

计算机的算术运算

part1：加法和减法

数据表示

- 两种常用的数据格式

- 定点数

- 小数点位置固定
 - 定点整数
 - 定点小数
 - 数值范围有限,要求的处理硬件简单

- 浮点数

- 小数点位置浮动
 - 数值范围很大,要求的处理硬件复杂

整数编码

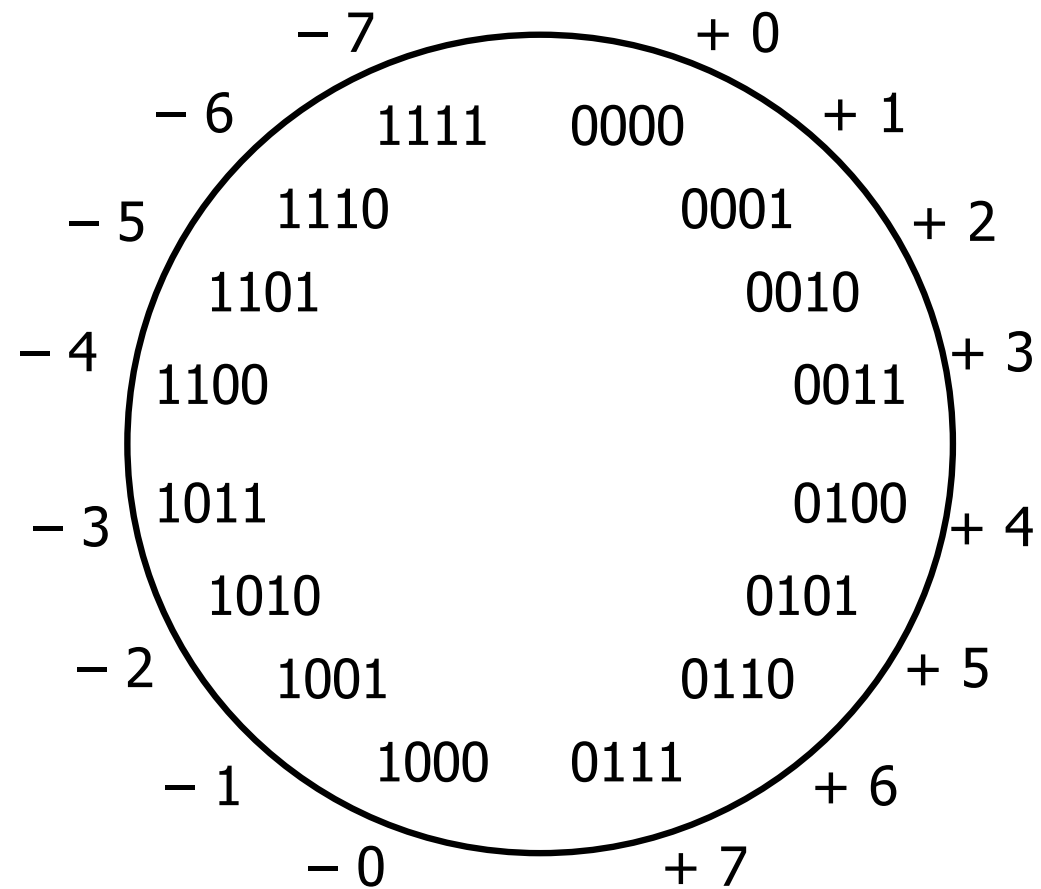
编码	原码	反码	补码
000	0	0	0
001	1	1	1
010	2	2	2
011	3	3	3
100	-0	-3	-4
101	-1	-2	-3
110	-2	-1	-2
111	-3	-0	-1

原码 (Sign Magnitude) : 符号位||数的绝对值

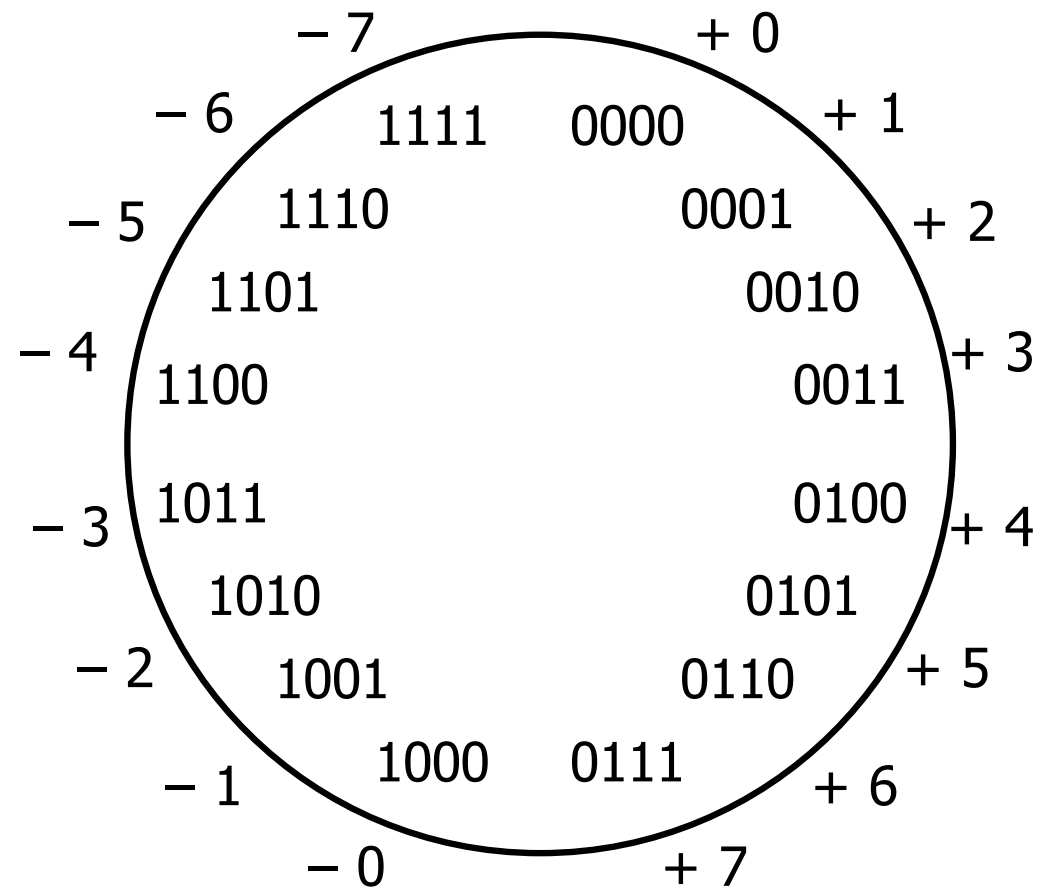
反码 (One's Complement) : 符号位||数值按位求反

补码 (Two's Complement) : 反码的最低位+1

原码



原码



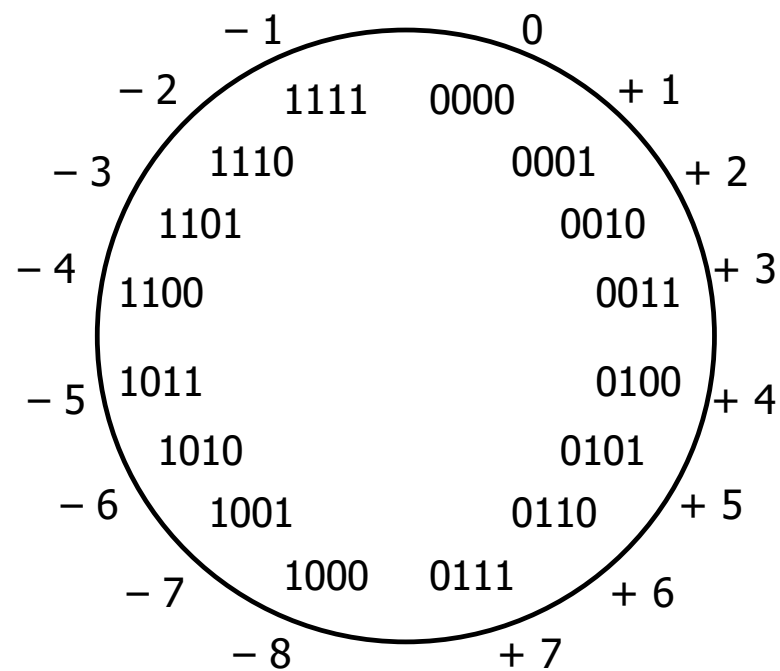
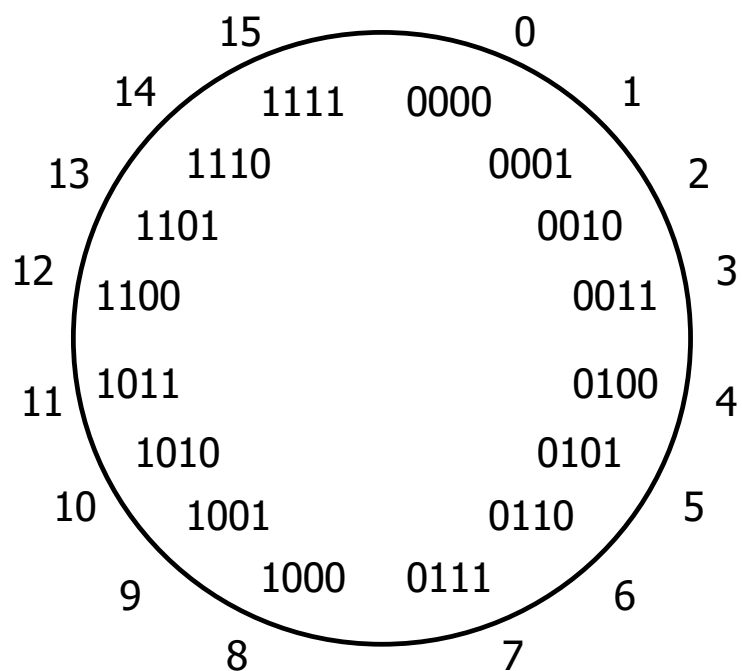
$$4 - 3 \neq 4 + (-3)$$



