Exercise 02

Noflowerzzk

2024.9.26

1 Answer_2

(1)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{n1} \end{pmatrix}$$

(2)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Answer_3

由矩阵相等的定义, 有

$$\begin{cases} a+2b=4 & (1) \\ 2a-b=-2 & (2) \\ 2c+d=4 & (3) \\ c-2d=-3 & (4) \end{cases}$$

由 (1)(2) 解得 $\begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases}$, 由 (3)(4) 解得 $\begin{cases} c=1 \\ d=2 \end{cases}$

3 Answer_4

(1) $$\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\2&3&3&1\\3&4&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&-1&-1&3\\0&-2&-2&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&-1&-1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&1&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&4&-7&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-1.5r_1}\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_1]{2r_2}\begin{pmatrix}0&1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+\frac{3}{2}r_2}\begin{pmatrix}0&1&0&5\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\3&-3&5&-4&1\\2&-2&3&-2&6\\3&-3&4&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-3r_1]{r_3-2r_1,r_4-3r_1}\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&-4&8&-8\\0&0&-3&6&0\\0&0&-5&10&-10\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{-4}r_2}\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&1&-2&2\\0&0&-3&6&0\\0&0&-5&10&-10\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_4+5r_2}$$
$$\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{6}r_3}\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&2&-3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+3r_3]{r_2-2r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&2&0\\0&0&1&-2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(5) $$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&5&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1,r_3-5r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-6&-10&-18\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&-6&-10&-18\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+6r_2}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_3,r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

(6) $$\begin{pmatrix}1&1&3&3\\0&2&-1&2\\1&-2&2&3\\0&1&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&3&3\\0&2&-1&2\\0&-3&-1&0\\0&1&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-\frac{1}{2}r_2,r_3+\frac{3}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&1&3&3\\0&2&-1&2\\0&0&-\frac{5}{2}&-3\\0&0&\frac{3}{2}&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{2}{3}r_4]{-2r_3}\begin{pmatrix}1&1&3&3\\0&2&-1&2\\0&0&5&6\\0&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}$$
$$\begin{pmatrix}1&1&3&3\\0&2&-1&2\\0&0&1&2\\0&0&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow[subscript]{r_4+5r_3}\begin{pmatrix}1&1&3&3\\0&2&-1&2\\0&0&1&2\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+r_3,-\frac{1}{4}r_4}\begin{pmatrix}1&1&0&-3\\0&2&0&4\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&2\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_4]{R_1+5r_4,r_2-2r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(7) $$\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&2\\2&3&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&2\\0&-1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&-1&1&-2\\0&-1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(8) $$\begin{pmatrix}1&1&3\\-1&2&3\\1&3&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1,\ r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&3&6\\0&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&2\\0&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2,\ r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

4 Answer_5

(1) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}2&4&-1&6\\1&-2&1&4\\3&6&2&-1\end{pmatrix}$$

化简为行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&-\frac{1}{2}&3\\0&1&-\frac{3}{8}&-\frac{1}{4}\\0&0&\frac{7}{2}&-10\end{pmatrix}$$

所以 $r=s=n$, 方程组有唯一解.

(2) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}2&4&-1&6\\1&2&1&4\\3&6&2&-1\end{pmatrix}$$

化简为行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&-\frac{1}{2}&3\\0&0&3&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

所以 $r>s$, 方程组无解.

(3) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}2&4&-1&6\\1&2&1&3\\3&6&2&9\end{pmatrix}$$

化简为行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $r = s < n$, 方程组有无数解.

(4) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 2 & -5 \\ -9 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

化简为行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $r > s$, 方程组无解.

(5) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & a \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

化简为行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$$

方程组无解 $\Leftrightarrow r > s \Leftrightarrow a - 5 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 5$.

(6) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & a & 3 \\ a & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

化简为行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & a & 3 \\ 0 & 9-a^2 & 15-3a \end{pmatrix}$$

方程组无解 $\Leftrightarrow r > s \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - a^2 = 0 \\ 15 - 3a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \pm 3$.

