作业 1

noflowerzzk

2025.2.23

1

证明. 一方面，任意 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 有若 $2|n$, 则 $g(x)=a_0+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\in U$, $h(x)=a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\in W$. 故 $U+W=V$.
另一方面，显然 $U\cap W=\{0\}$.
因此 $U\oplus W=V$. □

2

证明.

(1) $\Rightarrow$ (2) 对 n 归纳.
$n=2$ 时，上课已经证明.
假设 $n=k\geq 2$ 时，有 $\bigoplus\limits_{i=1}^{k}W_i=V$ 有 $\forall\alpha\in V$, 有唯一分解 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$, $\alpha_i\in W_i$. 则 $n=k+1$ 时，有 $V=\bigoplus\limits_{i=1}^{k+1}W_i$, 有 $W_{k+1}\cap\sum\limits_{i=1}^{k}W_i=\{0\}$. 故由归纳假设 $n=2$ 情形，$\forall\alpha\in V$, α 可唯一分解为 $\alpha=\alpha_k'+\alpha_{k+1}$, 其中 $\alpha_k'\in\sum\limits_{i=1}^{k}W_i,\alpha_{k+1}\in W_{k+1}$. 又由归纳假设，$\alpha_k'$ 有在 $\sum\limits_{i=1}^{k}W_i$ 的唯一分解 $\alpha_k'=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i$, 且 α_{k+1} 与 α_i $(i\leq k)$ 互不相同. 故是唯一分解.

(2) $\Rightarrow$ (3) 显然

(3) $\Rightarrow$ (4) 对 n 归纳，$n=2$ 时，上课已经证明.
假设 $n=k$ 时，$W_i,i=1,2,\cdots k$ 的基构成 $\sum\limits_{i=1}^{k}W_i$ 的一组基，则 $n=k+1$ 时，由于 $\mathbf{0}$ 在 $W_1,\cdots W_k$ 中有唯一分解，且由于 $\mathbf{0}$ 在 $\sum\limits_{i=1}^{k}W_i$ 和 W_{k+1} 中有唯一分解，由归纳假设，$\sum\limits_{i=1}^{k}W_i$ 和 W_{k+1} 的基构成 $\sum\limits_{i=1}^{k+1}W_i$ 的基. 因此 W_i 的基构成 $\sum\limits_{i=1}^{l+1}W_i$ 的基.

(4) $\Rightarrow$ (1) 对 n 归纳，$n=2$ 时，上课已经证明.
假设 $n=k\geq 2$ 时有 $W_i\cap\sum\limits_{j=1}^{i-1}W_i=\{0\}$, 则 $n=k+1$ 时，由 $n=2$ 的结论，有 $W_{k+1}\cap\sum\limits_{i=1}^{k}W_i=\{0\}$, 即有 $\bigoplus\limits_{i=1}^{k+1}W_i$ □

3

证明. 由维数公式，$\dim U \leq \sum_{i=1}^{n} \dim U_i$. 故”=” 成立有 $\forall i, \dim U_i + \dim(U_1 + \cdots + U_{i-1}) = \dim(U_1 + \cdots + U_i)$, 即根据 $n=2$ 的情形，$U_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} U_j = \{0\}$, 即 $V = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$. □

4

证明. 一方面，任意 $\alpha, \alpha' \in W$，有 $\forall u \in U$, $(\alpha, u) = (\alpha', u) = 0$. 故 $(\alpha + \alpha', u) = 0$, 有 $\aleph + \alpha' \in W$. 另一方面，任意 $k \in F$, 有 $(k\alpha, u) = k(\alpha, u) = 0$, $k\alpha \in W$. 故 W 是 V 的子空间. □

5

C 到 **B** 的过渡矩阵是

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

因此 **B** 到 **C** 的过渡矩阵为

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -23 & -9 & 6 \\ 8 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 + 2t$ 在 **C** 中为 $\alpha = (1, 2, 0)^T$, 故在 **B** 中为

$$P\alpha = \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

6

C 到 **B** 的过渡矩阵是

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 **B** 到 **C** 的过渡矩阵为

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

t^2 在 **C** 中为 $\alpha = (0, 0, 1)^T$, 故在 **B** 中为

$$P\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7

(1)

$$P\begin{pmatrix} u_1 u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

故由

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -3 & -5 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

有

$$v_1 = \begin{pmatrix} -109 \\ 60 \\ 61 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 67 \\ -37 \\ -37 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 27 \\ -16 \\ -16 \end{pmatrix}$$

(2) 同理有

$$w_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 46 \\ -31 \\ -19 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} -63 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$$

8

证明. 易验证 $2^{k+3} - 2 \cdot 2^{k+2} + 9 \cdot 2^{k+1} - 18 \cdot 2^k = 0$.
令 $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$, 有 $z^k = 3^k \cos\frac{k\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2}$. 由于

$$z^{k+3} - 2z^{k+2} + 9z^{k+1} - 18z^k = z^k\left(z^3 - 2z^2 + 9z - 18\right).$$

又 z 是方程 $z^3 - 2z^2 + 9z - 18 = 0$ 的根，故 $z^{k+3} - 2z^{k+2} + 9z^{k+1} - 18z^k = 0$, 即其实部虚部均为 0.

取 $k = 0$, 有 Casorati 矩阵

$$C(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

易验证 $C(0)$ 可逆，故三个型号线性无关，构成其解集的一组基. □

9

(1) 由于 $\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$. 由于 $\dim(S+T) \leq 10$, $1 \leq \dim(S \cap T)$. 又 $\dim(S \cap T) \leq \dim S$, 有 $\dim(S \cap T)$ 取值为 1 或 2.

(2) $1 \leq \dim(S \cap T) \leq 2$ 有 $\dim(S+T)$ 取值为 7 或 8.

(3) $\dim S^{\perp} + \dim S = 10$, $\dim S^{\perp} = 8$