$$\begin{array}{r} 0100 \\ + 1011 \\ \hline \end{array}$$

补码

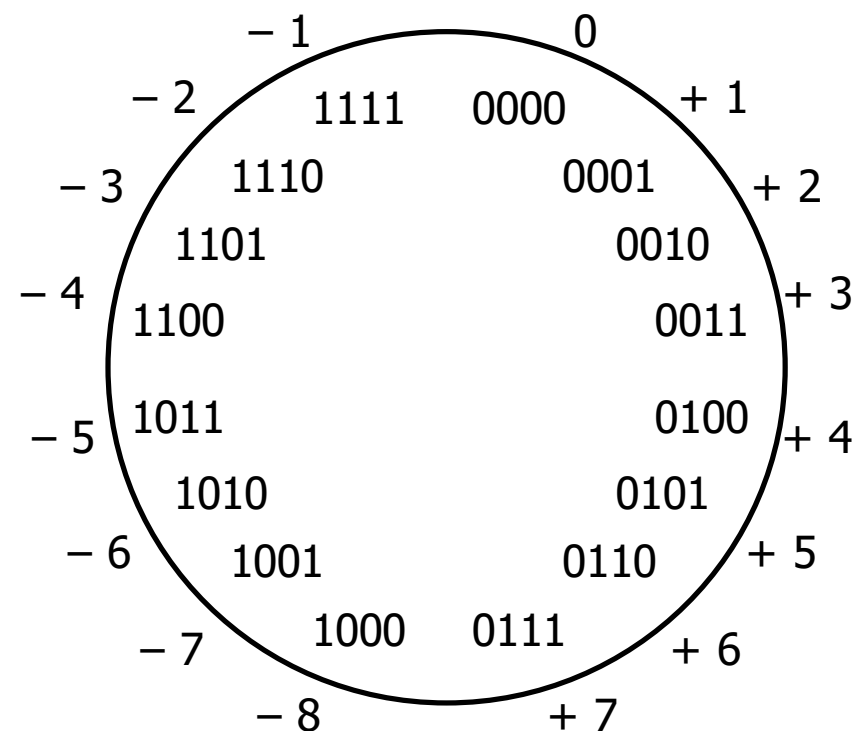
■ 无符号 vs 有符号



补码运算

$$\begin{array}{rcl} 2 & 0010 & -2 \quad 1110 \\ + 3 & + 0011 & + -3 \quad + 1101 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -2 & 1110 & 2 \quad 0010 \\ + 3 & + 0011 & + -3 \quad + 1101 \end{array}$$



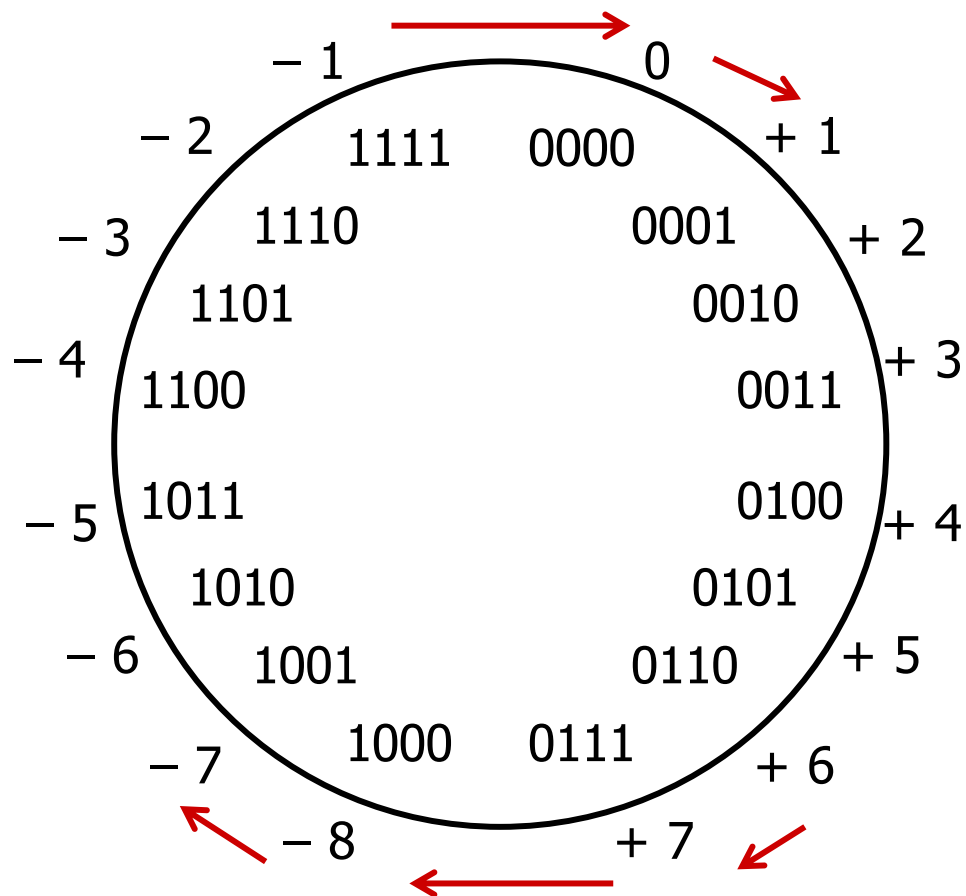
补码运算

$$\begin{array}{r} -1 \\ + 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ + 0010 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ + 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0110 \\ + 0011 \\ \hline \end{array}$$



思考

Argument ₁	Op	Argument ₂	Type	Result
0	==	0U	unsigned	1
-1	<	0	signed	1
-1	<	0U	unsigned	0
2147483647	<	-2147483648		
2147483647U	<	-2147483648		
-1	<	-2		
(unsigned) -1	<	-2		
2147483647	<	2147483648U		
2147483647	<	(int) 2147483648U		

本讲提纲

- 定点加法原理
- 定点减法原理
- 溢出检测
- 运算器组成

本讲提纲

- 定点加法原理
- 定点减法原理
- 溢出检测
- 运算器组成

原码、反码、补码表示小结

正数的原码、反码、补码表示均相同，
符号位为 0，数值位同数的真值。

零的原码和反码均有 2 个编码，补码只 1 个码

负数的原码、反码、补码表示均不同，
符号位为 1，数值位：
原码为数的绝对值
反码为每一位均取反码
补码为反码再在最低位+1

由 $[X]_{\text{补}}$ 求 $[-X]_{\text{补}}$ ：每一位取反后再在最低位+1

补码加减法

■ 补码加法公式

- $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = [x+y]_{\text{补}} \pmod{2^{n+1}}$

■ 补码减法公式

- $[x-y]_{\text{补}} = [x]_{\text{补}} - [y]_{\text{补}} = [x]_{\text{补}} + [-y]_{\text{补}} \pmod{2^{n+1}}$

