# 作业十

noflowerzzk

2024.11.28

## P250 T6

*证明.* 先证明第五题的结论.
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，大于等于零且不恒为零，则存在 $x_0 \in [a,b], f(x_0) > 0$. 由于 $f(x)$ 连续，存在 $\delta > 0$, 任意 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq [a,b]$, $f(x) > 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(x)\mathrm{d}x > 0$. 因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{x-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x+\delta}^{b} f(x)\mathrm{d}x > 0$$

回到原题，假设 $\exists x_0 \in [a,b], f(x_0) \neq 0$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 由于 $f^2(x_0) > 0$, $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x > 0$，不成立. 因此 $f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$. □

## P250 T7

*证明.* 原式等价于

$$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(f(x) - f(b)\right)\mathrm{d}x = 0$$

因此必然存在 $\eta \in \left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$, $f(\eta) - f(b) = 0$. 否则由于 $f(x)$ 连续，$f(x)$ 恒正或恒负，积分不可能等于零. $f(x)$ 在闭区间 $[\eta, b]$ 间用 Rolle 中值定理即证. □

## P250 T8

*证明.* 易得 $f(x)$ 是下凸函数，满足 Jesen 不等式. 取 $[0,a]$ 的任意分划 $P: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{a}\varphi(\xi_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{a} f(\varphi(\xi_i))$$

$\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$.
由 $f(x)$ 连续性及 $\varphi(x)$ 可积性，两边对 $\lambda(P) \to 0$ 取极限，即有

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t$$

□

## P251 T9

*证明.* 注意到

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^\alpha f(\alpha)\mathrm{d}x = \alpha f(\alpha)$$
$$\int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_\alpha^1 f(\alpha)\mathrm{d}x = (1-\alpha) f(\alpha)$$

消去 $f(\alpha)$ 即得

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geqslant \alpha\left(\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x + \int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

□

## P251 T11

*证明.* 由 Lebesgue 定理，$f(x)$ 仅有可列个间断点. 由 $f(x)$ 有界，设 $|f(x)| \leqslant M$. 对任意 $f(x)$ 的连续点，对任意 $\varepsilon > 0$，当 $h < \delta$ 时 $|f_h(x) - f(x)| < \varepsilon$.

对任意划分 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 某个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的振幅为 $\omega_i$. 将所有区间分为含间断点的区间和不含间断点是区间.

- 对含有间断点的区间 $[x_{i-1}, x_i]$, 由间断点仅有可列个，即间断点组成的集合为零测集，因此当 $\lambda(P)$ 充分小时，所有这些区间的长度和小于 $\dfrac{\varepsilon_1}{2}$，延长这些区间为开区间，长度和可以小于 $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{4M}\varepsilon$. 有这些区间的对应的 Darboux 大小和的差的部分为 $S_1 < 2\varepsilon_1 M$.
- 对不含间断点的区间 $[x_{i-1}, x_i]$, 由于 $f(x)$ 的连续性，当 $h < \delta$ 时，$|f_h(x) - f(x)| < \varepsilon_2 = \dfrac{1}{2(b-a)}\varepsilon$, 因此这些区间对应的 Darboux 大小和的差的部分 $S_2 \leqslant (b-a)\varepsilon_2$.

因此

$$\lim_{h\to 0}\left(\bar{S}(P) - \underline{\mathrm{S}}(P)\right) \leqslant 2\varepsilon_1 M + (b-a)\varepsilon_2 = \varepsilon$$

即

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f_h(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$$

□

## P251 T13

*证明.* 由于 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 有界. 设 $0 < m_0 \leqslant g(x) \leqslant M_0$.

设 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) = f(\xi) = M \geqslant 0$. 若 $f(\xi) = 0$, 结论显然成立.

若 $f(\xi) > 0$, 则由 $f(x)$ 连续性，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0, \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta), f(x) \in (M - \varepsilon, M]$.

因此

$$\begin{aligned}(M-\varepsilon)^n \cdot 2\delta m_0 &< \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f^n(x) g(x)\mathrm{d}x \\ &< \int_a^b f^n(x) g(x)\mathrm{d}x < M^n(b-a)M_0\end{aligned}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left[(M-\varepsilon)^n\cdot 2\delta m_0\right]^{\frac{1}{n}}=M-\varepsilon,\quad \lim_{n\to\infty}\left[M^n(b-a)M_0\right]=M^n$$

有

$$M-\varepsilon<\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f^n(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}<M \tag{1}$$

由夹逼原理，

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f^n(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}=M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$$

□

## 推论 6.26 的练习

证明. 任意取定 $\varepsilon>0$,
$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，设 $|f(x)|<M$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，存在 $\sigma>0$, $|x_1-x_2|\leqslant\sigma\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$
由于 $\varphi(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，存在 $\delta_1>0$, 存在划分 $P:\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_n=\beta,\lambda(P)<\delta_1$, 有 $\sum\limits_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.
由先前的作业题，满足存在划分 $P$, $\sum\limits_{\omega_i\geqslant\sigma}\Delta x_i\leqslant\dfrac{\varepsilon}{4M}$. 因此 $\sum\limits_{\omega_i\geqslant\sigma}(f\circ\varphi_{\max}(x)-f\circ\varphi_{\min}(x))\Delta x_i\leqslant 2M\dfrac{\varepsilon}{4M}=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 同时 $\sum\limits_{\omega_i<\sigma}(f\circ\varphi_{\max}(x)-f\circ\varphi_{\min}(x))\Delta x_i<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\dfrac{\varepsilon}{2}$. 因此对 $f(x)$ 的 Darboux 大小和之差为

$$\begin{aligned}\bar{S}(P)-\underline{S}(P)&=\sum_{\omega_i\geqslant\sigma}(f\circ\varphi_{\max}(x)-f\circ\varphi_{\min}(x))\Delta x_i\\&\quad+\sum_{\omega_i<\sigma}(f\circ\varphi_{\max}(x)-f\circ\varphi_{\min}(x))\Delta x_i\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

即 $f\circ\varphi$ 在 $[a,b]$ 上可积. □