作业七

noflowerzzk

2024.11.06

P153 T3

- 当 $f(x)$ 在 (a,b) 连续而不是 $[a,b]$ 时, 取 $f(x)=x$, $x\in(0,1)$, $f(0)=10, f(1)=0$, 有 $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=-10$, 但 $\forall\xi\in(0,1), f'(\xi)=1$, Lagrange 定理不成立.
- 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上不处处可导, 取 $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$, 有 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=0$, 但 $\forall\xi\in[-1,0)\cup(0,1]$, $f'(\xi)\neq 0$, Lagrange 定理不成立.

P153 T4

证明.

$$\psi(x)=(b-a)f(x)+x(f(a)-f(b))+af(b)-bf(a)$$

有

$$\psi(a)=\psi(b)=0$$

且 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 由 Rolle 中值定理, $\exists\xi\in(a,b), \psi'(\xi)=0$, 即

$$(b-a)f'(\xi)+f(a)-f(b)=0\Leftrightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

□

$\psi(x)$ 的绝对值是三点 $(x,f(x)),(a,f(a)),(b,f(b))$ 构成三角形的面积的两倍.

P153 T5

证明. 取

$$h(x)=\begin{vmatrix}f(a)&f(b)\\g(a)&g(b)\end{vmatrix}(x-a)-(b-a)\begin{vmatrix}f(a)&f(x)\\g(a)&g(x)\end{vmatrix}$$

有 $h(a)=h(b)=0$, $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 由 Rolle 中值定理, $\exists\xi\in(a,b), h'(\xi)=0$, 即

$$\begin{vmatrix}f(a)&f(b)\\g(a)&g(b)\end{vmatrix}-(b-a)\begin{vmatrix}f(a)&f'(\xi)\\g(a)&g'(\xi)\end{vmatrix}=0$$

□

P153 T6

证明. 由 Lagrange 定理，$\exists\xi\in(a,b),|f'(\xi)|=\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$.
假设 $\forall\eta\in(a,b),|f'(\eta)|\leqslant|f'(\xi)|$, 对区间 $[a,x_0],[x_0,b]$ 使用 Lagrange 定理有 $\exists\xi_1\in(a,x_0),\xi_2\in(x_0,b)$,

$$\left|\frac{f(x_)-f(a)}{x_0-a}\right|=|f'(\xi_1)|\leqslant|f'(\xi)|$$

$$\left|\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}\right|=|f'(\xi_2)|\leqslant|f'(\xi)|$$

所以

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)|&=(b-a)\,|f'(\xi)|\leqslant|f(b)-f(x_0)|+|f(x_0)-f(a)|\\&=(b-x_0)\,|f'(\xi_2)|+(x_0-a)\,|f'(\xi_1)|\leqslant(b-a)\,|f'(\xi)|\end{aligned}$$

对任意 $x_0\in(a,b)$ 均有等号成立，即 $\forall\xi_0\in(a,b),\ |f'(\xi_0)|=|f'(\xi)|=\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$.
由 Darboux 定理，$f'(x)$ 必然均同号，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上为线性函数，矛盾！ □

P153 T9

证明. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，$\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=|x-x_0|<\varepsilon$, 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上导数处处为 0. 因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
因此 $\forall x_1<x_2\in[a,b]$, 由 Lagrange 定理有

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)f'(\xi)=0$$

即 $f(x)$ 是常函数 □

P154 T11

证明. 对任意 $x_1<x_2\in[a,b]$, 由 Lagrange 定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2),f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.
假设 $f'(\xi)=0$, 则 $f(x_1)=f(x_2)$.
由于 $f'(x)\geqslant0$, $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 单调递增，因此任意 $x\in[x_1,x_2],f(x)=f(x_1)=f(x_2)$.
则对任意区间 $[x,x_2]$ 使用 Rolle 中值定理，有 $\forall x\in[x_1.x_2],f'(x)=0$, 与仅有有限个点导数为零矛盾！
因此 $f'(\xi)>0$, $f(x_1)>f(x_2)$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单增. □
但是取

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{\cos\frac{1}{x}-1}{4k(2k+1)\pi}-\dfrac{1}{(2k+1)\pi} & x\in\left(\dfrac{1}{(2k+1)\pi},\dfrac{1}{2k\pi}\right)\\ \dfrac{-\cos\frac{1}{x}-1}{4k(2k+1)\pi}-\dfrac{1}{(2k+1)\pi} & x\in\left(\dfrac{1}{(2k+2)\pi},\dfrac{1}{(2k+1)\pi}\right)\\ -1 & x=1\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单增，但 $\forall k\in\mathbb{N}^*,x=\dfrac{1}{2k\pi},f'(x)=0$，并非有限个.

P154 T12

(1) 证明.