例子：补码加法

■ 例： $x=+1001, y=+0101$ ，求 $x+y$

■ 例： $x=+1001, y=-0101$ ，求 $x+y$

例子：补码加法

■ 例： $x=+1001, y=+0101$ ，求 $x+y$

- $[x]_{\text{补}} = 01001$
- $[y]_{\text{补}} = 00101$
- $[x+y]_{\text{补}} = 01110$
- $x+y = +1110$

■ 例： $x=+1001, y=-0101$ ，求 $x+y$

- $[x]_{\text{补}} = 01001$
- $[y]_{\text{补}} = 11011$
- $[x+y]_{\text{补}} = 100110 = 00110$
- $x+y = +0110$

例子：补码加法

■ 例： $x=+1001, y=+0101$ ，求 $x+y$

- $[x]_{\text{补}} = 01001$
- $[y]_{\text{补}} = 00101$
- $[x+y]_{\text{补}} = 01110$
- $x+y = +1110$

■ 例： $x=+1001, y=-0101$ ，求 $x+y$

- $[x]_{\text{补}} = 01001$
- $[y]_{\text{补}} = 11011$
- $[x+y]_{\text{补}} = 100110 = 00110$
- $x+y = +0110$

补码加法的特点：

(1) 符号位要当做数的一部分参加运算

(2) 超过模 2^{n+1} 的进位要丢掉

例子：补码减法

■ 例： $x = +1101$, $y = +0110$, 求 $x - y$

例子：补码减法

■ 例： $x=+1101, y=+0110$ ，求 $x-y$

$$[x]_{\text{补}} = 01101$$

$$[y]_{\text{补}} = 00110 \quad [-y]_{\text{补}} = 11010$$

例子：补码减法

- 例： $x=+1101, y=+0110$ ，求 $x-y$

$$[x]_{\text{补}} = 01101$$

$$[y]_{\text{补}} = 00110 \quad [-y]_{\text{补}} = 11010$$

$$\begin{array}{r} [x]_{\text{补}} \quad 01101 \\ + [-y]_{\text{补}} \quad 11010 \\ \hline \end{array}$$

$$[x-y]_{\text{补}} \quad [1] \quad 00111$$

$$x-y = +0111$$

本讲提纲

- 定点加法原理
- 定点减法原理
- 溢出检测
- 运算器组成
- 原码乘法原理与乘法器

溢出概念和检测方法

■ 溢出的概念

- 定点整数机器中，数的表示范围 $|x| < (2^{n-1})$ ；
- 在运算过程中，运算结果超出机器字长所能表示的范围的现象，称为“溢出”。

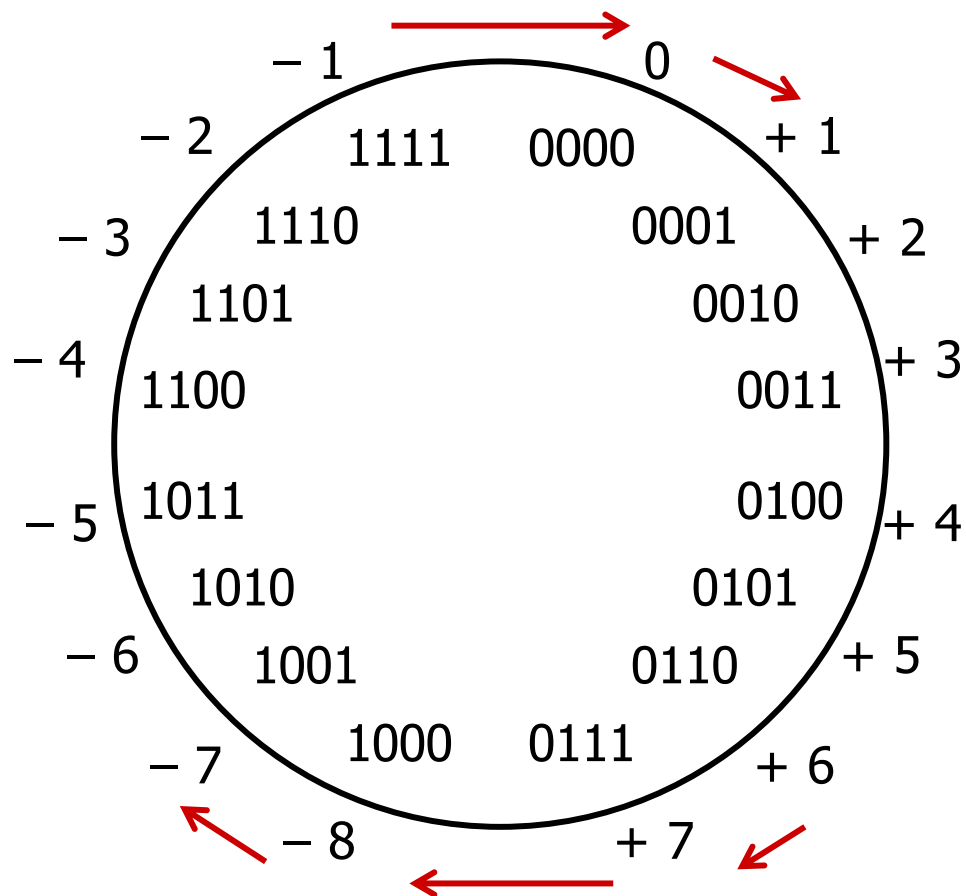
■ 可能产生溢出的情况

- 两正数加，变负数，上溢（大于机器所能表示的最大数）
- 两负数加，变正数，下溢（小于机器所能表示的最小数）

补码运算

$$\begin{array}{r} -1 \\ + 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1111 \\ + 0010 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ + 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 0110 \\ + 0011 \\ \hline \end{array}$$



例子：溢出

■ 例： $x = +1011$, $y = +1001$, 求 $x + y$

■ 例： $x = -1101$, $y = -1011$, 求 $x + y$

例子：溢出

■ 例： $x = +1011$, $y = +1001$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 01011$

■ $[y]_{\text{补}} = 01001$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 10100$

两正数加，变负数，正溢

■ 例： $x = -1101$, $y = -1011$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 10011$

■ $[y]_{\text{补}} = 10101$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 01000$

两负数加，变正数，负溢

溢出概念和检测方法

■ 溢出检测方法一：双符号位法

- 参与加减运算的数采用变形补码表示

- 计算法则

- 两个符号位都看做数码参加运算

- 两数进行以模 2^{n+2} 的加法，最高符号位上产生的进位丢掉

$$[x]_{\text{补}} = \begin{cases} x & 2^n > x \geq 0 \\ 2^{n+2} + x & 0 > x > -2^n \end{cases} \pmod{2^{n+2}}$$

S_{f1}	S_{f2}	检测结果
0	0	正确（正数）
0	1	正溢
1	0	负溢
1	1	正确（负数）

例子：溢出检测

■ 例： $x = +1100$, $y = +1000$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 001100$

■ $[y]_{\text{补}} = 001000$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 010100$

■ 例： $x = -1100$, $y = -1000$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 110100$

■ $[y]_{\text{补}} = 111000$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 101100$

例子：溢出检测

■ 例： $x = +1100$, $y = +1000$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 001100$

■ $[y]_{\text{补}} = 001000$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 010100$



正溢出

■ 例： $x = -1100$, $y = -1000$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 110100$

■ $[y]_{\text{补}} = 111000$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 101100$

例子：溢出检测

■ 例： $x = +1100$, $y = +1000$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 001100$

■ $[y]_{\text{补}} = 001000$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 010100$

正溢出

■ 例： $x = -1100$, $y = -1000$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 110100$

■ $[y]_{\text{补}} = 111000$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 101100$

负溢出

溢出概念和检测方法

■ 溢出检测方法二：单符号位法

- 最高有效位产生进位而符号位无进位，正溢
- 最高有效位无进位而符号位有进位，负溢

C_f	C_0	检测结果
0	0	正确（正数）
0	1	正溢
1	0	负溢
1	1	正确（负数）

其中 C_f 为符号位产生的进位, C_0 为最高有效位产生的进位

例子：溢出检测

■ 例： $x = +1011$, $y = +1001$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 01011$

■ $[y]_{\text{补}} = 01001$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 10100$

■ 例： $x = -1101$, $y = -1011$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 10011$

■ $[y]_{\text{补}} = 10101$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 01000$

例子：溢出检测

■ 例： $x = +1011$, $y = +1001$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 01011$

■ $[y]_{\text{补}} = 01001$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 10100$

$C_f=0$, $C_0=1$, 正溢

■ 例： $x = -1101$, $y = -1011$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 10011$

