapidez de deformación infinitesimal en coordenadas cilíndricas se expresan como

$$\dot{\varepsilon}_{(r, \theta, z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

y en coordenadas esféricas

$$\dot{\varepsilon}_{(r, \theta, \phi)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi \cot \theta}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi \cot \theta}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) \right) & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \end{bmatrix}$$

Como ya ha sido mencionado, el tensor antisimétrico $\dot{\omega}_{ij}$ es equivalente a un vector de rapidez de rotación. El vector $\dot{\eta}_i$ es denominado como vector dual o vector axial asociado al tensor $\dot{\omega}$ y se relaciona con las tres componentes diferentes de cero del tensor, de tal manera que

$$\dot{\eta} = -2(\dot{\omega}_{23}\hat{e}_1 + \dot{\omega}_{31}\hat{e}_2 + \dot{\omega}_{12}\hat{e}_3)$$

Se utilizan los mismos conceptos empleados con el tensor de deformación ε para determinar los valores principales asociados a $\dot{\varepsilon}$.

Rapidez de cambio unitario de volumen ($\dot{\delta}$)

Por analogía con el concepto de cambio unitario de volumen $\dot{\delta}$

$$\dot{\delta} = \frac{1}{dV} \Delta(dV) = \frac{V_f - V_0}{V_0}$$

es posible definir la velocidad de cambio unitario de volumen $\dot{\delta}$

$$\dot{\delta} = \frac{1}{dV} \left(\frac{D(dV)}{Dt} \right)$$

Dado que la velocidad está dada por la rapidez de cambio de posición y considerando que ésta se puede representar como

$$\dot{\delta} = \frac{D\delta}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{\delta} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Expresión que se puede simplificar partiendo de la consideración de que se trata de deformaciones infinitesimales, por lo que el producto de parciales se puede despreciar, por lo tanto,

$$\dot{\delta} \cong \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} = I_1 \dot{\epsilon}$$

resulta entonces que la traza del tensor de rapidez de deformación D representa la velocidad con la cual se modifica el volumen, esto por unidad de volumen.

3.4 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

En el caso de que se defina el campo de desplazamientos u o el de velocidad v , el tensor de deformación infinitesimal o de rapidez de deformación infinitesimal existirá siempre y cuando la función de desplazamiento u o en su defecto la de velocidad v sea continua y continuamente derivable en el intervalo en que se haya definido el tensor de deformación infinitesimal o de rapidez de deformación infinitesimal. En el caso de que se proponga el

tensor de deformación ε o de rapidez de deformación D , no necesariamente existirá un campo de desplazamientos u o de velocidad v para el intervalo en consideración. Para garantizar la existencia de los campos de desplazamiento o de velocidad será necesario que las funciones de deformación o de velocidad de deformación cumplan con la existencia de las ecuaciones de compatibilidad o integrabilidad. Las cuales se expresan, para el caso de deformaciones infinitesimales, como:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial X_2 \partial X_1}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial X_3 \partial X_2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial X_1 \partial X_3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3 \partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial X_2} \right)$$

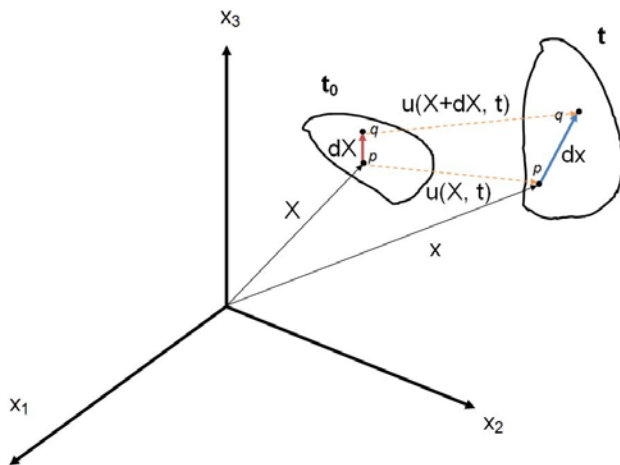
Para la rapidez de deformación se deberá cumplir con las siguientes 6 ecuaciones para garantizar la existencia del campo de velocidades v

$$\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial x_2 \partial x_1}$$

$$\frac{\partial^2 D_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 D_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 D_{23}}{\partial x_3 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 D_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 D_{31}}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 D_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial D_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial D_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{31}}{\partial x_2} \right)$$



Considérese un medio continuo que para el tiempo de referencia está descrito por $X = x(t_0)$, , mientras que para cualquier tiempo queda $x = x(X, t)$, donde x representa la posición espacial a un tiempo t de la partícula material descrita a través de la coordenada material X (figura 3.6). Una partícula material, la cual se encuentra a una distancia dX para el tiempo de referencia t_0 , es transformada a través del movimiento, de tal forma que a un tiempo t se encuentra a una distancia dx . La relación estará dada entonces por

$$dx = x(X + dX, t) - x(X, t) = (\nabla x) dX$$

Al gradiente de las funciones de trayectoria se le conoce como gradiente de deformación en X , de tal forma que $\nabla_X x = F$, por lo tanto, en coordenadas rectangulares se tiene que:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

$$\nabla_X x = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Dos puntos adyacentes en el medio continuo pasan de estar a una distancia dX para el tiempo de referencia t_0 a una distancia dx para un tiempo $t > t_0$, como la posición a cualquier tiempo t se puede expresar como

$$x = X + u(X, t)$$

Por lo que

$$dx = dX + \nabla u(X, t) dX$$

Entonces, el gradiente de deformación (F) se expresa como

$$dx = (I + \nabla u) dX$$

$$\Rightarrow F = \nabla_X x = \nabla_X X + \nabla u = I + \nabla u$$

$$\therefore F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

donde

$$\nabla u = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Si F es simétrico $\Rightarrow F = U$, situación que representa un estado de estirado o de tracción pura, por otra parte, si U es constante esto implica que todo el cuerpo se encuentra en tracción pura. Entonces, para F simétrico $dx = U dX$. Por otra parte, al no existir rotación las direcciones principales del cuerpo no deformado y del cuerpo deformado son las mismas, pudiendo existir un cambio dimensional, el cual estará descrito por los eigenvalores y la deformación o dilatación s estará dada por

$$s = \frac{|dx|}{|dX|}$$

Por último, es conveniente mencionar que los eigenvalores de U representan las deformaciones principales.

Si F es ortogonal representará una transformación con la cual se mantienen los ángulos y magnitudes relativas, por lo que solo existirá rotación. Además, en este caso $FF^T = I \Rightarrow F = R$. De lo antes expuesto se puede concluir que cualquier tensor F para el cual $|F| \neq 0$, se podrá descomponer en el producto de un tensor ortogonal y de un tensor simétrico; a esto se le denomina *teorema de la descomposición polar*, de tal forma que:

$$F = RU$$

$$F = VR$$

donde U, V son tensores simétricos y R es un tensor ortogonal. En cualquier condición, la descomposición será única, por lo que sólo existirá un tensor R, V, U para cada caso. Al tensor U se le denomina como tensor de dilatación por derecha y al tensor V se le describe como tensor de dilatación por izquierda. Es por tanto que

$$dx = FdX = RUdX$$

$$F = RU = VR$$

Considerando las operaciones con matrices se tiene:

$$RU = VR$$

$$\Rightarrow R^T RU = R^T VR$$

$$\therefore U = R^T VR$$

$$RUR^T = VRR^T$$

$$\Rightarrow V = RUR^T$$

$$F = RU = VR$$

$$\Rightarrow F^T F = (RU)^T RU = U^T R^T RU$$

$$\therefore F^T F = U^T U$$

$$FF^T = VR(VR)^T = VRR^T V^T$$

$$\therefore FF^T = VV^T$$

Considerando a U como tensor diagonal (valores principales):

$$\begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 \end{pmatrix} = U \equiv U^T$$

donde u_1, u_2, u_3 representan los valores principales asociados al tensor U , por lo tanto,

$$U^T U = U U^T = \begin{pmatrix} u_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & u_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^2 \end{pmatrix} = U^2$$

dado que

$$\begin{aligned} F^T F &= U^T U \\ \Rightarrow U^2 &= F^T F \end{aligned}$$

Como consecuencia, se puede expresar que

$$U = (F^T F)^{1/2}$$

Asimismo, se tiene que

$$\begin{aligned} F &= RU \quad \Rightarrow \quad F U^{-1} = R U U^{-1} \quad \Rightarrow \quad F U^{-1} = R I \\ \therefore R &= F U^{-1} \end{aligned}$$

Por consecuencia

$$\begin{aligned} F &= VR \quad \Rightarrow \quad V^{-1} F = V^{-1} V R \Rightarrow \quad V^{-1} F = I R \\ \therefore V^{-1} F &= R \end{aligned}$$

Tensor de deformación de Cauchy – Green por derecha (C)

Considere la existencia de un tensor C tal que $C = U^2$, dicho tensor se conoce como tensor de deformación de Cauchy-Green por derecha o simplemente tensor de deformación de Green. Resulta evidente que si no existe deformación, entonces $C = U = I$

$$C = F^T F$$

Las componentes del tensor C tienen un significado geométrico muy simple, considerando dos elementos diferenciales (1) y (2) , tal que $dx^{(1)} = FdX^{(1)}$ y $dx^{(2)} = FdX^{(2)}$. Lo anterior para los elementos materiales $dX^{(1)}$ y $dX^{(2)}$

$$\begin{aligned}\therefore \quad dx^{(1)}dx^{(2)} &= FdX^{(1)}FdX^{(2)} = dX^{(1)}F^T FdX^{(2)} = dX^{(1)}U^2dX^{(2)} \\ \Rightarrow \quad dx^{(1)}dx^{(2)} &= dX^{(1)}CdX^{(2)}\end{aligned}$$

Por tanto, si $dx = nds_1$ representa al vector deformado del elemento material $dX = dS_1\hat{e}_1$, entonces para elementos materiales iguales,

$$dX^{(1)} = dX^{(2)} = dX = dS\hat{e}_1$$

se tiene que

$$dx^{(1)} \cdot dx^{(2)} = (ds)^2 = (dS)^2 \hat{e}_1 \cdot C\hat{e}_1$$

Despejando se tiene:

$$c_{11} = \left(\frac{ds_1}{dS_1} \right)^2 \quad \text{para el elemento } dX = dS\hat{e}_1$$

$$c_{22} = \left(\frac{ds_2}{dS_2} \right)^2 \quad \text{para el elemento } dX = dS\hat{e}_2$$

$$c_{33} = \left(\frac{ds_3}{dS_3} \right)^2 \quad \text{para el elemento } dX = dS\hat{e}_3$$

Considere ahora dos elementos materiales $dX^{(1)} = dS_1\hat{e}_1$, $dX^{(2)} = dS_2\hat{e}_2$, los cuales se deforman en $dx^{(1)} = ds_1m$, $dx^{(2)} = ds_2n$, donde los vectores unitarios m, n describen un ángulo β entre ellos, se tiene entonces $ds_1ds_2 \cos \beta = dS_1dS_2\hat{e}_1 \cdot C\hat{e}_2$, de tal forma que

$$c_{12} = \frac{ds_1ds_2}{dS_1dS_2} \cos \left[dx^{(1)}, dx^{(2)} \right]$$

En consecuencia, se puede definir a

$$c_{23} = \frac{ds_2 ds_3}{dS_2 dS_3} \cos \left[dx^{(2)}, dx^{(3)} \right]$$

$$c_{31} = \frac{ds_3 ds_1}{dS_3 dS_1} \cos \left[dx^{(3)}, dx^{(1)} \right]$$

3.6 TENSOR LAGRANGIANO DE DEFORMACIONES FINITAS (TENSOR LAGRANGIANO DE DEFORMACIÓN)

Este tensor permite describir el campo de deformaciones finitas (mayores al 1% de deformación) para una referencia material, se define como

$$E = \frac{1}{2} [C - I]$$

donde C es el tensor de deformación de Cauchy-Green por derecha e I representa al tensor identidad. En el caso de no existir deformación, $C = I$ y por lo tanto $E = 0$.

Dado que el gradiente de deformación F está definido a su vez por

$$F = I + \nabla_X u$$

$$F^T = (I + \nabla_X u)^T = I + (\nabla_X u)^T$$

Donde F^T describe la transpuesta del gradiente de deformación.

Desarrollando los términos se tendrá entonces:

$$C = F^T F = (I + \nabla_X u^T)(I + \nabla_X u) = I + \nabla_X u + \nabla_X u^T + \nabla_X u^T \nabla_X u$$

$$E = \frac{1}{2} \left[(I + \nabla_X u + \nabla_X u^T + \nabla_X u^T \nabla_X u) - I \right]$$

$$E = \frac{1}{2} (\nabla_X u + \nabla_X u^T) + \frac{1}{2} \nabla_X u^T \nabla_X u$$

En notación índice esto queda expresado como

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_i} \right) \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right)$$

Desarrollando el término correspondiente a la deformación normal en el eje \hat{e}_1 , este queda

$$E_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_1} \right)$$
$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right)$$

Lo cual equivale a

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}$$

para deformaciones muy pequeñas (infinitesimales). Las deformaciones normales en las direcciones \hat{e}_2, \hat{e}_3 quedan a su vez

$$E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right]$$
$$E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right]$$

Por su parte, al desarrollar los términos del tensor lagrangiano de deformación, en lo referente a la distorsión angular, se tienen los siguientes términos:

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \right] = E_{21}$$

$$E_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \right] = E_{31}$$

$$E_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \right] = E_{32}$$

3.7 TENSOR DE DEFORMACIÓN DE CAUCHY-GREEN POR IZQUIERDA

Sea $B = V^2$, donde V es el tensor izquierdo de deformación. B se denomina como tensor de deformación de Cauchy-Green izquierdo o tensor de deformación de Finger. En el caso de no existir deformación resulta evidente que

$$V = B = I$$

Dado que $F = VR$ y $RR^T = I$, por lo tanto, B se puede calcular directamente de F , de tal manera que:

$$F = VR$$

$$\Rightarrow F^T = (VR)^T = R^T V^T$$

$$\therefore FF^T = VRR^T V^T$$

$$\Rightarrow FF^T = VIV^T = VV^T = V^2 = B$$

$$\therefore B = FF^T$$

$$\Rightarrow B = RU(RU)^T = RUU^T R^T$$

$$UU^T = C = U^2$$

$$B = RCR^T$$

$$R^T B = R^T RCR^T = CR^T$$

$$CR^T R = R^T BR$$

$$\Rightarrow C = R^T BR$$

Desarrollando $B = FF^T$, se tiene que

$$B = (I + \nabla_X u)(I + \nabla_X u^T) = I + \nabla_X u^T + \nabla_X u + \nabla_X u \nabla_X u^T$$

$$\therefore B_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_m} \frac{\partial u_j}{\partial X_m}$$

Para desplazamientos muy pequeños se puede describir un nuevo tensor ε_{ij} (tensor de deformaciones infinitesimales), de la forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(B_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_m} \frac{\partial u_j}{\partial X_m} \right]$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[\nabla_X u + (\nabla_X u)^T \right] + \frac{1}{2} (\nabla_X u)(\nabla_X u)^T$$

expresión que equivale al tensor lagrangiano de deformación E para deformaciones muy pequeñas.

$$\varepsilon \triangleq \frac{1}{2} \left[\nabla_X u + (\nabla_X u)^T \right]$$

$$\varepsilon \triangleq E$$

3.8 TENSOR DE DEFORMACIÓN EULERIANA

Al tensor descrito a través de la relación

$$e = \frac{1}{2} (I - B^{-1})$$

Se le denomina tensor euleriano de deformación. Resulta evidente que de no existir deformación $B^{-1} = I$ e implica que $e = 0$.

Se ha demostrado anteriormente que

$$B = FF^T$$

$$\Rightarrow B^{-1} = (FF^T)^{-1} = (F^{-1})^T F^{-1}$$

Donde

$$x = X + u(X, t)$$

$$\Rightarrow dx = dX + \frac{\partial u(X, t)}{\partial X} dX$$

$$\therefore \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i(X, t)}{\partial X_j}$$

$$\Rightarrow F = \nabla_X x = I + \nabla_X u$$

Dado que

$$dx = FdX$$

$$\Rightarrow F^{-1}dx = F^{-1}FdX = IdX$$

$$\therefore dX_i = F_{ij}^{-1}dx_j$$

$$\Rightarrow F^{-1} = \nabla_x X = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

Por otra parte,

$$x = X + u(X, t)$$

$$\Rightarrow X = x - u(X, t)$$

$$\Rightarrow X = x - u(x, t)$$

$$\Rightarrow dX = dx - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx$$

Sin embargo, para que exista congruencia se debe presentar en la forma

$$\therefore \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow \nabla_x X = I - \nabla_x u$$

Resulta entonces que

$$\delta_{ij} = F^{-1}F = I$$

$$\therefore F^{-1} = \nabla_x X = I - \nabla_x u(x, t)$$

Donde

$$(F_{ij})^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

Por lo tanto, al sustituir en la definición del tensor euleriano de deformación se tiene que:

$$F^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \nabla_x X = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Por definición

$$\begin{aligned} x_i &= X_i + u_i \\ \Rightarrow x_i - u_i &= X_i \\ \therefore dx_i - du_i &= dX_i \\ \Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Se ha definido al tensor de deformación de Finger como

$$B = FF^T$$

Por consecuencia

$$B^{-1} = (FF^T)^{-1} = (F^{-1})^T F^{-1}$$

Pero como

$$\begin{aligned} F^{-1} &= I - \nabla_x u \\ \Rightarrow B^{-1} &= \left((I - \nabla_x u)^T (I - \nabla_x u) \right) \end{aligned}$$

Por lo que

$$B^{-1} = I - (\nabla_x u) - (\nabla_x u)^T + (\nabla_x u)^T \nabla_x u$$

ya que

$$e = \frac{1}{2}(I - B^{-1})$$

Entonces, el tensor euleriano de deformación queda expresado como

$$e = \frac{1}{2} \left((\nabla_x u) + (\nabla_x u)^T \right) - \frac{1}{2} (\nabla_x u)^T (\nabla_x u)$$

$$e = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \right)$$

En coordenadas rectangulares, al desarrollar la notación índice se tiene que

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right)$$

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \right)$$

En el caso de desplazamientos muy pequeños $u(X_i, t) \approx u(x_i, t)$, por lo que se puede concluir entonces que para deformaciones infinitesimales

$$e_{ij} \cong \varepsilon_{ij}$$

ya que

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \cong \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

3.9 CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD PARA EL TENSOR DE DEFORMACIONES FINITAS

Las ecuaciones de compatibilidad o integrabilidad presentadas en el subtema 3.4 corresponden a condiciones de deformación infinitesimal. En el caso de deformaciones finitas y considerando el tensor de deformación euleriana se tiene que:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 e_{kn}}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial^2 e_{lm}}{\partial x_k \partial x_n} - \frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_l \partial x_n} - \frac{\partial^2 e_{ln}}{\partial x_k \partial x_m} - \left(\frac{\partial e_{ks}}{\partial x_n} + \frac{\partial e_{ns}}{\partial x_k} - \frac{\partial e_{kn}}{\partial x_s} \right) \left(\frac{\partial e_{ls}}{\partial x_m} + \frac{\partial e_{ms}}{\partial x_l} - \frac{\partial e_{lm}}{\partial x_s} \right) \\ & + \left(\frac{\partial e_{ks}}{\partial x_m} + \frac{\partial e_{ms}}{\partial x_k} - \frac{\partial e_{km}}{\partial x_s} \right) \left(\frac{\partial e_{ls}}{\partial x_n} + \frac{\partial e_{ns}}{\partial x_l} - \frac{\partial e_{ln}}{\partial x_s} \right) + 2e_{rs} \left[-2 \left(\frac{\partial e_{kr}}{\partial x_n} + \frac{\partial e_{nr}}{\partial x_k} - \frac{\partial e_{kn}}{\partial x_r} \right) \left(\frac{\partial e_{ls}}{\partial x_m} + \frac{\partial e_{ms}}{\partial x_l} - \frac{\partial e_{lm}}{\partial x_s} \right) \right] \\ & - 4 \left(\frac{\partial e_{kr}}{\partial x_m} + \frac{\partial e_{mr}}{\partial x_k} - \frac{\partial e_{km}}{\partial x_r} \right) \left(\frac{\partial e_{ls}}{\partial x_n} + \frac{\partial e_{ns}}{\partial x_l} - \frac{\partial e_{ln}}{\partial x_s} \right) + 4 \left(\frac{\partial e_{kr}}{\partial x_n} + \frac{\partial e_{nr}}{\partial x_k} - \frac{\partial e_{kn}}{\partial x_r} \right) \left(\frac{\partial e_{ls}}{\partial x_m} + \frac{\partial e_{ms}}{\partial x_l} - \frac{\partial e_{lm}}{\partial x_s} \right) = 0 \end{aligned}$$

Se puede demostrar con facilidad que la ecuación anterior para deformación infinitesimal se reduce a

$$\frac{\partial^2 e_{kn}}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial^2 e_{lm}}{\partial x_k \partial x_n} - \frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_l \partial x_n} - \frac{\partial^2 e_{ln}}{\partial x_k \partial x_m} = 0$$

3.10 CAMBIO DE ÁREA DEBIDO A DEFORMACIÓN

Considere dos elementos materiales

$$\left[dX^{(1)} = dS_1 \hat{e}_1, \quad dX^{(2)} = dS_2 \hat{e}_2 \right]$$

los cuales emanan de la coordenada X , entonces, el área definida por dichos elementos materiales, a un tiempo de referencia t_0 estará dada por:

$$d\bar{A}_0 = dX^{(1)} \times dX^{(2)} = dS_1 dS_2 \hat{e}_3 = dA_0 \hat{e}_3$$

donde dA_0 representa la magnitud del área sin deformación cuya normal es \hat{e}_3 , para un tiempo cualesquiera t los elementos se deforman de acuerdo con

$$dx^{(1)} = FdX^{(1)}, dx^{(2)} = FdX^{(2)}$$

razón por la cual el área se modificará como

$$d\bar{A} = FdX^{(1)} \times FdX^{(2)} = dS_1 dS_2 F\hat{e}_1 \times F\hat{e}_2 = dA_0 F\hat{e}_1 \times F\hat{e}_2,$$

Por lo que la normal del área deformada será perpendicular al plano descrito por $F\hat{e}_1, F\hat{e}_2$, esta dirección es descrita a través de la normal n , por lo que

$$d\bar{A} = dSn \quad \Rightarrow \quad dSn = dA_0 (F\hat{e}_1 \times F\hat{e}_2)$$

$$\therefore F\hat{e}_3 \cdot d\bar{A} = dA_0 (F\hat{e}_3 \cdot F\hat{e}_1 \times F\hat{e}_2)$$

Por otra parte, se tiene que

$$F\hat{e}_3 \cdot F\hat{e}_1 \times F\hat{e}_2 = |F| = \det F$$

entonces

$$F\hat{e}_3 \cdot dAn = dA_0 |F|$$

Despejando y utilizando las propiedades del producto entre tensores $\hat{e}F = F^T \hat{e}$ se tiene que

$$\hat{e}_3 \cdot F^T n = \left(\frac{dA_0}{dA} \right) |F|$$

como consecuencia de que $F^T n$ está en la dirección de \hat{e}_3 , de tal forma que

$$F^T n = \left(\frac{dA_0}{dA} \right) |F| \hat{e}_3$$

por tanto,

$$dA n = dA_0 |F| \left(F^{-1} \right)^T \hat{e}_3$$

Generalizando el desarrollo anterior para cualquier superficie, se tendrá que en lugar del vector unitario \hat{e}_3 , ahora habrá que definir la normal de la superficie antes de ser deformada n_0 (la cual remplaza al vector \hat{e}_3).

$$\Rightarrow dA n = dA_0 |F| \left(F^{-1} \right)^T n_0$$

Ecuación que define la transformación de la superficie por efecto de la deformación del MC.

3.11 CAMBIO DE VOLUMEN DEBIDO A DEFORMACIÓN

Considere tres elementos materiales $dX^{(1)} = dS_1 \hat{e}_1$, $dX^{(2)} = dS_2 \hat{e}_2$, $dX^{(3)} = dS_3 \hat{e}_3$ los cuales proceden de la coordenada material X ; éstos, a un tiempo de referencia t_0 , forman un prisma de volumen $dV_0 = dS_1 dS_2 dS_3$.

Para un tiempo t el elemento diferencial se deforma según

$$dx^{(1)} = F dX^{(1)}, dx^{(2)} = F dX^{(2)}, dx^{(3)} = F dX^{(3)}$$

razón por la que el volumen se transforma en

$$dV = F dX^{(1)} F dX^{(2)} F dX^{(3)} = dS_1 dS_2 dS_3 (F \hat{e}_1 \cdot F \hat{e}_2 \times F \hat{e}_3)$$

$$\therefore dV = |F| dV_0$$

Por otra parte, la densidad ρ se puede expresar, considerando una densidad inicial ρ_0 como

$$\rho = \frac{\rho_0}{|F|}$$

3.12 DESCRIPCIÓN DEL GRADIENTE DE DEFORMACIÓN PARA UNA REFERENCIA CILÍNDRICA (r, θ, z) Y PARA UNA BASE ESFÉRICA (r, θ, ϕ)

Para el caso de que la descripción del movimiento se realice con una referencia cilíndrica o esférica, el gradiente de deformación se expresa como:

$$F_{(r, \theta, z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial r}{R \partial \Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ \frac{r \partial \theta}{\partial R} & \frac{r \partial \theta}{R \partial \Theta} & \frac{r \partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{R \partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

donde la referencia original se indica con (R, Θ, Z) , esto para t_0 , mientras que la descripción para cualquier tiempo (t) se expresa con (r, θ, z) .

Por otra parte, para el caso de coordenadas esféricas se tiene

$$F_{(r, \theta, \phi)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial r}{R \partial \Theta} & \frac{\partial r}{R \sin \Theta \partial \Phi} \\ \frac{r \partial \theta}{\partial R} & \frac{r \partial \theta}{R \partial \Theta} & \frac{r \partial \theta}{R \sin \Theta \partial \Phi} \\ \frac{r \sin \theta \partial \phi}{\partial R} & \frac{r \sin \theta \partial \phi}{R \partial \Theta} & \frac{r \sin \theta \partial \phi}{R \sin \Theta \partial \Phi} \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Qué son las ecuaciones de compatibilidad o integrabilidad? Demuestre su validez, tanto para el caso de deformaciones como de rapidez de deformación.
2. Para el siguiente campo de desplazamientos:

$$u_1 = \alpha t X_1^2 X_2, \quad u_2 = \alpha t X_2^2 X_3, \quad u_3 = \alpha t X_3^2 X_1$$

Determine:

- a) ∇u , parte simétrica de ∇u ; componente antisimétrica de ∇u ; $\nabla \times u$
 - b) Si $\alpha = \frac{1}{20} \left[\frac{1}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$, determine para el punto q y tiempo $t = 1 \text{ s}$, cuyas coordenadas para t_0 son $(10, 8, 15) \text{ cm}$
 - c) Deformaciones principales
 - d) Máximas deformaciones a corte
 - e) ¿El medio continuo se comporta en general como incompresible? Justifique su respuesta.
3. El campo de velocidades asociado a la deformación de un medio continuo está dado por:

$$v_i = \alpha (2ax_2 + bx_1t) \hat{e}_1 + (2ax_1 + bx_2t) \hat{e}_2 + (bx_3t) \hat{e}_3$$

donde

$$a = 1(\text{s}^{-1})$$

$$b = 1(\text{s}^{-2})$$

- a) ¿Es factible determinar la rapidez de deformación (D_{ij}) del medio continuo? En caso de ser afirmativa su respuesta, qué condiciones (en caso de existir éstas) deberá cumplir el campo de velocidades propuesto.

- b) En caso de ser factible, determine el tensor de rapidez de deformación (D_{ij}) y de rapidez de rotación $(\dot{\omega}_{ij})$ asociado al campo de velocidades.
- c) Si se trata de un sólido rígido plástico (no presenta deformación elástica), el cambio de volumen asociado a la deformación es cero y por consecuencia la rapidez de cambio de volumen en cualquier punto y para cualquier tiempo también lo es $\left(\frac{1}{dV} \frac{D}{Dt}(dV) = 0\right)$. ¿Cuál será entonces la magnitud del escalar α ?
- d) ¿Qué características en particular tiene la rapidez de deformación descrita?
- e) Determine los valores principales de la rapidez de deformación (D_{ij}) .
4. Un cuerpo es sometido a una serie de sollicitaciones que provocan la distorsión del mismo, situación que se puede representar con el tensor ∇u para el elemento diferencial $X_i = (X_1, X_2, X_3)$. Con esta base defina los tensores de deformación ε_{ij} y de rotación ω_{ij}

$$\nabla u = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 17 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \quad \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

5. Para el tensor D_{ij} , ¿existirá un vector velocidad que garantice su existencia? D_{ij} representa el tensor de rapidez de deformación.

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} x_2 \ln \frac{x_1}{x_2} & x_1 + x_2 + x_3 & \frac{x_3^2}{x_2} \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_2 e^{x_1/x_3} & x_2 \ln \frac{x_2^2}{x_1^2} \\ \frac{x_3^2}{x_2} & x_2 \ln \frac{x_2^2}{x_1^2} & \frac{x_1 x_3}{x_2} \end{pmatrix} \frac{k}{t}$$

donde

$$k = l^{-1}$$

t – tiempo

Justifique su respuesta.

6. El campo de desplazamientos asociado a la deformación de un medio está dado por

$$u_i = \lambda t \left\{ \left(\frac{X_1^3}{X_2^2} \right) \hat{e}_1 + \left(X_2 \operatorname{sen} \left(\frac{X_3}{X_1} \right) \right) \hat{e}_2 - k \left(\frac{3X_1^2 X_3}{X_2^2} + X_3 \operatorname{sen} \left(\frac{X_3}{X_1} \right) \right) \hat{e}_3 \right\}$$

$$\lambda = 10^{-4} \text{ s}^{-1}; \quad t = \text{s}; \quad X_i = [\text{metros}]$$

- a) Defina x_i
- b) ¿Es posible obtener el tensor de deformación a partir de u_i , o es necesario verificar la existencia de la función a través de los criterios de compatibilidad?
- c) Considerando que el medio es incompresible, determine para $q = (0.1, 0.1, 0.1) [\text{m}]$; $t = 2 \text{ s}$, las deformaciones principales.

7. Para el siguiente campo de desplazamientos $u_i = 3X_3\hat{e}_1 - X_1\hat{e}_2 - 2X_2\hat{e}_3$, determine:

- a) Gradiente de deformación F
- b) Tensor de Cauchy-Green por derecha C
- c) Tensor lagrangiano de deformación E
- d) La relación del volumen final al volumen inicial
- e) El tensor de Cauchy por izquierda B
- f) Tensor euleriano de deformación e

8. Si C se define como el tensor de Cauchy-Green por derecha, deduzca la representación del tensor lagrangiano de deformación E en función del gradiente del vector desplazamiento $(\nabla_X u)$, si

$$E = \frac{1}{2}(C - I)$$

donde

$$C = F^T F \quad I \text{ -Identidad}$$

Indique la descripción de E en notación índice y en notación general.

9. El tensor de deformación euleriana e se define como

$$e = \frac{1}{2}(I - B^{-1})$$

donde B^{-1} representa la inversa del tensor de Cauchy–Green por izquierda. Con base en lo anterior, deduzca la representación de e en función del inverso del gradiente de deformación $F^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, y en particular del gradiente del vector desplazamientos $(\nabla_x u)$,

cuando éste se describe en forma euleriana.

$$e = e(\nabla_x u)$$

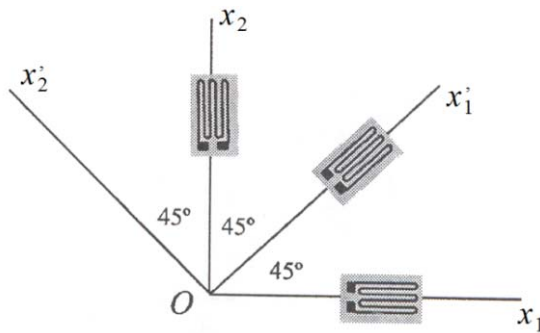
10. Demuestre que para una deformación infinitesimal el cambio unitario de volumen está representado por la traza del tensor de deformación infinitesimal.

11. Se muestra un arreglo de galgas extensométricas para un estado de deformaciones plano, que mide las deformaciones normales (longitudinales) a lo largo de los ejes x_1, x_2 (base original) y del eje x'_1 (nuevo sistema de referencia), tal que:

$$\varepsilon_{11} = 6 \times 10^{-4} ; \quad \varepsilon_{22} = 4 \times 10^{-4} ; \quad \varepsilon'_{11} = 8 \times 10^{-4}$$

Determinar la deformación angular ε_{12} , la deformación normal ε'_{22} y verificar que:

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}$$



Para el estado de deformaciones en la base original, determinar las deformaciones principales y las direcciones principales asociadas.

12. A partir de la ecuación de compatibilidad expresada en notación índice para deformaciones infinitesimales

$$\frac{\partial^2 e_{kn}}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial^2 e_{lm}}{\partial x_k \partial x_n} - \frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_l \partial x_n} - \frac{\partial^2 e_{ln}}{\partial x_k \partial x_m} = 0$$

Demuestre si las ecuaciones de compatibilidad o integrabilidad se pueden expresar como

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial X_2 \partial X_1}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial X_3 \partial X_2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial X_1 \partial X_3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3 \partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial X_2} \right)$$

13. Un MC presenta un movimiento que se describe como:

$$x_1 = X_1 + 2\varphi X_2 t^2$$

$$x_2 = X_2 + 2\varphi X_1 t^2$$

$$x_3 = X_3 \quad \varphi = 10^{-3} \text{ s}^{-2}$$

- a) ¿Cómo es el movimiento?
- b) Determinar la velocidad en $t = 3 \text{ s}$ para el elemento diferencial que en $t = 1 \text{ s}$ se encuentra en $(2, 4, 5)$.

- c) Determinar la aceleración en $t = 5$ s para el elemento diferencial que en $t = 1$ s se encuentra en $(2,3,5)$.
- d) Determine el campo de desplazamientos.
- e) Determine, de ser esto posible, el gradiente de deformación F .
- f) Tensor de Cauchy-Green por derecha C y el tensor de dilatación por derecha U ;
 $F = RU$
- g) Tensor de Cauchy-Green por izquierda B .
- h) Tensor de rotación R .
- i) Tensor lagrangiano de deformación E .
- j) Tensor euleriano de deformación e .

14. Para el campo de desplazamientos

$$u_i = \frac{1}{\varphi} \left[3(X_2 + X_3)\hat{e}_1 + 2(X_1 + X_3)\hat{e}_2 - (X_1 + 2X_2 + X_3)\hat{e}_3 \right] \quad \varphi = 10^{-3}$$

Determine:

- a) Gradiente de deformación F .
- b) Tensor de Cauchy-Green por derecha C y el tensor de dilatación por derecha U ;
 $F = RU$
- c) El tensor de Cauchy-Green por izquierda B .
- d) Tensor de rotación R .
- e) Tensor lagrangiano de deformación E .
- f) Tensor euleriano de deformación e .
- g) La relación del volumen final al volumen inicial.
- h) El área deformada para el elemento diferencial cuya normal antes de la deformación estaba dada por:

$$n_i = \frac{1}{3} [\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3]$$

Determine la sección final y calcule el incremento de área (efecto de la deformación) en porcentaje. Asimismo, calcule el volumen final del MC (F es homogéneo a través del MC), donde $V_0 = 10 \text{ cm}^3$

CAPÍTULO 4

ESFUERZOS

4.1 CONCEPTOS GENERALES

Como una primera etapa se ha estudiado la descripción del movimiento del medio continuo sin considerar las causas que lo provocan, asimismo se ha procedido a definir la deformación tanto para el caso finito como infinitesimal. En la teoría clásica de medios continuos, el concepto de esfuerzo es introducido a través de la descripción de fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie. Las definidas como fuerzas de cuerpo son aquellas que actúan sobre el volumen del MC a gran distancia (sin que exista contacto); ejemplo de éstas son la fuerza gravitacional, las electrostáticas y las magnéticas; estas fuerzas son resultado de la presencia de campos (gravitacionales, electrostáticos o magnéticos) y se representan a través de la aceleración que generan en el MC, de tal forma que

$$f_c = \int_V \rho B dV$$

donde $\rho = \rho(x,t)$ es la densidad del medio en un punto x del cuerpo a un tiempo t y B representa la aceleración producida por las fuerzas de cuerpo; este término es referido como fuerza de cuerpo por unidad de masa o simplemente como aceleración de fuerza de cuerpo.

Por otra parte, las fuerzas de superficie son aquellas que para transmitirse demandan contacto y que actúan sobre una superficie real o “imaginaria” (definida al separar en partes el cuerpo). Las fuerzas de superficie son sollicitaciones externas que actúan sobre la superficie del cuerpo; por ejemplo, la fuerza que genera el viento al hacer contacto con una estructura o las que se producen al sumergir un cuerpo en un líquido o también al estar en contacto dos sólidos. Las fuerzas de superficie totales que actúan en una superficie S del cuerpo de volumen V y configuración β , se expresan en la forma

$$f_s = \int_S t dS ,$$

donde t representa un vector cuyas unidades son fuerza por unidad de área, el cual es función de x , y representa una coordenada que corresponde a la superficie S . Dicho vector es denominado como vector de fuerza superficial por unidad de área de S o vector de esfuerzos o tracción en S .

Las fuerzas, sean de cuerpo o de contacto, representan sollicitaciones sobre el MC; sus efectos dependerán evidentemente de su magnitud y dirección, pero también de las condiciones geométricas del cuerpo. Por tal motivo y para facilitar el análisis del efecto de estas fuerzas es necesario describir el área sobre la que se presentan para definir el concepto de esfuerzo.

Considere un MC (figura 4.1), el cual es sometido a una serie de fuerzas f_i . Si se corta el cuerpo con un plano π , la sección remanente deberá estar en equilibrio, de tal forma que sobre el plano π aparecerá una fuerza resultante f_R , dicha fuerza se representa en principio en el centroide del área descrita sobre el plano de corte π ; sin embargo, resulta evidente que la carga se distribuye sobre el área de la superficie A_π , por lo que se puede definir el concepto de vector de esfuerzos t_π de la forma

$$t_\pi = \lim_{\Delta A_\pi \rightarrow 0} \frac{\Delta f_\pi}{\Delta A_\pi}$$

Por otra parte, es evidente que f_π se puede descomponer en su componente normal a la superficie

$$f_{\pi N} = f_\pi \cdot n_\pi$$

donde n_π es el vector normal unitario del plano π ; mientras que su componente tangencial es

$$f_{\pi T} = \sqrt{|f_\pi|^2 - |f_{\pi N}|^2}$$

de tal forma que se pueden definir entonces los esfuerzos normales

$$\sigma = \lim_{\Delta A_\pi \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{\pi N}}{\Delta A_\pi}$$

y los tangenciales o de corte

$$\tau = \lim_{\Delta A_{\pi} \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{\pi T}}{\Delta A_{\pi}}.$$

Resulta evidente que para definir al esfuerzo es necesario describir la dirección de la fuerza y la normal al plano, entonces

$$T_{ij} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S n_j}$$

por lo que los esfuerzos en un punto del MC se describirán a través de un tensor de segundo rango $[T, T_{ij}]$ o $[\sigma, \sigma_{ij}]$ por esta razón se requerirá de nueve términos para definir éste. Sin embargo, por condiciones de equilibrio, como se demostrará más adelante, el tensor es simétrico (considerando el área instantánea) y se representa en un espacio hexadimensional.

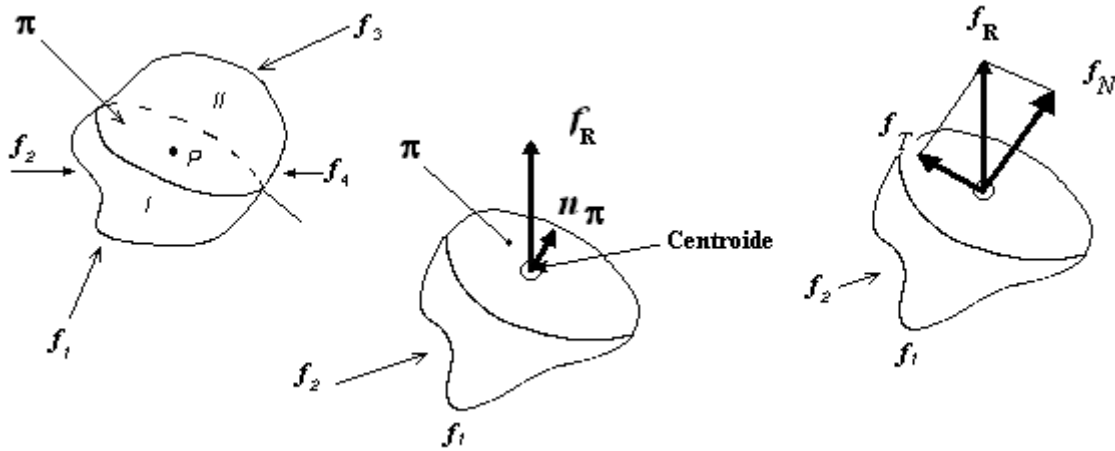


FIGURA 4.1 MEDIO CONTINUO SOMETIDO A UN CONJUNTO DE FUERZAS DE CUALQUIER ORIGEN, LAS CUALES GENERAN UNA SERIE DE SOLICITACIONES AL INTERIOR DEL MISMO

4.2 VECTOR DE ESFUERZOS

Se considera que el vector de esfuerzos permite describir la fuerza en un punto de la superficie del cuerpo, el cual no toma en cuenta la curvatura en la superficie del elemento diferencial bajo análisis. Esto es asumido como principio de esfuerzos de Cauchy, que es un axioma básico de la mecánica del continuo.

Sea el cuerpo de la figura 4.2 y s un plano que pasa a través de un punto arbitrario P , cuya normal es n .

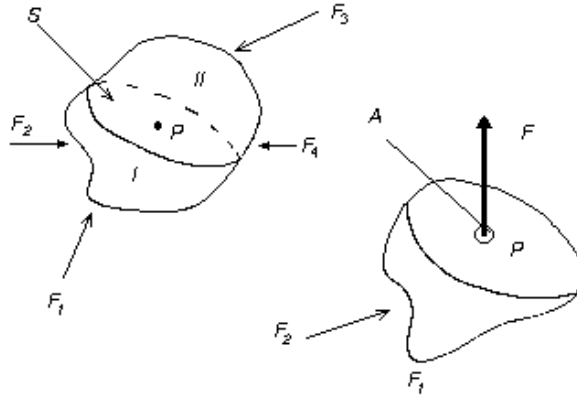


FIGURA 4.2 PARA LA DETERMINACIÓN DEL VECTOR DE ESFUERZOS SE CONSIDERA UN PLANO s QUE CONTIENE UN PUNTO P . EL PLANO s CORTA AL CUERPO EN DOS PORCIONES DANDO LUGAR A UNA COMPONENTE F QUE GARANTIZA EL EQUILIBRIO DEL CUERPO

El plano corta al cuerpo en dos porciones. La parte I se considera como un cuerpo libre, razón por la que en la superficie s debe considerarse una carga resultante Δf que actúa en un área ΔA en la que se encuentra P . Se define al vector de esfuerzos que corresponde al punto P del plano s como t_P , donde éste está dado por:

$$t_P = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

Si la porción del cuerpo marcada como II es considerada ahora como un cuerpo libre, a partir de la Tercera Ley de Newton que considera que a cada acción corresponde una reacción de igual magnitud pero en sentido contrario, entonces, en el mismo punto P enunciado anteriormente, pero considerándolo parte del elemento II , se tiene que la normal del plano es la misma pero en dirección opuesta a la definida anteriormente para el cuerpo, es entonces que

$$s_{IP} = -s_{IIP}$$

Con relación al punto P se puede hacer pasar un número infinito de planos de área A_n , considerando que la sollicitación permanece constante donde Δf es la fuerza resultante en el área ΔA_n en la superficie A_n . El vector de esfuerzos de Cauchy en P de A_n se define como:

$$t_{nP} = \lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A_n} = \lim_{\Delta s_n \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{n \Delta s_n}$$

A partir de lo antes definido se describe el **Principio de esfuerzos de Cauchy**. El vector de esfuerzos en cualquier lugar y tiempo tiene un valor común en todas las partes del material que cuentan con un plano tangente común, entonces, si n representa la normal al plano y t es el vector de esfuerzos, a un tiempo τ , se tiene que

$$t = t(x, \tau, n)$$

Es entonces que el vector de esfuerzos asociado a un plano que pasa a través de un elemento espacial x , esto para un tiempo τ , dependerá solo de la normal n asociada al plano. Esta dependencia, como se presentará más adelante, se expresa como

$$t(x, \tau, n) = T(x, \tau)n$$

donde T representa una transformación lineal.

4.3 TENSOR DE ESFUERZOS DE CAUCHY

De acuerdo a lo mencionado en líneas anteriores, el vector de esfuerzos referido a un plano que pasa a través de un punto espacial x a un tiempo τ depende solamente de la normal unitaria n del plano, sea entonces una transformación T , tal que:

$$t_n = Tn$$

A esta transformación se le denomina tensor de esfuerzos o tensor de esfuerzos de Cauchy.

Componentes del tensor de esfuerzos

Las componentes del vector de esfuerzos están relacionadas con el tensor de esfuerzos T por:

$$t_1 = T_{1j}n_j\hat{e}_1$$

$$t_2 = T_{2j}n_j\hat{e}_2$$

$$t_3 = T_{3j}n_j\hat{e}_3$$

Esto se puede expresar como $t_i = T_{ij}n_j$, o en notación general como $t = T \cdot n$, o también como $t_i = n_j T_{ji}$ o $t = nT^T$. La forma dependerá de la definición con la cual se manejen los índices. Si el primer índice (i) se emplea para describir la dirección de la componente del esfuerzo y el segundo (j) para la normal del plano sobre el que está resuelto, se empleará la expresión descrita en primera instancia. Por otra parte, si el primer índice representa la normal del plano y el segundo la dirección de la componente del esfuerzo, la transformación se premultiplicará por la normal quedando de la forma:

$$t_1 = n_1T_{11}\hat{e}_1 + n_2T_{21}\hat{e}_2 + n_3T_{31}\hat{e}_3$$

$$t_2 = n_1T_{12}\hat{e}_1 + n_2T_{22}\hat{e}_2 + n_3T_{32}\hat{e}_3$$

$$t_3 = n_1T_{13}\hat{e}_1 + n_2T_{23}\hat{e}_2 + n_3T_{33}\hat{e}_3$$

En este libro se considerará, a menos de que se precise lo contrario, que el primer índice representa la dirección del componente de esfuerzo y el segundo la dirección de la normal al plano; así, t_i es el vector de esfuerzos que actúa en el plano cuya normal es \hat{e}_i . Es claro que $T_{ij} \forall i = j$ representa a las componentes normales, mientras que $T_{ij} \forall i \neq j$ a las componentes tangenciales.

A la descripción del estado de esfuerzos T_{ij} referida al elemento diferencial (x_i, t) se le define como **tensor de esfuerzos de Cauchy**. Dicho tensor es simétrico ($T_{ij} = T_{ji}$), en virtud de la existencia de equilibrio de momentos sobre los tres ejes coordenados.

Simetría del tensor de esfuerzos de Cauchy

Considérese un elemento diferencial sobre el plano x_1x_2 (figura 4.3), por facilidad se definirá el origen en el centroide del elemento de tal forma que los esfuerzos normales (σ_{11}, σ_{22}) pasen a través de éste; por otra parte, los esfuerzos de corte (σ_{12}, σ_{21}) se definen a una distancia $\frac{dx_2}{2}, \frac{dx_1}{2}$ del origen respectivamente, el cual representa a su vez el punto de rotación del sistema.

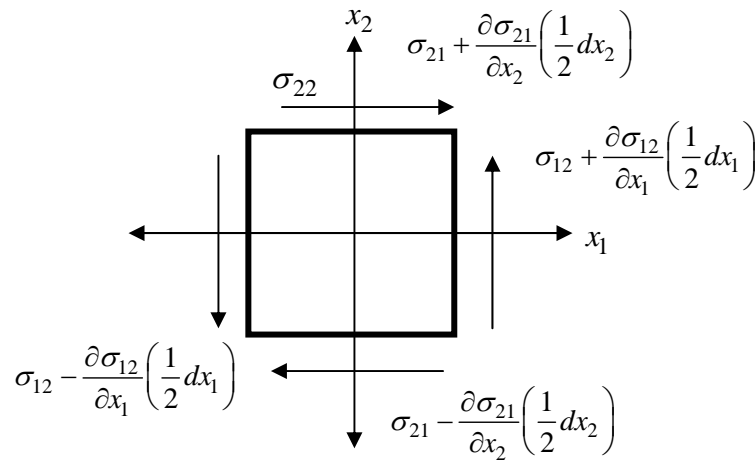


FIGURA 4.3 CARGAS SOBRE UN ELEMENTO DIFERENCIAL DESCRITO EN EL PLANO x_1x_2 . EN ESTA REPRESENTACIÓN DEL ESTADO DE ESFUERZOS σ_{ij} , EL PRIMER ÍNDICE REPRESENTA LA NORMAL AL PLANO Y EL SEGUNDO LA DIRECCIÓN DE LA CARGA

A partir del hecho de que solo los cortantes producen momento sobre el origen del sistema coordenado, siendo x_3 el eje de giro

$$\left(\sum M\right)_{x_3} = (\sigma_{12} - \sigma_{21}) dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

Por lo que

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

asimismo, se puede demostrar que

$$\sigma_{13} = \sigma_{31}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$

entonces, en general se tiene que

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

se concluye por tanto que el tensor de esfuerzos es simétrico

$$\therefore T = T^T$$

Por lo que el espacio vectorial de los esfuerzos es hexadimensional, es decir, está representado con solo 6 componentes linealmente independientes.

Esfuerzos principales

En virtud de que las componentes T_{ij} asociadas al tensor de esfuerzos pertenecen a los reales y que dicho tensor es simétrico, entonces existirán al menos tres eigenvalores (esfuerzos principales) mutuamente perpendiculares entre sí (eigenvectores de T). Los planos cuya normal corresponde a la dirección de los esfuerzos se denominan planos principales. En estos planos el vector de esfuerzos es normal y a estos esfuerzos normales se les denomina esfuerzos principales.

Entonces, los esfuerzos principales (eigenvalores de T) incluyen los valores máximo y mínimo de los esfuerzos normales considerando todos los planos que pasan a través del punto.

Los esfuerzos principales se pueden determinar de la ecuación característica asociada al tensor de esfuerzos:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

donde, de acuerdo con lo deducido, para esfuerzos y direcciones principales, se tiene que

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \\ I_3 &= \frac{1}{6}(\sigma_{ii}\sigma_{jj}\sigma_{kk} + 2\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - 3\sigma_{ii}\sigma_{jk}^2) = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - (\sigma_{11}\sigma_{23}^2 + \sigma_{22}\sigma_{31}^2 + \sigma_{33}\sigma_{12}^2) \end{aligned}$$

donde I_1 , I_2 , e I_3 son los invariantes asociados al tensor de esfuerzos.

Esfuerzos cortantes máximos (τ_i)

Si bien en las direcciones principales las componentes de corte asociadas son nulas, en los planos inclinados a un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ se presentarán los cortantes máximos. En esta sección se demostrará que los esfuerzos cortantes máximos están dados por un medio de la diferencia de los esfuerzos principales máximos y mínimos que actúan en el plano que bisecta el ángulo entre las direcciones de los esfuerzos principales, esto es

$$\tau_i = \left| \frac{\sigma_j - \sigma_k}{2} \right|$$

Sean $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ las direcciones principales de T , donde T_1, T_2, T_3 son los esfuerzos principales. Si $n_i = n_1\hat{e}_1 + n_2\hat{e}_2 + n_3\hat{e}_3$ es la normal unitaria al plano, las componentes del vector de esfuerzos en el plano están dadas por

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 T_1 \\ n_2 T_2 \\ n_3 T_3 \end{bmatrix}$$

$$t_i = n_1 T_1 \hat{e}_1 + n_2 T_2 \hat{e}_2 + n_3 T_3 \hat{e}_3$$

y el esfuerzo normal en dicho plano se define por $T_N = t \cdot n$, por lo que

$$T_N = t \cdot n = n_1^2 T_1 + n_2^2 T_2 + n_3^2 T_3$$

entonces T_s denota la magnitud del esfuerzo cortante en el plano

$$T_s^2 = |t|^2 - T_N^2$$

$$T_s^2 = T_1^2 n_1^2 + T_2^2 n_2^2 + T_3^2 n_3^2 - \left(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2 \right)^2 \quad (4.1)$$

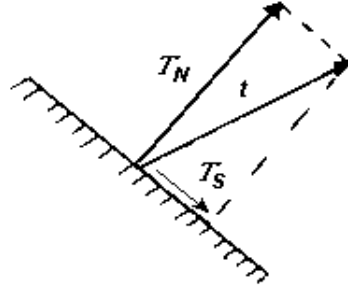


FIGURA 4.4 DESCOMPOSICIÓN DEL VECTOR DE ESFUERZOS t , DEFINIDO EN UN PLANO CUYA NORMAL ESTÁ DADA POR n_i

Para valores conocidos de T_1, T_2, T_3 , la ecuación 4.1 establece que T_s es función de n_i , entonces

$$T_s^2 = f(n_1, n_2, n_3)$$

donde T_s debe corresponder con un máximo y será necesario determinar n_1, n_2, n_3 al cual se presente éste. Dado que los cosenos directores no pueden variar independientemente uno del otro, se debe de cumplir que

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (4.2)$$

entonces, para determinar un máximo respetando lo indicado por la ecuación 4.1 es necesario derivar con respecto a la normal al plano e igualar a cero

$$dT_s = \frac{\partial T_s^2}{\partial n_i} dn_i = \frac{\partial T_s^2}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial T_s^2}{\partial n_2} dn_2 + \frac{\partial T_s^2}{\partial n_3} dn_3 = 0 \quad (4.3)$$

Al derivar la ecuación 4.2, se tiene que:

$$n_1 dn_1 + n_2 dn_2 + n_3 dn_3 = 0 \quad (4.4)$$

Si se considera que dn_1, dn_2, dn_3 pueden variar independientemente una de la otra (lo cual no es el caso), entonces la ecuación 4.3 define la condición para determinar T_s^2 , de tal forma que:

$$\frac{\partial T_s^2}{\partial n_1} = 0; \quad \frac{\partial T_s^2}{\partial n_2} = 0; \quad \frac{\partial T_s^2}{\partial n_3} = 0$$

Pero la realidad es que n_1, n_2, n_3 (como ya fue mencionado) no pueden variar independientemente ya que éstas presentan una relación de acuerdo con lo establecido en las ecuaciones 4.2 y 4.3.

Considerando que

$$\frac{\partial T_s^2}{\partial n_1} = \lambda n_1; \quad \frac{\partial T_s^2}{\partial n_2} = \lambda n_2; \quad \frac{\partial T_s^2}{\partial n_3} = \lambda n_3 \quad (4.5)$$

Entonces se tiene que al sustituir en la ecuación 4.3

$$\lambda n_1 dn_1 + \lambda n_2 dn_2 + \lambda n_3 dn_3 = 0 \quad (4.6)$$

La ecuación 4.6 es satisfecha a la vez de que se cumple con la ecuación 4.2, en tal caso las ecuaciones 4.2 y 4.5 representan un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas n_1, n_2, n_3 y λ , lo cual corresponde a valores estacionarios de T_s^2 . Éste es el método del multiplicador de Lagrange y el parámetro λ recibe tal denominación.

Calculando las derivadas parciales a partir de la ecuación 4.1, las ecuaciones 4.5 quedan:

$$n_1 \lambda = 2n_1 \left[T_1^2 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) T_1 \right] \quad (4.7)$$

$$n_2 \lambda = 2n_2 \left[T_2^2 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) T_2 \right] \quad (4.8)$$

$$n_3 \lambda = 2n_3 \left[T_3^2 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) T_3 \right] \quad (4.9)$$

A partir de las ecuaciones 4.2, 4.7, 4.8, 4.9 y considerando que las direcciones principales son $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, las cuales corresponden con los mínimos de los esfuerzos cortantes en $T_s = 0$, entonces las direcciones que corresponden a los planos donde se presentan los cortantes máximos son

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.10)$$

Los planos definidos por las ecuaciones 4.7 a 4.9 son los principales, los cuales se caracterizan porque los valores T_s son mínimos, de hecho $T_s = 0$; entonces dichos planos definidos por las soluciones 4.10 permiten obtener los valores de T_s^2 .

Para

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2 \quad \Rightarrow \quad T_s^2 = \frac{(T_1 - T_2)^2}{4}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_3 \quad \Rightarrow \quad T_s^2 = \frac{(T_1 - T_3)^2}{4}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_3 \quad \Rightarrow \quad T_s^2 = \frac{(T_2 - T_3)^2}{4}$$

Por lo tanto, la máxima magnitud del cortante T_s está definida por el mayor de los valores

$$\frac{|T_1 - T_2|}{2}, \quad \frac{|T_2 - T_3|}{2}, \quad \frac{|T_1 - T_3|}{2}$$

En otras palabras,

$$(T_s)_{\text{máx}} = \frac{(T_N)_{\text{máx}} - (T_N)_{\text{mín}}}{2}$$

donde $(T_N)_{\text{máx}}$ y $(T_N)_{\text{mín}}$ son los valores máximo y mínimo de los esfuerzos normales. Se puede demostrar que en el plano de máximo esfuerzo cortante, el esfuerzo normal se obtiene a partir de la expresión

$$T = \frac{|(T_N)_{\text{máx}} - (T_N)_{\text{mín}}|}{2}$$

Entonces, los cortantes máximos se expresan

$$\tau_1 = \frac{|T_3 - T_2|}{2}; \quad \tau_2 = \frac{|T_1 - T_3|}{2}; \quad \tau_3 = \frac{|T_2 - T_1|}{2}$$

4.4 CÍRCULO DE MOHR PARA ESFUERZOS

Considere un estado de esfuerzos biaxial T_{ij} (plano), de tal forma que

$$T_{ij} = 0 \quad \forall \quad i, j = 3$$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para determinar los valores principales la ecuación cúbica queda

$$\sigma^3 - I_{1\sigma}\sigma^2 + I_{2\sigma}\sigma - I_{3\sigma} = 0$$

donde para el estado biaxial de esfuerzos los invariantes asociados están dados por

$$I_{1\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22}$$

$$I_{2\sigma} = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2$$

$$I_{3\sigma} = 0$$

por lo que la ecuación se puede expresar como

$$\sigma(\sigma^2 - I_{1\sigma}\sigma + I_{2\sigma}) = 0$$

de esta ecuación se desprende que una de las raíces (esfuerzos principales) será cero, mientras que los otros dos se determinan a partir de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, de tal manera que

$$a = 1$$

$$b = -(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$c = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)}}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \left(\sigma - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2$$

En un sistema coordenado cuyos ejes son los esfuerzos normales σ (eje horizontal) y los cortantes τ (eje vertical); la ecuación anterior representa dos puntos de un círculo (el círculo tiene su centro sobre el eje σ) de la forma: $(\sigma - a)^2 + \tau^2 = r^2$; cuyo centro se encuentra en

$$\left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, 0 \right)$$

y cuyo radio está dado por

$$\left[\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

En este caso los cortantes máximos estarán dados por el radio

$$\tau_{1,2} = \pm \left[\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Es entonces que los esfuerzos principales asociados son

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Para el caso de un estado triaxial de esfuerzos, el cual en valores principales se representa como

$$\sigma_{ijp} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Para un plano P cualesquiera, el esfuerzo normal σ_N está dado por

$$\sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

dado que σ_c es el esfuerzo cortante, entonces se tiene que

$$\sigma_N^2 + \sigma_c^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

Y como los cosenos directores cumplen con

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Considerando las 3 ecuaciones anteriores con 3 cosenos directores

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_c^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (4.11)$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_3)(\sigma_N - \sigma_1) + \sigma_c^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \quad (4.12)$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2) + \sigma_c^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (4.13)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son valores conocidos mientras que σ_N y σ_c son función de los cosenos directores n_1, n_2, n_3 . Para las ecuaciones 4.11 a 4.13 y considerando los valores extremos que pueden tomar los cosenos directores (n_i vale cero o uno). Para la ecuación 4.11 y $n_i = 0$

$$\begin{aligned} & \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \\ \Rightarrow & \sigma_1 - \sigma_2 > 0 \\ \Rightarrow & \sigma_1 - \sigma_3 > 0 \\ \therefore & n_1^2 > 0 \end{aligned}$$

Como consecuencia

$$(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_c^2 \geq 0$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$\left(\sigma_N - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)\right)^2 + \sigma_c^2 = \left(\frac{1}{2}(\sigma_N - \sigma_3)\right)^2$$

Entonces, un estado triaxial de esfuerzos se podrá representar en un plano $\sigma - \tau$ con tres círculos que pasan por σ_1, σ_2 ; σ_2, σ_3 ; σ_3, σ_1 y cuyos radios estarán dados, respectivamente, por

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

Cortante octaédrico

Cualquier estado de esfuerzos se puede descomponer en un normal octaédrico o esfuerzo hidrostático y un cortante octaédrico, como se demostrará más adelante. Considérese en primera instancia un elemento diferencial sometido a un estado de esfuerzos σ_{ij} , el cual se presenta en la figura 4.5.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

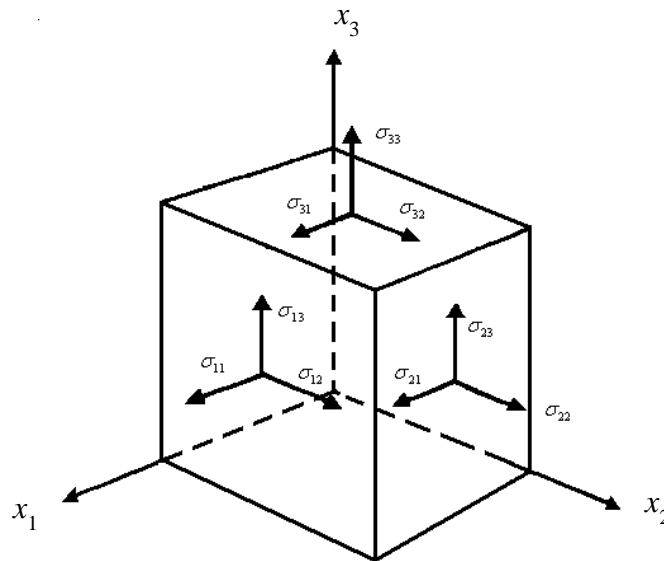


FIGURA 4.5 DESCRIPCIÓN DEL ESTADO DE ESFUERZOS EN UN ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUMEN

Dicho estado de esfuerzos se puede representar en valores principales como (véase figura 4.6):

$$\sigma_{ij}^p = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

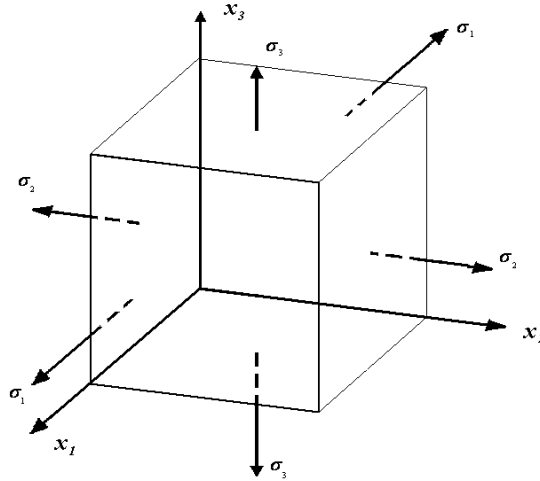


FIGURA 4.6 DESCRIPCIÓN DEL ESTADO DE ESFUERZOS EN VALORES PRINCIPALES EN UN ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUMEN

Ahora bien, si se determina el esfuerzo equivalente sobre un plano octaédrico (igualmente inclinado con todos los ejes) tal como se muestra en la figura 4.7, se tiene que:

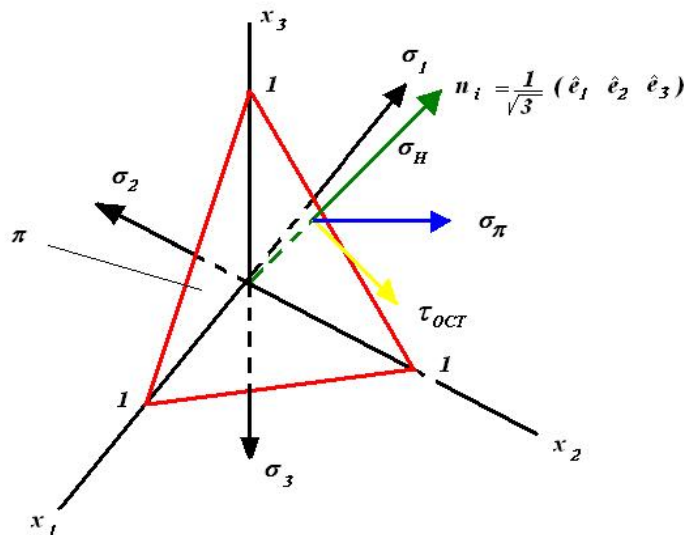


FIGURA 4.7 EL ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUMEN ES CORTADO POR UN PLANO IGUALMENTE INCLINADO CON RESPECTO A LOS EJES PRINCIPALES (PLANO OCTAÉDRICO). EL ESFUERZO RESULTANTE SOBRE EL PLANO (σ_π) SE PUEDE DESCOMPONER EN DOS TÉRMINOS; UNO NORMAL (σ_H) Y EL OTRO TANGENCIAL (τ_{oct})

La normal unitaria al plano octaédrico está dada por

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3)$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{bmatrix} t_1^\pi \\ t_2^\pi \\ t_3^\pi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Entonces,

$$t_i^\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 \hat{e}_1 + \sigma_2 \hat{e}_2 + \sigma_3 \hat{e}_3)$$

La magnitud del esfuerzo normal sobre dicho plano está dado por

$$\sigma_N = t_i^\pi \cdot n_i$$

$$\therefore \sigma_N = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

por otra parte

$$\left| t_i^\pi \right|^2 = \sigma_N^2 + \tau_{oct}^2$$

donde τ_{oct} representa al cortante en el plano octaédrico, despejándolo se tiene

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1))$$

Por lo que reordenando como binomios, el cortante octaédrico queda expresado por

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)^{1/2}$$

o considerando los cortantes principales

$$\tau_{oct} = \left(\frac{4\tau_3^2 + 4\tau_1^2 + 4\tau_2^2}{9} \right)^{1/2}$$

4.5 TENSORES DE ESFUERZOS DE PIOLA-KIRCHHOFF O TENSOR DE ESFUERZOS LAGRANGIANO

Primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff o tensor de esfuerzos lagrangiano

Esta representación del estado de esfuerzos considera las sollicitaciones aplicadas; no desde el punto de vista del área instantánea o deformada (tensor de esfuerzos de Cauchy), sino del área inicial (antes de la deformación) del medio continuo. Esta condición es una situación que en muchos casos, sobre todo en ingeniería, es prácticamente una condición implícita. Desde cualquier óptica es necesario determinar el valor de esta representación del estado de esfuerzos en función del tensor de esfuerzos de Cauchy T que resulta la más usual. Para lo anterior, considérese un área diferencial material (lagrangiana) dA_0 (figura 4.8), la cual tiene una normal n_0 , esto a un tiempo de referencia τ_0 .

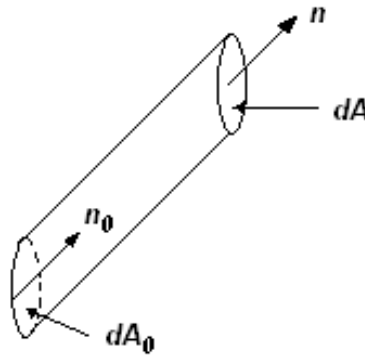


FIGURA 4.8 LA SUPERFICIE DIFERENCIAL DE ÁREA LAGRANGIANA dA_0 SE CARACTERIZA POR SU NORMAL n_0 . DICHA SUPERFICIE PARA CUALQUIER TIEMPO (DESCRIPCIÓN EULERIANA) dA SE DESCRIBE POR LA NORMAL n

Para un tiempo τ , esta área se transforma en dA con una normal n . Es entonces que dA_0 representa el área sin deformar (inicial) y dA el área deformada. Considere que df representa la fuerza actuante (causal de la deformación), es entonces que:

$$df = tdA$$

Donde t representa al vector de esfuerzos, por tanto, se tiene que

$$t = Tn \quad \text{o} \quad t_i = T_{ij}n_j$$

y T representa al tensor de esfuerzos de Cauchy. Por su parte, la fuerza también se puede representar con base en el área no deformada, es entonces que $df = t_0 dA_0$.

Por otro lado,

$$t_0 = T_0 n_0$$

donde T_0 se denomina como primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff, el cual describe el estado de esfuerzos desde la perspectiva del área inicial, de ambas maneras se representa la sollicitación aplicada, por lo que

$$df = t_0 dA_0 = t dA$$

$$\Rightarrow T_0 n_0 dA_0 = T n dA \quad (4.14)$$

Como ya se demostró en el capítulo anterior, el área inicial y el área para cualquier tiempo se relacionan a través del gradiente de deformación F , de tal manera que

$$n dA = dA_0 (\det F) (F^{-1})^T n_0$$

por lo que sustituyendo en el lado derecho de la ecuación 4.11, se tiene que:

$$T_0 n_0 dA_0 = T dA_0 |F| (F^{-1})^T n_0$$

donde $|F|$ representa al determinante del gradiente de deformación, es por tanto que

$$T_0 = |F| T (F^{-1})^T$$

$$\therefore T = \frac{T_0}{|F|} F^T$$

Entonces, en notación índice queda

$$\Rightarrow (T_0)_{ij} = |F| T_{im} F_{jm}^{-1}$$

$$T_{ij} = \frac{1}{|F|} (T_0)_{im} F_{jm}$$

De todo lo anterior resulta evidente que como el gradiente de deformación no necesariamente es simétrico, entonces el primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff tampoco lo será, con todos los inconvenientes que esto representa.

Segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff (\bar{T})

Este tensor no tiene un significado físico y resulta de la aplicación del gradiente de deformación a un pseudovector de fuerza $d\bar{f}$, el cual se define como $d\bar{f} = \bar{t}dA_0$ donde $df = Fd\bar{f}$, esto equivale a $dx = FdX$; que como ya se mencionó, la pseudofuerza diferencial $d\bar{f}$ se transforma bajo el gradiente de deformación definido para la posición deformada; entonces, el pseudovector de esfuerzos \bar{t} está, en general, en dirección diferente que el vector de esfuerzos de Cauchy t . Es por tanto, como ya se comentó, que \bar{T} no tiene significado físico.

