数分例题整理

目 录

第一部分　实数基本定理与极限

第一章　实数的定义

§ 1.1　自然数与其定义

一、自然数的定义

定义 1.1.1 (Peano 公理)　(略)

定义 1.1.2 (自然数加法与乘法)　**自然数加法**定义为映射 $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a + b = b + a$
- $a + 1 = S(a)$
- $a + S(b) = S(a + b)$

自然数的乘法定义为映射 $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot 1 = a$
- $a \cdot S(b) = a + (a \cdot b)$

定义 1.1.3 (自然数的大小关系)　$a < b$ 当且仅当存在 $c \in \mathbb{N}, b = a + c$.

§ 1.2　实数的定义

(略)

§ 1.3　实数基本定理

例 1.3.1 证明: $\mathbb{R}$ 不可列.

证明 使用闭区间套定理.

反证法. 假设 $\mathbb{R}$ 可列, 记 $\mathbb{R}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$.

(1) 取 $[a_1,b_1]$ 使得 $x_1\notin[a_1,b_1]$.

(2) 三分 $[a_1,b_1]$ 得三个小区间, 三者必有其一不含 x_2. 记为 $[a_2,b_2]$ ⋮

由此得到一个闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. 由闭区间套定理, $\exists\xi\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\xi\in[a_n,b_n]$.

但对 $\forall k\in\mathbb{N},x_k\notin[a_k,b_k]$, 所以 $x_k\notin\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 故 $\mathbb{R}\cap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\right)=\varnothing$, 矛盾!

第二章 数列极限与相关计算

§ 2.1 数列极限与相关计算

例 2.1.1 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明 令 $\sqrt[n]{n}=1+y_n$, 有

$$n=(1+y_n)^n>1+\frac{n(n-1)}{2}y_n.$$

故

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=|y_n|<\sqrt{\frac{2}{n}},\forall n\in\mathbb{N}.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+1$, 则对 $n<N$ 有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$

例 2.1.2 判断以下命题是否正确. 若正确, 给出证明; 若不正确, 给出反例:

数列 a_n 收敛的充要条件是，对任意正正数 p, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-a_{n+p}|=0$.

解 反例如下: 令 $a_n=\sqrt{n}$, 则 $\forall p>0$

$$|a_{n+p}-a_n|=\frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}\to 0,$$

但显然该数列不收敛.

例 2.1.3 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\sqrt{4n^2+n}\pi\right)$.

解

$$\begin{aligned}\sin\left(\sqrt{4n^2+n}\pi\right) &= \sin\left(\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)\pi\right)\\ &= \sin\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\pi\right)\\ &= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}\pi\right)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\sqrt{4n^2+n}\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

第三章 函数极限、连续相关定理

§ 3.1 函数极限

定理 3.1.1 单调函数任意一点左右极限均存在

证明 不妨 $f(x)$ 在 (a,b) 上单增，对任意 $x_0\in(a,b)$, $\{f(x)|x\in(a,x_0)\}$ 有上确界 α.

对任意 $x\in(a,x_0), f(x)\leqslant\alpha$, 但 $\forall\varepsilon>0,\exists x'\in(a,x_0), f(x')>\alpha$. 由 $f(x)$ 单调性，$\forall x\in(x',x_0),-\varepsilon<f(x')\leqslant f(x)-\alpha\leqslant 0$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\alpha$.