■ $[y]_{\text{补}} = 10101$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 01000$

例子：溢出检测

■ 例： $x = +1011$, $y = +1001$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 01011$

■ $[y]_{\text{补}} = 01001$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 10100$

$C_f=0$, $C_0=1$, 正溢

■ 例： $x = -1101$, $y = -1011$, 求 $x + y$

■ $[x]_{\text{补}} = 10011$

■ $[y]_{\text{补}} = 10101$

■ $[x]_{\text{补}} + [y]_{\text{补}} = 01000$

$C_f=1$, $C_0=0$, 负溢

本讲提纲

- 定点加法原理
- 定点减法原理
- 溢出检测
- 运算器组成

运算器的基本功能

- 完成算术、逻辑运算
 - $+$ 、 $-$ 、 \times 、 \div 、 \wedge 、 \vee 、 \neg 。
- 取得操作数
 - 寄存器组、数据总线
- 输出、存放运算结果
 - 寄存器组、数据总线
- 暂存运算的中间结果
 - 移位寄存器
- 得到运算结果的状态
- 理解、响应控制信号

运算器的基础逻辑电路

- 逻辑门电路

- 完成逻辑运算

- 加法器

- 完成加法运算

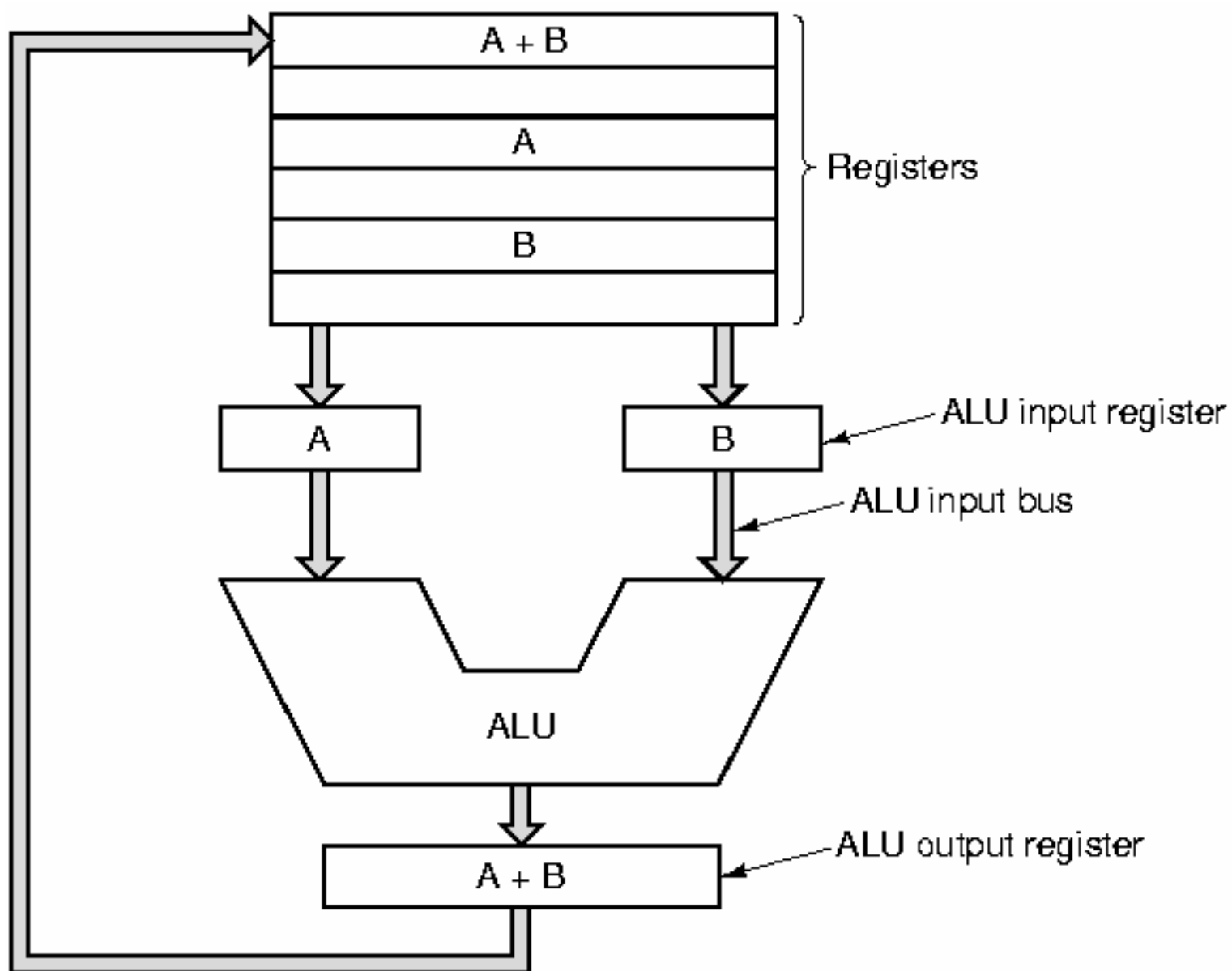
- 触发器

- 保存数据

- 多路选择器、移位器

- 选择、连通

数据通路



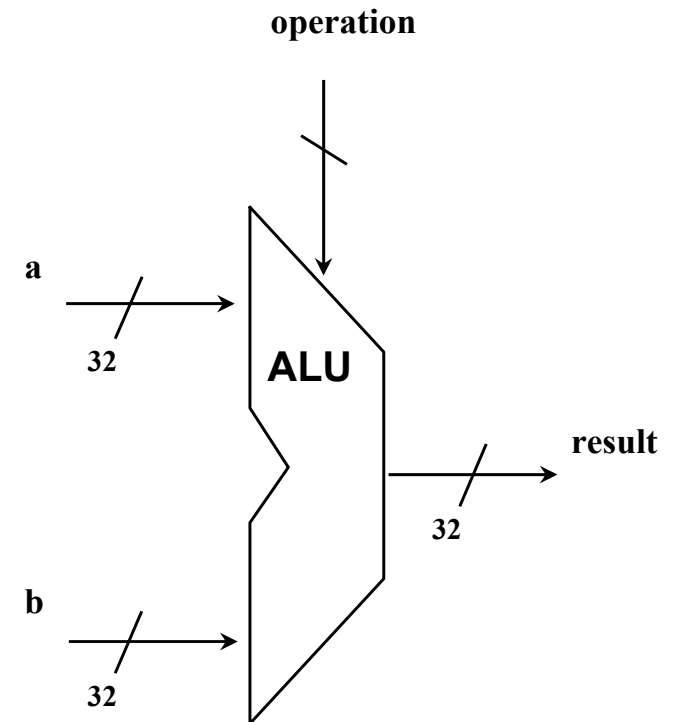
ALU的功能和设计

■ 功能

- 对操作数完成算术逻辑运算
- ADD、AND、OR

■ 设计

- 算术运算
 - 加法器
- 逻辑运算
 - 与门、或门



复习逻辑运算和逻辑门

■ 三种基本逻辑运算

■ 与运算 $Y = A \cdot B$

■ 或运算 $Y = A + B$

■ 非运算 $Y = \bar{A}$

表2.2.1 与逻辑真值表

输入		输出
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表2.2.2 或逻辑真值表

输入		输出
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表2.2.3 非逻辑真值表

A	Y
0	1
1	0

复习：逻辑运算和逻辑门

■ 复合逻辑运算

- 与非运算 $Y = (AB)'$
- 或非运算 $Y = (A + B)'$
- 与或非运算 $Y = (AB + CD)'$
- 异或运算 $Y = A \oplus B = AB' + A'B$
- 同或运算 $Y = A \odot B = (A \oplus B)' = AB + A'B'$

表2.2.7 同或逻辑真值表

输入		输出
A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表2.2.4 与非逻辑真值表 表2.2.4 与非逻辑真值表 表2.2.5 或非逻辑真值表 表2.2.6 异或逻辑真值表

输入		输出
A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

输入		输出
A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

输入		输出
A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

输入		输出
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

复习：逻辑运算和逻辑门

■ 逻辑门图形符号



与



或



非



与非



或非



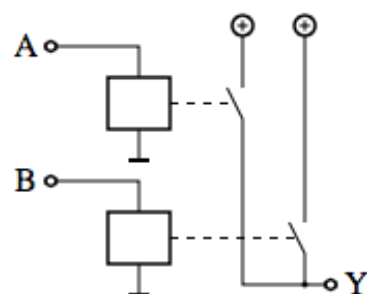
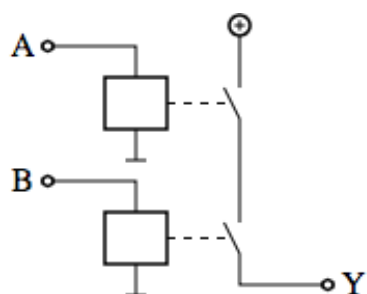
异或