El segundo tensor de esfuerzos de Cauchy es una transformación lineal \bar{T} tal que

$$\bar{t} = \bar{T}n_0$$

donde n_0 es la normal al área no deformada, resulta entonces que

$$\Rightarrow d\bar{f} = \bar{T}n_0dA_0$$

Sustituyendo en la definición se tiene que

$$df = F\bar{T}n_0dA_0$$

por otra parte,

$$df = TndA$$

y también

$$df = t_0 dA_0 = T_0 n_0 dA_0$$

Igualando

$$F\bar{T}n_0 dA_0 = T_0 n_0 dA_0$$

Por consecuencia

$$\Rightarrow T_0 = F\bar{T}$$

por tanto, el segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff está relacionado con el primero de Piola-Kirchhoff a través de

$$\bar{T} = F^{-1}T_0$$

y también con el tensor de esfuerzos de Cauchy como

$$\bar{T} = F^{-1} |F| T (F^{-1})^T$$

$$\bar{T} = |F| F^{-1} T (F^{-1})^T$$

En general, para la descripción de esfuerzos se emplea el tensor de esfuerzos de Cauchy, el cual considera la configuración actual. Para algunos casos, por ejemplo la elasticidad no lineal, es conveniente la definición de una fuerza superficial medida con relación al área inicial dA_0 , y de ahí la conveniencia de emplear el primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff.

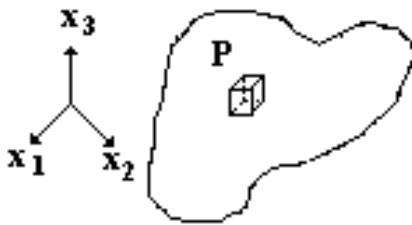
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El estado de esfuerzos en un punto de un medio continuo está dado por

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2\sigma & \alpha\sigma & \beta\sigma \\ \alpha\sigma & -\sigma & \gamma\sigma \\ \beta\sigma & \gamma\sigma & -\sigma \end{pmatrix}$$

Determine los valores de las constantes α , β y γ , de tal forma que el vector de esfuerzos en el plano octaédrico (igualmente inclinado con relación a los ejes) no exista.

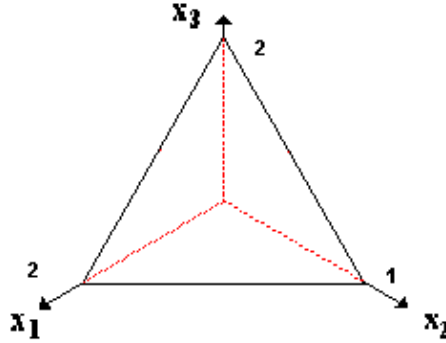
- ¿Cuál será el esfuerzo normal y esfuerzos de corte asociados a dicho plano?
 - ¿Cuál será la magnitud de la deformación hidrostática asociada al punto analizado?
 - Defina el tensor de deformaciones asociado.
 - ¿En qué magnitud difieren los esfuerzos principales asociados al tensor y desviador de esfuerzos correspondiente?
 - Determine los esfuerzos principales en el punto analizado.
2. En un punto $P(x_i)$ de un continuo, el estado de esfuerzos está dado por



$$\sigma_{ij_p} = \begin{pmatrix} -200 & 20 & 30 \\ 20 & 100 & 10 \\ 30 & 10 & -300 \end{pmatrix}$$

Con base en lo antes expuesto determine:

- El vector de esfuerzos t_i correspondiente al plano de la figura.



- b) Magnitud del cortante y normal asociados al plano.
 - c) Si se trata de un sólido elástico lineal e isotrópico ¿Cuál será la deformación hidrostática definida para el punto en cuestión?
 - d) ¿En qué magnitud difieren los esfuerzos principales asociados al tensor con relación a los asociados al desviador?
3. Un plano octaédrico es aquel que está igualmente inclinado con los ejes principales asociados al sistema.

- a) Demuestre que el esfuerzo normal en un plano octaédrico está dado por $\sigma_{oct} = \frac{I_1 \sigma}{3}$
- b) Demuestre que el esfuerzo de corte en el plano octaédrico está dado por

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)^{1/2}$$

donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son los esfuerzos principales.

4. El estado de esfuerzos en un punto p de un material está dado por

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 20 \\ 10 & 15 & -10 \\ 20 & -10 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

Determine el vector de esfuerzos en un plano que pasa por p y es paralelo al plano $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$, así como el ángulo que describe con respecto a la normal al plano y sus componentes normal y tangencial.

5. El estado de esfuerzos en un medio continuo está dado por

$$\sigma_{ij} = \beta \begin{pmatrix} x_3 x_1 & x_3^2 & 0 \\ x_3^2 & 0 & x_2^2 \\ 0 & x_2^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

Determine el vector de esfuerzo en el punto $p = (1, 1, 2)$ correspondiente a la superficie

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3$$

6. En un punto p de un medio continuo se han determinado tres diferentes vectores de esfuerzo para los planos que pasan por p , estos son

$$\begin{aligned} t_1(n) &= \hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3 & \text{para } n_1 &= -\hat{e}_1 \\ t_2(n) &= 2\sqrt{3}\hat{e}_1 + 2\sqrt{3}\hat{e}_2 & \text{para } n_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3) \\ t_3(n) &= 2(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3) & \text{para } n_3 &= \hat{e}_2 \end{aligned}$$

¿Cuál es el tensor de esfuerzos para p ?

7. La distribución de esfuerzos en un medio continuo está dado por

$$\sigma_{ij} = \kappa \begin{pmatrix} 0 & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & 0 & 0 \\ -100x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

Determine el vector de esfuerzos para un plano que pasa por $(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$ y que es tangente a la superficie cilíndrica $x_1^2 + x_2^2 = 1$

8. Una barra elíptica con una superficie lateral definida por $x_2^2 + 2x_3^2 = 1$ presenta la siguiente distribución de esfuerzos:

$$\sigma_{ij} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & -2x_3 & x_2 \\ -2x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

Demuestre que el vector de esfuerzos en cualquier punto (x_1, x_2, x_3) en la superficie lateral es cero.

9. En algunos análisis es conveniente definir el estado de esfuerzos considerando el área sin deformación, de tal forma se definen el primer y segundo tensores de esfuerzos Piola-Kirchhoff.

En particular al primer tensor de esfuerzos Piola-Kirchhoff también se le conoce como tensor lagrangiano de esfuerzos T_0 . Si T es el tensor de esfuerzos de Cauchy y

$$F = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \text{ demuestre que}$$

$$T_0 = (\det F) T (F^{-1})^T$$

y por lo tanto

$$T = \left(\frac{1}{\det F} \right) T_0 F^T$$

10. ¿Qué representa el segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff?
11. Si el segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff \bar{T} se relaciona con el primero T_0 a través de

$$\bar{T} = F^{-1} T_0$$

Demuestre que el tensor de esfuerzos de Cauchy \bar{T} está relacionado con el segundo tensor de Piola-Kirchhoff a través de

$$\bar{T} = (\det F) F^{-1} T (F^{-1})^T$$

12. La configuración de equilibrio de un campo está descrita por

$$x_1 = -\frac{1}{2}X_1, \quad x_2 = \frac{1}{2}X_3, \quad x_3 = -4X_2$$

Si el tensor de esfuerzos de Cauchy está dado por

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

- a) ¿Cuál es el correspondiente primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff?
 b) ¿Cuál es el correspondiente segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff?

13. La configuración de equilibrio de un cuerpo está descrita por

$$x_1 = 16X_1, \quad x_2 = -\frac{1}{4}X_2, \quad x_3 = -\frac{1}{4}X_3$$

Si el tensor de esfuerzos de Cauchy está dado por $T_{11} = 750$ MPa, mientras que los otros $T_{ij} = 0$, determine el primer y segundo tensores de esfuerzos de Piola-Kirchhoff.

14. Considere la siguiente distribución de esfuerzos para una barra de sección circular

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha x_3 & \alpha x_2 \\ -\alpha x_3 & 0 & 0 \\ \alpha x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

¿Cuál será la distribución de esfuerzos en la superficie circular $x_2^2 + x_3^2 = 4$?

¿Cuál es el vector de esfuerzos sobre las superficies que limitan a la barra en ambos extremos sobre el eje x_1 ($x_1 = 0; x_1 = l$)?

Determine el momento sobre una superficie cuya normal es $n_i = \hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$

15. Se puede demostrar que el cortante octaédrico está dado por

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)^{1/2}$$

donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son los esfuerzos principales. Por otra parte, el criterio de cedencia de von Mises (energía de distorsión) indica que la cedencia se presenta cuando el segundo invariante del desviador de esfuerzos $J_2 = 6k^2$, donde k representa el cortante crítico. Con base en lo anterior determine:

- a) El criterio de Von Mises en la forma $\sigma_0 = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.
- b) El esfuerzo de cedencia en función del cortante octaédrico

CAPÍTULO 5

ECUACIONES GENERALES

5.1 INTRODUCCIÓN

En la mecánica de medios continuos, las ecuaciones generales, o también conocidas como leyes de balance, son principios de la física ampliamente demostrados. Su forma más adecuada es con base en un volumen finito del continuo. En este caso se expresan como ecuaciones integrales sobre el volumen del continuo. En la ingeniería, la representación de los fenómenos físicos analizados se realiza con base en sistemas de ecuaciones diferenciales; es por consecuencia que los principios generales comúnmente se presentarán en forma diferencial definiéndose entonces como ecuaciones de campo, las cuales frecuentemente son derivadas a partir de las ecuaciones integrales. Se trata en este caso de ecuaciones definidas para un elemento de volumen diferencial (partícula).

La denominación de ecuaciones generales se debe a que representan principios de la Física que se cumplen por cualquier medio continuo, para cualquier tiempo, y posición. Estos deben satisfacerse, tanto por cualquier elemento diferencial del medio continuo (ecuaciones de campo), como por el total del volumen material asociado a éste (forma integral de las ecuaciones). Se denominan también como ecuaciones o leyes de balance por considerar que son derivadas a partir de principios de conservación de alguna propiedad física asociada al medio continuo, éstas son:

- i. Principio de conservación de masa
- ii. Principio de conservación de cantidad de movimiento
- iii. Principio de conservación de energía
- iv. Desigualdad entrópica (de Segunda Ley de la termodinámica) o también conocida como desigualdad Clausius - Duhem

5.2 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE MASA

La ley de conservación de masa indica simplemente que cada partícula material de un cuerpo o porción de éste, y por consecuencia el total, tendrá asociada una cantidad escalar positiva denominada como masa. Físicamente, la masa es asociada con la inercia, propiedad del cuerpo que representa su tendencia a resistir el cambio en las condiciones de movimiento. También se puede describir a través de la cantidad de materia asociada a un determinado volumen. Es entonces que su medición dependerá de variables de espacio y tiempo. Por consecuencia se tiene que si Δm representa la masa contenida en una pequeña fracción volumétrica ΔV del cuerpo β , su densidad está dada por

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

donde $\rho = \rho(x_i, t)$ es definida como la densidad de masa del cuerpo para la configuración determinada en el tiempo t , por lo que, en consecuencia, la masa m del cuerpo β con volumen V es

$$m = \int_V \rho dV$$

Como la masa no se crea ni se destruye (principio de conservación de masa), se tiene que su razón de cambio en el tiempo deberá ser igual a cero

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\rho dV) = 0 \quad (5.1)$$

Considerando las fórmulas de transporte presentadas en el capítulo 1, se tiene que

$$\frac{D}{Dt} \int \varphi(x_i, t) dV = \int \left(\frac{D\varphi}{Dt} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV \quad (5.2)$$

Por tanto, al aplicar la fórmula de transporte, expresada en la ecuación 5.2, a la expresión de conservación de masa indicada en la ecuación 5.1 se tiene que

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho(x_i, t) dV = 0 = \int_V \left(\frac{D\rho(x_i, t)}{Dt} + \rho \nabla \cdot v \right) dV \quad (5.3)$$

Como se integra sobre un volumen material (siempre $\int_V dV > 0$) cualesquiera, se cumple entonces que

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot v) = 0 \quad (5.4)$$

esto para cualquier elemento diferencial y tiempo; donde la ecuación 5.4 es la correspondiente ecuación de campo (forma diferencial). Esta ecuación se denomina como Ecuación de conservación de masa o Ecuación de la continuidad y representa la Ley de conservación de masa en forma espacial (coordenadas eulerianas). Esta ecuación diferencial de primer orden constituye una de las ecuaciones fundamentales de la mecánica del continuo. Al desarrollar la derivada material de la densidad, la ecuación 5.4, también se expresa como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho) \cdot v + \rho(\nabla \cdot v) = 0 \quad (5.5)$$

La expresión 5.4 es una ecuación diferencial de primer orden la cual se presenta en función de ρ , t ; en el caso de que ρ se mantenga constante, la expresión se simplifica, quedando de la forma

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (5.6)$$

El término de Ecuación de la continuidad se orienta a indicar constancia de masa.

Dicha ecuación fue desarrollada primero por Euler en 1757, sin embargo, ya en 1752 d'Alambert había desarrollado una forma particular de ésta, la cual en ocasiones puede ser de utilidad, se presenta como

$$\frac{D}{Dt}(\log \rho) + \nabla \cdot v = 0$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \nabla \cdot v$$

ecuación que se puede expresar en la forma alternativa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot (\nabla \rho) + \rho (\nabla \cdot v) = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho v) = 0 \quad (5.8)$$

5.3 ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD EN FORMA MATERIAL

Dado que la ecuación de conservación de masa demanda que la masa sea la misma en todas las configuraciones del MC, se puede derivar esta expresión a partir de la comparación de la representación de la masa en la forma lagrangiana (referencia) y espacial (euleriana). Por tanto, a partir de la descripción de la masa se tiene

$$m = \int_V \rho(x_i, t) dV = \int_{V_0} \rho_0(X, t) dV_0$$

Considerando el desplazamiento de la configuración de referencia a la actual $x = x(X, t)$, se tiene

$$\int_V \rho[x(X, t), t] dV = \int_{V_0} \rho_0(X, t) dV_0$$

Reordenando la expresión e igualando a cero

$$\int_{V_0} [\rho(X, t)|F| - \rho_0(X, t)] dV_0 = 0$$

Dado que la integración se realiza sobre un volumen arbitrario, se tiene que

$$\rho|F| = \rho_0$$

Derivando la expresión anterior con respecto al tiempo, se tiene

$$\frac{D}{Dt}(\rho|F|) = 0 \quad (5.9)$$

A esta última expresión se le denomina como ecuación de la continuidad en forma lagrangiana, donde

$$F = \nabla_X x; \Rightarrow \det F = |F|$$

$$|F| = J$$

La ecuación de la continuidad en forma lagrangiana también se puede desarrollar a partir de

$$\frac{D}{Dt}(\rho J) = \dot{\rho} J + \rho \dot{J}$$

$$\frac{DJ}{Dt} = J(\nabla \cdot v)$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho J) = J(\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot v) = 0$$

de donde se tiene

$$\frac{D}{Dt}(\rho J) = 0$$

Por otra parte,

$$\rho(X, t_0) = \rho_0$$

Para la configuración inicial en donde $t = t_0$ y $x = X$ se tiene que $J = 1$, por lo que

$$\rho J = \rho_0 \quad (5.10)$$

Ecuación que es equivalente a la 5.9. Esta expresión también fue desarrollada por Euler.

Dado que

$$\frac{D}{Dt}(\rho dV) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho$$

y en forma general

$$\rho(\nabla \cdot v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho = 0$$

Por lo que para coordenadas rectangulares (es conveniente recordar que la notación índice solo se puede aplicar para coordenadas rectangulares), entonces:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = 0 \quad (5.11)$$

Por otra parte, en coordenadas cilíndricas se expresa como

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

Mientras que en coordenadas esféricas se tiene

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} = 0$$

Como ya ha sido mencionado, si el material es incompresible

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$\rho \operatorname{div} v = 0$$

$$\rho \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{div } v = 0$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

En un sistema coordenado cilíndrico esto queda como

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

y considerando coordenadas esféricas, se tiene que

$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} = 0$$

5.4 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO (ECUACIÓN DE CAUCHY)

Esta ecuación representa la conservación de cantidad de movimiento de cualquier medio continuo, de acuerdo con ésta, cada partícula para cualquier tiempo deberá cumplir con la ecuación de movimiento de Newton (principio de conservación de cantidad de movimiento).

Desarrollo de la Ecuación de conservación de movimiento en forma integral

La cantidad de movimiento lineal p asociada a cualquier cuerpo se expresa por:

$$p = mv$$

donde

$$m = \int \rho dV$$

Por lo que

$$p = \int_M v dm$$

Entonces,

$$p = \int_V \rho v dV$$

Por otra parte, existen dos tipos de fuerza

- a) De contacto o de superficie
- b) De cuerpo

Por lo que la fuerza resultante (f_R) está dada por

$$f_R = f_{\text{contacto}} + f_{\text{cuerpo}}$$

La ecuación de movimiento de Newton (segunda ley de Newton) indica que la razón de cambio en la cantidad de movimiento asociada al medio continuo es igual a la fuerza resultante:

$$\frac{Dp}{Dt} = f_R$$

Para el caso de las fuerzas de cuerpo, éstas se describen a partir de la aceleración B que produce un campo sobre el cuerpo de masa

$$m = \int_V \rho dV$$

por lo que

$$f_{\text{cuerpo}} = \int_V \rho B dV$$

Por otra parte, las fuerzas de superficie se expresan a partir del vector de esfuerzos t descrito en la superficie del medio continuo, de tal forma que

$$f_{\text{contacto}} = \int_A t dA$$

En consecuencia, se tiene que

$$f_R = \int_V \rho B dV + \int_A t dA$$

Sustituyendo con la razón de cambio de la cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{Dp}{Dt} &= \int_V \rho B dV + \int_A t dA \\ \frac{D}{Dt} \left(\int_V \rho v dV \right) &= \int_V \rho B dV + \int_A t dA \end{aligned} \quad (5.12)$$

Considerando la fórmula de transporte en la parte izquierda de la ecuación 5.12

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho v dV &= \int_V \left(\frac{D(\rho v)}{Dt} + \rho v (\nabla \cdot v) \right) dV \\ \Rightarrow \quad \frac{Dp}{Dt} &= \int_V v \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot v) \right) dV + \int_V \rho \left(\frac{Dv}{Dt} \right) dV \end{aligned}$$

donde el término que se encuentra entre paréntesis dentro de la primera integral representa la ecuación de conservación de masa, por lo que es igual a cero. Por tal motivo, la ecuación que representa la razón de cambio de la cantidad de movimiento se expresa como

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v dV = \int_V \rho \frac{Dv}{Dt} dV$$

Por su parte, para las fuerzas de superficie

$$\int_A t dA = \int_A (T \cdot n) dA$$

Aplicando ahora el teorema de la divergencia, se transforma el término de una integral de superficie a una de volumen.

$$\int_A (T \cdot n) dA = \int_V (\nabla \cdot T) dV$$

Sustituyendo en la ecuación 5.12 e igualando a cero

$$\int_V \left(\rho \frac{Dv}{Dt} - \rho B - \nabla \cdot T \right) dV = 0 \quad (5.13)$$

Como se está integrando sobre un volumen V arbitrario, se tiene que los términos que se encuentran entre paréntesis deberán ser igual a cero, por lo que la forma integral se reduce a una ecuación de campo

$$\rho \frac{Dv}{Dt} - \rho B - \nabla \cdot T = 0$$

Lo anterior se puede expresar como

$$\nabla \cdot T + \rho B = \rho \frac{Dv}{Dt} \quad (5.14)$$

Entonces, en notación índice queda

$$\sigma_{ij,j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

o de otra forma

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (5.15)$$

donde T , T_{ij} , σ , σ_{ij} representan el tensor de esfuerzos de Cauchy, mientras que v , v_i representan el campo de velocidades.

La ecuación de conservación de cantidad de movimiento, en su forma diferencial, también se puede desarrollar a partir del análisis de un elemento diferencial (figura 5.1), en este caso se procede a sumar todas las fuerzas presentes, esto en dirección de los ejes de referencia, de tal forma que:

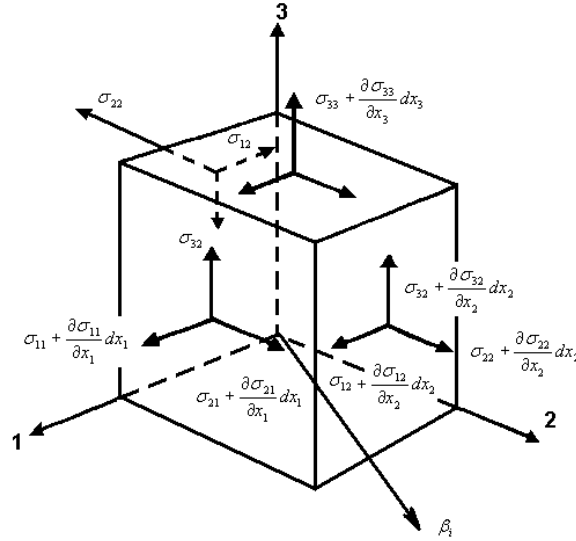


FIGURA 5.1 FUERZAS DE SUPERFICIE Y CUERPO DESCRITAS SOBRE UN ELEMENTO DE VOLUMEN DIFERENCIAL

Resulta evidente que al sumar en dirección del eje x_1 , la expresión resultante es

$$\frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} + \rho B_1 = \rho \frac{Dv_1}{Dt}$$

Para los ejes x_2 y x_3 , las expresiones serán similares por lo que se puede generalizar a través de

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

La ecuación de conservación de movimiento es una expresión vectorial, la cual tiene el siguiente desarrollo en función de la base de referencia.

Coordenadas rectangulares

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \rho B_1 = \rho \frac{Dv_1}{Dt}$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \rho B_2 = \rho \frac{Dv_2}{Dt}$$

$$\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \rho B_3 = \rho \frac{Dv_3}{Dt}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \rho B_r = \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} + \rho B_\theta = \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{zr}}{r} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \rho B_z = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

Coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (T_{r\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r} + \rho B_r =$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \sin \theta \right) \right)$$

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial (r^3 T_{\theta r})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (T_{\theta\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} - \frac{T_{r\theta} - T_{\theta r} - T_{\phi\phi} \cot \theta}{r} + \rho B_\theta =$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cos \theta \right) \right)$$

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial (r^3 T_{\phi r})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (T_{\phi \theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi \phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\phi} - T_{\phi r} + T_{\theta\phi} \cot \theta}{r} + \rho B_{\phi} =$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_{\phi}}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_{\phi}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \left(\frac{\partial v_{\phi}}{\partial \theta} \right) + \frac{v_{\phi}}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_{\phi}}{\partial \phi} \right) + \frac{v_{\phi} v_r}{r} + \frac{v_{\phi} v_{\theta} \cot \theta}{r} \right)$$

Simplificaciones de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento

La ecuación de Cauchy $\nabla \cdot T + \rho B = \rho \frac{Dv}{Dt}$ por condiciones de equilibrio se simplifica igualándola a cero, de tal forma que

$$\nabla \cdot T + \rho B = 0$$

En ocasiones, por ejemplo, en el análisis de esfuerzos es muy común despreciar el efecto de las fuerzas de cuerpo, por lo que se deberá cumplir que

$$\nabla \cdot T = 0$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Ecuación de movimiento en forma material

Considerando un estado inicial, la ecuación de conservación de movimiento se expresa

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_0} \rho_0 v dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 B dV_0 + \int_{A_0} (T_0) n_0 dA_0$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la superficie integral y partiendo de que V y V_0 representan un volumen arbitrario, entonces, la ecuación de movimiento se expresa en función del primer tensor de Piola-Kirchhoff.

$$\operatorname{div}(T_0) + \rho_0 B = \rho_0 \frac{Dv}{Dt}$$

Dicho concepto se emplea entre otros casos para el análisis no lineal.

Considerando los tensores de Piola-Kirchhoff

$$\text{Primer tensor de Piola-Kirchhoff} \quad T = \frac{T_0}{|F|} (F^T) \quad \rightarrow \quad T_0 = |F| T (F^{-1})^T$$

$$\text{Segundo tensor de Piola-Kirchhoff} \quad \bar{T} = |F| F^{-1} T (F^{-1})^T \quad \rightarrow \quad T_0 = F \bar{T}$$

Para el primer tensor de Piola Kirchhoff se tiene

$$\nabla \cdot T_0 + \rho_0 B = \rho_0 \frac{Dv}{Dt} \quad (5.16)$$

Mientras que para el segundo tensor de Piola Kirchhoff se tiene

$$\nabla \cdot (F \bar{T}) + \rho_0 B = \rho_0 \frac{Dv}{Dt} \quad (5.17)$$

donde F representa el gradiente de deformación $(\nabla_x x)$, por otra parte, dado que

$$x_i = X_i + u_i$$

entonces,

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \partial_j u_i = F_{ij}$$

O, en notación general, se tiene que el gradiente de deformación $F = I + \nabla u$, por lo que

$$\operatorname{div}[(I + \nabla u)\bar{T}] + \rho_0 B = \rho \frac{Dv}{Dt} \quad (5.18)$$

Las ecuaciones 5.17 y 5.18 son formas alternativas de la *ecuación de movimiento expresada considerando la ecuación en función del primer tensor de Piola Kirchhoff* (5.14). Siendo más conveniente la aplicación de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento en su forma material (5.16, 5.17), que la ecuación de Cauchy, *esto es para el caso de análisis de elasticidad no lineal*.

Las ecuaciones 5.16 y 5.17 fueron primero desarrolladas por Piola en 1833.

5.5 PRINCIPIO DE ESFUERZOS DE CAUCHY

El vector de esfuerzos t en cualquier lugar y tiempo tiene un valor común en todas las partes del material, teniendo un plano tangente común p y quedando en el mismo lado de éste.

Sea $t = t(x, \tau, n)$, donde τ es el tiempo, si

$$t = Tn$$

donde T es el tensor de esfuerzos Cauchy. De acuerdo con lo que se ha revisado se tiene que

$$df = t_0 dA_0$$

donde t_0 es un pseudovector de esfuerzos definido para el área sin deformar, el cual no describe la intensidad actual de (esfuerzos), sin embargo, tiene la misma dirección que el vector de esfuerzos de Cauchy t .

Sea T_0 el primer tensor de esfuerzos de Piola Kirchhoff (Tensor lagrangiano de esfuerzos)

$$t_0 = T_0 n_0$$

La relación entre el primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff (PK) y el tensor de esfuerzos de Cauchy se obtiene como

$$df = t dA = t_0 dA_0$$

$$T_0 n_0 = \left(\frac{dA}{dA_0} \right) T n = T \frac{dA}{dA_0} n$$

Como ya se demostró, se tiene entonces

$$T_0 = |F| T (F^{-1})^T$$

Recordando que

$$F_{im} = \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \rightarrow F_{im}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_m}$$

$$F = \nabla x = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} = (\nabla x)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

A partir de lo anterior se puede plantear la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (ecuación de Cauchy) para la configuración de referencia como

$$\frac{\partial (T_0)_{im}}{\partial X_m} + \rho_0 B_i = \rho_0 \frac{Dv_i}{Dt} = \rho_0 a_i$$

donde $(T_0)_{im}$ representa las componentes cartesianas del primer tensor de (PK) y ρ_0 , la densidad en la configuración de referencia.

$$\frac{\partial (T_0)_{im}}{\partial X_m} + \rho |F| B_i = \rho |F| a_i$$

Como

$$dV = |F| dV_0$$

$$\rho |F| = \rho_0$$

Por lo que en notación general queda

$$\nabla \cdot T_0 + \rho_0 B = \rho_0 a$$

5.6 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Este principio lo que representa es un balance de energías. Para tal fin se debe realizar el balance de las energías en tránsito y del remanente en el cuerpo. En este caso se considera que la energía en el medio continuo está determinada por la denominada energía interna U , la cual es un parámetro fundamental a la que habrá que sumar el efecto de la energía asociada al movimiento o energía cinética K . Por otra parte, sobre el medio continuo también se puede efectuar trabajo W y se presentarán energías en tránsito, las cuales se representan a través de los flujos de calor (Q) .

La energía cinética K de un cuerpo β , que ocupa una configuración A , de volumen V , en un tiempo t , es definido como:

$$K = \frac{1}{2} m |v|^2 = \frac{1}{2} \int_V \rho (v \cdot v) dV$$

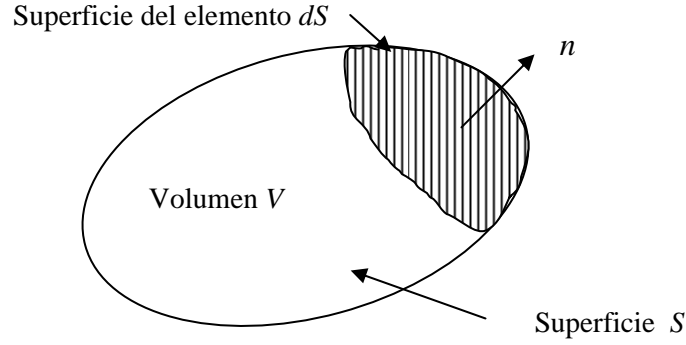


FIGURA 5.2 CUERPO β EN UNA CONFIGURACIÓN A A UN TIEMPO t ,
CON VOLUMEN V , MASA M , Y SUPERFICIE S

Asimismo, la potencia desarrollada por las fuerzas externas actuando sobre β en V están dadas por la suma del efecto generado por las fuerzas de cuerpo, más el correspondiente a las fuerzas de superficie; en este punto se debe de recordar el concepto de potencia mecánica, que $\dot{w} = f_i v_i$, de tal forma que

$$\dot{W} = \dot{W}_{fc} + \dot{W}_{fs}$$

La potencia asociada a las fuerzas de cuerpo se expresa

$$\dot{W}_{fc} = \int_V \rho B \cdot v dV$$

La potencia desarrollada por las fuerzas de superficie es

$$\dot{W}_{fs} = \int_A t \cdot v dA$$

Por lo que la rapidez de cambio de trabajo producto de las fuerzas presentes en el MC es

$$\dot{W} = \int_V \rho B \cdot v dV + \int_A t \cdot v dA$$

Si el continuo es conductor de calor y si existe una diferencia de temperatura entre el interior y el exterior, entonces existirá un flujo de calor Q_c

$$Q_c = \int_A q \cdot n dA$$

donde q describe vectorialmente al flujo de calor.

Si el calor es generado dentro de V (cantidad de calor generado H dentro de V), éste por unidad de tiempo es

$$\dot{H} = \int_V \rho h dV$$

donde h es la capacidad específica de la fuente de calor interna o capacidad de la fuente de calor (calor unitario) y \dot{h} es la rapidez con la que se genera calor al interior del medio continuo.

El monto de calor contenido en V por unidad de tiempo está dado por el calor que se genera menos lo que se pierde:

$$Q_R = H - Q_c$$

Se considera que además de la energía cinética, el continuo presenta otra energía definida como energía interna y que la energía total del continuo es la suma de la energía cinética e interna. El concepto de energía interna es primitivo a semejanza de la masa, tiempo, fuerza, etc.

La energía interna U que posee el cuerpo β en la configuración A es

$$U = \int_M u dm$$

$$U = \int_V \rho u dV$$

donde u es la energía interna por unidad de masa.

De todo lo antes expuesto se tiene que la rapidez de cambio de la energía (potencia) asociada al medio continuo está dada por la velocidad de intercambio de calor y de trabajo

$$\frac{D}{Dt}(K + U) = P + (\dot{H} - Q) \quad (5.19)$$

Sustituyendo cada una de las expresiones que representan una aportación de calor o trabajo, se tiene

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(\frac{1}{2} (v \cdot v) + u \right) dV = \int_V (\rho B \cdot v) dV + \int_A (t \cdot v) dA + \int_V (\rho \dot{h}) dV - \int_A (q \cdot n) dA$$

donde

u	energía interna específica
v	velocidad
K	energía cinética
B	aceleración generada por la presencia de campos
t	vector de esfuerzos
ρ	densidad
q	vector de flujo de calor
\dot{h}	calor específico generado al interior del medio continuo (flujo por radiación, calor producto de una reacción química, en general representa calor que fluye al medio por otros fenómenos diferentes de la conducción)
n	normal al elemento dA

En el caso de la energía cinética se tiene, a través de la fórmula de transporte, que

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(\frac{1}{2} (v \cdot v) + u \right) dV = \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} (v \cdot v) + u \right) dV = \int_V \rho \left(v \cdot \frac{Dv}{Dt} + \frac{Du}{Dt} \right) dV$$

Por su parte, para las fuerzas de superficie considerando el teorema de la divergencia

$$\int_A (t \cdot v) dA = \int_A (T \cdot v) \cdot n dA = \int_V \nabla \cdot (T \cdot v) dV$$

$$\int_V \text{div}(Tv) dV = \int_V (v \cdot (\nabla \cdot T) + T : \nabla v) dV$$

Y el calor, de conducción, considerando el teorema de la divergencia, se expresa como

$$\int_A (q \cdot n) dA = \int_V (\nabla \cdot q) dV$$

Sustituyendo, igualando a cero y reagrupando términos en la ecuación de conservación de energía, se tiene

$$\int_V \left(\rho \frac{Du}{Dt} + v \left(\rho \frac{Dv}{Dt} - \nabla \cdot T - \rho B \right) - T : \nabla v + \nabla \cdot q - \rho \dot{h} \right) dV = 0$$

Pero de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (5.10) se sabe que

$$\int_V \left(\rho \frac{Dv}{Dt} - \nabla \cdot T - \rho B \right) dV = 0$$

Entonces la ecuación se puede simplificar a

$$\int_V \left(\rho \frac{Du}{Dt} - T : \nabla v + \nabla \cdot q - \rho \dot{h} \right) dV = 0 \quad (5.20)$$

Dado que se integra sobre un volumen cualquiera mayor que cero, entonces

$$\rho \frac{Du}{Dt} - T : \nabla v + \nabla \cdot q - \rho \dot{h} = 0 \quad (5.21)$$

Despejando se tiene la ecuación de conservación de energía

$$\rho \frac{Du}{Dt} = T : \nabla v - \nabla \cdot q + \rho \dot{h} \quad (5.22)$$

Al realizar el desarrollo se tiene

$$T : \nabla v = \text{traza } T_{ij} D_{kl} = \text{traza } T \otimes D = T_{ij} D_{ij}$$

donde D_{kl} representa el tensor de rapidez de deformación.

En notación índice, la ecuación 5.22 se expresa como

$$\rho \frac{Du}{Dt} = T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho \dot{h} \quad (5.23)$$

En notación general, la ecuación 5.23 se expresa como

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \text{traza}(TD) - \nabla \cdot q + \rho \dot{h} \quad (5.24)$$

5.7 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA EN FORMA MATERIAL

A partir de la ecuación de conservación de energía en su descripción euleriana, se puede fácilmente pasar a su correspondiente descripción material:

$$\int_V \left(\rho \frac{Du}{Dt} - T : \nabla v + \nabla \cdot q - \rho \dot{h} \right) dV = 0 \quad (5.25)$$

Esta ecuación se puede descomponer en sus elementos, de tal forma que

$$\int_V \rho \frac{Du(x_i, t)}{Dt} dV = \int_{V_0} \rho_0 \frac{Du(X_i, t)}{Dt} dV_0$$

$$\int_V (T : \nabla v) dV = \int_{V_0} (T_0 : \nabla_X v) dV_0$$

$$\int_V (\nabla \cdot q) dV = \int_{V_0} (\nabla_X \cdot q) dV_0$$

$$\int_V (\rho \dot{h}) dV = \int_{V_0} (\rho_0 \dot{h}_X) dV_0$$

Sustituyendo en la ecuación 5.25

$$\int_{V_0} \left(\rho_0 \frac{Du_X}{Dt} - T_0 : \nabla_X v + \nabla_X \cdot q - \rho_0 \dot{h}_X \right) dV_0 = 0 \quad (5.26)$$

En la ecuación 5.26 al igual que en la ecuación 5.25 se está integrando sobre un volumen cualquiera (en este caso V_0) mayor que cero, se puede concluir entonces que la suma de los términos dentro del paréntesis es igual a cero, situación a partir de la que se define la ecuación de campo correspondiente (en este caso en su descripción material).

$$\rho_0 \frac{Du_X}{Dt} = T_0 : \nabla_X v - \nabla_X \cdot q + \rho_0 \dot{h}_X \quad (5.27)$$

5.8 DESIGUALDAD ENTRÓPICA

Todo cuerpo, así como tiene una energía interna asociada; también presenta una propiedad primitiva denominada entropía \hat{H} , la cual se modifica en función del flujo de calor que se presenta desde y hacia el cuerpo. Ésta se incrementa cuando el calor fluye al medio continuo y disminuye cuando sale calor del cuerpo. Se define que la entropía asociada a un medio continuo \hat{H} se expresa como

$$\hat{H} = \int_M \eta dm$$

$$\hat{H} = \int_V \rho \eta dV$$

donde $\eta = \eta(x_i, t)$ representa la entropía por unidad de masa.

Dado que la entropía está asociada con el calor contenido en el cuerpo, entonces estará relacionada con la temperatura θ . El calor contenido en el cuerpo está dado por la diferencia de lo que se genera menos lo que se disipa, por lo que se definirá un término que represente la rapidez de incremento de entropía \hat{Q} , dicho término está definido por:

$$\hat{Q} = \dot{S}_S - \dot{S}_f$$

donde al término \dot{S}_S se le denomina como fuente de entropía; mientras que \dot{S}_f representa el flujo de entropía. Considerando las definiciones empleadas en la ecuación de balance de energía se tiene que

$$\dot{S}_S = \int_V \frac{\rho \dot{h}}{\theta} dV$$

$$\dot{S}_f = \int_A \left(\frac{q}{\theta} \right) \cdot dA$$

De lo antes expuesto se define que la entropía en el cuerpo se incrementará con una velocidad mayor, y en el límite igual, que con la que ésta ingresa al cuerpo:

$$\frac{D\hat{H}}{Dt} \geq \hat{Q} \quad \therefore \quad \frac{D\hat{H}}{Dt} \geq \dot{S}_S - \dot{S}_f$$

Al sustituir, se tiene que

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \eta dV \geq \int_V \left(\frac{\rho \dot{h}}{\theta} \right) dV - \int_A \left(\frac{q}{\theta} \right) \cdot n dA$$

Al utilizar la fórmula de transporte para el término de la izquierda, reagrupando la desigualdad y aplicando el teorema de la divergencia al segundo término del lado derecho, se tiene que

$$\int_V \left(\rho \frac{D\eta}{Dt} - \frac{\rho \dot{h}}{\theta} + \nabla \cdot \left[\frac{q}{\theta} \right] \right) dV \geq 0$$

Como la integral se realiza para un volumen arbitrario de un medio continuo, se concluye entonces que

$$\rho \frac{D\eta}{Dt} + \nabla \cdot \left(\frac{q}{\theta} \right) - \frac{\rho \dot{h}}{\theta} \geq 0 \quad (5.28)$$

la ecuación 5.28 se le denomina desigualdad de Clausius-Duhem, ya que se desarrolló a partir de sus trabajos publicados en 1854 (Clausius) y 1901 (Duhem). Resulta evidente que la desigualdad se exprese en la forma

$$\rho \frac{D\eta}{Dt} \geq \rho \frac{\dot{h}}{\theta} - \nabla \cdot \left(\frac{q}{\theta} \right) \quad (5.29)$$

Por lo que también se le denomina como *Ley de desigualdad de entrópica*.

Desarrollando el término correspondiente al flujo de calor, se tiene

$$\nabla \cdot \left(\frac{q}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta} (\nabla \cdot q) - \frac{1}{\theta^2} (\nabla \theta) \cdot q$$

Por lo que si se sustituye en la ecuación 5.28:

$$\rho \theta \frac{D\eta}{Dt} - \rho \dot{h} + \nabla \cdot q - \frac{1}{\theta} (\nabla \theta) \cdot q \geq 0 \quad (5.30)$$

Una forma alternativa desarrollada a partir de los conceptos expresados en la ecuación de la energía es [despejando los términos referentes al calor de la ecuación de la energía]

$$\rho\theta\frac{D\eta}{Dt}-\rho\frac{Du}{Dt}+T:D-\frac{1}{\theta}(\nabla\theta)\cdot q\geq 0 \quad (5.31)$$

El calor fluye en dirección inversa al gradiente de temperatura, por lo tanto, el tensor de rango uno que describe el flujo de calor q_i y el tensor resultante de $(\nabla\theta)_i$ van en direcciones opuestas, por lo que

$$(\nabla\theta)\cdot q\leq 0$$

Es entonces que se plantea la desigualdad de conducción de calor

$$\rho\theta\frac{D\eta}{Dt}-\rho\frac{Du}{Dt}+T:D\geq 0$$

5.9 DESIGUALDAD ENTRÓPICA EN FORMA MATERIAL

Retomando la forma integral de la ecuación de entropía y reescribiendo los términos, considerando la configuración inicial (referencia lagrangiana) se tiene

$$\int_{V_0}\left(\rho_0\frac{D\eta_X}{Dt}-\frac{\rho_0\dot{h}_X}{\theta}+\nabla\cdot\left[\frac{q_0}{\theta}\right]\right)dV_0 \quad (5.32)$$

Considerando igualmente que se integra sobre un volumen arbitrario se tiene

$$\rho_0\frac{D\eta_X}{Dt}-\rho_0\frac{\dot{h}_X}{\theta}+\nabla\cdot\left(\frac{q_0}{\theta}\right)\geq 0 \quad (5.33)$$

Ecuación conocida como desigualdad de Clausius-Duhem en forma material.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Deduzca la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (ecuación de Cauchy), la cual representa que cada partícula del continuo debe cumplir con la segunda ley de

Newton.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho a_i$$

Considere un sistema coordenado cartesiano x_1, x_2, x_3 , densidad ρ , aceleración total de la partícula a , fuerzas de un cuerpo B , fuerzas de superficie σ_{ij} .

2. Si el campo de velocidades asociado a una partícula está dado por $v_i = \frac{x_i}{t} a$, a partir de la ecuación de conservación de masa

$$\frac{D(\rho dV)}{Dt} = 0 = \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{D\rho}{Dt}$$

- a) Determine la variación de la densidad de la partícula en función del tiempo.
b) Considere que para un tiempo igual a uno la densidad es ρ_0 (densidad inicial) y para cualquier tiempo (t) la densidad asociada es ρ .
3. La distribución de esfuerzos en un cuerpo está dada por T_{ij} . Considerando lo anterior, ¿existirá equilibrio? O, en su caso, ¿qué fuerzas de cuerpo se requerirán para garantizar éste? Considere que el material presenta una densidad ρ .

$$T_{ij} = \alpha \begin{bmatrix} 4x_1^2 + x_2 & 2x_1 - x_2^3 & x_1^2 \\ 2x_1 - x_2 & x_1 - 3x_2 & 3x_3 \\ x_1^2 & 3x_3 & x_1 \end{bmatrix}$$

4. Determine si la ecuación de conservación de masa es satisfecha por el siguiente campo de velocidades $v = v(r, \theta, z)$

$$v_r = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \alpha}{\partial r}$$

La densidad ρ es constante y $\alpha = \alpha(r, z)$ tiene segundas derivadas parciales continuas.

5. Considerando que se tiene un fluido viscoso, lineal e incompresible, para el que el campo de velocidades, en coordenadas cilíndricas, está dado por

$$v_r = v(r, \theta) \quad v_\theta = 0 \quad v_z = 0$$

a) A partir de la ecuación de la continuidad analice si cumple que

$$v_r = \frac{f(\theta)}{r}, \text{ donde } f(\theta) \text{ es una función cualquiera de } \theta$$

b) La ecuación constitutiva de un fluido viscoso, lineal e incompresible es

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}$$

Por otra parte, en ausencia de fuerzas de cuerpo y con base en la ecuación de conservación de cantidad de movimiento verifique si

$$\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta^2} + 4f + \rho \frac{f^2(\theta)}{\mu} + k = 0$$

con $p = 2\mu \frac{f}{r^2} + \frac{k\mu}{2r^2} + C$, donde k y C representan constantes.

6. Dado el siguiente campo de velocidades

$$v_1 = ax_1 - bx_2 \quad ; \quad v_2 = bx_1 + ax_2 \quad ; \quad v_3 = c(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

donde a , b y c son constantes, determine si la ecuación de conservación de masa se satisface o no.

7. Dado el siguiente campo de esfuerzos en coordenadas cilíndricas.

$$\sigma_{rr} = -\frac{3Pr^2 Z}{2\pi R^5} \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad ; \quad \sigma_{zz} = -\frac{3PZ^3}{2\pi R^5}$$

$$\sigma_{rz} = -\frac{3PrZ^2}{2\pi R^3} \quad ; \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0 \quad ; \quad R^2 = r^2 + z^2$$

Verifique si dicho campo de esfuerzos satisface las ecuaciones de equilibrio en ausencia de fuerzas de cuerpo.

8. Para el movimiento irrotacional de un continuo cuya velocidad está definida por $v = \nabla \varphi$ demostrar que la ecuación de la continuidad se expresa $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla^2 \varphi = 0$.

Deducir que si el continuo es un medio incompresible, entonces φ es una función armónica, esta es una función dos veces continuamente derivable y satisface la ecuación

$$\text{de Laplace } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0 \quad \text{o} \quad \nabla^2 f = 0.$$

9. Para la ecuación constitutiva $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl}$ si $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ y $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ji}$ el tensor C_{ijkl} no tiene más de 36 diferentes componentes. Verifique si bajo las condiciones antes enunciadas y considerando que la rapidez de desarrollo de trabajo se expresa como

$$\frac{DW}{Dt} = \int \sigma_{ij} d\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}, \text{ ésta también se puede expresar mediante } \frac{DW}{Dt} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Se conoce que $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$

10. Un flujo bidimensional de un fluido incompresible se describe como

$$v_i = \frac{a(x_1^2 - x_2^2)}{r^4} \hat{e}_1 + 2a \frac{(x_1 x_2)}{r^4} \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Verifique si éste cumple con la ecuación de la continuidad.

11. Para un medio continuo que presenta una ecuación constitutiva de la forma

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}, \text{ desarrolle sus ecuaciones de conservación de movimiento, recuerde que } \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

12. El flujo de un fluido incompresible se describe como

$$v_i = \frac{2(x_1 x_2 x_3)}{r^4} \hat{e}_1 + \frac{(x_1^2 - x_2^2)x_3}{r^4} \hat{e}_2 + \frac{x_2}{r^2} \hat{e}_3$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Verifique si éste cumple con la ecuación de la continuidad y si se trata de un flujo rotacional o irrotacional.

13. La ecuación de movimiento de un MC está dada por $x_i = \left(1 + \frac{t}{b}\right) X_i$, donde b es una constante. La densidad para $t = 0$ es ρ_0 , ¿Cuál será la densidad para cualquier tiempo?

CAPÍTULO 6

COMPORTAMIENTO ELÁSTICO

6.1 ANTECEDENTES

Una vez establecidas las ecuaciones generales, las cuales representan las condiciones que deberán ser cumplidas por cualquier medio continuo para cualquier posición y tiempo, es necesario definir las ecuaciones que describan el comportamiento de medios idealizados, las cuales se denominan como ecuaciones constitutivas.

En los sólidos es común observar que su deformación es proporcional a la carga aplicada, situación que también se puede describir en el sentido de que las deformaciones son proporcionales a las solicitaciones (esfuerzos) presentes en el material

$$[\Delta \varepsilon \propto \Delta f] \text{ o } [\varepsilon \propto \sigma]$$

Considerando toda la evidencia experimental que se ha generado hasta la fecha, y simplificando la respuesta, se puede afirmar que la deformación es una función única de las solicitaciones aplicadas; de tal manera que se descarta cualquier efecto de la velocidad de carga

$$\varepsilon = g\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)$$

Por otra parte, una vez que se elimina la carga la deformación desaparece completamente y, en general, estas deformaciones son muy pequeñas (infinitesimales). En el caso de cualquier medio continuo que presenta un comportamiento con las restricciones antes descritas se define su comportamiento como *elástico*, describiéndose como *inelásticos* aquellos materiales cuyo comportamiento no cumple con las condiciones antes especificadas. Afortunadamente, un buen número de materiales tales como los metales y el concreto cumplen con las condiciones establecidas y en otros casos, como la madera, se puede aproximar, dentro de ciertos rangos, su comportamiento.

En general en los sólidos, para el caso de pequeñas deformaciones (infinitesimales), se puede describir su comportamiento como lineal; mientras que para grandes deformaciones la relación entre esfuerzo y deformación será no lineal.

En primer término, en este capítulo se analizará el comportamiento de sólidos elásticos lineales, considerando los diferentes modelos idealizados, para al final describir las condiciones en las cuales se presentan comportamientos elásticos no lineales.

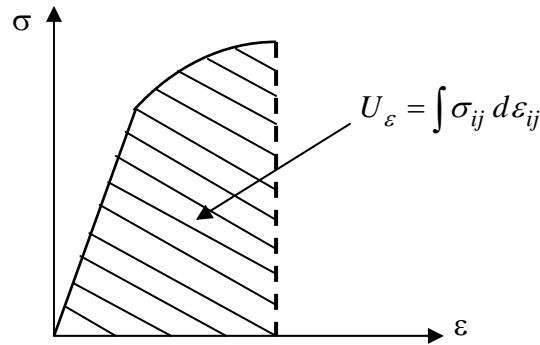


FIGURA 6.1 COMPORTAMIENTO CARACTERÍSTICO DE UN SÓLIDO ELÁSTICO LINEAL. EN UNA PRIMERA ETAPA LA RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN ES LINEAL, LA CUAL CORRESPONDE CON LA ZONA ELÁSTICA. POSTERIORMENTE, LA RELACIÓN SE VUELVE NO LINEAL, LA QUE CORRESPONDE CON LAS DEFORMACIONES PERMANENTES (DEFORMACIÓN PLÁSTICA)

6.2 DESCRIPCIÓN DEL COMPORTAMIENTO

Con base en las características enunciadas se formula la ecuación constitutiva de un material elástico ideal (sólido elástico lineal), en la forma $\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{kl})$, donde σ_{ij} representa al tensor de esfuerzos de Cauchy, mientras que ε_{kl} es el tensor de deformación infinitesimal. En el caso de la deformación elástica se considera que los desplazamientos son muy pequeños (infinitesimales) por lo que las descripciones lagrangiana y euleriana son equivalentes, por lo que

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Con base en lo enunciado se desarrolla un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= C_{1111}(\varepsilon_{11}) + C_{1112}(\varepsilon_{12}) + \dots + C_{1123}(\varepsilon_{23}) + \dots + C_{1133}(\varepsilon_{33}) \\
 \sigma_{12} &= C_{1211}(\varepsilon_{11}) + C_{1212}(\varepsilon_{12}) + \dots + C_{1223}(\varepsilon_{23}) + \dots + C_{1233}(\varepsilon_{33}) \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\
 \sigma_{33} &= C_{3311}(\varepsilon_{11}) + C_{3312}(\varepsilon_{12}) + \dots + C_{3323}(\varepsilon_{23}) + \dots + C_{3333}(\varepsilon_{33})
 \end{aligned}$$

Las que en forma matricial se pueden representar a través de

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \\ C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} \\ C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Sistema que en forma tensorial y notación índice se escribe como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6.2)$$

donde C_{ijkl} es un tensor de cuarto orden que representa una transformación lineal del espacio de las deformaciones al espacio de los esfuerzos. En el caso de que el material se considere como homogéneo, éste será un tensor de constantes elásticas independientes de la posición

$$C_{ijkl} \neq f(x_i)$$

Al ser un tensor de cuarto rango, entonces existirán 81 coeficientes en C_{ijkl} . Por otra parte, el tensor de deformaciones infinitesimales es simétrico, por lo que

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kl} &= \varepsilon_{lk} \\ C_{ijkl} &= C_{ijlk}\end{aligned}$$

Esto representa que 3 columnas del arreglo matricial son linealmente dependientes, por lo que el tensor se reduce a 54 coeficientes independientes (9 renglones \times 6 columnas); por otra parte, el tensor de esfuerzos de Cauchy también es simétrico, lo que se representa como

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Situación por la que el tensor presenta simetría en los dos primeros índices $C_{ijkl} = C_{jikl}$, lo que se traduce a que 3 renglones son linealmente dependientes, entonces se concluye que estas dos restricciones significan que sólo existen 36 coeficientes linealmente independientes (6 renglones \times 6 columnas). En notación índice todo lo antes expuesto se expresa como

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Considerando una base e_i y una nueva base e'_i , entonces

$$C'_{ijkl} = C_{ir} C_{js} C_{kt} C_{lv} C_{rstv}$$

Como ya se mencionó, si el cuerpo es homogéneo C_{ijkl} no es función de x_i , entonces

$$C_{ijkl} \neq f(x_i) \neq f(X_i)$$

Como $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ (tensor simétrico), tenemos por ejemplo

$$\begin{aligned}\sigma_{21} &= C_{2111} \varepsilon_{11} + C_{2112} \varepsilon_{12} + C_{2113} \varepsilon_{13} + C_{2121} \varepsilon_{21} + C_{2122} \varepsilon_{22} + C_{2123} \varepsilon_{23} + C_{2131} \varepsilon_{31} \\ &\quad + C_{2132} \varepsilon_{32} + C_{2133} \varepsilon_{33}\end{aligned}$$

Como $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}$; $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$; $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$

$$\therefore \sigma_{21} = C_{2111}\varepsilon_{11} + (C_{2112} + C_{2121})\varepsilon_{21} + (C_{2113} + C_{2131})\varepsilon_{13} + (C_{2123} + C_{2132})\varepsilon_{32} \\ + C_{2122}\varepsilon_{22} + C_{2133}\varepsilon_{33}$$

$$\Rightarrow \sigma_{21} = C_{2111}\varepsilon_{11} + k_{2112}\varepsilon_{21} + k_{2113}\varepsilon_{13} + k_{2123}\varepsilon_{23} + C_{2122}\varepsilon_{22} + C_{2133}\varepsilon_{33}$$

\therefore Se comprueba la reducción a 54 constantes.

Como el tensor de esfuerzos es simétrico, entonces $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Por ejemplo, $\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0$

$$0 = (C_{1211} - C_{2111})\varepsilon_{11} + (C_{1222} - C_{2122})\varepsilon_{22} + (C_{1233} - C_{2133})\varepsilon_{33} \\ + (k_{1212} - k_{2112})\varepsilon_{12} + (k_{1223} - k_{2123})\varepsilon_{23} + (k_{1231} - k_{2131})\varepsilon_{31}$$

con lo que se constata que las restricciones impuestas por la simetría del tensor de esfuerzos y de deformaciones da lugar a que el número de constantes linealmente independientes sea de 36.

Al deformar el cuerpo se almacena energía elástica en el material, de tal manera que

$$U(\varepsilon_{ij}) = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

Donde

$U(\varepsilon_{ij})$ – Función de energía almacenada

$$\therefore \frac{\partial U(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$$

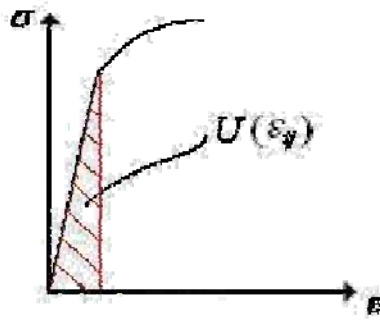


FIGURA 6.2 LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA ALMACENADA EN EL CUERPO ESTÁ REPRESENTADA POR EL ÁREA BAJO LA CURVA $\sigma - \varepsilon$

La energía almacenada con la deformación elástica no depende de la base, de tal forma que

$$\begin{aligned}
 dU &= \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{kl} d\varepsilon_{kl} \\
 \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{o} \quad \sigma_{kl} = C_{klij} \varepsilon_{ij} \\
 \Rightarrow \quad \sigma_{kl} &= \sigma_{ij} \quad \text{y} \quad \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{ij} \quad d\varepsilon_{kl} = d\varepsilon_{ij} \\
 \therefore \quad dU &= (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}) d\varepsilon_{ij} = (C_{klij} \varepsilon_{ij}) d\varepsilon_{kl} \\
 \therefore \quad C_{ijkl} &= C_{klij}
 \end{aligned}$$

Lo cual representa que el tensor de constantes elásticas es simétrico. Realizando el análisis de los términos presentes en el tensor

$$\begin{bmatrix}
 C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & \cancel{C_{1121}} & C_{1122} & C_{1123} & \cancel{C_{1131}} & \cancel{C_{1132}} & C_{1133} \\
 \cancel{C_{1211}} & C_{1212} & C_{1213} & \cancel{C_{1221}} & C_{1222} & C_{1223} & \cancel{C_{1231}} & \cancel{C_{1232}} & C_{1233} \\
 \cancel{C_{1311}} & \cancel{C_{1312}} & C_{1313} & \cancel{C_{1321}} & C_{1322} & C_{1323} & \cancel{C_{1331}} & \cancel{C_{1332}} & C_{1333} \\
 \cancel{C_{2111}} & \cancel{C_{2112}} & \cancel{C_{2113}} & \cancel{C_{2121}} & \cancel{C_{2122}} & \cancel{C_{2123}} & \cancel{C_{2131}} & \cancel{C_{2132}} & \cancel{C_{2133}} \\
 \cancel{C_{2211}} & \cancel{C_{2212}} & \cancel{C_{2213}} & \cancel{C_{2221}} & C_{2222} & C_{2223} & \cancel{C_{2231}} & \cancel{C_{2232}} & C_{2233} \\
 \cancel{C_{2311}} & \cancel{C_{2312}} & \cancel{C_{2313}} & \cancel{C_{2321}} & \cancel{C_{2322}} & C_{2323} & \cancel{C_{2331}} & \cancel{C_{2332}} & C_{2333} \\
 \cancel{C_{3111}} & \cancel{C_{3112}} & \cancel{C_{3113}} & \cancel{C_{3121}} & \cancel{C_{3122}} & \cancel{C_{3123}} & \cancel{C_{3131}} & \cancel{C_{3132}} & \cancel{C_{3133}} \\
 \cancel{C_{3211}} & \cancel{C_{3212}} & \cancel{C_{3213}} & \cancel{C_{3221}} & \cancel{C_{3222}} & \cancel{C_{3223}} & \cancel{C_{3231}} & \cancel{C_{3232}} & \cancel{C_{3233}} \\
 \cancel{C_{3311}} & \cancel{C_{3312}} & \cancel{C_{3313}} & \cancel{C_{3321}} & \cancel{C_{3322}} & \cancel{C_{3323}} & \cancel{C_{3331}} & \cancel{C_{3332}} & C_{3333}
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 6 \\
 5 \\
 4 \\
 0 \\
 3 \\
 2 \\
 0 \\
 0 \\
 1
 \end{matrix}$$

$$\Sigma = 21$$

Se concluye que sólo pueden existir 21 constantes elásticas linealmente independientes.

Otra forma de demostrar lo anterior es a través de las siguientes reflexiones:

$$U = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Entonces,

$$U = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{rs}} = \frac{\partial (C_{ijrs} \varepsilon_{rs})}{\partial \varepsilon_{rs}} = C_{ijrs} \frac{\partial \varepsilon_{rs}}{\partial \varepsilon_{rs}} + \varepsilon_{rs} \frac{\partial C_{ijrs}}{\partial \varepsilon_{rs}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{rs}} = C_{ijrs}$$

y como

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

de estas dos ecuaciones anteriores se tiene que

$$\Rightarrow C_{ijrs} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{rs} \partial \varepsilon_{ij}}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{rs} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{rs}}$$

$$\Rightarrow C_{ijrs} = C_{rsij}$$

Como ya ha sido mencionado, con base en la simetría del tensor de esfuerzos y del tensor de deformaciones, el número de constantes elásticas linealmente independientes es de 36, situación que permite una descripción matricial de la forma

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3113} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Ahora bien, realizando un cambio de variable de la forma

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \sigma_1 & \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 \\
 \sigma_{22} &= \sigma_2 & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 \\
 \sigma_{33} &= \sigma_3 & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3 \\
 \sigma_{23} &= \sigma_{32} = \sigma_4 & 2\varepsilon_{23} &= \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{32} \\
 \sigma_{31} &= \sigma_{13} = \sigma_5 & 2\varepsilon_{31} &= \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13} \\
 \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \sigma_6 & 2\varepsilon_{12} &= \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{21}
 \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, empleando una falsa notación índice, se puede escribir una descripción material en la forma

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta \quad (6.4)$$

por lo que matricialmente se tiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Con una representación matricial de la relación esfuerzo-deformación es más sencillo visualizar que el número máximo de constantes elásticas linealmente independientes es 21, ya que la matriz $C_{\alpha\beta}$ deberá ser simétrica, por lo que

$$C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} C_{12} = C_{21} & C_{13} = C_{31} & C_{14} = C_{41} & C_{15} = C_{51} & C_{16} = C_{61} \\ C_{23} = C_{32} & C_{24} = C_{42} & C_{25} = C_{52} & C_{26} = C_{62} & C_{34} = C_{43} \\ C_{35} = C_{53} & C_{36} = C_{63} & C_{45} = C_{54} & C_{46} = C_{64} & C_{56} = C_{65} \end{array}$$

6.3 IDEALIZACIONES PARA EL COMPORTAMIENTO ELÁSTICO

En el caso de los materiales elásticos se realizan varias idealizaciones en la descripción de su comportamiento, de tal forma que se definen:

- i. Sólido elástico, homogéneo, lineal y totalmente anisotrópico con 21 constantes elásticas linealmente independientes, como ya se ha demostrado.
- ii. Sólido elástico, homogéneo, lineal y monotrópico con 13 constantes elásticas linealmente independientes (sólido elástico monoclinico, con un solo plano de reflexión y un eje de simetría).

- iii. Sólido elástico, homogéneo, lineal y ortotrópico con 9 constantes elásticas linealmente independientes (medio continuo con dos ejes de simetría y dos planos de reflexión).
- iv. Sólido elástico, homogéneo y transversalmente isotrópico con 5 constantes elásticas linealmente independientes (para este caso se define un infinito número de planos de reflexión que se forman al rotar sobre el eje de simetría).
- v. Sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico; con dos constantes elásticas linealmente independientes. El material es isotrópico cuando sus propiedades mecánicas son descritas sin referencia a la dirección.

Conforme se reduce el grado de anisotropía se añaden restricciones al comportamiento elástico del material, de tal forma que el sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico representa un alto grado de idealización; sin embargo, en un gran número de ocasiones se considera esta descripción en virtud de que si bien cualquier sólido cristalino es por definición anisotrópico, también es conveniente mencionar que los sólidos son en general policristalinos y al estar sus cristales orientados al azar se puede considerar este comportamiento como isotrópico (las propiedades no varían con la dirección).

Simetría elástica

Para describir las diferentes idealizaciones realizadas para el comportamiento de los medios continuos elásticos es conveniente definir el concepto de simetría elástica. Este término se emplea para definir direcciones elásticas equivalentes, de tal forma que las constantes C_{ijkl} permanezcan inalteradas por la transformación entre 2 juegos de ejes. Si la transformación es una reflexión de los ejes con respecto a algún plano se dice que el material presenta un plano de simetría elástica (figura 6.4). Con dos planos de simetría la transformación representará la reflexión en dos ejes (figura 6.5), y por consecuencia deberá cumplir con las restricciones de aquella en que solo existe un eje de reflexión. Por otra parte, se puede tener un infinito número de ejes si la transformación se produce al girar un par de ejes un ángulo θ arbitrario (figura 6.3), esto alrededor del tercer eje cartesiano. En este caso, la transformación está dada por

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta transformación representa la rotación de un ángulo θ sobre el eje x_3 , al cual se denomina como eje de simetría elástica.

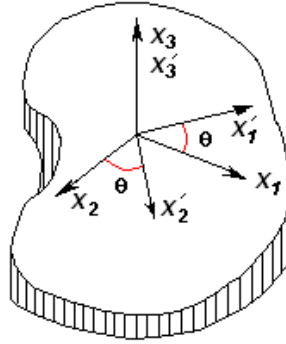


FIGURA 6.3 SIMETRÍA ELÁSTICA CARACTERÍSTICA DE UN MATERIAL TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO. EN ESTE CASO EXISTE UN INFINITO NÚMERO DE PLANOS DE REFLEXIÓN QUE SE GENERAN AL GIRAR LOS EJES x_1x_2 UN ÁNGULO θ ALREDEDOR DEL EJE x_3 (EJE DE SIMETRÍA ELÁSTICA), DANDO LUGAR A UNA NUEVA BASE $x'_1x'_2x'_3$, PARA LA CUAL LAS PROPIEDADES ELÁSTICAS PERMANECEN INALTERADAS

En todos los casos se deberá cumplir que las constantes elásticas sean iguales en el sistema de referencia inicial y en el sistema transformado. Considerando la notación material y empleando pseudo índices se tiene que

$$\sigma'_\alpha = C'_{\alpha\beta} \varepsilon'_\beta$$

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta$$

donde la matriz de constantes elásticas no deberá sufrir alteración con el cambio de base (simetría elástica)

$$C'_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}$$

Por otra parte, los esfuerzos y deformaciones deberán cumplir con las reglas de transformación tal que

$$\sigma'_\alpha = Q \sigma_\alpha Q^T$$

$$\varepsilon'_\beta = Q \varepsilon_\beta Q^T$$

donde Q representa la matriz ortogonal de cambio de base.

Sólido elástico, homogéneo, lineal y monotrópico

Se define con esta denominación a aquel material idealizado que presenta simetría elástica respecto a un plano, de tal forma que si existe simetría sobre el eje x_3 (éste gira un ángulo de $\pi/2$, figura 6.4), entonces el plano formado por $x_1 x_2$ actuará como plano de reflexión.

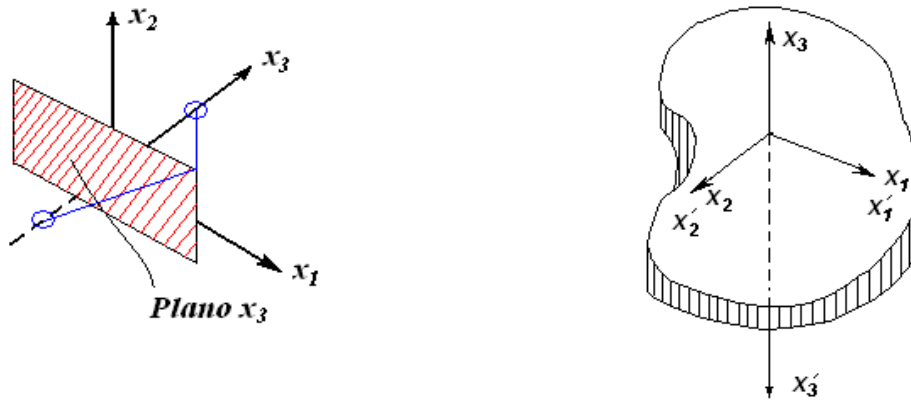


FIGURA 6.4 PLANO DE REFLEXIÓN PARA UN MATERIAL MONOTRÓPICO
(UN SOLO EJE DE SIMETRÍA)

$$x'_{ij} = Q_{ij} x_j$$

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Imagen espejo por simetría en el plano x_3 de tal forma que $q_{33} = -1$, resulta evidente que la simetría se podría presentar en cualquier eje cambiando solamente la posición del signo negativo. Por ejemplo, si el plano de reflexión fuera el x_2x_3 , entonces el eje de simetría será el x_1 , y la matriz de transformación queda $e'_i = Qe_i$

Donde

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el caso en estudio se ha considerado que el eje x_1 es de simetría elástica por lo que, como ya fue mencionado, la simetría material con respecto al plano S_1 requiere que los componentes C_{ijkl} en la ecuación

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

sean exactamente iguales que C'_{ijkl} en la ecuación $\sigma'_{ij} = C'_{ijkl} \varepsilon'_{kl}$

$$e'_1 = -e_1, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3$$

Cuando este es el caso, nuevas restricciones son impuestas en las componentes del tensor de constantes elásticas, lo que lleva a la reducción del número de componentes independientes.

Las componentes del tensor de elasticidad deberán permanecer sin cambio en la transformación

$$C'_{ijkl} = C_{ijkl}$$

por otra parte,

$$C'_{ijkl} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} C_{mnrs}$$

y

$$C_{ijkl} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} C_{mnrs}$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{11} = -1$$

$$Q_{22} = Q_{33} = 1, \quad \text{y los otros } Q_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow C_{1112} = Q_{11}Q_{11}Q_{11}Q_{22}C_{1112} + 0 + \dots = (-1)(-1)(-1)(1)C_{1112}$$

$$C_{1112} = -C_{1112}$$

$$\therefore C_{1112} = 0$$

A través de esta relación se pueden definir aquellos elementos que serán diferentes de cero.

Por otra parte, dado que la transformación es una matriz ortogonal, el problema se puede analizar mediante

$$\begin{pmatrix} \sigma_1' & \sigma_6' & \sigma_5' \\ \sigma_6' & \sigma_2' & \sigma_4' \\ \sigma_5' & \sigma_1' & \sigma_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & -\sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & -\sigma_4 \\ -\sigma_5 & -\sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Y para deformaciones

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1' & \frac{1}{2}\varepsilon_6' & \frac{1}{2}\varepsilon_5' \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6' & \varepsilon_2' & \frac{1}{2}\varepsilon_4' \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5' & \frac{1}{2}\varepsilon_4' & \varepsilon_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\frac{1}{2}\varepsilon_6 & -\frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & -\frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_5 & -\frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Se considera que las 36 constantes son diferentes

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6$$

Considerando que x_1x_2 es un plano de reflexión tal que $C_{\alpha\beta}$ permanece inalterado en una nueva base en la cual $x'_3 = -x_3$; en este sistema, se tiene

$$\sigma'_1 = C'_{11}\varepsilon'_1 + C'_{12}\varepsilon'_2 + C'_{13}\varepsilon'_3 + C'_{14}\varepsilon'_4 + C'_{15}\varepsilon'_5 + C'_{16}\varepsilon'_6 \quad (6.6)$$

pero

$$\begin{aligned} \varepsilon'_1 &= \varepsilon_1, & \varepsilon'_2 &= \varepsilon_2, & \varepsilon'_3 &= \varepsilon_3, & \varepsilon'_4 &= -\varepsilon_4, & \varepsilon'_5 &= -\varepsilon_5, & \varepsilon'_6 &= \varepsilon_6 \\ \sigma'_1 &= \sigma_1, & \sigma'_2 &= \sigma_2, & \sigma'_3 &= \sigma_3, & \sigma'_4 &= -\sigma_4, & \sigma'_5 &= -\sigma_5, & \sigma'_6 &= \sigma_6 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sigma'_1 = \sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6 \quad (6.7)$$

Como resultado, para que se conserve la igualdad entre (i) y (ii) se debe cumplir

$$C_{14} = C_{15} = 0$$

Por un análisis similar se tiene que:

$$C_{24} = C_{25} = 0$$

$$C_{34} = C_{35} = 0$$

$$C_{64} = C_{65} = 0$$

Desarrollando ahora para σ_4 y σ'_4

$$\sigma_4 = C_{41}\varepsilon_1 + C_{42}\varepsilon_2 + C_{43}\varepsilon_3 + C_{44}\varepsilon_4 + C_{45}\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_6$$

$$\sigma'_4 = C'_{41}\varepsilon'_1 + C'_{42}\varepsilon'_2 + C'_{43}\varepsilon'_3 + C'_{44}\varepsilon'_4 + C'_{45}\varepsilon'_5 + C'_{46}\varepsilon'_6$$

$$\Rightarrow \sigma'_4 = -\sigma_4 = C_{41}\varepsilon_1 + C_{42}\varepsilon_2 + C_{43}\varepsilon_3 - C_{44}\varepsilon_4 - C_{45}\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_6$$

Por lo tanto, se concluye que $C_{41}, C_{42}, C_{43}, C_{46}, C_{51}, C_{52}, C_{53}, C_{56}$ son también igual a cero para el plano $x_1 x_2$ de simetría elástica, por lo que $C_{\alpha\beta}$ queda

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Reducción de 36 a 13 constantes. Como ya se demostró, por las restricciones impuestas por la energía de deformación se tiene que el tensor es simétrico, entonces $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$, con lo que el número de constantes elásticas se reduce a 13. La relación existente entre los términos del tensor de constantes elásticas con los términos que aparecen en la representación matricial se tiene que

$$C_{11} = C_{1111}, \quad C_{12} = C_{1122}, \quad C_{13} = C_{1133}, \quad C_{14} = 2C_{1123} = 0, \quad C_{16} = 2C_{1112}$$

$$C_{21} = C_{2211}, \quad C_{22} = C_{2222}, \quad C_{23} = C_{2233}$$

$$C_{33} = C_{3333}, \quad C_{36} = C_{3312}$$

$$C_{44} = 4C_{2323}, \quad C_{45} = 4C_{2313}$$

$$C_{55} = 4C_{1313}$$

$$C_{66} = 4C_{1212}$$

Constantes elásticas para un material monotrópico (monoclínico)

Para analizar el significado físico de las constantes elásticas descritas en la matriz $C_{\alpha\beta}$ es conveniente definir su inversa (matriz de complianza) $\Omega_{\beta\alpha}$, de tal forma que

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta \Rightarrow (C_{\alpha\beta})^{-1} \sigma_\alpha = (C_{\alpha\beta})^{-1} C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta$$

$$\therefore \quad (C_{\alpha\beta})^{-1} \sigma_{\alpha} = \varepsilon_{\beta}$$

$$\begin{aligned} \text{Sí} \quad \Omega_{\beta\alpha} &= (C_{\alpha\beta})^{-1} \\ \Rightarrow \quad \varepsilon_{\beta} &= \Omega_{\beta\alpha} \sigma_{\alpha} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Es entonces que se pueden describir éstas a través de

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\eta_{16}}{G_6} \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\eta_{26}}{G_6} \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\eta_{36}}{G_6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_4} & \frac{\varphi_{45}}{G_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_{54}}{G_4} & \frac{1}{\mu_5} & 0 \\ \frac{\psi_{61}}{E_1} & \frac{\psi_{62}}{E_2} & \frac{\psi_{63}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

donde las constantes elásticas $(E, G, \nu, \eta, \varphi, \mu, \psi)$ que aparecen en la expresión 6.8 tienen el siguiente significado físico:

- Módulo de elasticidad (E) . Representa la relación existente entre el esfuerzo normal y la deformación normal, tal que $E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$, donde el subíndice representa el eje sobre el cual se refiere el módulo de elasticidad.
- Módulo de rigidez a corte $(\mu_{\beta} = G_{\beta} = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\tau}{2\varepsilon})$. Representa la relación entre el esfuerzo de corte y la deformación angular; el subíndice indica plano y dirección de referencia.
- Coeficiente de Poisson $(\nu_{\alpha\beta} = -\frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_{\beta}})$. Representa la relación de la deformación transversal (inducida) con relación a la deformación longitudinal (principal), donde

los subíndices indicarán la dirección de cada una de estas deformaciones y por consecuencia la dirección de aplicación del esfuerzo normal β y de la deformación resultante α .

