线代作业三

noflowerzzk

2025.3.8

1

$$A^TA=\begin{pmatrix}4 & 8 & 10\\ 8 & 20 & 26\\ 10 & 26 & 38\end{pmatrix},\quad A^Tb=\begin{pmatrix}18\\30\\38\end{pmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}=(A^TA)^{-1}A^Tb=\begin{pmatrix}\frac{31}{4}\\ \frac{-9}{4}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

2

(1) 取 $\lambda=\mu=0$, $\mathbf{0}\in A$.
$\alpha=(\lambda_1,\lambda_1+\mu_1^3,\lambda_1-\mu_1^3),\beta=(\lambda_2,\lambda_2+\mu_2^3,\lambda_2-\mu_2^3)$. $\alpha+\beta$ 取 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2,\mu=\sqrt[3]{\mu_1^3+\mu_2^3}$ 即可. $k\alpha=(k\lambda_1,k\lambda_1+k\mu_1^3,k\lambda_1-k\mu_1^3)$, 取 $\lambda=k\lambda_1$, $\mu=\sqrt[3]{k}\mu_1$ 即可.
A 是一个子空间.

(2) 取 $\alpha=(1,-1,0)\in B$, $-\alpha=(-1,1,0)\notin B$. B 不是一个子空间.

(3) 当 $\gamma\neq 0$ 时，$\mathbf{0}\notin C$, C 不是一个子空间. 当 $\gamma=0$ 时，C 是一个子空间. 由于 $\alpha\in C$ 是 ξ_i 的线性组合易证.

(4) 取 $\alpha=(0,1,0)\in D$, $0.5\alpha=\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)\notin D$，$D$ 不是一个子空间.

3

(1) $\dim U_1=3-r(A_1)=1$, 解方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 得基础解系 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是为其一组基. $\dim U_2=3-r(A_2)=1$, 同理得基础解系 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 是为其一组基.

(2) $\dim V_1 = r(A_1) = 2$, 初等行变换后得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故其一组基为 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dim V_2 = r(A_2) = 2$. 初等行变换后得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故其一组基为 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3) 由于 U_1, U_2 的基线性无关，故 $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, $\dim U_1 \cap U_2 = 0$, 基为 $\emptyset$.

由于 V_1, V_2 的列向量组的秩为 2, 故其维数为 2. 又其矩阵化简为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 因此其一组基为 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dim V_2 = r(A_2) = 2$

4

不一定. 例如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其零空间为 $L((1,0)^T)$, 但是 $A^2 = \mathbf{0}$, 其零空间为 $\mathbb{R}^2$.

5

任意 $\boldsymbol{x} \in N(C)$, 有 $A\boldsymbol{x} = 0$ 且 $B\boldsymbol{x} = 0$. 因此 $\boldsymbol{x} \in N(A) \cap N(B)$, 即 $N(C) \subseteq N(A) \cap N(B)$. 另一方面，任意 $\boldsymbol{x} \in N(A) \cap N(B)$, 有 $A\boldsymbol{x} = 0$ 且 $B\boldsymbol{x} = 0$. 因此 $C\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x} \\ B\boldsymbol{x} \end{pmatrix} = 0$, 即 $\boldsymbol{x} \in N(C)$. 因此 $N(A) \cap N(B) \subseteq N(C)$.

综上，$N(C) = N(A) \cap N(B)$.

6

不一定. 例如 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$. A 的行空间和列空间都为 $\mathbb{R}^2$, 且由于 A 满秩，A,A^T 零空间均为 $\{0\}$. 但是 A 不是堆成矩阵.

7

列空间为 $L((1,0)^T)$, 且零空间为 $L((1,0)^T)$

8

即 A 的列向量组线性无关，构成其列空间的一组基. 因此 A 的列向量组也构成 B 的列空间的一组基. 因此 $r(B)=r(A)$. 有 $N(B)$ 的维数为 $2r(A)$.

又观察易知 $(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{x_3})^T$ 其中 $\boldsymbol{x_i}$ 为 $r(A)$ 维列向量，且 $\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_3}=\mathbf{0}$. 在 B 的零空间内（由于 $B\begin{pmatrix}\boldsymbol{x_1}\\\boldsymbol{x_2}\\\boldsymbol{x_3}\end{pmatrix}=A\boldsymbol{x_1}+A\boldsymbol{x_2}+A\boldsymbol{x_3}=\mathbf{0}$）又任意 $\boldsymbol{x},B\boldsymbol{x}=0$, 把 $\boldsymbol{x}$ 表示为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x_1}\\\boldsymbol{x_2}\\\boldsymbol{x_3}\end{pmatrix}$, 有 $A(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_3})=\mathbf{0}$.

由于 A 可逆，则 $\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_3}=\mathbf{0}$.

综上，其零空间为 $\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\\-\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\end{pmatrix}\;\middle|\;\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^{r(A)}\right\}$

9

(1) 证明. 设 $r(A)=r_1,r(B)=r_2$, 且 $P_1AQ_1=\begin{pmatrix}E_{r_1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix},P_2BQ_2=\begin{pmatrix}E_{r_2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$ 故

$$\begin{aligned}A\otimes B&=P_1^{-1}\begin{pmatrix}E_{r_1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}Q_1^{-1}\otimes P_2^{-1}\begin{pmatrix}E_{r_2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}Q_2^{-1}\\&=(P_1^{-1}\otimes P_2^{-1})\left(\begin{pmatrix}E_{r_1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}E_{r_2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\right)(Q_1^{-1}\otimes Q_2^{-1})\end{aligned}$$

故 $r(A\otimes B)=r\left(\begin{pmatrix}E_{r_1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}E_{r_2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\right)=r_1r_2=r(A)r(B)$ □

(2) 证明. 设 λ_i 为 A 的特征值，μ_i 为 B 的特征值。则由于 $\lambda_i\mu_j$ 为 $A\otimes B$ 的特征值，故

$$\det(A\otimes B)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j=\left(\prod_{i=1}^{m}\lambda_i^n\right)\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_j^m\right)=\det(A)^n\det(B)^m$$

□