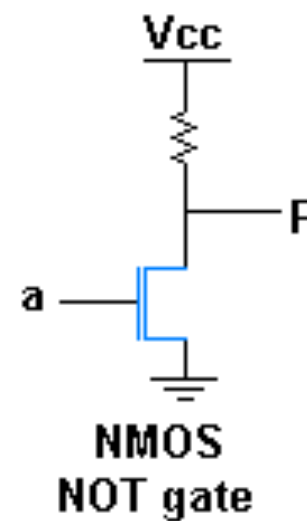
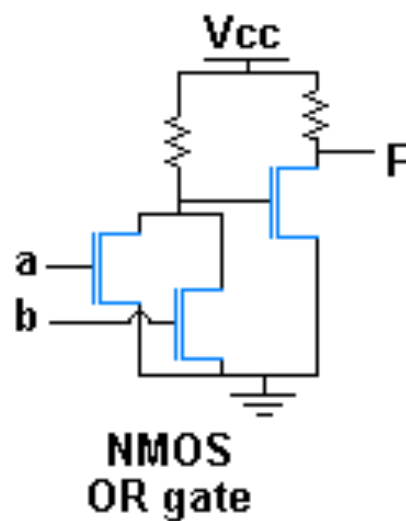
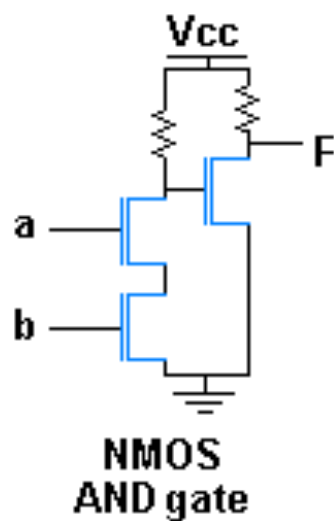
同或

