数分例题整理

目　录

第一部分　实数基本定理与极限 1

第一章　实数的定义 1

§ 1.1　自然数与其定义 1

一、　自然数的定义 . . 1

§ 1.2　实数的定义 1

§ 1.3　实数基本定理 2

第二章　数列极限与相关计算 2

§ 2.1　数列极限与相关计算 . 2

第一部分　实数基本定理与极限

第一章　实数的定义

§ 1.1 自然数与其定义

一、自然数的定义

定义 1.1.1 (Peano 公理)　(略)

定义 1.1.2 (自然数加法与乘法)　**自然数加法**定义为映射 $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a + b = b + a$
- $a + 1 = S(a)$
- $a + S(b) = S(a + b)$

自然数的乘法定义为映射 $\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot 1 = a$
- $a \cdot S(b) = a + (a \cdot b)$

定义 1.1.3 (自然数的大小关系)　$a < b$ 当且仅当存在 $c \in \mathbb{N}, b = a + c$.

§ 1.2 实数的定义

(略)

§ 1.3 实数基本定理

例 1.3.1　证明: $\mathbb{R}$ 不可列.

证明　使用闭区间套定理.

反证法. 假设 $\mathbb{R}$ 可列, 记 $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$.

(1) 取 $[a_1, b_1]$ 使得 $x_1 \notin [a_1, b_1]$.

(2) 三分 $[a_1, b_1]$ 得三个小区间, 三者必有其一不含 x_2. 记为 $[a_2, b_2]$ ⋮

由此得到一个闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. 由闭区间套定理, $\exists \xi \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \xi \in [a_n, b_n]$.

但对 $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \notin [a_k, b_k]$, 所以 $x_k \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. 故 $\mathbb{R} \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \right) = \varnothing$, 矛盾!

第二章　数列极限与相关计算

§ 2.1 数列极限与相关计算

例 2.1.1　证明: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明　令 $\sqrt[n]{n} = 1 + y_n$, 有

$$n = (1 + y_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} y_n.$$

故

$$\left| \sqrt[n]{n} - 1 \right| = |y_n| < \sqrt{\frac{2}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon^2} \right] + 1$, 则对 $n < N$ 有 $\left| \sqrt[n]{n} - 1 \right| < \varepsilon$

例 2.1.2 判断以下命题是否正确. 若正确, 给出证明; 若不正确, 给出反例: 数列 a_n 收敛的充要条件是，对任意正正数 p, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-a_{n+p}|=0$.

解 反例如下: 令 $a_n=\sqrt{n}$, 则 $\forall p>0$

$$|a_{n+p}-a_n|=\frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}\to 0,$$

但显然该数列不收敛.