右极限同理. □

§ 3.2 连续函数与间断

引理 3.2.1 (单调函数的不连续点) 单调函数的不连续点必然是跳跃间断点

证明 由定理3.1.1即得 □

定理 3.2.1 单调函数至多有可列个间断点

证明 由单调性及间断点的性质，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) < f(x_0) < \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.
由有理数的稠密性，在每个间断点 x_0 的区间（由单调性，它们两两不交）$\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right)$, 必存在一个有理数，用这个有理数代表这个区间. 则这些有理数与这些间断点一一对应.
因此间断点至多有可列个. □

例 3.2.1 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数. 定义 $L(f)=\{x\in\mathbb{R}|f(x)=0\}$. 证明：若 $L(f)$ 非空，则 $L(f)$ 是一个闭集.（闭集是包含所有聚点的集合）
解

第二部分 微分与积分

第四章 函数微分、导数相关定理

§ 4.1 导数基本性质与中值定理

一、中值定理

例 4.1.1 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$, 其中 $a>0$ 且 $f(a)=0$. 证明：$\exists\xi\in(a,b), f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.
解 令 $F(x)=(b-x)^a f(x)$, 易知 $F(x)\in C[a,b]\cap D(a,b), F(a)=F(b)=0$, 由 Rolle 定理，$\exists\xi\in(a,b), F'(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

用 Rolle 定理证明等式的基本方法：

- 将等号一端改写成只有零，形成 $g(\xi)=0$
- 求积分 $G(x)=\displaystyle\int g(x)\mathrm{d}x$
- 验证 $G(x)$ 满足 Rolle 中值定理条件

例如上题，化简为 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{a}{b-x}=0$, 有 $G(x)=(b-x)^a f(x)$

例 4.1.2 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1), f'(1)=1$, 求证：存在 $\xi\in(0,1), f''(\xi)=2$.

解 $f''(x)-2=0$，有 $f'(x)-2x=C_1$，由条件 $f'(1)=1$，有 $C_1=-1$，化简有 $f'(x)-2x+1=0$，故 $F(x)=f(x)-x^2+x$. 下略.

例 4.1.3 证明 $2^x-x^2=1$ 有且仅有三个实根

解 有三个解证明略.
假设有四个解，反复使用中值定理可以证明最后的导函数没有解。

例 4.1.4 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，且 $f(0)=0, |f'(x)|\leqslant p|f(x)|$, 证明 $f(x)\equiv 0, x\in\mathbb{R}$

证明 先考虑 $x\in\left[0,\frac{1}{2p}\right]$ 的情形. $|f(x)|$ 在 $\left[0,\frac{1}{2p}\right]$ 的最大值为 $|f(x_0)|=M\geqslant 0$

$$M=|f(x)-f(0)|=|f'(\xi)x_0|\leq\frac{1}{2p}\cdot p|f(\xi)|\leqslant\frac{1}{2}M$$

因此 $M=0$. 对其它区间同理归纳即可.

二、导函数的性质

定理 4.1.1 (导数的 Darboux 定理 (介值性)) $f(x)$ 可导且 $f'(a)\neq f'(b)$, 则对任意介于 $f'(a),f'(b)$ 之间的 r, 都存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $r=f'(\xi)$

两种证明方法

证明 不妨 $f'(a)<f'(b)$, 对任意 $r\in(f'(a),f'(b))$, 令 $F(x)=f(x)-rx$, 有 $F(a)<0, F(b)>0$. 故由极限保号性，存在 $\delta>0,\forall x\in(a,a+\delta), \dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}<0$, 即 $F(x)<F(a)$, $F(a)$ 不是最小值.
同理 $F(b)$ 也不是最小值. 因此最小值 $F(\xi)$ 在开区间 (a,b) 上取到，由费马定理，$F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=r$. □

证明 假设同上，作函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\neq a\\ f'(a), & x=a\end{cases},\quad G(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}, & x\neq b\\ f'(b), & x=b\end{cases}$$

r 要么在 $F(a),F(b)$ 之间，要么在 $G(a),G(b)$ 之间.

如果 r 在 $F(a),F(b)$ 之间，由连续函数的介值定理，存在 $x_0\in(a,b), r=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$ 再对 $F(x)$ 用 Lagrange 中值定理即可. r 在 $G(a),G(b)$ 之间同理. □

§ 4.2 Taylor 公式

一、推导与证明

引理 4.2.1 若 $r(x_0)=r'(x_0)=r''(x_0)=\cdots=r^{(n)}(x_0)=0$，则 $r(x)=o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0)$.

