作业五

noflowerzzk

2024.10.23

1

证明. 由 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$, 取 $\varepsilon=1, \exists N>0$且$N>a, \forall x>N, A-1<f(x)<1+A$.
又 $f(x)$ 在 $[a,N]$ 上连续, $\forall x\in[a,N], \exists M>0, -M<f(x)<M$.
取 $M'=\max\{M,|A-1|,|A+1|\}$, $|f(x)|<M'$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界. □

2

证明. 取 $f'(x)$ 满足:

$$\begin{cases} f'(a)=f(a+) \\ f'(b)=f(b-) \\ f'(x)=f(x), x\in(a,b) \end{cases}$$

我们证明 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
易得 $f'(x)$ 在 (a,b) 上连续, 又 $\lim_{x\to a^+} f'(x)=f(a+)=f'(a)$, $\lim_{x\to b^-} f'(x)=f(b^-)=f'(b)$,
所以 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 由介值定理, $f'(x)$ 能取到 $f'(a), f'(b)$ 之间的一切值.
又由 $f'(a)=f(a+), f'(b)=f(b-)$, 所以 $f(x)$ 能取到介于 $f(a+), f(b-)$ 之间的一切值. □

3

证明. 反证. 假设 $f(x)$ 在 x_0 处不连续.
若 $x_0\in(a,b)$, 由于 $f(x)$ 在 $[a,x_0),(x_0,b]$ 单调有界, $f(x)$ 在 x_0 处左右极限存在.
则 $f(x_0)\neq f(x_0-)$ 且 $f(x_0)\neq f(x_0+)$.
又由极限保号性, $f(x_0-)<f(x_0)<f(x_0+)$.
则对 $y\in(f(x_0-),f(x_0))$, 不存在一个 $x\in[a,b], f(x)=y$, 矛盾!
若 $x_0=a$, 同上有 $f(a)<f(a-)$, 对 $y\in(f(a),f(a-))$, 不存在一个 $x\in[a,b], f(x)=y$, 矛盾!
$x_0=b$ 同理.
综上, $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数. □

9

证明. 设椭圆 $\mathit{\Gamma}$ 标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, a>b>0$, 点 $P(x_0,y_0)$, 满足 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}<1$.
弦 l 的倾斜角为 θ, 与 $\mathit{\Gamma}$ 交于 A,B 两点. 有 $|PA|,|PB|$ 是关于 θ 的连续函数. 记为 $f(\theta), g(\theta)$.

则由对称性, 存在 θ_1, θ_2, 有 $f(\theta_1) < g(\theta_1), f(\theta_2) > g(\theta_2)$. 对连续函数 $t(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$, 有 $t(\theta_1)t(\theta_2) < 0$.
由零点存在定理, 存在 $\theta_0, t(\theta_0) = 0$, 即 $|PA| = |PB|$. $\square$

10

证明. 令 $F(x) = f(x) - f(x+1)$.
若 $f(1) = f(0)$, 取 $x = 0, y = 1$ 即有 $f(x) = f(y)$.
若 $f(1) \neq f(0)$, 有 $F(0)F(1) = -(f(1) - f(0))^2 < 0$. 由零点存在定理, $\exists x_0 \in (0,1), F(x_0) = 0$, 即 $f(x) = f(x+1)$. 令 $y = x+1$ 即成立. $\square$