数分例题整理

目 录

第一部分 实数基本定理与极限

第一章 实数的定义

§ 1.1 自然数与其定义

一、自然数的定义

定义 1.1.1 (Peano 公理) (略)

定义 1.1.2 (自然数加法与乘法) **自然数加法**定义为映射 $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a + b = b + a$
- $a + 1 = S(a)$
- $a + S(b) = S(a + b)$

自然数的乘法定义为映射 $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot 1 = a$
- $a \cdot S(b) = a + (a \cdot b)$

定义 1.1.3 (自然数的大小关系) $a < b$ 当且仅当存在 $c \in \mathbb{N}, b = a + c$.

§ 1.2 实数的定义

(略)

§ 1.3 实数基本定理

例 1.3.1 证明: $\mathbb{R}$ 不可列.

证明 使用闭区间套定理.

反证法. 假设 $\mathbb{R}$ 可列, 记 $\mathbb{R}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$.

(1) 取 $[a_1,b_1]$ 使得 $x_1\notin[a_1,b_1]$.

(2) 三分 $[a_1,b_1]$ 得三个小区间, 三者必有其一不含 x_2. 记为 $[a_2,b_2]$ ⋮

由此得到一个闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. 由闭区间套定理, $\exists\xi\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\xi\in[a_n,b_n]$.

但对 $\forall k\in\mathbb{N},x_k\notin[a_k,b_k]$, 所以 $x_k\notin\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 故 $\mathbb{R}\cap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\right)=\varnothing$, 矛盾!

第二章 数列极限与相关计算

§ 2.1 数列极限与相关计算

例 2.1.1 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明 令 $\sqrt[n]{n}=1+y_n$, 有

$$n=(1+y_n)^n>1+\frac{n(n-1)}{2}y_n.$$

故

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=|y_n|<\sqrt{\frac{2}{n}},\forall n\in\mathbb{N}.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+1$, 则对 $n<N$ 有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$

例 2.1.2　判断以下命题是否正确. 若正确, 给出证明; 若不正确, 给出反例: 数列 a_n 收敛的充要条件是，对任意正正数 p, 都有 $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$.

解　反例如下: 令 $a_n = \sqrt{n}$, 则 $\forall p > 0$

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} \to 0,$$

但显然该数列不收敛.