- Factor de acoplamiento entre una sollicitación a corte y la correspondiente deformación longitudinal ($\eta_{\alpha\beta}$). El índice α representa la dirección de deformación, mientras que β se refiere a las características de la sollicitación a corte que provoca la deformación.
- Factor de acoplamiento entre sollicitaciones a corte ($\varphi_{\alpha\beta}$). Relaciona la deformación a corte en un plano α con los esfuerzos de corte en un plano β .
- Factor de acoplamiento entre un esfuerzo normal y una deformación a corte ($\psi_{\alpha\beta}$). Relaciona la deformación a corte en un plano α con el esfuerzo normal en dirección β .

La simetría de la matriz demanda que

$$\begin{aligned}\frac{\nu_{21}}{E_1} &= \frac{\nu_{12}}{E_2}, & \frac{\nu_{31}}{E_1} &= \frac{\nu_{13}}{E_3}, & \frac{\nu_{32}}{E_2} &= \frac{\nu_{23}}{E_3} \\ \frac{\eta_{16}}{G_6} &= \frac{\psi_{61}}{E_1}, & \frac{\eta_{26}}{G_6} &= \frac{\psi_{62}}{E_2}, & \frac{\eta_{36}}{G_6} &= \frac{\psi_{63}}{E_3} \\ \frac{\varphi_{45}}{G_5} &= \frac{\varphi_{54}}{G_4}\end{aligned}$$

Si $\sigma_{11} \neq 0$ y $\sigma_{ij} = 0 \forall ij \neq 11$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1}; \quad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}; \quad \nu_{13} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}; \quad \Rightarrow \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} = \frac{\psi_{61}}{E_1}\sigma_1$$

Si $\sigma_6 = \sigma_{12} \neq 0, \sigma_{ij} = 0, \forall i, j$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\eta_{16}}{G_6}\sigma_6$$

E_1, E_2 y E_3 son los módulos elásticos en los ejes x_1, x_2, x_3

En un material monotrópico con \hat{e}_3 como normal del plano de simetría, un esfuerzo normal produce una deformación de corte en el plano x_1x_2 , con η_{ij} como coeficientes de acoplamiento, esto aun cuando el esfuerzo de corte en dicho plano sea cero. Por otra parte, una sollicitación a corte en el plano x_1x_2 generará deformaciones normales $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$, aun cuando no existan esfuerzos normales. Asimismo, cortantes en el plano x_3x_1 provocarán deformaciones a corte en x_2x_3 , lo mismo sucederá al invertir las consideraciones.

Sólido elástico, homogéneo, lineal y ortotrópico

Si existen dos planos de simetría elástica se define al material como ortotrópico. Este representa un comportamiento con restricciones adicionales a las impuestas a un sólido monotrópico. Para este caso se define que los ejes de simetría elástica son x_2 y el x_3 , por lo que los planos de reflexión estarán dados por x_1x_3 y por x_1x_2 (figura 6.5), por tal motivo, la transformación es

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

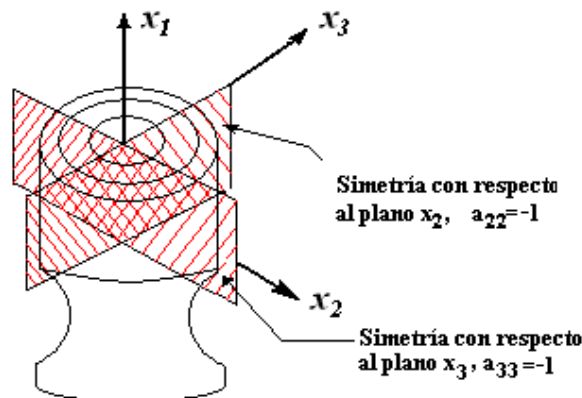


FIGURA 6.5 PLANOS DE REFLEXIÓN EN UN MATERIAL ORTOTRÓPICO (2 EJES DE SIMETRÍA)

Se tiene entonces que la relación de los esfuerzos descritos en la base original con los descritos a través de la base transformada es

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_6 & \sigma'_5 \\ \sigma'_6 & \sigma'_2 & \sigma'_4 \\ \sigma'_5 & \sigma'_4 & \sigma'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\sigma_6 & -\sigma_5 \\ -\sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ -\sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Por un procedimiento análogo para las deformaciones, se tiene que

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_1 & \frac{1}{2}\varepsilon'_6 & \frac{1}{2}\varepsilon'_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon'_6 & \varepsilon'_2 & \frac{1}{2}\varepsilon'_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon'_5 & \frac{1}{2}\varepsilon'_4 & \varepsilon'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\frac{1}{2}\varepsilon_6 & -\frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Al definir la simetría elástica $C_{\alpha\beta} = C'_{\alpha\beta}$, y para cumplir con lo anterior

$$\sigma_1 = \sigma'_1$$

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6$$

$$\sigma'_1 = C'_{11}\varepsilon'_1 + C'_{12}\varepsilon'_2 + C'_{13}\varepsilon'_3 + C'_{14}\varepsilon'_4 + C'_{15}\varepsilon'_5 + C'_{16}\varepsilon'_6$$

Como $-\varepsilon_6 = \varepsilon'_6$, $\varepsilon_5 = -\varepsilon'_5 \Rightarrow$ se requiere que $C_{15} = C_{16} = 0$ y, por

consecuencia, $C_{25} = C_{26} = C_{35} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = 0$

Entonces, desarrollando

$$\sigma'_6 = -\sigma_6$$

$$\sigma_6 = C_{61}\varepsilon_1 + C_{62}\varepsilon_2 + C_{63}\varepsilon_3 + C_{64}\varepsilon_4 + C_{65}\varepsilon_5 + C_{66}\varepsilon_6$$

$$\sigma'_6 = C'_{61}\varepsilon'_1 + C'_{62}\varepsilon'_2 + C'_{63}\varepsilon'_3 + C'_{64}\varepsilon'_4 + C'_{65}\varepsilon'_5 + C'_{66}\varepsilon'_6$$

$$\sigma'_6 = -\sigma_6 \quad \Rightarrow \quad C_{61} = C_{62} = C_{63} = C_{64} = 0$$

$$\sigma'_5 = -\sigma_5 \quad \Rightarrow \quad C_{51} = C_{52} = C_{53} = C_{54} = 0$$

Como en este caso, además de cumplir con sus restricciones particulares deberá cumplir con las ya establecidas para un sólido monotrópico, entonces

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz es simétrica, entonces existirán sólo 9 constantes elásticas linealmente independientes.

De todo lo antes expuesto se tiene que la relación matricial de esfuerzo con deformación para un sólido elástico ortotrópico, de la forma $\varepsilon_\beta = \Omega_{\beta\alpha} \sigma_\alpha$, queda

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_{22} & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{33} & \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} & \varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_{31} & \varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_{12} & \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_{11} \\ \sigma_2 & \sigma_{22} \\ \sigma_3 & \sigma_{33} \\ \sigma_4 & \sigma_{23} \\ \sigma_5 & \sigma_{31} \\ \sigma_6 & \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

donde E_1, E_2, E_3 representan los módulos de elasticidad en dirección de los ejes x_1, x_2, x_3 ; $\mu_{44} = G_{23}, \mu_{55} = G_{31}, \mu_{66} = G_{12}$ representan los módulos de rigidez en los planos x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2 respectivamente. Por su parte, ν_{ij} representa el coeficiente de Poisson donde la carga se aplica en el eje x_j y la deformación se presenta en dirección x_i .

***Determinación de las constantes elásticas independientes
con base en la notación tensorial***

En notación índice para el material ortotrópico antes descrito se tiene que

$$C_{ijkl} = a_{ir} a_{js} a_{kt} a_{mn} C_{rstn}$$

Ejes de simetría: x_2, x_3

No existe simetría en x_1

La ecuación anterior, como en el caso ya tratado del monotrópico, representa que el tensor de constantes elásticas (4° orden) definido en el sistema original puede ser transformado a las nuevas coordenadas a través del sistema $a_{ir} a_{js} a_{kt} a_{mn}$ (tensor de rango 8).

Como ya ha sido mencionado, la transformación es de la forma

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & 0 \\ & \text{simetría} & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix}$$

Sea que el desarrollo se realice con una base tensorial o sea que se defina una relación matricial, lo anterior representa que el material tiene tres módulos de elasticidad de acuerdo con las direcciones coordenadas, así como también tres módulos de rigidez a corte. En el

caso de los coeficientes de Poisson, éstos se encuentran relacionados a través de los módulos de elasticidad, es por consecuencia que las ecuaciones de la forma $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ se expresan

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21} \sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{31} \sigma_{33}}{E_3}$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{33}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{31}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{32} \sigma_{22}}{E_2} + \frac{\sigma_{33}}{E_3}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2G_{23}} \sigma_{23}$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2G_{31}} \sigma_{31}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G_{12}} \sigma_{12}$$

De las constantes $E_1, E_2, E_3, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{12}, \nu_{32}, \nu_{13}, \nu_{23}, \mu_{44}, \mu_{55}, \mu_{66}$ sólo nueve son linealmente independientes, donde

- E_1, E_2 y E_3 son los módulos de Young en los ejes x_1, x_2, x_3
- $\mu_{44}, \mu_{55}, \mu_{66}$ son los módulos de corte en los planos $x_2 x_3, x_3 x_1, x_1 x_2$
- ν_{ij} es el coeficiente de Poisson con dirección de carga j y dirección transversal i .

Entonces se deberá cumplir que

$$\frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{\nu_{12}}{E_2}; \quad \frac{\nu_{31}}{E_1} = \frac{\nu_{13}}{E_3}; \quad \frac{\nu_{32}}{E_2} = \frac{\nu_{23}}{E_3}$$

Sólido elástico, homogéneo, lineal y transversalmente isotrópico

Un sólido elástico homogéneo, lineal y transversalmente isotrópico representa una extensión del comportamiento descrito para el material ortotrópico. La diferencia sustancial la representa el que en éste no existirán tan solo dos planos de reflexión que se definen al hacer girar la base un ángulo de π radianes alrededor del eje x_1 , sino que la rotación se hará para cualquier ángulo θ entre 0 y 2π radianes, lo que se traduce en un número infinito de planos de reflexión, dando como consecuencia que las propiedades elásticas sean las mismas, sin importar la dirección, esto sobre el plano x_2x_3 . Es por lo anterior que se define al material como transversalmente isotrópico. De lo antes expuesto, se concluye que si existe un plano S_1 tal que cualquier plano perpendicular a éste es un plano de simetría, entonces se denomina al material como transversalmente isotrópico. Al plano S_1 se le denomina como plano de isotropía y su normal e_1 es el eje de isotropía transversal. Un material transversalmente isotrópico es también ortotrópico.

Ecuación constitutiva para un material elástico transversalmente isotrópico

De acuerdo con la figura 6.7, considérese que existe un plano S_3 tal que cualquier plano perpendicular es un plano de reflexión, por lo que S_3 representa un plano de isotropía. Si S'_β representa un plano cuya normal \hat{e}'_β es perpendicular al plano S_3 y a su vez describe un ángulo β con el eje $x_1(\hat{e}_1)$, entonces S'_β es un plano de reflexión.

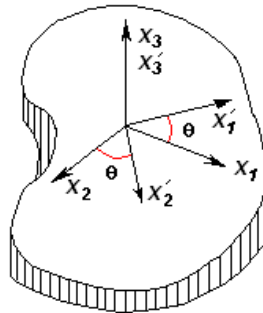


FIGURA 6.6 UN MATERIAL TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO PRESENTA UN INFINITO NÚMERO DE PLANOS DE REFLEXIÓN, LO CUALES SE GENERAN AL GIRAR EL SISTEMA COORDENADO UN ÁNGULO CUALQUIERA ALREDEDOR DEL EJE x_3

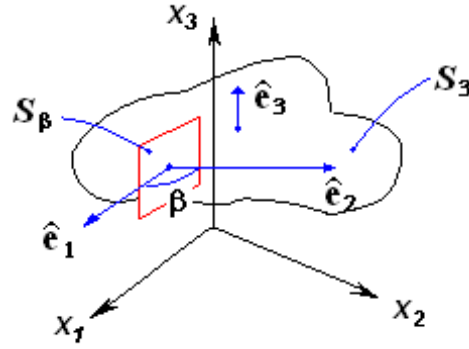


FIGURA 6.7 MATERIAL TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO, EN ESTE CASO LOS EJES x_1, x_2 GIRAN UN ÁNGULO β ALREDEDOR DEL EJE x_3

Entonces para cualquier ángulo β , el plano S_β será por definición plano de simetría. Por tanto, si C'_{ijkl} representa las componentes del tensor C con respecto a la base \hat{e}'_i , la transformación estará dada por

$$e'_1 = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2$$

$$e'_2 = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2$$

$$e'_3 = \hat{e}_3$$

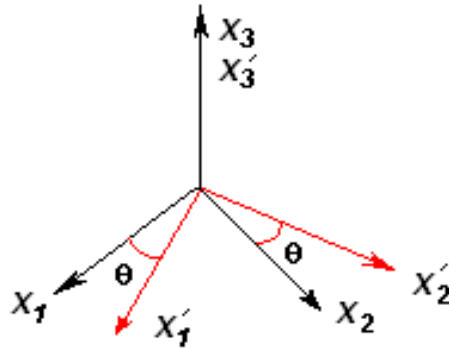


FIGURA 6.8 CUALQUIER ÁNGULO θ ENTRE 0 Y 2π RADIANES GENERA UNA NUEVA BASE

Una rotación de π radianes dará lugar a un material ortotrópico, por lo que se puede considerar al sólido transversalmente isotrópico como una extensión del comportamiento del sólido elástico ortotrópico.

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & \cos \theta & \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & \cos 0^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_{11} = \cos \theta; Q_{12} = \sin \theta; Q_{21} = -\sin \theta; Q_{22} = \cos \theta; Q_{31} = Q_{32} = Q_{13} = Q_{23} = 0; Q_{33} = 1$$

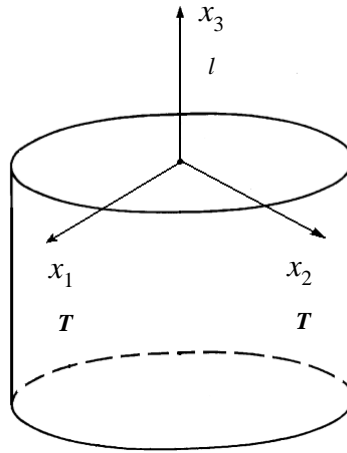


FIGURA 6.9 LAS PROPIEDADES EN TODA DIRECCIÓN TRANSVERSAL T SON SIMÉTRICAS CON RESPECTO AL EJE LONGITUDINAL l

Entonces para cualquier ángulo de rotación de los ejes

$$C'_{1112} = C'_{1113} = C'_{1222} = C'_{1223} = C'_{1233} = C'_{1322} = C'_{1323} = C'_{1333} = C'_{1123} = C'_{2223} = C'_{2333} = C'_{1213} = 0 \quad \dots(6.12)$$

Como se mencionó anteriormente, la condición 6.12 es satisfactoria para cualquier θ no conduciendo a mayores restricciones; sin embargo, para $\theta = 0^\circ$ se tiene (esto será referido a la base original)

$$C_{1112} = C_{1113} = C_{1222} = C_{1223} = C_{1233} = C_{1322} = C_{1323} = C_{1333} = C_{1123} = C_{2223} = C_{2333} = C_{1213} = 0$$

por lo que a partir de la ecuación de cambio de base en forma tensorial (tensor de rango 8)

$$C_{ijklmn} = a_{ir} a_{js} a_{kt} a_{mn} C_{rstn} \quad (6.13)$$

Realizando las operaciones y sustituyendo los valores de Q_{ij} en la ecuación 6.11 se tiene

$$\begin{aligned} C'_{1113} &= Q_{11}^3 Q_{13} C_{1111} + Q_{11}^2 Q_{21} Q_{23} C_{1122} + Q_{21}^2 Q_{11} Q_{13} C_{2211} + Q_{11}^2 Q_{31} Q_{33} C_{1133} \\ &\quad + Q_{31}^2 Q_{11} Q_{13} C_{3311} + Q_{11}^2 Q_{21} Q_{23} C_{1212} + Q_{11} Q_{21}^2 Q_{13} C_{1221} + Q_{21}^2 Q_{11} Q_{13} C_{2121} \\ &\quad + Q_{21} Q_{11}^2 Q_{23} C_{2112} + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Por lo que $C'_{1113} = 0$ es satisfecho en conjunto con

$$C'_{1223} = C'_{1322} = C'_{1333} = 0$$

Por otra parte, $Q_{33} = 1$, de lo que se tiene

$$C'_{1323} = Q_{11} Q_{12} C_{1313} + Q_{21} Q_{22} C_{2323} = 0$$

lo que requiere que

$$\cos \theta \sin \theta (C_{1313} - C_{2323}) = 0$$

razón por la cual

$$C_{1313} = C_{2323}$$

En forma similar $C'_{1233} = 0$, lo que conduce a que $C_{1133} = C_{2233}$ y de $C'_{1112} = 0$ se concluye que

$$C'_{1112} = Q_{11}^3 Q_{12} C_{1111} + Q_{21}^3 Q_{22} C_{2222} + Q_{11}^2 Q_{21} Q_{22} C_{1122} + Q_{21}^2 Q_{11} Q_{12} C_{2211} \\ + Q_{11}^2 Q_{21} Q_{22} C_{1212} + Q_{11} Q_{21}^2 Q_{12} C_{1221} + Q_{21}^2 Q_{11} Q_{12} C_{2121} + Q_{21} Q_{11}^2 Q_{22} C_{2112}$$

Pero $\cos \theta \sin \theta \neq 0 \Rightarrow$

$$-\cos^2 \theta C_{1111} + \sin^2 \theta C_{2222} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) C_{1122} + 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) C_{1212} = 0$$

De un proceso similar para $C_{1222} = 0$, se puede obtener

$$-\sin^2 \theta C_{1111} + \cos^2 \theta C_{2222} - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) C_{1122} - 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) C_{1212} = 0$$

de lo que

$$C_{1111} = C_{2222}$$

y

$$C_{1212} = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122})$$

Luego entonces S_β será un plano de simetría, de tal forma que los coeficientes elásticos

C'_{ijkl} sean iguales a los C_{ijkl} para cualquier ángulo θ quedando en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{pmatrix}$$

Por tanto, el número de constantes elásticas se reduce a cinco $(\lambda, \mu_T, \mu_L, \phi, \varsigma)$, por lo que para un material sólido, elástico, transversalmente isotrópico con eje de simetría $x_3(e_3)$, la ecuación constitutiva de la forma $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ se puede representar en forma simplificada (seudonotación índice) como $\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta}\varepsilon_\beta$

$$C_{11} = \lambda + 2\mu_T = \lambda + 2G_{12}$$

$$C_{12} = \lambda$$

$$C_{13} = \lambda + \phi$$

$$C_{33} = \lambda + 2\phi + 4\mu_L - 2\mu_T + \varsigma = \lambda + 2\phi + 4G_{31} - 2G_{12} + \varsigma$$

$$C_{44} = \mu_T = G_{12}$$

$$\frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) = \mu_L = G_{31} = G_{32}$$

en donde

$\mu_{44} = \mu_{55} = \mu_T = G_T = G_{12}$ es el módulo de corte en el plano de isotropía transversal

$\mu_{66} = \mu_L = G_L = G_{31} = G_{32}$ es el módulo de corte en cualquier plano perpendicular al plano de isotropía transversal

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu_T & \lambda & \lambda + \phi & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu_T & \lambda + \phi & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \phi & \lambda + \phi & \lambda + 2\phi + 4\mu_L - 2\mu_T + \varsigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Considerando la metodología empleada para definir las constantes elásticas linealmente independientes en un material monotrópico y ortotrópico; y definiendo que la rotación se producirá alrededor del eje x_1 , para que así este comportamiento corresponda con las restricciones ya impuestas, entonces se tendrá que la matriz de cambio de base está dada por

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Dado que se deberá cumplir que $\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta$, esto en representación matricial y utilizando una seudonotación índice, entonces

$$\sigma'_\alpha = C'_{\alpha\beta} \varepsilon'_\beta$$

donde

$$C_{ijkl} = C'_{ijkl}$$

$$\sigma' = Q \sigma Q^T$$

$$\varepsilon' = Q \varepsilon Q^T$$

en notación matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} | \sigma_1 \\ \sigma_{22} | \sigma_2 \\ \sigma_{33} | \sigma_3 \\ \sigma_{23} | \sigma_4 \\ \sigma_{31} | \sigma_5 \\ \sigma_{12} | \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 | \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 | \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 | \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_4 | 2\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_5 | 2\varepsilon_{31} \\ \varepsilon_6 | 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz de rigidez cumplen con

$$C_{11} > 0, \quad C_{33} > 0, \quad C_{44} > 0, \quad C_{11} - C_{12} > 0$$

Considerando las constantes

Módulo elástico transversal (E_T). Para un sistema donde existe isotropía en el plano $x_2x_3 \Rightarrow E_2 = E_3 = E_T = C_{22} = C_{33}$.

Módulo elástico longitudinal (E_l) $\Rightarrow E_l = E_1 \neq E_T = C_{11}$

Considerando ahora la representación $\varepsilon_\beta = K_{\beta\alpha}\sigma_\alpha$, donde $K_{\beta\alpha} = (C_{\alpha\beta})^{-1}$, se tiene entonces en descripción matricial

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_{22} & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{33} & \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} & \varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_{31} & \varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_{12} & \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_{11} \\ \sigma_2 & \sigma_{22} \\ \sigma_3 & \sigma_{33} \\ \sigma_4 & \sigma_{23} \\ \sigma_5 & \sigma_{31} \\ \sigma_6 & \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Para este caso, como ya ha sido manifestado, las constantes elásticas para el sólido elástico transversalmente isotrópico son

Módulo de elasticidad longitudinal ($E_l = E_L$) y transversal ($E_2 = E_T$)

Coeficiente de Poisson longitudinal ($\nu_{12} = \nu_L$) y transversal ($\nu_{23} = \nu_T$)

Módulo de Rigidez a corte longitudinal G_{23} y transversal G_{12}

Desarrollando el arreglo matricial 6.14, se tiene

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_L \sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_L \sigma_{33}}{E_2} \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_L}{E_2} \sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_T \sigma_{33}}{E_2} \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_L \sigma_{11}}{E_2} - \frac{\nu_T \sigma_{22}}{E_2} + \frac{\sigma_{33}}{E_2} \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2G_{23}} \sigma_{23} = \frac{1}{2G_T} \sigma_{23} \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2G_{13}} \sigma_{31} = \frac{1}{2G_L} \sigma_{31} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G_{12}} \sigma_{12} = \frac{1}{2G_L} \sigma_{12}\end{aligned}\tag{6.15}$$

Todo lo anterior dado que deberá existir simetría en el tensor rigidez o matriz de complianza.

La descripción de un comportamiento característico para un sólido elástico transversalmente isotrópico se puede emplear para materiales tales como la madera o los huesos largos (por ejemplo el fémur o la tibia), materiales en los cuales es claro que se tienen propiedades diferentes en el eje longitudinal con respecto a su plano transversal.

Sólido elástico lineal homogéneo e isotrópico

El mayor nivel de idealización se presenta cuando se considera un material sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico. En este caso, se considera que las propiedades son iguales en cualquier dirección, no sólo en un plano como en el transversalmente isotrópico, figura 6.8. Si bien cualquier sólido cristalino será por definición no isotrópico, es necesario recordar que en general los sólidos son policristalinos y que sus cristales usualmente se orientan al azar dando como consecuencia que sus propiedades elásticas, las cuales se evalúan de

manera macroscópica, representen promedios de las definidas para cada dirección cristalográfica.

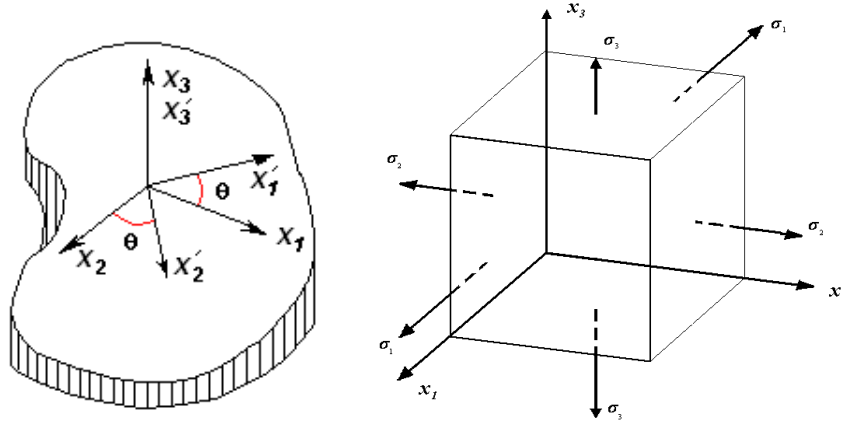


FIGURA 6.10 EN UN MATERIAL ISOTRÓPICO CUALQUIER TRÍADA DE EJES MUTUAMENTE PERPENDICULARES REPRESENTA UNA BASE Y EN CUALESQUIER BASE LAS PROPIEDADES ELÁSTICAS SERÁN IGUALES

Por ejemplo, un metal recocido o que provenga de fundición se puede considerar sin mayor inconveniente como isotrópico; sin embargo, la misma aleación después de una fuerte deformación en frío, que provoca que los cristales se orienten de manera preferencial, ya no se podrá considerar que presenta un comportamiento isotrópico, sino en el mejor de los casos se describirá como transversalmente isotrópico.

Considerando una base $x_1 x_2 x_3$, la descripción en forma tensorial queda

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

Ahora para una base $x'_1 x'_2 x'_3$, la cual se obtiene al girar los ejes a cualquier ángulo se tendrá

$$\sigma'_{ij} = C'_{ijkl} \epsilon'_{kl}$$

Al ser isotrópico el material, entonces el tensor de constantes elásticas será siempre igual en cualquier base

$$C_{ijkl} = C'_{ijkl}$$

Dado que la representación (tensor) no se modifica (mantiene sus mismos componentes) con respecto a cualquier base, se le denomina isotrópico. Este tipo de tensores, como fue

comentado en el capítulo 1, tienen propiedades particulares como son de que su suma (de tensores isotrópicos) da lugar a un nuevo tensor isotrópico, la multiplicación por un escalar produce un nuevo tensor isotrópico y el producto entre tensores isotrópicos es igualmente isotrópico; por último, es conveniente recordar que el único tensor isotrópico de rango dos es la delta de Kronecker.

El tensor de constantes elásticas deberá cumplir con las restricciones ya antes enumeradas,

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl}$$

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

El tensor al ser isotrópico se puede descomponer en la suma de varios tensores igualmente isotrópicos

$$C_{ijkl} = A_{ijkl} + B_{ijkl} + H_{ijkl}$$

Éstos a su vez se pueden descomponer a través del producto con un escalar, de tal forma que

$$A_{ijkl} = \lambda a_{ijkl}$$

$$B_{ijkl} = \alpha b_{ijkl}$$

$$H_{ijkl} = \beta h_{ijkl}$$

$$\therefore C_{ijkl} = \lambda a_{ijkl} + \alpha b_{ijkl} + \beta h_{ijkl}$$

A su vez, los tensores a_{ijkl} , b_{ijkl} , h_{ijkl} se pueden descomponer en el producto de dos tensores isotrópicos, sin embargo, el único tensor isotrópico de rango dos es la delta de Kronecker (δ_{ij}).

$$\Rightarrow a_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl}$$

$$b_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$$

$$h_{ijkl} = \delta_{il} \delta_{jk}$$

Los índices de δ_{ij} son indistintos ya que de todas las formas representa al tensor identidad de rango dos para la operación producto. Sustituyendo se tiene

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = (\lambda a_{ijkl} + \alpha b_{ijkl} + \beta h_{ijkl}) \varepsilon_{kl}$$

$$(\lambda \delta_{ij} \delta_{kl}) \varepsilon_{kl} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} = \lambda \varepsilon_k \varepsilon_k \delta_{ij}$$

$$(\alpha \delta_{ik} \delta_{jl}) \varepsilon_{kl} = (\alpha \delta_{ik}) \varepsilon_{jk} = \alpha \delta_{ik} \varepsilon_{jk} = \alpha \varepsilon_{ij}$$

$$(\beta \delta_{il} \delta_{jk}) \varepsilon_{kl} = (\beta \delta_{il} \delta_{jk}) \varepsilon_{lk} = (\beta \delta_{il}) \varepsilon_{jl} = \beta \varepsilon_{ij}$$

$$\alpha \varepsilon_{ij} + \beta \varepsilon_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\therefore \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Por su parte, en notación general se expresa como

$$\sigma = \lambda I \Delta + 2\mu \varepsilon$$

donde $\Delta = \nabla \cdot u$

A las constantes elásticas λ, μ se les define como constantes de Lamé en honor del matemático francés Gabriel Lamé (1795-1870), quien en 1852 publicó su Teoría Matemática de la Elasticidad, en la cual se desarrollaron por vez primera estas expresiones.

Desarrollando las ecuaciones para el Sólido, Elástico, Homogéneo, Lineal e Isotrópico (SEHLI) y sustituyendo en la descripción tensorial, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

La primera constante de Lamé λ no tiene significado físico, mientras que $\mu = G$ representa al módulo de rigidez a corte. La relación esfuerzo-deformación, en forma matricial, para un SEHLI se expresa como

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11}$$

$$\sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22}$$

$$\sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu\varepsilon_{12} = 2\mu\varepsilon_{21}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu\varepsilon_{23} = 2\mu\varepsilon_{32}$$

$$\sigma_{31} = \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{31} = 2\mu\varepsilon_{13}$$

Otras constantes elásticas

A partir de la relación general $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ se tiene que

$$\sigma_{kk} = 3\lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{kk}$$

Se define el esfuerzo hidrostático como

$$\sigma_H = \frac{\sigma_{kk}}{3}$$

De lo que se tiene que

$$\sigma_H = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \varepsilon_{kk}$$

La ecuación anterior relaciona la componente esférica del esfuerzo σ_H (esfuerzo hidrostático) con el cambio elástico de volumen ε_{kk} . A la constante de proporcionalidad se le denomina como factor de compresibilidad (k), entonces

$$k = \lambda + \frac{2\mu}{3}$$

Por lo tanto, la ecuación se puede expresar como

$$\sigma_H = k \varepsilon_{ii}$$

La ecuación general $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ se puede despejar para expresar en la forma $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$, de tal forma que

$$(\sigma_{ij} - \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) \frac{1}{2\mu} = \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)$$

Si se considera ahora un estado uniaxial de esfuerzos

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{tal que}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{11} - \left(\frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} \right) \sigma_{11} \right)$$

Tomando un común denominador

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{(3\lambda + 2\mu)\sigma_{11} - \lambda\sigma_{11}}{(3\lambda + 2\mu)} \right) = \frac{(\lambda + \mu)\sigma_{11}}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

y si se define el módulo de elasticidad o módulo de Young como la relación existente entre el esfuerzo normal y la deformación normal, tal que

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}$$

por lo que de la expresión

$$\varepsilon_{11} = \frac{(\lambda + \mu)\sigma_{11}}{\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\sigma_{11}}{E_{11}}$$

se puede despejar el módulo de elasticidad, considerando además que por ser un material isotrópico

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = E$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}$$

Si se define al coeficiente de Poisson ν como la relación de la deformación transversal ε_T a la deformación longitudinal ε_L , se tendrá que para un estado uniaxial de esfuerzos

$$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}$$

$$\Rightarrow \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad \text{o} \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}$$

y sustituyendo en la ecuación general

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2\mu} \left(0 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11} \right)$$

y en la definición de coeficiente de Poisson

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}}{\frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}}$$

Se tiene que

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Despejando

$$2(\lambda + \mu)\nu = \lambda$$

$$(2\lambda\nu + 2\mu\nu) = \lambda$$

$$2\mu\nu = \lambda(1 - 2\nu)$$

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{(1 - 2\nu)}$$

Dado que la constante de Lamé λ no tiene significado físico resultará mucho más práctico describir la relación de $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ a través del módulo de elasticidad y del coeficiente de Poisson, por lo que sustituyendo

$$E = \frac{\mu \left(3 \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} + 2\mu \right)}{\left(\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \right) + \mu} = \frac{\mu \left(\frac{6\mu\nu + 2\mu(1-2\nu)}{1-2\nu} \right)}{\left(\frac{2\mu\nu + \mu(1-2\nu)}{1-2\nu} \right)}$$

$$E = \frac{\mu(6\mu\nu + 2\mu - 4\mu\nu)}{2\mu\nu + \mu - 2\mu\nu} = \frac{2\mu^2(\nu+1)}{\mu}$$

$$\Rightarrow E = 2\mu(1+\nu)$$

$$\therefore \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Además, si se sustituye en

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\mu} = \frac{(1+\nu)}{E}$$

$$\frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}}{3 \left(\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \right) + \frac{2\mu(1-2\nu)}{1-2\nu}}$$

$$\frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} = \frac{2\mu\nu}{6\mu\nu + 2\mu - 4\mu\nu}$$

$$\frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\nu}{\nu + 1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \left(\sigma_{ij} - \left(\frac{\nu}{\nu+1} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

$$\therefore \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} \left[(1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

Esta ecuación se le conoce como Ley de Hooke generalizada, la cual al desarrollarla da lugar a

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}((1+\nu)\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})) = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}))$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}((1+\nu)\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})) = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33}))$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}((1+\nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})) = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}))$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{12}$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{23}$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{31}$$

Estas ecuaciones se pueden presentar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \frac{\varepsilon_4}{2} \\ \frac{\varepsilon_4}{2} \\ \frac{\varepsilon_4}{2} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{matrix}$$

El valor del coeficiente de Poisson de un sólido elástico isotrópico es del orden de $\frac{1}{3}$, sin embargo, si el material es incompresible se tiene que

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu = (3\lambda + 2\mu)\frac{1}{3}$$

Sustituyendo en

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

$$\frac{k}{E} = \frac{\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)}{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right)$$

Y al sustituir el valor de $\frac{\lambda}{\mu}$

$$2\nu\lambda + 2\mu\nu = \lambda \quad \Rightarrow \quad 2\mu\nu = \lambda - 2\nu\lambda = \lambda(1 - 2\nu)$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1 - 2\nu}$$

$$\frac{k}{E} = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2\nu}{1 - 2\nu} + 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - 2\nu} \right)$$

$$\frac{k}{E} = \frac{1}{3 - 6\nu} \quad \Rightarrow \quad 3(1 - 2\nu)k = E$$

$$\frac{E}{k} = 3 - 6\nu$$

Al ser incompresible el sólido

$$\Rightarrow \quad k \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{6} \left(3 - \frac{E}{\infty} \right) = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$\therefore \quad \nu \rightarrow 0.5$$

Esto representa que cuando el material es incompresible el coeficiente de Poisson será de

$$\nu = \frac{1}{2}$$

6.4 APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD EN EL ANÁLISIS DE DIFERENTES PROBLEMAS BÁSICOS

Estudio de una barra circular sometida a torsión

Una barra de sección circular de radio r , diámetro ϕ y longitud l , la cual es sometida a un momento torsionante M_T , en el eje longitudinal de la barra (figura 6.11). Considere que se trata de un sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico y con esa base determine:

- Campo de desplazamientos
- Tensor de deformación
- Tensor de esfuerzos
- Esfuerzos principales y su orientación con relación al eje longitudinal de la barra

Con la finalidad de facilitar el análisis, el sistema coordenado se elige de tal forma que el origen coincida con el empotramiento de la barra, donde un eje (x_1) corresponde el eje de simetría de ésta, mientras que los otros dos están referidos al plano transversal. El momento torsionante provoca una deformación angular θ sobre el plano x_2x_3 , la cual es función de la distancia al origen $\theta = \theta(x_1)$, siendo ésta cero para $x_1 = 0$ y máxima para $x_1 = l$.

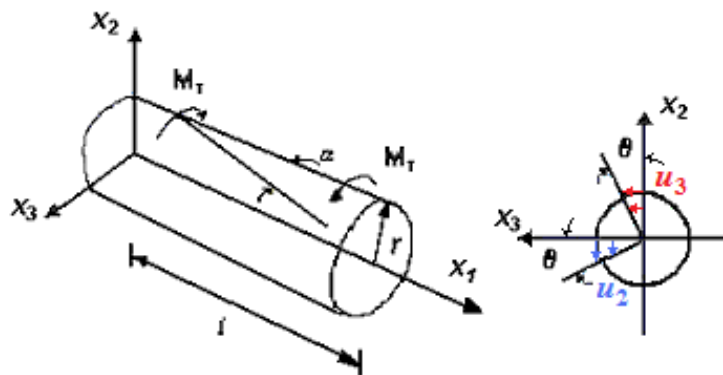


FIGURA 6.11 CILINDRO SOMETIDO A UN MOMENTO TORSIONANTE

El campo de desplazamientos u está dado por

$$u = \theta \times r$$

$$\theta = \theta \hat{e}_1 + 0 \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3$$

$$r = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$$

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \theta & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u} = 0 \hat{e}_1 - \theta x_3 \hat{e}_2 + \theta x_2 \hat{e}_3$$

a) Por tanto, el campo de desplazamientos queda

$$\therefore \quad u = -x_3 \theta \hat{e}_2 + x_2 \theta \hat{e}_3$$

A partir de la descripción del campo de desplazamientos y conociendo que

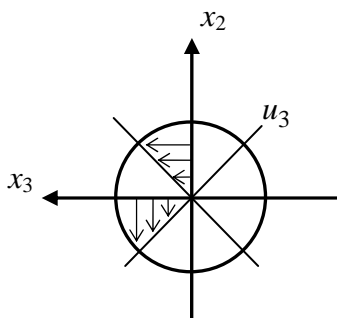
$$\theta = f(x_1)$$

y dado que si

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$$

$$x_1 = l \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_{\text{máx}}$$

se puede definir el campo de deformaciones



$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(0 + \left(-x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(-x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (-\theta + \theta) = 0$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} \left(x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + 0 \right) = \frac{1}{2} \left(x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right)$$

b) El tensor de deformaciones $\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla_X u + (\nabla_X u)^T]$ queda

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \\ -\frac{1}{2} x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Dado que se trata de un sólido elástico isotrópico $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$, el tensor de esfuerzos está dado por

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \mu x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \\ -\mu x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ \mu x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La validez del campo de esfuerzos se puede verificar a través del cumplimiento de la ecuación de Cauchy, considerando la existencia de equilibrio y despreciando las fuerzas de cuerpo

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x_3\mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2}x_2\mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3 \partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mu x_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu x_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + 0 + 0 = 0$$

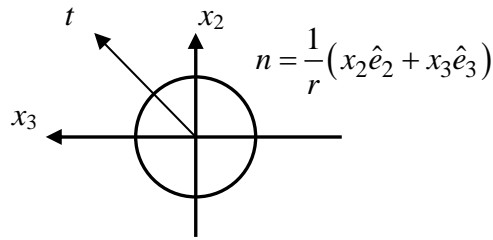
De lo antes expuesto se concluye que será necesario cumplir con

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} = 0$$

Entonces se constata que

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \text{ctte}$$

Se deberá cumplir también que la fuerza en las superficies laterales sea igual a cero (no existe carga aplicada sobre éstas).



$$t_i = \sigma_{ij} n_j = 0$$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

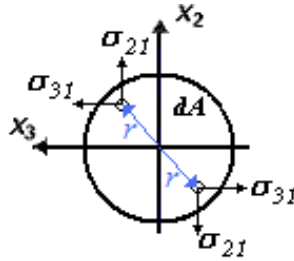
$$t_i = \frac{1}{r}(\sigma_{12}x_2 + \sigma_{13}x_3)(\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3)$$

Sustituyendo el valor de las componentes del esfuerzo, se tiene que

$$t_i = \mu \frac{\partial \theta}{\partial x_1} (-x_3x_2 + x_2x_3)\hat{e}_1 = 0$$

De lo que se concluye que las superficies están libres de cargas, esto es, la barra es sometida a momentos de torsión pura.

En cualquier superficie normal a x_1 aparecerán los esfuerzos de corte σ_{21}, σ_{31} ; donde el primero genera una rotación en dirección de las manecillas del reloj, mientras que el segundo hace lo mismo en dirección contraria. Además, se conoce que no existe ninguna fuerza resultante sobre dicho plano, esto es



De la figura se debe cumplir lo siguiente:

- Resultantes en $x_1 = l$

$$R_1 = \int \sigma_{11}n_1 dA = 0$$

$$R_2 = \int \sigma_{21}n_1 dA = -\mu \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \int x_3 dA = 0$$

$$R_3 = \int \sigma_{31}n_1 dA = +\mu \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \int x_2 dA = 0$$

Si bien al integrar las fuerzas sobre el plano cuya normal es \hat{e}_1 , la resultante debe ser igual a cero, ya que no existe ninguna fuerza que se esté aplicando. Por otra parte, el momento que

los esfuerzos generan alrededor del eje x_1 se debe a la aplicación del momento torsionante, y se deberán equilibrar con éste

$$M_{T_1} = \int (x_2 \sigma_{31} - x_3 \sigma_{21}) dA$$

Sustituyendo el momento torsionante sobre el eje x_1 se tiene que

$$M_{T_1} = \int \mu \frac{\partial \theta}{\partial x_1} (x_2^2 + x_3^2) dA$$

Además,

$$M_{T_2} = M_{T_3} = 0$$

Resulta evidente que

$$M_{T_1} = \mu \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \int r^2 dA$$

Por otra parte, la definición de momento polar de inercia (I_p) de la sección transversal de área es

$$I_p = \int r^2 dA$$

por lo que el momento torsionante sobre x_1 se expresa

$$M_{T_1} = \mu \frac{\partial \theta}{\partial x_1} I_p$$

$$I_p = \int_0^r r^2 dA = \int_0^r \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr = \frac{\pi r^4}{2}$$

De lo anterior queda

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{M_{T_1}}{\mu I_p}$$

Lo que significa que la distorsión angular $\frac{\partial \theta}{\partial x_1}$ es directamente proporcional a la sollicitación aplicada e inversamente proporcional a la rigidez del material μ y a la rigidez geométrica I_p

De otra forma, despejando el módulo de rigidez a corte (μ) se tiene

$$\mu = \frac{M_{T_1}}{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right) I_p}$$

Lo anterior representa que se puede determinar el módulo de rigidez a corte a través de un ensayo de torsión.

Sustituyendo en el tensor de esfuerzos se tiene

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\mu x_3 M_T}{\mu I_p} & \frac{\mu x_2 M_T}{\mu I_p} \\ \frac{-\mu x_3 M_T}{\mu I_p} & 0 & 0 \\ \frac{\mu x_2 M_T}{\mu I_p} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{M_T}{I_p}$$

La aplicación de un momento torsionante genera un estado de esfuerzos de corte puro donde estos son proporcionales al momento aplicado y a la distancia al eje de rotación e inversamente proporcionales al momento polar de inercia I_p . Donde para una barra de sección circular, la rigidez geométrica es proporcional al diámetro a la cuarta, por lo que una barra hueca es más eficiente, con relación a su peso, para transmitir el par.

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}; \quad I_p = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$$

Esfuerzos principales

Con base en el estado de esfuerzos σ_{ij} se puede analizar éste, para lo anterior se considerará un elemento diferencial que se encuentra en la superficie de la barra y cuya posición corresponde con uno de los ejes coordenados. Se debe de tener en cuenta que existe simetría con respecto al eje longitudinal x_1 , por lo que el resultado de los esfuerzos principales corresponderá a cualquier elemento en la superficie de la barra. Por otra parte, se trata de un estado a corte puro, por lo que su representación en el círculo de Mohr estará dada por la figura 6.12, y los esfuerzos principales serán:

$$x_2 = 0; \quad x_3 = r$$

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)$$

$$I_2 = -(\sigma_{12}^2 + \sigma_{31}^2)$$

$$I_2 = -\left[\left(\frac{M_T x_3}{I_p}\right)^2 + \left(\frac{M_T x_2}{I_p}\right)^2\right] = -\left(\frac{M_T}{I_p}\right)^2 (x_3^2 + x_2^2) = -\left(\frac{M_T}{I_p}\right)^2 (r^2)$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - (\sigma_{11}\sigma_{23}^2 + \sigma_{22}\sigma_{31}^2 + \sigma_{33}\sigma_{12}^2)$$

$$I_3 = 0$$

$$\sigma^3 - \left(\frac{M_T}{I_p}\right)^2 (x_3^2 + x_2^2) \sigma = 0$$

$$\sigma \left(\sigma^2 - \left(\frac{M_T}{I_p}\right)^2 (x_3^2 + x_2^2) \right) = 0$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_{1,3} = \pm \frac{M_T}{I_p} r$$

donde r es la distancia desde el centro de la barra.

Lo anterior indica que los máximos normales son iguales a los cortantes máximos, lo que corresponde con un estado de corte puro.

Para el valor principal

$$\sigma_1 = \frac{M_T}{I_p} R$$

siendo R el radio del cilindro, la ecuación del eigenvector queda

$$-\frac{M_T R}{I_p} n_1^1 - \frac{M_T R}{I_p} n_2^1 = 0$$

$$-\frac{M_T R}{I_p} n_3^1 = 0$$

De lo que se desprende que $n_1^1 = -n_2^1$, $n_3^1 = 0$, por lo que el eigenvector es $n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)$

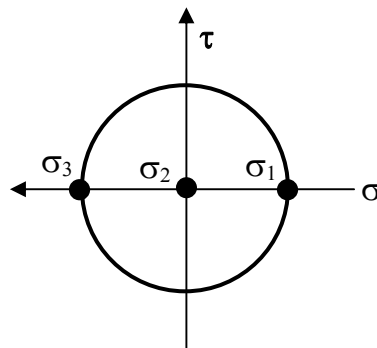


FIGURA 6.12 CIRCULO DE MOHR, LA APLICACIÓN DEL MOMENTO TORSIONANTE GENERA UN ESTADO DE CORTE PURO

Esta normal determina que para un plano cuya normal sea \hat{e}_1 en la coordenada $(x_1, 0, r)$ se define un ángulo de $\pi/4$ con relación al eje x_1 ; lo que da lugar a una falla con un desarrollo helicoidal a $\pi/4$ con relación a dicho eje, esto para el caso de la fractura de la barra para un material frágil.

Barra sometida a carga uniaxial (tracción o compresión)

Suponga una barra sometida a una carga uniaxial (tracción o compresión) la cual coincide con su eje longitudinal (figura 6.13). La carga provoca una deformación infinitesimal en el rango elástico, por lo que

$$x_i \cong X_i$$

$$\sigma_{11} = \frac{f_1}{\int_A n_1 dA}$$

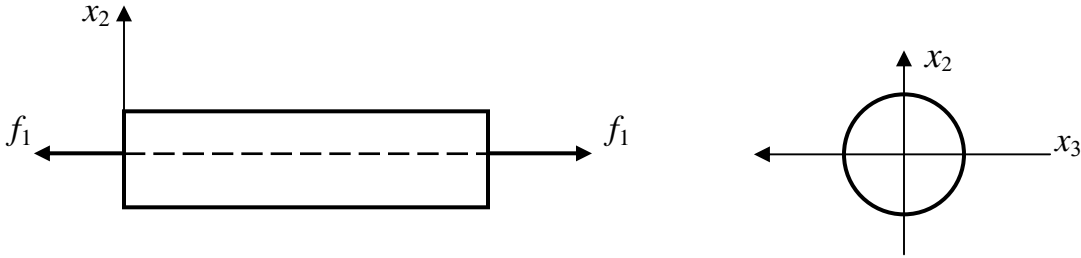


FIGURA 6.13 BARRA CILÍNDRICA DE RADIO EXTERIOR R , LA CUAL ES SOMETIDA A UNA CARGA f_1

En $x_1 = 0$, $x_1 = l$ se tiene f_1 , por otra parte para $0 < x_1 < l$, entonces

$$\sigma_{11} = \frac{f}{A_1}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{31} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0$$

Considerando lo anterior se tiene que

- i. Las ecuaciones de equilibrio son satisfechas $\nabla \cdot \sigma = 0$

- ii. Las condiciones de frontera se satisfacen
- iii. Existe un campo de desplazamientos que corresponde con el campo de esfuerzos

Tensor de esfuerzos

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f_1}{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$

b) En la superficie del cilindro

$$f_2 = f_3 = 0$$

De la ley de Hooke se tiene que para un material elástico isotrópico y dado que se trata de un estado uniaxial de carga:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) = \frac{\sigma_{11}}{E}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})) = -\frac{\nu\sigma_{11}}{E}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) = -\frac{\nu\sigma_{11}}{E}$$

Es por consecuencia que el tensor de deformaciones queda

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Por su parte, el campo de desplazamientos está dado por

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Rightarrow \int \frac{\sigma_{11}}{E} \partial x_1 = \int \partial u_1$$

$$\therefore u_1 = \sigma_{11} \frac{x_1}{E} + f(x_2, x_3)$$

Como el elemento está empotrado

$$x_1 = 0 \Rightarrow u_1(0) = 0 \quad \forall x_2, x_3 \quad \therefore f(x_2, x_3) = 0$$

$$\Rightarrow u_1(x_1) = \frac{\sigma_{11}}{E} x_1$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Rightarrow \int \frac{-\nu \sigma_{11}}{E} \partial x_2 = \int \partial u_2$$

$$\therefore u_2 = -\nu \sigma_{11} \frac{x_1}{E} + f(x_1, x_3)$$

$$\text{para } x_2 = 0 \Rightarrow u_2(0) = 0 \quad \forall x_1, x_3 \quad \therefore f(x_1, x_3) = 0$$

$$\Rightarrow u_2(x_2) = \frac{-\nu \sigma_{11}}{E} x_2$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Rightarrow \int \frac{-\nu \sigma_{11}}{E} \partial x_3 = \int \partial u_3$$

$$\therefore u_3 = -\nu \sigma_{11} \frac{x_3}{E} + f(x_1, x_2)$$

$$\text{para } x_3 = 0 \Rightarrow u_3(0) = 0 \quad \forall x_1, x_2 \quad \therefore f(x_1, x_2) = 0$$

$$\Rightarrow u_3(x_3) = \frac{-\nu \sigma_{11}}{E} x_3$$

El esfuerzo normal máximo y el cortante máximo están dados por

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_{11} ; \quad \tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{11}}{2}$$

Principio de Saint Venant

Si la distribución de fuerzas que actúan en la porción de la superficie de un cuerpo es reemplazada por una diferente distribución de fuerzas que actúan en la misma porción del cuerpo, de tal forma que éstas generan los mismos efectos, entonces se puede referir a ellas como equivalentes, ya que sus efectos en zonas alejadas al punto de aplicación son esencialmente los mismos, en virtud de que dan lugar a las mismas fuerzas resultantes y a los mismos pares. Este concepto permite simplificar el estudio de los elementos estructurales al poder reemplazar las cargas que realmente se aplican por otras que, causando los mismos efectos, faciliten el análisis.

Viga (barra) sometida a flexión pura

Considere una barra que es sometida a un momento flexionante M_f . Para facilitar el análisis, los ejes se pueden considerar de tal forma que solo se presente momento alrededor de uno de éstos. El M_f produce flexión de la barra al ser aplicado (figura 6.14) y las superficies laterales están libres de cargas de tracción.

El momento flexionante aplicado a la barra deberá ser contrarrestado por las solicitaciones que se generan al interior de ésta, por esto es que se produce el siguiente estado de esfuerzos:

$$\sigma_{11} \neq 0$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$$

Estado de esfuerzos

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

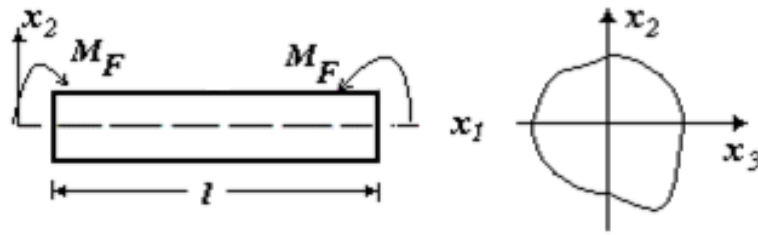


FIGURA 6.14 BARRA DE SECCIÓN CUALESQUIERA A LA CUAL SE LE APLICA UN MOMENTO FLECTOR ALREDEDOR DE x_3

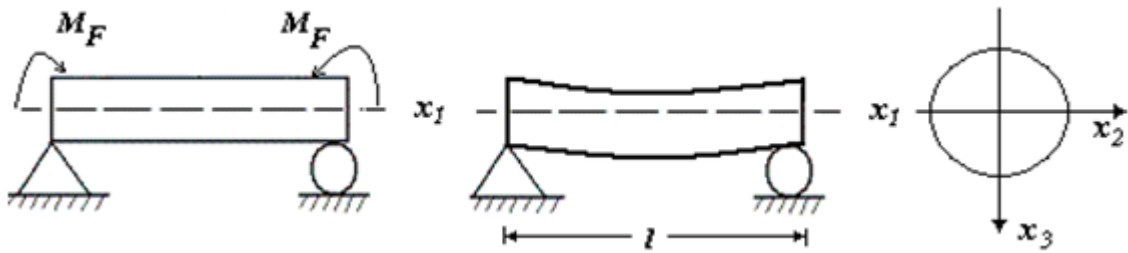


FIGURA 6.15 VIGA DE SECCIÓN CIRCULAR SOMETIDA A UN MOMENTO FLEXIONANTE

Considerando que se trata de un sólido elástico isotrópico se tiene que

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E}$$

La barra es sometida a momentos aplicados en los extremos del elemento de igual magnitud y de sentido opuesto

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$\therefore \quad \text{eje } x_1 \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0 \quad (6.16)$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = f(x_2, x_3)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}; \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\nu \sigma_{11}}{E}; \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu \sigma_{11}}{E}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$$

Si se considera que $M_f = M_3$, esto es que el momento flexionante solo produce rotación alrededor de x_3 , entonces, para $x_2 = 0$ se define una superficie neutra.

Por otra parte, se tiene que las superficies laterales están libres de esfuerzos

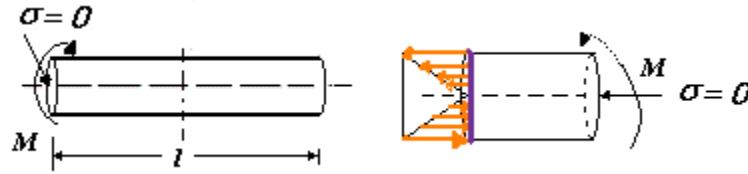


FIGURA 6.16 ESTADO DE ESFUERZOS EN UNA VIGA SOMETIDA A MOMENTO FLECTOR PURO

Por condiciones de equilibrio se requiere

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0$$

Con base en las ecuaciones de compatibilidad o integrabilidad

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} \sigma_{11} \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu \sigma_{11}}{E} \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu \sigma_{11}}{E} \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

de la ecuación 6.17 se tiene que

$$-\nu \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} = 0 \quad (6.18)$$

como de la ecuación de Cauchy se tiene que $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0$, entonces se concluye que

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} = 0 \text{ y entonces de la ecuación 6.18, } \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} = 0$$

Por lo tanto, σ_{11} se trata de una función lineal $\Rightarrow \sigma_{11} = \alpha x_2 + cte$, como existe cambio en el sentido del esfuerzo σ_{11} , se puede definir el origen sobre dicho plano, al cual se denomina como neutro o de esfuerzo nulo.

Por otra parte, se debe cumplir también con que

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$-\nu \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} = 0$$

pero como $\sigma_{11} = \sigma(x_2) \therefore \sigma_{11} = \alpha x_2$ cumple con las condiciones anteriores.

Dado que las superficies laterales están libres de esfuerzos y como el esfuerzo σ_{11} se genera como una respuesta de la barra al momento flexionante M_3 aplicado, se debe cumplir que

$$f_1 = \int_A t_1 da = 0 \Rightarrow \int_A (\sigma_{11} n_1) dA = 0$$

$$M_3 - \int_A x_2 \sigma_{11} dA = 0$$

$$\therefore \quad f_1 = \int_A \alpha x_2 dA = 0 \quad M_3 - \alpha \int_A x_2^2 dA = 0$$

donde el término $\int x_2^2 dA = I_3$ representa el momento de inercia de la sección transversal con relación al eje x_3 , entonces, es entonces factible despejar la variable α

$$\therefore \quad \alpha = \frac{M_3}{I_3} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{11} = -\frac{M_3 x_2}{I_3}$$

El signo se ha definido considerando que en la parte positiva de x_2 los esfuerzos serán compresivos mientras que en la negativa, éstos serán de tracción.

Para una sección transversal circular el momento de inercia es

$$I = \frac{\pi r^4}{4}$$

Por lo tanto, el esfuerzo máximo está dado por $(x_2)_{\text{máx}} = c$, donde c representa el radio de la barra si ésta fuera de sección circular. De lo anterior se tiene que el esfuerzo máximo es

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{s}$$

$$s = \frac{I}{c} \quad \text{Módulo de la sección elástica}$$

Como

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{M_3 x_2}{I_3} & \Rightarrow & \quad \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} = -\frac{M_3 x_2}{I_3 E} \\ \nu &= -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} & \Rightarrow & \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{M_3}{I_{33} E} \nu x_2\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que por encima del eje neutro, las deformaciones longitudinales serán negativas mientras que para x_2 negativo éstas serán positivas dado que los esfuerzos serán de tracción.

Con base en lo anterior, los desplazamientos quedan

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \Rightarrow & \quad \int \frac{-M_3 x_2}{EI_{33}} \partial x_1 = \int \partial u_1 \\ \therefore & \quad u_1 = -M_3 \frac{x_1 x_2}{EI_{33}} + f(x_2, x_3)\end{aligned}$$

Como el elemento está empotrado

$$\begin{aligned}x_1 = 0 & \Rightarrow \quad u_1(0) = 0 \quad \forall x_2, x_3 & \therefore \quad f(x_2, x_3) = 0 \\ \Rightarrow & \quad u_1(x_i) = -\frac{M_3}{EI_{33}} x_1 x_2\end{aligned}$$

Para el eje x_2

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \Rightarrow & \quad \int \frac{\nu M_3 x_2}{EI_{33}} \partial x_2 = \int \partial u_2 \\ \therefore & \quad u_2 = \nu M_3 \frac{x_2^2}{2EI_{33}} + g(x_1, x_3) \\ x_2 = 0 & \Rightarrow \quad u_2(0) = 0 \quad \forall x_1, x_3 & \therefore \quad g(x_1, x_3) = 0\end{aligned}$$

Se sabe que

$$\varepsilon_{12} = 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{M_3 x_1}{I_{33} E} \quad \Rightarrow \quad \int \partial u_2 = \int \frac{M_3 x_1}{I_{33} E} \partial x_1$$

$$\therefore \quad g(x_1) = \frac{M_3 x_1^2}{2 I_{33} E}$$

Además,

$$\varepsilon_{23} = 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\nu M_3 x_3}{I_{33} E} \quad \Rightarrow \quad \int \partial u_2 = \int - \frac{\nu M_3 x_3}{I_{33} E} \partial x_3$$

$$\therefore \quad g(x_3) = - \frac{\nu M_3 x_3^2}{2 I_{33} E}$$

$$g(x_1, x_3) = \frac{M_3}{2 I_{33} E} \left(-\nu x_3^2 + x_1^2 \right)$$

$$\therefore \quad u_2 = \frac{M_3}{2 I_{33} E} \left(\nu x_2^2 + x_1^2 - \nu x_3^2 \right)$$

Para el eje x_3

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\nu M_3 x_2}{E I_{33}} \partial x_3 = \int \partial u_3$$

$$\therefore \quad u_3 = \nu M_3 \frac{x_2 x_3}{E I_{33}} + h(x_1, x_2)$$

Se sabe que

$$\varepsilon_{13} = 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$$

$\therefore h(x_1) = \text{cte}$ pero en el empotramiento $x_1 = 0$ y $u_3 = 0$

$$\therefore \text{cte} = 0 \Rightarrow h(x_1) = 0$$

Se sabe que

$$\varepsilon_{23} = 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\nu M_3 x_3}{I_{33} E}$$

$$-\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\nu M_3 x_3}{I_{33} E} + h'(x_2)$$

Sumando las dos anteriores

$$h'(x_2) = 0$$

Considerando el empotramiento $h(x_2) = 0$

$$\therefore h(x_1, x_2) = 0$$

$$\Rightarrow u_3 = \frac{\nu M_3 x_2 x_3}{I_{33} E}$$

Donde al producto del momento de inercia con el módulo de elasticidad representa la rigidez del elemento mecánico (rigidez a flexión).

Como u_1 es función lineal de x_2 , una sección transversal plana continuará plana al ser rotada sobre el eje en un ángulo θ

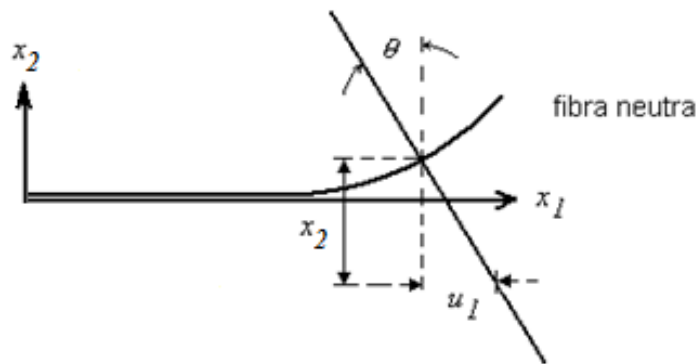
$$\theta \hat{=} \tan \theta = \frac{u_1}{x_2} = \frac{M_3 x_1}{EI_3}$$

El desplazamiento de las partículas a lo largo del eje x_1 , para $x_2 = x_3 = 0$

$$u_1 = u_3 = 0 ; \quad u_2 \neq 0$$

El desplazamiento de este elemento material (al cual se denomina como fibra neutra) es frecuentemente usado para definir la deflexión de la viga

$$-\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{M_3 x_1}{EI_3} = \tan \theta$$



Efecto combinado de flexión y torsión

Dado que la deformación se efectúa en el rango elástico, el fenómeno se considera lineal. Entonces, el tensor de esfuerzos estará dado por la suma término a término de los tensores asociados al momento torsionante y al momento flexionante, por lo que el estado de esfuerzos queda

$$\sigma_{ijc} = \sigma_{ijF} + \sigma_{ijT}$$

$$\sigma_{ijc} = \begin{bmatrix} -\frac{M_f x_2}{I_{33}} & -\frac{M_T x_3}{I_p} & \frac{M_T x_2}{I_p} \\ -\frac{M_T x_3}{I_p} & 0 & 0 \\ \frac{M_T x_2}{I_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.5 ESTADOS PARTICULARES DE ESFUERZO Y DEFORMACIÓN

La física de cualquier problema siempre se desarrolla en un espacio tridimensional, sin embargo, la ingeniería representa el arte de aplicar la física y las matemáticas buscando la mejor relación entre la aproximación de los resultados a la realidad y la solución más simple que demande menores recursos matemáticos y computacionales. Es por consecuencia que en muchos problemas de ingeniería, una condición triaxial real sea idealizada a dos dimensiones (plana). Esto reduce de 6 a 3 el número de incógnitas y por tanto, simplifica las metodologías de solución, permitiendo en muchos de los casos soluciones analíticas prácticamente imposibles para el caso tridimensional.

Si una de las dimensiones es pequeña en comparación de las otras, entonces, los esfuerzos en la dirección menor se desprecian y el problema se estudia en el plano que definen las otras dimensiones, a esta situación se le denomina como *estado plano de esfuerzos*.

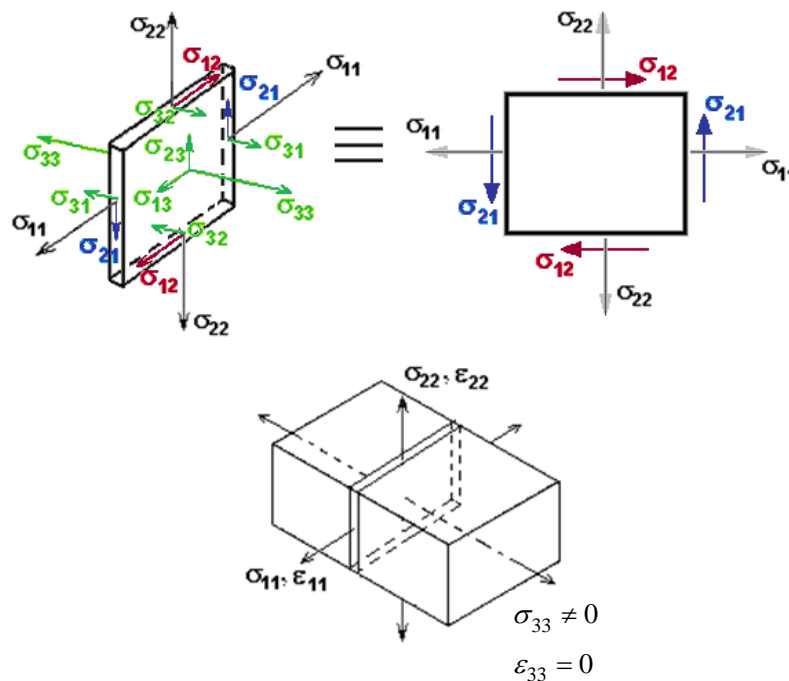


FIGURA 6.17 EN LA IMAGEN SUPERIOR SE OBSERVAN LAS CONDICIONES CARACTERÍSTICAS QUE DEFINEN UN ESTADO BIAxIAL DE ESFUERZOS. POR SU PARTE, LA IMAGEN INFERIOR REPRESENTA LAS CONDICIONES DE UN ESTADO BIAxIAL DE DEFORMACIÓN

Por otra parte, si una de las dimensiones es muy grande en comparación con las otras, entonces se considera que la deformación en dicha dirección se puede despreciar definiéndose a tal situación como *estado de deformación biaxial* o *estado plano de deformación*, figura 6.17.

Resulta por demás evidente, de un primer análisis de la teoría de la elasticidad, que un estado biaxial de esfuerzos no corresponderá con uno de deformación biaxial, sino que por condiciones de equilibrio un estado biaxial de deformación corresponde con un estado triaxial de esfuerzos, donde uno de los esfuerzos normales será linealmente dependiente de los otros dos esfuerzos normales. Situación parecida se presenta para un estado biaxial de esfuerzos, el cual corresponde con un estado triaxial de deformación, en donde la deformación en el eje perpendicular al plano es diferente de cero, resultando linealmente dependiente de las otras dos deformaciones normales.

Estado plano de esfuerzos (Estado biaxial de esfuerzos)

En este caso el cuerpo se caracteriza en que una de sus dimensiones es mucho menor que las otras (figura 6.18) $x_3 \ll x_1, x_3 \ll x_2$, por tal motivo, los esfuerzos normal y de corte en dicha dirección se consideran despreciables, por lo que

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{13} = \sigma_{32} = \sigma_{23} = 0$$

$$x_3 \ll x_1, x_2$$

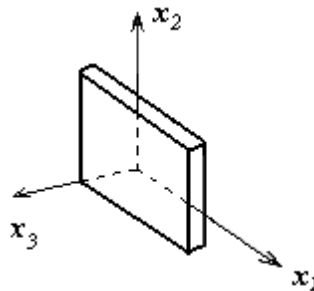


FIGURA 6.18 ESTADO PLANO DE ESFUERZOS

El estado de esfuerzos se expresa como

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el de deformaciones, considerando un sólido elástico isotrópico

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{33} = 0 = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

de lo cual se obtiene

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

Estado de deformación biaxial

El caso de deformación plana se presenta esquemáticamente en la figura 6.19, donde una de las dimensiones es sensiblemente mayor que las otras ($x_3 \gg x_2, x_1$), por lo que la deformación en esta dirección será mucho menor que en los otros dos ejes, razón por la cual se desprecia, definiéndose como un *estado plano de deformación*.

