作业六

noflowerzzk

2024.10.31

P99 T11

证明. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意 $x_1, x_2 \in (a,b), |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
此时 $f(x)$ 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上一致连续, $f(x)$ 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上有界, $|f(x)| < M_1$.
同时，取 $x_0 \in (a, a+\delta)$, 有任意 $x \in (a, a+\delta)$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 即 $f(x)$ 在 $(a, a+\delta)$ 上有界 $M_2 = \max\{|f(x_0)+\varepsilon|, |f(x_0)-\varepsilon|\}$.
同理有 M_3. 取 $M = \max\{M_1, M_2, M_3\}$, $\forall x \in (a,b), |f(x)| < M$, 即 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界. □

P99 T12

(1) 证明. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in [a,b]$,若 $|x_1 - x_2| < \delta$,有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
则此时

$$|f(x_1) + g(x_1) - f(x_2) - g(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$$

即 $f(x) + g(x)$在$[a,b]$ 上也一致连续. □

(2) 取 $f(x) = x, g(x) = x$ 易知 $f(x), g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 但 $f(x) \cdot g(x) = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续.

P99 T13

证明. 易知 $f(a)f(b) \neq 0$. 假设存在 $x_1, x_2, f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$. 不妨 $x_1 < x_2$. 则由零点存在定理, 存在 $x_0 \in (x_1, x_2), f(x_0) = 0$. 矛盾!
因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 恒正或恒负. □

P99 T14

证明. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大、最小值为 M, m. $m \leqslant \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant M$.

由介值定理, $\exists \xi \in [a,b], f(\xi) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$ □

P99 T15

证明. 由 Cauchy 收敛准则, $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x_1, x_2 > N, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
由于 $f(x)$ 在 $[a, N+1]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, N+1]$ 上一致连续, 即对上述 $\varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall |x_1 - x_2| < \delta_1, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
结合上两式得 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续. □

P110 T3

令 $F(x) = f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x)$.
$\lim\limits_{x \to 0} F(x) = -2f(1) = 0$, 有 $f(1) = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1 + \sin x) - f(1)}{\sin x} + \frac{3(f(1) - f(1 - \sin x))}{\sin x} = 4f'(1) = \lim_{x \to 0} \frac{8x + \alpha(x)}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{8x + \alpha(x)}{x} = 8$$

所以切线为 $y = 2x - 2$.

P110 T4

证明. 设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0, c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. 左右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$.
对椭圆方程两边求导, 有

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

即某点 $A(x, y)$ 的切线斜率为 $k = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x}{y}$.
又 F_1A, F_2A 斜率分别为

$$k_1 = \frac{y}{x + c}, \quad k_2 = \frac{y}{x - c}$$

所以 F_1A 与切线, F_2A 与切线的夹角分别为 θ_1, θ_2, 有

$$\tan \theta_1 + \tan \theta_2 = \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k} + \frac{k_2 - k}{1 + k_2 k} = \frac{a^2 b^2 + b^2 cx}{c^2 xy + a^2 cy} + \frac{a^2 b^2 - b^2 cx}{c^2 xy - a^2 cy} = \frac{b^2}{cy} - \frac{b^2}{cy} = 0$$

即 $|\theta_1| = |\theta_2|$, 即证. □

P110 T5

证明. 对其求导, 有 $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0$, 即 (x_0, y_0) 处切线斜率 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{y_0}{x_0}$.
直线方程为

$$x_0 y + y_0 x = 2a^2$$

在 x, y 轴的截距分别为: $x = \dfrac{2a^2}{y_0}, y = \dfrac{2a^2}{x_0}$.
面积为

$$S = \frac{1}{2} \left| \frac{2a^2}{y_0} \right| \cdot \left| \frac{2a^2}{x_0} \right| = 2a^2$$

□

P110 T7

(1)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^{1+\alpha}\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=0$$

所以它在 $x=0$ 可导.

(2) 易得 $f'_+(0)=0$, 故 $f(x)$ 可导当且仅当 $f'_-(0)=0$ 且 $f(x)$ 在 0 处连续, 即 $a=b=0$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(3) 由 $f'_+(0)=1$, $f'_-(0)=0$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

(4) 当 $a\geqslant 0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$或0, $f(x)$ 在 0 处不连续, 则不可导.
当 $a<0$ 时,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{\Delta x^2}}}{\Delta x}=0$$

所以当 $a<0$ 时它在 $x=0$ 可导.

P111 T8

当 $f(0)\neq 0$ 时, 在 0 的一个小邻域内 $f(x)$ 恒正或恒负, $|f(x)|$ 也可导.
当 $f(0)=0$ 时, 令 $g(x)=|f(x)|$,

$$g'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|f(\Delta x)|}{\Delta x}=-|f'(0)|$$

同理

$$g'_+(0)=+|f'(0)|$$

所以 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 可导当且仅当 $f'(0)=0$.

补充题

证明. 由 $x\in(0,1)$ 时, $(1-x)^\alpha+x^\alpha\geqslant 1-x+x=1,(1-x)^\alpha\geqslant 1-x^\alpha$ 由 $x_1>x_2>0$ 时 $|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1^\alpha-x_2^\alpha|=x_1^\alpha\left|1-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\alpha\right|\leqslant x_2^\alpha\left(1-\frac{x_2}{x_1}\right)^\alpha=(x_1-x_2)^\alpha$.
$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}{2}>0,\forall x_1>x_2>0$, 若 $|x_1-x_2|<\delta$, 有 $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant(x_1-x_2)^\alpha=\frac{\varepsilon}{2^\alpha}<\varepsilon$.
故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续. □