证明 对 n 归纳.

当 $n=1$ 时，$r(x)=r(x_0)+r'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)=o(x-x_0)$

假设当 $n\geqslant 1$ 有 $r^{(n)}(x)=o((x-x_0)^n)$ 成立.

则当 $n+1$ 时，由 Lagrange 中值定理，

$$r(x)=r(x_0)+r'(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)=r'(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)$$

当 $x\to x_0$ 时，

$$r'(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)=o((x-x_0)^n)\cdot(x-x_0)=o((x-x_0)^{n+1})$$

由归纳原理，原命题成立. □

定理 4.2.1 (带 Lagrange 余项的泰勒公式) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 n 阶可导，在 (a,b) 上

有 $n+1$ 阶导. 设 x_0 为 $[a,b]$ 内一点，则对任意 $x\in[a,b]$ 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned}f(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\\&\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^{(n+1)}\end{aligned}$$

证明 令 $r(x)=f(x)-f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$, 有 $r(x_0)=r'(x_0)=r''(x_0)=\cdots=r^{(n)}(x_0)=0$.
由 Cauchy 中值定理，

$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{(x-x_0)^{n+1}}&=\frac{r(x)-r(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}}\\&=\frac{r'(\xi_1)-r'(x_0)}{(n+1)((\xi_1-x_0)^n-(x_0-x_0)^n)}&&\xi_1\in(x_0,x)\text{或}(x,x_0)\\&=\frac{r''(\xi_2)-r''(x_0)}{(n+1)\cdot n\cdot((\xi-x_0)^{(n-1)}-(x_0-x_0)^{(n-1)})}&&\xi_1\in(x_0,\xi_1)\text{或}(x,\xi_1)\\&=\cdots\\&=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{r^{(n)}(\xi_n)}{\xi_n-x_0}&&\xi_n\in(x_0,\xi_{n-1})\text{或}(\xi_{n-1},x_0)\\&=\frac{1}{(n+1)!}r^{(n+1)}(\xi)&&\xi\in(x_0,\xi_n)\text{或}(\xi_n,x_0)\\&=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\end{aligned}$$

因此 $r(x)=\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ □

例 4.2.1 (Taylor 公式的应用套路) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$, 证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$$

证明 由最值存在定理，$\exists x_0\in[a,b],|f(x_0)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$, 且 $f'(x_0)=0$
把 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展开，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,\quad \xi\text{在}x,x_0\text{之间}$$

代入 $x=a, x=b$ 有:

$$\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2 = f(a)-f(x_0)-f'(x_0)(a-x_0) \qquad a<\xi_1<x_0$$
$$\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_0-b)^2 = f(b)-f(x_0)-f'(x_0)(b-x_0) \qquad x_0<\xi_2<b$$

相加有

$$\begin{aligned} |f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)| &= 2\,|f(x_0)|\left(\frac{1}{(a-x_0)^2}+\frac{1}{(b-x_0)^2}\right) \\ &\geqslant 2\,|f(x_0)|\left(\frac{(1+1)^3}{(a-x_0+x_0-b)^2}\right) \\ &= \frac{16}{(a-b)^2}\,|f(x_0)| \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)| &\geqslant \frac{1}{2}\left(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\right) \\ &= \frac{8}{(a-b)^2}\,|f(x_0)| \\ &= \frac{8}{(a-b)^2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \end{aligned}$$

即

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \leqslant \frac{1}{8}(a-b)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$$

□

例 4.2.2 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，$|f(x)|<k_0, |f''(x)|<k_1$, 证明:

$$|f'(x)| \leqslant \sqrt{2k_0k_1}$$

证明 由 Taylor 公式，

$$f(x+h) = f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2$$
$$f(x-h) = f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2$$

化简有:

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+\frac{1}{4}\left(f''(\xi_2)-f(\xi_1)\right)h$$