复习：逻辑运算和逻辑门

继电器逻辑

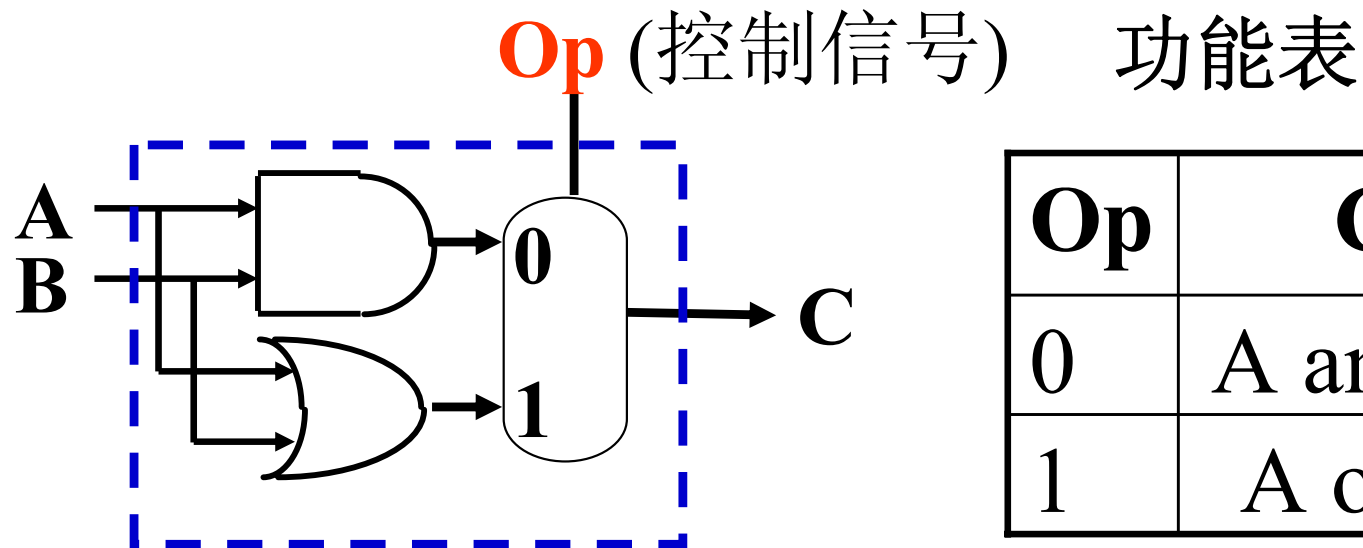


NMOS

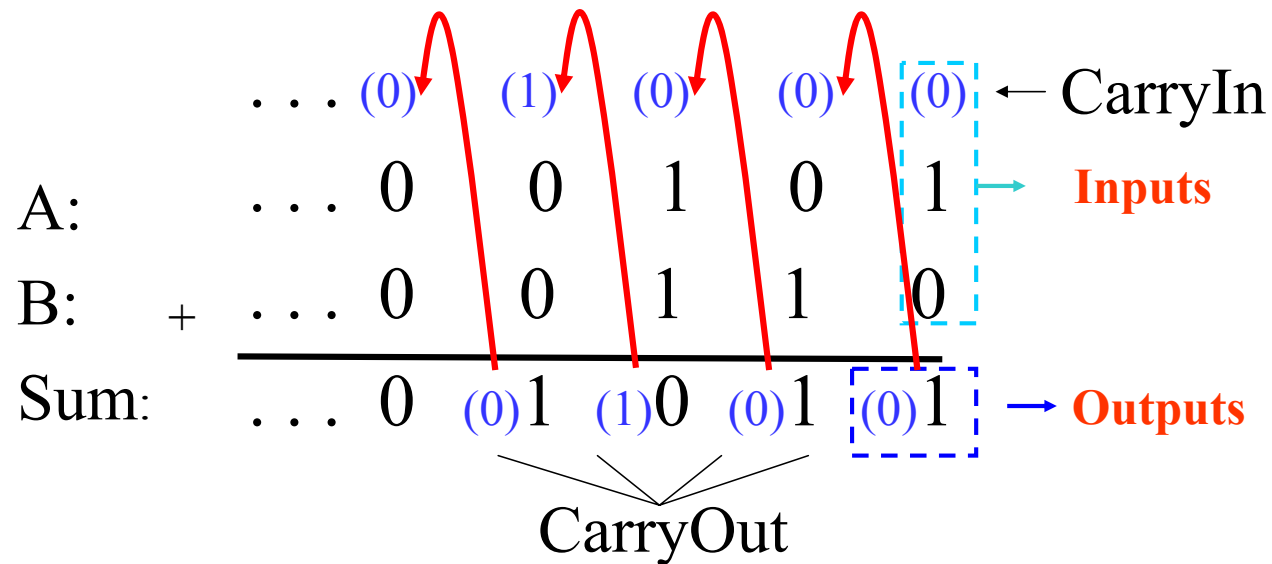


1位ALU逻辑运算实现

- 直接用逻辑门实现与和或的功能
- 用多路选择器,通过OP控制信号输出结果



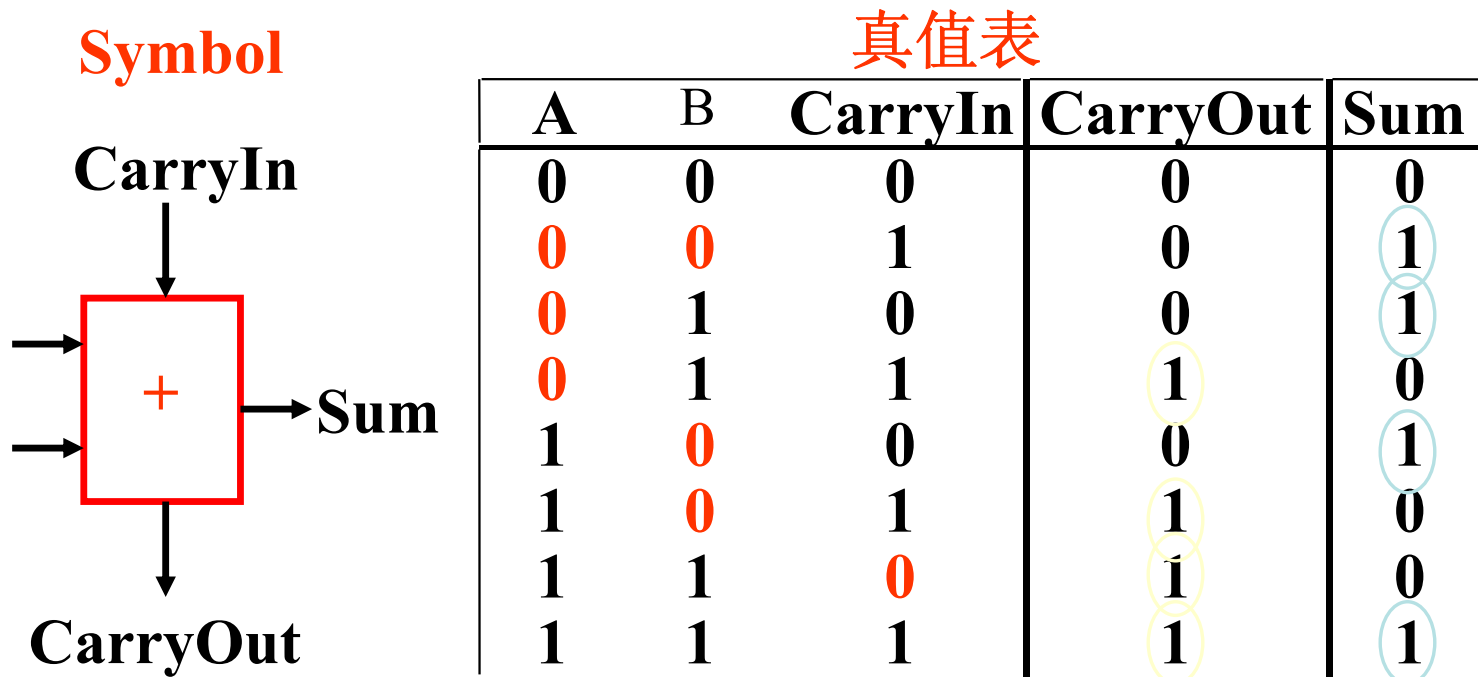
1位ALU加法运算实现



■ 1位的加法:

- 3个输入信号: A_i , B_i , $CarryIn_i$
- 两个输出信号: Sum_i , $CarryOut_i$
 - ($CarryIn_{i+1} = CarryOut_i$)

1位ALU加法运算实现

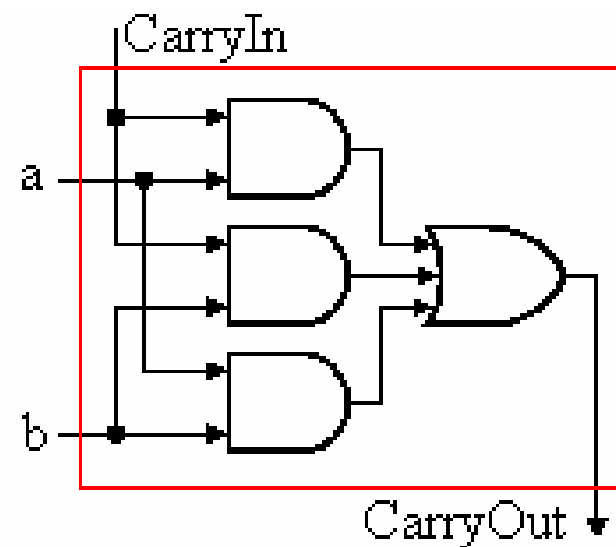
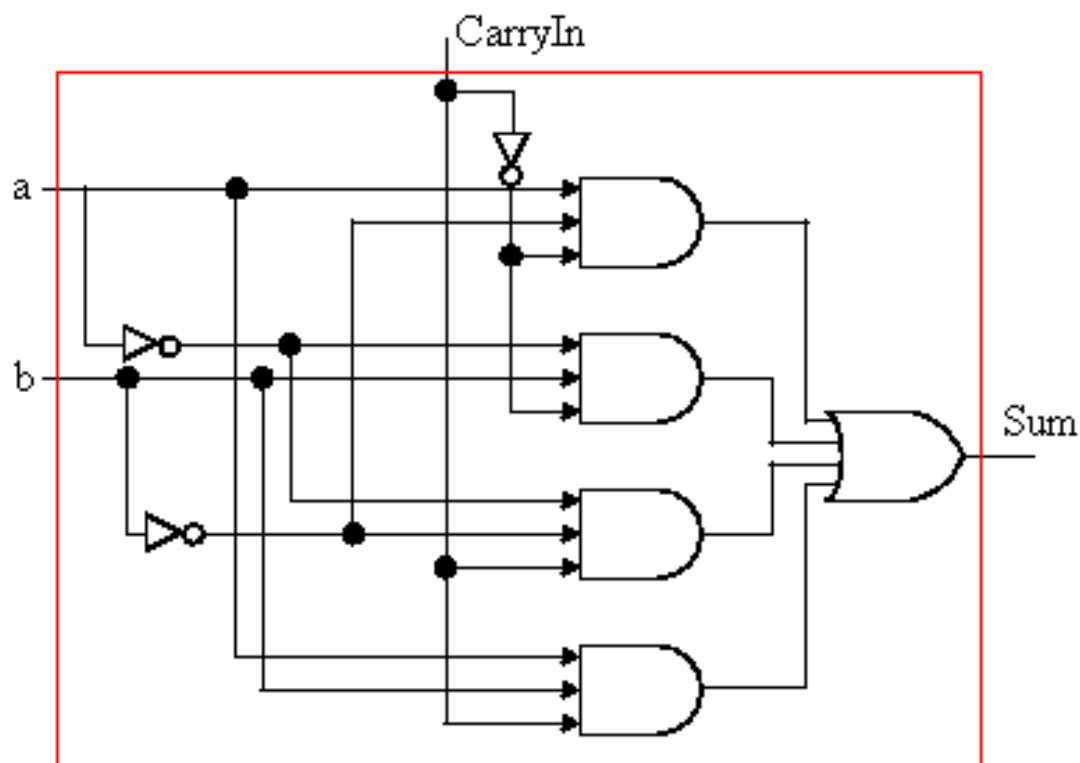


$$\text{CarryOut} = (\mathbf{A'} * \mathbf{B} * \text{CarryIn}) + (\mathbf{A} * \mathbf{B'} * \text{CarryIn}) + (\mathbf{A} * \mathbf{B} * \mathbf{CarryIn'}) + (\mathbf{A} * \mathbf{B} * \text{CarryIn}) = (\mathbf{B} * \text{CarryIn}) + (\mathbf{A} * \text{CarryIn}) + (\mathbf{A} * \mathbf{B})$$