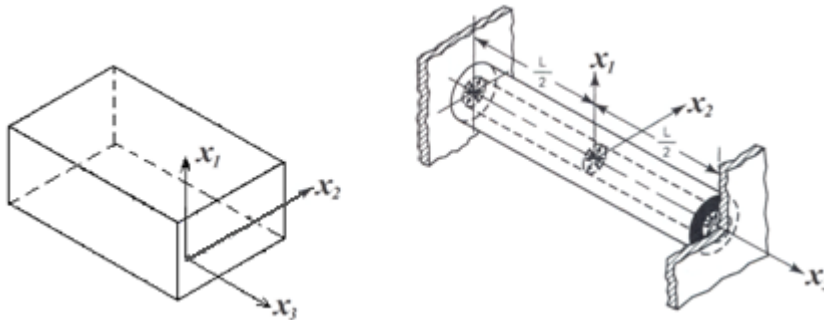


FIGURA 6.19 ESTADO DE DEFORMACIÓN PLANA. SE CARACTERIZA EN QUE UNA DE LAS DIMENSIONES ES MUCHO MAYOR QUE LAS OTRAS

Por consecuencia, el tensor de deformación se expresará como

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, considerando la Ley de Hooke generalizada, se tiene

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij})$$

Como $\varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, por lo que el estado de esfuerzos se expresa como

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{pmatrix}$$

En este caso de deformación plana, el vector desplazamientos queda

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0$$

Por consecuencia, las deformaciones se expresan como

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \varepsilon_{33} &= 0 \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} &= 0 \end{aligned}$$

De las ecuaciones de Cauchy considerando equilibrio y despreciando las fuerzas de cuerpo

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad \sigma_{33} = \sigma(x_1, x_2)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales no puede ser resuelto de inmediato ya que σ_{33} es una composición lineal de σ_{11}, σ_{22} ; de tal forma que $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$. Por consecuencia, será necesario desarrollar una tercera ecuación diferencial para proceder a resolver el sistema; esta ecuación diferencial se desarrolla a partir de las *ecuaciones de compatibilidad* de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Considerando la Ley de Hooke, al sustituir el valor de σ_{33} y expresar la ecuación en la forma $\varepsilon = \varepsilon(\sigma_{11}, \sigma_{22})$, se tiene que

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu^2\sigma_{11} - \nu^2\sigma_{22}]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu^2\sigma_{11} - \nu^2\sigma_{22}]$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11}(1 - \nu^2) - \nu\sigma_{22}(1 + \nu)] = \frac{1}{E}[\sigma_{11}(1 - \nu^2) - \sigma_{22}(\nu + \nu^2)]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22}(1 - \nu^2) - \nu\sigma_{11}(1 + \nu)] = \frac{1}{E}[\sigma_{22}(1 - \nu^2) - \sigma_{11}(\nu + \nu^2)]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu}$$

Sustituyendo los valores de ε_{11} y de ε_{22} en la primera ecuación de compatibilidad, se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right] + \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} \right] \\ &= \frac{2}{2\mu} \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \quad (6.21)$$

De las ecuaciones de equilibrio, derivando la primera con respecto a x_1 y la segunda con respecto a x_2 , para después sumarlas se tiene

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_{21}}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} = -2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (6.22)$$

La ecuación 6.22 se puede sustituir en la primera ecuación de compatibilidad 6.22, de tal forma que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\mu(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} \right) + \\ & \frac{(1+\nu)}{2\mu(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Simplificando la ecuación 6.23, se tiene

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} \right) = 0$$

$$\therefore (1-\nu^2) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

$$\therefore \nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

El sistema de tres ecuaciones diferenciales con tres incógnitas queda entonces

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \quad (6.24)$$

Incógnitas: σ_{11} , σ_{22} , σ_{21}

Función de esfuerzos de Airy

Este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales (ecuación 6.14), es relativamente frecuente en matemáticas; razón por la cual se buscó una solución desde inicios del siglo XIX. El honor correspondió a George Biddel Airy [1801-1892], astrónomo y matemático inglés, quien hacia 1862 propuso la solución (Airy Stress function method). Lo anterior a través de una función escalar φ tal que $\nabla^4 \varphi = 0$; es entonces que

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} = 0$$

$$\varphi = f(x_1, x_2)$$

Airy demostró que existe una sola función φ , tal que en ausencia de fuerzas de cuerpo, el campo de esfuerzos quede definido a través de

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Entonces, cualquier función escalar φ que satisface la ecuación $\nabla^4 \varphi = 0$ genera una posible solución al problema elástico, por tal motivo es denominada como *Función de esfuerzos de Airy* (φ). Una solución elemental la representa cualquier polinomio de tercer grado que genera un campo de esfuerzos y de deformaciones lineal, donde las soluciones particulares dependerán de las condiciones de frontera establecidas. La función de esfuerzos de Airy juega un papel fundamental en el estudio de los problemas de deformación plana, simplificación muy usual en la mecánica de sólidos.

Como ya fue mencionada, una posible solución a la ecuación biarmónica es a través de funciones polinomiales de diversos grados cuyos coeficientes son asignados para que se cumpla $\nabla^4 \varphi = 0$. Por ejemplo, para un polinomio de segundo grado

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2} x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + \frac{c_2}{2} x_2^2$$

define unos esfuerzos asociados

$$\sigma_{11} = c_2; \quad \sigma_{22} = a_2; \quad \sigma_{12} = -b_2$$

Lo cual indica que los tres esfuerzos son constantes en el cuerpo. Este sistema podría ser utilizado para representar un estado de tensión simple, tensión biaxial o cortante puro.

Un polinomio de tercer grado

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{6} x_1^3 + \frac{b_3}{2} x_1^2 x_2 + \frac{c_3}{2} x_1 x_2^2 + \frac{d_3}{6} x_2^3$$

da como resultado los esfuerzos

$$\sigma_{11} = c_3 x_1 + d_3 x_2; \quad \sigma_{22} = a_3 x_1 + b_3 x_2; \quad \sigma_{12} = -b_3 x_1 - c_3 x_2$$

para $a_3 = b_3 = c_3 = 0$, las expresiones se reducen a

$$\sigma_{11} = d_3 x_2; \quad \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$$

lo cual representa el caso de flexión pura en una barra de sección rectangular.

Un polinomio de cuarto grado

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{12} x_1^4 + \frac{b_4}{6} x_1^3 x_2 + \frac{c_4}{2} x_1^2 x_2^2 + \frac{d_4}{6} x_1 x_2^3 + \frac{e_4}{12} x_2^4$$

dado que

$$\nabla^4 \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad e_4 = -(2c_4 + a_4) \quad \therefore$$

$$\sigma_{11} = c_4 x_1^2 + d_4 x_1 x_2 - (2c_4 + a_4) x_2^2$$

$$\sigma_{22} = a_4 x_1^2 + b_4 x_1 x_2 + c_4 x_2^2$$

$$\sigma_{12} = -\frac{b_4}{2} x_1^2 - 2c_4 x_1 x_2 - \frac{d_4}{2} x_2^2$$

Muchos problemas de importancia práctica son resueltos a través de la combinación de polinomios como los antes descritos.

Aplicación de las funciones de esfuerzo de Airy en la determinación del estado de esfuerzos y deformaciones asociados a la presencia de una dislocación de borde

En ciencia de materiales, para justificar el nivel de esfuerzos necesarios para producir una deformación permanente en una estructura cristalina, se definió desde los años 30 del siglo XX la existencia de defectos cristalinos denominados como dislocaciones. Estos defectos cristalinos se han descrito en su forma primitiva como dislocaciones de borde (figura 6.20) y de tipo helicoidal.

En ambos casos, la presencia de la dislocación generará un campo elástico asociado, el cual interactúa con los campos de las otras dislocaciones presentes en el cristal. Estos defectos requieren, además, una cierta energía para su formación, la cual se almacena a través del campo de deformación elástica durante el proceso de formación de las dislocaciones.

En el caso particular de una dislocación de borde, ésta se puede representar a través de un campo biaxial de deformación, tal que los desplazamientos u_1 y u_2 son variables y $u_3 = 0$

Por consecuencia, para una dislocación de borde se deberá cumplir que

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

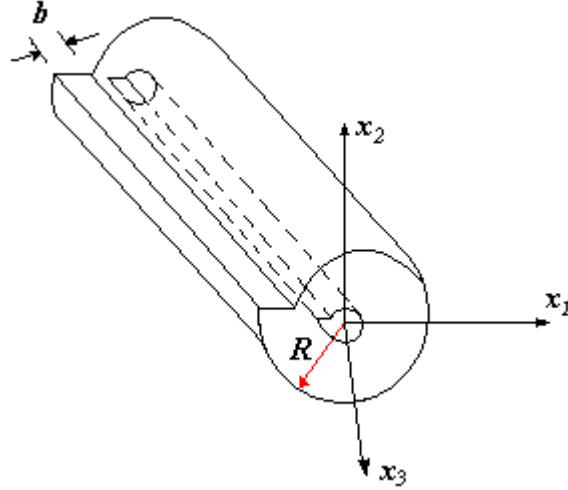


FIGURA 6.20 DESCRIPCIÓN ESQUEMÁTICA DE UNA DISLOCACIÓN DE BORDE

A partir del análisis de las condiciones de frontera se determinó que la función de Airy de los esfuerzos que da solución al problema está dada por

$$\phi = -\frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} x_2 \ln(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

En virtud de que los esfuerzos asociados se definen por

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \sigma_{11} = -\frac{Gb x_2 (3x_1^2 + x_2^2)}{2\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{Gb x_1 (x_1^2 - x_2^2)}{2\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = \frac{Gb x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{2\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\therefore \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{G\nu x_2}{\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

Viga curvada sometida a flexión pura

Se considerará una viga curvada, tal como se muestra en la figura 6.21.

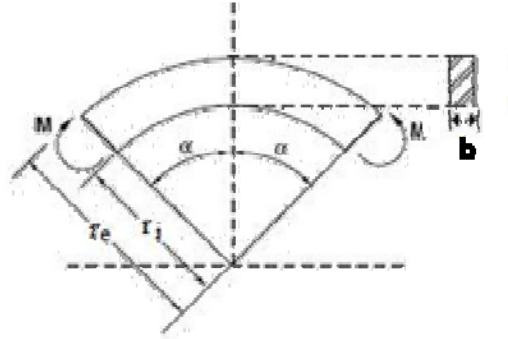


FIGURA 6.21 CONDICIONES QUE SE PRESENTAN POR FLEXIÓN PURA EN UNA VIGA CURVADA

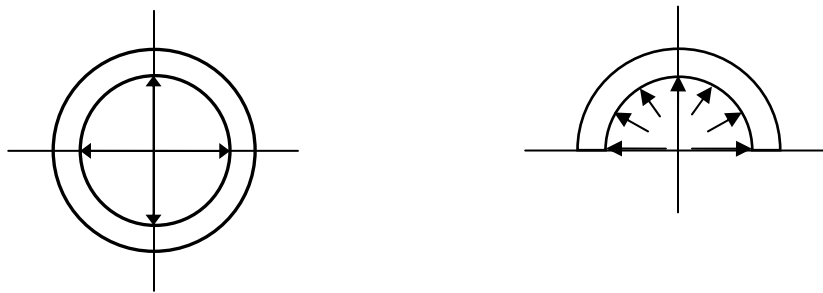


FIGURA 6.22 LA SECCIÓN DEL TUBO SE PUEDE VISUALIZAR COMO UNA VIGA CURVADA, LA SOLICITACIÓN QUE PROVOCA LOS ESFUERZOS ES LA PRESIÓN HIDROSTÁTICA (p_H)

Para la viga curvada en los extremos (superficies límite) $r = a$, $r = b$, $\theta = \pm\alpha$, $z = \pm\frac{h}{2}$ están libres de cargas de tracción. Suponiendo que h es muy pequeño comparado con las otras dimensiones, se pretende obtener una solución al problema considerando un estado de esfuerzos planos, para una viga curva sobre la que se aplican momentos M_f en los extremos $\theta = \pm\alpha$.

Para un problema de deformación plana en coordenadas polares, se tiene

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}((1-\nu^2)\sigma_{rr} - \nu(1+\nu)\sigma_{\theta\theta})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}((1-\nu^2)\sigma_{\theta\theta} - \nu(1+\nu)\sigma_{rr})$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{2\mu} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{r\theta}$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zz} = 0$$

Para las condiciones establecidas, la solución está dada por:

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

Para la viga curva se pueden utilizar las soluciones para deformación plana en coordenadas polares, que están dadas por las ecuaciones antes indicadas.

Estas ecuaciones deben cumplirse en las superficies $r = a$, $r = b$, $\theta = \pm\alpha$ donde dichas superficies están libres de cargas

$$0 = \frac{A}{a^2} + B(1 + 2 \ln a) + 2C$$

$$0 = \frac{A}{b^2} + B(1 + 2 \ln b) + 2C$$

En la cara $\theta = \alpha$ se presenta un esfuerzo normal $\sigma_{\theta\theta}$, dada por las expresiones anteriormente enunciadas, calculando la resultante sobre dicha cara se tiene

$$f_{\theta} = 0 = \int_a^b \sigma_{\theta\theta} h dr = h \left[\frac{A}{r} + B(3r + 2r \ln r) + 2C r \right]_a^b$$

Estos esfuerzos normales requieren de un par equilibrio, situación que se expresa como

$$0 = \int_a^b \sigma_{\theta\theta} r l dr + M_f l$$

ecuación que por unidad de ancho queda

$$0 = \int_a^b \sigma_{\theta\theta} r dr + M_f$$

por lo que

$$-M_f = -A \operatorname{Ln} \frac{b}{a} + B(b^2 - a^2) + B(b^2 \operatorname{Ln} b - a^2 \operatorname{Ln} a) + C(b^2 - a^2)$$

Ecuación que, con base en lo expuesto, se puede simplificar como

$$-M_f = -A \operatorname{Ln} \frac{b}{a} - B(b^2 \operatorname{Ln} b - a^2 \operatorname{Ln} a) - C(b^2 - a^2)$$

De lo anterior se puede determinar el valor de las constantes A, B, C

$$A = -\frac{4M_f}{N} a^2 b^2 \operatorname{Ln} \frac{b}{a}$$

$$B = -\frac{2M_f}{N} (b^2 - a^2)$$

$$C = \frac{M_f}{N} \left[(b^2 - a^2) + 2(b^2 \operatorname{Ln} b - a^2 \operatorname{Ln} a) \right]$$

$$N = \left[(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\operatorname{Ln} \frac{b}{a} \right)^2 \right]$$

Con lo que

$$\sigma_{rr} = -\frac{4M_f}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \operatorname{Ln} \frac{b}{a} + \left(b^2 \operatorname{Ln} \frac{r}{b} \right) + a^2 \operatorname{Ln} \frac{a}{r} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{4M_f}{N} \left(\frac{-a^2 b^2}{r^2} \text{Ln} \frac{b}{a} + \left(b^2 \text{Ln} \frac{r}{b} \right) + a^2 \text{Ln} \frac{a}{r} + (b^2 - a^2) \right)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

Para el caso de la determinación del estado de esfuerzos considerando una presión interna p_i y una presión externa p_e (tubo), se tiene que:

$$\sigma_{rr} = -p_i, \text{ para } r = a \quad \text{y} \quad \sigma_{rr} = -p_e, \text{ para } r = b$$

$$\sigma_{rr} = -p_i \left(\frac{\frac{b^2}{r^2} - 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right) - p_e \left(\frac{-\frac{a^2}{r^2} + 1}{-\frac{a^2}{b^2} + 1} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = p_i \left(\frac{\frac{b^2}{r^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right) - p_e \left(\frac{\frac{a^2}{r^2} + 1}{-\frac{a^2}{b^2} + 1} \right)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

6.6 ECUACIONES DE LA TEORÍA INFINITESIMAL DE LA ELASTICIDAD

Para el desarrollo de esta teoría se consideran desplazamientos infinitesimales, para un sólido elástico lineal e isotrópico, en donde todos los términos en la ecuación son cantidades asociadas con una partícula, la cual está en la posición (X_1, X_2, X_3) .

Considerando el caso de pequeños movimientos (infinitesimales), como los que caracterizan la deformación elástica de los metales, de tal forma que cada partícula es vecina de su estado natural (sin esfuerzos), y que X_i define la posición del estado natural (descripción Lagrangiana) de la partícula típica, entonces

$$x_i \triangleq X_i$$

Los desplazamientos u_i y las magnitudes ∇u también son pequeños. Por definición se tiene que

$$x_1 = X_1 + u_1; \quad x_2 = X_2 + u_2; \quad x_3 = X_3 + u_3$$

por lo tanto, las componentes de velocidad

$$v_i = \frac{Dx_i}{Dt} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{x_i \text{ fija}} + v_1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) + v_2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right) + v_3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right)$$

donde v_i son las velocidades asociadas con los desplazamientos infinitesimales u_i , tomando en cuenta lo anterior, se concluye que el efecto de $(\nabla u) \cdot v$ es despreciable ya que $\nabla u \ll 1$, $v \ll 1$; es entonces que la velocidad y aceleración se pueden aproximar como:

$$v_i \triangleq \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{x_i \text{ fija}}$$

$$a_i \triangleq \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right)_{x_i \text{ fija}}$$

Por otra parte, el volumen de la partícula dV está asociado con el volumen inicial como

$$dV = (1 + \varepsilon_{kk}) dV_0$$

Las densidades se relacionan de acuerdo con

$$\rho = (1 + \varepsilon_{kk})^{-1} \rho_0 \triangleq (1 - \varepsilon_{kk}) \rho_0$$

Nuevamente, negando el efecto de cantidades de orden superior se tiene que

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} \cong \rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right)_{x_i \text{ fija}}$$

Reemplazando los términos antes desarrollados en la ecuación de movimiento de Cauchy, se tiene

$$\rho \left(\frac{D^2}{Dt^2} \right) u_i = \rho B_i + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)$$

con

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B_i + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \quad (6.25)$$

En la ecuación 6.25 todas las componentes están en función de coordenadas espaciales y, como las ecuaciones se establecen para movimientos infinitesimales, no hay necesidad de hacer distinción entre coordenadas espaciales y materiales.

Para un campo de desplazamientos u_i se dice que éste describe el movimiento en un medio elástico si satisface la ecuación 6.25. Cuando un campo de desplazamientos es dado $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$, para estar seguros de que el movimiento es posible primero se deberá determinar el campo de deformaciones

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

y a partir de éste el campo de esfuerzos

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

La sustitución de u_i y σ_{ij} en la ecuación 6.25 permitirá verificar si el movimiento es posible; donde las solicitaciones en la superficie o en las fronteras del campo necesarias para mantener el movimiento están dadas por

$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$

Por otra parte, si las condiciones de frontera están prescritas (por ejemplo, determinadas fronteras del cuerpo deberán permanecer fijas y otras deberán permanecer libres de sollicitaciones, ambas a cualquier tiempo, etc.), entonces, considerando que u_i debe ser solución del problema, éste deberá cumplir las condiciones prescritas o de frontera.

Ecuaciones de Navier

Las ecuaciones de Navier describen el movimiento en términos de componentes de desplazamiento solamente. Para su desarrollo se consideran desplazamientos infinitesimales así como la teoría elástica.

De la ecuación característica para un sólido elástico isotrópico

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial e}{\partial x_j} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial (\varepsilon_{kk})}{\partial x_j} \delta_{ij} = \frac{\partial e}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{kk} = \frac{\partial e}{\partial x_i}$$

$$e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$e = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento, se tiene que

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B_i + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \varepsilon_{kk} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)$$

En su forma general, la ecuación se expresa como

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B + (\lambda + \mu) \nabla e + \mu \nabla \cdot (\nabla u)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) + \mu \nabla \cdot (\nabla u)$$

a la cual se le conoce como *ecuación de la teoría infinitesimal de la elasticidad o ecuación de Navier*.

Ecuación de Navier en coordenadas rectangulares

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B_1 + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial e}{\partial x_1} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_1$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B_2 + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial e}{\partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_2$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B_3 + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial e}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_3$$

Ecuaciones de Navier en coordenadas cilíndricas

Por otra parte, las ecuaciones de Navier en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) se expresan en función del campo de desplazamiento

$$u(r, \theta, z, t) = u_r(r, \theta, z, t) \hat{e}_r + u_\theta(r, \theta, z, t) \hat{e}_\theta + u_z(r, \theta, z, t) \hat{e}_z$$

$$\nabla u_{(r,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Si se considera que se trata de un sólido elástico e isotrópico, entonces

$$T = \lambda e I + 2\mu E$$

donde

$$e = \nabla \cdot u$$

$$E = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T)$$

$$E_{r,\theta,\phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, se tiene

$$\sigma_{rr} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

$$\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

Por otra parte, la ecuación de Navier en forma general se expresa

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) + \mu \nabla \cdot (\nabla u)$$

donde

$$\nabla u = U$$

representa un tensor de segundo rango, para el cual la divergencia está dada por

$$(\text{div} U)_r = \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_{r\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{U_{rr} - U_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial z}$$

$$(\text{div} U)_\theta = \frac{\partial U_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{U_{r\theta} + U_{\theta r}}{r} + \frac{\partial U_{\theta z}}{\partial z}$$

$$(\text{div} U)_z = \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_{z\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} + \frac{U_{zr}}{r}$$

Desarrollando lo antes expuesto, se tiene que

$$\varepsilon_{kk} = e = \nabla \cdot u = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \rho_0 B_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \rho_0 B_\theta + \left(\frac{\lambda + \mu}{r} \right) \frac{\partial e}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \rho_0 B_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

Ecuaciones de Navier en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\sigma_{rr} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \lambda e + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

$$\sigma_{\theta\phi} = \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi \cot \theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right)$$

$$\sigma_{\phi r} = \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right)$$

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r}$$

Partiendo de que

$$u_{(r,\theta,\phi)} = u_r(r, \theta, \phi; t)\hat{e}_r + u_\theta(r, \theta, \phi; t)\hat{e}_\theta + u_\phi(r, \theta, \phi; t)\hat{e}_\phi$$

Las ecuaciones de Navier para coordenadas esféricas quedan

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \rho_0 B_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \rho_0 B_\theta + \left(\frac{\lambda + \mu}{r} \right) \frac{\partial e}{\partial \theta} \\ + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} = \rho_0 B_\phi + \left(\frac{\lambda + \mu}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial e}{\partial \phi} \\ + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\phi \sin \theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right)$$

6.7 ANÁLISIS DEL DESPLAZAMIENTO DE ONDAS ELÁSTICAS A TRAVÉS DE UN SÓLIDO

Análisis de una onda plana irrotacional

En esta etapa se utilizarán las ecuaciones de Navier para el análisis del movimiento de ondas elásticas a través de un *material elástico, lineal e isotrópico*. Se trata de un problema elastodinámico en el que se considera el desplazamiento de un tren de ondas infinito y sin

amortiguamiento, el cual describe un desplazamiento de tipo senoidal. El movimiento de estas ondas se va a describir como longitudinal y transversal, y dado que se trata de un problema elástico lineal se podrá analizar su efecto considerando superposición de éstas. En primera instancia se considerará una onda longitudinal, tal que

$$u_1 = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_l t)$$

$$u_2 = 0 ; u_3 = 0$$

En este movimiento cada partícula ejecuta una oscilación armónica simple de amplitud a alrededor de su estado natural, con una longitud de onda l y velocidad de fase v_l .

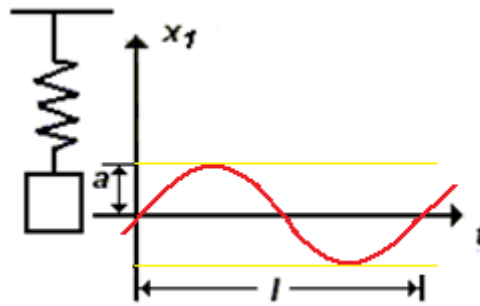


FIGURA 6.22 ONDA LONGITUDINAL. LA SEÑAL SE DESPLAZA EN LA MISMA DIRECCIÓN EN QUE OSCILAN LAS PARTÍCULAS

Al tratarse de una onda longitudinal en la cual la señal se desplaza en la misma dirección en que oscilan las partículas, y de acuerdo a como se han definido los ejes, el movimiento siempre será en dirección del vector \hat{e}_1 .

La velocidad de fase v_l representa la velocidad a la cual la alteración senoidal de longitud de onda l se desplaza en dirección \hat{e}_1 , de tal forma que todas las partículas se mueven en fase.

$$\frac{dx_1}{dt} = v_l$$

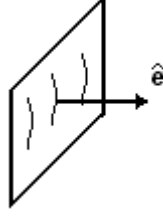


FIGURA 6.23 COMO EL MOVIMIENTO DE LAS PARTÍCULAS ES PARALELO A LA DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN DE LA ONDA, ENTONCES, SE TRATA DE UNA ONDA LONGITUDINAL

Los componentes de la deformación son

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{2\pi a}{l} \cos \frac{2\pi}{l}(x_1 - v_l t)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$$

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} = \hat{e}$$

$$\sigma_{11} = \lambda \varepsilon_{11} + 2\mu \varepsilon_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda \varepsilon_{11} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$$

Sustituyendo en la ecuación de Navier

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho B_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

y despreciando las fuerzas de cuerpo

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(a \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_l t) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a v_l \frac{2\pi}{l} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_l t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -a \left(v_l \frac{2\pi}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_l t)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a \left(\frac{2\pi}{l} \right) \cos \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_l t) \right)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = -a \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_l t)$$

Sustituyendo de nuevo en la ecuación de Navier

$$\rho_0 a \left(\frac{v_l 2\pi}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_l t) = (\lambda + 2\mu) a \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_l t)$$

$$\therefore \quad \rho_0 v_l^2 = \lambda + 2\mu$$

Por consecuencia, la velocidad de movimiento de una onda elástica a través de un sólido se puede considerar también como una constante elástica y está dada por

$$\Rightarrow \quad v_l = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

Presentando la ecuación anterior en la forma $v_l = v_l(E, \nu, \rho_0)$, para lo que se sustituye

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}; \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

se tiene entonces que

$$v_l = \left(\frac{\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + 2\frac{E}{2(1+\nu)}}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

Si se considera que el coeficiente de Poisson para sólido elástico, isotrópico es del orden de $\frac{1}{3}$, entonces

$$v_l \approx \left(\frac{3E}{2\rho_0} \right)^{1/2}$$

Por lo que será posible determinar en forma aproximada el módulo de elasticidad a partir de conocer la velocidad de desplazamiento de una señal acústica a través de material

$E = \frac{2\rho_0 v_l^2}{3}$. Para esta onda los componentes del tensor de rotación

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

quedan

$$w_{ij} = [0]$$

Por lo tanto, la onda se define como irrotacional.

Por otra parte, $\nabla \cdot u = \varepsilon_{11} \neq 0$ por lo que el volumen cambia armónicamente con

$$e = \nabla \cdot u = \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{2\pi a}{l} \cos \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_l t)$$

Es por consecuencia que la onda se denomina como dilatacional.

De todo lo expuesto resulta evidente que la velocidad de propagación de ondas en el sólido elástico depende de las propiedades de éste, y no de las características de la señal (longitud de onda).

Onda plana de equivolumen

En virtud de que para el análisis se partió de la consideración de superposición de efectos, se procederá ahora al análisis de una señal transversal, por lo que

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = a \sin \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_T t)$$

$$u_3 = 0$$

Resulta evidente que la señal tendrá la misma amplitud y longitud de onda que la señal longitudinal, definiendo su velocidad de propagación como v_t , tanto en dirección de \hat{e}_2 como de \hat{e}_3 , sin embargo, considerando de nuevo el principio de superposición, se tratará como una onda transversal cuyo movimiento es paralelo a \hat{e}_2 , por lo que

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \neq 0$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \varepsilon_{ii} = e = 0$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$$

Como consecuencia de lo expuesto se tiene que la onda transversal es una señal que sólo genera esfuerzos de corte y se caracteriza por su invariabilidad del volumen.

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{l} \right) a \cos \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t)$$

$$\sigma_{12} = \mu a \left(\frac{2\pi}{l} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t)$$

Sustituyendo en la ecuación de Navier

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_2$$

$$\therefore \quad \rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right)^2 = \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \left(\frac{2\pi}{l} \right) v_t \cos \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t) \right)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \left(-a \left(\frac{2\pi v_t}{l} \right)^2 \sin \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t) \right)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a \left(\frac{2\pi}{l} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t) \right)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \left(-a \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \sin \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t) \right)$$

$$\rho_0 a \left(\frac{2\pi v_t}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t) = \left(\mu a \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \sin \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t) \right)$$

$$\therefore \quad \rho_0 v_t^2 = \mu$$

$$\Rightarrow \quad v_t = \left(\frac{\mu}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

Por consecuencia, se tiene que la onda transversal o de corte representa también una constante elástica. Por último, es conveniente analizar la relación existente entre la velocidad de la onda longitudinal con la de la onda transversal

$$\frac{v_l}{v_t} = \frac{\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \right)^{1/2}}{\left(\frac{\mu}{\rho_0} \right)^{1/2}}$$

$$\left(\frac{v_l}{v_t} \right)^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu}$$

Dado que la primera constante de Lamé (λ) se puede relacionar con ν y μ en la forma

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$$

por tanto,

$$\frac{\frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)} + 2\mu}{\mu} = \left[\frac{v_l}{v_t} \right]^2$$

$$\frac{2\mu\nu + 2\mu(1-2\nu)}{\mu(1-2\nu)} = \frac{2\mu\nu + 2\mu - 4\mu\nu}{\mu(1-2\nu)} = \left[\frac{v_l}{v_t} \right]^2$$

$$\frac{2-2\nu}{(1-2\nu)} = \frac{1+(1-2\nu)}{(1-2\nu)} = 1 + \frac{1}{(1-2\nu)} = \left[\frac{v_l}{v_t} \right]^2$$

En consecuencia,

$$\frac{v_l}{v_t} = \left[1 + \frac{1}{(1-2\nu)} \right]^{1/2}$$

Se concluye entonces que la relación entre la velocidad longitudinal y transversal de la onda elástica depende exclusivamente del coeficiente de Poisson. Sólo para una deformación plástica, el coeficiente de Poisson alcanza el valor de un medio, mientras que para cualquier deformación elástica este cociente será del orden de $\frac{1}{3}$, por lo que en cualquier deformación

$$\text{elástica } v_l > v_t \text{ ya que } \left(\frac{v_l}{v_t} \right)^2 \approx 4 \quad \therefore \quad \frac{v_l}{v_t} \approx 2 .$$

6.8 ELASTICIDAD NO LINEAL

En materiales como hules y algunos termoplásticos se presentan comportamientos muy diferentes que en los metales (figura 6.24), ya que su comportamiento en el rango elástico es no lineal, además de caracterizarse por presentar grandes deformaciones (deformaciones finitas). Mientras que en los metales el rango elástico es inferior, en general, al 0.1%, los elastómeros alcanzan en ocasiones rangos elásticos hasta del 100%.

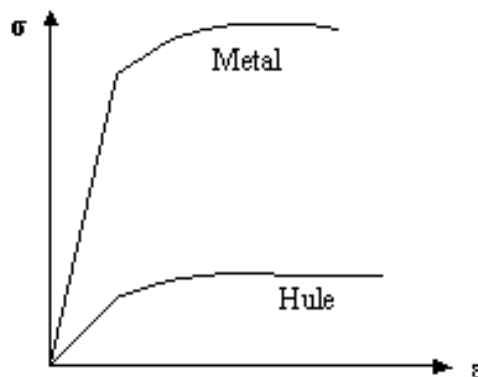


FIGURA 6.24 DIFERENCIA EN EL COMPORTAMIENTO ENTRE UN METAL Y UN HULE EN UN ENSAYO DE TRACCIÓN

La razón del comportamiento no lineal del hule se debe a su estructura molecular, en la cual pueden presentarse rotaciones o reordenamientos que modifiquen el comportamiento del material. Dado el número de posibles acomodados (orientaciones) relativos a los ángulos del

enlace con respecto a la cadena, las ecuaciones de elasticidad para estos materiales se derivan a partir de conceptos de termodinámica estadística.

En los metales la estructura cristalina permanece inalterada cuando el material es deformado elásticamente (deformaciones finitas), los átomos se mueven a posiciones cercanas o adyacentes a las de equilibrio, dando lugar a una fuerza restauradora, y a partir de la ecuación de Helmholtz se determina la fuerza generada al estirar el material en forma uniaxial.

$$f = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \right|_{\theta, V} \quad (6.26)$$

donde f es la fuerza, ℓ la longitud, θ y V representan un proceso que se efectúa a temperatura y volumen constante.

Como la energía libre (φ) es

$$\varphi = u - \theta \eta \quad (6.27)$$

donde η representa la entropía, entonces

$$f = \frac{\partial u}{\partial \ell} - \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \quad (6.28)$$

El segundo término de la ecuación 6.27 no contribuye a la carga si el ordenamiento atómico permanece inalterado. Para un hule ideal, la energía interna no cambia con un incremento de longitud, razón por la que la primera parte de la ecuación 6.27 será igual a cero, entonces como resultado, la variación de la entropía será negativa cuando la longitud se incrementa, lo que se traduce en un reordenamiento de la estructura.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En la figura 6.25 se presenta la distorsión generada por una dislocación de tornillo (hélice) en un cristal.

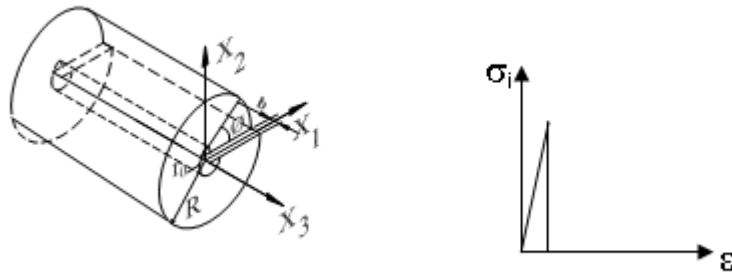


FIGURA 6.25 DESCRIPCIÓN ESQUEMÁTICA DE UNA DISLOCACIÓN HELICOIDAL

Dado que se trata de un sólido elástico lineal, entonces el trabajo de deformación es

$$W = \int \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon, \text{ donde el vector de Burgers de la dislocación } \bar{b} \text{ tiene una magnitud}$$

b y es paralelo al eje x_3 . Con base en lo antes expuesto y considerando que se trata de un sólido elástico homogéneo lineal e isotrópico, determine:

- Tensor de deformaciones asociado
- Tensor de esfuerzos asociado
- ¿Cuál es el cambio del volumen asociado a la presencia de la dislocación de tornillo?
- ¿Cuál será la rapidez de variación de volumen asociado a la condición antes expuesta?
- Considerando que la teoría de medios continuos se puede aplicar a partir de un radio r_0 y hasta el radio del cristal R , determine la energía de deformación elástica asociada a la dislocación.
- Explique usted que sucederá con respecto al estado de esfuerzos y a la energía involucrada, si el material no es isotrópico.
- Despreciando el efecto de las fuerzas de cuerpo ¿existirá equilibrio?

- h) Considerando que los esfuerzos normales sobre las paredes laterales del elemento deben ser igual a cero y que el esfuerzo axial debe ser diferente de cero, ¿el modelo propuesto cumple con estas condiciones?

SOLUCIÓN

Considerando que los desplazamientos producidos por la dislocación son (figura 6.25)

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = f(\theta) = \frac{b}{2\pi} \theta$$

$$u_3 = \frac{b}{2\pi} \arctan \frac{x_2}{x_1}$$

a)
$$\frac{d \tan^{-1} u}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{1 + u^2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\frac{\frac{x_2}{x_1^2}}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} = -\frac{\frac{x_2}{x_1^2}}{\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2}} = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\frac{1}{x_1}}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} = \frac{\frac{1}{x_1}}{\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2}} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

Por consecuencia el tensor de deformaciones asociado se expresa:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{b}{4\pi(x_1^2 + x_2^2)}$$

Considerando que se trata de un SEHLI, cuya ecuación constitutiva es

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

b)
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\mu b}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)}$$

c) $\varepsilon_{kk} = 0 \Rightarrow$ El cambio de volumen es igual a cero

d) $\dot{\varepsilon}_{kk} = 0 \Rightarrow$ La rapidez de variación de volumen es igual a cero

e)

$$W_V = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{13} \varepsilon_{13} + \sigma_{23} \varepsilon_{23} + \sigma_{31} \varepsilon_{31} + \sigma_{32} \varepsilon_{32})$$

$$W_V = \frac{\mu x_2^2 b^2}{8\pi^2 (x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{\mu x_1^2 b^2}{8\pi^2 (x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\dot{W}_T = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^R \frac{\mu (x_1^2 + x_2^2) b^2}{8\pi^2 (x_1^2 + x_2^2)^2} dz r d\theta dr$$

$$W_T = \int_V \frac{b^2 \mu r^2}{8\pi^2 r^4} dz r d\theta dr = \frac{2\pi l \mu b^2}{8\pi^2} \int_{r_0}^R \frac{dr}{r}$$

$$W_T = \frac{\mu b^2 l}{4\pi} \ln \frac{R}{r_0}$$

f) Se modifica el estado de esfuerzos y deformaciones, así como la energía involucrada.

g)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{Se cumple eje } x_1$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{Se cumple eje } x_2$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{Se cumple eje } x_3$$

$$\therefore \frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0 \right] = 0 \quad \therefore \quad \text{Existe equilibrio}$$

h) Los esfuerzos normales en las paredes laterales son igual a cero

Superficie lateral

$$\text{Vector unitario } n = \frac{1}{a} (x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{31} x_1 + \sigma_{32} x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{a} = -\frac{\mu b x_2 x_1}{2\pi a (x_1^2 + x_2^2)} + \frac{\mu b x_1 x_2}{2\pi a (x_1^2 + x_2^2)} = 0$$

Cargas en el plano $(0 \hat{e}_1 + 0 \hat{e}_2 + \hat{e}_3)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \sigma_{13} \hat{e}_1 + \sigma_{23} \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3$$

2. El estado de esfuerzos en un cuerpo está dado por σ_{ij}

$$\sigma_{ij} = \alpha \begin{pmatrix} x_2^2 x_1 & 2x_1^3 - x_2 x_1^2 & 0 \\ 2x_1^3 - x_2 x_1^2 & 3x_2^2 x_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Si dicho estado de esfuerzos provoca una deformación biaxial, determine:

- El valor de σ_{33} ,
- Considerando que las fuerzas de cuerpo se expresan como

$$B_i = B_1 \hat{e}_1 + B_2 \hat{e}_2 + B_3 \hat{e}_3$$

¿Existirá equilibrio cuando $B_i = 0 \hat{e}_i$?

- En caso de no existir equilibrio ¿cuál es la aceleración en función de la posición y de las propiedades del material? Considere que la densidad está dada por ρ .
- Para $X_i(1,1,1)$ determine las deformaciones y esfuerzos principales. Considere que el material presenta un coeficiente de Poisson ν y módulo de rigidez al corte μ . El material es sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico con $\nu = \frac{1}{3}$.

SOLUCIÓN

- Para un SEHLI con una condición de deformación biaxial, de la ecuación constitutiva se tiene

$$\Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 4\nu x_2^2 x_1$$

- $\nabla \sigma + \rho B = 0$ Condición de equilibrio

Para el eje x_1

$$\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \rho B_1 = 0 \quad \therefore \text{no existe equilibrio en dirección } \hat{e}_1$$

$$\Rightarrow \exists \text{ para } B_1 = \frac{\alpha}{\rho}(x_1^2 - x_2^2)$$

Para el eje x_2

$$\alpha(6x_1^2 - 2x_2x_1 + 6x_2x_1) + \rho B_2 = 0 \quad \therefore \text{no existe equilibrio en dirección } \hat{e}_2$$

$$\Rightarrow \exists \quad \text{para } B_2 = -\frac{\alpha}{\rho} [6x_1^2 + 4x_1x_2]$$

Para el eje x_3

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho B_3 = 0; \quad \sigma_{33} = f(x_1, x_2) \therefore \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow B_3 = 0$$

\therefore existe equilibrio en dirección \hat{e}_3

De todo lo anterior para que exista equilibrio la aceleración de cuerpo está dada por

$$B_i = \frac{\alpha}{\rho} (x_1^2 - x_2^2) \hat{e}_1 - \frac{\alpha}{\rho} [6x_1^2 + 4x_1x_2] \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3$$

c)

$$\sigma_{(1,1,1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4\nu \end{pmatrix}$$

Sustituyendo el coeficiente de Poisson, se tiene que los esfuerzos principales son

$$\sigma_{(1,1,1)p} = \alpha \begin{pmatrix} 3.41 & 0 & 0 \\ 0 & 1.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0.58 \end{pmatrix}$$

3. Considere un medio elástico, homogéneo, lineal e isotrópico en el cual se presenta el siguiente campo de desplazamientos:

$$u_3 = \text{sen } \beta(x_3 - ct) + a \text{sen } \beta(x_3 + ct)$$

$$u_1 = u_2 = 0$$

- a) ¿Cuál es la naturaleza de la onda elástica que describe el campo de desplazamientos? Longitudinal o transversal, irrotacional o isovolumen.

- b) ¿Cuál es la dirección de propagación?
- c) Determine el campo de deformaciones asociado.
- d) Determine el campo de esfuerzos asociado.
- e) ¿En qué condiciones la ecuación de movimiento (Navier) es satisfecha cuando se desprecian las fuerzas de cuerpo?
- f) Si para la frontera $x_3 = 0$, ésta se encuentra libre de sollicitaciones, entonces, en qué condiciones la ecuación de movimiento satisface las condiciones de frontera para cualquier tiempo.

SOLUCIÓN

- a) $u_3 = f(x_3) \therefore$ se trata de una onda longitudinal, asimismo

$$\nabla u = (\nabla u)^T \therefore \text{Irrotacional, longitudinal; dirección de propagación } \hat{e}_3$$

- b) Se propaga en dirección de x_3
- c) El estado de deformaciones asociado está dado por

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

- d) Recordando que

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\therefore \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) \end{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

La ecuación de Navier, para el caso analizado, permite concluir que

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

Como $u_3 = \sin \beta(x_3 - ct) + a \sin \beta(x_3 + ct) \Rightarrow$

$$(\lambda + 2\mu)(\beta^2 (\sin \beta(x_3 - ct) + a \sin \beta(x_3 + ct))) = ((c\beta)^2 (\sin \beta(x_3 - ct) + a \sin \beta(x_3 + ct)))\rho_0$$

$$(\lambda + 2\mu) = \rho_0 c^2 \quad \therefore \quad c = \left(\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

c - velocidad longitudinal de de la onda elástica

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \beta(\cos \beta(x_3 - ct) + a \cos \beta(x_3 + ct))$$

e) En $x_3 = 0 \forall x_1, x_2$ no deben existir solicitaciones $\therefore \sigma_{33} = 0$, pero $\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$

$$\text{y } \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \beta(\cos \beta(x_3 - ct) + a \cos \beta(x_3 + ct))$$

como

$$x_3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \beta(\cos(-\beta ct) + a \cos \beta ct)$$

$$\sigma_{33} = 0 = (\lambda + 2\mu) \beta(\cos(-\beta ct) + a \cos \beta ct)$$

$$\therefore a = -1$$

4. Las funciones de Airy de esfuerzos (φ) se emplean para describir el estado de esfuerzos para condiciones de deformación plana. Si la función de esfuerzos de Airy para un cierto estado de solicitaciones se describe como

$$\varphi = \alpha x_1 x_2^3 + \beta x_1 x_2$$

- ¿Será factible dicha descripción?
- Determine el estado de esfuerzos asociado a una deformación plana.
- Determine los valores de α y β , dado que la función de Airy (φ) describe la deformación de una viga en cantiliver de acuerdo con la siguiente figura:

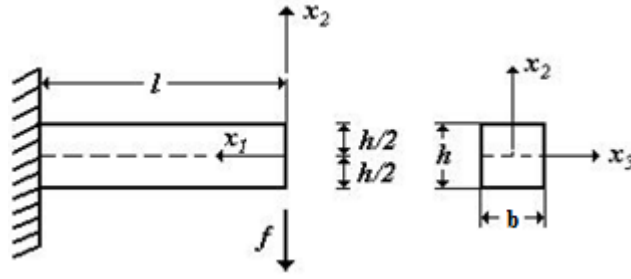


FIGURA 6.26 VIGA EN VOLADIZO CON UNA CARGA f_2 QUE PROVOCA UN MOMENTO FLECTOR Y UN ESFUERZO DE CORTE. EL MOMENTO FLECTOR A SU VEZ GENERA ESFUERZOS NORMALES σ_{11}

SOLUCIÓN

a) Para un estado de deformación plana

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Ecuación constitutiva (SEHLI)

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} (\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij})$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Como la deformación es plana, entonces

$$u_i = u_1(x_1, x_2) \hat{e}_1 + u_2(x_1, x_2) \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon(x_1, x_2) \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma(x_1, x_2)$$

Recordando que dado que existe equilibrio y se desprecian las fuerzas de cuerpo, la ecuación de Cauchy se expresa

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

Donde la tercera ecuación diferencial se genera a partir de una de las condiciones de integrabilidad y se expresa

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

La solución del sistema se expresa a través de una función escalar de la forma

$\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, denominada función de Airy, de tal forma que:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

De lo antes expuesto dado que $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0; \Rightarrow \nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \therefore$

se debe cumplir que $\nabla^4 \varphi = 0$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0$$

Ya que

$$\varphi = \alpha x_1 x_2^3 + \beta x_1 x_2$$

\Rightarrow se observa que se cumple con lo antes expuesto.

Por tanto, φ sí reúne las características para ser una función de Airy:

b) Conocida la función de Airy solución del problema, los esfuerzos asociados se determinan como

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 6\alpha x_1 x_2; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -(3\alpha x_2^2 + \beta)$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 6\alpha x_1 x_2 & -(3\alpha x_2^2 + \beta) & 0 \\ -(3\alpha x_2^2 + \beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\alpha \nu x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

c) Diagrama de momentos

Viga sometida a un momento de flexión $M_f = f x_1$. Ésta es de sección rectangular con un peralte (altura) h , ancho b y longitud l . Los ejes se definen en el extremo opuesto al empotramiento, considerando lo anterior $I_{33} = \frac{1}{12} b h^3$

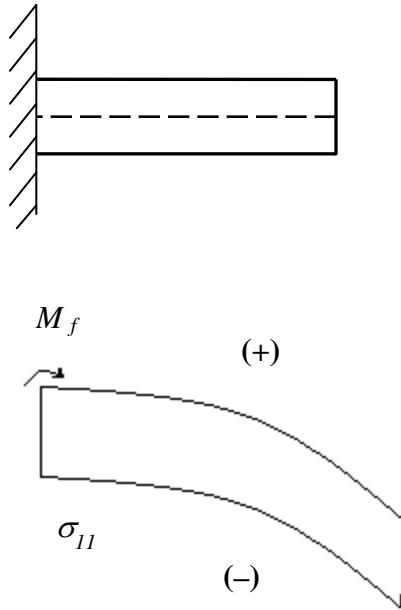
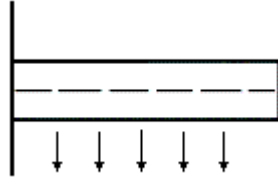


FIGURA 6.27 GEOMETRÍA DE LA VIGA ANTES DE SER CARGADA (FIGURA SUPERIOR) Y DISTORSIÓN SUFRIDA COMO CONSECUENCIA DE LA CARGA f

Por efecto de la carga, la viga se deforma de acuerdo con la figura 6.27

$$\sigma_{11} = \frac{M_f x_2}{I_{33}} = \frac{f x_1 x_2}{\left(\frac{b h^3}{12} \right)} = 12 f \frac{x_1 x_2}{h^3 b}$$

$$\sigma_{11} = 6\alpha x_1 x_2 = 12f \frac{x_1 x_2}{h^3 b} \quad \Rightarrow \quad 6\alpha = \frac{12f}{bh^3} \quad \text{o} \quad 3\alpha = \frac{6f}{bh^3}$$



$$\bar{\tau} = \frac{f}{A} \quad \bar{\sigma}_{12} = \frac{f}{bh}$$

Sin embargo, se observa que en la cara superior e inferior de la viga no existen cargas verticales, por lo que $\sigma_{12} = 0$ para $x_2 = \pm \frac{h}{2}$, entonces

$$\sigma_{12} = 0 = -(3\alpha \frac{h_2^2}{4} + \beta) = -\left(\frac{6f}{bh^3} \frac{h_2^2}{4} + \beta\right) \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2} \frac{f}{bh}$$

$$\sigma_{12}(x_2) = -\left(\frac{6f}{bh^3} x_2^2 - \frac{3}{2} \frac{f}{bh}\right)$$

Por consecuencia, la función de Airy solución para una viga en cantiliver con una carga f es

$$\varphi = \alpha x_1 x_2^3 + \beta x_1 x_2 \Rightarrow \varphi = \frac{2f}{bh^3} x_1 x_2^3 - \left(\frac{6f x_2^2}{bh^3} + \frac{f}{bh}\right) x_1 x_2,$$

De esta forma, el estado de esfuerzos se expresa

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 6\alpha x_1 x_2; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = 3\alpha x_2^2 + \beta$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{12f}{bh^3} x_1 x_2 & -\left(\frac{6f}{bh^3} x_2^2 - \frac{3}{2} \frac{f}{bh}\right) & 0 \\ -\left(\frac{6f}{bh^3} x_2^2 - \frac{3}{2} \frac{f}{bh}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12f}{bh^3} \nu x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

5. La ecuación constitutiva para un sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, es de la forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

A partir de lo anterior demuestre que una forma equivalente de la misma es

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} (\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij})$$

SOLUCIÓN

De la ecuación constitutiva

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{ij} - \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) \quad (6.19)$$

Recordando que

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{ii}}{3\lambda + 2\mu}$$

Sustituyendo ε_{kk} en la ecuación 6.19

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (6.20)$$

Como $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$, entonces $\lambda = \frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)}$

Sustituyendo en la ecuación 6.20

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \left(\frac{\frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)}}{\frac{6\mu\nu}{(1-2\nu)} + \frac{2\mu-4\mu\nu}{(1-2\nu)}} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij} - \left(\frac{\nu}{\nu+1} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

$$\therefore \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} \left[\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

6. Un sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, presenta un módulo de elasticidad de 72 GPa y un coeficiente de Poisson de 0.33. Una pieza del material anterior es sometida a una serie de sollicitaciones que provocan en un punto del cuerpo una distorsión, la cual se puede representar mediante el tensor e_{ij} .

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 2 & -3 & -9 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \text{ m/m}$$

Con base en lo anterior y considerando que la deformación está dentro del rango elástico, determine:

- Tensor de deformación y rotación asociado
- Vector de rotación. ¿Cómo se puede definir el flujo con base a este dato?
- Deformaciones principales
- Tensor de esfuerzos asociado
- Esfuerzos principales
- Desviador de esfuerzos
- Esfuerzos principales asociados al desviador
- Energía por unidad de volumen asociada a la deformación elástica

SOLUCIÓN

- a) $\nabla u = (\nabla u)^T \therefore$ el tensor es simétrico, razón por la que es desplazamiento es irrotacional

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij} = e_{ij} \quad \therefore \quad w_{ij} = [0] \quad \Rightarrow \quad \varphi_i = 0\hat{e}_i$$

Por consecuencia, se pueden calcular las deformaciones principales, las cuales quedan

$$\varepsilon_{ijp} = \begin{pmatrix} 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -10.5 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

b) Considerando las propiedades elásticas del MC y la deformación volumétrica unitaria

$$\varepsilon_{ii}$$

$$E = 72 \text{ GPa} \quad \nu = \frac{1}{3} \quad \varepsilon_{ii} = -9 \times 10^{-3}$$

Se tiene que

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\frac{E}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{3E}{4} = 54 \text{ GPa}$$

$$E = 2\mu(1+\nu)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{3E}{8} = 27 \text{ GPa}$$

La ecuación constitutiva del SEHLI se expresa

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -270 & -54 & 108 \\ -54 & -702 & -162 \\ 108 & -162 & -972 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

c)

$$\sigma_{ijp} = \begin{pmatrix} -240 & 0 & 0 \\ 0 & -649 & 0 \\ 0 & 0 & -1055.2 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

d)

$$\sigma_{ijH} = -648 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow S_{ij} = \begin{pmatrix} 378 & -54 & 108 \\ -54 & -54 & -162 \\ 108 & -162 & -324 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

e)

$$S_{ijp} = \begin{pmatrix} 408.16 & 0 & 0 \\ 0 & -0.947 & 0 \\ 0 & 0 & -407.216 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

f)

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = \frac{1}{2} (-240 \times 4.5 + 649 \times 3 + 1055.2 \times 10.5)$$

$$\Rightarrow W = 5973.3 \text{ kJ/m}^3$$

7. Para un sistema biaxial de deformación, defina el tensor de esfuerzos y el de deformación característicos. Desarrolle el sistema de ecuaciones diferenciales que es necesario resolver para determinar los esfuerzos. ¿Cuántas incógnitas se tienen?, ¿cuáles son éstas?, ¿qué condiciones se deberán cumplir para que el estado de deformación se pueda definir como biaxial?, ¿cómo queda el campo de desplazamientos?

SOLUCIÓN

Condición biaxial de deformación. Número de incógnitas = 3

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$$

Estado de esfuerzos asociado. Número de incógnitas = 3

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$$

dado que:

$$\varepsilon_{33} = 0 = \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}))$$

$$\therefore \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

El campo de desplazamientos

$$u_i = f_1(x_1, x_2)\hat{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

Se cumple que $x_3 \gg x_1, x_2$, es decir que la dimensión en un eje es dominante con relación a las otras.

8. Un plano octaédrico es aquel que está igualmente inclinado con los ejes principales asociados al sistema.

a) Demuestre que el esfuerzo normal en un plano octaédrico está dado por:

$$\sigma_{oct} = \frac{I_1\sigma}{3}$$

b) Demuestre que el esfuerzo de corte en el plano octaédrico está dado por:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)^{1/2}$$

donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son los esfuerzos principales.

SOLUCIÓN

La normal del plano octaédrico es

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3)$$

Donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son los esfuerzos principales

$$\sigma_{ijp} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

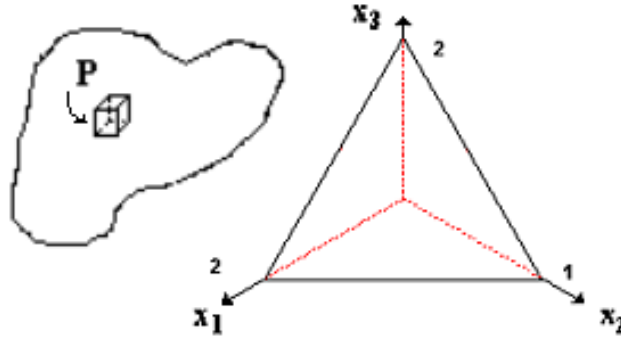


FIGURA 6.28 UN PLANO OCTAÉDRICO ESTÁ IGUALMENTE INCLINADO CON RELACIÓN A LOS EJES

a) El vector de esfuerzos asociado al plano octaédrico es

$$t_i = \sigma_{ij}n_j$$

$$t_i = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$t_i = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}\hat{e}_1 + \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}\hat{e}_2 + \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}\hat{e}_3$$

Por otra parte, la componente normal al plano octédrico (esfuerzo normal octaédrico) es

$$t_N = t_i n_i = \frac{\sigma_1}{3} + \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{3}$$

$$\therefore |\sigma_N| = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1 \sigma}{3} = \sigma_{oct} = \sigma_H$$

Resulta por demás evidente que el esfuerzo normal octaédrico es el esfuerzo hidrostático.

b) Por otra parte, analizando las componentes en forma vectorial se tiene que

$$|\sigma|^2 = |\sigma_N|^2 + |\tau_{oct}|^2$$

$$\therefore \tau_{oct}^2 = |\sigma|^2 - \sigma_N^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1]$$

Simplificando queda

$$\tau_{oct}^2 = \frac{2}{9}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1]$$

Por otra parte,

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2$$

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 = \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3$$

$$(\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \sigma_3^2 + \sigma_1^2 - 2\sigma_3\sigma_1$$

Sumando los términos

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1$$

De la relación anterior se concluye que

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$\Rightarrow \tau_{oct} = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{oct} = \frac{2}{3} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)^{1/2}$$

9. El estado de esfuerzos en un punto de un medio continuo está dado por

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2\sigma & \alpha\sigma & \beta\sigma \\ \alpha\sigma & -\sigma & \gamma\sigma \\ \beta\sigma & \gamma\sigma & -\sigma \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

- Determine los valores de las constantes α , β y γ , de tal forma que el vector de esfuerzos en el plano octaédrico (igualmente inclinado con relación a los ejes) no exista.
- ¿Cuál será el esfuerzo normal y esfuerzos de corte asociados a dicho plano?
- ¿Cuál será la magnitud de la deformación hidrostática asociada al punto bajo análisis?
- Si el material es sólido elástico homogéneo lineal e isotrópico, determine el tensor de deformaciones asociado.
- ¿En qué magnitud difieren los esfuerzos principales asociados al tensor y desviador de esfuerzos correspondiente?
- Considerando lo definido en el inciso a), determine los esfuerzos principales en el punto bajo análisis.
- Con la consideración del inciso a), determine las deformaciones principales en el punto bajo análisis.

SOLUCIÓN

a)

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ \alpha & -1 & \gamma \\ \beta & \gamma & -1 \end{pmatrix} \sigma$$

Como en el plano octaédrico el vector de esfuerzos es nulo, entonces

$$t_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ \alpha & -1 & \gamma \\ \beta & \gamma & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2 + \alpha + \beta = 0$$

$$\alpha - 1 + \gamma = 0$$

$$\beta + \gamma - 1 = 0$$

$$\gamma = 1 - \beta \quad \text{o} \quad \beta = 1 - \gamma$$

$$\alpha = 1 - \gamma$$

$$2 + [1 - \gamma] + [1 - \gamma] = 0$$

$$4 - 2\gamma = 0$$

$$\gamma = 2 \quad \therefore \quad \alpha = \beta = -1$$

b) Dado que el vector de esfuerzos en el plano octaédrico es nulo, entonces

$$\tau_{oct} = \sigma_{oct} = 0$$

c) El normal octaédrico o esfuerzo hidrostático es cero, razón por la que la deformación hidrostática también lo es

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_H}{k}$$

$$\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{kk} = 0$$

d) Tensor de deformaciones considerando SEHLI

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} (\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu\sigma_{kk}\sigma_{ij})$$

$$\sigma_{ij} = \sigma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) = \frac{\sigma}{2\mu(1+\nu)}(2+2\nu)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma}{\mu}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})) = \frac{\sigma}{2\mu(1+\nu)}(-1-\nu)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{-\sigma}{2\mu}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) = \frac{\sigma}{2\mu(1+\nu)}(-1-\nu) = \frac{-\sigma(1+\nu)}{2\mu(1+\nu)} = -\frac{\sigma}{2\mu}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\sigma}{2\mu}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} = \frac{-\sigma}{2\mu}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2\mu} = \frac{-\sigma}{2\mu}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu} = \frac{2\sigma}{2\mu} = \frac{\sigma}{\mu}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{\sigma}{\mu}$$

e) Al ser el esfuerzo hidrostático igual a cero, entonces el tensor y su desviador asociado son iguales

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_H \delta_{ij} \quad \text{dado que } \sigma_H = 0 \Rightarrow \quad S_{ij} = \sigma_{ij}$$

f) Esfuerzos principales

$$\sigma_{ij} = \sigma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij_p} = \sigma \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

g)

h) Por su parte, las deformaciones principales en la coordenada analizada son

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma}{2\mu} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{ij_p} = \frac{\sigma}{2\mu} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

10. Un sólido es sometido a una serie de sollicitaciones en su rango elástico, de tal forma que se han obtenido los siguientes resultados al aplicar sollicitaciones en diferentes direcciones:

Prueba # 1

Carga uniaxial a tracción aplicada a lo largo del eje x_1 (longitudinal)

Esfuerzo resultante = 100 MPa

Deformación longitudinal = 1×10^{-3}

Deformación transversal en los ejes $x_2, x_3 = -3.2 \times 10^{-4}$

No se presentaron deformaciones a corte

Prueba # 2

Carga uniaxial a compresión a lo largo del eje x_2

Esfuerzo resultante = 250 MPa

Deformación longitudinal = -2.5×10^{-3}

Deformación transversal en los ejes $x_1, x_3 = 8 \times 10^{-4}$

No se presentaron deformaciones a corte

Prueba # 3

Ensayo de torsión. El momento torsionante es aplicado a una barra de sección circular cuyo eje longitudinal es x_1 .

En este caso la deformación a corte en el plano $x_3x_2 = 5.28 \times 10^{-4}$

Con base en lo antes expuesto:

- Indique el tipo de comportamiento característico (isotrópico, transversalmente isotrópico, ortotrópico, etc.). Justifique su respuesta.
- Determine los estados de esfuerzos y deformaciones que se describen para las pruebas 1 y 2.
- Calcule las constantes elásticas factibles de determinar a través de los datos presentados.

SOLUCIÓN

Prueba #1	Prueba #2	Prueba #3
$\sigma_{11} = 100 \text{ MPa}$	$\sigma_{22} = 250 \text{ MPa}$	
$\varepsilon_{11} = 1 \times 10^{-3}$	$\varepsilon_{22} = -2.5 \times 10^{-3}$	Ensayo de torsión \Rightarrow Corte puro
$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -3.2 \times 10^{-4}$	$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = 8 \times 10^{-4}$	$\varepsilon_{23} = 5.28 \times 10^{-4}$
$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0$	$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$	

No existe deformación de corte cuando los esfuerzos son normales, ni deformación normal cuando los esfuerzos son de corte, por lo tanto, se descarta que se trata de un sólido elástico monotrópico, entonces sólo se puede tratar de:

(SEHLI) Sólido elástico isotrópico

(SEHLTI) Sólido elástico transversalmente isotrópico

(SEHLO) Sólido elástico ortotrópico

En el caso más general, SEHLO la ecuación constitutiva permite describir las siguientes relaciones:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{21}\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{31}\sigma_{33}}{E_3}$$

Para el ensayo #1 se reduce a

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{100}{10^{-3}} \text{ MPa} = 100 \text{ GPa}$$

Por otra parte,

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}\sigma_{11}}{E_1} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

se reduce a

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}\sigma_{11}}{E_1} \quad \therefore \quad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}E_1}{\sigma_{11}} = -\frac{(-3.2 \times 10^{-4}) \times 100 \times 10^7}{100 \times 10^6} = 0.32$$

Además,

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}\sigma_{11}}{E_1} + \frac{\sigma_{23}\sigma_{22}}{E_2} + \frac{\sigma_{33}}{E_3}$$

lo que se reduce a

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}\sigma_{11}}{E_1} \quad \therefore \quad \nu_{13} = -\frac{\varepsilon_{33}E_1}{\sigma_{11}} = 0.32$$

Para el ensayo #2. Prueba de compresión

Considerando un modelo general similar al ensayo 1 se tiene:

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}\sigma_{11}}{E_1} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_{33}$$

Se reduce a

$$E_2 = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}} = \frac{2.5 \times 10^8}{2.5 \times 10^{-3}} \therefore E_2 = 1 \times 10^{11} = 100 \times 10^9 = 100 \text{ GPa}$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_l} \Rightarrow \nu_{21} = -\frac{8 \times 10^{-4}}{2.5 \times 10^{-3}} = 0.32$$

$$\nu_{23} = -\frac{8 \times 10^{-4}}{2.5 \times 10^{-3}} = 0.32$$

De todo lo anterior, se constata que se trata de un sólido elástico homogéneo, lineal e isotrópico.

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \Rightarrow \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \Rightarrow E_3 = \frac{E_1 \nu_{31}}{\nu_{13}}$$

$$\frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \Rightarrow E_3 = \frac{\nu_{32}}{\nu_{23}} E_2 \Rightarrow E_3 = E_2$$

Para un SEHLI

$$E_1 = E_2 = E_3$$

$$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = \nu$$

11. Para el caso de un medio continuo cuyo comportamiento se puede describir como el de un sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, el cual es sometido a deformaciones infinitesimales, desarrolle una expresión (ecuación diferencial) que describa el comportamiento en función de los desplazamientos (u_i), de las propiedades elásticas (E, k, λ, μ, ν) y de la densidad (ρ).

Dado que las deformaciones son muy pequeñas se puede considerar que:

$$\frac{Dv_i}{Dt} \approx \frac{D^2 u_i}{Dt^2}$$

por otra parte, $\rho(t) \approx \rho_0$

Para el desarrollo de la función tome como base la ecuación de Cauchy.

SOLUCIÓN

Ecuación de Cauchy

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

Para desplazamientos infinitesimales:

$$\frac{Dv_i}{Dt} \triangleq \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad \rho(t) \triangleq \rho_0$$

Entonces,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 B_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Dado que se trata de un sólido, elástico, la ecuación constitutiva es

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \qquad \varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

En general,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Sustituyendo se tiene:

$$\therefore (\lambda + \mu) \nabla e + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{B} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

que es la ecuación de Navier (Teoría infinitesimal de la elasticidad).

12. Una viga de sección circular es sujeta a una combinación de solicitaciones, de tal forma que se aplica un momento flexionante de 28000 Nm, además de una carga de tracción a lo largo del eje longitudinal de 10000 N. Si el límite elástico del material es de 124 MPa (esfuerzo máximo de diseño). Determine cuál deberá ser el diámetro mínimo de la barra.

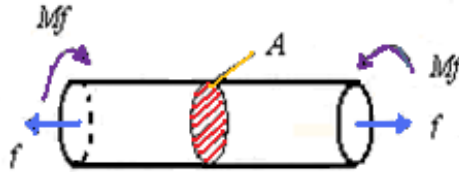


FIGURA 6.29 BARRA DE SECCIÓN CIRCULAR DE RADIO r Y LONGITUD l LA CUAL ES SOMETIDA A UNA CARGA AXIAL f Y UN MOMENTO FLEXIONANTE Mf

SOLUCIÓN

$$Mf = 28000 \text{ N m}$$

$$f = 10000 \text{ N}$$

$$\sigma_0 = 124 \text{ MPa}$$

$$\phi_{\text{mín}} = ?$$

Al tratarse de fenómenos lineales sí se puede realizar superposición de esfuerzos, por tanto,

$$I_{33} = \frac{1}{4} \pi r^4$$

$$\sigma_{11} = \frac{Mx}{I} = \frac{4Mr}{\pi r^4}$$

$$\sigma'_{11} = \frac{f}{\pi r^2}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} + \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{f}{\pi r^2} + \frac{4M}{\pi r^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos principales serán

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{f}{\pi r^2} + \frac{4M}{\pi r^3} = \frac{fr + 4M}{\pi r^3}$$

La cedencia se presenta de acuerdo con el criterio de Tresca cuando el cortante máximo alcanza un valor crítico $\tau_2 = k$. Dicho criterio se puede expresar en forma simplificada como $\sigma_0 = \sigma_1 - \sigma_2$. Por otra parte, el criterio de Von Mises indica que la cedencia se presenta cuando el segundo invariante del desviador de esfuerzos alcanza un valor crítico $J_2 = k^2$, a partir de lo cual se puede demostrar que

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad \therefore \sigma_{VM} \geq \sigma'_0.$$

Como consecuencia de lo antes expuesto, y siendo que el criterio de Von Mises es el más preciso, se tiene que la deformación elástica se presentará siempre y cuando que no exista cedencia; entonces, el esfuerzo eficaz será menor que el de fluencia, por tanto, en el límite

$$\sigma_{VM}^2 = \frac{1}{2} (2\sigma_1^2) \quad ; \quad \sigma'_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0$$

$$\left(\frac{f}{\pi r^2} + \frac{4M}{\pi r^3} \right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \right)^2$$

$$\left(\frac{10000}{\pi r^2} + \frac{4 \times 28000}{\pi r^3} \right)^2 = \frac{4 \times (124 \times 10^6)^2}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{112 \times 10^3 + 1 \times 10^4 r}{\pi r^3} \right)^2 = \frac{12.5 \times 10^9 + 1 \times 10^8 r^2 + 2.24 \times 10^9 r}{\pi^2 r^6} = 2.05 \times 10^{16}$$

$$\Rightarrow r^6 - 4.94 \times 10^{-10} r^2 - 1.107 \times 10^{-8} r - 6.177 \times 10^{-8} = 0$$

La única raíz real positiva es

$$r = 0.063 \text{ m}$$

De otra forma, considerando Tresca

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0 \quad , \quad \sigma_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \sigma_0$$

$$\sigma_0 = \frac{f}{\pi r^2} + \frac{4M}{\pi r^3}$$

$$124 \times 10^6 = \frac{10000}{\pi r^2} + \frac{4 \times 28000}{\pi r^3}$$

Por lo que se tiene el polinomio

$$r^3 - 2.56 \times 10^{-5} r - 2.87 \times 10^{-4} = 0$$

La única raíz real del polinomio es

$$r = 6.6 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Los resultados anteriores confirman lo indicado por la teoría, ya que Tresca es un criterio conservador en comparación con Von Mises, el cual predice la falla para un menor esfuerzo o demanda una dimensión mayor (radio mínimo de la barra de sección circular) para soportar las solicitaciones.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Para resolver un sistema biaxial de deformaciones es necesario determinar $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, esto a partir de la solución simultánea de las tres ecuaciones diferenciales características del sistema:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

Para este caso, la solución se expresa a través de una función de Airy (φ), en este caso los esfuerzos se definen como:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Con base en lo anterior, demuestre que φ representa una función de esfuerzos de Airy:

$$\varphi = \frac{3F}{4c} \left(x_1 x_2 - \frac{x_1 x_2^3}{3c^2} \right) + \frac{P}{4c} x_2^2$$

Asimismo, defina el estado de esfuerzos y de deformación asociado al caso bajo análisis.

Considere que el material se comporta como un sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, con constantes elásticas E, ν, μ, λ, k .

Nota: La función ϕ antes indicada se emplea para describir el comportamiento de una viga sometida a una carga en el eje x_1 , P y otra que genera flexión sobre la barra F y que se describe en dirección del eje x_2 . La barra tiene un peralte (altura) $2c$, un ancho b y una longitud l .

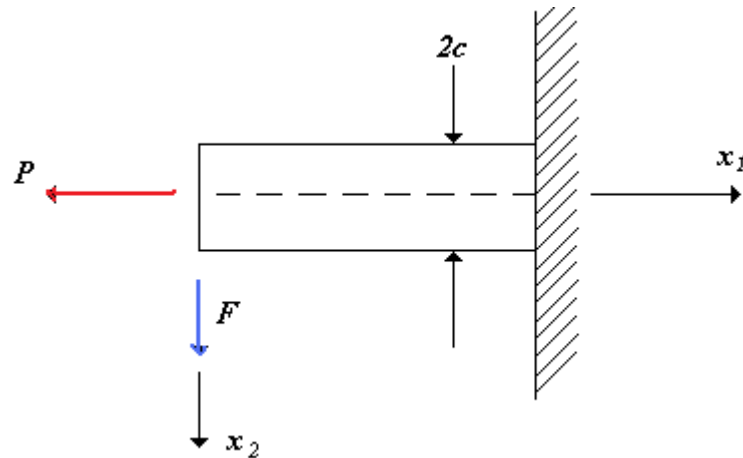


FIGURA 6.30 VIGA EMPOTRADA CON CARGAS P Y F .

2. La ecuación constitutiva de un sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, se expresa como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} (\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij})$$

donde

ε - deformación

σ - esfuerzo

μ - Módulo de Rigidez a corte (Representa la relación del esfuerzo de corte a la deformación angular)

ν - Coeficiente de Poisson $\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_l}$ (Representa la relación de la deformación transversal a la longitudinal)

Con base en lo anterior, desarrolle las ecuaciones representadas a través de la notación índice.