$f(x) = x - \sin x, f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0, f(x) > f(0) = 0$

$g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x, g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$ 单减. $g(0)g(\frac{\pi}{2}) < 0$ 由零点存在定理, $\exists! x_0 \in (0,1), g'(x_0) = 0, \forall x \in (0, x_0), g'(x) > 0, \forall x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right), g'(x) < 0$. $g(x) > \min\{g(0), g(\frac{\pi}{2})\} = 0$ □

(2) 证明. $f(x) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} - 3$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2} > 0$. $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单增, $f(x) > f(1) = 0$ □

(3) 证明. $f(x) = x - \ln(x+1), f'(x) = \frac{x}{x+1} > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增，$f(x) > f(0) = 0$.

$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}, g'(x) = \frac{x^2}{x+1} > 0$ $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增，$g(x) > g(0) = 0$. □

(4) 证明. $f(x) = \tan x + 2\sin x - 3x, f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x - 3 = \frac{(\cos x - 1)^2(2\cos x + 1)}{\cos^2 x} > 0$. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单增，$f(x) > f(0) = 0$. □

(5) 证明. 由于 $0 \leqslant x \leqslant 1$ $x^p \leqslant x, (1-x)^p \leqslant 1 - x$. $x^p + (1-x)^p \leqslant x + 1 - x = 1$.

$f(x) = x^p + (1-x)^p, f'(x) = p(x^{p-1} - (1-x)^(p-1)) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 单减，在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 单增，$f(x) \geqslant f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{p-1}}$. □

(6) 证明. 令 $t = \tan\frac{x}{2} > \frac{x}{2}$.

$\tan x \cdot \sin x = \frac{2t}{1-t^2} \cdot \frac{2t}{1+t^2} = \frac{4t^2}{1-t^4} > 4t^2 > 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2$. □

P154 T15

(1) 证明. 令 $g(x) = f(x) - x$, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 由于 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, g(1) = -1$, 由零点存在定理，$\exists \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), f(\xi) = \xi$. □

(2) 证明. 令 $h(x) = \frac{g(x)}{\mathrm{e}^{\lambda x}}$, 有 $h'(x) = \frac{g'(x) - \lambda g(x)}{\mathrm{e}^{\lambda x}}$.

而 $h(0) = h(\xi) = 0, h\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$ 且 $h(x)$ 在 $[0, \xi]$ 上连续, 在 $(0, \xi)$ 上可导. 由 Rolle 中值定理, $\exists \eta \in (0, \xi), h'(\eta) = 0$，即 $g'(\eta) = \lambda g(\eta) \Leftrightarrow f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1$. □

P170 T1

证明. $\theta(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\theta(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

i □

P170 T2

证明. 令

$$\begin{aligned}f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)h^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n\\ &= f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)h^{n+1} + o(h^{n+1})\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)}{h} = \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x) + o(1)\\ \Rightarrow\quad &\theta f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x) + o(1) \qquad (h\to 0)\\ \Rightarrow\quad &\theta = \frac{1}{n+1} \qquad (h\to 0)\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{n+1}$ □

P183 T1

(7) 由 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{120}x^5 + o(x^5)$.
$x \neq 1$ 时，

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)}\\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{120}x^4+o(x^4)}\\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{120}x^4+o(x^4)\right) + \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3)\right)^2\\ &\quad - \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)^3 + \left(\frac{x}{2}+o(x)\right)^4\\ &= \cdots(\text{舍去高阶量})\\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

(8) 由 $x\to 0$ 时，$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\frac{x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)}{x} \\
&= \ln\left(1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^4)\right) \\
&= \left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^2 \\
&= -\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

(9) 由 $x\to 0$ 时，$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+o(x^3)$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+(x^3-2x))^{\frac{1}{2}}-(1+(x^2-3x))^{\frac{1}{3}} \\
&= 1+\frac{1}{2}(x^3-2x)-\frac{1}{8}(-2x)^2+\frac{1}{16}(-2x)^3 \\
&\quad -\left(1+\frac{1}{3}(x^2-3x)-\frac{1}{9}(x^2-3x)^2+\frac{5}{81}(-3x)^3\right)+o(x^3) \\
&= \frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

P183 T2

(4)

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3+\cdots \\
+\frac{1}{n!}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^n+o\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
f(x) = \sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)+\cdots \\
+\binom{\frac{1}{2}}{n}x^{\frac{1}{2}-n}(x-2)^n+o\left((x-2)^n\right)
\end{aligned}$$

补充题：高阶导判别法

证明. 当 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0, f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$ 时，
由于

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}+o((x-x_0)^{n+1}) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}+o((x-x_0)^{n+1})
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)+\frac{o((x-x_0)^{n+1})}{(x-x_0)^{n+1}},$$

$x \to x_0$ 时，

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

- 当 $n+1$ 为奇数时，
  不妨 $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$, $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$, 表明 x_0 不是 $f(x)$ 极值点. $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ 同理

- 当 $n+1$ 为偶数时，
  - $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} > 0$, x_0 是 $f(x)$ 极小值点
  - $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, 同理有 x_0 是 $f(x)$ 极大值点

□