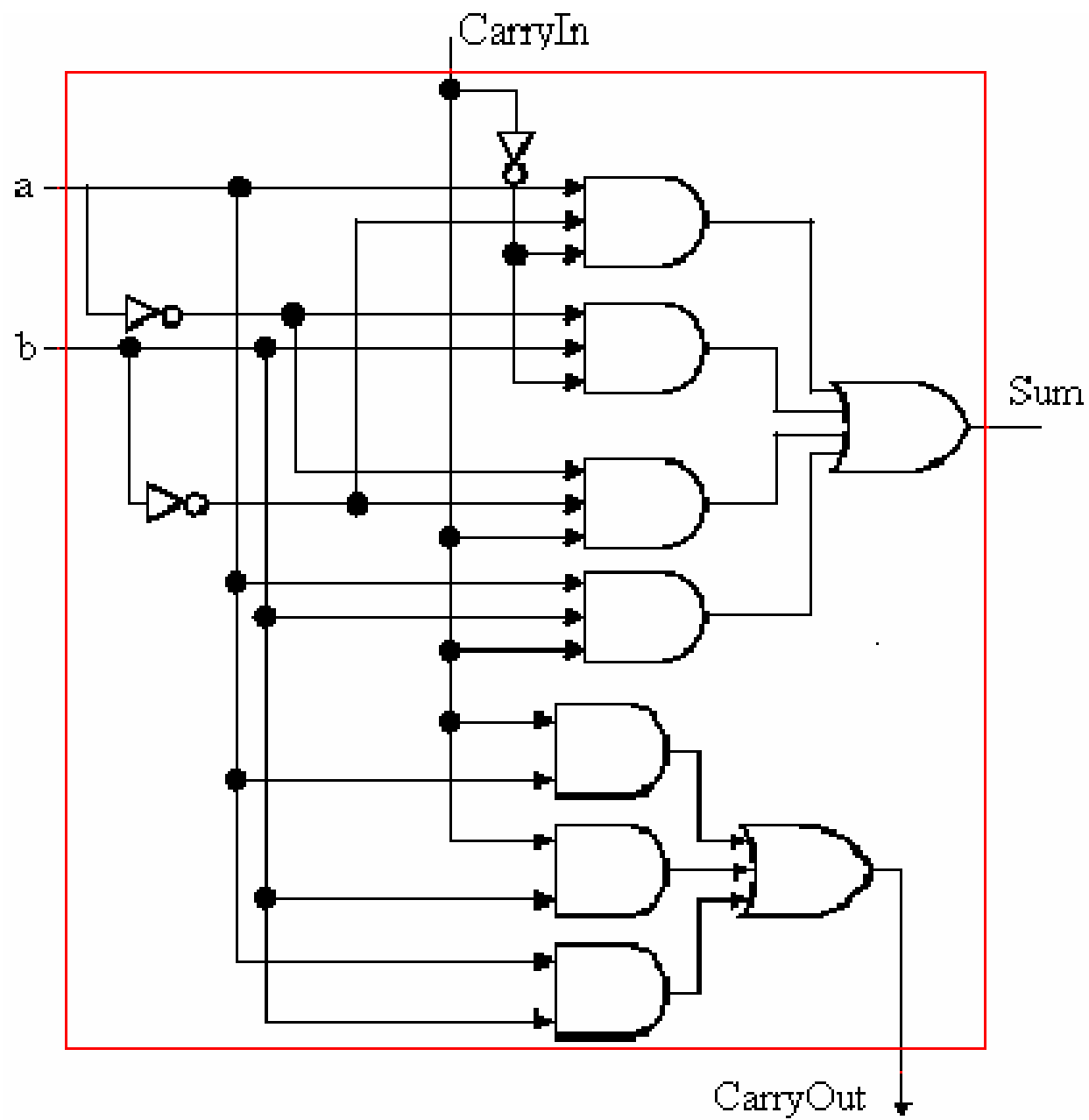
$$\text{Sum} = (\mathbf{A'} * \mathbf{B'} * \text{CarryIn}) + (\mathbf{A'} * \mathbf{B} * \mathbf{CarryIn'}) + (\mathbf{A} * \mathbf{B'} * \mathbf{CarryIn'}) + (\mathbf{A} * \mathbf{B} * \text{CarryIn})$$

全加器设计与实现

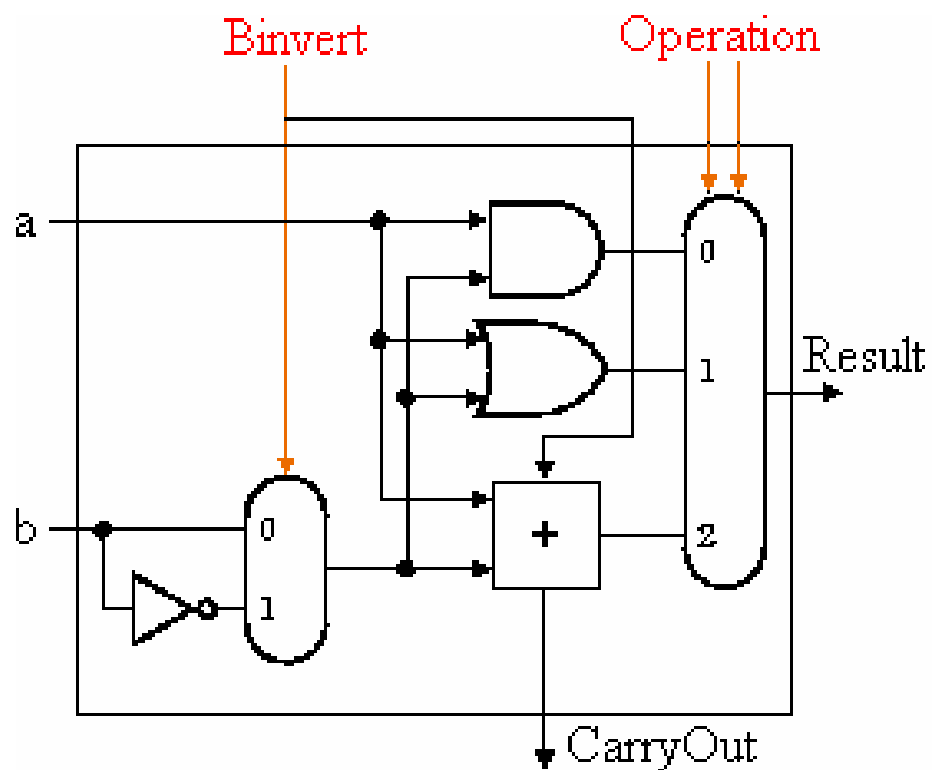
- 用逻辑门实现加法,求Sum
- 用逻辑门求 CarryOut
- 将所有相同的输入连接在一起



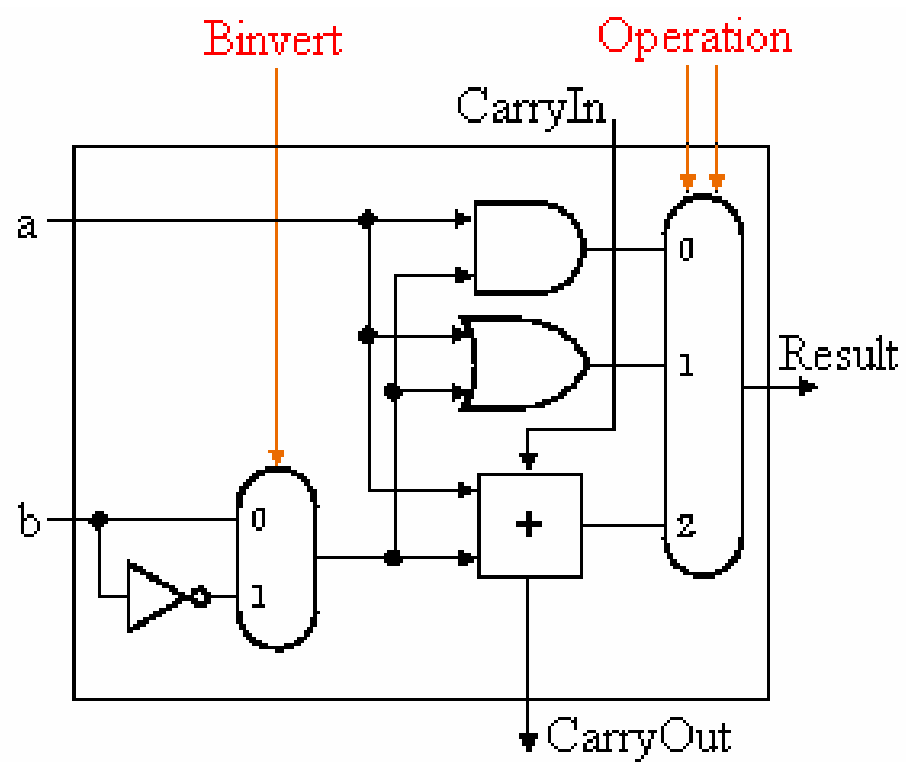
全加器



1位ALU



最低位



其他位

1位ALU的设计过程

- 确定ALU的功能
 - 与、或、加
- 确定ALU的输入参数
- 根据功能要求,得到真值表,并写出逻辑表达式;
- 根据逻辑表达式实现逻辑电路。
- 如何实现4位的ALU呢?