因此

$$|f'(x)| \leqslant \frac{|f(x+h)|+|f(x-h)|}{2h} + \frac{1}{4}\left(|f''(\xi_2)|+|f''(\xi_1)|\right)h \leqslant \frac{k_0}{h} + \frac{h}{2}k_1 \qquad \forall h>0$$

因此

$$|f'(x)| \leqslant \min_{h\in(0,+\infty)}\left(\frac{k_0}{h}+\frac{h}{2}k_1\right) = \sqrt{2k_0k_1}$$

□

§ 4.3 凸函数与 Lipschitz 条件

一、凸函数与二阶导的关系

定义 4.3.1 (凸函数) 对某函数 $f(x)$ 定义域的任意区间 $[a,b]$，有任意 $\lambda\in[0,1]$, 满足

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

则成 $f(x)$ 为其定义区间上的**下凸函数**

定理 4.3.1 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导，则 $\forall x\in I, f''(x)\geqslant 0$ 是 $f(x)$ 在 I 上下凸的充要条件.

证明 充分性:

任取 $x_1,x_2\in I$，不妨设 $x_1<x_2$。任取 $\lambda\in(0,1)$，根据 Lagrange 中值定理

$$\begin{aligned}
&\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\\
=&-\lambda\left(f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-f(x_1)\right)+(1-\lambda)\left(f(x_2)-f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\right)\\
=&-\lambda f'(\xi_1)\cdot(1-\lambda)(x_2-x_1)+(1-\lambda)f'(\xi_2)\cdot\lambda(x_2-x_1)\\
&\qquad (x_1<\xi_1<\lambda x_1+(1-\lambda)x_2<\xi_2<x_2)\\
=&\lambda(1-\lambda)f''(\xi)(x_2-x_1)(\xi_2-\xi_1) \quad (\xi_1\leq\xi\leq\xi_2)\\
\geqslant& 0
\end{aligned}$$

必要性: 假设 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数，且处处二阶可导。取 $x_0\in I$，则 $\forall\Delta x>0$，

有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)+f(x_0-\Delta x)-2f(x_0)}{\Delta x^2}\geq 0 \qquad \left(x_0=\frac{1}{2}(x_0-\Delta x)+\frac{1}{2}(x_0+\Delta x)\right)$$

另一方面，根据带 Peano 余项的 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_0+\Delta x)+f(x_0-\Delta x)-2f(x_0)}{\Delta x^2}\\
&=\frac{1}{\Delta x^2}\Bigg(f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2+o(\Delta x^2)\\
&\quad +f(x_0)+f'(x_0)(-\Delta x)+\frac{1}{2}f''(x_0)(-\Delta x)^2+o(\Delta x^2)-2f(x_0)\Bigg)\\
&=f''(x_0)+\frac{o(\Delta x^2)}{\Delta x^2}\quad (\Delta x\to 0)\\
&=f(x_0)\\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

□

二、Lipschitz 条件

定义 4.3.2 (局部 Lipschitz 函数) 对任意 $x_0\in D_f$, 存在邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 与常数 C (δ, C 均依赖于 x_0), 使得

$$\forall x,x'\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap D_f:\quad |f(x)-f(x')|\leqslant C\,|x-x'|$$

则称 $f(x)$ 为**局部 Lipschitz 函数**.

定义 4.3.3 (Lipschitz 函数) 若存在常数 C, 使得

$$\forall x,x'\in D_f:\quad |f(x)-f(x')|\leqslant C\,|x-x'|$$

则称 $f(x)$ 为 **Lipschitz 函数**.

又由限覆盖定理，闭区间上的局部 Lipschitz 函数是 Lipschitz 函数.

定理 4.3.2 Lipschitz 函数是连续函数.