En el rango elástico, la relación esfuerzo deformación es lineal y la energía de deformación se expresa como

$$dw = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

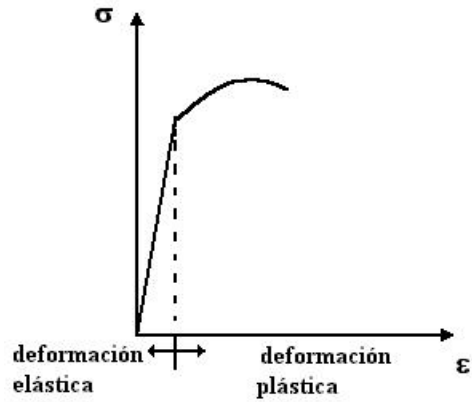


FIGURA 6.31 TRABAJO DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA $W^e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$

Considerando lo antes expuesto, determine la expresión en notación índice que representa el trabajo de deformación elástica.

3. Un cuerpo es sometido a una serie de sollicitaciones que provoca la distorsión del mismo, situación que se puede representar con el tensor $\nabla_X u(X_i, t)$. Con esta base defina los tensores de deformación (ε_{ij}) y de rotación (ω_{ij}) .

Por otra parte, determine las deformaciones y esfuerzos principales considerando que el material presenta un módulo de elasticidad de 200 GPa y un coeficiente de Poisson de $1/3$, es homogéneo e isotrópico y las deformaciones son elásticas.

Determine el estado de esfuerzos correspondientes.

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 25 & 10 & -12 \\ 2 & 8 & -15 \\ 9 & 7 & -10 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \quad \text{m/m}$$

4. La distribución de esfuerzos en un cuerpo está dada por σ_{ij} . Con base en lo anterior:
 - a) Considere que la deformación es biaxial y determine el valor de σ_{33} . El coeficiente de Poisson es igual a $1/3$.

- b) Para el elemento diferencial ubicado en $X_i(2,2,1)$, determine el estado de deformaciones, así como los valores principales de los esfuerzos y las deformaciones. Considere que el material presenta un coeficiente de Poisson ν y módulo de rigidez a corte μ .

$$\sigma_{ij} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 2x_1 - x_2 & 0 \\ 2x_1 - x_2 & x_1 - 3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

5. Un sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, presenta un módulo de elasticidad de 72 Gpa y un módulo de Poisson de 0.30.

Una pieza del material anterior es sometida a una serie de sollicitaciones, las cuales provocan en un elemento diferencial X_i del cuerpo una distorsión que se puede representar mediante el tensor e_{ij} .

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 5 \\ 4 & -4 & -3 \\ 7 & 10 & -8 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

Con base en lo anterior y considerando que la deformación está dentro del rango elástico, determine el estado de esfuerzos en dicho elemento diferencial.

6. Determine el número de constantes elásticas linealmente independientes que existen para un material monotrópico.
7. Aplicando la teoría de medios continuos se puede comprobar que el estado de deformaciones asociado a una dislocación de hélice, se puede expresar como:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{-bx_2}{4\pi(x_1^2 + x_2^2)} \\ 0 & 0 & \frac{bx_1}{4\pi(x_1^2 + x_2^2)} \\ \frac{-bx_2}{4\pi(x_1^2 + x_2^2)} & \frac{bx_1}{4\pi(x_1^2 + x_2^2)} & 0 \end{vmatrix}$$

donde el vector de Burgers de la dislocación \bar{b} tiene una magnitud b y es paralelo al eje x_3 .

Considerando que se trata de un material homogéneo, elástico, lineal e isotrópico, se cumplirá entonces con $\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$, donde λ, μ son constantes de Lamé, $e = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Con base en lo expuesto y partiendo de que no existen fuerzas de cuerpo y que además no hay aceleración en el cuerpo, verifique la existencia de equilibrio en cualquier elemento diferencial de la dislocación de hélice.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho a_i$$

Asimismo, compruebe la existencia de un vector de desplazamientos $u(u_1, u_2, u_3)$ que da lugar a ε_{ij} .

Por otro lado, determine cuál será la variación de volumen que se asocia a la presencia de la dislocación para cualquier condición, y cuál será la rapidez de variación del volumen asociada al estado de deformación descrito para la dislocación.

Considerando que la deformación elástica está definida como $W^e = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})$, y que la teoría de medios continuos se puede aplicar a partir de un radio r_0 y hasta el radio del cristal R , determine la energía asociada a la dislocación; asimismo, determine los esfuerzos y deformaciones principales, máxima deformación y esfuerzos de corte.

8. El campo de desplazamiento asociado a un medio continuo está dado por (coordenadas rectangulares).

$$u_1 = \frac{-bX_3X_2}{X_1} \quad u_2 = \frac{bX_1X_3}{X_2} \quad u_3 = X_3b \sin X_2$$

Además, se ha determinado que

$$x_1 = (X_2 + X_3), \quad x_2 = aX_1, \quad x_3 = \frac{X_2X_1}{X_3}$$

Si el material es sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, con un coeficiente de Poisson (ν) y módulo de compresibilidad (k), determine:

- a) Tensor de esfuerzos
- b) En ausencia de fuerzas de cuerpo, ¿el campo de esfuerzos estará en equilibrio?
- c) Campo de rapidez de deformación.

9. Un sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, presenta un módulo de elasticidad de 70 GPa y un coeficiente de Poisson de 1/3. Cuando al material se le aplica una fuerza \bar{f} ($\bar{f} = 500\hat{e}_1 + 250\hat{e}_2 - 750\hat{e}_3$), ésta provoca en el elemento diferencial $X = (5, 1, 2)$ una serie de desplazamientos cuyo gradiente valuado en X está dado por:

$$(\nabla u)_X = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 8 \\ 5 & 9 & -2 \\ 2 & 12 & 20 \end{pmatrix} \times 10^{-4} \text{ m/m}$$

Con base en las deformaciones producidas por efectos de los desplazamientos, y considerando que éstas se encuentran en el rango elástico, determine para el punto en cuestión:

- a) Estado de deformaciones
- b) Estado de esfuerzos
- c) Cambio de volumen
- d) Esfuerzo hidrostático

10. Para una dislocación de borde se ha determinado la siguiente función de Airy.

$$\varphi = -\frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} x_2 \ln(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

donde

G - Módulo de rigidez a corte, ν - Coeficiente de Poisson, b - magnitud del vector de Burger asociado a la dislocación

Con base en lo anterior, determine el estado de esfuerzos y deformaciones correspondientes; asimismo, compruebe la existencia de equilibrio.

Si la energía asociada a la dislocación se puede expresar como $U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ considerando que el material es isotrópico, determine la energía asociada a la dislocación de borde.

11. El estado de esfuerzos en un elemento X_i a un tiempo t está dado por

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -16.18 & 0 & 0 \\ 0 & 34.18 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Si con otra base de referencia el estado se representa como

$$\sigma'_{ij}(X_i, t) = \begin{pmatrix} -16.18 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 25 \\ 0 & 25 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

y se trata de un material sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, determine el estado de deformaciones correspondiente a σ'_{ij} , así como su representación en ejes principales. Considere que $\nu = 1/3$, $E = 200$ GPa.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

¿Cómo están orientados los ejes principales de deformación con relación a los principales de esfuerzos?

Calcule la matriz de rotación.

12. Desarrolle las relaciones que permiten determinar cualesquier constante elástica a partir de conocer dos de éstas. Esto para un sólido elástico, lineal homogéneo e isotrópico.

	λ, μ	E, ν	μ, ν	E, ν	K, ν
λ					
μ					
E					
ν					
k					

13. Para una condición de deformación plana en un medio continuo, se ha propuesto como solución la siguiente función de Airy:

$$\varphi = 2x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 - 6x_2^4$$

- Determine el estado de esfuerzos asociado al medio continuo.
 - Si se trata de un sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, determine el campo de deformaciones.
 - ¿Existirá un vector de desplazamientos a través del cual se representa la deformación del sólido?
 - Verifique la existencia de condiciones de equilibrio.
14. El tensor de distorsión para un elemento de un bloque de acero está dado por U_{ij} .

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -6 \\ 9 & -9 & 15 \\ 18 & 6 & -25 \end{pmatrix} \times 10^{-4}$$

Las constantes de Lamé del material (λ, μ) son respectivamente 120 y 73 GPa. Con base en lo anterior, determine el tensor de deformación (ε_{ij}) , el de rotación (ω_{ij}) , el de esfuerzos (σ_{ij}) (deformación elástica), el desviador esfuerzos, el esfuerzo efectivo, la deformación efectiva, los esfuerzos y deformaciones principales, la deformación volumétrica, así como las restantes constantes elásticas (módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson, constante de compresibilidad).

15. Determine si en ausencia de fuerzas de cuerpo el desviador de esfuerzos S_{ij} cumple con condiciones de equilibrio; asimismo, determine si $S_{33} = -\alpha(x_1^2 + x_2^2)$.

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha(x_2^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2)) & -2\alpha\nu x_1x_2 & 0 \\ -2\alpha\nu x_1x_2 & \alpha(x_1^2 + \nu(x_2^2 - x_1^2)) & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{pmatrix}$$

16. Para el estado de esfuerzos σ_{ij} , determine el valor de σ_{33} que garantice que la deformación es biaxial.

Considere que se trata de una deformación elástica y que el material es homogéneo, lineal e isotrópico, con constantes elásticas λ (constante de Lamé), μ (módulo de rigidez a corte), ν (coeficiente de Poisson), k (constante de compresibilidad), E (módulo de elasticidad).

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha(x_2^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2)) & -2\alpha\nu x_1 x_2 & 0 \\ -2\alpha\nu x_1 x_2 & \alpha(x_1^2 + \nu(x_2^2 - x_1^2)) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

17. En la figura 6.32 se presenta la distorsión generada por una dislocación de tornillo (hélice) en un cristal. Si se considera que los desplazamientos producidos por la dislocación son



FIGURA 6.32 DESCRIPCIÓN ESQUEMÁTICA DE LA DISTORSIÓN GENERADA EN EL CRISTAL POR EFECTO DE UNA DISLOCACIÓN DE TORNILLO. A LA DERECHA SE OBSERVA EL DIAGRAMA $\sigma - \epsilon$ CONSIDERANDO QUE EL MATERIAL ES SEHLI

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = f(\theta) = \frac{b}{2\pi} \theta$$

$$u_3 = \frac{b}{2\pi} \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}$$

donde el vector de Burgers de la dislocación \hat{b} tiene una magnitud b y es paralelo al eje x_3 .

Con base en lo antes expuesto y tomando en cuenta que se trata de un sólido elástico homogéneo lineal e isotrópico, determine:

- Tensor de deformaciones asociado
 - Tensor de esfuerzos asociado
 - ¿Cuál es el cambio del volumen asociado a la presencia de la dislocación de tornillo?
 - ¿Cuál será la rapidez de variación de volumen asociado a la condición antes expuesta?
 - Considerando que la teoría de medios continuos se puede aplicar a partir de un radio r_0 y hasta el radio del cristal R , determine la energía de asociada a la dislocación.
 - Explique usted que sucederá con respecto al estado de esfuerzos y a la energía involucrada, si el material es ortotrópico.
 - Despreciando el efecto de las fuerzas de cuerpo ¿existirá equilibrio?
 - Considerando que los esfuerzos normales sobre las paredes laterales del elemento son nulos y que el esfuerzo axial debe ser diferente de cero, ¿el modelo propuesto cumple con estas condiciones?
18. Una barra de sección circular de radio R y longitud l , es sometida a un momento torsionante M_T , donde el eje x_1 coincide con el eje del cilindro. El momento torsionante produce un pequeño ángulo de rotación definido por θ , donde $\theta = \theta(x_1)$, (la deformación es elástica).

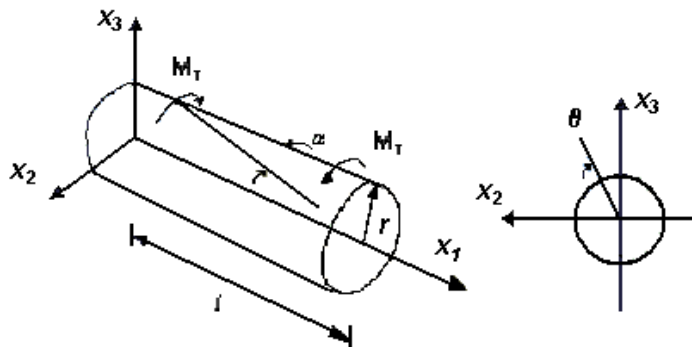


FIGURA 6.33 BARRA DE SECCIÓN CIRCULAR DE DIÁMETRO ϕ Y LONGITUD l , LA CUAL ES DEFORMADA POR UN MOMENTO TORSIONANTE APLICADO EN $x_1 = l$. LA BARRA SE ENCUENTRA EMPOTRADA EN $x_1 = 0$

Considerando lo antes expuesto, determine:

- a) Estado de deformaciones asociado
- b) Estado de esfuerzos
- c) Deformaciones principales
- d) Esfuerzos principales
- e) ¿En qué planos se presentan los esfuerzos máximos?
- f) Si el material de la barra se comporta frágil, qué ángulo describirá la superficie de fractura con el eje longitudinal.
- g) ¿Qué pasa si la barra presenta una sección elíptica?

19. Describa el estado de esfuerzos y deformaciones que corresponden a:

- a) Estado biaxial de esfuerzos
- b) Estado biaxial de deformaciones

20. Las ecuaciones de Navier se pueden expresar como

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho_0 B + (\lambda + \mu) \nabla e + \mu \operatorname{div}(\nabla u)$$

Con base en lo antes expuesto, exprese las ecuaciones de Navier en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

21. En una deformación plástica el vector desplazamiento está dado por

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \alpha(2X_3 + 3X_2)\hat{e}_1 + ((X_2 + 3X_1))\hat{e}_2 + (2X_1 + 3X_2 + 2X_3)\hat{e}_3 \\ \alpha &= 10^{-2}\end{aligned}$$

Para el elemento diferencial que originalmente se ubicaba en la posición (0.08, 0.1, 0.14), determine el estado de deformación asociado, así como las deformaciones principales y la deformación máxima a corte. ¿Cómo es la deformación en todo el MC?

22. Una barra de sección circular de diámetro ϕ y radio R es sometida a una serie de sollicitaciones que provocan flexión y torsión en ésta. El momento flector alrededor de x_3 , M_f actúa en el extremo de la barra de acuerdo con lo indicado en la figura 6.34, en el

mismo extremo se aplica un momento torsionante M_T sobre el eje x_1 . Por otra parte, la barra es sometida a una carga distribuida p y una carga concentrada f a la mitad de la barra. Esta carga f está a un ángulo θ con respecto al eje x_1 . Con base en lo antes expuesto, determine el estado de esfuerzos en la forma $\sigma_{ij} = h(x_1, x_2)$, así como también la función de Airy que es solución del problema.

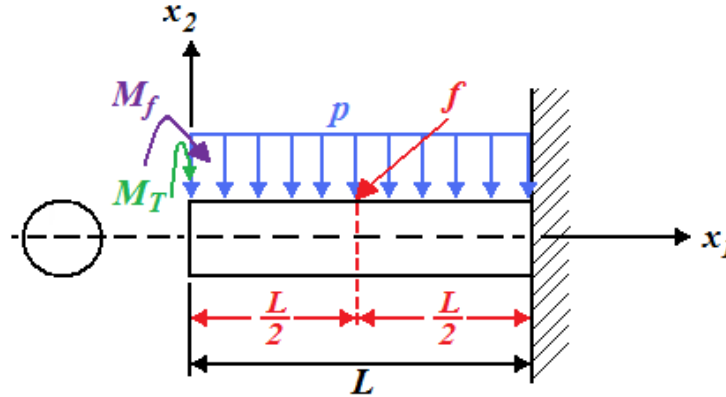


FIGURA 6.34

23. Determine la relación existente entre el módulo de elasticidad y velocidad de ondas elástica longitudinales y transversales en un sólido de Hooke.
24. Para resolver un sistema biaxial de deformaciones es necesario determinar $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, esto a partir de la solución simultánea de las tres ecuaciones diferenciales características del sistema:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

Para este caso, la solución se expresa a través de una función de Airy (ϕ), y los esfuerzos se definen como:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Con base en lo anterior, determine la función de esfuerzos (ϕ) para la viga horizontal de la figura 6.35, considere que existe simetría con relación a la carga aplicada (F), la cual es de 10 000 lb_f, asimismo, tome en cuenta que el cable que transmite la carga se encuentra a un ángulo (θ). Defina los esfuerzos a que estará sometida la viga.

Determine la función de Airy $\varphi = f(x_1, x_2; F, \theta, L, I_{33})$. Donde x_1, x_2 son los ejes longitudinal (horizontal) y transversal (vertical) con relación a la viga. F es la carga aplicada, θ es el ángulo entre el cable y la horizontal, L es la longitud de la viga, e I_{33} representa al momento de inercia sobre el eje x_3 .

Considere a la viga como empotrada. Tome en cuenta que el material se comporta como un sólido elástico homogéneo e isotrópico, con constantes elásticas E, ν, μ, λ, k .

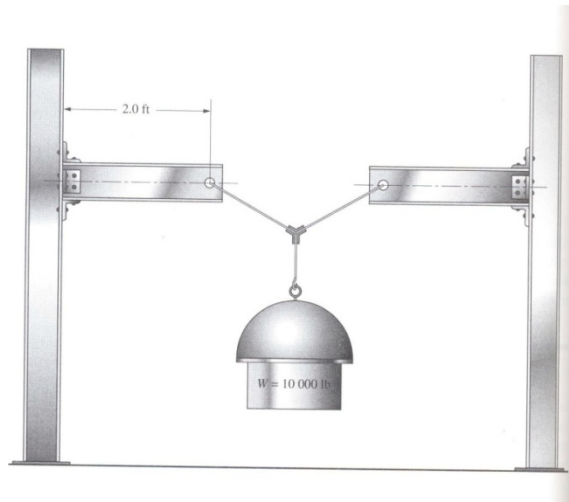


FIGURA 6.35

25. Una viga tipo I [S510x143], de acero A572-HSLA grado 65 (figura 6.36), con $\sigma_u = 552 \text{ MPa}$; $\sigma_0 = 448 \text{ MPa}$; $\varepsilon_m = 17\%$, es sometida a una carga concentrada f_2 [30 kN] y una distribuida $[p]$ de 7500 N/m. Considere que la viga tiene una longitud de 10 m. Las propiedades de la viga S510x143 son:

Peso 1.4 kN/m

$$I_x = 6.95 \times 10^8 \text{ mm}^4; \quad S_x = \frac{I_x}{y_{\text{máx}}} = 2.47 \times 10^6 \text{ mm}^3; \quad A = 1820 \text{ mm}^2,$$

Peralte (altura total de la viga) - 516 mm

Espesor en el alma - 20.3 mm

- a) Con base en lo anterior, determine el estado de esfuerzos $[\sigma_{ij} = \sigma(f_2, p; x_1, x_2)]$ como una función de las sollicitaciones y de la posición. Considere que la deformación se puede describir como biaxial.

De ser factible determine la función de Airy que es solución del problema. ¿Soportará la viga las cargas aplicadas?

El peso de la viga ya ha sido considerado como parte de la carga distribuida, donde I_x representa el momento de inercia con respecto al plano medio vertical (momento de inercia) y S_x es el primer momento de área.

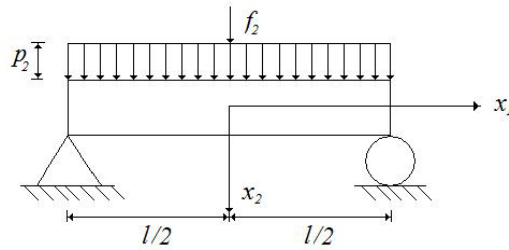


FIGURA 6.36

26. Un sólido elástico, homogéneo, lineal y ortotrópico, presenta constantes elásticas E_i, ν_i, μ_j, k hasta totalizar 9 linealmente independientes. Si las deformaciones que han sido determinadas experimentalmente en una cierta región del material se expresan como:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 12 & -5 & 8 \\ -5 & 7 & -15 \\ 8 & -15 & -9 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

Determine el estado de esfuerzos correspondiente a dicho elemento diferencial del material, si algunas de las constantes elásticas del material son:

$$E_1 = 150 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 180 \text{ GPa}$$

$$E_3 = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.3$$

$$\nu_{13} = 0.28$$

$$\nu_{23} = 0.33$$

$$\mu_4 = 60 \text{ GPa}$$

$$\mu_5 = 70 \text{ GPa}$$

$$\mu_6 = 75 \text{ GPa}$$

27. Un sólido elástico, homogéneo, lineal y ortotrópico, presenta constantes elásticas E_i, ν_i, μ_j, k hasta totalizar 9 linealmente independientes. Si las deformaciones que han sido determinadas experimentalmente en una cierta región del material se expresan como:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 18 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & -12 \\ 8 & -12 & -15 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

Determine el estado de esfuerzos correspondiente a dicho elemento diferencial del material, si algunas de las constantes elásticas del material son:

$$E_1 = 100 \text{ GPa}; E_2 = 120 \text{ GPa}; E_3 = 150 \text{ GPa}; \nu_{12} = 0.31; \nu_{13} = 0.27, \nu_{23} = 0.33$$

$$\mu_4 = 50 \text{ GPa}; \mu_5 = 60 \text{ GPa}; \mu_6 = 75 \text{ GPa}$$

También, calcule la deformación y esfuerzo hidrostáticos, así como la constante de compresibilidad.

Determine el desviador de esfuerzos y de deformaciones.

28. Una barra de sección circular está bajo la acción de una carga axial f_1 y un momento flexionante Mf_3

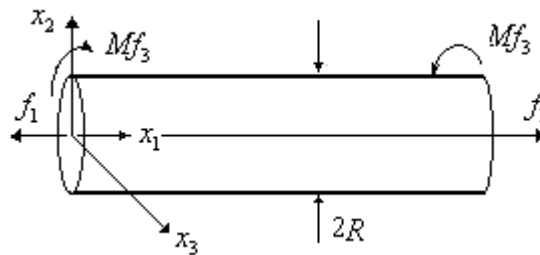


Figura 6.37

Con base en lo anterior, determine el estado de esfuerzos y deformaciones para cualquier posición y tiempo.

Si el esfuerzo de cedencia del material es σ_0 , determine el radio R mínimo de la barra.

29. A una barra de hierro colado de 200 cm de largo y 5 cm de diámetro es aplicada, en ambos extremos, una fuerza longitudinal de igual magnitud y sentido contrario P . Con base en lo anterior determine el esfuerzo normal máximo y los cortantes máximos, ¿a

qué ángulo se presentarán éstos con relación al eje longitudinal de la barra? Describa el estado de esfuerzos y deformaciones, si uno de los ejes del sistema cartesiano es coincidente con el eje de la barra, mientras que los otros dos se encuentran sobre un plano cuya normal es el eje longitudinal. Si las cargas son de tracción, determine la longitud final de la barra, así como las contracciones laterales.

$$E = 103 \text{ GPa}, \nu = \frac{1}{3}, P = 100 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij})$$

$$E = 2\mu(1+\nu)$$

Si la barra en cuestión se coloca en un núcleo indeformable cuyo diámetro interior es de 5 cm y cuya longitud es mayor que la de la barra, que sucederá al aplicar a la barra la carga P , pero ahora de compresión, ¿Cuál será el estado de esfuerzos y deformaciones?

30. Una banda de un sólido elástico homogéneo, lineal e isotrópico, cuyo espesor es despreciable en comparación con sus otras dos dimensiones, está sometida a una serie de sollicitaciones que generan un estado de esfuerzos: $T_{11} = \alpha x_1^2 x_2$; $T_{22} = \alpha n x_2^3$; $T_{12} = f(x_1, x_2)$. Donde n es un escalar y $\alpha = 1 \text{ MPa/m}^3$. Determine la función que describe el esfuerzo cortante. Determine el estado de esfuerzos y de deformaciones, considere que $T_{23} = T_{31} = 0$; $T_{33} = f(x_1, x_2)$.

31. El arreglo de galgas extensométricas para un estado de deformaciones plano (figura 6.38), mide las deformaciones normales (longitudinales) a lo largo de los ejes x_1, x_2 (base original) y del eje x'_1 (nuevo sistema de referencia), tal que:

$$\varepsilon_{11} = 6 \times 10^{-4} \quad ; \quad \varepsilon_{22} = 4 \times 10^{-4} \quad ; \quad \varepsilon'_{11} = 8 \times 10^{-4}$$

Determinar la deformación angular ε_{12} , la deformación normal ε'_{22} y verificar que:

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}$$

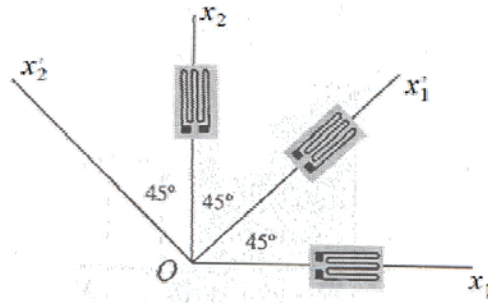


FIGURA 6.38

Para el estado de deformaciones en la base original, determinar las deformaciones principales y las direcciones principales asociadas.

Con base en lo antes expuesto y considerando que se trata de un sólido elástico y transversalmente isotrópico con $\mu_l = 50$ GPa, $\mu_T = 56$ GPa, $\nu_l = \frac{1}{3}$, $\nu_T = 0.3$, $\lambda = 98$ GPa, determine el estado de esfuerzos asociado.

32. En coordenadas polares una función de esfuerzos de Airy está dada por $\varphi = Cr^2(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)$, donde C, α son constantes, considerando que $\sigma_{r\theta} = -\tau$, cuando $\theta = -\alpha$. Determine el estado general de esfuerzos y el valor de la constante C .
33. La viga curva de la figura 2 cuyas superficie interior y exterior, así como las laterales están dadas por $r_i, r_e; \theta = \pm\alpha$, está sometida a un momento flector puro M_f , de tal forma que r_i, r_e están libres de esfuerzos de tracción, lo mismo que $z = \pm \frac{h}{2}$. Considerando que se trata de un sólido elástico e isotrópico (SEHLI) y que su espesor (h) es muy pequeño comparado con las otras dimensiones, determine el estado de esfuerzos en la viga.

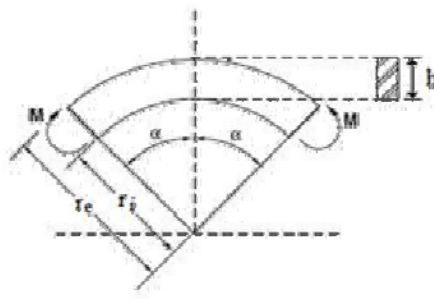


FIGURA 6.39 VIGA CURVA SOMETIDA A UN MOMENTO FLECTOR PURO

34. Para la viga simplemente apoyada de la figura 6.40, determine la función de esfuerzos de Airy solución del sistema. Con base en lo anterior, determine las constantes del polinomio de la forma: $\phi = \phi_2 + \phi_3 + \phi_5$ que representa la función solución.

Considere que el material se comporta como un sólido elástico homogéneo e isotrópico, con constantes elásticas E, ν, μ, λ, k .

$$\sigma_{11} = \sigma(x_1, x_2); \sigma_{22} = 0 \text{ para } x_2 = h; \sigma_{22} = p_2 \text{ para } x_2 = -h; \sigma_{22} = \sigma(x_2) \sigma_{12} = \sigma(x_1, x_2) \\ \sigma_{12} = 0 \quad \forall x_2 = \pm h; \sigma_{12} = \sigma_{12\text{máx}} \quad \forall x_2 = 0$$

Para el análisis considere superposición de efectos, en el caso de la carga distribuida la cara superior de la viga está sometida a la carga distribuida p_2 (carga/área), mientras que en la parte inferior la carga es cero. Para el caso de la carga concentrada, ésta sólo genera cortante. El esfuerzo σ_{11} , en los extremos del elemento $\sigma_{11} = 0$ para $x_1 = \pm \frac{l}{2}$.

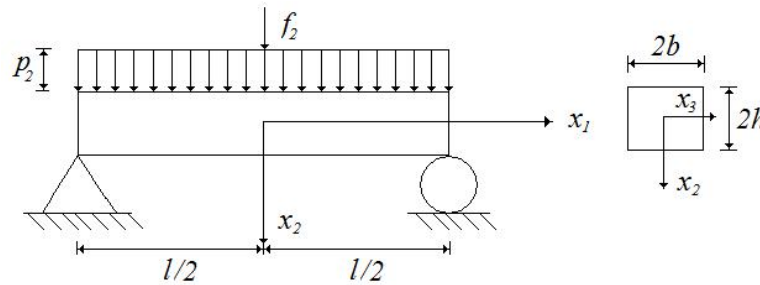


FIGURA 6.40

35. Para el elemento mecánico de la figura 6.41, determine la función de Airy solución del problema. Considere que la pieza tiene una longitud L un ancho b y un espesor h . Para motivo del análisis considere al elemento como de sección transversal constante.

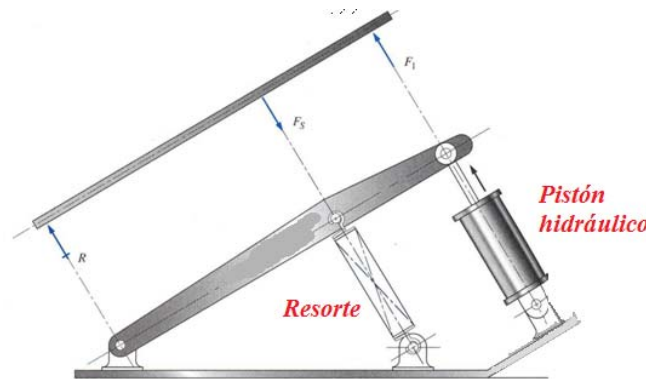


FIGURA 6.41

36. Para la estructura de la figura 6.42, determine la función de Airy solución del problema.

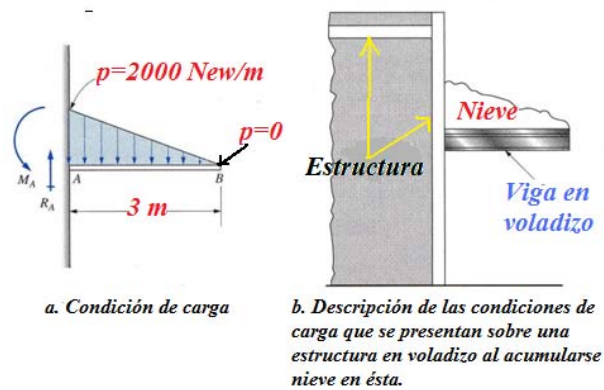


FIGURA 6.42

37. Determine el estado de esfuerzos en coordenadas cilíndricas para un tubo de diámetro interior d y diámetro exterior D , que se encuentra a la presión interior p_i y a la presión exterior p_e .

38. Una placa es sometida a una carga axial f_1 en dirección del eje x_1 (figura 6.43); la carga genera al interior de la placa un esfuerzo σ_{11} . La placa presenta una discontinuidad en su interior, la cual es de un radio a . Determine la concentración de esfuerzos que genera la discontinuidad antes descrita.

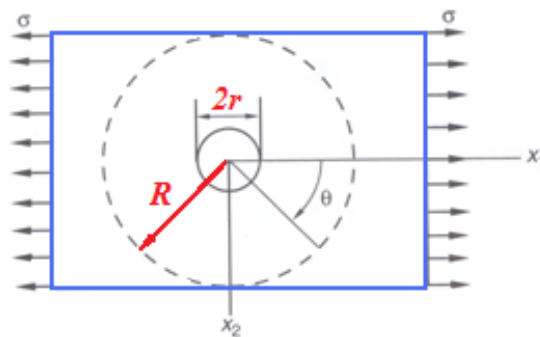


FIGURA 6.43 PLACA SOMETIDA A TRACCIÓN CON UNA DISCONTINUIDAD CIRCULAR DE RADIO r , EL ANCHO DE LA PLACA ES $2R$.

CAPÍTULO 7

FLUIDOS VISCOSOS NEWTONIANOS

7.1 CONCEPTOS GENERALES

En los sólidos, tales como los metales, se ha observado que su deformación es proporcional a las solicitaciones aplicadas; sin embargo, medios como el agua y el aire presentan comportamientos muy diferentes, ya que éstos no son capaces de soportar ni siquiera los esfuerzos de corte, producto de su propio peso. Por ejemplo, al aplicarse una sollicitación a corte entre dos placas (figura 7.1), el fluido continuará su deformación a corte mientras la sollicitación permanezca. Queda claro, entonces, que cualquier fluido será incapaz de soportar sollicitaciones de corte sin deformarse de manera permanente. La velocidad de desplazamiento será proporcional a la sollicitación aplicada y al eliminarse la carga, la deformación permanecerá.

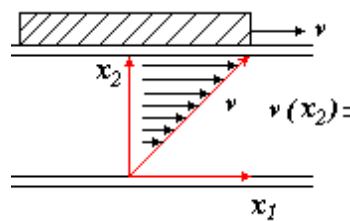


FIGURA 7.1 SOLICITACIÓN A CORTE ENTRE DOS PLACAS ENTRE LAS QUE SE ENCUENTRA UN FLUIDO

En presencia de la gravedad un fluido como el agua, tomará la forma del recipiente que la contiene, resultando imposible que mantenga su forma al retirar las paredes del recipiente. Lo anterior significa que no soporta esfuerzos cortantes generados por su propio peso, siendo entonces que en presencia de estos cortantes el fluido se deformará de manera permanente y continua, limitada esta deformación solo por la tensión superficial existente

entre el fluido y la superficie sobre la cual se extiende. Con base en las condiciones de movimiento del fluido, se define a éste como un medio idealizado que durante su movimiento como cuerpo rígido (considerando el propio estado de reposo) es incapaz de soportar cualquier tipo de solicitaciones a corte. Asimismo, se tiene que para algunos casos la densidad del fluido es aproximadamente constante. Esta situación aplica, por ejemplo, para el agua, en la cual en condiciones de carga muy variadas se considera que su densidad no se altera (por lo tanto se describe como incompresible), por otra parte, el aire, como todos los gases, se analiza sobre la premisa de que al variar la presión su densidad también se ve afectada. Sin embargo, la descripción de compresibilidad o invariabilidad de la densidad en un fluido depende de las condiciones del estudio; por ejemplo, el aire a bajo número de Mach se le analiza como si se tratara de un fluido incompresible; por lo contrario, cuando se estudia la propagación de ondas elásticas en el agua se describe a ésta como un fluido compresible.

En los fluidos se observa que la resistencia al flujo depende de la velocidad y, por consecuencia, de su velocidad de deformación, esto de manera análoga a lo que sucede en los sólidos con relación a su deformación. Análisis más detallados revelan que existen fluidos en los que la relación de las cargas aplicadas con la velocidad de deformación es lineal; tal como pasa en los sólidos de Hooke con la deformación. Por otra parte, fluidos como la miel o la propia sangre no presentan relaciones lineales. Es entonces que se pueden clasificar a los fluidos como:

1. **Fluidos newtonianos.** Son aquellos en los que la relación esfuerzo de corte-velocidad de deformación es lineal $\tau = c\dot{\epsilon}$. A esta relación de proporcionalidad se le denomina como viscosidad, razón por la cual este tipo de fluidos se describen como *linealmente viscosos*.
2. **Fluidos no newtonianos.** En este caso la relación es no lineal, presentándose fenómenos de almacenamiento de energía a la vez de los disipativos característicos de los fluidos, a este tipo de medios se les denomina como *fluidos viscosos no lineales* ($\tau = c\dot{\gamma}^n; n \neq 1$)

Desde el punto de vista de la variación de su densidad se describen como:

a) Fluidos compresibles

$$\frac{D\rho}{Dt} \neq 0$$

b) Fluidos incompresibles. Se puede considerar idealmente que la densidad del fluido bajo estudio permanece constante

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \therefore \quad \nabla \cdot v = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot u = 0$$

Como ya ha sido mencionado un fluido es un medio idealizado, el cual en cualquier punto, durante movimiento de cuerpo rígido o en reposo, no es capaz de soportar esfuerzos de corte, por lo que con cualquier base que se analice el sistema, el estado de esfuerzos siempre se presentará como

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Esto debido a que el fluido en reposo o en movimiento de cuerpo rígido no presenta ningún esfuerzo de corte; por otro lado, partiendo de la misma lógica se tiene que para un elemento diferencial cualquiera en el seno del fluido al cortar éste con cualquier plano, solamente se presentarán esfuerzos normales, lo que se expresa entonces como:

$$Tn = \lambda n$$

Para cualquier n , el esfuerzo en cualquier punto y para cualquier plano es normal al plano. Considerando que el punto (elemento diferencial de fluido) es cortado por dos planos cualesquiera cuyas normales son n_1, n_2 , entonces se cumplirá que

$$Tn_1 = \lambda_1 n_1$$

$$Tn_2 = \lambda_2 n_2$$

$$\Rightarrow n_1 T n_1 = \lambda_1 n_1 \cdot n_2$$

Por otra parte,

$$n_1 T n_2 = \lambda_2 n_1 \cdot n_2$$

dado que $T = T^T$

$$\Rightarrow n_1 T n_2 - n_2 T n_1 = 0 = (\lambda_2 - \lambda_1) n_1 \cdot n_2$$

Existen entonces dos posibilidades:

a) $n_1 \cdot n_2 = 0$

b) $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$

Ya que los planos no necesariamente son perpendiculares $\Rightarrow n_1 \cdot n_2 \neq 0$

En otras palabras, en todos los planos que pasan a través del punto no sólo no existen esfuerzos de corte, además todos los esfuerzos normales son iguales, a estos se les denomina como esfuerzos hidrostáticos y representan una componente esférica. Como los esfuerzos en el seno del fluido deben ser compresivos, entonces

$$\sigma_H = -p$$

p = presión atmosférica

$$T = -pI$$

En notación índice se expresa

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (7.1)$$

donde el escalar p representa la magnitud de los esfuerzos normales compresivos y por consecuencia se define como presión hidrostática.

7.2 FLUIDOS COMPRESIBLES E INCOMPRESIBLES

Como ya fue explicado, en diversos fluidos, como el agua, al variar la presión hidrostática su densidad se modifica en magnitudes tan pequeñas que se definen a éstos como incompresibles, por lo cual se cumple que

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

razón por la que la ecuación de conservación de la masa

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

O en notación índice

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Un fluido, aun cuando se considere como incompresible, no necesariamente deberá presentar uniformidad espacial en la densidad, de ser así se considerará como homogéneo. Resulta evidente que la suposición de incompresibilidad simplificará el análisis y por consecuencia la solución de los problemas, simplemente es necesario en cada caso evaluar la conveniencia de considerar al fluido como compresible o incompresible, de tal forma que se obtengan soluciones simples y con un alto grado de aproximación.

7.3 ECUACIONES DE LA HIDROSTÁTICA

Un fluido, como todo medio continuo, deberá cumplir con las ecuaciones generales, entre éstas la ecuación de Cauchy, la cual considerando condiciones de equilibrio queda como

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = 0$$

Por otra parte, se ha definido que el estado de esfuerzos para un fluido en reposo se representa por

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

por lo que sustituyendo ésta en la Ecuación de Cauchy, se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} + \rho B_i &= 0 \\ \therefore -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \rho B_i \end{aligned} \tag{7.2}$$

Lo que en notación general se expresa como

$$\Rightarrow \nabla p = \rho B$$

EJERCICIO 7.1 Determine la variación de la presión de un objeto que se encuentra sumergido en un líquido de densidad ρ , si se conoce que la presión sobre la superficie del fluido se describe como p_0 .

Con base en la ecuación 7.2, se puede determinar la variación de la presión en función de la profundidad a la que se encuentra inmerso el medio al interior del fluido. Considérese que la única fuerza de cuerpo es producto del campo gravitacional y que el eje x_3 corresponde con la vertical, mientras que el plano horizontal está dado por x_1x_2 ; la aceleración producto de las fuerzas de cuerpo será

$$B_i = 0\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + g\hat{e}_3.$$

El fluido como cualquier otro medio deberá cumplir con las ecuaciones de Cauchy en equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = 0$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho B_i$$

$$\nabla p = \rho B$$

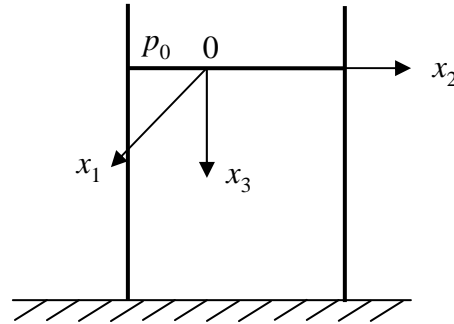
Considerando la aceleración gravitatoria

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = g$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho g$$



Por lo tanto, se tiene que $p(x_1, x_2) = \text{cte}$ para cualquier x_1, x_2 ; por otra parte:

$$p = \rho g x_3 + c$$

dado que en $x_3 = 0 \rightarrow p = p_0$, se tiene que

$$p = \rho g h + p_0$$

EJERCICIO 7.2 Cuando se presentan diferencias de altitud menores, se puede considerar que la atmósfera se encuentra a temperatura constante. Con base en lo anterior, determine las ecuaciones que describan la variación de presión y densidad de la atmósfera.

Con base en la ecuación de la hidrostática $-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i = 0$, se tiene que, para el eje x_1

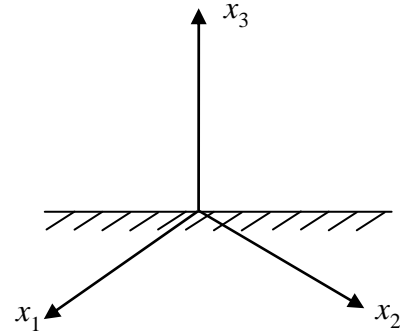
$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \text{cte}$$

Para el eje x_2

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \text{cte}$$

Para el eje x_3

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_3}\right) = -\rho g$$



Considerando la ecuación de estado para un gas ideal, y además que la temperatura es constante

$$pV = mR\theta$$

$$p = \rho R\theta, \text{ con } \theta = \text{cte}$$

$$\rho = \frac{p}{R\theta}$$

Sustituyendo resulta entonces que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_3}\right) = \left(-\frac{p}{R\theta}\right)g$$

Resolviendo la ecuación diferencial se tiene

$$\left(\frac{dp}{p}\right) = \left(-\frac{gdx_3}{R\theta}\right)$$

$$\text{Ln } p = -\frac{g}{R\theta}x_3 + c$$

Para $x_3 = 0 \Rightarrow p = p_0$ (presión de referencia)

$$\text{Ln } p_0 = \frac{-g}{R\theta}(0) + c$$

$$\Rightarrow \quad p = p_0 \exp\left(\frac{-g}{R\theta}\right)x_3$$

De forma análoga se puede proceder para determinar la razón de variación de la densidad con la altura

$$p = \rho R \theta$$

$$\left(\frac{\partial \rho R \theta}{\partial x_3} \right) = -\rho g$$

$$\left(\frac{d\rho}{\rho} \right) = -\frac{g}{R\theta} dx_3$$

$$\text{Ln } \rho = -\frac{g}{R\theta} x_3 + c$$

Para $x_3 = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0$ (densidad inicial o de referencia)

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{-g}{R\theta} x_3\right)$$

7.4 MOVIMIENTO DE CUERPO RÍGIDO DEL FLUIDO

En los casos anteriores se consideró que el fluido se encontraba en reposo o en condiciones de equilibrio, por lo que se definió que su aceleración era igual a cero, ahora se analizará considerando que se trata de un movimiento de cuerpo rígido, por lo cual $\nabla v = 0$, es decir, las deformaciones y velocidades de deformación son cero, por lo que la ecuación de Cauchy para este caso se expresa como

$$-\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \rho B_i = \rho a_i$$

$$\therefore -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\nabla p + \rho B = \rho a \quad (7.3)$$

EJERCICIO 7.3 Un recipiente con un fluido incompresible en su interior se mueve verticalmente hacia arriba con una aceleración constante a . Determine la presión en un punto que se encuentra a una profundidad H de la superficie. Considere que en la superficie $H = 0$ la presión está dada por p_0 . La densidad se expresa como ρ_0 .

El sistema coordenado se define considerando que la dirección positiva del eje x_3 es hacia abajo, mientras que los ejes x_1, x_2 corresponden al plano horizontal. La aceleración producto de las fuerzas de cuerpo queda (sólo se considera el campo gravitacional).

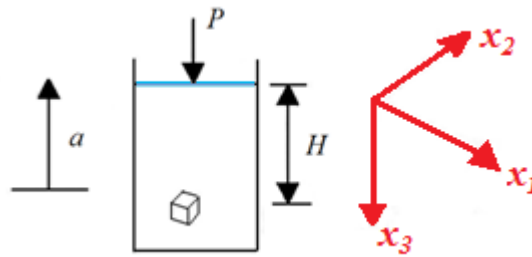


FIGURA 7.2 RECIPIENTE MOVIÉNDOSE EN DIRECCIÓN VERTICAL

$$B_i = 0\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

Movimiento de cuerpo rígido

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$$

Eje x_3

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g = -\rho a_3$$

La solución de la ecuación diferencial queda

$$p = \rho(g + a_3)x_3 + p_0$$

EJERCICIO 7.4 Un vehículo arrastra una pipa de sección cilíndrica (figura 7.3), la cual tiene una división central. El tanque tiene una longitud de 15 m por 2 m de diámetro. El fluido dentro del tanque ocupa un 50 % del volumen de éste. Al ponerse la luz del semáforo en verde el vehículo debe acelerar con una magnitud constante (aceleración en dirección horizontal). Considerando movimiento de cuerpo rígido, determine el ángulo de la superficie libre del tanque (θ) con relación a la horizontal; asimismo, desarrolle la ecuación que define la presión para cualquier punto del tanque, tal que $p = p(x_1, x_2)$. Calcule la altura máxima que alcanza el fluido al chocar con la pared vertical si $a = g/4$.

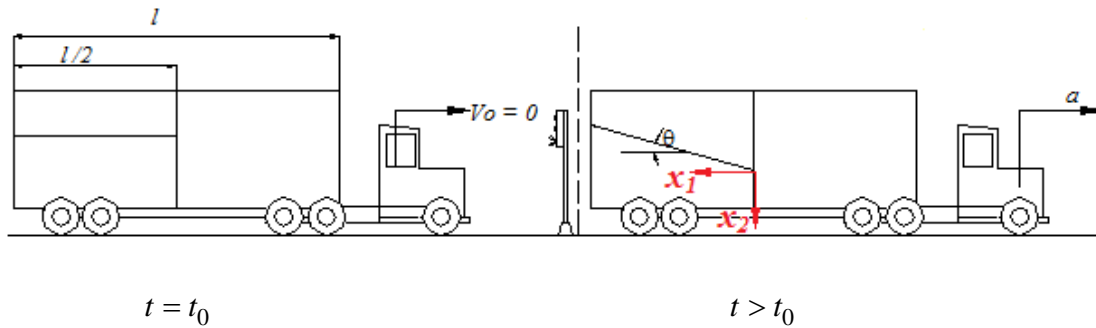
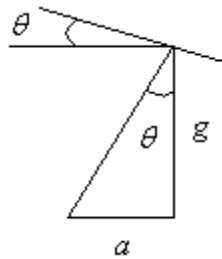


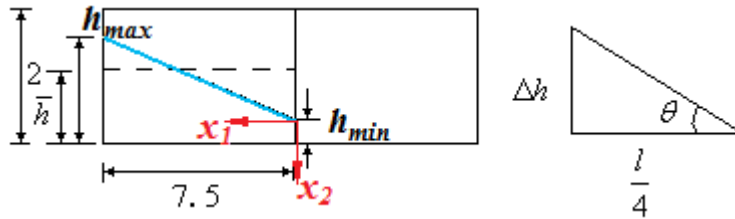
FIGURA 7.3 MOVIMIENTO DEL AGUA AL PRESENTARSE UNA ACELERACIÓN

La superficie del agua es normal a la resultante de la fuerza, si solo existe la aceleración producto del campo gravitacional, la superficie permanecerá horizontal; sin embargo, al acelerar el vehículo el agua, por efecto de su inercia, tiende a desplazarse hacia atrás dando lugar a una superficie inclinada con ángulo θ con respecto a la horizontal. Esta superficie será perpendicular a la componente de la aceleración resultante, por lo que



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14^\circ$$

A partir de lo anterior y considerando las dimensiones del tanque (ξ, ϕ) , donde ξ representa la longitud de la cámara y ϕ su diámetro, se calcula fácilmente la altura que alcanza el líquido durante la aceleración del vehículo. Además, a partir de la ecuación de movimiento de cuerpo rígido de un fluido se puede determinar la ecuación que defina la presión para cualquier coordenada.



Tomando como referencia la superficie del fluido

$$p(x_1, x_2) = p_0 + \rho g x_2 + \rho g x_1 \tan \theta$$

$$h_{\text{máx}} = \bar{h} + \Delta h = \bar{h} + \frac{\xi}{2} \tan \theta = 1 + \frac{7.5}{2} \tan 14^\circ = 1.9375 \text{ m}$$

$$h_{\text{mín}} = \bar{h} - \Delta h = \bar{h} - \frac{\xi}{2} \tan \theta = 1 - \frac{7.5}{2} \tan 14^\circ = 0.065 \text{ m}$$

$$\Rightarrow p_{\text{máx}} = p_0 + \rho g \left(h_{\text{mín}} + \frac{\xi}{2} \tan \theta \right)$$

EJERCICIO 7.5 Demuestre que para un flujo unidireccional (figura 7.4) que corre en un plano inclinado con relación a la vertical, la cabeza piezométrica h es constante en cualquier punto dentro del flujo (se considera que el cambio de alturas z es mucho mayor que la dimensión en dirección del eje x_3).

$$h = \frac{p}{\rho g} + z$$

ρ - densidad

g - aceleración gravitacional

h - cabeza piezométrica

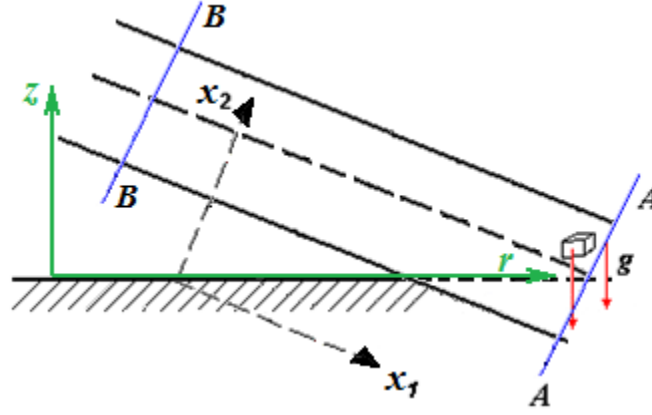


FIGURA 7.4 FLUJO UNIAxIAL EN DIRECCIÓN DEL EJE x_1

$$v_1 \neq 0 \quad v_2 = v_3 = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho B_2 = 0 \quad (7.4)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho B_3 = 0$$

Como z apunta hacia arriba (figura 7.4), las fuerzas de cuerpo por unidad de masa se expresan como

$$B = 0\hat{e}_r + 0\hat{e}_\theta - g\hat{e}_z$$

Entonces la proyección del campo gravitacional en dirección del eje x_2 está dada por

$$B_2 = B \cdot \hat{e}_2 = -g(\hat{e}_z \cdot \hat{e}_2)$$

El vector de posición de cualquier elemento diferencial del fluido queda

$$r = (x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3)$$

Entonces la proyección del vector de posición con respecto del eje vertical es

$$z = \hat{e}_z \cdot \mathbf{r} = \left((\hat{e}_z \cdot \hat{e}_1) x_1 + (\hat{e}_z \cdot \hat{e}_2) x_2 + (\hat{e}_z \cdot \hat{e}_3) x_3 \right)$$

Es evidente que

$$(\hat{e}_z \cdot \hat{e}_3) = 0$$

Por otra parte la variación de

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \hat{e}_z \cdot \mathbf{r} = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_2$$

Se puede escribir entonces que

$$\therefore B_2 = -g \frac{\partial}{\partial x_2} (\hat{e}_z \cdot \hat{e}_2) = -g \frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{\partial gz}{\partial x_2}$$

Sustituyendo en la ecuación 7.4

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_2} (gz) - \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (\rho gz + p) = 0$$

Entonces, para todos los puntos de un mismo plano el cual es perpendicular a la dirección de flujo se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = 0$$

Por lo tanto

$$\left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = \text{cte}$$

7.5 FLUIDO NEWTONIANO

Como ya ha sido mencionado, se define como fluido newtoniano al medio continuo que se caracteriza porque la relación de los esfuerzos de corte a la velocidad de deformación es lineal, por consecuencia el estado de esfuerzos se podrá describir como

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (7.5)$$

donde el tensor σ'_{ij} depende de la velocidad de deformación y representa la componente viscosa del estado de esfuerzos; en un fluido newtoniano, en cualquier punto asociado al medio continuo, el esfuerzo σ'_{ij} depende en forma lineal de las componentes del tensor de rapidez de deformación (D_{ij})

$$\sigma_{ij} = \sigma(D_{ij})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

No existe ninguna razón experimental por la cual se pueda considerar que las propiedades del fluido se modifican con la posición, así como que éstas dependen de la dirección. De lo antes mencionado, se describe a éste como un fluido homogéneo e isotrópico. Por analogía con un sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, se define un fluido viscoso, homogéneo, lineal e isotrópico (fluido newtoniano); por lo tanto

$$\sigma'_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$$

Realizando las mismas consideraciones que fueron efectuadas para el sólido elástico homogéneo e isotrópico, se tiene que:

El tensor de esfuerzos y el de rapidez de deformación son simétricos

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}; \quad \dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\epsilon}_{lk}$$

El tensor de constantes viscosas es simétrico

$$C_{ijkl} = C_{jikl}; \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

Por otra parte, el tensor de constantes viscosas C_{ijkl} es isotrópico, esto es no se modifica bajo cualquier base, razón por la que el sistema se puede representar en la forma

$$\sigma'_{ij} = \lambda \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}$$

lo cual representa que solo existen dos constantes viscosas linealmente independientes:

$$\lambda, \mu = \frac{f-t}{l^2}$$

Como a través de la Segunda ley de Newton se encuentran relacionadas la fuerza, masa, longitud y tiempo, se tiene que

$$\lambda, \mu = \frac{f-t}{l^2} = \frac{m-l}{t^2} \left[\frac{t}{l^2} \right] = \frac{m}{l-t}$$

donde μ representa la razón de proporcionalidad entre el esfuerzo de corte y la rapidez con la que decrece el ángulo entre dos líneas materiales mutuamente perpendiculares. A esta constante se le denomina como primer coeficiente de viscosidad o simplemente viscosidad. Por su parte, λ no tiene un significado físico, ambas en el Sistema Internacional tienen unidades de pascal-segundo, unidades que para la mayoría de las aplicaciones prácticas resultan muy elevadas. Es por lo anterior que se define el **Poise** $\left[\frac{\text{g}}{\text{cm s}} \right]$, en sistema inglés

las unidades son $\left[\frac{\text{lb}_f \cdot \text{s}}{\text{pie}^2} \right]$ o $\left[\frac{\text{slug}}{\text{pie} \cdot \text{s}} \right]$.

En la mecánica de fluidos es muy común el empleo de la viscosidad cinemática

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

entidad que proviene del cociente de la viscosidad μ , con respecto a la densidad ρ . La viscosidad cinemática ν tiene unidades de $\left[\frac{l^2}{t}\right]$. En sistema métrico la unidad de la viscosidad cinemática recibe el nombre de **Stoke** $\left[\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}\right] = 10^{-4} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$.

Retomando la expresión a través de la cual se define el estado de esfuerzos, el tensor total de esfuerzos queda

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

$$\sigma_{11} = -p + \lambda D_{kk} + 2\mu D_{11}$$

$$\sigma_{22} = -p + \lambda D_{kk} + 2\mu D_{22}$$

$$\sigma_{33} = -p + \lambda D_{kk} + 2\mu D_{33}$$

$$\sigma_{ii} = -3p + (3\lambda + 2\mu) D_{kk}$$

$$\therefore \sigma_H = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) D_{kk}$$

Donde

$$D_{kk} = \frac{1}{dV} \frac{D}{Dt}(dV)$$

representa la rapidez de cambio de volumen y está dada por

$$D_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}$$

$$\text{o} \quad D_{kk} = D_{11} + D_{22} + D_{33}$$

Si el fluido es incompresible $D_{kk} = 0$, el esfuerzo hidrostático estará dado por la presión, sin embargo, en el caso de que $D_{kk} \neq 0$, la presión p representará solo parte de la presión hidrostática, siendo necesario definir el coeficiente de viscosidad volumétrica

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

Por otra parte, si el fluido es compresible y $\sigma_H = -p$, solamente si $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$, lo cual se define como Condición de Stokes.

Fluido newtoniano incompresible

Para el caso de un fluido newtoniano incompresible, el estado de esfuerzos se expresa como

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

Por lo que

$$\sigma_{kk} = -3p + 2\mu D_{kk}$$

$$D_{kk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{kk} = -3p$$

$$\therefore \quad \sigma_H = -p$$

Es por tanto que en un fluido viscoso incompresible la presión hidrostática no depende de ninguna cantidad cinemática y es indeterminada con relación al comportamiento mecánico de éste; por otra parte, para un fluido viscoso incompresible se podrá superponer cualquier presión al fluido sin que esto afecte su comportamiento mecánico. Por consecuencia, la presión resulta indeterminada desde el punto de vista de las ecuaciones constitutivas que caracterizan a un fluido viscoso incompresible. Retomando la ecuación constitutiva $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$ y considerando que

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

se tiene entonces que

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\sigma_{11} = -p + \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)$$

$$\sigma_{22} = -p + \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)$$

$$\sigma_{33} = -p + 2\mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\sigma_{12} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)$$

$$\sigma_{23} = \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)$$

$$\sigma_{31} = \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)$$

Ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles

Sustituyendo el estado de esfuerzos definido para un fluido newtoniano incompresible en la ecuación de Cauchy, se tiene

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho a_i$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$
$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

Para un fluido incompresible

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

Lo cual en notación general queda

$$-\nabla p + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho \mathbf{B} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \quad (7.6)$$

A la ecuación anterior se le conoce como ecuación de Navier-Stokes, la cual describe el movimiento de fluidos newtonianos incompresibles. Para este sistema vectorial de ecuaciones, las incógnitas están representadas por el campo de velocidades y la presión (v_1, v_2, v_3, p) , por esta razón se requiere una cuarta ecuación que es la de la continuidad (Conservación de masa)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

En coordenadas rectangulares las ecuaciones de Navier-Stokes quedan en la forma

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) v_1 + \rho B_1 = \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} v_3 \right)$$
$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) v_2 + \rho B_2 = \rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} v_3 \right)$$
$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) v_3 + \rho B_3 = \rho \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} v_3 \right)$$

EJERCICIO 7.7 Si todas las partículas de un fluido tienen sus vectores de velocidad paralelos a una dirección fija, el flujo se definirá como uniaxial.

Demuestre que para un flujo uniaxial de un fluido newtoniano incomprensible el esfuerzo normal compresivo en cualquier punto de cualquier plano paralelo y perpendicular a la dirección de flujo es p .

Considere que la dirección de flujo corresponde con el eje x_3 , por lo que las velocidades en dirección de x_1, x_2 serán igual a cero

$$\Rightarrow v_3 \neq 0; v_1 = v_2 = 0$$

De la ecuación de la continuidad

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = c$$

$$\Rightarrow v_3 = v(x_1, x_2; t)$$

$$\Rightarrow D_{11} = D_{22} = D_{33} = 0$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$$

Ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

Dado que en este caso las incógnitas son v_r, v_θ, v_z, p se requerirá emplear las ecuaciones de Navier-Stokes y la Ecuación de la continuidad, las cuales quedan

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot v) = 0$$

Como el fluido es incompresible

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Por lo que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rv_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

El gradiente del campo de velocidades queda

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Por su parte, la ecuación de Navier-Stokes en notación general se expresa

$$-\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) + \rho \mathbf{B} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \mathbf{v}) \right)$$

La divergencia de un tensor de segundo orden $(\nabla \cdot \mathbf{T})_{r,\theta,z}$ en coordenadas cilíndricas es

$$(\operatorname{div} \mathbf{T})_r = \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z}$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{T})_\theta = \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{T})_z = \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r}$$

donde, por analogía, se puede considerar que $\mathbf{T} = \nabla \mathbf{v}$

Sustituyendo lo antes expuesto en la ecuación de Navier-Stokes se tiene

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) + \rho B_r = \\
 & = \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \\
 & -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \rho B_\theta = \\
 & = \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \\
 & -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \rho B_z = \\
 & = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

Ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

Dado que en este caso las incógnitas son v_r, v_θ, v_ϕ, p se requerirá usar las ecuaciones de Navier Stokes y la Ecuación de la continuidad, las cuales quedan:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Como el fluido es incompresible

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Sea $\mathbf{v} = v(r, \theta, \phi)$ una función vectorial, entonces

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r}$$

$$\nabla \cdot v = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \sin \theta \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cos \theta \right) \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \end{bmatrix}$$

Por su parte, dado que la Ecuación de Navier-Stokes en notación general se expresa

$$-\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla v) + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v(\nabla v) \right)$$

La divergencia de un tensor de segundo orden $(\nabla \cdot T)_{r,\theta,\phi}$ en coordenadas esféricas está dada por

$$(\operatorname{div} T)_r = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial (r^2 T_{rr})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r}$$

$$(\operatorname{div} T)_\theta = \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial (r^3 T_{\theta r})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\theta} - T_{\theta r} - T_{\phi\phi} \cot \theta}{r}$$

$$(\operatorname{div} T)_\phi = \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial (r^3 T_{\phi r})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{\phi\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\phi} - T_{\phi r} + T_{\theta\phi} \cot \theta}{r}$$

Sustituyendo lo antes expuesto en la ecuación de Navier-Stokes se tiene

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial p}{\partial r} + \\
& \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + \\
& \rho B_r = \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) \\
& -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\
& \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + \\
& \rho B_\theta = \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) \\
& -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \\
& \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] + \\
& \rho B_\phi = \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\phi v_\theta \cot \theta}{r} \right)
\end{aligned}$$

7.6 LÍNEAS DE TRAYECTORIA Y LÍNEAS DE CORRIENTE

Para la mecánica de fluidos es necesario disponer de una representación visual de un campo de flujo, tal representación se puede realizar a través de la descripción de las trayectorias de las partículas del fluido.

Una **línea de trayectoria** está constituida por la curva que se traza a través del movimiento de una partícula, esto es, si se pretendiera determinarla físicamente habría que tomar una imagen del flujo (empleando por ejemplo tinta o colorante) durante un intervalo de tiempo,

obteniendo así la descripción de la trayectoria. Matemáticamente, la línea de trayectoria de una partícula la cual estaba en X para un tiempo t_0 puede ser obtenida a partir del campo de velocidad $v(x, t)$. Si $x = x(t)$ es la línea de trayectoria, entonces

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t)$$

$$x(t_0) = X$$

EJERCICIO 7.8 Para el campo de velocidades descrito por

$$v_1 = \frac{2x_1}{(2t+1)}; \quad v_2 = 0; \quad v_3 = cx_3$$

Determine la línea de trayectoria de una partícula $x = x(X_i, t_0)$, esto para el tiempo de referencia t_0 .

A partir de la definición de velocidad y considerando la relación entre coordenadas lagrangianas y eulerianas, se tiene que

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 = \frac{2x_1}{(2t+1)} \Rightarrow \int_{X_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \int_{t_0}^t \frac{2dt}{(2t+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Ln} \frac{x_1}{X_1} = \text{Ln} \frac{(2t+1)}{(2t_0+1)} \Rightarrow \quad x_1 = X_1 \frac{(2t+1)}{(2t_0+1)}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2 = 0 \Rightarrow \quad x_2 = X$$

$$\frac{dx_3}{dt} = v_3 = cx_3 \Rightarrow \quad \int_{X_3}^{x_3} \frac{dx_3}{x_3} = \int_{t_0}^t c dt$$

$$\therefore \quad \text{Ln} \frac{x_3}{X_3} = c(t-t_0) \Rightarrow \quad x_3 = X_3 e^{c(t-t_0)}$$

Las **líneas de corriente** son líneas dibujadas en el campo de flujo, de tal manera que en un instante dado se encuentran siempre tangentes a la dirección de flujo en cada punto del campo que describe éste. En otras palabras, una línea de corriente en un tiempo t es una curva cuya tangente en cualquier punto tiene la dirección instantánea del vector velocidad de la partícula en ese momento. Experimentalmente, estas líneas son obtenidas adicionando partículas reflejantes en el fluido al efectuar una toma fotográfica sobre la superficie del fluido con una apertura corta del obturador. Cada elemento reflejante produce una línea corta sobre el flujo, la cual se aproxima a la tangente de la línea de corriente. Matemáticamente, las líneas de corriente pueden ser obtenidas a partir del campo de velocidades $v(x, t)$.

Considere que $x = x(s)$ representa a la ecuación paramétrica para la línea de corriente al tiempo t , la cual pasa a través de un punto dado x_0 , entonces una s puede ser escogida tal que

$$\frac{dx}{ds} = v(x, t) \quad x(0) = x_0$$

El perfil de las líneas de corriente puede cambiar de un instante a otro si la velocidad del flujo es función del tiempo (flujo no establecido). Dado que las líneas de corriente son tangentes al vector velocidad de cada punto del flujo, el fluido nunca puede cruzar una línea de corriente.

EJERCICIO 7.9 Para el campo de velocidades descrito para el ejercicio 7.7, determine las líneas de corriente que pasan en el punto p :

$$p(p_1, p_2, p_3) \Rightarrow \frac{dx_i}{ds} = v(x, t) = \frac{2x_1}{(2t+1)} \hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + cx_3\hat{e}_3$$

$$\int_{p_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \int_0^s \frac{2ds}{(2t+1)} \quad \Rightarrow \quad x_1 = p_1 e^{\frac{2s}{(2t+1)}}$$

$$v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = p_2$$

$$v_3 = cx_3 = \frac{dx_3}{ds} = \int_{p_3}^{x_3} \frac{dx_3}{x_3} = \int_0^s cds$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = p_3 e^{cs}$$

Las líneas de trazo se definen al observar un punto en el espacio correspondiente al flujo, identificando todas las partículas que pasan a través de éste y que al unirlas dan lugar a dicha línea. Una línea de trazo a través de un punto fijo x_0 es la línea a un tiempo t , formada por todas las partículas que han pasado a través de x_0 para $\tau < t$. Considere que $X = X(x, t)$ denota la función inversa de $x = x(X, t)$, entonces la partícula que estaba en x_0 para un tiempo τ tiene las coordenadas materiales dadas por $X = X(x_0, \tau)$, por lo que la misma partícula está en $x = x(X(x_0, \tau), t)$ al tiempo t . Es entonces que la línea de trazo a un tiempo t está dada por $x = x(X(x_0, \tau), t)$ para un tiempo fijo t y variable τ .

EJERCICIO 7.10 Para el campo de velocidades descrito en los ejemplos anteriores

$$v_1 = \frac{2x_1}{(2t+1)}; \quad v_2 = 0; \quad v_3 = cx_3$$

Determine la línea de trazo formada por las partículas que pasan a través de la posición espacial $p(p_1, p_2, p_3)$.

Las ecuaciones de trayectoria fueron determinadas en el ejercicio 7.7, quedando:

$$x_1 = X_1 \frac{(2t+1)}{(2t_0+1)}$$

$$x_2 = X_2$$

$$x_3 = X_3 e^{c(t-t_0)}$$

las cuales tienen las funciones inversas

$$X_1 = x_1 \frac{(2t_0+1)}{(2t+1)}$$

$$X_2 = x_2$$

$$X_3 = x_3 e^{-c(t-t_0)}$$

Entonces, la partícula que pasa a través de la coordenada $p(p_1, p_2, p_3)$ a un tiempo τ está dada por

$$X_1 = p_1 \frac{(2t_0 + 1)}{(2\tau + 1)}$$

$$X_2 = p_2$$

$$X_3 = p_3 e^{-c(\tau - t_0)}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de trayectoria, se obtiene la ecuación paramétrica para las líneas de trazo

$$x_1 = p_1 \frac{(2t + 1)}{(2\tau + 1)}$$

$$x_2 = p_2$$

$$x_3 = p_3 e^{c(t - \tau)}$$

7.7 FLUJO ESTABLECIDO Y FLUJO TRANSITORIO

El flujo denominado como establecido es aquel en el cual para cualquier localización física las condiciones no cambian en el tiempo. En un flujo establecido las líneas de corriente, de trayectoria y de trazo no cambian con el tiempo. Un flujo transitorio por su parte se caracteriza en que ya sea la velocidad, aceleración o temperatura cambian con el tiempo.

Por ejemplo, sea ψ una variable cualquiera en un flujo transitorio $\frac{\partial \psi}{\partial t} \neq 0$.

7.8 FLUJO LAMINAR Y FLUJO TURBULENTO

Los flujos viscosos se pueden clasificar en laminares o turbulentos, de acuerdo con sus condiciones de movimiento. El flujo laminar se caracteriza en que el movimiento se da en

capas, de tal forma que no existe mezcla entre las líneas de corriente. Se trata de un flujo muy ordenado en el cual las partículas que fluyen se desplazan formando finas capas. Este tipo de flujo se relaciona fundamentalmente con condiciones de baja velocidad. Experimentalmente en este caso, si se inyecta tinta en el seno de la corriente se tendrá que no existe mezcla, manteniéndose en el tiempo, separado el marcador del resto de la corriente. En un flujo turbulento se presentan movimientos tridimensionales aleatorios de las partículas del fluido. Si se inyecta tinta a un flujo turbulento, se tendrá que ésta rápidamente se dispersa en todo el campo del flujo.

Para el caso de agua fluyendo en un conducto de sección circular, Reynolds observó que un parámetro adimensional (conocido ahora como número de Reynolds) $N_R = \bar{v} \rho d \mu^{-1}$ [\bar{v} , velocidad promedio; d , diámetro del tubo; ρ, μ densidad y viscosidad del fluido] describía las condiciones del flujo, de tal forma que para valores menores del orden de 2100, el flujo se presentaba en capas, y donde un filamento de colorante introducido en el fluido permanecía intacto. En dicho caso, cualquier alteración en el flujo es rápidamente eliminada. Si N_R se incrementa, el flujo se vuelve sensible a la presencia de pequeñas perturbaciones, de tal manera que se llega al punto en que el filamento de colorante introducido al flujo se rompe, mezclándose con la totalidad del flujo. A este fenómeno se le denomina como flujo turbulento. Las condiciones en las cuales se presenta un flujo turbulento son difíciles de precisar con exactitud, dependiendo entonces de la alteración que se genere.

Dada la complejidad de su análisis, en primera instancia se procederá a estudiar la dinámica de los fluidos considerando flujos laminares, por consecuencia, los resultados obtenidos estarán limitados a dichas condiciones y definidos por su número de Reynolds característico.