4位ALU实现方式

■ 思路1:

- 同1位ALU设计,写真值表,逻辑表达式,实现逻辑电路。

4位ALU实现方式

■ 思路1:

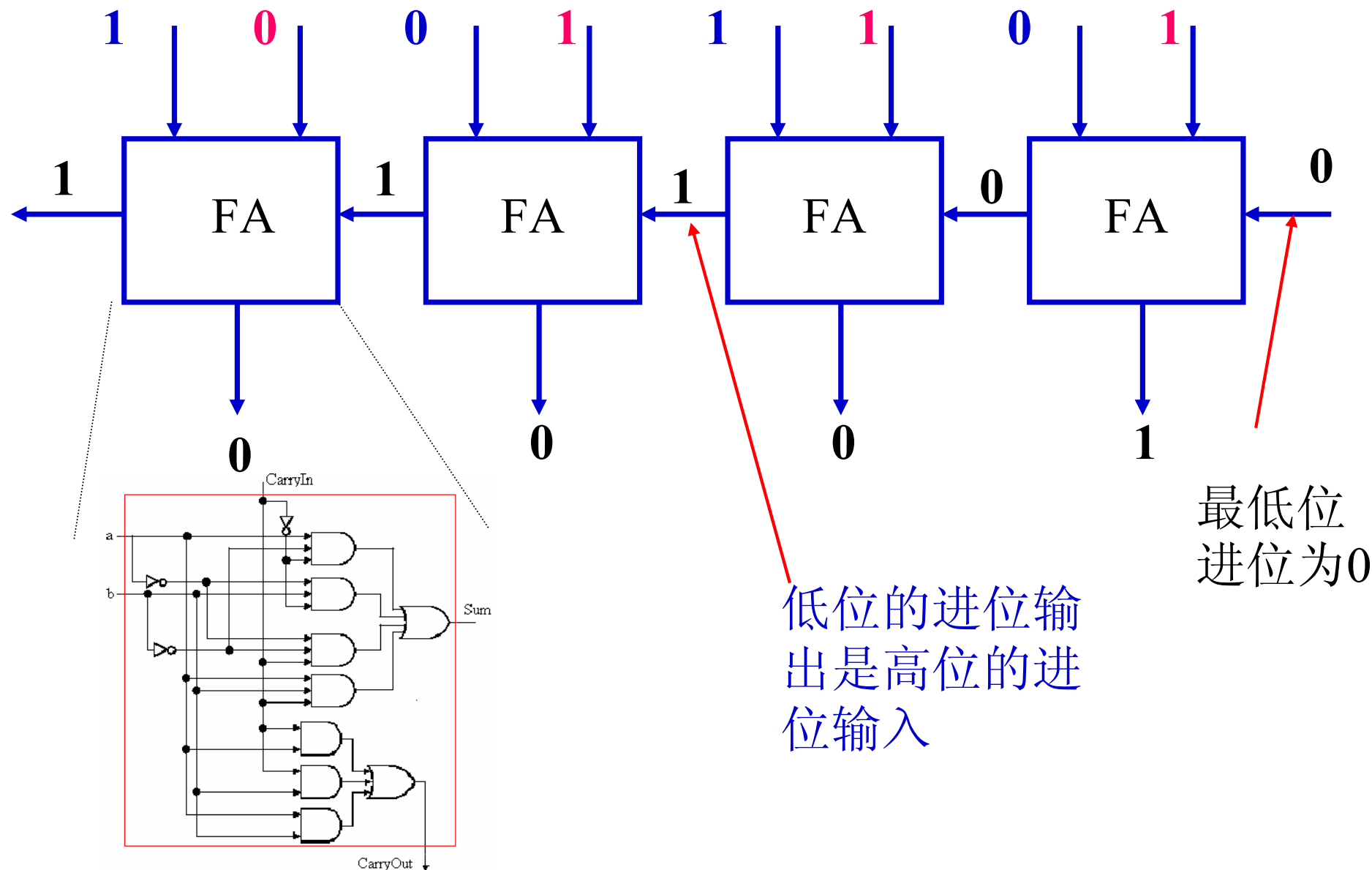
- 同1位ALU设计,写真值表,逻辑表达式,实现逻辑电路。

■ 思路2:

- 用1位ALU串联起来,得到4位的ALU。

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

4位ALU设计

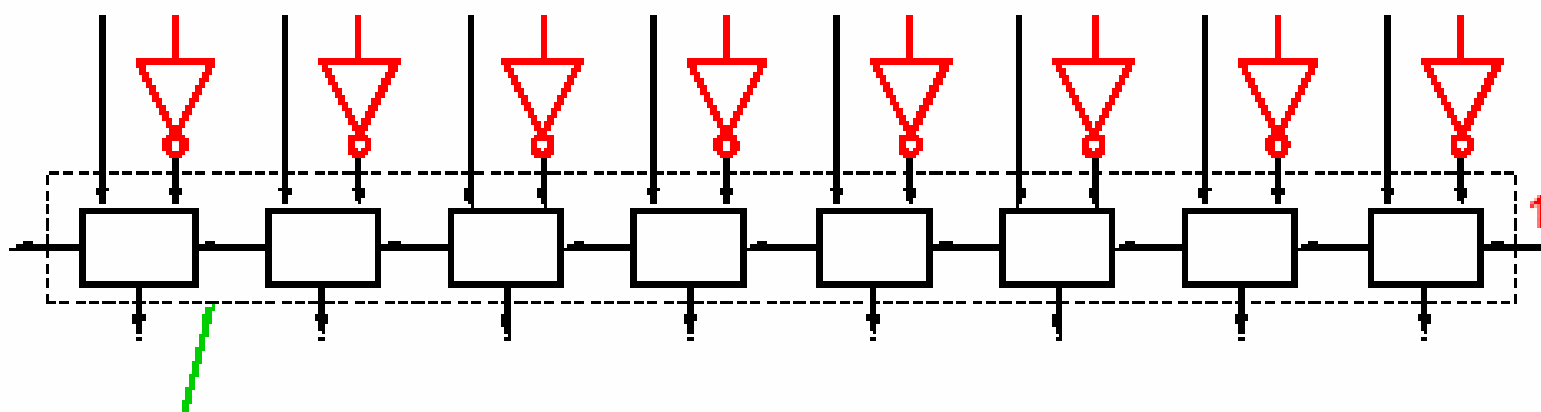


补码减法

- 根据算术运算规则:
- $[a-b]_{\text{补}} = [a]_{\text{补}} + [-b]_{\text{补}}$
- $[-b]$ 的补码为:将 $[b]_{\text{补}}$ 的各位求反,并加1。
- 由此,我们可以用加法器实现减法。

补码减法

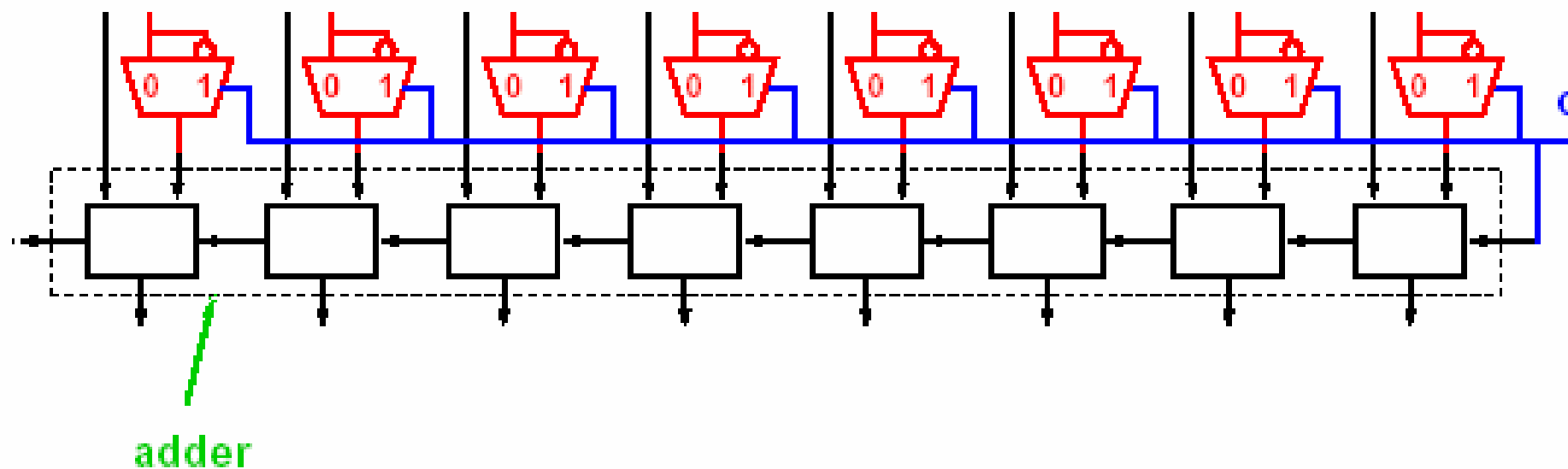
- 根据算术运算规则:
- $[a-b]_{\text{补}} = [a]_{\text{补}} + [-b]_{\text{补}}$
- $[-b]$ 的补码为:将 $[b]_{\text{补}}$ 的各位求反,并加1。
- 由此,我们可以用加法器实现减法。



加法器

将加法和减法相结合

- 给定控制命令 $C=0$, 则ALU完成加法 $a+b$;
- $C=1$, 完成减法 $a-b$



n位进位加法器（加法减法组合）