5 Answer_6

(1) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

化简为行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

所以方程组的解为:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}x_4 \\ x_2 = -3x_4 \\ x_3 = \frac{4}{3} \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

(4) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 11 & -13 & 16 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

进行一定的初等行变换, 并将未知量按次序 x_4, X_3, X_2, X_1 得到:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $r = s = n$, 原方程组只有零解, 即

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

6 Answer_7

(1) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

化简为行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以方程组的解为:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

(2) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

化简为简化行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

所以方程组的解为:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

(3) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

化简为简化行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 1 & -1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由于 $r > s$, 方程组无解.

(4) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

化简为简化行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以方程组的解为:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 2x_3 \\ x_2 = 2 + x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

(5) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

化简为简化行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以方程组的解为:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 x_4 = 0 \end{cases}$$

7 Answer_8

(1) 该方程组的增广矩阵是

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & p \\ 1 & 1 & -2 & p^2 \end{pmatrix}$$

化简为行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & p+3 \\ 0 & 0 & 0 & p^2+p-2 \end{pmatrix}$$

所以,

- 方程组无解 $\Leftrightarrow p^2+p-2 \neq 0 \Leftrightarrow p \neq -2$且$p \neq 1$
- 由于 $n = r \geqslant s$, 方程组不可能有无穷解.
- 方程组有唯一解 $\Leftrightarrow p^2+p-2 = 0 \Leftrightarrow p = -2$或$p = 1$
  - * $p = -2$ 时, 有

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7+3x_2}{6} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

  - * $p = 1$ 时, 有

$$\begin{cases} x_1 = \frac{10+3x_2}{6} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

(2) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & q \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{pmatrix}$$

化简为行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q-2 \end{pmatrix}$$

- 方程组无解 $\Leftrightarrow r > s \Leftrightarrow q \neq 2$

- 方程组有无数解 $\Leftrightarrow r = s < n \Leftrightarrow q = 2$且$p = 1$. 此时方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 7 \\ x_2 = x_3 + 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

- 方程组有唯一解 $\Leftrightarrow r = s = n \Leftrightarrow q = 2$且$p \neq 1$. 此时方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

(3) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{pmatrix}$$

化简为行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} (p-1)(p+2) & 0 & 0 & -p^2+1 \\ 0 & (p-1)(p+2) & 0 & p-1 \\ 0 & 0 & (p-1)(p+2) & (p+1)^2(p-1) \end{pmatrix}$$

- 方程组无解 $\Leftrightarrow r > s \Leftrightarrow p = -2$.
- 方程组有无数解 $\Leftrightarrow r = s < n \Leftrightarrow p = 1$. 此时方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

- 方程组有唯一解 $\Leftrightarrow r = s = n \Leftrightarrow p \neq -2$且$p \neq 1$. 此时方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1+p}{2+p} \\ x_2 = \frac{1}{p+2} \\ x_3 = \frac{(p+1)^2}{p+2} \end{cases}$$

(4) 该方程组的增广矩阵是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1+p & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+p & 1 & p \\ 1 & 1 & 1+p & p^2 \end{pmatrix}$$

化简为行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} p(p+3) & 0 & 0 & -p^2-p \\ 0 & p(p+3) & 0 & -p \\ 0 & 0 & p(p+3) & -p \end{pmatrix}$$

- 方程组无解 $\Leftrightarrow r > s \Leftrightarrow p = -3$.

- 方程组有无数解 $\Leftrightarrow r = s < n \Leftrightarrow p = 0$. 此时方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

- 方程组有唯一解 $\Leftrightarrow r = s = n \Leftrightarrow p \neq -3$且$p \neq 0$. 此时方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1+p}{3+p} \\ x_2 = -\frac{p}{p+3} \\ x_3 = -\frac{1}{p+3} \end{cases}$$