作业七

Noflowerzzk

2025.4.6

1

(1) 由于

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{min}^{max} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q}$$
$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{min}^{max} b_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q}$$

相加有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q} \left(\left(\sum_{min}^{max} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{min}^{max} b_i^p\right)^{1/p}\right)$$

化简即得 Minkowski 不等式.

(2) 令 $r = \dfrac{1}{p}, s = \dfrac{1}{1-p}$, 注意到 $a_ib_i = (a_ib_i^{1-p})b_i^p$. 由于

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i^{1-p})^r\right)^{1/r} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p s\right)^{1/s}$$

代入 p, q 即得反向 Holder 不等式.

(3) 由 Holder 不等式，

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{pr}\right)^{1/r} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^s\right)^{1/s} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{1/p}\right) n^{(q-p)/pq}$$

故

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \leq n^{1/p-1/q} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\right)^{1/q}$$

2

(1) l_1: 即 $|x_1| + |x_2|$ 的最小值. 原式为 $|x_1| + |(1-3x_1)/4|$ 最小值为 $\dfrac{1}{3}$.

(2) l_2 显然为 $\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{1}{5}$.

(3) l_∞ 即 $\max\{|x_1|, |x_2|\}$ 最小值. 计算得为 $\dfrac{1}{7}$.

3

$\|\boldsymbol{e}\|_1 = \|\boldsymbol{e}\|_2 = n, \|\boldsymbol{e}\|_\infty = 1.$

$\|\boldsymbol{a}\|_1 = a^2 + 2, \|\boldsymbol{a}\|_2 = a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 2a + 2, \|\boldsymbol{a}\|_\infty = \begin{cases} 1 & 0 < a < 1 \\ a^2 - a + 1 & \text{other} \end{cases}.$

4

证明. 由于 $\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + (v,v) = \|u\|^2 + \|v\|^2.$ □