三、开区间上的凸函数

引理 4.3.1 $f(x)$ 是 (a,b) 上的下凸函数当且仅当任意 $(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$, 任意 $x\in(x_1,x_2)$, 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

证明 由 $x=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1+\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2$, 有

$$\begin{aligned} f(x)\text{是下凸函数}\Leftrightarrow\quad & f(x)\leqslant\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)\quad(\forall a<x_1<x<x_2<b)\\ \Leftrightarrow\quad & \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\end{aligned}$$

另一边同理. □

引理 4.3.2 闭区间上的下凸函数有界.

证明 设闭区间 $[a,b]$, 任取 $x\in[a,b]$, $\exists\lambda\in(0,1)$, $x=\lambda a+(1-\lambda)b$, $f(x)\leqslant\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\leqslant\max\{f(a),f(b)\}$.
又将 $f(x)$ 连续延拓到 $[c,d]\supseteq[a,b]$ 上且保证其在 $[c,d]$ 上下凸，有 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上有上界.
由于 $f(a)\leqslant\lambda_1 f(x)+(1-\lambda_1)f(c)$, 有 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{\lambda_1}f(a)-\left(\dfrac{1}{\lambda_1}-1\right)f(c)$.
同理 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{\lambda_2}f(b)-\left(\dfrac{1}{\lambda_2}-1\right)f(d)$. 即 $f(x)$ 有下界. □

定理 4.3.3 开区间上的凸函数必为连续函数.

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 任意 $x_0\in(a,b)$, 存在 $\delta>0$, $[x_0-2\delta,x_0+2\delta]\subseteq(a,b)$.
任取 $x>y\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $x=\lambda(x_0+2\delta)+(1-\lambda)y$, $\lambda\in(0,1)$.
由凸函数性质，$f(x)\leqslant\lambda f(x_0+2\delta)+(1-\lambda)f(y)\Leftrightarrow f(x)-f(y)\leqslant\lambda[f(x_0+2\delta)-f(y)]$.
由引理 **3.3.2**，$|f(x)|<M,\exists M>0$. 故 $|f(y)-f(x)|\leqslant\lambda[f(x_0+2\delta)-f(y)]\leqslant2\lambda M$.

又由 $x=\lambda(x_0+2\delta)+(1-\lambda)y \Rightarrow |x-y|=\lambda(x_0+2\delta-y)>\lambda\delta$, 故 $2\lambda M<\dfrac{|x-y|}{\delta}$.

代入有 $|f(x)-f(y)|<\dfrac{|x-y|}{\delta}$, 满足 **局部 Lipschitz 性质**，因此 $f(x)$ 连续. □

定理 4.3.4　开区间上的凸函数必为 Lipschitz 函数.

例 4.3.1　设函数 $f(x)$ 是 (a,b) 上的下凸函数，证明:

(1) 在每个 $x\in(a,b)$，$f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 均存在，且 $f'_-(x)\leqslant f'_+(x)$.

(2) 若 $a<x_1<x_2<b$，则有 $f'_+(x_1)\leqslant f'_-(x_2)$.

(3) $f(x)$ 不可导的点至多有可列个.

证明

(1) 取 $x_0\in(a,b)$, 由**引理4.3.1**, $\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\geqslant\dfrac{f(x_0)-f(x_0-2\Delta x_0)}{2\Delta x}$, 表明 $F_-(\Delta x)=\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 关于 Δx 单减.

又取定 $x'>x_0, F_-(\Delta x)\leqslant\dfrac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}$, $F_-(\Delta x)$ 在 $\Delta x\to0^+$ 时单调递增且有上界，故极限存在，即 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}F_-(\Delta x)$ 存在. 同理 $f'_+(x_0)$ 也存在.

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\leqslant\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)\quad(\text{由**引理4.3.1**})$$

(2) 任取 $x\in(x_1,x_2)$,

有 $f'_+(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1^+}\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\leqslant\lim\limits_{x\to x_2^-}\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'_-(x_2)$

(3) 由 (2) 知，如果存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'_-(x_0)<f'_+(x_0)$，则开区间 $(f'_-(x_0),f'_+(x_0))$ 中不含 $f'_-(x),f'_+(x)$, $\forall x\in(a,b)$ 的所有值.|

假设有两点 $x_1<x_2$, 有 $f'_-(x_i)<f'_+(x_i)$, $i\in\{1,2\}$. 则易得 $f'_-(x_1)<f'_+(x_1)\leqslant f'_-(x_2)<f'_+(x_2)$.

