作业三

Noflowerzzk

2025.3.5

P60 T3

证明.

(1) 取 $S(x) \equiv 0$. 有 $|S_n(x) - S(x)| = \dfrac{x}{1+n^2x^2} \to 0, (n \to 0)$. 故 $S_n(x) \rightrightarrows S(x) \equiv 0$. $S_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

- 令 $T_n(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S_n(x) = \dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$. 取 $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$ 取 $x = \dfrac{1}{2n}$, $T_n(x) - T(x) = \dfrac{12}{25} \neq 0$. 故不一致收敛.

(3) $x = 0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$ 而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S_n(x) = 1$.

□

P61 T4

$S_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'(x) = \dfrac{1}{2}$, 但是 $S'(1) = 0$, 不成立.

P61 T5

(1) $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$, $S_n'(x) = n^\alpha \mathrm{e}^{-nx}(1-nx) = 0$ 有 $x = \dfrac{1}{n}$. 此时计算 $d(S_n(x), S(x)) =$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x = n^{\alpha-2} - n^{\alpha-1}(1-nx)$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-nx}(1-nx) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 故当 $\alpha < 0$ 时有上式成立.

P118 T3

证明. 由于 $f(x,y)$ 是初等函数，故其连续.
而由于 $d\left(\left(1-\dfrac{1}{n}, 1-\dfrac{1}{n}\right), \left(1-\dfrac{1}{2n}, 1-\dfrac{1}{2n}\right)\right) \to 0$, 而

$$\lim_{n\to\infty} f\left(1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) - \lim_{n\to\infty} f\left(1-\frac{1}{2n}, 1-\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(4n-3)n^2}{(4n-1)(2n-1)} = \infty$$

故 $f(x,y)$ 不一致连续.

□

P118 T5

证明. (1) 任取 (x_0, y_0). 由题意知，存在 $R>0$, 任意 $x^2+y^2>R^2$ 有 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$. 同时，$f(x,y)$ 在 $\overline{B}((0,0),R)$ 上有界且连续，有最小值. 故 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值.

(2) 任取 (x_0, y_0). 若 $f(x,y)\equiv 0$, 则显然成立.
否则取 (x_0,y_0) 使得 $f(x_0,y_0)\neq 0$.
若 $f(x_0,y_0)>0$, 存在 $R>0$, 任意 $x^2+y^2>R^2$, 有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$. 而 $f(x,y)$ 在闭集 $\overline{B}((0,0),R)$ 中必有最大值. 故 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最大值.
若 $f(x_0,y_0)<0$, 取 $-f(x,y)$ 即可.

□

P118 T6

证明. 由于任意 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ $f(\boldsymbol{x})$ 有界，故 $f(\boldsymbol{x})$ 有最大值和最小值，设为 a,b.
现任取 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 有

$$f(\boldsymbol{x})=f\left(\|\boldsymbol{x}\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)=\|\boldsymbol{x}\|f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)\le b\,|\boldsymbol{x}|$$
$$f(\boldsymbol{x})=f\left(\|\boldsymbol{x}\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)=\|\boldsymbol{x}\|f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)\ge a\,|\boldsymbol{x}|$$

□

P118 T7

证明. $\forall\boldsymbol{x}\in\overline{A}$, 若 $\boldsymbol{x}\in A$, 则显然 $f(\boldsymbol{x})\in f(A)\subseteq\overline{f(A)}$
若 $\boldsymbol{x}\in\partial A$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\boldsymbol{x}_0\in A$, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时, 有 $\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon$. 故 $f(\boldsymbol{x})\in\overline{f(A)}$
故 $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$. □

P118 T8

证明. (1) 任取 $\boldsymbol{\xi}\in\partial D$, 存在一个点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 $\boldsymbol{\xi}$. 由于 $f(\boldsymbol{x})$ 一致连续，故由于 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是 Cauchy 列, 故 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 也是 Cauchy 列. 故 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 收敛. 设其收敛到 $g(\boldsymbol{\xi})$.
由于收敛的定义，$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 当 $n>N$ 时，有 $\|f(\boldsymbol{x}_n)-g(\boldsymbol{\xi})\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 对任意 $\boldsymbol{x}\in D$, 可以取上述 Cauchy 列且存在 $n>N$ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 故有

$$\|f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{\xi})\|\le\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_n)\|+\|f(\boldsymbol{x}_n)-g(\boldsymbol{\xi})\|<\varepsilon$$

故取 $\tilde{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in D\\ g(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\partial D\end{cases}$ 在 $\overline{D}$ 上连续.

(2) 易知 $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\overline{D}$ 上连续，故 $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\overline{D}$ 上有界. 设其界为 $\left|\tilde{f}(\boldsymbol{x})\right|\le M$.
因此

$$|f(\boldsymbol{x})|\le\left|f(\boldsymbol{x})-\tilde{f}(\boldsymbol{x})\right|+\left|\tilde{f}(\boldsymbol{x})\right|\le\varepsilon+M$$

故 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上有界.

□