7.9 FLUJO DE COUETTE

En este apartado se va a analizar un flujo uniaxial entre dos placas planas semi-infinitas (véase la figura 7.5). El flujo se considera uniaxial y se presenta en dirección de x_1 cuando la placa superior se mueve a una velocidad v . Dado que el movimiento del fluido es uniaxial, entonces $v_1 = f(x_2), v_2 = v_3 = 0$. Se trata de un fluido Newtoniano incompresible por lo que la ecuación de la continuidad queda $\nabla \cdot v = 0$; y a partir de las ecuaciones de la continuidad y de Navier-Stokes, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = 0 \quad \therefore \quad v_1 = ax_2 + b$$

Resulta por demás evidente que los valores de las constantes a y b estarán determinados por la posición en que se coloque el sistema de referencia; si el origen se coloca en la placa inferior, tal como se muestra en la figura, se tiene que $v_1 = 0$ para $x_2 = 0$ y $v_1 = v$ para $x_2 = d$, es entonces que

$$v_1(x_2) = \frac{vx_2}{d}$$

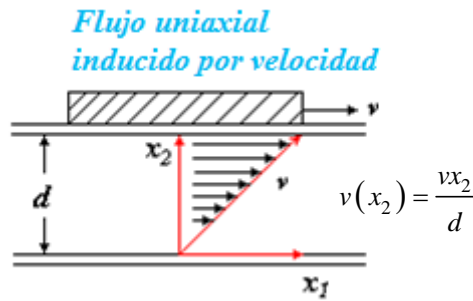


FIGURA 7.5 FLUJO UNIAxIAL ENTRE PLACAS PLANAS SEMI-INFINITAS INDUCIDO POR VELOCIDAD (FLUJO DE COUETTE)

7.10 FLUJO UNIAxIAL PRODUCIDO POR PRESIÓN (FLUJO DE POISEUILLE)

El flujo denominado como de Poiseuille se describe como un flujo uniaxial inducido por presión, el cual se produce entre dos placas planas semi-infinitas (figura 7.6), donde la presión $p = p(x_1)$ (figura 7.7).

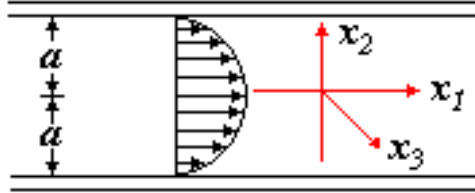
De acuerdo con lo observado, se tiene que:

$$v_1 = f(x_2)$$

$$v_2 = v_3 = 0$$

$$v_1(0) = v_{\text{máx}}$$

$$v_1(a) = v_1(-a) = 0$$

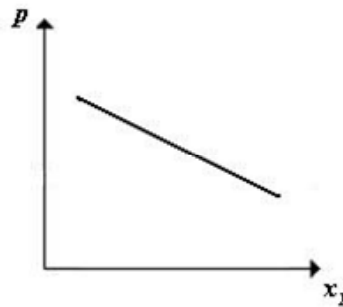
**FIGURA 7.6** FLUJO UNIAxIAL ENTRE PLACAS SEMI-INFINITAS, INDUCIDO POR PRESIÓN

Ecuación de Navier-Stokes considerando flujo establecido:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$$

**FIGURA 7.7** PERFIL DE PRESIÓN

No se consideran fuerzas de cuerpo $B_1 = B_2 = B_3 = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \alpha$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = \frac{\alpha}{\mu}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\alpha}{\mu} x_2 + c_1$$

$$0 = \frac{\alpha}{\mu} a^2 + 0 + 2c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{\alpha}{2\mu} a^2$$

$$v_1 = \frac{\alpha}{2\mu} x_2^2 + c_1 x_2 + c_2$$

$$0 = 0 + 2c_1 a + 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

Para la condición de frontera en $x_2 = 0$, $v_1 = v_{\text{máx}} \Rightarrow \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$

$$0 = 0 + 2c_1 a + 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

y en $x_2 = a$, $v_1 = 0$

$$0 = \frac{\alpha}{\mu} a^2 + 0 + 2c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{\alpha}{2\mu} a^2$$

$$v_1(a) = 0 = \frac{\alpha}{2\mu} a^2 + c_1 a + c_2$$

$$v_1(-a) = 0 = \frac{\alpha}{2\mu} a^2 - c_1 a + c_2$$

De lo anterior se tiene que

$$v_1(x_2) = \frac{\alpha}{2\mu} x_2^2 - \frac{\alpha}{2\mu} a^2$$

$$v_1(x_2) = \frac{\alpha}{2\mu} (x_2^2 - a^2) \quad \Rightarrow \quad v_1(x_2) = -\frac{\alpha}{2\mu} (a^2 - x_2^2)$$

$$\therefore \quad v_1(x_2) = \frac{1}{2\mu} (a^2 - x_2^2) \left[-\frac{\partial p}{\partial x_1} \right]$$

De lo cual se concluye que la velocidad del flujo $v_1(x_2)$ es proporcional a $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ y se presenta

en sentido contrario a la dirección de crecimiento del gradiente; por otra parte, la velocidad

máxima del flujo se presenta en el plano medio entre ambas placas semi-infinitas y está

dada por; $v_{\text{máx}} = \frac{a^2}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)$, por lo que el gasto volumétrico \dot{V} se puede describir como

$$\dot{V} = \int_{-a}^a w v_1(x_2) dx_2 = w \frac{\alpha}{\mu} \frac{2a^3}{3}$$

donde w representa el ancho de las placas, y la velocidad promedio \bar{v} se describe a través de

$$\bar{v} = \frac{1}{a} \int_0^a v_1(x_2) dx_2 = \frac{\alpha}{\mu} \frac{a^2}{3}$$

EJERCICIO 7.11 Para el mismo flujo uniaxial descrito en la figura 7.4, determine la presión en el punto A .

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + z_B$$

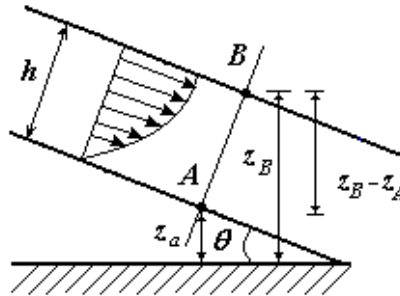


FIGURA 7.8 CAMPO DE VELOCIDADES DEL FLUJO EN UN CANAL INCLINADO

De la figura queda

$$p_A = p_{atm} + \rho g (z_B - z_A)$$

$$p_A = p_{atm} + \rho g h \cos \theta$$

donde p_{atm} representa a la presión atmosférica.

Por otra parte, no existe restricción al movimiento del fluido en la superficie superior, por lo que su velocidad será máxima. ¿Cómo son las velocidades para el fondo del canal inclinado y en la superficie libre del flujo?

El fondo del canal no presenta movimiento por lo que la velocidad en este plano es nula; por ¿Cómo será el perfil de velocidades?

Dado que las paredes del canal están inmóviles, lo que genera el movimiento del fluido es la diferencia de presión debida a la inclinación del canal, razón por la que se trata de un flujo de Poiseuille (inducido por presión) por lo que el perfil de velocidades es parabólico, tal como se observa en la figura 7.8.

7.11 FLUJO INDUCIDO POR PRESIÓN A TRAVÉS DE UN CONDUCTO DE SECCIÓN CIRCULAR (TUBO)

Este flujo también denominado como de Hagen-Poiseuille, se describe como un flujo uniaxial, axisimétrico inducido por presión. Resulta evidente que el análisis se facilitará si éste se realiza en coordenadas cilíndricas. De lo antes expuesto se tiene que:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = v_z(r)$$

$$v(0) = v_{\text{máx}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$$

$$v(R) = 0$$

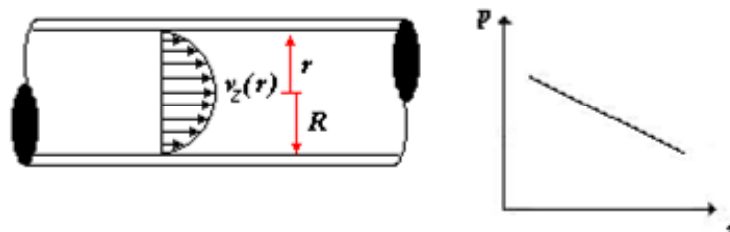


FIGURA 7.9 PERFIL DE VELOCIDADES PARA UN FLUJO DE HAGEN-POISEUILLE.
LA PRESIÓN ES FUNCIÓN LINEAL DE z

Ecuación de la continuidad, considerando que se trata de un fluido incompresible

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Resulta entonces que la divergencia del campo de velocidades se expresa

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

De lo antes expuesto se concluye que

$$v_r = v_\theta = 0; \quad \therefore \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

En virtud de que el gradiente del campo de velocidades descrito en coordenadas cilíndricas está dado por

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Considerando la ecuación de Navier Stokes correspondiente al eje z

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \rho B_z = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

Ésta se simplifica al ser un flujo establecido ya que

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Además de que $v_z = v(r)$.

Por consecuencia la ecuación de Navier-Stokes para el eje z se reduce a

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0$$

La ecuación se puede simplificar considerando

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \right]$$

Por lo que la ecuación se presenta como

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) = 0$$

El gradiente de presión se describe

$$\alpha = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

Entonces, despejando

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = -\frac{\alpha r}{\mu}$$

e integrando

$$r \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\alpha r^2}{2\mu} + c_1$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\alpha r}{2\mu} + \frac{c_1}{r}$$

$$v_z = -\frac{\alpha r^2}{4\mu} + c_1 \ln r + c_2$$

De las condiciones de frontera, tenemos

$$\text{Para } r = 0 \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0, \text{ dado que } v_z = v_{\text{máx}}$$

$$0 = -\frac{\alpha r^2}{2\mu r} + \frac{2\mu c_1}{2\mu r} \quad \Rightarrow \quad 0 = \alpha r^2 - 2\mu c_1$$

$$\therefore \quad c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_z(r) = -\frac{\alpha r^2}{4\mu} + c_2$$

$$v_z = 0 \text{ para } r = R \Rightarrow$$

$$c_2 = \frac{\alpha}{\mu} \left(\frac{R^2}{4} \right)$$

de lo cual se concluye que

$$v_z(r) = \frac{\alpha}{4\mu} (R^2 - r^2) = \frac{1}{4\mu} (R^2 - r^2) \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

La máxima velocidad se presenta en el centro del tubo $r = 0$, por lo que está dada por

$$v_{z\text{máx}} = \frac{d^2}{16\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

donde d es el diámetro del tubo.

La velocidad promedio queda

$$\bar{v} = \frac{4}{\pi d^2} \int_A v_z dA = \frac{d^2}{32\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{v_{z\text{máx}}}{2}$$

Por lo que el gasto volumétrico se describe por $\dot{V} = \bar{v}A$

$$\Rightarrow \quad \dot{V} = \frac{\pi d^2}{4} \bar{v} = \frac{\pi d^4}{128\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

EJERCICIO 7.11 Análisis del flujo inducido por velocidad (Coutte) para dos capas de fluidos newtonianos incompresibles, cuyo movimiento corresponde a un flujo laminar en régimen permanente.

Se tienen dos capas, con espesores d_1, d_2 (figura 7.10) que corresponden a fluidos newtonianos incompresibles con viscosidad μ_1, μ_2 , los cuales se encuentran entre dos placas paralelas y semi-infinitas. Considerando que las placas se desplazan entre sí, determine el perfil de velocidades correspondiente. Para el análisis desprecie el efecto de las fuerzas de cuerpo.

Para ambas capas

$$v_1 = f(x_2)$$

$$v_2 = v_3 = 0$$

$$\nabla p = 0$$

Considere que el origen del sistema coordenado se establece en la interfase entre ambas capas.

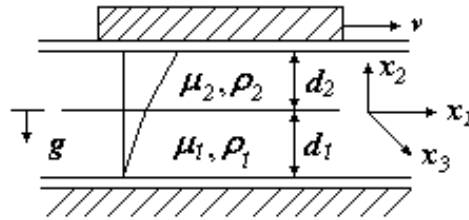


FIGURA 7.10 MOVIMIENTO UNIAxIAL INDUCIDO POR VELOCIDAD EN DOS CAPAS DE FLUIDOS NEWTONIANOS INCOMPRESIBLES

Para la capa 1, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a

$$\mu_1 \frac{\partial^2 v_1^1}{\partial x_2^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_1^1}{\partial x_2} = \text{cte}$$

$$\therefore \quad v_1^1 = ax_2 + b$$

$$\text{para } x_2 = -d_1 \quad \Rightarrow \quad v_1^1 = 0$$

$$\therefore \quad 0 = -ad_1 + b \quad \Rightarrow \quad b = ad_1$$

$$\therefore \quad v_1^1(x_2) = ax_2 + ad_1$$

Realizando el mismo análisis para la capa 2

$$\mu_2 \frac{\partial^2 v_1^2}{\partial x_2^2} = 0 \quad v_1^2(x_2) = cx_2 + f$$

Para $x_2 = d_2 \Rightarrow v_1^2 = v_p$ (velocidad de la placa)

Analizando en la interfase ($x_2 = 0$) las velocidades deberán ser iguales (no existe deslizamiento):

$$v_1^2(0) = v_1^1(0) \neq 0$$

Para la capa 2 en contacto con la pared móvil

$$v_1^2(d_2) = v_p = cd_2 + f \quad \Rightarrow \quad f = v_p - cd_2$$

$$v_1^2(x_2) = (v_p - cd_2) + cx_2 = c(x_2 - d_2) + v_p$$

$$v_1^2(0) = v_1^1(0) \Rightarrow c(0 - d_2) + v_p = a(0 + d_1)$$

$$\therefore v_p = cd_2 + ad_1$$

En virtud de existir equilibrio de fuerzas en la interfase, los esfuerzos de corte definidos en el seno de cada fluido (evaluados estos en la interfase) serán iguales:

$$\sigma_{12}^1 = \sigma_{12}^2$$

$$\sigma_{12}^1 = 2\mu_1 D_{12}^1 = 2\mu_1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2^1}{\partial x_1} \right) \right)$$

D - velocidad de deformación

$$\sigma_{12}^2 = 2\mu_2 D_{12}^2$$

$$\sigma_{12}^1 = \mu_1 \frac{\partial v_1^1}{\partial x_2} \quad ; \quad v_1^1 = ax_2 + ad_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial v_1^1}{\partial x_2} = a; \quad \Rightarrow \quad \sigma_{12}^1 = \mu_1 a \quad \therefore \quad a = \frac{\sigma_{12}^1}{\mu_1}$$

$$\sigma_{12}^2 = \mu_2 \frac{\partial v_1^2}{\partial x_2}; \quad v_1^2 = cx_2 + \frac{d_1}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial v_1^2}{\partial x_2} = c; \quad \therefore \quad c = \frac{\sigma_{12}^2}{\mu_2}$$

En la interfase los esfuerzos de corte son iguales, por lo que:

$$\sigma_{12}^1 = \sigma_{12}^2 = a\mu_1 = c\mu_2$$

$$\therefore \quad c = \frac{\mu_1}{\mu_2} a$$

Para la capa 1

$$v_1^1 = a(x_2 + d_1)$$

Para la capa 2

$$v_1^2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} a(x_2 - d_2) + v_p$$

Como ya se mencionó, en la interfase las velocidades son iguales ya que se considera que no hay deslizamiento entre los fluidos

$$v_1^1 = v_1^2 = a(x_2 + d_1) = \frac{\mu_1}{\mu_2} a(x_2 - d_2) + v_p$$

$$ad_1 = -\frac{\mu_1}{\mu_2} ad_2 + v_p \quad a \left(d_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} d_2 \right) = v_p \quad a = \frac{v_p}{d_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} d_2}$$

$$\therefore \quad v_1^1(x_2) = \frac{v_p \mu_2}{\mu_2 d_1 + \mu_1 d_2} (x_2 + d_1)$$

$$y \quad v_1^2(x_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{v_p \mu_2}{\mu_2 d_1 + \mu_1 d_2} (x_2 - d_1) + v_p$$

$$\therefore \quad v_1^2 = \frac{v_p \mu_1}{\mu_2 d_1 + \mu_1 d_2} (x_2 - d_1) + v_p$$

7.12 FLUJO INDUCIDO POR VELOCIDAD ENTRE DOS CILINDROS CON LONGITUD INFINITA

Al flujo laminar bidimensional, en estado estable, de un fluido newtoniano incompresible entre cilindros concéntricos de longitud infinita se le denomina como **flujo de Couette** para una base en coordenadas cilíndricas. Para el análisis de este caso considere dos cilindros concéntricos, de radios r_1, r_2 y altura infinita h , tal como se muestra en la figura 7.11; éstos giran a velocidades angulares constantes (ω_1, ω_2). De un primer análisis resulta evidente que el flujo se puede describir como uniaxial e inducido por velocidad, de tal forma que si el origen se define en el centro del arreglo se tendrá que

$$v_r = v_z = 0; \quad v_\theta = v(r)$$

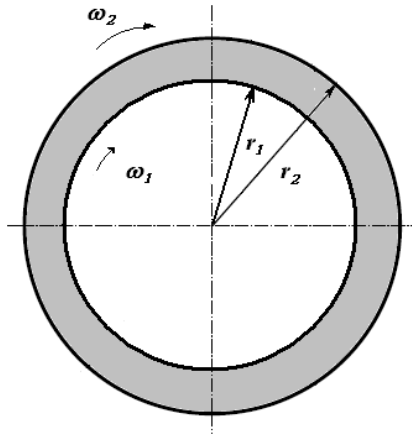


FIGURA 7.11 MOVIMIENTO DE UN FLUIDO NEWTONIANO INCOMPRESIBLE ENTRE DOS CILINDROS COAXIALES

Al tratarse de un fluido incompresible, la ecuación de la continuidad se expresa como

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

De lo que se tiene que

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0,$$

situación que resulta evidente al tratarse de un flujo establecido; por otra parte, de las ecuaciones de Navier-Stokes se tiene para el eje θ

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \rho B_\theta =$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right)$$

El sistema se simplifica en virtud de que se realizan las siguientes consideraciones:

- a. Flujo establecido
- b. Se desprecia el efecto de las fuerzas de cuerpo
- c. El flujo es inducido por velocidad
- d. El gradiente de presión es igual a cero

Es por consecuencia que se reduce a

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} = 0$$

La solución de la ecuación diferencial está dada por

$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

Por lo que

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = A - \frac{B}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} = \frac{2B}{r^3}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se comprueba la validez de la solución planteada

$$\frac{2B}{r^3} + \frac{1}{r} \left(A - \frac{B}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \left(Ar + \frac{B}{r} \right) = 0$$

$$\frac{2B}{r^3} + \frac{A}{r} - \frac{B}{r^3} - \frac{A}{r} - \frac{B}{r^3} = 0$$

Demostrada la solución se tiene que las velocidades en cada cilindro concéntrico están dadas por

$$r = r_1, v_\theta(r_1) = \omega_1 r_1 \quad \Rightarrow \quad v_\theta(r_1) = \omega_1 r_1 = A r_1 + \frac{B}{r_1}$$

$$r = r_2, v_\theta(r_2) = \omega_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad v_\theta(r_2) = \omega_2 r_2 = A r_2 + \frac{B}{r_2}$$

Por lo que, considerando las condiciones de frontera, se llega a que las constantes de integración están dadas por

$$A = \frac{w_2 r_2^2 - w_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{y} \quad B = \frac{r_1^2 r_2^2 (w_1 - w_2)}{r_2^2 - r_1^2}$$

Por otra parte, a través de lo expuesto se pueden calcular fácilmente los esfuerzos de corte en la pared de cualquiera de los cilindros y, por consecuencia, es posible calcular el momento transmitido para hacer girar éstos. Se concluye, por último, que dicho momento es función de la viscosidad del fluido y de las características geométricas y dimensionales del arreglo, por lo que el sistema en análisis puede ser empleado fácilmente para determinar la viscosidad del fluido.

La velocidad de deformación en coordenadas cilíndricas se expresa como

$$Dr_{\theta z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right] + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ D_{\theta r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \\ D_{zr} & D_{z\theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Como para el caso en estudio

$$v_r = 0, \quad v_z = 0, \quad v_\theta = v(r)$$

Para el caso analizado, el tensor de velocidad de deformación se reduce a

$$Dr_{\theta z} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que el campo de velocidades se expresa como

$$v_{\theta}(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

de lo que se tiene

$$\frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} = A - \frac{B}{r^2}$$

Por consecuencia,

$$\Rightarrow D_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(A - \frac{B}{r^2} - \frac{1}{r} \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \right) = -\frac{2B}{2r^2} = -\frac{B}{r^2}$$

$$D_{r\theta} = -\frac{B}{r^2}$$

Por otra parte, los esfuerzos viscosos se expresan

$$\sigma'_{r\theta z} = \lambda(\nabla \cdot v)I + 2\mu D$$

Entonces, el tensor de esfuerzos queda

$$\sigma'_{r\theta z} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \left(\frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} \right) & 0 \\ \mu \left(\frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$\sigma'_{\theta r} = \sigma'_{r\theta} = 2\mu \frac{B}{r^2}$$

Considerando, por ejemplo, el cilindro exterior, el esfuerzo de corte que existe entre éste y el fluido viscoso está dado por

$$\sigma_{\theta r} = 2\mu \frac{B}{r_2^2}$$

La fuerza aplicada estará dada por la integral de dicho esfuerzo a través del área de contacto, de tal forma que

$$f = \int_A \sigma_{\theta r} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^z \frac{2\mu B}{r_2^2} r d\theta dz$$

$$f = 4\mu\pi \frac{B}{r_2} z$$

Por consecuencia, el par aplicado al sistema para producir el movimiento será

$$T = fd = 4\mu\pi \frac{B}{r_2} r_2 z$$

$$T = 4\mu\pi Bz$$

donde éste queda en función de los parámetros geométricos a través de los cuales se define la constante B , por consecuencia se puede determinar la viscosidad a través de evaluar el par aplicado

$$\Rightarrow \mu = \frac{T}{4\pi Bz}$$

7.13 FLUJO ROTACIONAL E IRROTACIONAL

Durante su movimiento los fluidos pueden describir un flujo rotacional, donde, la rapidez de rotación $\dot{\omega}$ de una partícula de un fluido se define como la velocidad angular promedio de dos segmentos de línea, los cuales son mutuamente perpendiculares.

Dado que el gradiente de velocidad ∇v es un tensor de segundo orden, entonces éste se puede descomponer en su parte simétrica, la que describe al tensor de rapidez de deformación D , y su componente no simétrica, la cual representa la rapidez de rotación $\dot{\omega}$

$$\nabla v = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T) + \frac{1}{2}(\nabla v - (\nabla v)^T)$$

$$\frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T) = D$$

$$\frac{1}{2}(\nabla v - (\nabla v)^T) = \dot{\omega}$$

A partir de lo anterior se define el vector de vorticidad φ que, en notación índice y con auxilio del permutador, se representa de la forma siguiente:

$$\varphi_i = -2\varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_{jk}$$

$$\varphi_i = -2(\dot{\omega}_{23}\hat{e}_1 + \dot{\omega}_{31}\hat{e}_2 + \dot{\omega}_{12}\hat{e}_3)$$

$$\varphi_i = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\hat{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\hat{e}_3$$

Por tanto, el vector de vorticidad φ está dado por el rotacional del campo de velocidades (v). Para un sistema coordenado rectangular (cartesiano) se tiene que el rotacional del campo de velocidades se describe como

$$\varphi_i = \text{Rot } v_i = \nabla \times v = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\hat{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\hat{e}_3$$

Por su parte, a partir de que el rotacional está dado por la componente antisimétrica del gradiente de velocidades se tiene que en coordenadas cilíndricas se expresa como

$$\varphi_{r,\theta,z} = \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \hat{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{v_\theta}{r} \right) \hat{e}_z$$

Mientras que, en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \varphi_{r,\theta,z} = & \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{v_\phi \cot \theta}{r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) - \frac{v_\phi}{r} - \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right) \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

Flujo irrotacional

Se caracteriza porque $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, esto es, las partículas que constituyen el flujo se mueven sin presentar rotación, es por consecuencia que la condición antes expresada se deberá cumplir, respectivamente, en cualquiera que sea la base, cilíndricas y esféricas. Por tanto, se tiene que

$$\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{v_\theta}{r} \right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{v_\phi \cot \theta}{r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) - \frac{v_\phi}{r} - \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right) = 0$$

Es entonces que el vector de vorticidad φ asociado a un flujo irrotacional deberá ser nulo

$$\varphi_i = 0$$

Los flujos irrotacionales se caracterizan en virtud de que pueden ser descritos con auxilio de una función escalar ($\eta = \eta(x_1, x_2, x_3)$), tal que

$$\mathbf{v} = -\nabla \eta$$

$$v_i = -\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \hat{e}_i$$

$$\therefore \quad v_1 = -\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \hat{e}_1; \quad v_2 = -\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \hat{e}_2; \quad v_3 = -\frac{\partial \eta}{\partial x_3} \hat{e}_3$$

El vector de vorticidad $\boldsymbol{\varphi}$ (para coordenadas rectangulares) queda

$$\boldsymbol{\varphi}_i = -\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_3} \right) \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) \right) \hat{e}_3 \right]$$

Por lo tanto, siempre que el flujo se pueda representar por una función escalar η tal que $v_i = -\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \hat{e}_i$, entonces será un flujo irrotacional, donde la función $\eta(x_1, x_2, x_3, t)$ define un flujo irrotacional.

Considerando la ecuación de la continuidad para un fluido incompresible e irrotacional, ésta se expresa como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$\nabla^2 \eta = 0$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_3^2} = 0$$

Estado de esfuerzos para un flujo irrotacional de un fluido incompresible de densidad homogénea

El estado de esfuerzos en un fluido Newtoniano se expresa como

$$\sigma = -pI + \sigma'$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} = \lambda \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}$$

donde σ' representa a los esfuerzos viscosos, si el fluido es incompresible $\dot{\epsilon}_{kk} = 0$, por lo que el estado esfuerzos para un fluido newtoniano incompresible queda:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \dot{\epsilon}_{ij}$$

Si se considera que el flujo es irrotacional, entonces es posible describir el campo de velocidades a través de una función escalar $v = -\nabla \eta$, tal como se explicó anteriormente, entonces sustituyendo ahora en la ecuación de Navier-Stokes

$$-\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla v) + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v(\nabla v) \right)$$

se tiene que

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j^2} \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

Dado que el fluido es incompresible, la ecuación de la continuidad se expresa

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i^2} = 0; \quad \text{o} \quad \nabla^2 \eta = 0$$

De lo que se desprende que el término que representa el efecto de la viscosidad del fluido es igual a cero, por lo que la ecuación se reduce a

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

En notación general queda

$$-\nabla p + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v(\nabla v) \right)$$

Dicha ecuación corresponde con la ecuación de Euler, la cual describe el comportamiento de un fluido viscoso e incompresible.

7.14 FUNCIONES DISIPATIVAS EN FLUIDOS NEWTONIANOS

La rapidez de trabajo (potencia) $\frac{DW}{Dt} = P$ desarrollada por las fuerzas (de cuerpo y de superficie) aplicadas sobre el MC se ha demostrado que se puede descomponer en:

$$\frac{DW}{Dt} = \frac{D}{Dt}(EC) + P_S dV$$

$$P_S = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

donde el término P_S representa la potencia desarrollada para cambiar la forma y dimensiones de la partícula de volumen diferencial (elemento diferencial de volumen), y

$\frac{D}{Dt}(EC)$ representa la rapidez de cambio de la energía cinética asociada al elemento.

En el caso de un fluido incompresible, el término P_S se puede expresar

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Dado que se trata de un fluido incompresible

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\therefore \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\sigma'_{ij} = \lambda D_{ii} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

Antes de continuar es conveniente recordar que para describir la velocidad de deformación se emplea en este texto

$$D_{ij} \equiv \dot{\epsilon}_{ij}$$

Como se trata de un fluido incompresible

$$D_{ii} = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 2\mu D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Por otra parte desarrollando, se tiene que

$$\begin{aligned} D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= D_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + D_{12} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + D_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + D_{21} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + D_{22} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + D_{23} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ &\quad + D_{31} \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + D_{32} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + D_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ D_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

Reagrupando y considerando que $D_{ij} = D_{ji}$ (el tensor de rapidez de deformación es simétrico)

$$\begin{aligned}
 D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= D_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + D_{12} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \right] + D_{13} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right] \\
 &\quad + D_{21} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \right] + D_{22} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + D_{23} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \right] \\
 &\quad + D_{31} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \right] + D_{32} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \right] + D_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\
 \therefore \quad D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= D_{ij} D_{ij} \\
 \Rightarrow \quad \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 2\mu D_{ij} D_{ij}
 \end{aligned}$$

Por lo que

$$P_S = 2\mu (D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2 + 2D_{12}^2 + 2D_{23}^2 + 2D_{31}^2)$$

El término P_S representa el trabajo realizado por unidad de volumen y por unidad de tiempo (el cual siempre será positivo), para cambiar la forma del elemento diferencial. Esta parte del trabajo realizado se acumula con el tiempo en función de la variación de la velocidad de deformación D_{ij} , entonces, la función ξ_{indis} (función de disipación) representa la velocidad con la que el trabajo se convierte en calor para un fluido newtoniano incompresible.

$$\xi_{indis} = 2\mu (D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2 + 2D_{12}^2 + 2D_{23}^2 + 2D_{31}^2) = 2\mu D_{ij} D_{ij}$$

Función disipativa para un fluido newtoniano compresible

Como

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

$$\Delta = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

La rapidez de trabajo desarrollado por los esfuerzos queda

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p\Delta + \lambda\Delta^2 + \xi_{indis} = -p\Delta + \xi$$

donde

$$\xi = \lambda(D_{11} + D_{22} + D_{33})^2 + \xi_{indis}$$

Lo anterior debido a que

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + 2\mu D_{ij} D_{ij}$$

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p\Delta + \lambda\Delta^2 + 2\mu D_{ij} D_{ij}$$

donde ξ_{discom} es la función disipativa para fluido compresible, la cual se puede representar también como

$$\xi_{discom} = \lambda(D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2) + \xi_{indis}$$

$$\xi_{indis} = 2\mu(D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2 + 2D_{12}^2 + 2D_{23}^2 + 2D_{31}^2)$$

$$\xi_{discom} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (D_{11} + D_{22} + D_{33})^2 + \frac{2}{3}\mu \left[(D_{11} - D_{22})^2 + (D_{33} - D_{11})^2 + (D_{22} - D_{33})^2 \right]$$

$$+ 4\mu(D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{23}^2)$$

Resulta evidente que la función de disipación (rapidez con la que el trabajo se transforma en calor) asociada a un fluido compresible será siempre mayor que la correspondiente para un fluido incompresible.

7.15 DIFUSIVIDAD TÉRMICA

En el caso de difusión de una especie en un solvente se ha demostrado experimentalmente que existe una relación entre la concentración C del soluto en función de la posición x , y del tiempo, a dicha relación se le conoce como Segunda Ley de Fick y se expresa como

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[D \frac{\partial C}{\partial x_i} \right]$$

A partir de considerar que el coeficiente de difusión D no depende de la posición, esta ecuación se simplifica a

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C$$

De manera análoga se define una ecuación diferencial en derivadas parciales que relaciona la temperatura con la posición y el tiempo, empleando para esto un parámetro definido como difusividad térmica α . Para su determinación considérese la ecuación de conservación de energía, la cual en notación general se expresa

$$\rho \frac{Du}{Dt} - T \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho \dot{q}_s = 0$$

donde ρ representa la densidad, mientras que u es la energía interna; T o σ es el tensor de esfuerzos, \mathbf{q} es el calor por conducción y \dot{q}_s o \dot{h} representa la rapidez de generación de calor en el interior del medio continuo. Si solamente existe un flujo de calor por conducción, el cual sigue la Ley de Fourier $\mathbf{q} = -\kappa \nabla \theta$, donde θ representa la temperatura, κ es la

constante de conductividad térmica y la rapidez de generación de calor al interior del medio continuo es igual a cero; a partir de lo anterior se tiene que

$$\rho \frac{Du}{Dt} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

En notación general se tiene que

$$\rho \frac{Du}{Dt} - T \nabla \cdot \mathbf{v} - \kappa \nabla^2 \theta$$

Por otra parte, considerando la función de disipación para un fluido incompresible ξ_{indis} y que la energía interna es una función de la temperatura $u = c\theta$, donde c es el calor específico, entonces

$$\rho c \frac{D\theta}{Dt} - \xi_{indis} - \kappa \nabla^2 \theta = 0$$

donde la función de disipación representa la energía disipada como calor por efecto de las fuerzas viscosas. Existen, por otra parte, una gran cantidad de condiciones en las cuales la energía disipada es muy pequeña cuando se compara con la magnitud del flujo de calor, razón por la cual la ecuación se simplifica a

$$\rho c \frac{D\theta}{Dt} - \kappa \nabla^2 \theta = 0$$

Reordenando la ecuación, ésta se puede representar como

$$\frac{D\theta}{Dt} - \frac{\kappa}{\rho c} \nabla^2 \theta = 0$$

Sustituyendo $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}$ (difusividad térmica), por lo que

$$\frac{D\theta}{Dt} = \alpha \nabla^2 \theta$$

Ecuación similar a la de Fick, cuya solución, permite determinar la temperatura en función de posición y tiempo. La difusividad térmica es una nueva constante de proporcionalidad a la constante de conductividad térmica e inversamente proporcional al producto de la densidad por el calor específico (energía interna por unidad de volumen).

7.16 FLUJO IRROTACIONAL DE UN FLUIDO NO VISCOSO DE DENSIDAD HOMOGÉNEA

Como ha sido mencionado anteriormente para el caso de un fluido no viscoso, el estado de esfuerzos T_{ij} se puede representar como $T_{ij} = -p\delta_{ij}$, de lo que la ecuación de conservación de cantidad de movimiento se expresa como

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

O, en notación general

$$-\nabla p + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right)$$

descripción que es conocida como Ecuación de Movimiento de Euler.

Ecuación de Bernoulli

Cuando se estudia un fluido no viscoso, incompresible y cuya densidad es homogénea, será siempre posible que se presente un flujo irrotacional. Considere que los campos son conservativos, de tal forma que el vector de fuerzas de cuerpo se puede desarrollar a partir de una función de potencial Ω , tal que; $B = -\nabla\Omega$. El caso más común es aquel en que el medio continuo se encuentra exclusivamente bajo el efecto de la fuerza de gravedad, considerando que el eje x_3 coincide con la vertical se tiene que $\Omega = gx_3$, por lo que $B_i = 0\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 - g\hat{e}_3$, por otra parte al tratarse un flujo irrotacional, $\nabla v = (\nabla v)^T$.

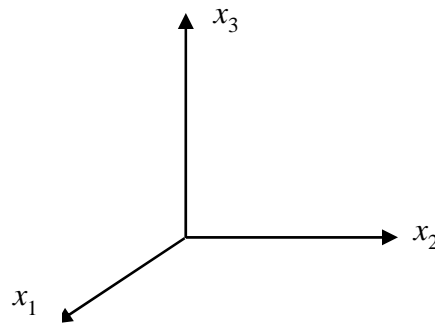


FIGURA 7.12 PARA LA DEFINICIÓN DE LAS FUERZAS DE CUERPO
EL EJE x_3 SE HACE COINCIDIR CON LA VERTICAL

Sustituyendo en la ecuación de Euler se tiene

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Por lo que, reordenando

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

Como

$$v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_j v_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j v_j$$

Además, para un flujo irrotacional el campo de velocidades se puede expresar a través de una función φ , tal que

$$v_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Es entonces que

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \rho \Omega + \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0$$

Por lo tanto, se puede concluir que

$$p + \rho \Omega + \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = k$$

donde k = constante con la posición

$$\Rightarrow p + \rho \Omega + \frac{1}{2} \rho v^2 = \rho f(t)$$

Si el flujo es establecido (estacionario) $\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{cte}$, por lo que

$$\left(\frac{p}{\rho} + \Omega + \frac{v^2}{2} \right) = \text{cte}$$

Lo que entonces permite deducir la ecuación de Bernoulli:

$$\left(p + \rho g x_3 + \rho \frac{v^2}{2} \right) = C$$

Siendo C una constante.

Esta expresión es muy útil en aquellos casos en que la viscosidad pueda ser despreciada o también cuando, como se demostrará más adelante, el flujo se idealice como irrotacional.

Ecuación de Torricelli

Considere ahora un fluido incompresible y no viscoso. De acuerdo con lo expuesto, si el flujo es estable se cumplirá con la ecuación de Bernoulli:

$$\left(p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g x_3 \right) = C$$

Ahora bien, si el nivel del recipiente (figura 7.13) permanece constante y la presión sobre el nivel del fluido es la misma que la de descarga, se cumplirá que

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

donde la condición 1 se refiere al plano de entrada (superficie del líquido en el tanque), mientras que la 2 se refiere a la descarga; además de lo anterior, se considera que el nivel del fluido en el tanque es constante por lo que $v_1 = 0$, por consecuencia

$$p_1 = p_2 = p_{atm} \quad \text{presión atmosférica}$$

$$v_1 = 0 \Rightarrow h_1 - h_2 = \Delta h \quad \text{diferencia de nivel}$$

$$\therefore v_2 = \sqrt{2g\Delta h}$$

La cual es conocida como **Ecuación de Torricelli**.

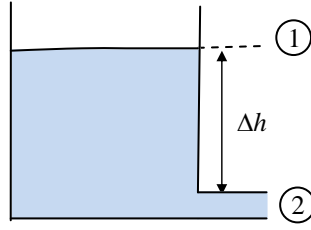


FIGURA 7.13 UN TANQUE CUYO NIVEL DE FLUIDO, CON RESPECTO A LA POSICIÓN DE DESCARGA, ES h PRESENTARÁ UNA VELOCIDAD DE SALIDA, LA CUAL ESTÁ DADA POR $v = \sqrt{2gh}$

Flujos irrotacionales como solución a la ecuación de Navier-Stokes

Considérese en primera instancia la ecuación de Navier Stokes para un fluido incompresible

$$-\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla v) + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right)$$

En notación índice, ésta queda

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + B_i \rho = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

El campo de velocidades para un flujo irrotacional se puede describir a partir de una función escalar η , tal que

$$-\frac{\partial \eta}{\partial x_i} = v_i$$

entonces, sustituyendo

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial x_j} \right)$$

Pero se ha demostrado que la ecuación de la continuidad (fluido incompresible) se expresa en la forma

$$\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial x_j} \right) = \nabla^2 \eta = 0$$

Por lo tanto, para un flujo irrotacional de un fluido Newtoniano incompresible se tiene

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(-\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial x_j} \right) + B_i \rho = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

Por lo que el término que representa los esfuerzos viscosos se hace cero, entonces la ecuación constitutiva se reduce a

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i \rho = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

la cual corresponde con la ecuación de Euler (para un fluido no viscoso).

Por lo tanto, todos los resultados desarrollados para flujos no viscosos corresponden también al caso de flujos irrotacionales. Sin embargo, en todo problema real existirán fronteras físicas en las cuales la velocidad del fluido será de cero (o la velocidad de la frontera) en virtud de que el fluido se adhiere a ésta. Es por consecuencia que la condición $v = -\nabla \phi$ no se podrá cumplir en las condiciones de frontera.

7.17 ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE VORTICIDAD PARA UN FLUIDO VISCOSO INCOMPRESIBLE DE DENSIDAD HOMOGÉNEA

La imposibilidad de que exista una función η , la cual se cumple para las paredes (frontera) que confinan el movimiento del fluido, da lugar a la existencia de vorticidad confinada a una capa adyacente a la frontera.

De nueva cuenta, retomando la ecuación de Navier-Stokes

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) + B = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Asimismo, sustituyendo de tal forma que $\psi = \mu / \rho$ (viscosidad cinemática) y que $B = -\nabla \Omega$, $\Omega = gx_3$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} + \Omega \right) + \psi \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Empleando el operador $\varepsilon_{mni} \frac{\partial}{\partial x_n}$ (tomando rotacional de ambos lados de la ecuación anterior):

$$\varepsilon_{mni} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_{mni} \frac{\partial v_i}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_m$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mni} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) &= \varepsilon_{mni} \frac{\partial v_j}{\partial x_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{mni} \frac{\partial v_i}{\partial x_n} \right) \\ &= \varepsilon_{mni} \frac{\partial v_j}{\partial x_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial \gamma_m}{\partial x_j} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{mni} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} + \Omega \right) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{p}{\rho} + \Omega \right) = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{mni} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\varepsilon_{mni} \frac{\partial v_i}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_m}{\partial x_j \partial x_j}$$

La ecuación de Navier Stokes toma entonces la siguiente forma

$$\frac{\partial \gamma_m}{\partial t} + v_j \frac{\partial \gamma_m}{\partial x_j} + \varepsilon_{mni} \frac{\partial v_j \partial v_i}{\partial x_n \partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \gamma_m}{\partial x_j \partial x_j}$$

Por otra parte, se puede demostrar que el tercer término del lado izquierdo de la ecuación es igual a cero, por lo que

$$\varepsilon_{mni} \frac{\partial v_j \partial v_i}{\partial x_n \partial x_j} = 0$$

$$\frac{D\gamma_m}{Dt} = \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \gamma_n + \nu \frac{\partial^2 \gamma_m}{\partial x_j \partial x_j}$$

Lo cual en forma invariante se expresa

$$\frac{D\gamma}{Dt} = (\nabla v) \gamma + \nu \nabla^2 \gamma$$

En una frontera sólida el fluido se adhiere, lo que da lugar a que las velocidades en esta interfase están definidas por la superficie. Los vórtices son generados en la superficie difundiendo al flujo. En algunos casos los vórtices quedan confinados a una capa delgada en la vecindad de la frontera, de tal forma que fuera de esta capa el flujo es irrotacional.

7.18 EL CONCEPTO DE CAPA LÍMITE

De lo que ha sido discutido con antelación se ha comprobado que las funciones que describen el comportamiento en un fluido viscoso y no viscoso son iguales, sin embargo, debido a la presencia de esfuerzos cortantes en el seno del fluido viscoso, la condición a ser satisfecha en las superficies rígidas de fronteras S , en contacto con el fluido viscoso son diferentes que el caso no viscoso. Para el caso del flujo del fluido viscoso, en la superficie de frontera S , la velocidad estará dada por v_S que representa la velocidad a la que se mueve la superficie. Si ésta se encuentra en reposo es evidente que $v_S = 0$. Sin embargo, las condiciones impuestas al fluido implican que la componente normal de la velocidad de éste sea la misma que la de la superficie sólida (en el punto de contacto), lo cual representa en sí una restricción a la componente tangencial. Esto en consecuencia representa que el fluido en contacto con la superficie sólida se deba mover en conjunción con dicha superficie, **lo cual representa que el fluido está adherido a la superficie y por consecuencia no**

puede deslizarse sobre ésta. Esta condición fue primero propuesta por Stokes, y es conocida como condición de no deslizamiento. Con la intención de satisfacer esta condición de frontera, Prandtl en 1905 propuso la hipótesis que en una zona muy cercana, adyacente a la superficie de la frontera, la velocidad relativa del fluido se incrementa muy rápido desde cero (en la frontera sólida) hasta la del flujo en la zona exterior de dicha zona. Esta delgada capa es denominada como *capa límite*, al interior de la cual los efectos de la viscosidad son predominantes. Fuera de ésta, las condiciones se pueden considerar como de un fluido no viscoso. Por consecuencia, los fenómenos disipativos se presentarán en dicha capa.

Ecuación de transporte de vorticidad para fluidos viscosos incompresibles de densidad constante (homogénea)

Se asume que las fuerzas de cuerpo son derivables a partir de una función de potencial (Ω)

$$B_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}$$

condición que aplicada a las ecuaciones de Navier-Stokes se expresa

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} + \Omega \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

como ya se mencionó, el término $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ representa la denominada viscosidad cinemática.

Flujo irrotacional como solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

Si bien en las ecuaciones de Navier-Stokes al considerar la descripción de un flujo irrotacional para el cual $v_i = -\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ y dado que a partir de la ecuación de la continuidad se

debe cumplir con $\nabla^2 \eta = 0$; $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_3^2}$

Esto se traduce en que las ecuaciones de Navier-Stokes se expresen en la forma

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla \cdot (\nabla v) + B = \frac{\partial v}{\partial t} + v\nabla v$$

En el caso de un fluido viscoso en flujo irrotacional, la ecuación, como se ha demostrado con antelación, se transforma en la ecuación de Euler, la cual corresponde a un flujo no viscoso.

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p + B = \frac{\partial v}{\partial t} + v\nabla v$$

Los resultados indican que un flujo irrotacional no es factible (dinámicamente posible) para una situación en donde se presentan fronteras sólidas. Un fluido viscoso se adhiere a las fronteras de tal forma que las componentes normal y tangencial de la velocidad del fluido corresponderán a la frontera. Esto representa que las componentes de la velocidad están predefinidas en la frontera. Por ejemplo, si $y = 0$ representa a la frontera sólida la cual se encuentra en reposo, entonces en ésta las componentes tangenciales $v_x = v_z = 0$ y la componente normal $v_y = 0$. Para un flujo irrotacional las condiciones preestablecidas η (función de flujo) en la frontera son $\eta = \text{constante}$ para $y = 0$ lo mismo que $v_x = v_z = 0$

$$\eta = k$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

$$v_2 = 0 \quad \forall \quad y = 0$$

Pero es conocido que en general no existe solución para la ecuación de Laplace $\nabla^2 \eta = 0$

cuando $\eta = k$ y $\nabla \eta \cdot n = \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$ en las fronteras del sistema. En consecuencia, a menos que

las condiciones en las fronteras del sólido tiendan a ser consistentes con las condiciones de irrotacionalidad, se presentará la formación de vórtices en las fronteras, los cuales tenderán a propagarse en el seno del fluido de acuerdo con ciertas restricciones. En condiciones adecuadas, la vorticidad generada por las fronteras sólidas es confinada a una capa delgada de fluido en la vecindad de la frontera, de tal forma que el exterior de la capa de flujo es irrotacional. Dicha capa a la cual se limita la presencia de vórtices se denomina como **capa límite**.

Demostración de la imposibilidad de cumplimiento de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \theta = 0$$

Considere un problema de conducción de calor en estado estable. Un fluido se encuentra en reposo entre dos placas de dimensiones infinitas. La placa inferior se encuentra a una temperatura constante θ_l y la superior, a θ_n .

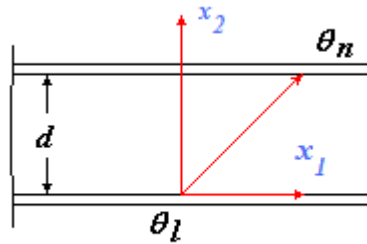


FIGURA 7.14 LA TEMPERATURA VARÍA EN FORMA LINEAL ENTRE LAS DOS PLACAS

La distribución de temperaturas en estado estable, de acuerdo con la ecuación de Laplace

es
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} = 0$$

que en el caso en estudio se reduce a

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = c \quad \theta = c_1 x_2 + c_2$$

Empleando las condiciones de frontera $\theta = \theta_l$ para $x_2 = 0$; $\theta = \theta_n$ para $x_2 = d$, entonces las constantes de integración quedan

$$\theta_l = c_1(0) + c_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_l = c_2$$

$$\theta_n = c_1 d + \theta_l \quad c_1 = \frac{\theta_n - \theta_l}{d}$$

$$\theta = \frac{x_2 (\theta_n - \theta_l)}{d} + \theta_l$$

Como se puede observar, cuando los valores de θ son predefinidos en las placas, los valores de $\frac{d\theta}{dx_2}$ en ellas están completamente determinados.

$$\frac{d\theta}{dx_2} = \frac{\theta_n - \theta_l}{d}$$

Esto permite ilustrar que en un problema de conducción de calor en estado estable (gobernado por la ecuación de Laplace) en general, no es posible prescribir los valores de θ y de las normales a las derivadas de ésta en los mismos puntos de la frontera, a menos que estos resulten consistentes uno con otro.

En una frontera sólida el fluido se adhiere, lo que da lugar a que las velocidades en esta interfase estén definidas por la superficie. Los vórtices son generados en la superficie difundiéndose al flujo. En algunos casos los vórtices quedan confinados a una capa delgada en la vecindad de la frontera, de tal forma que fuera de esta capa el flujo es irrotacional (figura 7.15). Por ejemplo, en las alas de un avión la capa límite se extiende en un espesor no mayor a un centímetro de la superficie del sólido, esto es, las velocidades varían rápidamente desde la correspondiente al avión (en la superficie del ala) hasta la del medio (velocidad del viento) quedando limitados a esta zona los elevados valores del número de Reynolds, reduciéndose éstos conforme el flujo se aleja del ala.

La viscosidad es la responsable de la generación de vórtices en la región adyacente al sólido, su efecto dependerá de la velocidad del flujo v_0 . A elevados valores de la velocidad v_0 , la influencia del sólido se confina a sus zonas adyacentes, mientras que a bajas velocidades su efecto se extiende en el fluido en todas direcciones.

Por consecuencia, a elevadas velocidades, el efecto de formación de vórtices es confinado a una película delgada alrededor del obstáculo a la cual se denomina como capa límite. A las afueras de esta capa el flujo es irrotacional. Este concepto permite, al plantear la solución de un problema, dividir el flujo en una región externa irrotacional y una capa límite viscosa. Esto simplifica la complejidad de aplicar las ecuaciones de Navier.

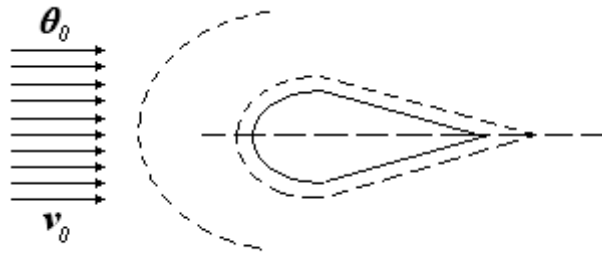


FIGURA 7.15 CONCEPTO DE CAPA LÍMITE. LA INFLUENCIA DE LA VISCOSIDAD DEPENDE DE LA VELOCIDAD DEL FLUJO. A ELEVADAS VELOCIDADES LA VISCOSIDAD (SUS EFECTOS) SON CONFINADOS A UNA CAPA DELGADA (CAPA LÍMITE)

7.19 FLUIDO NEWTONIANO COMPRESIBLE

Como ya ha sido mencionado con antelación, aquellos flujos en los que las variaciones de densidad son insignificantes se pueden describir como incompresibles; situación que favorece la solución del problema al reducir el número de variables. Cuando las variaciones de densidad en el flujo son importantes y su efecto no se puede despreciar es necesario definir al fluido como compresible. No se puede generalizar de entrada y relacionar con el estado de la materia (líquido o gas), de tal forma que se considere a los líquidos siempre como incompresibles y a los gases como compresibles. Dicha generalización, si bien corresponde con la mayoría de los casos prácticos, presenta sus limitaciones ya que los gases se pueden describir como incompresibles cuando el flujo se caracteriza por velocidades muy por debajo de la del sonido en el flujo. Definiendo al número de Mach M como la relación existente entre la velocidad del fluido v y la del sonido v_s de tal forma que

$$M = \frac{v}{v_s},$$

es entonces que se ha demostrado que los cambios de densidad son del orden del 2% para $M < 0.3$, esto representa que para el aire a temperatura ambiente se puede considerar como incompresible a velocidades menores de 100 m/s. Por otra parte, existen una infinidad de aplicaciones de ingeniería para las cuales los efectos de la compresibilidad de gases y líquidos son fundamentales para la correcta descripción de los fenómenos.

En un fluido compresible para ser consistente con el estado de esfuerzos para el reposo y movimiento la presión p no dependerá explícitamente de algún término cinemática, por lo que $p = p(\rho, \theta)$.

Por ejemplo, para los gases ideales se considera que

$$p = \rho R \theta$$

donde R es la constante universal del gas ideal ($R = 8.31 \text{ J/mol} \times \text{K}$)

$$\therefore \quad \sigma_{ij} = -p(\rho, \theta) + \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

$$\sigma_{11} = -p + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{11}$$

$$\sigma_{22} = -p + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{22}$$

$$\sigma_{33} = -p + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{33}$$

$$\sigma_{ii} = -3p + (3\lambda + 2\mu) D_{kk}$$

En el caso de que el fluido sea compresible

$$p \neq \frac{\sigma_{ii}}{3}$$

La presión no representa entonces a los esfuerzos compresivos totales.

Por otra parte, se define la compresibilidad volumétrica como

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad \text{compresibilidad volumétrica}$$

Cuando se trata de gases monoatómicos

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$$

Por consecuencia, la ecuación de esfuerzos para un fluido compresible se expresa

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + k D_{kk} \delta_{ij}$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento, queda entonces

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv}{Dt}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial D_{kk}}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial D_{kk}}{\partial x_i} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \right] + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

Reordenando

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + k \frac{\partial}{\partial x_i} D_{kk} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} D_{kk} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$D_{kk} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}$$

En forma general, la ecuación constitutiva queda

$$-\nabla p + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) + k \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{B} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

Por consecuencia, se tienen 6 incógnitas $v_1, v_2, v_3, p, \rho, \theta$, por lo que a las anteriores 4 ecuaciones (ecuación de estado –escalar– y ecuación de movimiento –vectorial–) habrá que adicionar la Ecuación de Continuidad

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

donde la sexta ecuación es la de la Energía, sin considerar el calor que se genere al interior del MC

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}$$

De la ecuación anterior surgen nuevas incógnitas, ya que es necesario determinar el estado de esfuerzos σ_{ij} y la energía interna u :

$$u = C_v \theta$$

donde C_v representa el calor específico a volumen constante; en general, se cumplirá que

$$u = u(\rho, \theta)$$

Se concluye entonces que el análisis para un fluido compresible será mucho más complejo que para el caso de que éste se declare como incompresible; las incógnitas están dadas por:

- i) Campo de velocidades v_i
- ii) Densidad ρ
- iii) Presión p ; $p = p(\rho, \theta)$
- iv) Temperatura θ
- v) Energía interna u

7.20 ONDAS ACÚSTICAS

La propagación del sonido puede ser aproximada, considerando la propagación de disturbios infinitesimales en un fluido compresible no viscoso. Para un fluido no viscoso negando el efecto de fuerzas de cuerpo, la ecuación de movimiento queda

$$-\nabla p = \rho \frac{Dv}{Dt}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

De otra forma

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Considerando que se parte de condiciones de reposo

$$\rho = \rho_0, \quad v_i = 0, \quad p = p_0$$

donde ρ y p_0 son la densidad y presión en un tiempo inicial.

Se supone que a partir del reposo se producen los disturbios

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x_i, t), \quad v_i = v'(x_i, t), \quad p = p_0 + p'(x_i, t)$$

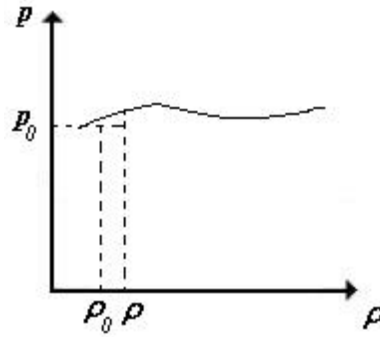


FIGURA 7.16 LA PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS GENERA PEQUEÑAS VARIACIONES DE PRESIÓN Y DENSIDAD

Sustituyendo en la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{(\rho_0 + \rho')} \frac{\partial p'}{\partial x_i}$$

Como los disturbios generados son muy pequeños (infinitesimales)

$$\begin{aligned} v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} &\rightarrow 0 & \rho_0 + \rho' &\rightarrow \rho_0 \\ \Rightarrow \frac{\partial v'_i}{\partial t} &= - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (7.6)$$

De manera análoga, si se considera la ecuación de conservación de masa se tendrá

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot v) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho_0 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho} \right) \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + v'_i \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} = 0$$

Al ser un disturbio infinitesimal

$$v'_i \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} \rightarrow 0, \quad \frac{\rho'}{\rho_0} \rightarrow 0$$

$$\therefore \quad \rho_0 \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (7.7)$$

Derivando 7.6 con respecto a x_i

$$\frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_i \partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} \quad (7.8)$$

Derivando 7.7 con respecto a t

$$\frac{\partial^2 v'_i}{\partial t \partial x_i} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} \quad (7.9)$$

Igualando de 7.8 y 7.9, se tiene que

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0$$

Se puede considerar sin incurrir en un error mayor, que el flujo es a temperatura constante, de tal forma que la presión depende explícitamente solo de la densidad. Considerando que

$$\frac{p_1 V_1}{\theta_1} = \frac{p_2 V_2}{\theta_2}$$

$$p = \rho R \theta$$

$$\Rightarrow \quad p = p(\rho)$$

Expandiendo la ecuación en series de Taylor y considerando que se trata de un fluido barotrópico $p = p(\rho)$, entonces la presión se puede expresar como

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n p}{\partial \rho^n} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^n$$

Si despreciamos el efecto de términos de orden superior, se puede definir

$$p = p_0 + p'(x, t)$$

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)$$

$$\Rightarrow p' = C_0^2 \rho'$$

$$C_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$$

$$\rho' = \rho - \rho_0$$

$$p' = p - p_0$$

Entonces, para un flujo barotrópico (la densidad sólo depende de la presión) se tiene que, partiendo de la ecuación diferencial en derivadas parciales (ecuación 7.10):

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}$$

$$C_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}$$

Esta ecuación es equivalente a la de la onda elástica (sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico) que ha sido definida en el capítulo 6; razón por la cual se concluye que las variaciones de presión y de la densidad se propagan en el fluido con una velocidad

$$C_0 = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho_0}}$$

Dicha velocidad C_0 es definida como la del sonido en condiciones de estancamiento, donde

la velocidad local del sonido C está dada por $C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$

Para un flujo isoentrópico se tiene $p = k\rho^\gamma$, donde $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, siendo estos los calores específicos del fluido a presión y volumen constante. En este caso la velocidad del sonido se expresa $C = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$.

Con la finalidad de comprobar la relación antes desarrollada con la establecida para SEHLI, considerando desplazamientos infinitesimales (ecuación de Navier), se tiene

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{jj}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho_0 B_i$$

Como el fenómeno es lineal, se pueden estudiar por separado las ondas longitudinales y transversales. Si se considera una onda longitudinal,

$$u_1 = a \sin \frac{2\pi}{\ell} (x_1 - v_\ell t) \quad ; \quad u_2 = 0 \quad ; \quad u_3 = 0$$

Considerando un fenómeno lineal, la ecuación diferencial que gobierna queda

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v_\ell^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \quad ; \quad u_1 = u(x_1, t)$$

$$v_\ell^2 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \right) \quad y \quad u_2 = u_3 = 0$$

por analogía

$$v_\ell^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$$

Por lo tanto, la velocidad del sonido está dada por $C_0 = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \right]^{1/2}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Un elemento cilíndrico de radio r , longitud l y densidad ρ , está sujeto al fondo de un recipiente de acuerdo con la siguiente figura. El fluido en el que se encuentra inmerso el elemento cilíndrico presenta una densidad ρ_l . Con base en lo antes expuesto, determine el nivel de esfuerzos σ en el cable C cuyo diámetro es d y su límite elástico es σ_0 .

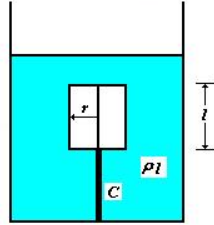


FIGURA 7.17 RECIPIENTE CON DENSIDAD ρ INMERSO EN UN FLUIDO CON DENSIDAD ρ_l Y SUJETO AL FONDO

SOLUCIÓN

Tomando en cuenta el principio de Arquímedes:

$$d = 2r$$

$$f = (\rho_l - \rho)Vg$$

$$V = \pi \frac{d^2}{4} l$$

$$f = -\pi \frac{d^2}{4} l (\rho - \rho_l) g$$

$$\sigma = \frac{f}{A} = \frac{-\pi d^2 l (\rho - \rho_l) g}{\pi d^2}$$

$$\sigma = -\left(\frac{d}{d}\right)^2 (\rho - \rho_l) gl$$

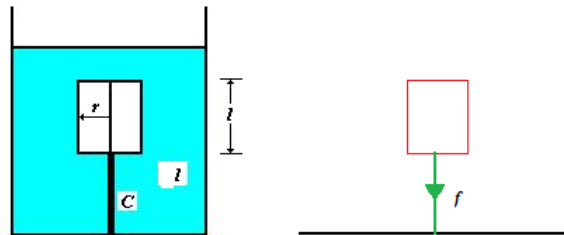


FIGURA 7.18 SI LA DENSIDAD DEL CUERPO ES MAYOR QUE LA DEL LÍQUIDO LA CARGA SOBRE EL CABLE SERÁ DE COMPRESIÓN

2. Un recipiente con un fluido incompresible se mueve verticalmente hacia abajo con una aceleración constante a . Determine la presión en un punto que se encuentra a una profundidad h de la superficie. Considere que en la superficie ($h=0$) la presión está dada por p_0 y que la densidad se expresa como ρ .

SOLUCIÓN

Al moverse el recipiente hacia arriba, la inercia del fluido genera un efecto adicional.

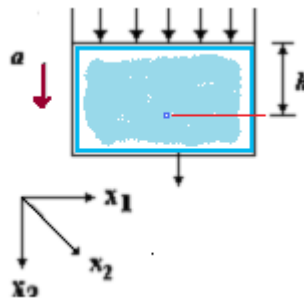


FIGURA 7.19 EL RECIPIENTE QUE CONTIENE AL FLUIDO DE DENSIDAD ρ SE MUEVE HACIA ABAJO CON UNA ACELERACIÓN a

\Rightarrow para un fluido se tiene: $-\nabla p + \rho B = \rho a$

$$\text{Eje } x_1 \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad \therefore \quad p = \text{cte. con respecto a } x_1$$

$$\text{Eje } x_2 \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad \therefore \quad p = \text{cte. con respecto a } x_2$$

$$B_3 = g \quad a_3 = -a$$

$$\text{Eje } x_3 \quad -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho B_3 = \rho a_3$$

$$-p = \rho(a_3 - g)x_3 + p_0$$

3. Un vehículo arrastra un contenedor rectangular separado por una división central. El contenedor tiene una longitud l de 6 m por 2 m de ancho e igual de altura, el fluido en reposo dentro del contenedor alcanza una altura de 1 m. Al ponerse la luz del semáforo en rojo, el vehículo debe desacelerar con una magnitud constante (a -aceleración en dirección horizontal). Considerando movimiento de cuerpo rígido, determine el ángulo θ de la superficie libre del tanque; asimismo, determine la ecuación que define la presión para cualquier punto del tanque. Calcule la altura máxima que alcanza el fluido al chocar con la pared vertical ($a = g/3$).

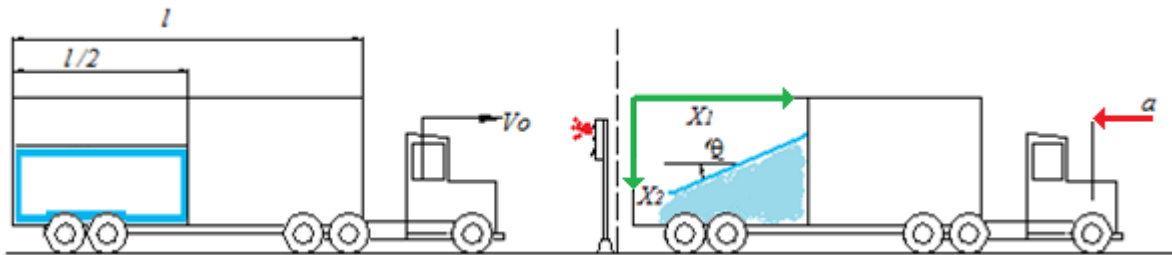


FIGURA 7.20 AL ACELERAR EL VEHÍCULO POR EFECTOS DE LA INERCIA EL LÍQUIDO TIENDE A MOVERSE HACIA ATRÁS (FIGURA SUPERIOR); POR OTRA PARTE AL PRESENTAR UNA ACELERACIÓN NEGATIVA (FIGURA INFERIOR) EL FLUIDO SE DESPLAZA HACIA ADELANTE

Para el caso en que el vehículo acelera a partir del reposo, el líquido por efecto de la inercia se inclina hacia atrás, en caso de acelerar la inclinación será en sentido opuesto, situación que corresponde al caso en estudio.

$$a_1 = -a, \quad a_2 = a_3 = 0, \quad B_1 = B_3 = 0, \quad B_2 = g$$

SOLUCIÓN

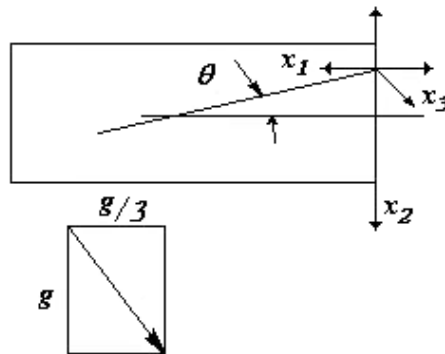


FIGURA 7.21 EL ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE LA SUPERFICIE ES FUNCIÓN DE LA ACELERACIÓN

$$\theta = \arctan\left(\frac{g/3}{g}\right) = 18.43^\circ$$

$$B = 0\hat{e}_1 + g\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

$$a = \frac{g}{3}\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

$$-\nabla p + \rho B = \rho a$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \text{cte. con respecto a } x_3$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho g = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x_2) = \rho g x_2 + f(x_1) + p_0$$

$$p(x_1, x_2) = \rho g x_2 + \rho a x_1 + p_0$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \tan \theta \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{x_2}{\tan \theta}$$

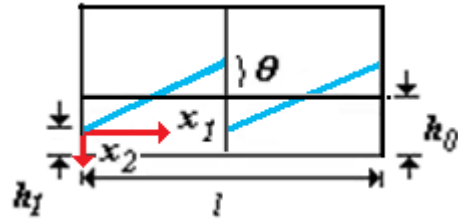


FIGURA 7.22 LOS EJES SE COLOCAN EN EL VERTICE DE LA SUPERFICIE DEL FLUIDO

El fluido es incompresible por lo que el volumen ocupado por éste antes y después de su desplazamiento son iguales, asimismo debe recordarse que el tanque tiene una división en el centro

$$\frac{h_1 + h_2}{2} \left(\frac{l}{2} \right) b = h_0 \frac{l}{2} b$$

$$h_2 = h_1 + \frac{l}{2} \tan \theta \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_0 + \frac{l}{4} \tan \theta \quad \Rightarrow \quad h_2 = 1 + \frac{6}{4} \tan 18.43^\circ = 1.5 \text{ m}$$

$$V = \text{cte} \quad ; \quad V_0 = h_0 \frac{l}{2} b$$

$$b = \text{cte} \quad ; \quad l = \text{cte}$$

$$V_f = \frac{h_1 + h_2}{2} \left(\frac{l}{2} \right) b \quad \Rightarrow \quad h_1 = h_0 - \Delta h = 0.5 \text{ m}$$

4. El tensor σ_{ij} describe el estado de esfuerzos para un punto X_1 de un fluido incompresible. Para σ_{ij} determine el tensor σ'_{ij} que depende exclusivamente de la velocidad de deformación, asimismo determine la presión hidrostática asociada.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -45 & 6 & 10 \\ 6 & -15 & 15 \\ 10 & 15 & 0 \end{pmatrix} \times 10^3 \quad [\text{Pa}]$$

Si la densidad del fluido es de 1000 Kg/m^3 , indique la profundidad (de ser esto posible) a la que se encuentra el punto en estudio.

SOLUCIÓN

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}$$

Fluido incompresible

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\sigma_{11} = -p\delta_{11} + 2\mu\dot{\epsilon}_{11}$$

$$\sigma_{22} = -p\delta_{22} + 2\mu\dot{\epsilon}_{22}$$

$$\sigma_{33} = -p\delta_{33} + 2\mu\dot{\epsilon}_{33}$$

$$\sigma_{ii} = -3p + 2\mu\dot{\epsilon}_{ii}$$

Como $\dot{\epsilon}_{ii} = 0 \Rightarrow \sigma_{ii} = -3p$

$$\sigma_H = \frac{\sigma_{ii}}{3} = -p = -20 \times 10^3 \quad [\text{Pa}] \quad \Rightarrow \quad p = 20 \times 10^3 \quad [\text{Pa}]$$

$$\sigma_H = \rho gh \quad ; \quad \rho = 1000 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

$$g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\therefore h \hat{=} 2 \text{ m}$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$$

$$-p = \sigma_H = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \times 10^3 \quad [\text{Pa}]$$

$$\therefore \sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} -25 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 15 \\ 10 & 15 & 20 \end{pmatrix} \times 10^3 \quad [\text{Pa}]$$

5. La compuerta AB de la figura es rectangular de 1 m de ancho y 4 m de largo, ésta gira sobre el punto A . Si la masa de la compuerta es de 400 kg, encuentre las reacciones en A y B . El fluido en el tanque es agua.