由**引理3.2.1**, 同理有这样的 x_0 有可列个.

四、相关不等式

定理 4.3.5 (Young 不等式) p,q 不等于 0 或 1, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则对任意正数 a,b, 有

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q \quad p>1$$

$$ab \geqslant \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q \quad p<1$$

证明 求导即可. □

定理 4.3.6 (Hölder 不等式) p,q 不等于 0 或 1, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则对任意正数数列 $\{a_k\}_{k=1}^n,\{b_k\}_{k=1}^n$, 有

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad p>1$$

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad p<1$$

证明 令 $A=\sum_{i=1}^n a_i^p, B=\sum_{i=1}^n b_i^q$

$p>1$ 时，对 $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 由 **Young 不等式**，

$$\frac{a_ib_i}{A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{A}+\frac{1}{q}\frac{b_i^p}{B}$$

故

$$\frac{1}{A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}}\sum_{i=1}^n a_ib_i \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

即

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \leqslant A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

证明 (用 Jesen 不等式的证明)　$p>1$ 时，$f(x)=x^p$ 为下凸函数.
由于 $q=\dfrac{p}{p-1}$, 把 x_iy_i 分解为

$$x_iy_i=y_i^q\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{-1}\cdot x_iy_i^{1-q}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)$$

注意到

$$\sum_{i=1}^n\left(y_i^q\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{-1}\right)=1$$

由 **Jesen** 不等式，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^p&=\left\{\sum_{i=1}^n\left[y_i^q\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{-1}\cdot x_iy_i^{1-q}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)\right]\right\}^p\\&\leqslant\sum_{i=1}^n y_i^q\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{-1}\cdot x_i^py_i^{p-pq}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^p\\&=\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{p-1}\end{aligned}$$

因此，

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i=\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

第五章　函数不定积分、定积分相关定理

§ 5.1　不定积分

(全是计算题)

一、计算计巧

例 5.1.1 (凑微分技巧)

- $\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{d}\left(\sqrt{1+x^2}\right)$
- $\displaystyle\int x^{2k+1}\sqrt{a+bx^2}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{a+bx^2}} \cdots$, $(bx\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t)$

例 5.1.2 (分部积分法则)

- $\displaystyle\int f(x)\ln g(x)\mathrm{d}x = \int \ln g(x)\mathrm{d}F(x)$
- $\displaystyle\int f(x)\arctan g(x)\mathrm{d}x$ 分两种情况.
  - $f(x)$ 能凑微分，则化为 $\displaystyle\int \arctan g(x)\mathrm{d}F(x)$
  - $f(x)$ 不能凑微分，则换元 $t = \arctan g(x)$

定理 5.1.1 (用于求分段函数积分)

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

定理 5.1.2 (记不住就完了!)

- $$\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$
- $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$
  则
  $$I_n = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C & n = 1 \\ \dfrac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1} + \dfrac{1}{2a^2(n-1)}\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} & n \geqslant 2 \end{cases}$$

二、一些例题

例 5.1.3 (正余弦齐次分式函数) 计算 $\displaystyle\int \frac{7\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x}\mathrm{d}x.$

解 由于 $7\sin x+\cos x=3\sin x+4\cos x-(3\sin x+4\cos x)'$, 有

$$\int \frac{7\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x}\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x-\int \frac{\mathrm{d}\,(3\sin x+4\cos x)}{3\sin x+4\cos x}=x-\ln|3\sin x+4\cos x|+C$$

§ 5.2 定积分

一、定积分的定义与 Darboux 和

定义 5.2.1 (Riemann 和与定积分) (略)

定义 5.2.2 (Darboux 和) (略)