作业八

Noflowerzzk

2025.4.11

4 - 7

(1) 相当于杆，$J=\dfrac{1}{3}ma^2$

(2) $M=\dfrac{1}{4}ka^4b\omega^2$, 由 $M=J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$，有 $\dfrac{3}{4}\dfrac{ka^2b}{m}t=\dfrac{1}{\omega}-\dfrac{1}{\omega_0}$. 令 $\omega=\dfrac{1}{2}\omega_0$ 有 $t=\dfrac{4m}{3ka^2b\omega_0}$

4 - 9

(1) $J_C=J_O+M\left(\dfrac{l}{4}\right)^2$

(2) $L_O=L_C+L'=\dfrac{1}{4}Mvl$

(3) 角动量守恒，$J_O\omega=L_O$, $\omega=\dfrac{12v}{7l}$

4 - 11

因此

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t},\quad \text{所以 } M\mathrm{d}t=J\mathrm{d}\omega+\omega\mathrm{d}J=\left(\frac{1}{2}m_0R^2+mr^2\right)\mathrm{d}\omega+qr^2\omega\mathrm{d}t,$$

$$\left(M-qr^2\omega\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{2}m_0R^2+mr^2\right)\mathrm{d}\omega,\quad \text{又 } m=qt,\quad \text{故}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{M-qr^2\omega}=\frac{\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}m_0R^2+mr^2},\quad \text{所以 } \omega=\frac{2Mt}{m_0R^2+2qr^2t},\quad \text{当 } t=\frac{m_0R^2}{qr^2},\quad \omega=\frac{2M}{q(R^2+2r^2)}.$$

4 - 12

弹簧原长 $l_0=0.5\,\mathrm{m}$ ，当 $\theta=90^\circ$ 时弹簧伸长量 $\Delta x=\sqrt{1.5^2+1^2}-0.5=1.30\,\mathrm{m}$ ，由能量守恒 $\dfrac{1}{2}J\omega^2+mg\dfrac{l}{2}=\dfrac{1}{2}k(\Delta x)^2$ ，故初始角速度大小

$$\omega=\sqrt{\frac{k(\Delta x)^2-mgl}{\frac{1}{3}ml^2}}=3.37\,\mathrm{rad/s}$$

4 - 13

(1) 转动惯量为 $J_o = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$ ，由能量守恒 $\frac{1}{2}J_o\omega^2 = mgR$ ，所以角速度

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{3R}} \quad v_c = R\omega = 2\sqrt{\frac{gR}{3}} \quad v_A = 2R\omega = 4\sqrt{\frac{gR}{3}}.$$

(2) 取 O 为参考点，外力矩为零，所以角加速度为零。质心水平方向加速度为 $a_{cx} = \beta R = 0$ ，竖直方向加速度为 $a_{cy} = R\omega^2 = \frac{4}{3}g$
$F_x = ma_{cx}$ ，$F_y - mg = ma_{cy}$ 故 $F_x = 0$ ，$F_y = \frac{7}{3}mg$ ，轴对圆盘的合力为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{7}{3}mg.$$

4 - 14

绷紧瞬间 $J\omega_0 = J\omega + mR^2\omega$ 得 $\omega = \frac{1}{3}\omega_0, v_A = \frac{1}{3}\omega_0 R$. 由牛二 $\mu mg - T = mR\beta, TR = J\beta$, 有 $T = \frac{1}{3}\mu mg$.

4 - 15

能量守恒有 $\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}J\omega_0^2$. 碰撞时角动量守恒有 $J\omega_0 = J\omega + mv_0 l$. 棒反弹后有 $\frac{1}{2}mgl + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh$, 块 $\mu mgs = \frac{1}{2}mv_0^2$, 解得 $h = 3\mu s + l - \sqrt{6\mu sl}$

4 - 16

(1) 力矩为 0，角动量守恒，小珠滑到环的中点时 $J\omega_0 = J\omega_1 + mR^2\omega_1$ ，角速度为 $\omega_1 = \frac{1}{3}\omega_0$ ，由能量守恒

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2}J\omega_1^2 + \frac{1}{2}m((R\omega_1)^2 + u_1^2)$$

解得

$$u_1 = \sqrt{\frac{1}{3}R\omega_0^2 + 2gR} \quad \text{相对地面的速度大小为} \quad v_1 = \sqrt{u_1^2 + (R\omega_1)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}R\omega_0^2 + 2gR}.$$

(2) 小珠滑到底部时有 $J\omega_0 = J\omega_2$ ，所以角速度大小为 $\omega_2 = \omega_0$ ，由能量守恒

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 + 2mgR = \frac{1}{2}J\omega_2^2 + \frac{1}{2}mu_2^2$$

解得 $u_2 = \sqrt{4gR}$ ，相对地面的速度大小为 $v_1 = u_2 = \sqrt{4gR}$.

4 - 17

(1) 小球下落能量守恒，$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgl$ ，以 O 为参考点角动量守恒，$mlv_0 = J\omega_0$ ，碰撞能量守恒 $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2$ 故 $M = 3m$ 。

(2) 由 (1) 解得 $v_0 = l\omega_0$ ，细杆摆起过程中能量守恒，$\frac{1}{2}J\omega_0^2 = Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$ 故 $\theta = \arccos\frac{1}{3}$ 。

4 - 18

(1) 转动惯量为 $J = \frac{1}{3}Ml^2 + Ml^2 = \frac{4}{3}Ml^2$ 系统中心位置与 O 距离为 $l_c = \frac{M\frac{l}{2} + Ml}{2M} = \frac{3}{4}l$ ，子弹穿入过程中系统角动量守恒，$mlv = ml\frac{v}{2} + J\omega_0$ ，杆和球能量守恒 $\frac{1}{2}J\omega_0^2 = 2Mg \times 2l_c$ ，解得 $v = \frac{4M}{m}\sqrt{2gl}$ 。

(2) 角加速度为 $\beta_1 = \frac{2Mgl_c}{J} = \frac{9g}{8l}$ ，质心水平加速度为 $a_{cx} = l_c\omega_1^2 = \frac{3}{4}l\omega_1^2$ ，竖直加速度为 $a_{cy} = \beta_1 l_c = \frac{27}{32}g$ ，由牛二 $F_x = 2Ma_{cx}$ ，$2Mg - F_y = 2Ma_{cy}$ 故 $F_x = \frac{3}{2}Ml\omega_1^2$ ，$F_y = \frac{5}{16}Mg$ ，故

$$F = M\sqrt{\frac{25}{256}g^2 + \frac{9}{4}l^2\omega_1^4}$$

4 - 19

(1) 顺时针

(2) $\omega_1 = \frac{mgr\sin\theta}{J_c\omega\sin\theta} = \frac{mgr_C}{J_C\omega}$

$v = \frac{1}{r}g\left(t - \frac{r}{c}\right), r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 证明：$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$