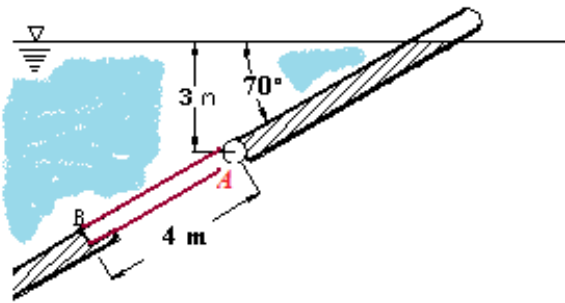


FIGURA 7.23 COMPUERTA SUMERGIDA EN UN TANQUE CON AGUA

SOLUCIÓN

Para analizar el problema se puede considerar a la compuerta como una viga simplemente apoyada en A, B ; la carga se incrementa linealmente de acuerdo con la profundidad $f_A = pA = \rho gh_A A$, mientras que en B , la carga será $f_B = f_A + \rho g \Delta h A$. Entre estos dos puntos la carga varía de acuerdo con $f = f_A + \rho g x \sin \theta$. Donde x se mide en la dirección

de la compuerta a partir de $A(x=0)$ y hasta $B(x=4\text{ m})$. Si se considera el peso de la compuerta, éste deberá colocarse en el centro de cargas, tal como se observa en la figura 7.24:

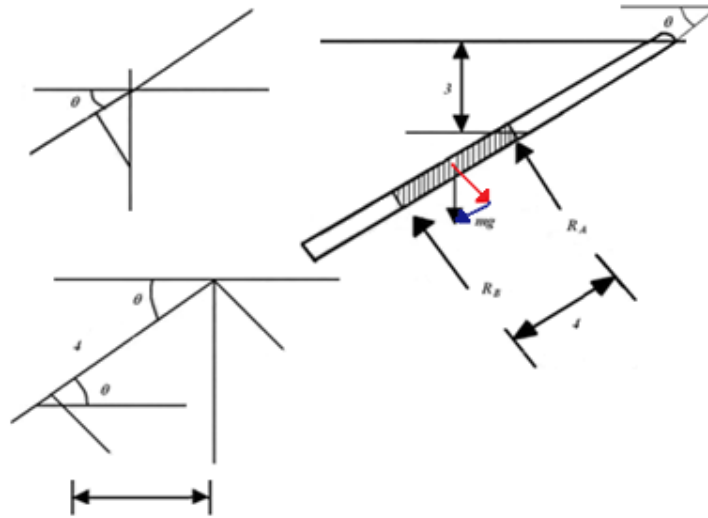


FIGURA 7.24 DISPOSICIÓN DE LA COMPUERTA

$$p_A = \rho g h_A; \quad h_A = 3\text{ m}$$

$$p_B = \rho g h_B = \rho g (h_A + \Delta h)$$

$$\Delta h = l \sen \theta_B = 4 \sen 70^\circ = 3.75\text{ m}$$

$$h_B = h_A + \Delta h = 3 + 3.75 = 6.75\text{ m}$$

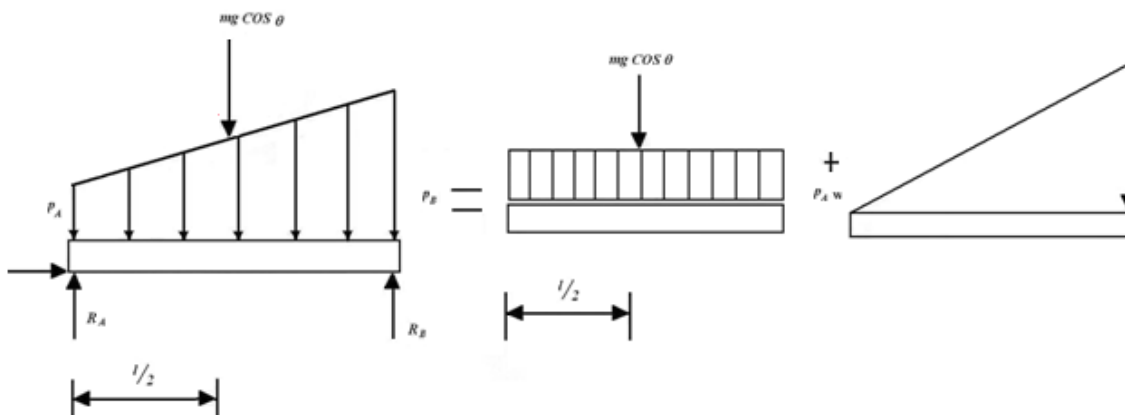


FIGURA 7.25 DESCOMPOSICIÓN DE CARGAS

Dado que se trata de un sistema que se encuentra en equilibrio, entonces $\sum f = 0$; $\sum M = 0$, lo momentos en los apoyos es nulo, por lo tanto,

$$\Sigma f = 0 \Rightarrow mg \cos \theta + (\rho g h_A) w l + \left(\frac{\rho g \Delta h}{2} \right) w l = R_A + R_B$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 0 = R_B l - (mg \cos \theta) \frac{l}{2} - [(\rho g h_A) w l] \frac{l}{2} - \left(\frac{\rho g \Delta h}{2} \right) w l \left(\frac{2}{3} l \right)$$

$$4R_B - (2681.43 + 235200 + 196000) = 0$$

$$R_B = 108470 \text{ N}$$

$$R_A = 192440 - R_B$$

$$R_A = 83970.7 \text{ N}$$

6. Desarrolle (en coordenadas rectangulares) la ecuación de conservación de cantidad de movimiento para un fluido newtoniano incompresible. Indíquela en forma general

SOLUCIÓN

Ecuación de Cauchy

$$\text{div } \sigma + \rho B = \rho \frac{Dv}{Dt}$$

$$\nabla \cdot T + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right)$$

$$T = -pI + T'$$

T' - esfuerzos viscosos

$$T = \lambda \Delta I + 2\mu D$$

$$T = -pI + \lambda (\nabla \cdot v) I + 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\nabla v + (\nabla v)^T \right) \right]$$

Sustituyendo en la ecuación de Cauchy:

$$\nabla \left[-pI + \lambda (\nabla \cdot v) I + 2\mu \left[\frac{1}{2} (\nabla v + (\nabla v)^T) \right] \right] + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right)$$

$$-\nabla p + \lambda \nabla (\nabla \cdot v) + \mu \nabla \cdot (\nabla v) + \mu \nabla (\nabla \cdot v) + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right)$$

Considerando incompresibilidad

$$-\nabla p + \mu [\nabla \cdot (\nabla v)] + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right)$$

7. El tensor de esfuerzos asociado a un punto q de un fluido newtoniano incompresible está dada por:

$$\sigma_{ijq} = \begin{pmatrix} -60 & 3 & -4 \\ 3 & -100 & 8 \\ -4 & 8 & -20 \end{pmatrix} \quad [\text{kPa}]$$

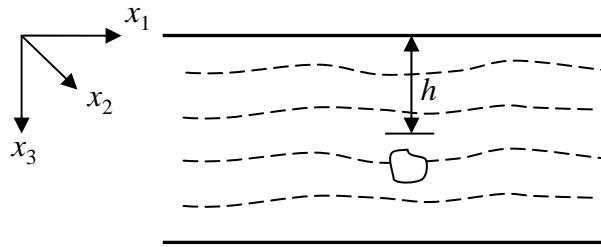


FIGURA 7.26 UN OBJETO SE ENCUENTRA SUMERGIDO A UNA PROFUNDIDAD h

Si la densidad del fluido es de 1000 kg/m^3 y $B_i = 0\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 - g\hat{e}_3$ donde g es la aceleración de la gravedad, determine la profundidad a la que se encuentra inmerso el cuerpo en el seno del fluido. Si la viscosidad μ es de $9.82 \times 10^{-4} \text{ Pa-s}$, determine el tensor de rapidez de deformación y sus valores principales.

SOLUCIÓN

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -60 & 3 & -4 \\ 3 & -100 & 8 \\ -4 & 8 & -20 \end{pmatrix} \quad [\text{kPa}]$$

Fluido incompresible

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$\sigma_{11} = -p + 2\mu\dot{\varepsilon}_{11} \quad ; \quad \sigma_{22} = -p + 2\mu\dot{\varepsilon}_{22} \quad ; \quad \sigma_{33} = -p + 2\mu\dot{\varepsilon}_{33}$$

$$\sigma_{kk} = -3p + 2\mu(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}) \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{kk} = 0$$

$$\sigma_{kk} = -3p = 3\sigma_H$$

$$\sigma_H = \frac{\sigma_{kk}}{3} = -60 \text{ kPa}$$

$$p = \rho gh \Rightarrow h = \frac{p}{\rho g}$$

$$h = \frac{60 \text{ kPa}}{1000 \times 9.8} \triangleq 6 \text{ m}$$

$$\sigma_{ijH} = \begin{pmatrix} -60 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \end{pmatrix} \quad [\text{kPa}]$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} = \lambda\dot{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sigma'_{ij} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$\therefore \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\mu}$$

$$\mu = 9.82 \times 10^{-4} \quad \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{s}$$

$$\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 3 & -40 & 8 \\ -4 & 8 & 40 \end{pmatrix} \quad [\text{kPa}]$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1527.5 & -2036.6 \\ 1527.5 & -20366 & 4073 \\ -2036.6 & 4073 & 20366 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\epsilon}_{ijP} = \begin{pmatrix} 20570 & 0 & 0 \\ 0 & 307 & 0 \\ 0 & 0 & -20877 \end{pmatrix} \text{ s}^{-1}$$

8. Sea $\phi(x_i, t)$ una función escalar la cual define el campo de velocidades del medio continuo en el intervalo analizado, como

$$v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}; \quad v = -\nabla \phi$$

- a) ¿Qué características deberá cumplir la función para que el flujo en el intervalo sea irrotacional?
- b) Si la función $\phi(x_i, t)$ está asociada a un medio incompresible ¿Cómo quedará expresada la ecuación de conservación de masa, en el intervalo en estudio?

SOLUCIÓN

$$\phi = \phi(x_i, t) \text{ tal que } v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

- a) El rotacional se expresa como:

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

sustituyendo

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \right) = \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

$$\therefore w_{ij} = 0 \text{ si } \exists \phi(x_i, t) \text{ tal que}$$

$$v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

b) Medio incompresible

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Coordenadas rectangulares}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = 0 \quad \therefore \nabla^2 \phi = 0$$

9. Analice si la función escalar $\phi = A(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2)t$ describe un flujo irrotacional, si $t-s$, $x-m$, $A=1 \text{ s}^{-2}$. Asimismo, determine el campo de esfuerzos asociado considerando que la viscosidad está dada por μ . Verifique si el campo de esfuerzos satisface las ecuaciones de Navier-Stokes. Las fuerzas de cuerpo se pueden despreciar.

SOLUCIÓN

$$\phi = A(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2)t$$

Flujo irrotacional

$$w = \frac{1}{2}(\nabla v - \nabla v^T) = 0$$

$$v_1 = 2x_1 At \quad ; \quad v_2 = 2x_2 At \quad ; \quad v_3 = -4x_3 At$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad At(2 + 2 - 4) = 0$$

Por lo tanto, se cumple la condición de incompresibilidad.

$$\nabla v = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} A t$$

$$\nabla v = (\nabla v)^T \Rightarrow w = 0$$

Por consecuencia, se cumple la condición de irrotacional.

El estado de esfuerzos está dado por

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

donde σ'_{ij} = esfuerzos viscosos

Por analogía con SEHLI se tiene que la ecuación constitutiva para un fluido está dada por

$$\sigma'_{ij} = \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \nabla^2 \phi = 0$$

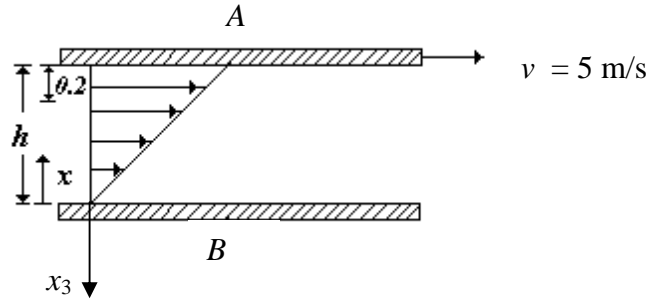
Por lo tanto, un fluido irrotacional e incompresible la ecuación se reduce a

$$\sigma'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Por lo que
$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\therefore \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p + 4\mu A t & 0 & 0 \\ 0 & -p + 4\mu A t & 0 \\ 0 & 0 & -p - 8\mu A t \end{pmatrix}$$

10. Considere que entre las placas A y B existe un fluido newtoniano incompresible. La placa A se desplaza a una velocidad de 5 m/s, mientras que la placa B permanece en reposo. Si la distancia entre ambas placas es de 1 m, determine la velocidad del fluido a 0.2 m de la placa A . Considere que las placas están horizontales y que sus dimensiones son muy grandes.



$$h = 1 \text{ m} , \quad x = 0.2 \text{ m}$$

FIGURA 7.27 FLUJO INDUCIDO POR VELOCIDAD (COUETTE)

SOLUCIÓN

De las ecuaciones de Navier–Stokes

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j \partial x_j} \rho \beta_i = \frac{Dv_i}{Dt}$$

Considerando que es un flujo inducido por velocidad y establecido

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{Dv_i}{Dt} = 0$$

De la ecuación de conservación de masa

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\text{Como } v_2 = v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\therefore v_1 \text{ es constante en } x_1 \quad \text{y} \quad v_1 = v_1(x_3)$$

En la ecuación de Navier–Stokes para el eje x_1

$$\Rightarrow \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + \rho B_1 = 0$$

Despreciando el efecto de las fuerzas de cuerpo

$$\mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \alpha x_3 + \beta$$

De las condiciones de frontera en $x_3 = 0$, $v_1 = v_A = 5 \Rightarrow \beta = 5$

En $x_3 = h = 1$, $v_1 = 0 \Rightarrow \alpha = -5$

$$\therefore v_1 = -5x_3 + 5$$

Para $x_3 = 0.2 \Rightarrow v = 4 \text{ m/s}$

11. Para el flujo que se describe en la figura, determine el perfil de velocidades en la zona del conducto que va de AA' .

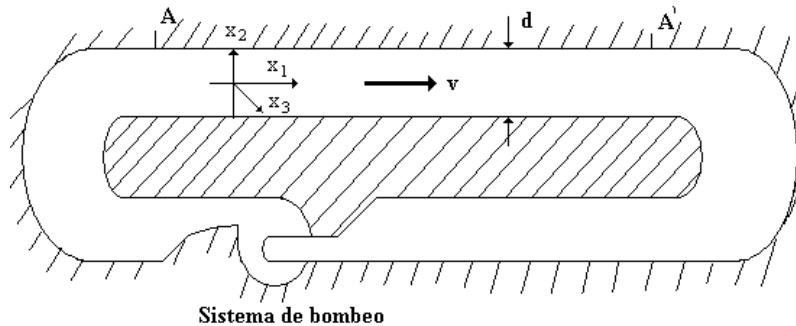


FIGURA 7.28 FLUJO INDUCIDO POR PRESIÓN

Considere que se trata de un fluido newtoniano incompresible con viscosidad μ . El canal es rectangular con un ancho igual a $2e$ y altura d , donde $d \ll e$ y por consecuencia se puede despreciar el efecto en las paredes laterales. El flujo en el canal es uniaxial de tal forma que $v_2 = v_3 = 0$. Determine el gasto volumétrico.

SOLUCIÓN

- Se trata de un flujo de Poiseville, es decir, un flujo uniaxial inducido por presión.

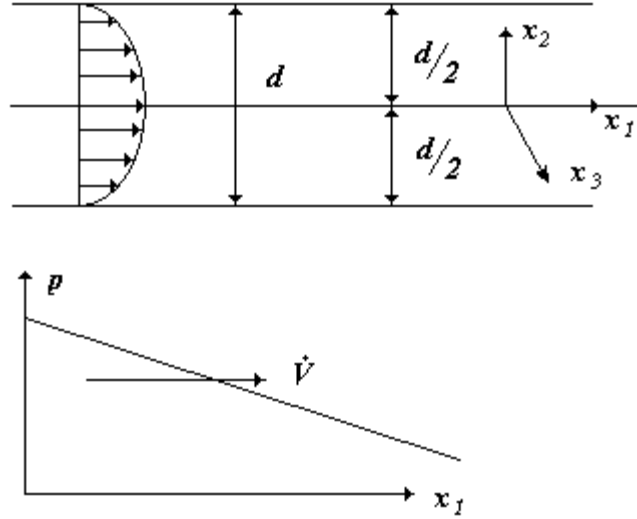


FIGURA 7.29 EL FLUJO VA EN SENTIDO OPUESTO AL GRADIENTE DE PRESIÓN. EN LAS PAREDES DEL CONDUCTO LA VELOCIDAD ES NULA (LA DE LAS PAREDES) Y EN EL CENTRO ES MÁXIMA

$$v_1 = v(x_2)$$

$$v_2 = v_3 = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] v_1 + \rho B_1 = \rho \left[\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right]$$

No considere el efecto de fuerzas de cuerpo, y además se considera flujo establecido

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = 0$$

Condiciones de frontera

$$\text{para } x_1 = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 0$$

$$\text{para } x_1 = -\frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 0$$

$$\text{para } x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_{\text{máx}}$$

Ecuación de Conservación de masa

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{El flujo no se acelera a través del conducto}$$

De las ecuaciones de Navier-Stokes

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \frac{x_2}{\mu} + c_1$$

$$v_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \frac{x_2^2}{2\mu} + c_1 x_2 + c_2$$

En un máximo, la primera derivada es cero

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0 = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \frac{x_2}{\mu} + c_1 \quad \therefore c_1 = 0$$

Cuando $x_2 = \frac{d}{2} \Rightarrow v_1 = 0$

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \frac{\left(\frac{d}{2} \right)^2}{2\mu} + c_2$$

$$c_2 = - \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \frac{d^2}{8\mu}$$

$$\therefore v_1(x_2) = \frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - x_2^2 \right] \left(- \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)$$

\Rightarrow El perfil de velocidades es parabólico para un flujo inducido por presión, y éste va en sentido contrario al del gradiente de la presión.

12. Sea $\phi(x_i, t)$ una función escalar a través de la cual se pretende definir el campo de velocidades en un medio continuo, de acuerdo con

$$v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

- a) ¿Qué características deberá cumplir la función para que el flujo en el intervalo sea irrotacional?
- b) Si la función $\phi(x_i, t)$ está asociada a un medio incompresible ¿Cómo quedará expresada la ecuación de conservación de masa en el intervalo en estudio?

SOLUCIÓN

- a) La función deberá ser continua y continuamente derivable en el intervalo.

$$v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad \text{o} \quad v = -\nabla \phi$$

$$\nabla \times (-\nabla \phi) = 0$$

- b) La ecuación de conservación de masa para el intervalo de estudio queda expresada

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \phi = 0$$

13. Un continuo con una ecuación constitutiva de la forma

$$\sigma_{ij} = \lambda \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}$$

presenta un flujo irrotacional e incompresible, el cual se describe a través de una función escalar ϕ , que permite describir el campo de velocidades a través de $v = -\nabla \phi$.

- a) Con base en lo anterior, determine la función disipativa $\dot{W}_V = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$ o $\dot{W}_V = \sigma \dot{\varepsilon}$
- b) Determine la ecuación de Cauchy para el material en cuestión considerando la descripción de su campo de velocidades y de su ecuación constitutiva.

SOLUCIÓN

$$\sigma_{ij} = \lambda \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$v = -\nabla \phi \quad \Rightarrow \quad v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \hat{e}_1 - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \hat{e}_2 - \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \hat{e}_3$$

$$\dot{W}_V = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

Para un flujo irrotacional e incompresible

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Y la ecuación constitutiva

$$\therefore \quad \sigma_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{W}_V = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\dot{W}_V = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2 + \dot{\epsilon}_{33}^2 + 2 \left(\dot{\epsilon}_{12}^2 + \dot{\epsilon}_{23}^2 + \dot{\epsilon}_{31}^2 \right) \right)$$

Ecuación de Conservación de masa

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_3} = 0$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

14. Dado el siguiente campo de velocidades de un fluido viscoso newtoniano incompresible

$$v_1 = kx_1 \quad v_2 = -kx_2 \quad v_3 = 0$$

- Demuestre si el campo de velocidades es irrotacional.
- Determine el tensor de esfuerzos.
- Determine el campo de aceleraciones.
- Demuestre si el campo de velocidades satisface la ecuación de Navier-Stokes, y esto permite determinar la función de presión (distribución de presiones). Para lo anterior desprecie las fuerzas de cuerpo y considere que $p = p_0$ en el origen.
- Determine la rapidez de disipación de energía mecánica en calor.

- f) Si $x_2 = 0$ representa una frontera física, ¿qué condición no es satisfecha por el campo de velocidades?

SOLUCIÓN

a)

Irrotacional

$$v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$\nabla \times v = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \hat{e}_3$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\therefore \nabla \times v = 0 \quad \therefore \text{Campo irrotacional}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} = \lambda \dot{\epsilon}_{kk} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = k - k + 0 = 0$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 2\mu$$

b)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu k & 0 & 0 \\ 0 & -(p + 2\mu k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Dv_1}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$$

$$\frac{Dv_1}{Dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} v_3$$

$$\frac{Dv_1}{Dt} = k^2 x_1$$

$$\frac{Dv_2}{Dt} = \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} v_3$$

$$\frac{Dv_2}{Dt} = k^2 x_2$$

c)

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = k^2 (x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3)$$

Ecuación de Navier-Stokes

$$-\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla v) + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v) v \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) v_j \right)$$

Despreciando fuerzas de cuerpo y considerando incompresibilidad

Eje x_1

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right) + \rho B_1 = \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) v_1 \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho k^2 x_1$$

$$-p = \rho \frac{k^2 x_1^2}{2} + f(x_2, x_3) + \text{cte}_1$$

Eje x_2

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) + \rho B_2 = \rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) v_2 \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho k^2 x_2$$

$$-p = \rho \frac{k^2 x_2^2}{2} + f(x_1, x_3) + \text{cte}_2$$

Eje x_3

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) + \rho B_3 = 0$$

$$p(x_3) = \text{cte}_3$$

$$\therefore -p = \frac{k^2 \rho}{2} (x_1^2 + x_2^2) + p_0 \quad \text{Incompresible}$$

d)

$$\dot{W} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = (-p \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\dot{W} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \text{ Irrotacional} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = 0$$

$$\dot{W} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\dot{W} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2 + \dot{\epsilon}_{33}^2 + 2(\dot{\epsilon}_{12}^2 + \dot{\epsilon}_{23}^2 + \dot{\epsilon}_{31}^2) \right)$$

e) Al sustituir $\dot{\epsilon}_{ij}$

$$\Rightarrow \dot{W} = 2\mu(k^2 + k^2) = 4\mu k^2$$

f) No se cumple con la ecuación de conservación de masa (Ecuación de la continuidad)

$$\phi_{,x_2} = -k, \quad \text{para cualquier } x_2 \quad \therefore \text{ en } x_2 = 0, v_2 \neq 0$$

15. Demuestre si la ecuación de movimiento para un fluido newtoniano compresible se puede expresar como:

$$-\nabla p + k\nabla(\nabla \cdot v) + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla \cdot v) + \mu\nabla \cdot (\nabla v) + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\nabla v \right)$$

- a) ¿Cuántas incógnitas se presentan en este sistema?
- b) ¿Cuáles son éstas?
- c) ¿A qué otras ecuaciones se puede acudir para resolver el sistema?
- d) Exprese la ecuación en notación índice.

SOLUCIÓN

Fluido newtoniano compresible

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}$$

Ecuación de Cauchy

$$\nabla \cdot \sigma + \rho B = \frac{Dv}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(-p \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) + 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right] + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

$$\sigma'_{ii} = (3\lambda + 2\mu) \dot{\epsilon}_{kk}$$

$$\sigma_H = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \dot{\epsilon}_{kk} - p = -p + k \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

$$-\nabla p + k \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right)$$

Número de incógnitas: 5 y son v_1, v_2, v_3, ρ y p

Para resolver las ecuaciones se debe recurrir a las ecuaciones de conservación de masa y conservación de energía.

EJERCICIOS PROPUESTOS**Fluidos newtonianos. Hidrostática. Movimiento de cuerpo rígido**

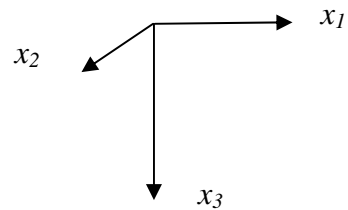
1. Un fluido en estado de reposo presenta una ecuación de estado de la forma

$$p = \lambda \rho^k$$

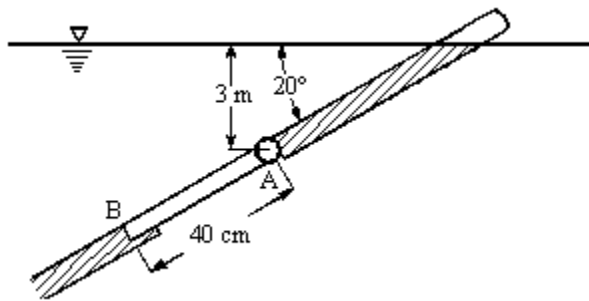
donde λ y k son constantes, y ρ es la densidad.

La única fuerza de cuerpo al que está sometido el sistema es la gravedad. Considerando una orientación de ejes como se muestra en la figura y que la presión en la referencia está dada por p_0 , determine:

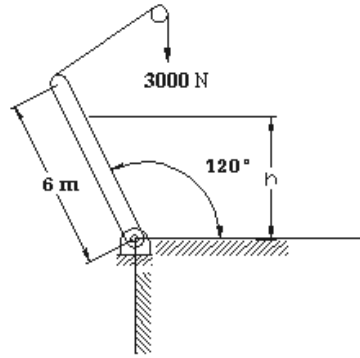
- a) Variación de la presión en los ejes x_1, x_2 .
- b) Variación de la presión en función de x_3 .



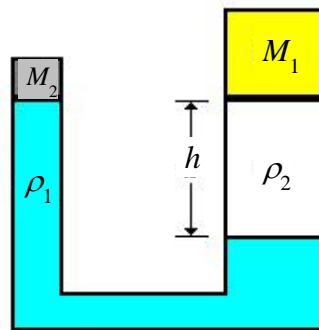
2. La compuerta AB de la figura es rectangular de 40 cm de ancho y 3 m de largo, la cual rota sobre el punto A . Si el peso de la compuerta es de 400 kg, encuentre las reacciones en A y B . El fluido en el tanque es agua.



3. La compuerta de la siguiente figura tiene 6 m de largo por 4 m de ancho. Si el peso de la compuerta es de 1000 N, determine el nivel del agua h al cual la compuerta empieza a caer.

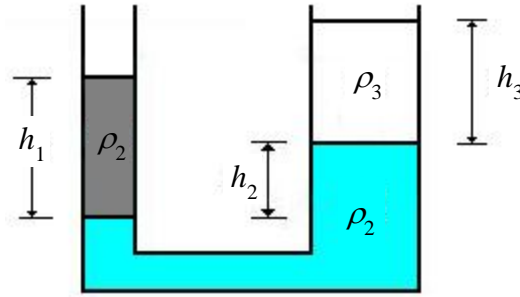


4. Un sistema hidráulico soporta las masas M_1 y M_2 en cada uno de los vasos comunicantes, los cuales contienen fluidos de densidad y viscosidad $\rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2$. Determine la masa M_2 que garantiza el equilibrio del sistema, esto a partir de ρ_1, ρ_2, M_1, h . Considere que los fluidos son newtonianos incompresibles y no existe mezcla.



5. ¿Qué caracteriza a un fluido newtoniano? Dé algunos ejemplos de fluidos que se pueden modelar como newtonianos.
6. ¿Cómo se describe el comportamiento de un fluido no newtoniano? Dé algunos ejemplos de fluidos que se pueden modelar como no newtonianos.
7. Desarrolle la ecuación de conservación de cantidad de movimiento para un fluido newtoniano incompresible. Indíquela en forma general y en notación índice. Desarróllela en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.
8. Los líquidos en los vasos comunicantes de la siguiente figura están en equilibrio. Determine h_2 como una función de $\rho_1, \rho_2, \rho_3, h_1, h_3$.

Los líquidos no se pueden mezclar.



9. Un recipiente con agua se mueve verticalmente hacia arriba con una aceleración a . Determine la presión a la que se encuentra un punto en la profundidad h .

10. En aplicaciones de astrofísica, una atmósfera que tiene una relación de la forma

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n$$

donde P_0 y ρ_0 son la presión y densidad de referencia, se denomina como atmósfera politrópica. Para este tipo de atmósferas determine la distribución de presión y densidad.

11. Defina el concepto de capa límite.

12. La ecuación de estado de un fluido barotrópico presenta la forma $p = \lambda \rho^k$, donde λ y k son constantes; siendo el flujo isoentrópico. Verifique si para este caso la ecuación de Bernoulli en estado estable está dada por

$$\Omega + \frac{kp}{(k+1)\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \text{cte}$$

y si el flujo es isotérmico la ecuación de Bernoulli queda $\Omega + p \frac{\ln \rho}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \text{cte}$

13. Verifique que el gasto volumétrico para un proceso de extrusión de un polímero, el cual se desarrolla mediante un tornillo extrusor está dado por

$$\dot{Q} = 0.5 \pi^2 D^2 N h \sin \theta \cos \theta - p \frac{\pi D h^3 \sin^2}{12 \mu l}$$

Para lo cual, considere que el fluido se puede modelar como newtoniano y que las condiciones son isotérmicas.

h = espesor de la película

p = presión

μ = viscosidad

v_A = velocidad del cojinete (tangencial)

v_B = velocidad de la flecha (tangencial)

D = diámetro del cañón o barril

N = velocidad de rotación del husillo

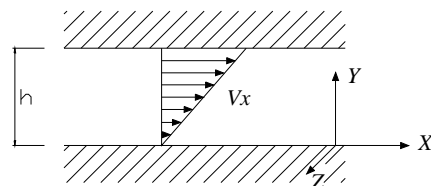
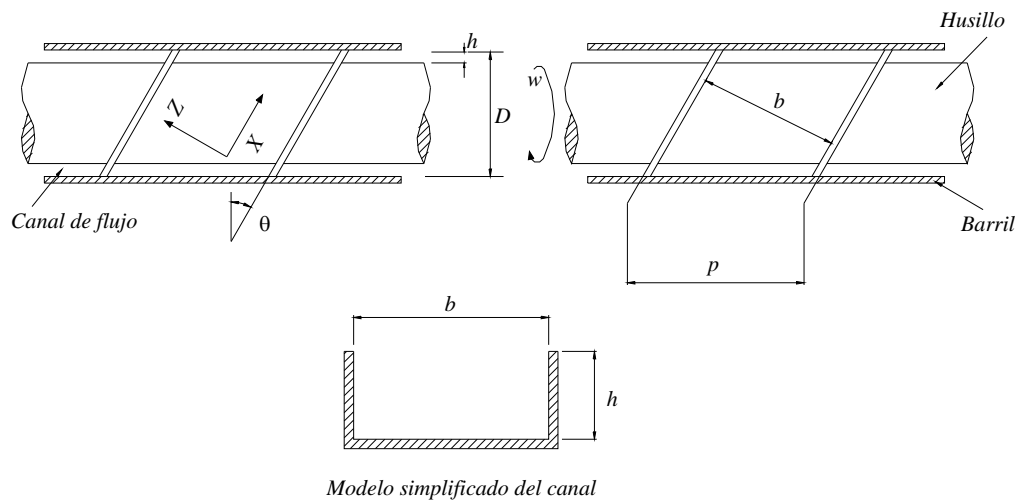
h = profundidad del canal del husillo

θ = ángulo entre la hélice y la dirección perpendicular al husillo

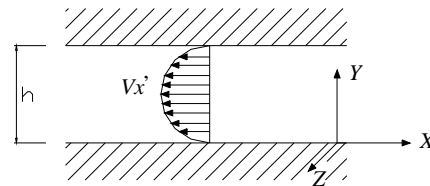
P = presión de descarga del husillo

l = longitud del husillo

μ = viscosidad



Flujo de arrastre (Q_A)



Flujo de presión (Q_P)

Para lo anterior, se define que el gasto volumétrico neto Q se puede expresar como la suma de un flujo de arrastre por velocidad Q_A (Couette) menos un flujo de presión Q_P , este último generado por el incremento de presión que se produce hacia la zona de descarga. El flujo de arrastre se desplaza hacia adelante y ocurre por el movimiento de la superficie del husillo en contacto con el fluido, mientras la otra permanece fija.

Para facilitar el análisis al calcular el flujo de arrastre, suponga que el barril gira y el husillo permanece inmóvil; además, considere que el flujo está dado por $Q = vA_c$, donde v es la velocidad promedio y A_c la sección transversal del canal.

w - velocidad angular del husillo

p - paso del husillo

Considere que $Q = Q_A - Q_P$

14. Demuestre que la ecuación de movimiento para un fluido newtoniano compresible se puede expresar como

$$-\nabla p + k \nabla(\operatorname{div} v) + \frac{\mu}{3} \nabla(\operatorname{div} v) + \mu \operatorname{div}(\nabla v) + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right)$$

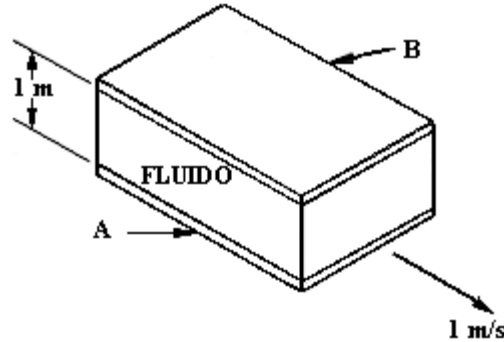
- a) ¿Cuántas incógnitas se presentan en este sistema?
- b) ¿Cuáles son éstas?
- c) ¿A qué otras ecuaciones se puede acudir para resolver el sistema?
- d) Expresé la ecuación en notación índice.

15. Para un fluido newtoniano incompresible con flujo irrotacional, deduzca la ecuación de Torricelli a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Considere que sólo existe el campo gravitacional y que el flujo es establecido.

16. Deduzca la ecuación que describa el comportamiento de un fluido newtoniano incompresible, preséntela en forma invariante (notación general) y en notación índice para coordenadas rectangulares, en este último caso exprese las ecuaciones a las que se da lugar.

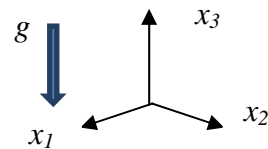
- a) ¿Cuáles son las incógnitas y qué otras ecuaciones se emplearán para poder resolver las incógnitas?
- b) Expresé las ecuaciones complementarias.
- c) ¿Qué pasa en el caso de que el fluido newtoniano sea compresible?
- d) ¿Cuáles serán las incógnitas adicionales, qué otras ecuaciones son empleadas para la solución del problema?

17. Considere que entre las placas A y B existe un fluido newtoniano incompresible. La placa A se desplaza a una velocidad de 1 m/s , mientras que la placa B permanece en reposo. Si la distancia entre ambas placas es de 1 m , determine la velocidad de placa del fluido a 0.3 m de la placa A . Considere que las placas están horizontales y que sus dimensiones son muy grandes.



18. Al término $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ en un fluido newtoniano se le denomina viscosidad volumétrica. En un fluido newtoniano, en una coordenada (x_1, x_2, x_3) a un tiempo t el estado de esfuerzos está dado por σ_{ij} . Si el fluido presenta una viscosidad volumétrica igual a cero, determine la profundidad a la que se encuentra inmerso, si las fuerzas de cuerpo están dadas por B_i . La densidad es de 1000 kg/m^3 .

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -9.8 & 4 & 6 \\ 4 & -39.2 & 2 \\ 6 & 2 & -9.8 \end{pmatrix} \text{ kPa}$$



Asimismo, determine el tensor de esfuerzos viscosos. Considere que:

$$B_i = 0\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 - g\hat{e}_3 \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

19. El tensor σ_{ij} describe el estado de esfuerzos para un punto X_i de un fluido incompresible. Para σ_{ij} determine el tensor σ'_{ij} que depende exclusivamente de la velocidad de deformación; asimismo, determine la presión hidrostática asociada.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -25 & 8 & -5 \\ 8 & -15 & 12 \\ -5 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

20. Para un flujo irrotacional de un fluido no viscoso, homogéneo e isotrópico, deduzca la ecuación de Bernoulli a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes.

21. Determine el tensor de esfuerzos asociado a los siguientes campos de velocidad, considerando que se trata de un fluido viscoso.

- a) $v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = x_2$
- b) $v_1 = 0, \quad v_2 = x_2^3, \quad v_3 = -2x_2x_3$
- c) $v_1 = v_1(x_1, x_2), \quad v_2 = v_2(x_1, x_2), \quad v_3 = 0$

22. Para un flujo axisimétrico estable inducido por presión a través de una tubería de diámetro d , compruebe que el gasto másico está dado por

$$\dot{M} = \rho \frac{\alpha \pi d^4}{128 \mu}$$

considerando que se trata de un fluido newtoniano incompresible de densidad ρ , donde α representa el gradiente de presión

$$\rho = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

donde p es la presión y z es la dirección de flujo.

23. Demuestre que el campo de velocidades dado por

$$v_1 = \alpha \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{R^4} \right), \quad v_2 = \left(\frac{2\alpha x_1 x_2}{R^4} \right), \quad v_3 = 0$$

donde α representa una constante diferente de cero y $R^2 = x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ obedece a la ecuación de movimiento de Euler. Asimismo, determine la distribución de presiones asociada al campo de velocidades.

24. Para el siguiente campo de velocidades en coordenadas cilíndricas:

$$v_r = v(r, \theta), \quad v_\theta = 0, \quad v_z = 0$$

A partir de la ecuación de la continuidad verifique que $v_r = \frac{f(\theta)}{r}$

En ausencia de fuerzas de cuerpo, compruebe que $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + 4f + \rho \frac{(f)^2}{\mu} = 0$ y

$p = 2\mu \frac{f}{r^2} + c$, donde c representa una constante.

25. Explique usted, con base en conceptos fundamentales de la MMC, por qué un chorro de agua lanzado verticalmente hacia abajo tiende a adelgazarse (reduce aparentemente su sección) conforme se desplaza hacia el suelo. ¿Qué pasa ahora cuando el chorro se lanza verticalmente hacia arriba?

26. Determine la ecuación constitutiva para un fluido newtoniano para el cual su condición de Stokes es cero.

27. Demuestre que para el campo de velocidades $v_1 = v(x_2, x_3)$, $v_2 = v_3 = 0$, las ecuaciones de Navier Stokes, despreciando el efecto de las fuerzas de cuerpo, se reducen a

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \psi; \quad \psi = \text{cte}.$$

28. Determine el gasto (inducido por presión) de un fluido Newtoniano incompresible a través de un tubo de sección transversal elíptica: El tubo tiene un semieje menor α y un semieje mayor β .

29. Dado el campo de velocidades para un fluido Newtoniano incompresible

$$v_1 = k(x_1^2 - x_2^2); \quad v_2 = -2kx_1x_2; \quad v_3 = 0$$

Desarrolle la ecuación de Navier Stokes.

Determine el tensor de deformaciones y de esfuerzos asociado.

30. Si va usted a analizar el flujo de la sangre en venas y arterias, indique cuales consideraciones deberá realizar. Para dicho análisis, ¿es factible emplear las ecuaciones de Navier-Stokes?
31. Explique el principio de sustentación de un objeto más pesado que el aire. ¿la velocidad de despegue de un avión, por cuáles variables estará determinada?
32. Para el diseño estructural de un submarino, ¿qué parámetros deberán ser considerados?

CAPÍTULO 8

VISCOELASTICIDAD LINEAL

8.1 CONCEPTOS BÁSICOS

En los capítulos 6 y 7 de este texto, se ha presentado el comportamiento idealizado de sólidos y fluidos, los cuales se conceptualizaron como sólidos elásticos o de Hooke (figura 8.1a) y fluidos viscosos o newtonianos (figura 8.1b). En unos se consideró que la deformación es recuperable y sólo depende de la carga y no del tiempo (característica fundamental de un material elástico) $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$; asimismo, se definió que la deformación era muy pequeña (infinitesimal) y, por tanto, el fenómeno se caracterizaba como lineal (con todas las ventajas que esto tiene). Por su parte, los fluidos se han definido como medios continuos que se deforman mientras exista sollicitación y la velocidad de deformación dependerá de la carga aplicada $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\sigma)$. Sin embargo, el comportamiento real de cualquier medio continuo es de la forma $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, t)$. Esto significa que todos los materiales (medios continuos), independientemente que sean clasificados como sólidos o fluidos, presentarán fluencia; esto es, deformación en el tiempo dependiendo esto solo del tiempo de referencia.

El concepto anterior dio lugar al término Reología¹, que fue introducido por Eugene Bingham en 1929, y corresponde con la parte de la teoría de la mecánica de medios continuos orientada al estudio de los medios que fluyen. Marcus Reiner² (1886-1976) cofundador de la Sociedad Reológica y junto con Bingham, uno de los que acuñó el término e inició la disciplina en los años treinta del siglo pasado, al explicar la razón por la que acuñó el número adimensional conocido como de Débora (utilizado en reología para caracterizar la fluidez de los materiales) $De = t_r/t_0$ (donde t_r es el tiempo de relajación y t_0 , el tiempo de exposición),

¹ Del griego *ρην* que significa fluir.

² *Physics Today*, enero de 1964.

se refieren a la profeta del antiguo testamento de nombre Débora, la cual menciona “*Las montañas fluirán ante el señor*” (Jueces 5.5).

Este concepto en el siglo VI a. C. fue retomado por el filósofo Heráclito de Efeso, quien menciona que “todo en el mundo fluye”; es entonces que con estos dos enunciados se puede concluir que todo fluirá, aún las montañas, todo depende de los tiempos de observación (todas las sustancias pueden fluir, solo habrá que esperar el tiempo adecuado). Por tanto, que la diferencia entre sólido y fluido estará dada por la magnitud del número de Débora (figura 8.1). Esto es, si el tiempo de relajación t_r es mucho menor que el de observación t_o , entonces se considera que el material fluye; por otra parte si $t_r \gg t_o$, se considera que se trata de un sólido.

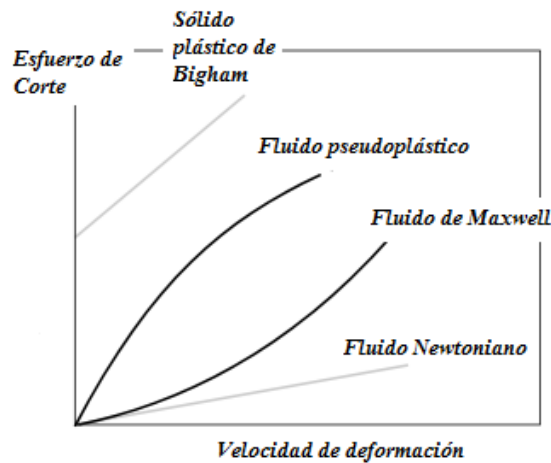


FIGURA 8.1 COMPORTAMIENTOS CARACTERÍSTICOS DE DIVERSOS MEDIOS IDEALIZADOS

Desde la perspectiva de la ingeniería, el tiempo de observación representa *al de servicio*, para así definir De y describir el comportamiento. Para considerar un medio como sólido de Hooke, es necesario que éste tenga un tiempo de relajación muy grande o tiempos de servicio muy reducidos. Particularmente, considerando De se tiene que si $De \ll 1$ el comportamiento se describe como viscoso; si $De \approx 1$ el comportamiento se describe como viscoelástico y si $De \gg 1$, éste será elástico (figura 8.2). Este tipo de comportamientos se relacionan comúnmente con plásticos; los tiempos de relajación de algunos son, por ejemplo, PEBD-6s, PE-1s, PVC-30s, PET-2s.

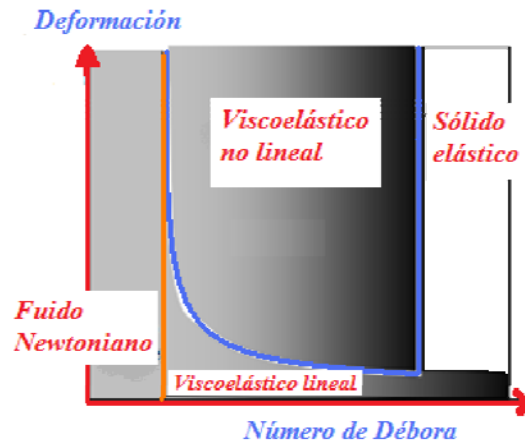


FIGURA 8.2 EFECTO DEL NÚMERO DE DÉBORA

Con base en lo expuesto, se idealiza un tercer tipo de medios continuos (diferentes de fluidos y sólidos) para los cuales $De \approx 1$, entonces existen materiales cuyo comportamiento es un híbrido de un sólido elástico y de un fluido newtoniano. A estos se les denomina como viscoelásticos, de acuerdo con sus características y aspecto físico se pueden tratar de fluidos no newtonianos; en este caso se encuentran materiales como la miel, la sangre o el chapopote, los cuales además de disipar energía tiene la capacidad de almacenarla. Por otra parte, se pueden agrupar los sólidos inelásticos, en los que la deformación es función de la sollicitación y del tiempo. En estos puede presentarse un retardo de la deformación con relación a la sollicitación (sólido de Kelvin) o presentar una deformación instantánea y, posteriormente, al continuar aplicada la carga tendrán una componente de deformación en función del tiempo. Por ejemplo, los metales a elevada temperatura ($\theta \geq 0.7\theta_f$ °K), los plásticos y aún los cerámicos se caracterizan por presentar una deformación elástica instantánea que es proporcional a la sollicitación (esfuerzo) aplicada; sin embargo, éstos presentan una componente de deformación permanente, tal como un fluido newtoniano, la cual es función del tiempo de aplicación de la carga. A dicho comportamiento se le identifica como *Creep* o fluencia lenta. Es necesario recordar en este punto que cuando se define el comportamiento idealizado de un sólido de Hooke se considera que la deformación es función de la sollicitación $\varepsilon = f(\sigma)$ y que no depende del tiempo $\varepsilon \neq f(t)$. Por otra parte, se considera que el sólido durante su deformación almacena energía, pero que no la disipa, con esta observación, si se toma una masa y se suspende ésta de un resorte para después

desplazarla en dirección de la gravedad y soltarla posteriormente, de no existir una componente de disipación el sistema masa-resorte continuará oscilando mientras que no exista alguna fuerza que influya en este desplazamiento; sin embargo, se observa que el movimiento tiende a ser amortiguado. Por consecuencia, se puede suponer que la descripción de sólido elástico es ideal y que los sólidos en términos generales presentan un comportamiento elastoviscoso.

Como ya ha sido mencionado para los fluidos, se define un comportamiento lineal de la forma $\dot{\epsilon} = f(\tau)$, describiéndose a un fluido como aquel medio que no soporta esfuerzos cortantes, ni aún los producidos por su propio peso. Al comportamiento de la forma $\sigma'_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$ (donde σ'_{ij} representa las componentes viscosas del esfuerzo) se describe como newtoniano; por otra parte, fluidos como la miel, las escorias metálicas a temperaturas superiores a las de fusión, el vidrio fundido o el chapopote presentan comportamientos que no corresponden con el descrito para un medio newtoniano, por lo que éstos se describen como fluidos no newtonianos o también como comportamientos viscoelásticos.

De todo lo antes mencionado, se concluye la existencia de medios con comportamientos híbridos con una correspondencia tanto a fluidos como sólidos, por tanto, es necesario generar ecuaciones constitutivas para éstos.

Para reconocer la génesis en el estudio de los medios viscoelásticos, se debe retroceder al siglo XVII con los trabajos de Hooke (1678) e Issac Newton (1687), que describen conceptos que dieron inicio a la mecánica de los fluidos. Conceptos que en el siglo XIX fueron continuados con los trabajos de J. C. Maxwell (1867), W. Weber, Boltzman, y W. Thomson (Lord Kelvin, 1962), quienes realizaron diversos experimentos que permitieron visualizar tipos de comportamientos que iban más allá de lo previsto para sólidos de Hooke y fluidos newtonianos; los que ahora se definen como viscoelásticos. Fue hasta las primeras décadas del siglo XX en que Eugene Bingham introdujo el término en colaboración con Marcus Reiner.

Para esta primera parte del análisis y con el fin de facilitar el estudio del comportamiento viscoelástico se considerará una condición uniaxial y se definirá la analogía para un sólido (resorte) y un fluido (amortiguamiento viscoso), tal como se presenta en las figuras 8.3 y 8.4.

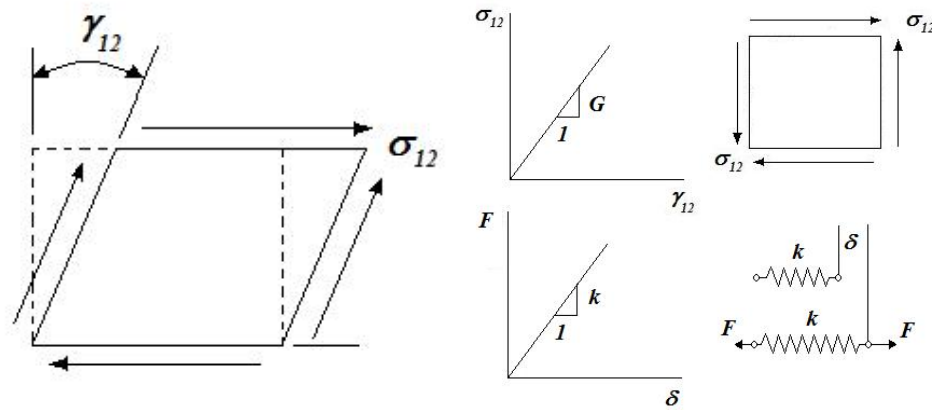


FIGURA 8.3 UN SÓLIDO DE HOOKE AL APLICARLE UNA CARGA PRESENTA UNA DEFORMACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A ÉSTA. EL MEDIO ALMACENA ENERGÍA

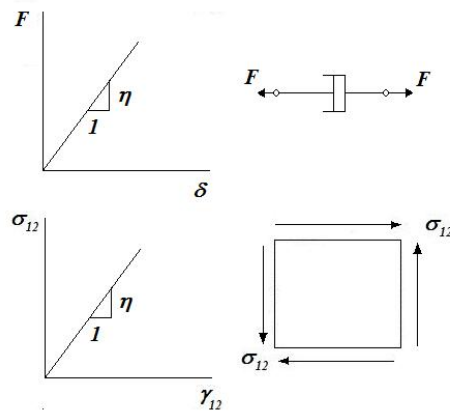


FIGURA 8.4 ANALOGÍA PARA UN FLUIDO NEWTONIANO, AL APLICARLE UNA CARGA PRESENTA UNA RAPIDEZ DE DEFORMACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A LA CARGA APLICADA. EL MEDIO DISIPA ENERGÍA

8.2 COMPORTAMIENTO CARACTERÍSTICO DE LOS FLUIDOS NO NEWTONIANOS

Los materiales viscoelásticos pueden presentar diversos comportamientos:

Si la sollicitación (esfuerzo) es constante, entonces el material se deforma de manera lineal con el tiempo (creep) o si la deformación es constante la sollicitación se reduce con el tiempo (relajación), esto corresponde con el denominado como modelo de Maxwell, el cual esquemáticamente se representa como un amortiguador y resorte conectados en serie (figura 8.5).

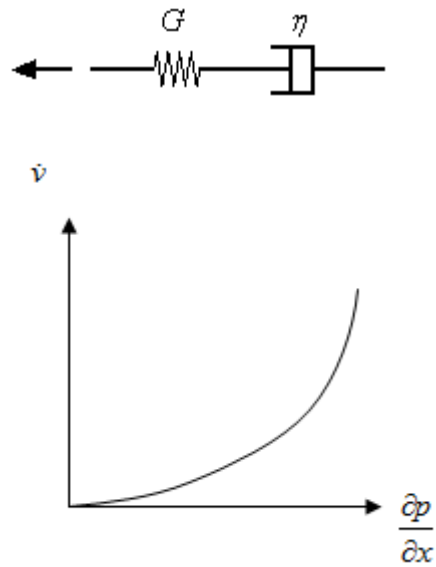


FIGURA 8.5 UN FLUIDO DE MAXWELL SE CARACTERIZA POR NO PRESENTAR UNA RESPUESTA LINEAL CON LOS ESFUERZOS A CORTE, DE TAL FORMA QUE SU COMPORTAMIENTO ES NO LINEAL. ÉSTE MODELO SE APLICA PARA DESCRIBIR EL COMPORTAMIENTO DE LOS FLUIDOS NO LINEALES

$$\dot{\gamma} \propto \frac{\partial p}{\partial x}$$

Los fluidos no newtonianos almacenan energía elástica, entonces existe un tiempo de relajación.

Otro modelo básico es el de Kelvin (figura 8.6), el cual representa un sólido en el que se presenta retardo en la respuesta tanto en la carga como la descarga, de tal forma que $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, t)$.

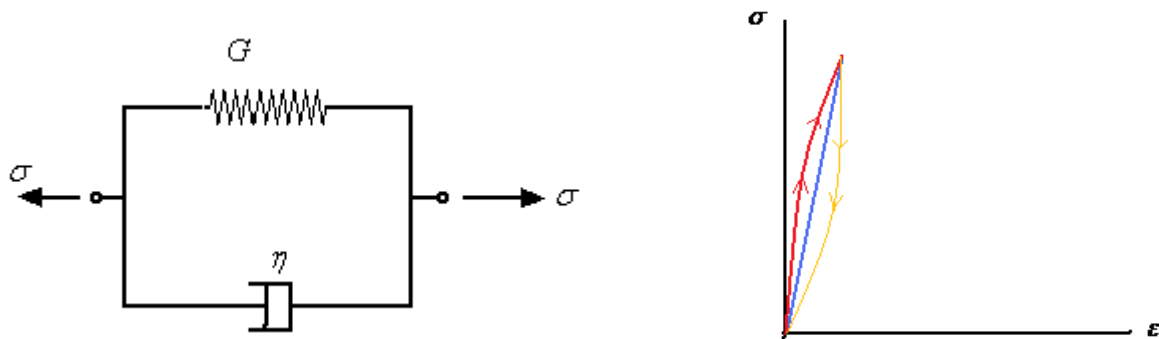


FIGURA 8.6 MODELO DE KELVIN

8.3 TEORÍA UNIAXIAL

Fluido lineal viscoelástico (Fluido de Maxwell)

Un fluido lineal de Maxwell es definido por las ecuaciones constitutivas:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}^{VE}$$

donde $(-p\delta_{ij})$ es la presión isotrópica; ésta es indeterminada considerando incompresibilidad del fluido, σ_{ij}^{VE} representa la componente de esfuerzo relacionado con el comportamiento viscoelástico del fluido no newtoniano.

Analizando el fenómeno de forma uniaxial, la deformación en el fluido de Maxwell (figura 8.5) está dada por la suma de la deformación del resorte ε_E (componente elástica del sistema) más la deformación del amortiguamiento viscoso ε_V (componente viscosa).

$$\varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_V$$

Por consecuencia, la rapidez de deformación $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$, se describe por:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_E + \dot{\varepsilon}_V \quad (8.1)$$

Considerando que la componente elástica es lineal, se tiene que:

$$\varepsilon_E = \frac{\sigma}{G} \quad (8.2)$$

En consecuencia $\Rightarrow \dot{\varepsilon}_E = \frac{\dot{\sigma}}{G}$, donde G representa la constante elástica (módulo de rigidez a corte). Por su parte, el amortiguamiento viscoso (componente viscosa del comportamiento) se expresa como (la relación esfuerzo a velocidad de deformación es lineal):

$$\dot{\varepsilon}_V = \frac{\sigma}{\eta} \quad (8.3)$$

donde η representa la viscosidad.

Sustituyendo las ecuaciones 8.2 y 8.3 en 8.1, se tiene la ecuación uniaxial constitutiva para un solo elemento de Maxwell

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Reordenando y haciendo un cambio de variable

$$\eta \dot{\varepsilon} = \frac{\eta}{G} \dot{\sigma} + \sigma$$

$$\lambda = \frac{\eta}{G}$$

$$\eta \dot{\varepsilon} = \lambda \dot{\sigma} + \sigma \quad (8.4)$$

$$\eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \lambda \frac{d\sigma}{dt} + \sigma \quad (8.5)$$

La ecuación 8.4 representa una relación de la forma $\varepsilon = f(\sigma, \dot{\sigma})$ o, de otra manera, $\varepsilon = g(\sigma, t)$.

Primer experimento con el elemento de Maxwell

Para resolver el sistema planteado en la ecuación 8.1, se puede considerar que en $t = 0$ se

aplica una carga σ_0 constante $\Rightarrow \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} = 0$

$$\therefore \sigma_0 = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma_0}{\eta} = 0$$

La solución de la ecuación diferencial es

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \varepsilon_0 \quad (8.6)$$

La constante de integración ε_0 para una deformación inicial instantánea es $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{G}$

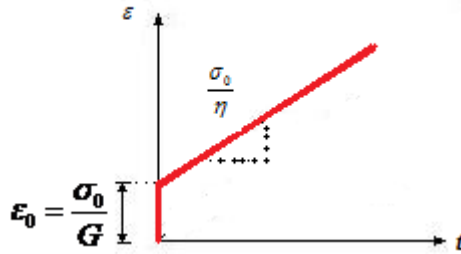


FIGURA 8.7 RELACIÓN DEFORMACIÓN-TIEMPO PARA UNA SOLICITACIÓN CONSTANTE. FLUIDO DE MAXWELL

De la ecuación 8.6 queda

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{G}{\eta}t + 1 = J \quad (8.7)$$

donde J representa la función de demanda en fluencia lenta (Creep) para el elemento lineal de Maxwell.

Segundo experimento de Maxwell. Experimento de relajación de esfuerzos

A un sistema cuyo comportamiento se representa a través del modelo uniaxial de Maxwell se le aplica una deformación inicial ε_0 para $t=0$ la cual se mantiene, la incógnita ahora está dada por $\sigma = h(t)$:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0; \text{ ya que } \varepsilon = \text{cte}$$

de la ecuación diferencial 8.4 se tiene que

$$\sigma + \lambda \frac{d\sigma}{dt} = 0$$

La solución de esta ecuación es

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(\frac{-t}{\lambda}\right)$$

La constante de integración σ_0 para un esfuerzo inicial instantáneo es

$$\sigma_0 = G\varepsilon_0$$

$$\sigma = G\varepsilon_0 \exp\left(\frac{-t}{\lambda}\right) \quad (8.8)$$

$$\varphi(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = G \exp\left(\frac{-t}{\lambda}\right) = \frac{\eta}{\lambda} \exp\left(\frac{-t}{\lambda}\right) \quad (8.9)$$

donde λ representa el tiempo de relajación y $\varphi(t)$ es la función de relajación de esfuerzos, veáse la figura 8.8. Por otra parte, si la rigidez elástica del sistema representada a través de G es muy elevada ($G \rightarrow \infty$), entonces el elemento no se comporta elásticamente y es puramente viscoso.

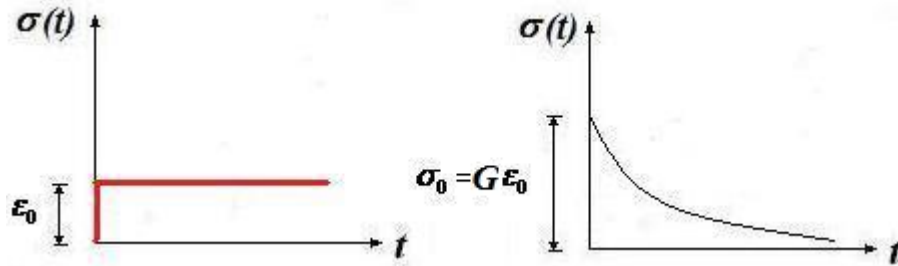


FIGURA 8.8 RELAJACIÓN DE ESFUERZOS AL APLICAR UNA DEFORMACIÓN CONSTANTE

Algunos ejemplos de materiales que se comportan elásticamente bajo cargas moderadas a temperaturas mucho menores de la de fusión son el acero, cobre y sus aleaciones, aluminio y sus aleaciones, y en general la gran mayoría de los metales, así como algunos plásticos como el acrílico y biomateriales como el hueso cortical (es conveniente recordar el número de Débora y los conceptos que de éste se derivan). Por otra parte, una gran cantidad de polímeros presentan flujo viscoso, sin embargo, éstos son muy interesantes porque pueden presentar un comportamiento elástico, plástico o mixto. Por ejemplo, el propio metilmetalacrílico puede modelarse como sólido elástico, pero al elevar su temperatura se comporta como un flujo viscoso.

Modelo de Kelvin

El modelo de Kelvin (figura 8.9) permite describir el comportamiento de un sólido inelástico. En éste la deformación es función de la sollicitación y del tiempo, el elemento viscoso produce un retardo en la deformación (ésta no será instantánea, como se presume en un sólido de Hooke, figura 8.1).

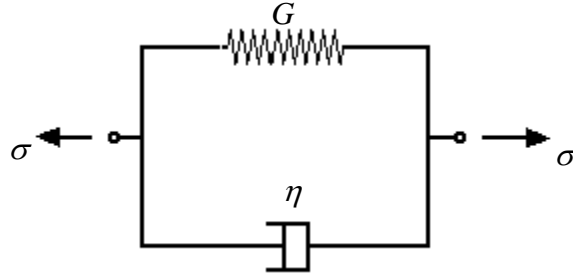


FIGURA 8.9 MODELO DE KELVIN

En este caso, se tiene que las deformaciones del elemento elástico y de la componente viscosa serán iguales; $\varepsilon_V = \varepsilon_E = \varepsilon$, situación equivalente para la velocidad de deformación $\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon}_V = \dot{\varepsilon}_E$, por consecuencia, $\varepsilon_E = \frac{\sigma}{G}$; $\dot{\varepsilon}_V = \frac{\sigma}{\eta}$. Por su parte, la carga se distribuye entre resorte y amortiguamiento viscoso por lo que $\sigma = \sigma_E + \sigma_V$, entonces, sustituyendo se tiene que:

$$\sigma = G\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (8.10)$$

O, de otra forma,

$$\sigma = G\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (8.11)$$

La solución de la ecuación diferencial antes planteada, partiendo de que $\sigma = 0$ para $t \leq 0$, $\sigma = \sigma_0 = \text{cte}$ para $t > 0$ está dada por:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \quad (8.12)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) \quad (8.13)$$

La solución antes expuesta, representa que la deformación tiene un tiempo de retardo con relación a la aplicación de la sollicitación, tanto al momento de carga como de descarga del elemento, figura 8.10.

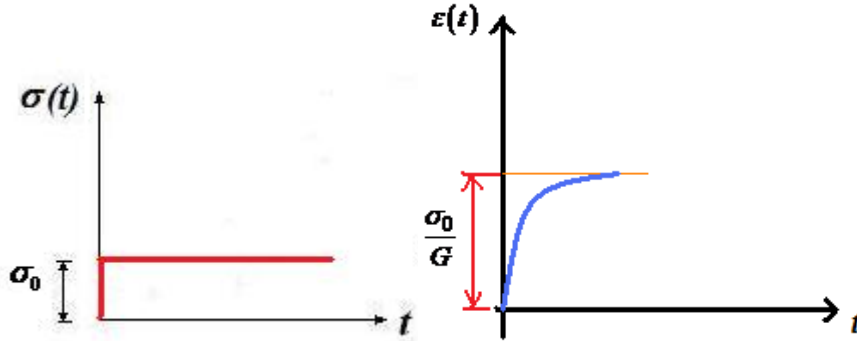


FIGURA 8.10 RESPUESTA DE LA DEFORMACIÓN AL APLICAR UNA SOLICITACIÓN CONSTANTE A UN MATERIAL QUE SE COMPORTA DE ACUERDO CON EL MODELO DE KELVIN

8.4 MODELOS COMPUESTOS

Modelos de 3 elementos

Los modelos simples, tanto de Kelvin como de Maxwell, no son suficientes en la mayoría de los casos prácticos para representar con precisión el comportamiento real de sólidos o fluidos, razón por la que se han propuesto modelos un poco más complejos, tal es el caso del sólido lineal estándar (figura 8.11).

La deformación total ε está dada por la suma de la deformación del elemento de Kelvin y del resorte con constante G_1 , esto es

$$\varepsilon = \varepsilon_{E_1} + \varepsilon_K$$

donde

$$\varepsilon_{E_1} = \frac{\sigma}{G_1} \quad \text{y} \quad \varepsilon_K = \frac{\sigma}{\left(G_2 + \eta_2 \frac{\partial}{\partial t} \right)}$$

por lo que la ecuación diferencial es de la forma:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{G_1} + \frac{\sigma}{\left(G_2 + \eta_2 \frac{\partial}{\partial t}\right)} = \frac{\sigma \left[(G_2 + G_1) + \eta_2 \frac{\partial}{\partial t} \right]}{G_1 G_2 + G_1 \eta_2 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow G_1 \eta_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + G_1 G_2 \varepsilon = \sigma (G_2 + G_1) + \eta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (8.14)$$

La ecuación 8.7 se expresa entonces como:

$$a_1 \dot{\varepsilon} + a_2 \varepsilon = b_2 \sigma + b_1 \dot{\sigma} \quad (8.15)$$

Es conveniente mencionar que la ecuación constitutiva del sólido elástico de tres elementos se puede describir también como un elemento de Maxwell colocado en paralelo con un resorte (figura 8.12).

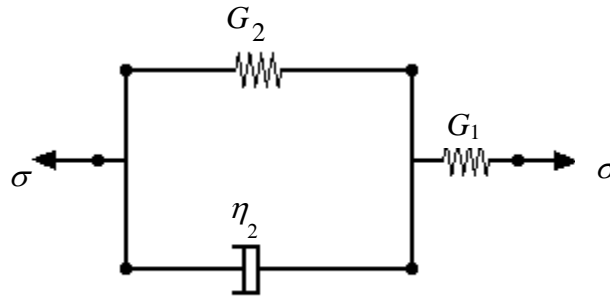


FIGURA 8.11 SÓLIDO LINEAL ESTÁNDAR

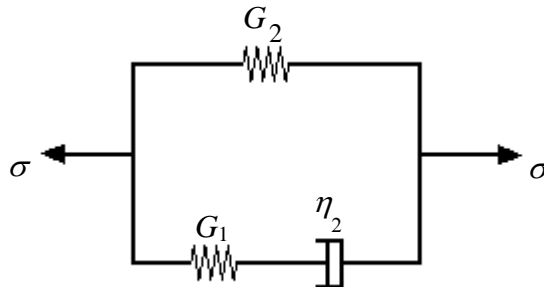


FIGURA 8.12 SÓLIDO LINEAL ESTÁNDAR ESTRUCTURADO A TRAVÉS DE LA CONJUNCIÓN DE UN ELEMENTO DE MAXWELL EN PARALELO CON UN RESORTE

Para el caso presentado en la figura 8.12 se tiene que:

$$\varepsilon_{R_1} = \varepsilon_M = \varepsilon ; \sigma = \sigma_{R_1} + \sigma_M$$

$$\sigma_{R_1} = G_1 \varepsilon ; \varepsilon_M = \varepsilon_{R_2} + \varepsilon_V \Rightarrow \dot{\varepsilon}_M = \dot{\varepsilon}_{R_2} + \dot{\varepsilon}_V \quad \varepsilon_{R_2} = \frac{\sigma_M}{G_2}$$

$$\sigma_M = \eta_2 \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial t} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_M}{G_2} + \frac{\sigma_M}{\eta_2} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left(\frac{1}{G_2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_2} \right) \sigma_M$$

$$\therefore \sigma = G_1 \varepsilon + \frac{1}{\left(\frac{1}{G_2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_2} \right)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \sigma \left(\frac{1}{G_2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_2} \right) = G_1 \left(\frac{1}{G_2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_2} \right) \varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{1}{G_2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\eta_2} = \frac{G_1}{G_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{G_1}{\eta_2} \varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

De lo antes expuesto, se tiene que el modelo representado en la figura 8.13 tiene una ecuación diferencial como la mostrada en la expresión 8.16, con lo que se comprueba la equivalencia con el sólido elástico de tres elementos.

$$\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \beta \varepsilon = \phi \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varphi \sigma \quad (8.16)$$

El modelo viscoso de tres elementos se presenta como se muestra en la figura 8.14: un Kelvin más un elemento viscoso, con éste se describe el comportamiento de un fluido viscoso no lineal, su representación equivalente es la de un Maxwell que tiene en paralelo un elemento viscoso (figura 8.15).

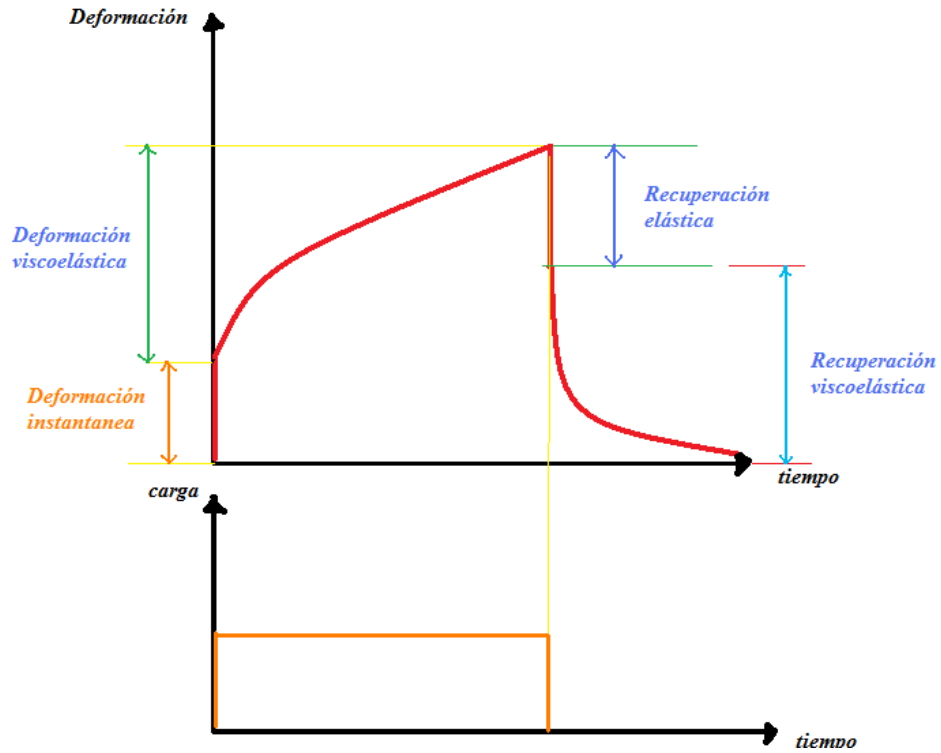


FIGURA 8.13 COMPORTAMIENTO DE UN SÓLIDO LINEAL ESTÁNDAR (SÓLIDO ELÁSTICO DE TRES ELEMENTOS). ESTE TIPO DE COMPORTAMIENTO ES CARACTERÍSTICO DE POLÍMEROS (PLÁSTICOS), TAL COMO EL POLIMETILMETACRILATO

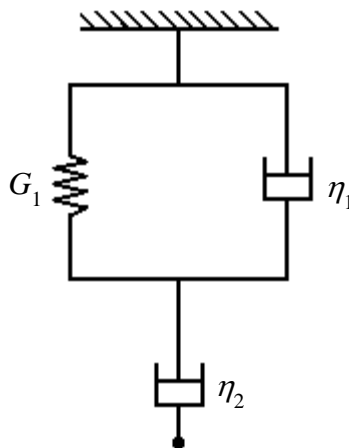


FIGURA 8.14 MODELO VISCOSO DE TRES ELEMENTOS

La ecuación diferencial que representa este sistema está dada por la ecuación 8.17. Para su desarrollo es necesario considerar que:

$$\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_{\eta_2} \quad ; \quad \sigma = \sigma_K = \sigma_{\eta_2}$$

$$\sigma_{\eta_2} = \eta_2 \frac{\partial \varepsilon_{\eta_2}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\eta_2} = \frac{\sigma}{\eta_2 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\sigma = \sigma_{G_1} + \sigma_{\eta_1} = G_1 \varepsilon_K + \eta_1 \frac{\partial \varepsilon_K}{\partial t} = \left(G_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_K$$

$$\therefore \quad \varepsilon_K = \frac{\sigma}{G_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{G_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t}} + \frac{\sigma}{\eta_2 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\therefore \quad G_1 \eta_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = (\eta_1 + \eta_2) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + G_1 \sigma \quad (8.17)$$

$$\Rightarrow \quad a_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = b_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + b_2 \sigma \quad (8.18)$$

Por otra parte, en la figura 8.15 se presenta un modelo alternativo que permite describir un comportamiento viscoelástico mediante tres elementos.

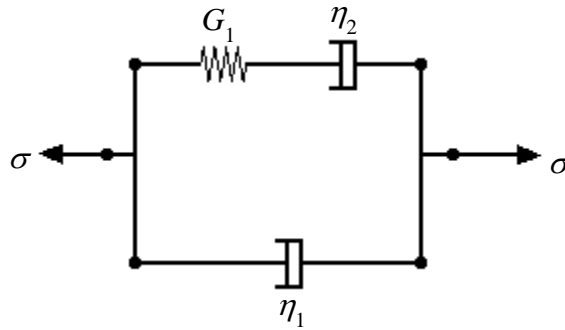


FIGURA 8.15 FORMA ALTERNATIVA PARA REPRESENTAR UN SISTEMA VISCOSE DE TRES ELEMENTOS

Modelo de cuatro elementos

Otro modelo compuesto es el de cuatro parámetros, el cual representa la combinación de un modelo de Kelvin con uno de Maxwell (figura 8.16), éste puede describir el comportamiento de los diversos sistemas viscoelásticos básicos, la ecuación diferencial que describe su comportamiento está dada por la ecuación 8.19. Este sistema incorpora los diferentes comportamientos viscoelásticos, ya que presenta una respuesta elástica inmediata debido al elemento G_2 , flujo viscoso (relajación de esfuerzos) por efecto del elemento viscoso η_2 y un retardo en la respuesta elástica por efecto del elemento de Kelvin que se encuentra en serie (G_1, η_1) .

