作业四

Noflowerzzk

2025.3.13

P72 T1

(9) 取 $x_n = \dfrac{2}{3^n\pi}$, 有 $u_n(x_n) \to 2^n$, $u_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛到 0，故函数项级数不一致收敛.

当 $x \geq \delta$ 时，$|u_n(x)| \leq \dfrac{1}{\delta}\dfrac{2^n}{3^n}$. 由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\delta}\dfrac{2^n}{3^n}$ 收敛，故原函数项级数收敛.

(10) 令 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}, b_n = \sin x \sin nx$. a_n 对任意固定的 x 单减趋于 0,$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \cos\frac{x}{2}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \cos\frac{x}{2}\right)$ 有界，故原级数收敛.

(11) 由于取 $n, m = 2n$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$$\sum_{k=n}^{m} u_k > \frac{nx^2}{(1+x^2)^{2n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}} > \frac{1}{\mathrm{e}^2}$$

由 Cauchy 收敛准则知级数不收敛.

(12) 令 $a_n = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 单减收敛到 0，$b_n = (-1)^n$ 构成的部分和序列有界，故原级数一致收敛.

P73 T2

证明. 由于 $\dfrac{\cos nx}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{n^2+1}$ 而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 收敛，故 $f(x)$ 连续.

又设 $\sigma(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2+1}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$.

由于 $x \in [2a, 2\pi - 2a]$ 有

$$\left|-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}\right| = \frac{\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \cos\frac{1}{2}x\right|}{|2\sin a|} \leq \frac{1}{\sin a}$$

故 $-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上内闭一致收敛. 因此 $\sigma(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上连续. 又 $f'(x) = \sigma(x)$, $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有连续导数. □

P73 T3

证明. 对任意闭区间 $[m, M]$ 上的 x, 有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 收敛，故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 一致收敛，$f(x)$ 连续.

令 $\sigma_n(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n\mathrm{e}^{-nx})^{(n)}$, 同理其也一致收敛，即 $\sigma_n(x)$ 一致收敛. 有显然 $\sigma(x) = f^{(n)}(x)$ 有 $f(x)$

有各阶连续导函数. □

P73 T4

证明. 令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$. 任意 $[m,M]\subseteq(1,+\infty)$, 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m}$ 收敛. $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛。$f(x)$ 连续.

由于 $\left(\frac{1}{n^x}\right)^{(n)}=(-1)^k\frac{\ln^k n}{n^x}$, 同理 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln^k n}{n^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛. 故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有各阶连续导函数.

令 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$, 同理 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛，故 $g(x)$ 连续.

由于 $\left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right)^{(k)}=(-1)^{n+1}\frac{\ln^k n}{n^x}$. 同理也有其内闭一致收敛，故 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 的各阶连续导函数. □

P73 T6

证明. (1) 对固定的 $x<1$ 有 $\frac{1}{n^x}$ 关于 n 单减且小于 1. 由 Abel 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,\delta)$ 上一致收敛. 故和函数连续，即原表达式成立.

(2) 同理有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 一致收敛. 因此

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}$$

□

P73 T7

证明. 由于 $v_n(x)$ 连续. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$, 由 Cauchy 收敛准则，对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 任意 $m>n>N$, $\left|\sum\limits_{k=n}^{m}u_k(x)\right|\leq\sum\limits_{k=n}^{m}v_k(x)\leq\varepsilon$, 故 $\sum\limits_{k=n}^{m}u_n(x)$ 一致收敛. □

P73 T9

证明. 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 在 $(a,a+\delta)$ 上一致收敛. 则由 Cauchy 收敛准则，任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N,\forall m>n>N$, $\left|\sum\limits_{k=n}^{m}u_k(x)\right|\leq\varepsilon$. 则当 $x\to a$ 时，$\left|\sum\limits_{k=n}^{m}u_k(a)\right|\leq\varepsilon$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 发散矛盾！因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 在 $(a,a+\delta)$ 上不一致收敛. □

P73 T10

证明. 已知 $\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$ 在 $[-a,a]$ 上单增. 故

$$\ln\left(1+\frac{-a}{n\ln^2 n}\right)\leq \ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)\leq \ln\left(1+\frac{a}{n\ln^2 n}\right)$$

n 充分大时，$\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)\sim\frac{x}{n\ln^2 n}$ 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\pm a}{n\ln^2 n}$ 收敛. 因此原和函数一致收敛. □

P73 T12

(1) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ 收敛且 $\cos nx$ 有界，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$ 一致收敛，记为 $f(x)$, 故 $f(x)$ 连续.

(2)

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n^3+n}}\end{aligned}$$

故

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3\sqrt{30}}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{(2n-1)^3+2n-1}}$$

因此 $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3\sqrt{30}}<F\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$