线代作业二

Noflowerzzk

2025.3.2

1

证明.

- 当 $b=c=0$ 时，$T(\alpha(x,y,z))=\alpha(2x-4y+3z,6x)=\alpha T(x,y,z)$.
  且 $T((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2))=(2(x_1+x_2)-4(y_1+y_2)+3(z_1+z_2),6(x_1+x_2))=(2x_1-4y_1+3z_1,6x_1)+(2x_2-4y_2+3z_2,6x_2)=T(x_1,y_1,z_1)+T(x_2,y_2,z_2)$.
  故 T 是线性的.
- 若 T 是线性变换，则 $T(0,0,0)=(0,0)\Rightarrow b=0$.
  $2T(1,1,1)=T(2,2,2)\Rightarrow c=0$.

□

2

证明.

- 若 T 是单的，则若 $T(u)=T(v)=0=T(0)$, 有 $u=v=0$. 故 $\ker T=\{0\}$
- 若 $\ker T=\{0\}$, 有若 $T(u)=a,T(v)=a$, 且 $u\neq v$, 则 $T(u-v)=0$, $u-v\in\ker T$, 有 $u-v=0, i.e. u=v$, T 是单的.

□

3

(1) $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, 有 $M_\varepsilon P=PA_\eta$, 得

$$M_\varepsilon=\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&2&0\\3&0&2\end{pmatrix}$$

(2) $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$.

$$P^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1&3&3\\2&6&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$$

即为 ε_i 在基 η_1,η_2,η_3 下的坐标. 故计算 $\mathcal{A}(\varepsilon_i)$ 用 η_1 的坐标展开即得矩阵

$$M_\varepsilon = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 20 & 20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{pmatrix}$$

4

证明. 有 $\forall\alpha,\beta\in V,(T(\alpha),\beta)=(\alpha,T^*(\beta))$

(1) $\forall\alpha\in\ker T^*,T^*(\alpha)=0$. 故 $(\beta,T^*(\alpha))=0=(T(\beta),\alpha)$，即 $\alpha\in(\mathrm{Im}T)^\perp,\ker T^*\subseteq(\mathrm{Im}T)^\perp$
$\forall\alpha\in(\mathrm{Im}T)^\perp$, $(T(\beta),\alpha)=0=(\beta,T^*(\alpha)),\alpha\in\ker T^*,(\mathrm{Im}T)^\perp\subseteq\ker T^*$.
综上，$(\mathrm{Im}T)^\perp=\ker T^*$

(2) 由于 $(\mathrm{Im}T)^\perp=\ker T^*$, $\mathrm{Im}T=(\ker T^*)^\perp$, 即 $\mathrm{Im}T^*=(\ker T)^\perp$

□

5

证明.
- 由于若 $Ax=0$, 则 $(E-A)x=x,x\in\ker A,x\in\mathrm{Im}A$; 若 $(E-A)x=0$, 则 $Ax=x,x\in\mathrm{Im}A,x\in\ker(E-A)$. 因此 $\mathrm{Im}(E-A)=\ker A$. 又 $\dim\mathrm{Im}A+\dim\ker A=n$, 故 $r(A)+r(E-A)=n$.
- 若 $r(E-A)+r(A)=n$, 则 $\mathrm{Im}A\cap\ker A=\{0\}$. $\forall\alpha\in V$, 可唯一分解为 $\alpha=\beta+\gamma,\beta\in\mathrm{Im}A,\gamma\in\mathrm{Im}(E-A)$. 由于 $A\alpha\in\mathrm{Im}A$, $A\beta\in\mathrm{Im}A$, 因此 $A\gamma\in\mathrm{Im}A$. 又存在 $\eta\in V$, $\gamma=(E-A)\eta$. 故 $(A-A^2)\eta\in\mathrm{Im}A$ 对任意 α 成立. 故 $A-A^2=0$, A 是幂等矩阵.

□

6

证明. 由定义只用证明它是一个线性变换.
$\forall\alpha,\beta\in V$, 令 $\gamma=A(\alpha+\beta)-A\alpha-A\beta$. 有 $(\gamma,\gamma)=(\alpha+\beta)-2(\alpha+\beta,\alpha)-2(\alpha+\beta,\beta)+(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)=0$. 所以 $\gamma=0,A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta$.

□

7

(1) 设其矩阵为 H. 取镜面的法向量 $\boldsymbol{n}=\alpha-\beta$, 镜面 $\boldsymbol{n}^Tx=0$ 由此构造 HouseHolder 矩阵 $H=E-2\dfrac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T}{\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{n}}$, 是为镜像变换 $\mathcal{A}$ 的矩阵.
下面验证之.

$$H\alpha=\alpha-\frac{2}{\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{n}}\alpha\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T=\alpha-\frac{2}{\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{n}}(\alpha^T\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}=\alpha-2\boldsymbol{n}=\beta$$

(2) 取 $\boldsymbol{n}_1 = \left(-\sin\frac{\alpha}{4}, \cos\frac{\alpha}{4}\right)^T, \boldsymbol{n}_2 = \left(-\sin\frac{3\alpha}{4}, \cos\frac{3\alpha}{4}\right)^T$，由此取 $H_1 = E - 2\frac{\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_1^T}{\boldsymbol{n}_1^T\boldsymbol{n}_1}, H_2 = E - 2\frac{\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_2^T}{\boldsymbol{n}_2^T\boldsymbol{n}_2}$. 此时

$$\begin{aligned}
H_1H_2 &= \left(E - 2\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_1^T\right)\left(E - \boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_2^T\right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{4} & -\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4} \\ -\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4} & \sin^2\frac{\alpha}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2\frac{3\alpha}{4} & -\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{3\alpha}{4} \\ -\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{3\alpha}{4} & \sin^2\frac{3\alpha}{4} \end{pmatrix} \\
&= B
\end{aligned}$$

(3) ...

8

- HouseHolder 变换：取 $\alpha = (-1, 1, 2)^T$ 有

$$\begin{aligned}
H &= E - 2\frac{\alpha^T\alpha}{\alpha\alpha^T} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

此时 $H(2,1,2)^T = (3,0,0)^T$.

- Givens 变换：取 $G = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，由 $G(2,1,2)^T = (3,0,0)^T$，解得 $\cos\theta = \frac{2}{3}$. 故

$$G = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$