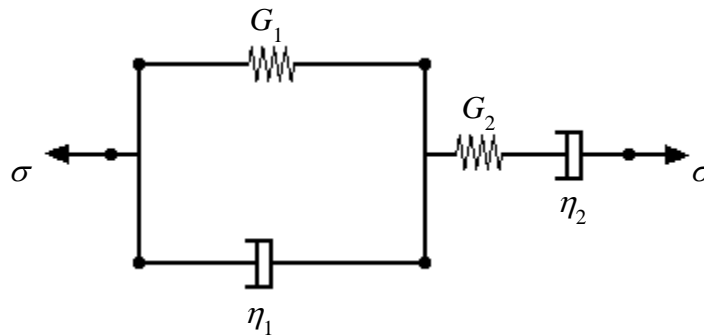


FIGURA 8.16 MODELO VISCOELÁSTICO DE CUATRO ELEMENTOS

En este caso se tiene que:

$$\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_M$$

$$\varepsilon_K = \varepsilon_{G_1} = \varepsilon_{\eta_1}$$

$$\sigma = \sigma_K = \sigma_M$$

$$\sigma_{G_1} + \sigma_{\eta_1} = \sigma$$

$$\sigma_{G_1} = G_1 \varepsilon_{G_1} = G_1 \varepsilon_K$$

$$\sigma_{\eta_1} = \eta_1 \frac{\partial \varepsilon_{\eta_1}}{\partial t} = \eta_1 \frac{\partial \varepsilon_K}{\partial t}$$

$$G_1 \varepsilon_K + \eta_1 \frac{\partial \varepsilon_K}{\partial t} = \sigma = \left(G_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_K$$

$$\therefore \varepsilon_K = \frac{\sigma}{G_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\varepsilon_M = \varepsilon_{G_2} + \varepsilon_{\eta_2}$$

$$\sigma_{G_2} = \sigma_{\eta_2} = \sigma$$

$$\varepsilon_{G_2} = \frac{\sigma}{G_2}$$

$$\sigma = \eta_2 \frac{\partial \varepsilon_{\eta_2}}{\partial t} \Rightarrow \varepsilon_{\eta_2} = \frac{\sigma}{\eta_2 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\varepsilon_M = \frac{\sigma}{G_2} + \frac{\sigma}{\eta_2 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \left[\frac{\sigma}{G_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t}} \right] + \left[\frac{\sigma}{G_2} + \frac{\sigma}{\eta_2 \frac{\partial}{\partial t}} \right]$$

$$\therefore \quad \varepsilon = \frac{G_2 \eta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + G_1 G_2 \sigma + \eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + G_1 \eta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + G_2 \eta_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t}}{G_1 G_2 \eta_2 \frac{\partial}{\partial t} + G_2 \eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}} \quad (8.19)$$

De lo antes expuesto, la ecuación diferencial que describe el fenómeno es de la forma

$$G_1 G_2 \eta_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + G_2 \eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = G_1 G_2 \sigma + G_2 \eta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + G_1 \eta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + G_2 \eta_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad a_2 \ddot{\varepsilon} + a_1 \dot{\varepsilon} = b_0 \sigma + b_1 \dot{\sigma} + b_2 \ddot{\sigma} \quad (8.20)$$

8.5 MODELOS GENERALIZADOS

Modelo generalizado de Kelvin

En la mayoría de las ocasiones, el empleo de un solo elemento de Kelvin o de Maxwell, no es suficiente para modelar el comportamiento de un material, es por consecuencia que se definen los modelos generalizados (figuras 8.17 y 8.18).

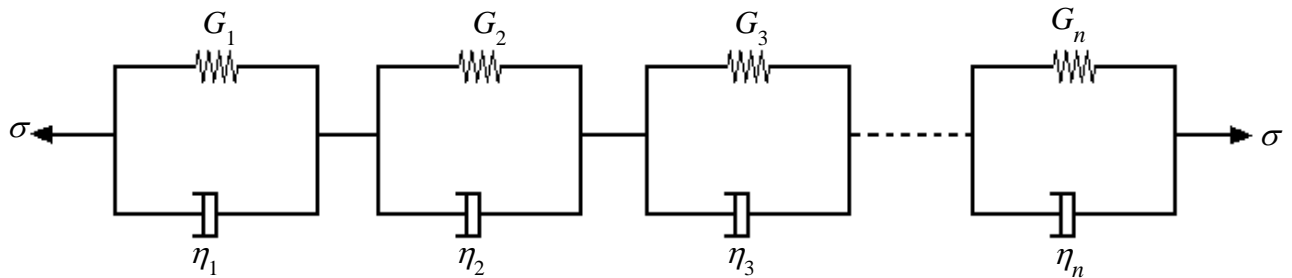


FIGURA 8.17 MODELO GENERALIZADO DE KELVIN

En el caso del modelo generalizado de Kelvin se tiene que la deformación total ε está dada por la suma de cada uno de los elementos individuales, entonces se tiene que

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

por otra parte, la ecuación 8.10 se expresa como

$$\sigma = \left(G + \eta \frac{d}{dt} \right) \varepsilon$$
$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{G_1 + \eta_1 \frac{d}{dt}} + \frac{\sigma}{G_2 + \eta_2 \frac{d}{dt}} + \frac{\sigma}{G_3 + \eta_3 \frac{d}{dt}} + \dots + \frac{\sigma}{G_n + \eta_n \frac{d}{dt}} \quad (8.21)$$

de la cual se desarrolla una ecuación diferencial de la forma:

$$a_n \frac{\partial^n \varepsilon}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \varepsilon}{\partial t^{n-1}} + a_{n-2} \frac{\partial^{n-2} \varepsilon}{\partial t^{n-2}} + \dots + a_0 \varepsilon =$$
$$b_m \frac{\partial^m \sigma}{\partial t^m} + b_{m-1} \frac{\partial^{m-1} \sigma}{\partial t^{m-1}} + b_{m-2} \frac{\partial^{m-2} \sigma}{\partial t^{m-2}} + \dots + b_0 \sigma \quad (8.22)$$

Ecuación que en forma compacta se expresa como

$$\{A\} \varepsilon = \{B\} \sigma \quad (8.23)$$

donde los operadores $\{A\}$ y $\{B\}$ están definidos por:

$$A = \sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}, \quad B = \sum_{i=0}^m b_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}. \quad (8.24)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \varepsilon = \sum_{i=0}^m b_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \sigma$$

Modelo generalizado de Maxwell

Por su parte, en el modelo generalizado de Maxwell (figura 8.18), la sollicitación total σ se divide en los n elementos de éste, de tal forma que $\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i$; por otra parte, considerando la ecuación diferencial para el modelo básico de Maxwell:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\eta} = \left(\frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta} \right) \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}}{\frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta}}$$

Se tiene que:

$$\sigma = \frac{\dot{\varepsilon}}{\frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1}} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\frac{1}{G_2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_2}} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\frac{1}{G_3} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_3}} + \dots + \frac{\dot{\varepsilon}}{\frac{1}{G_n} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_n}} \quad (8.25)$$

Ecuación que se expresa como:

$$\begin{aligned} \phi_n \frac{\partial^n \varepsilon}{\partial t^n} + \phi_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \varepsilon}{\partial t^{n-1}} + \phi_{n-2} \frac{\partial^{n-2} \varepsilon}{\partial t^{n-2}} + \dots + \phi_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \\ \zeta_m \frac{\partial^m \sigma}{\partial t^m} + \zeta_{m-1} \frac{\partial^{m-1} \sigma}{\partial t^{m-1}} + \zeta_{m-2} \frac{\partial^{m-2} \sigma}{\partial t^{m-2}} + \dots + \zeta_0 \sigma \end{aligned} \quad (8.26)$$

o de manera compacta como $\{\Phi\} \varepsilon = \{\Psi\} \sigma$, donde los operadores se describen como

$$\{\Phi\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^i}{\partial t^i}, \quad \{\Psi\} = \sum_{i=0}^m \frac{\partial^i}{\partial t^i} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^n \frac{\partial^i}{\partial t^i} \varepsilon = \sum_{i=0}^m \frac{\partial^i}{\partial t^i} \sigma \quad (8.27)$$

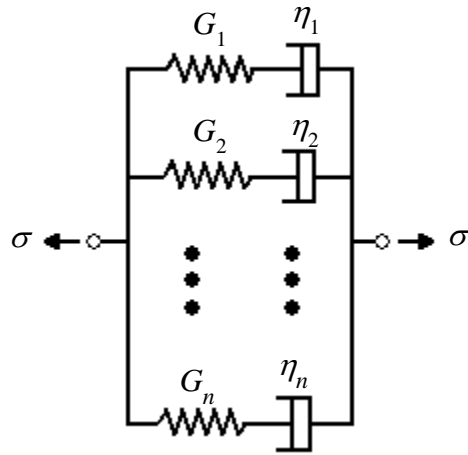


FIGURA 8.18 MODELO GENERALIZADO DE MAXWELL

8.6 FLUENCIA Y RELAJACIÓN DE ESFUERZOS

Los experimentos de flujo (fluencia) y relajación de esfuerzos ya fueron explicados anteriormente, cuando se presentaron los modelos simples de Maxwell y de Kelvin; de este último se tiene que si $\sigma = \sigma_0$ para $t \geq 0$ y partiendo de que

$$\sigma = \sigma_V + \sigma_E \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \quad (8.28)$$

por lo tanto, si la sollicitación es de la forma $\sigma = \sigma(t)$ o si en su defecto la carga

$$\sigma = 0 \quad \forall \quad t < t_0; \quad \sigma = \sigma_0 f(t)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)} \right) f(t-t_0)$$

De la ecuación 8.11 se tiene que la deformación se puede expresar en la forma

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 U(t) J(t)$$

donde el término $J(t)$ se denomina función de flujo

$$J(t) = \frac{1}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)} \right) \quad (8.29)$$

y $u(t)$ puede ser una función escalón.

Para un modelo generalizado se expresa como

$$J(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{G_i} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \right) \quad (8.30)$$

Si el número de unidades de Kelvin se incrementa indefinidamente, entonces,

$$J(t) = \int_0^{\infty} J(\lambda) \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) d\lambda \quad (8.31)$$

la función $J(\lambda)$ se describe como la distribución de tiempos de retardo o espectro de retardo.

Para el caso de un Maxwell se tiene que

$$\sigma(t) = G\varepsilon_0 [f(t)] + \eta\varepsilon_0 \delta(t)$$

en el caso de que la excitación se aplique para $t = 0$, entonces se tiene que

$$\sigma = G\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) U(t); \quad \lambda = \frac{\eta}{G}$$

De otra forma, se expresa también

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \frac{\delta(t)}{G} + \sigma_0 \frac{U(t)}{\eta}$$

donde $\delta(t)$ es la función de Dirac (función pulso) y

$$\delta(t-t_0) = \frac{dU(t-t_0)}{dt}$$

de tal forma que

$$\delta(t-t_0)=0 \quad \forall t \neq t_1$$

y la integral

$$\int_{t_0}^{t_1^+} \delta(t-t_0)dt=1,$$

Entonces, se tiene que

$$\int_{-\infty}^t f(t^*)\delta(t^*-t_0)dt^*=f(t_0)U(t-t_0) \text{ para } t > t_0,$$

para cualquier función continua $f(t)$.

De lo antes expuesto la función de relajación de Maxwell es

$$\sigma(t)=G\varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\lambda}}[U(t)] \quad (8.32)$$

Por su parte, para Kelvin la función de relajación se expresa

$$\sigma(t)=G\varepsilon_0[U(t)]+\eta\dot{\varepsilon}_0[\delta(t)] \quad (8.33)$$

La fluencia en un modelo cualquiera bajo una carga $\sigma=\sigma_0[U(t)]$ puede ser escrita como $\varepsilon(t)=f(t)\sigma_0$, donde $f(t)$ es la función de flujo. Entonces, para un modelo generalizado de Kelvin, la función tiene la forma

$$f(t)=\sum_{i=1}^n J_i \left(1-e^{-\frac{t}{\lambda_i}}\right)(U(t)) \quad (8.34)$$

Por su parte, para cualquier modelo sujeto a $\varepsilon=\varepsilon_0[U(t)]$, los esfuerzos se expresan como

$$\sigma(t)=G(t)\varepsilon_0$$

donde $G(t)$ se describe como función de relajación.

8.7 INTEGRALES HEREDITARIAS

Como ya se mencionó en los párrafos anteriores, la respuesta al flujo para cualquier modelo que es sometido a $\sigma = \sigma_0 U(t)$ será de la forma $\varepsilon(t) = J(t)\sigma_0$, donde $J(t)$ es la función de flujo; entonces, para un modelo generalizado de Kelvin se tiene

$$J(t) = \sum_{i=1}^n J_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \right) U(t)$$

donde $J_i = \frac{1}{G_i}$ se describe como la complianza (este término no existe en el castellano y

representa el barbarismo de la palabra inglesa compliance) o resiliencia. Lo mismo se puede aplicar para un modelo de Kelvin. Para los términos desarrollados en el presente capítulo se ha considerado que el comportamiento es lineal por lo que el principio de superposición es aplicable, esto representa que el efecto total está dado por la suma de las causas, las cuales se han aplicado a tiempos diferentes (figura 8.15); en ésta se observa que a diferentes tiempos se aplican diferentes sollicitaciones, por lo que la respuesta será de la forma

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \Psi(t) + \sigma_1 \Psi(t-t_1) + \sigma_2 \Psi(t-t_2) + \cdots + \sigma_i \Psi(t-t_i)$$

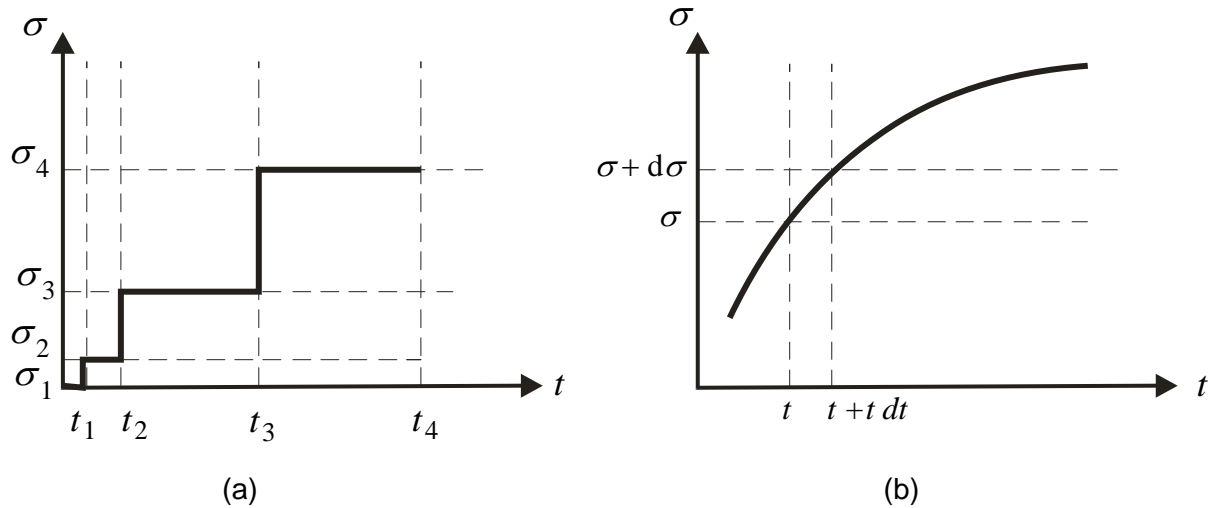
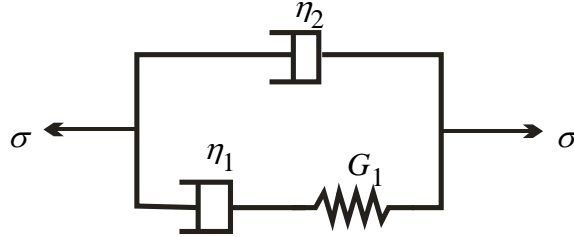


FIGURA 8.15 (a) A DIFERENTES TIEMPOS SE APLICAN (EN FORMA DISCRETA) INCREMENTOS EN LA SOLICITACIÓN. **(b)** LA FUNCIÓN DE ESFUERZOS ES UNA FUNCIÓN CONTINUA CON EL TIEMPO

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Desarrolle la ecuación diferencial que describe el comportamiento del siguiente sólido:

**SOLUCIÓN**

De los elementos con la constante elástica G_1 y el elemento viscoso η_1 (modelo de Maxwell)

$$\sigma = \sigma_E = \sigma_V ; \quad \varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_V \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_E + \dot{\varepsilon}_V$$

$$\sigma_E = G_1 \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{G_1}$$

$$\sigma_V = \eta_1 \dot{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta_1}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1}{G_1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\eta_1} = \sigma \left(\frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{\dot{\varepsilon}}{\left(\frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1} \right)}$$

Considerando el elemento de Maxwell con el elemento viscoso η_2

$$\varepsilon = \varepsilon_M = \varepsilon_V$$

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_V$$

$$\sigma_M = \frac{\dot{\varepsilon}}{\left(\frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1} \right)}$$

$$\sigma_V = \eta_2 \dot{\varepsilon}$$

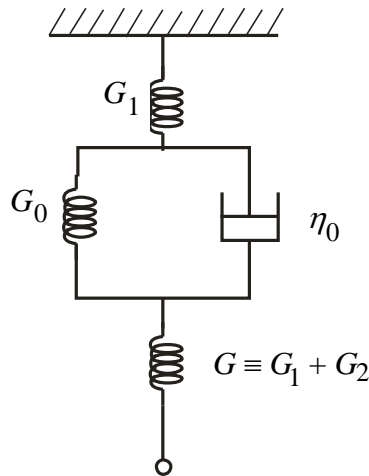
$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{\dot{\varepsilon}}{\left(\frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1} \right)} + \eta_2 \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\varepsilon} + \frac{\eta_2}{G_1} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}}{\frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{G_1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\eta_1} = \frac{\eta_2}{G_1} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

Esta ecuación diferencial es de la forma:

$$a_1 \dot{\sigma} + a_2 \sigma = b_1 \ddot{\varepsilon} + b_2 \dot{\varepsilon}$$

2. Un sólido viscoelástico es modelado mediante un arreglo de cuatro elementos de resorte y amortiguador, como el que se muestra en la siguiente figura.



- a) Establecer la ecuación diferencial para este modelo.

- b) A partir de ella plantear la ecuación diferencial para una prueba de fluencia; resolverla y trazar una gráfica de deformación vs. tiempo.
- c) Plantear y resolver la ecuación diferencial para una prueba de relajamiento: resolverla y trazar gráfica esfuerzo vs. deformación.
- d) Discutir las ventajas y desventajas de este modelo.

SOLUCIÓN

- a) El sistema que se propuso en este problema equivale a uno de solo tres elementos, como se ve en la figura anterior, y a partir de ella se establecen las siguientes expresiones:

$$\varepsilon = \varepsilon_R + \varepsilon_K \quad (1)$$

$$\sigma_R = \sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{y} \quad \varepsilon_R = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\sigma_1 = G_1 \varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{G_1}$$

$$\sigma_2 = G_2 \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma}{G_2}$$

$$\varepsilon_R = \frac{\sigma}{G_1} + \frac{\sigma}{G_2} = \frac{\sigma G_2 + \sigma G_1}{G_1 G_2} = \frac{\sigma (G_1 + G_2)}{G_1 G_2}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{G_1 G_2 \varepsilon_R}{G_1 + G_2}$$

Del elemento formado por componentes cuya constante elástica es G_0 y el elemento viscoso es η_0 (elemento de Kelvin)

$$\varepsilon_K = \varepsilon_E = \varepsilon_V$$

$$\sigma_K = \sigma_E + \sigma_V$$

$$\sigma_E = G_0 \varepsilon$$

$$\sigma_V = \eta_0 \dot{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \sigma_K = G_0 \varepsilon + \eta_0 \dot{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{\left(G_0 + \eta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right)}$$

Sustituyendo en la ecuación 1

$$\varepsilon = \varepsilon_R + \varepsilon_K = \frac{\sigma(G_1 + G_2)}{G_1 G_2} + \frac{\sigma}{G_0 + \eta_0 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\varepsilon = \frac{G_0 \sigma (G_1 + G_2) + \eta_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} (G_1 + G_2) + G_1 G_2 \sigma}{G_1 G_2 G_0 + G_1 G_2 \eta_0 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\therefore G_1 G_2 G_0 + G_1 G_2 \eta_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = G_0 \sigma (G_1 + G_2) + \eta_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} (G_1 + G_2) + G_1 G_2 \sigma \quad (2)$$

Esta ecuación diferencial es de la forma:

$$a_1 \dot{\varepsilon} + a_2 \varepsilon = b_1 \dot{\sigma} + b_2 \sigma$$

b) Para una prueba de fluencia,

$$\sigma \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sigma_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, la ecuación 2 se puede desarrollar como:

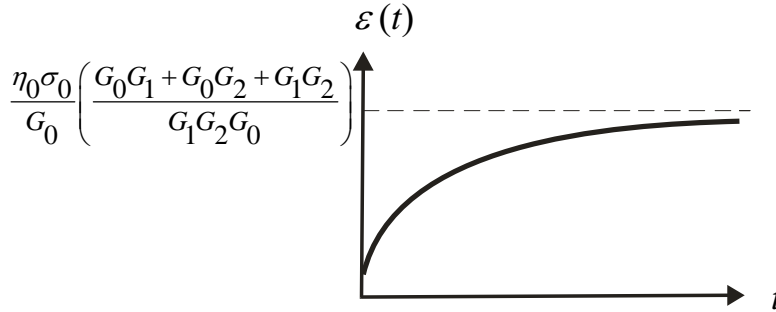
$$\dot{\varepsilon} + \frac{G_0}{\eta_0} \varepsilon = \sigma_0 \left(\frac{G_1 + G_2}{G_1 G_2} + \frac{1}{G_0} \right)$$

$$\dot{\varepsilon} + \frac{G_0}{\eta_0} \varepsilon = \sigma_0 \left(\frac{G_0 G_1 + G_0 G_2 + G_1 G_2}{G_1 G_2 G_0} \right) \quad (3)$$

Resolviendo la ecuación diferencial 3

$$\varepsilon(t) = \frac{\eta_0 \sigma_0}{G_0} \left(\frac{G_0 G_1 + G_0 G_2 + G_1 G_2}{G_1 G_2 G_0} \right) \left(1 - e^{-\left(\frac{G_0}{\eta_0}\right)t} \right)$$

Graficando este resultado se consigue lo siguiente:



- c) Para una prueba de relajación hay que imponer la condición de que la deformación se mantiene constante. Por lo tanto, la ecuación diferencial que se obtiene de la ecuación 2 es:

$$\dot{\sigma} + \left(\frac{G_0 G_1 + G_0 G_2 + G_1 G_2}{\eta_0 (G_1 + G_2)} \right) \sigma = \left(\frac{G_1 G_2 G_0}{\eta_0 (G_1 + G_2)} \right) \varepsilon_0 \quad (4)$$

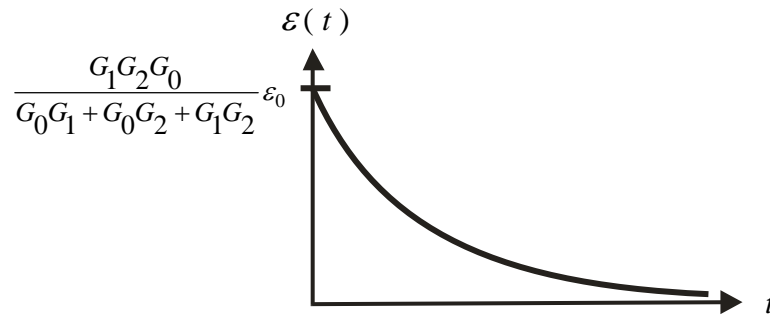
En donde las constantes a y b están representadas por:

$$a = \frac{G_0 G_1 + G_0 G_2 + G_1 G_2}{\eta_0 (G_1 + G_2)} ; \quad b = \frac{G_1 G_2 G_0}{\eta_0 (G_1 + G_2)}$$

Resolviendo la ecuación diferencial 4 se obtiene:

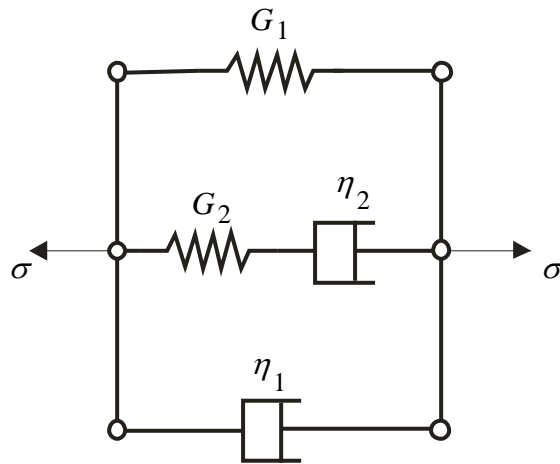
$$\sigma(t) = \frac{G_1 G_2 G_0 \varepsilon_0}{G_0 G_1 + G_0 G_2 + G_1 G_2} \left[1 - e^{-\left(\frac{G_0 G_1 + G_0 G_2 + G_1 G_2}{\eta_0 (G_1 + G_2)}\right)t} \right]$$

Ahora se dibuja una gráfica de Esfuerzos vs. Tiempo, a partir del resultado anterior.



- d) Al observar los resultados gráficos obtenidos, se puede concluir que este modelo falla en predecir adecuadamente la fluencia primaria y la fluencia secundaria, pues no exhibe la respuesta elasto-plástica ni la pendiente no nula en la fase secundaria. No obstante, sí predice cualitativamente una fluencia primaria.

La gráfica de relajación sí predice una curva cualitativamente correcta para esta prueba.



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Considerando el modelo de la siguiente figura como un caso generalizado del modelo de Maxwell, determine su ecuación esfuerzo-deformación.

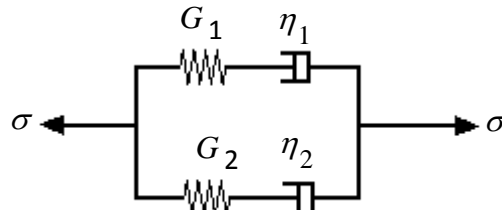


FIGURA 1

2. Para las siguientes analogías del comportamiento mecánico, determine usted la relación de deformación-tiempo.

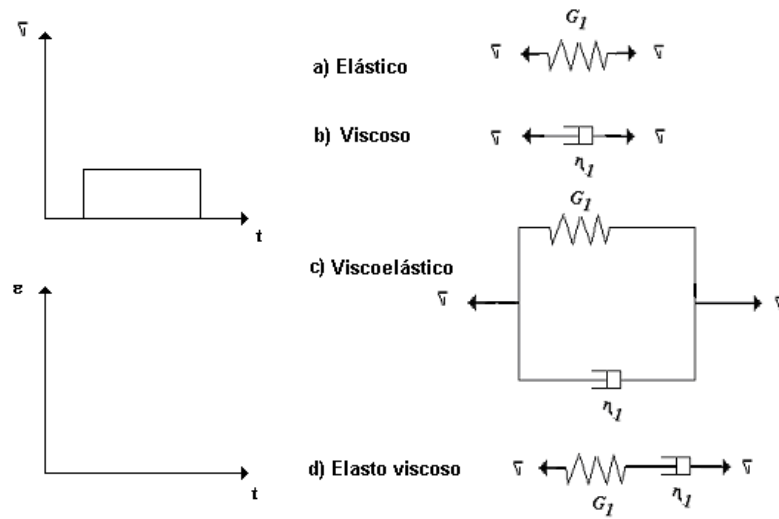


FIGURA 2

3. Indique el modelo mediante el cual se puede representar el comportamiento mecánico de las rocas.
4. Determine la función de relajación $\varphi(t)$ para un medio que se comporta según la analogía de la figura 3.

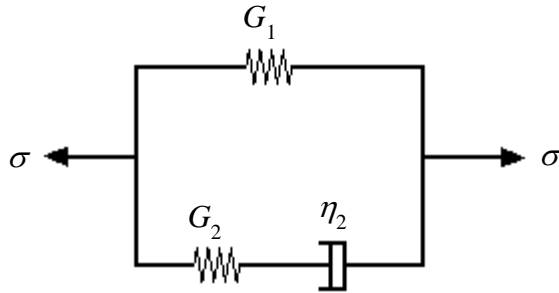
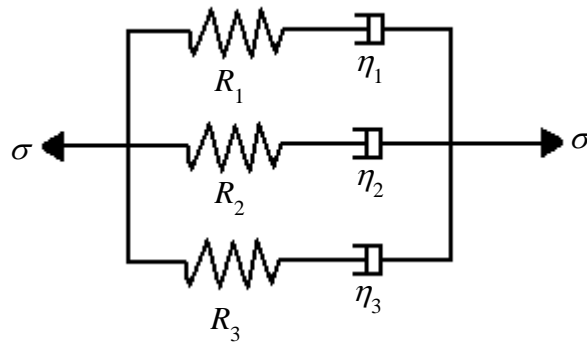


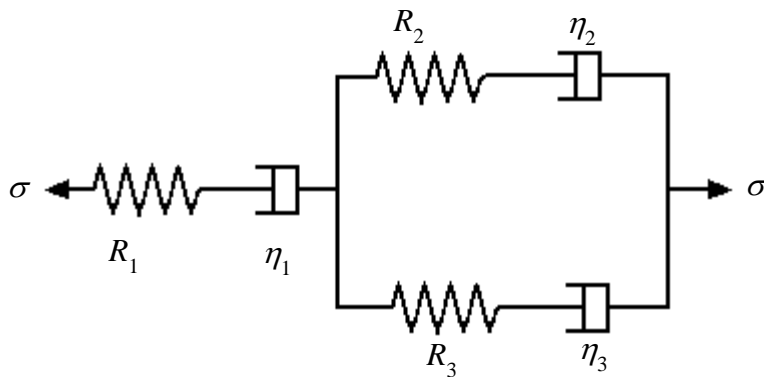
FIGURA 3

5. El comportamiento de un material se ha modelado de acuerdo con la siguiente figura.

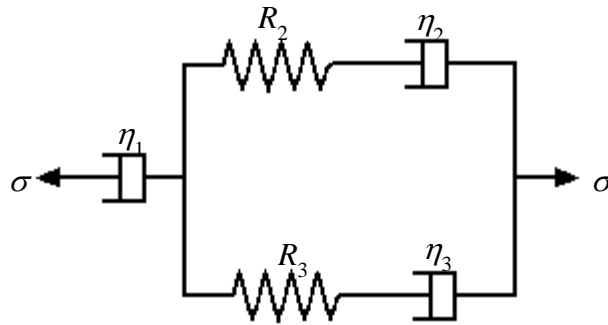


Desarrolle la ecuación $\sigma - \varepsilon$ que describe el modelo.

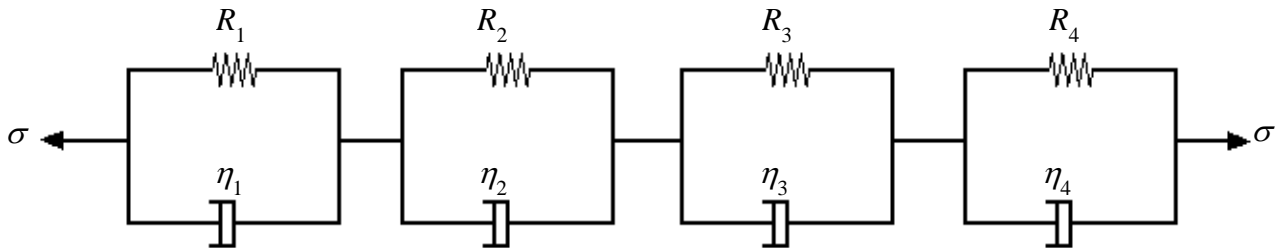
6. Para los modelos de Maxwell y Kelvin al aplicar una sollicitación σ_0 , ¿cuál será la respuesta del sistema?
7. Desarrolle la ecuación que describa el siguiente modelo:



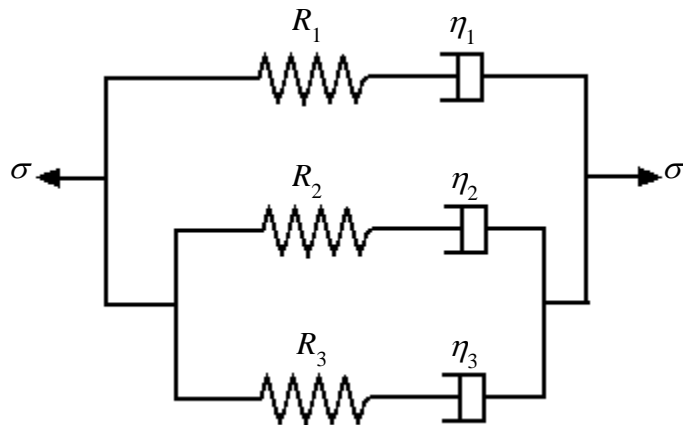
8. Desarrolle la ecuación que describa el siguiente modelo:



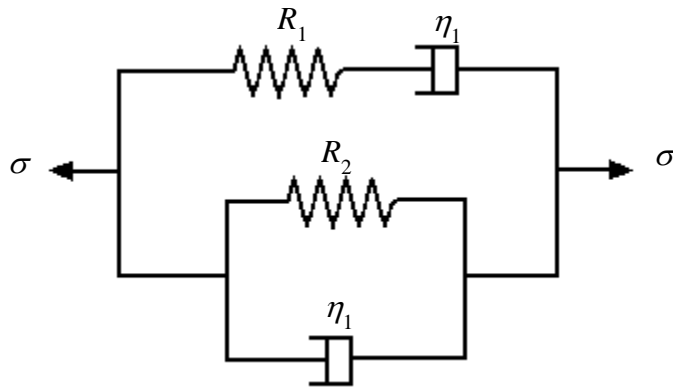
9. Desarrolle la ecuación que describa el siguiente modelo:



10. Determine la ecuación representativa del siguiente modelo:



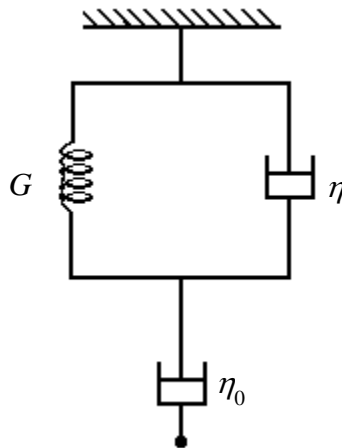
11. Determine la ecuación representativa del siguiente modelo:



12. Considere un fluido lineal de Maxwell, el cual es sometido a solicitaciones de corte dando lugar a $v_1 = kx_2$, $v_2 = v_3 = 0$

Con base en lo anterior, determine los componentes de corte.

13. Desarrolle un modelo que permita describir el comportamiento mecánico del hueso humano. Justifique su respuesta.
14. Desarrolle el modelo que permite describir el comportamiento mecánico del suelo arcilloso.
15. Un modelo de tres elementos de Kelvin-Voigt, como el que se muestra en la figura, falla en predecir correctamente una prueba de fluencia. Establezca las ecuaciones diferenciales, intégreles y explique qué parte de la prueba de fluencia no aparece con este modelo.



CAPÍTULO 9

MATERIALES POROSOS

9.1 INTRODUCCIÓN

En un principio puede resultar incongruente el análisis de los materiales porosos (MP) con base en la Mecánica de Medios Continuos, ya que es por demás evidente que los MP al estar constituidos de dos o más fases no son continuos. Sin embargo, es necesario recordar lo mencionado al inicio de este texto en que se indicó que los MC son medios idealizados en los que no se consideraría, para el modelado de su comportamiento, su estructura atómica o molecular; en consecuencia y habiendo ya estudiado el comportamiento de fluidos y sólidos es ahora factible modelar un medio idealizado como continuo que se encuentra compuesto por un sólido deformable (matriz o esqueleto) y un fluido. De lo anterior, se tiene que para el modelado de un material poroso, éste se considera constituido de una estructura sólida o matriz (esqueleto sólido deformable) que se puede describir como un sólido elástico, elastoplástico o viscoelástico, y de un fluido que se encuentra en los poros. La descripción de la deformación y de la cinemática de cada uno de los medios continuos que conforman el material poroso no difiere de un continuo considerado monofásico, ya sea sólido o fluido.

En términos generales, los materiales porosos se relacionan con materiales tales como rocas, suelos, tejidos vivos, espumas, cerámicos y productos de papel. Por ejemplo, para analizar el comportamiento de un suelo al extraerle agua o el análisis del comportamiento de un yacimiento de gas o petróleo durante su explotación, es necesario evaluar la interacción del fluido con la matriz porosa, por lo que los MP son de particular importancia en diversos ámbitos de la ingeniería.

En los siguientes párrafos se presentarán las ecuaciones generales y constitutivas para materiales porosos y en dichas expresiones lo único que se expresará es el efecto que cada fase (sólido o fluido) tiene sobre el comportamiento del cuerpo, es entonces que las

propiedades del MP estarán en función de las propiedades de sus medios constitutivos y de la proporción de éstos, la cual se indica mediante la porosidad del MC.

9.2 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Hipótesis de continuidad

Como ya ha sido mencionado, un medio poroso puede ser estudiado mediante la superposición de dos medios continuos: un esqueleto y un fluido. Cualquier volumen infinitesimal puede ser tratado mediante la superposición de dos partículas (figura 9.1): una es el esqueleto, el cual se compone de la matriz y de la conexión de espacios porosos, y la otra corresponde a las partículas de fluido las cuales llenan los poros.

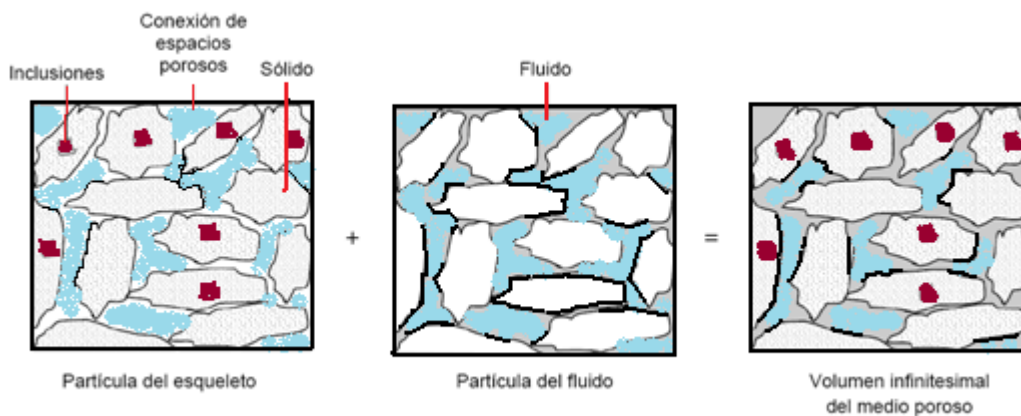


FIGURA 9.1 MEDIO POROSO REPRESENTADO MEDIANTE LA SUPERPOSICIÓN DE DOS MEDIOS CONTINUOS

Al aplicarse cargas externas y variaciones en la presión al fluido, el esqueleto se deforma. La descripción de dicha deformación no difiere de la planteada para un sólido.

Porosidades lagrangiana y euleriana

Se considera dV_t el volumen del esqueleto en un tiempo t y n la porosidad euleriana, de tal manera que el fluido ocupa un volumen ndV_t para un tiempo t . Al aplicar cierta deformación, el volumen dV_t cambia, por lo que la porosidad n no se relaciona apropiadamente con el cambio de volumen ocupado por los poros con el volumen inicial dV_0 . Esta relación se describe de manera más adecuada utilizando la *porosidad lagrangiana* ζ , mediante la siguiente relación:

$$\zeta dV_0 = ndV_t$$

$$\zeta = |F|n$$

Donde $J = |F|$ es el jacobiano del gradiente de deformación $F = \nabla_X x$.

Por su parte, el grado de compactación del material poroso es bien definido por la *relación de vacíos* ψ , la cual se define como la relación entre el volumen del espacio poroso con respecto al volumen de la matriz, todo para un tiempo t

$$\psi = \frac{n}{1-n}$$

donde ψ es una descripción espacial.

A partir de las definiciones de porosidad euleriana y lagrangiana se puede establecer una relación entre el volumen ocupado por la matriz dV_t^s (volumen ocupado por el esqueleto sólido) y el volumen total

$$dV_t^s = (1-n)dV_t = dV_t - \zeta dV_0$$

Ecuación de continuidad

Sean ρ_s y ρ_f las densidades de la matriz (sólido) y del fluido respectivamente, se tiene entonces que $\rho_s(1-n)dV_t$ y $\rho_f n dV_t$ son las masas del sólido y del fluido para un tiempo t , respectivamente. Si no se tienen cambios de masa, ni en la matriz ni en el fluido, contenidos en el volumen dV_t , se puede expresar el balance de masa como

$$\frac{D}{Dt} \int \rho_s (1-n) dV_t = 0$$

$$\frac{D}{Dt} \int \rho_f n dV_t = 0$$

Considerando lo expresado en el capítulo 5 (Ecuaciones generales), se tiene:

$$\int \left(\frac{D}{Dt} [\rho_s (1-n)] + \rho_s (1-n) \nabla \cdot v_s \right) dV_t = 0$$

$$\frac{D}{Dt} [\rho_s (1-n)] + \rho_s (1-n) \nabla \cdot v_s = 0$$

$$\int \left[\frac{D}{Dt} (\rho_f n) + \rho_f n \nabla \cdot v_f \right] dV_t = 0$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt} (\rho_f n) + \rho_f n \nabla \cdot v_f = 0$$

donde v_s y v_f representan el campo de velocidades para las partículas de la matriz (sólido) y del fluido, respectivamente.

Balance de masa considerando una discontinuidad

Para algunas aplicaciones es necesario considerar que un medio poroso contiene discontinuidades, razón por la cual es necesario obtener una ecuación de balance de masa que tome en cuenta lo anterior.

Se define S como la superficie de la discontinuidad que se desplaza a lo largo de un volumen V_t , dicho volumen se divide en V_1 y V_2 , el vector normal a la superficie S es \mathbf{n}_S , (figura 9.2). La velocidad normal de desplazamiento v_N de la superficie de discontinuidad, es la velocidad a la cual un punto contenido en S se mueve a lo largo de la normal \mathbf{n}_S

$$(v_N = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_S)$$

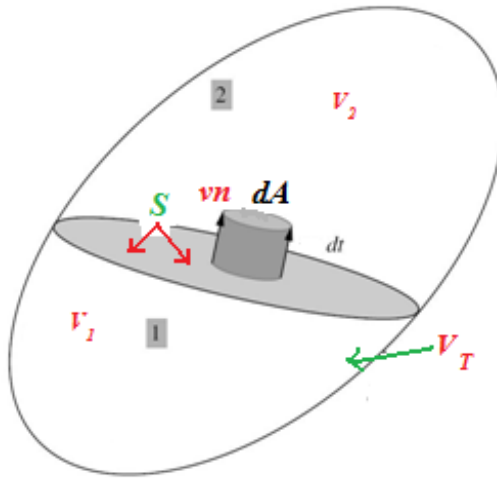


FIGURA 9.2 SUPERFICIE DE DISCONTINUIDAD S QUE SE DESPLAZA A TRAVÉS DE UN VOLUMEN INFINITESIMAL dV_T

A partir de lo anterior es posible establecer las ecuaciones de continuidad para un volumen con una superficie de discontinuidad (Condición de salto de Rankine - Hugoniot)

$$\int \left[\frac{\partial(\rho_s(1-n))}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho_s(1-n)\mathbf{v}_s) \right] dV_t + \int [[\rho_s(1-n)(\mathbf{v}_s - \mathbf{v})]] \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

$$\int \left[\frac{\partial(\rho_f n)}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho_f n \mathbf{v}_f) \right] dV_t + \int [[\rho_f n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v})]] \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

La condición de salto implica que las partículas pasan a través de la superficie de discontinuidad sin presentar cambio de masa alguno. Esta condición de salto puede aplicarse a materiales donde la superficie S representa la interfase entre dos diferentes medios porosos.

Balance de cantidad de movimiento

Para la mayoría de las aplicaciones, las fuerzas externas aplicadas a un material poroso, ya sean fuerzas de cuerpo o de superficie, son las mismas tanto en el esqueleto como en el fluido. Las fuerzas de cuerpo infinitesimales $d\mathbf{B}$ que actúan sobre un volumen elemental dV_t , se definen como

$$d\mathbf{B} = \rho \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) dV_t$$

donde ρ es la densidad equivalente para el material poroso (compuesto de una matriz sólida y un fluido en sus poros), esto para un tiempo t .

$$\rho = \rho_s(1-n) + \rho_f n$$

Se asume que las fuerzas de cuerpo son únicamente función del vector de posición y del tiempo, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$.

Se considera que las fuerzas de superficie \mathbf{f} son función de la posición, del tiempo y del vector normal a la superficie sobre la que éstas actúan, a partir de lo anterior es posible

definir las fuerzas infinitesimales de superficie df , donde f tiene unidades de esfuerzo y es una representación del vector de esfuerzos, entonces

$$df = f(x, t, n) dA$$

Ahora es posible plantear las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento para un material poroso

$$\frac{D}{Dt} \int \rho_s (1-n) v_s dV_t + \frac{D}{Dt} \int \rho_f n v_f dV_t = \int \rho B(x, t) dV_t + \int f(x, t, n) dA$$

donde $\rho_s (1-n) v_s dV_t$ y $\rho_f n v_f dV_t$ representan la cantidad de movimiento de las partículas de la matriz y del fluido respectivamente, ambos contenidos en un volumen elemental dV_t .

Considerando el teorema de transporte y de la divergencia, así como los resultados obtenidos en el capítulo 4, se tiene

$$\nabla \cdot T + \rho_s (1-n) (B - a_s) + \rho_f n (B - a_f) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_s (1-n) (B_i - a_{is}) + \rho_f n (B_i - a_{if}) = 0$$

donde a_s y a_f son las aceleraciones de la matriz y el fluido respectivamente, esto es

$$\frac{Dv_s}{Dt} = a_s \quad ; \quad \frac{Dv_f}{Dt} = a_f$$

En un material poroso las fuerzas de superficie se dividen en la suma de las fuerzas actuantes sobre la matriz f_s y las fuerzas actuantes sobre el fluido f_f , $\Rightarrow f = f_s + f_f$

A partir de lo antes expuesto es posible definir el estado de esfuerzos en el medio poroso

$$\sigma_{ij} = (1-n) \sigma_{ijs} + n \sigma_{ijf}$$

Energía cinética

Sean EC_s y EC_f la energía cinética asociada al esqueleto y al fluido, contenidos en un volumen V_t , respectivamente:

$$EC_s = \frac{1}{2} \int \rho_s (1-n) \mathbf{v}_s^2 dV_t$$

$$EC_f = \frac{1}{2} \int \rho_f n \mathbf{v}_f^2 dV_t$$

Se puede establecer que la rapidez de trabajo realizado por las fuerzas externas al material cuyo volumen es V_t , se consume en un cambio de forma y dimensiones y en una variación de la EC asociada.

$$\dot{W}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) = \dot{W}_{def}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) + \frac{d(EC)_f}{dt} + \frac{d(EC)_s}{dt}$$

donde \dot{W} es la rapidez de trabajo total producido por las fuerzas externas y \dot{W}_{def} es la rapidez de trabajo de deformación.

Conservación de energía y balance de entropía

La Primera Ley de la Termodinámica se puede representar con la siguiente ecuación:

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{DW}{Dt} + \frac{DQ}{Dt}$$

donde U es la energía interna, esto es $U = \int u \rho dV$; $u = C_v \theta$. Por otra parte, W representa el trabajo mecánico y Q es la energía en tránsito (calor), ésta como ya se mencionó en el capítulo 5, se refiere al calor por conducción más el calor generado al interior del MC,

$\dot{Q} = -\int \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \frac{D}{Dt} \int h \rho dV$; donde q representa el flujo de calor por conducción a través de las fronteras del MC y h es el calor generado al interior del MC.

La Primera Ley de la Termodinámica se puede aplicar a un material poroso cuyo volumen es V_t :

$$\frac{D}{Dt} \int \rho_s (1-n) \left(u_s + \frac{1}{2} \mathbf{v}_s^2 \right) dV_t + \frac{D}{Dt} \int \rho_f n \left(u_f + \frac{1}{2} \mathbf{v}_f^2 \right) dV_t = \dot{W}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) + \dot{Q}$$

En la ecuación anterior u_s representa la energía interna por unidad de masa de la matriz, u_f la energía interna por unidad de fluido, y \dot{Q} , la rapidez de intercambio de energía en forma de calor. Considerando el desarrollo realizado en el capítulo 5, la ecuación se puede presentar como

$$\frac{D}{Dt} \int \rho_s (1-n) u_s dV_t + \frac{D}{Dt} \int \rho_f n u_f dV_t = \dot{W}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) - \int (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dA + \int \rho \frac{Dq_s}{Dt} dV_t$$

En la Segunda Ley de la Termodinámica se plantea que existe una función creciente η llamada entropía específica (entropía por unidad de masa). Por consecuencia, la desigualdad entrópica para un medio poroso se expresa

$$\frac{D}{Dt} \int \rho_s (1-n) \eta_s dV_t + \frac{D}{Dt} \int \rho_f n \eta_f dV_t \geq \int -\frac{\mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}}{\theta} dA + \int \rho \frac{D\left(\frac{q_s}{\theta}\right)}{Dt} dV$$

El flujo de calor se puede expresar como $\mathbf{q} = -k \nabla_x \theta$, lo cual es una representación de la Ley de Fourier, donde k es la conductividad térmica del material poroso y η_s, η_f representan la entropía por unidad de masa de la matriz y del fluido respectivamente.

La variación de entropía, excluyendo transformaciones irreversibles, durante un proceso cuasiestático puede ser expresada como

$$dS = \frac{dQ}{\theta}$$

donde θ es la temperatura absoluta.

9.3 COMPORTAMIENTO POROELÁSTICO

De igual forma que un material viscoelástico (modelo de Kelvin) muestra una dependencia de la deformación con el tiempo, un material poroelástico tendrá un comportamiento $\varepsilon = \varepsilon(t, f)$. Este tipo de comportamiento se presenta en tejidos vivos, como por ejemplo el cartilaginoso. En sí, los modelos poroelásticos describen la interacción entre el movimiento del fluido y la interacción en el medio poroso. Por ejemplo, si se bombea un fluido de manera significativa, se reducirá evidentemente la presión del fluido en los poros y se incrementará la carga en el esqueleto.

La ecuación constitutiva de un material poroelástico es:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + M_{ij}\alpha^{-1}p$$

donde el primer término representa el efecto de la matriz (isotrópica o anisotrópica) y el segundo, el efecto del fluido que se encuentra entre los poros con una presión p . A su vez, la presión se puede definir como

$$p = M_{ij}\varepsilon_{ij} + \alpha \frac{\partial u_k^r}{\partial x_k}$$

donde el término u^r representa el desplazamiento relativo entre la matriz y el fluido y α es un término relativo a la viscosidad. Ahora bien, la ley de Darcy se expresa como

$$K_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i^r}{\partial t}$$

Por consecuencia, considerando que el sólido de la matriz es elástico isotrópico, la ecuación constitutiva queda

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + \beta \delta_{ij} p.$$

La disipación de energía que se presenta en el esqueleto del sólido poroso es nula, ya que se le considera un medio elástico

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + p d\phi - \eta_s d\theta - dh_s = 0$$

Para la energía libre de Gibbs:

$$\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} - \phi dp - \eta_s d\theta - dg_s = 0$$

Separando la parte desviadora S_{ij} e hidrostática σ_H del tensor de esfuerzos, así como las componentes de dilatación ε_{kk} y desviadora e_{ij} del tensor de deformaciones se tiene

$$\sigma_H d\varepsilon_{kk} + s_{ij} de_{ij} - \phi dp - \eta_s dT - dg_s = 0$$

Con respecto a la termoelasticidad, la termoporoelasticidad tiene un número mayor de variables de estado, éstas lógicamente ligadas con la porosidad del medio $b_{ij} = -\frac{\partial^2 g_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial p}$, el cual es un tensor simétrico que relaciona de manera lineal el cambio en la porosidad con la variación de deformación, cuando la presión y la temperatura se mantienen constantes.

- $\frac{1}{N} = \frac{\partial^2 g_s}{\partial p^2}$ Relaciona la variación en la presión con la variación en la porosidad cuando la deformación y la temperatura se mantienen constantes.
- $3\alpha_\phi = \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial \theta}$ Es el coeficiente de dilatación térmica en función de la porosidad.

Relaciona la energía térmica por unidad de presión que el material intercambia con sus alrededores cuando la deformación y la temperatura son constantes.

A partir de la definición de las variables de estado, se plantean las siguientes ecuaciones:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - b_{ij}dp - C_{ijkl}A_{kl}d\theta$$

$$d\phi = b_{ij}d\varepsilon_{ij} + \frac{dp}{N} - 3\alpha_\phi d\theta$$

$$dS_s = C_{ijkl}\alpha_{kl}d\varepsilon_{ij} - 3\alpha_\phi dp + C \frac{d\theta}{\theta}$$

Donde C_{ijkl} es el tensor de constantes elásticas de la matriz, A_{kl} es el tensor de dilatación térmica y C es el calor específico del material.

Las ecuaciones constitutivas del esqueleto son independientes de las que definen el fluido saturado. Sin embargo, las variables de estado para el fluido se pueden obtener de forma similar a lo hecho para el esqueleto partiendo de las siguientes relaciones:

$$g_f = g_f(p, T): \quad \frac{1}{\rho_f} = \frac{\partial g_f}{\partial p}; \quad \eta_f = \frac{\partial g_f}{\partial \theta}$$

donde g_f es el potencial de Gibbs (entalpía libre específica del fluido).

9.4 CASOS DE ESTUDIO PARA MATERIALES POROSOS

Inyección de un fluido

La inyección de un líquido y su progresiva difusión es un problema de considerable interés en geotecnia y en la industria petrolera para la recuperación de hidrocarburos. Esto motiva a considerar una inyección instantánea en un tiempo $t=0$ de un fluido de masa m_f y volumen $V_f = m_f / \rho_0$ en el origen del sistema coordenado. Debido a la simetría esférica del sistema se cumple que $V_f = V_f(r, t)$, entonces la ecuación de difusión queda:

$$\frac{\partial(rv_f)}{\partial t} = c_f \frac{\partial^2(rv_f)}{\partial r^2}$$

cuya solución debe satisfacer la condición de inyección instantánea

$$\int_0^r v_f(r, t) 4\pi r^2 dr \quad | \quad t \rightarrow 0 = V_f$$

donde

$$v_f = f(r, t, V_f, c_f)$$

Dado que v_f es adimensional, los argumentos (r, t, V_f, c_f) se combinan para formar cantidades adimensionales.

$$v_f = \frac{V_f}{(c_f t)^{3/2}} v(u)$$

$$u = \frac{r}{\sqrt{c_f t}}$$

Con lo que la ecuación diferencial queda de la forma:

$$\frac{d}{du} \left(u^2 \frac{dv}{du} + \frac{1}{2} u^3 v \right) = 0$$

Definiendo $v \rightarrow 0$ cuando $u \rightarrow 0$, una primera integración describe:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} u$$

Integrando la ecuación anterior y tomando en cuenta la condición de inyección instantánea se tiene:

$$v_f = \frac{V_f}{(4\pi c_f t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4c_f t}\right)$$

En este problema, el campo de desplazamientos es radial e irrotacional, por lo tanto, p puede ser expresado de la forma:

$$p = M \frac{K + \frac{4}{3}\mu}{K_u + \frac{4}{3}\mu} \frac{V_f}{8(\pi c_f t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4c_f t}\right)$$

Sedimentación no lineal

Con el efecto de la gravedad, las partículas sólidas de una suspensión se precipitan y progresivamente se acumulan sobre una base impermeable, formando capa a capa un material poroso. Bajo el peso de capas consecutivas el esqueleto formado se consolida, dando como resultado que la porosidad disminuya con la profundidad. A un tiempo medio el esqueleto se asienta y la cantidad de partículas que se precipitan disminuye. Finalmente, la zona de precipitación desaparece y se presenta el asentamiento debido al peso del propio esqueleto.

El análisis es no lineal debido a que

- a) Los desplazamientos y las deformaciones son finitas.
- b) La relación esfuerzo-deformación es no lineal.
- c) La permeabilidad depende de la porosidad instantánea.
- d) Existe una discontinuidad móvil formada entre las partículas que se siguen precipitando y las capas ya consolidadas.

Considere una capa de material poroso inicial de espesor h_0 sobre una base rígida impermeable, la cual es el origen de la coordenada vertical x_3 . Para el equilibrio en la dirección vertical se requiere:

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} - \left((1-n) \rho_s + n \rho_f \right) g = 0$$

La ley de Darcy toma la forma:

$$\frac{w_3}{\rho_f} = k_0 \delta(n) \left(-\frac{\partial p}{\partial x_3} - \rho_f g \right)$$

donde k_0 es la permeabilidad de referencia y $\delta(n)$ representa la dependencia de la permeabilidad en la porosidad euleriana. Se asume además que las partículas del esqueleto tienen cambios de volumen despreciables

$$\sigma'_{33} = \sigma_{33} + p = E\varpi(n)$$

donde E es el módulo endométrico de referencia. Combinando las tres ecuaciones anteriores, se obtiene

$$\frac{w_3}{\rho_f} = k_0 \delta(n) \left(E \frac{\partial \varpi}{\partial x_3}(n) + (1-n)(\rho_s - \rho_f)g \right)$$

Una partícula sólida que está localizada en X_3 a un tiempo inicial $t=0$, es localizada en $x_3 = x(X, t)$ a un determinado instante

$$J = \frac{\partial x_3}{\partial X_3} = 1 + \phi - \phi_0 = \frac{1-n_0}{1-n}$$

Dado que la superficie del esqueleto normal al flujo no sufre ningún cambio $w_{x_3} = M_{X_3}$, y combinando las ecuaciones anteriores

$$\frac{M_{X_3}}{\rho_f} = k_0 \frac{1-n}{1-n_0} \delta(n) \left(E \frac{\partial \varpi}{\partial x_3}(n) + (1-n)(\rho_s - \rho_f)g \right)$$

Se asume al fluido como incompresible

$$\rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\partial M_{X_3}}{\partial X_3}$$

Además, debido a que ambos son considerados incompresibles implica que el volumen de las partículas que fluyen hacia abajo es opuesto al volumen de fluido que sube, esto es,

$$V_{x_3}^s = - \frac{M_{X_3}}{\rho_f}$$

Lo cual se expresa

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{1-n} \right) + \frac{\partial}{\partial X_3} \left[(1-n) \delta(n) \left(\frac{\partial \varpi}{\partial X_3}(n) + \alpha \right) \right] = 0$$

Durante el proceso las partículas superiores del esqueleto de la columna de sedimentación permanecen sujetas a la presión del líquido, entonces, el esfuerzo efectivo es $\sigma'_{33} = 0$ en la parte superior de la columna. Asumiendo además una porosidad uniforme inicial, se añaden una condición de frontera y una inicial

$$n\left(t=0\right)=n_0 \quad ; \quad \varpi\left(X_3=1\right)=0$$

Las cuales son completadas por la condición de impermeabilidad de la base

$$\left(\frac{\partial \varpi}{\partial X_3}(n)+\alpha\right)=0 \quad ; \quad \text{cuando} \quad X_3=0$$

Para porosidades mayores que un umbral n_{cr} , el esqueleto está formado por partículas aisladas o conjuntos de partículas aisladas sujetas a la presión del fluido; entonces, el esfuerzo parcial intrínseco relacionado a ambos resulta en la misma presión hidrostática

$$n \geq n_{cr} : \sigma^s = \sigma^f = -pI$$

Para porosidades mayores al umbral señalado, el esqueleto es formado por partículas unidas capaces de soportarse a sí mismas

$$\varpi(n \geq n_{cr}) = 0 \quad ; \quad \varpi(n < n_{cr}) > 0$$

Nótese que n_0 no puede ser menor que n_{cr} , ya que de otra manera la condición en $X_3 = 0$ no podría ser considerada. De hecho se espera que n_{cr} sea la porosidad de la superficie al final de la sedimentación. Entonces, se tiene,

$$1 \geq X_3 > \zeta\left(t\right) : V_{X_3}^s = -\frac{M_{X_3}}{\rho_f} = -k_0 \delta(n_0)(1-n_0)(\rho_s - \rho_f)g$$

Para materiales permeables tales como piedras y arena, la curva de presión capilar es determinada experimentalmente. Si bien ésta se puede medir a través del incremento gradual de la presión, para que el fluido no húmedo desaloje al húmedo, también se puede

obtener de una forma sencilla, la cual consiste en observar el perfil obtenido de colocar un material seco sobre un material húmedo y observar como el efecto capilar actúa en contra de la gravedad.

En el caso de materiales con permeabilidad reducida, tales como el cemento y arcillas, la presión capilar es difícil de obtener por los métodos anteriores, por lo que es determinado por experimentos de absorción isotérmica.

Histéresis capilar de materiales porosos

Cuando una muestra de un material poroso es sometido a un ciclo de drenado-embebimiento, una curva de histéresis se observa en el plano saturación-presión de capilaridad, es decir, cuando se parte de una saturación completa y se incrementa progresivamente la presión de capilaridad, el grado de saturación decae progresivamente, cuando al final del drenado se disminuye la presión capilar, la saturación se recupera a valores mayores que para cuando se realizaba el drenado.

Drenado de materiales porosos de baja permeabilidad

El drenado de materiales porosos de baja permeabilidad se realiza como una primera aproximación, considerando que la temperatura permanece constante. La permeabilidad y la curva de capilaridad son propiedades macroscópicas, las cuales resultan de la geometría de la red porosa.

Para obtener la permeabilidad relativa a un material poroso con permeabilidad reducida, se requiere de la solución de las ecuaciones diferenciales no lineales que lo rigen, ya que la determinación experimental no resulta del todo apropiada.

9.5 POROPLASTICIDAD

La poroplasticidad es la capacidad que un material poroso tiene para deformarse permanentemente, así como para tener cambios permanentes en la porosidad, esto último como consecuencia de un cambio permanente en el contenido de masa de fluido.

Estas técnicas se desarrollaron a fines del siglo XIX para el análisis del comportamiento de presas en las que se presentó infiltración de líquido a través de los poros y cuarteaduras formados en la cortina. Estos modelos permiten la representación de una estructura multifásica formada por la roca y el concreto; incorporan, también, el efecto de la presión en los poros formados en la estructura y consideran las condiciones de fractura del material bajo carga. Este tipo de métodos son particularmente apropiados para el análisis del comportamiento de cortinas de gravedad en presas y arcos, así como de túneles profundos. De acuerdo con los conceptos desarrollados, el incremento en el espacio de poros interconectados se considera irreversible. Las principales direcciones de la deformación plástica corresponden con las de agrietamiento. El criterio de fractura de un material está en función de su plasticidad, para lo cual se considera porosidad y esfuerzos. Asimismo, se pueden considerar variaciones anisotrópicas de la permeabilidad del material.

Debido al carácter permanente de las deformaciones y de los cambios en la porosidad, la evolución del comportamiento poroplástico es irreversible y a diferencia del comportamiento poroelástico, las deformaciones y la porosidad lagrangiana no bastan para caracterizar la energía en el esqueleto; por ello se deben introducir otras variables para describir el carácter irreversible de la plasticidad. Estas variables internas son la deformación plástica ε_{ij}^p y la porosidad plástica ϕ^p .

Ya que el comportamiento viscoso del material no se toma en cuenta para el estudio de la poroplasticidad, se considera que este comportamiento es independiente del tiempo.

La evolución del comportamiento poroplástico puede ser vista como una sucesión de estados termodinámicamente en equilibrio y que dependen sólo del historial de cargas que se le han aplicado al material.

Considérese un material poroso sujeto a un esfuerzo σ_{ij} y a una presión p . A partir del estado descrito se tiene una variación incremental del esfuerzo y de la presión $d\sigma_{ij}$ y dp , respectivamente, lo cual a su vez produce variaciones incrementales en la deformación $d\varepsilon_{ij}$ y en la porosidad $d\phi$. El proceso de descarga definido a partir de los incrementos negativos $d\sigma_{ij}$ y dp permite tener registro de la deformación elástica $-d\varepsilon_{ij}^e$ y porosidad elástica $-d\phi^e$.

Los incrementos en la deformación y porosidad plástica, es decir $d\varepsilon_{ij}^p$ y $d\phi^p$, se definen a través de

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$$

$$d\phi = d\phi^e + d\phi^p$$

La deformación plástica ε_{ij} y la porosidad plástica ϕ^p se definen como la integral de los incrementos a través del patrón de cargas aplicadas desde un valor inicial de esfuerzo y presión, en consecuencia,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

$$\phi - \phi_0 = \phi^e + \phi^p$$

Eventualmente, ϕ^p se define como el cambio irreversible en el volumen de porosidad por unidad de volumen inicial.

Considerando ϵ^p como el cambio de volumen provocado por la deformación plástica, el cual se debe al cambio plástico en la porosidad y al cambio de volumen irreversible en la matriz ϵ_s^p , se tiene:

$$\epsilon^p = (1 - \phi_0) \epsilon_s^p + \phi^p$$

Ecuaciones de estado para el comportamiento poroplástico de la matriz

Del análisis termodinámico presentado previamente, se tiene

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad p = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi}$$

Considerando que la energía libre es sólo función de la deformación y porosidad reversibles, entonces $\Psi_s = \Psi_s(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p, \phi - \phi^p)$. Se llega a las siguientes ecuaciones de estado para la matriz del material poroso:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) - b_{ij} p$$

$$\phi - \phi^p - \phi_0 = b_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) + \frac{p}{N}$$

Ecuaciones de estado para el comportamiento poroplástico del estado poroso

Con base en la última ecuación y al combinarla con las ecuaciones respectivas para termoporoelasticidad, es factible eliminar la variación de la porosidad para dar paso a la variación en la masa del fluido dm_f , donde da como resultado:

$$\frac{dm_f}{\rho_f} = d\phi^p + b(d\varepsilon - d\varepsilon^p + \frac{dp}{M})$$

donde $\frac{1}{M} = \frac{1}{N} + \frac{\phi}{p}$, asumiendo que se tienen pequeñas perturbaciones. Al integrar se llega a

$$p = M(-b(\varepsilon - \varepsilon^p) + v_f - \phi^p)$$

donde v_f es el cambio en el volumen del fluido por unidad de volumen inicial. Para un material poroplástico, v_f se puede dividir en una parte correspondiente al comportamiento elástico y una correspondiente al comportamiento plástico.

$$v_f = \frac{m_f - m_f^0}{\rho_f^0} = v_f^e + v_f^p$$

y

$$v_f^e = \phi^e + \frac{\rho_f - \rho_f^0}{\rho_f^0} \quad ; \quad v_f^p = \phi^p$$

9.6 POROVISCOELASTICIDAD

Mientras los efectos viscosos no sean considerados, el comportamiento del esqueleto no depende de la velocidad de las cargas y la evolución del sistema puede ser considerada como una secuencia de estados de equilibrio. Cuando los fenómenos viscosos son considerados, la respuesta es parcialmente retrasada.

Al realizar una serie de sollicitaciones a un material poroso, sólo las partes elásticas tanto de la deformación ε_{ij}^e como de la red porosa ϕ^e , se recuperan inmediatamente. Las partes viscoelásticas ε_{ij}^v y ϕ^v se definen como:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^v \quad ; \quad \phi - \phi_0 = \phi^e + \phi^v$$

La dilatación volumétrica viscosa

$$\epsilon^v = (1 - \phi_0) \epsilon_s^v + \phi^v$$

En el caso de suelo y rocas, las evoluciones viscoelásticas son causadas por el deslizamiento relativo entre los granos sólidos que conforman la matriz; entonces, el cambio de volumen es despreciable en ausencia de poros ocluidos, por tanto:

$$\epsilon_s^v = 0 \quad ; \quad \epsilon^v = \phi^v$$

Sin embargo, se considera la inclusión de un parámetro β

$$\epsilon^v = \beta \phi^v$$

Cuando $\beta = 1$ se refiere a una matriz viscosa incompresible, pudiendo β tomar los valores $\phi_0 \leq \beta \leq 1$.

Consolidación primaria y secundaria de suelos

La consolidación de un suelo por medio de un proceso de reducción de volumen de los componentes finos cohesivos, tales como arcillas y arenas sedimentarias, provocada por las cargas aplicadas, se produce en periodos grandes de tiempo. Estos fenómenos dan lugar a hundimientos y hundimientos diferenciales, los cuales pueden producir la falla de las estructuras.

La consolidación de una capa de arcilla es el resultado de dos procesos: la primera etapa se produce por efecto de la transferencia progresiva de la carga del fluido saturado a la matriz sólida, mientras que la segunda se produce como consecuencia de pequeños desplazamientos de las capas que forman la matriz de arcilla. La consolidación es un fenómeno en donde interactúa el flujo del fluido y la deformación de la matriz sólida (medio continuo poroso) cuando se considera que ésta se encuentra totalmente saturada.

En el caso de suelos será necesario determinar la velocidad del proceso para así evaluar sus efectos en el tiempo.

BIBLIOGRAFÍA

BORG, S. F. *Matrix Tensor Methods in Continuum Mechanics*, Farrer Road, Singapur: World Scientific, 1990.

CHADWICK, Peter. *Continuum Mechanics, Concise Theory and Problems*, New York: Dover Publications, 1999.

CHANDRASEKHARAIAH, D. S. y L. Debnath, *Continuum Mechanics*, New York: Academic Press, 1994.

CHUNG, T. J. *Applied Continuum Mechanics*, EUA: Cambridge Press, 1996.

DEMÉNEGHI COLINA, Agustín; Roberto Magaña del Toro y Héctor Sanginés García. *Mecánica del medio continuo*, México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2000.

EGLIT, Margarita E. y Dewey H. Hodges. *Continuum Mechanics via Problems and Exercises, Part I: Theory and Problems*, Londres: World Scientific, 1996.

_____ *Continuum Mechanics. Problems and Exercises, Part I and Part II: Answers and solutions*, Londres: World Scientific, 1996.

HAUPT, Peter. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*, Berlín: Springer-Verlag, 2000.

KHAN, Akhtar S. y Sujian Huang. *Continuum Theory of Plasticity*, New York: John Wiley & Sons, 1995.

LAI, Michael. *Introduction to Continuum Mechanics*, EUA: Butterworth Heinemann, 1993.

MALVERN, Lawrence E. *Introduction to the Mechanics of Continuous Medium*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1994.

MASE, G. E. *Continuum Mechanics, Theory and Problems*, New York: McGraw-Hill, 1970.

MASE, George Thomas, *Continuum Mechanics for Engineers*, EUA: CRC Press, 1999.

OLIVELLA, Xavier Oliver y Agelt Carlos. *Mecánica de medios continuos para ingenieros*, España: UPC, 2005.

SPENCER, A. J. M. *Continuum Mechanics*, New York: Dover Publications, 2004.

SHIH, Liu I. *Continuum Mechanics*, Berlín: Springer-Verlag, 2002.

TEMAM, Roger y Alain Miranville. *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*, U.K., Cambridge: University Press, 2001.

WU, Han-Chin. *Continuum Mechanics and Plasticity*, Londres: Chapman & Hall/CRC, 2005.

YAVUZ, Basar y Dieter Weichert. *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids*, Berlín: Springer-Verlag, 2000.

Referencias

Marcus Reiner (1963), "The Deborah number", Conferencia ofrecida con motivo del Fourth International Congress on Rheology, publicada en *Physics Today*, vol. 17, pág. 62, enero de 1964.