作业十

noflowerzzk

2025.4.26

T2

所求点为 $(-1,1,-1)$, $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$

T3

方向向量为 $(0,-1,0)$, 即方向余弦为 $(0,-1,0)$

T5

取 $(0,1,0)$, 法线为 $x=-z, y=1$

T9

方向导数为 $\frac{29}{14}$

T11

$$
\boldsymbol{r}'(t)=a\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t,\sin t+\cos t,1)
$$

母线方向为 $\boldsymbol{v}=a\mathrm{e}^t(\cos t,\sin t,1)$. 计算得夹角余弦 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$, 夹角不变.

T1

$$
\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma
$$

T2

证明. 设 $|f(x,y)| \le M, (x,y) \in D$, 将 D 分成 n 个小区域 $\Delta D_i (i=1,2,\cdots,n)$, 记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\text{diam } \Delta D_i\}$, 不妨设 $\Delta D_i (i=1,2,\cdots,k)$ 将曲线段 $y=\sin x, 0\le x\le \pi$ 包含在内, 于是 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\bigcup\limits_{i=k+1}^{n} \Delta D_i$ 上连续, 因此 $f(x,y)$ 在 $\bigcup\limits_{i=k+1}^{n} \Delta D_i$ 上可积, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $\lambda < \delta_1$ 时,

$$\sum_{i=k+1}^{n} \omega_i \Delta\sigma_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

而当 $\lambda < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{4kM}}$ 时,

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i \Delta\sigma_i < 2M \sum_{i=1}^{k} \Delta\sigma_i < 2kM\lambda^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta = \min\left(\delta_1, \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{4kM}}\right)$, 当 $\lambda < \delta$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta\sigma_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故 f 在 D 上可积. □

T4

证明. 将 $[a,b],[c,d]$ 作划分：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

和

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d,$$

则 D 分成了 nm 个小矩形 ΔD_{ij} $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$。

记 ω_i 是 $f(x)$ 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅，$\omega_{ij}(F)$ 是 F 在 ΔD_{ij} 上的振幅，则

$$\omega_{ij}(F) = \omega_i,$$

于是

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} \omega_{ij}(F)\Delta\sigma_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n,m} \omega_i \Delta x_i \Delta y_j = (d-c)\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i,$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \to 0 \quad (\lambda \to 0),$$

故

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i,j=1}^{n,m} \omega_{ij}(F)\Delta\sigma_{ij} = \lim_{\lambda\to 0}\left\{(d-c)\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i\right\} = 0,$$

即 $F(x,y)$ 在 D 上可积。 □

T5

$$H(x,y)=\frac{f(x,y)+g(x,y)+|f(x,y)-g(x,y)|}{2},$$
$$h(x,y)=\frac{f(x,y)+g(x,y)-|f(x,y)-g(x,y)|}{2}.$$

由于 $f+g$ 和 $|f-g|$ 均可积，其线性组合 H 和 h 亦在 D 上可积。