

# 数分例题整理

---

Noflowerzzk

---

## 目 录

## 第一部分 实数基本定理与极限 1

## 第一章 实数的定义 1

## § 1.1 自然数与其定义 . . . . . 1

## 一、 自然数的定义 . . . . . 1

## § 1.2 实数的定义 . . . . . 1

## § 1.3 实数基本定理 . . . . . 1

## 第二章 数列极限与相关计算 2

## § 2.1 数列极限与相关计算 . . . . . 2

## 第三章 函数极限、连续相关定理 3

## § 3.1 函数极限 . . . . . 3

## § 3.2 连续函数与间断 . . . . . 3

## 第二部分 微分与积分 4

## 第四章 函数微分、导数相关定理 4

## § 4.1 导数基本性质与中值定理 4

## 一、 中值定理 . . . . . 4

## 二、 导函数的性质 . . . . . 5

## § 4.2 Taylor 公式 . . . . . 6

## 一、 推导与证明 . . . . . 6

## § 4.3 凸函数与 Lipschitz 条件 . . . . . 9

## 一、 凸函数与二阶导的关系 . . . . . 9

## 二、 Lipschitz 条件 . . . . . 10

## 三、 开区间上的凸函数 . . . . . 11

## 四、 相关不等式 . . . . . 13

## 第五章 函数不定积分、定积分相关

## 定理 14

## § 5.1 不定积分 . . . . . 14

## 一、 计算计巧 . . . . . 15

## 二、 一些例题 . . . . . 16

## § 5.2 定积分 . . . . . 16

## 一、 定积分的定义与 Darboux 和 . . . . . 16

## 二、 定积分存在的充要条件 — Darboux 定理 . . . . . 16

## 三、 定积分存在的充要条件 — Lebesgue 判别法 . . . . . 17

## 四、 积分中值定理与微积分基本定理 . . . . . 21

## 五、 积分不等式 . . . . . 25

## 六、 有关可求长曲线 . . . . . 26

## § 5.3 广义积分 . . . . . 28

## 一、 无穷积分和瑕积分的定义 . . . . . 28

## 二、 广义积分敛散性的判别法 . . . . . 29

## 第三部分 级数 30

## 第六章 数项级数 30

## § 6.1 定义与基本性质 . . . . . 30

## § 6.2 正项级数 . . . . . 31

## 一、 上下极限的定义与性质 . . . . . 31

## 二、 正项级数敛散性的判别法 . . . . . 32

§ 6.3 任意项级数 . . . . .	34	二、 Euclid 空间 . . . . .	36
一、 基本性质 . . . . .	34	§ 7.2 度量空间的子集 . . . . .	36
二、 Leibniz 判别法 . . . . .	34	一、 聚点、内点、外点和	
三、 Abel 判 别 法 与		边界点 . . . . .	36
Dirichlet 判别法 . . . . .	34	二、 开集、闭集、邻域 . . . . .	37
<b>第四部分 度量空间与函数</b>	<b>34</b>	§ 7.3 度量空间的紧性 . . . . .	38
<b>第七章 度量空间</b>	<b>34</b>	一、 紧集 . . . . .	38
§ 7.1 度量空间的定义 . . . . .	35	二、 列紧集 . . . . .	39
一、 度量空间、内积、范数	35	§ 7.4 度量空间的完备性 . . . . .	39
		一、 完备的定义 . . . . .	39
		二、 完备空间的性质 . . . . .	40

# 第一部分 实数基本定理与极限

## 第一章 实数的定义

### § 1.1 自然数与其定义

#### 一、自然数的定义

定义 1.1.1 (Peano 公理) (略)

定义 1.1.2 (自然数加法与乘法) 自然数加法定义为映射  $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 满足以下性质:

- $a + b = b + a$
- $a + 1 = S(a)$
- $a + S(b) = S(a + b)$

自然数的乘法定义为映射  $\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 满足以下性质:

- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot 1 = a$
- $a \cdot S(b) = a + (a \cdot b)$

定义 1.1.3 (自然数的大小关系)  $a < b$  当且仅当存在  $c \in \mathbb{N}, b = a + c$ .

### § 1.2 实数的定义

(略)

### § 1.3 实数基本定理

**例 1.3.1** 证明:  $\mathbb{R}$  不可列.

**证明** 使用闭区间套定理.

反证法. 假设  $\mathbb{R}$  可列, 记  $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ .

(1) 取  $[a_1, b_1]$  使得  $x_1 \notin [a_1, b_1]$ .

(2) 三分  $[a_1, b_1]$  得三个小区间, 三者必有其一不含  $x_2$ . 记为  $[a_2, b_2]$ :

由此得到一个闭区间套  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ . 由闭区间套定理,  $\exists \xi \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \xi \in [a_n, b_n]$ .

但对  $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \notin [a_k, b_k]$ , 所以  $x_k \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ . 故  $\mathbb{R} \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \right) = \emptyset$ , 矛盾!

## 第二章 数列极限与相关计算

### § 2.1 数列极限与相关计算

**例 2.1.1** 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**证明** 令  $\sqrt[n]{n} = 1 + y_n$ , 有

$$n = (1 + y_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} y_n.$$

故

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = |y_n| < \sqrt{\frac{2}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$ , 则对  $n < N$  有  $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$

**例 2.1.2** 判断以下命题是否正确. 若正确, 给出证明; 若不正确, 给出反例:

数列  $a_n$  收敛的充要条件是, 对任意正数  $p$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$ .

**解** 反例如下: 令  $a_n = \sqrt{n}$ , 则  $\forall p > 0$

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

但显然该数列不收敛.

例 2.1.3 求极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{4n^2 + n}\pi)$ .

解

$$\begin{aligned}\sin(\sqrt{4n^2 + n}\pi) &= \sin\left(\left(\sqrt{4n^2 + n} - 2n\right)\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2}\pi\right)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{4n^2 + n}\pi) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## 第三章 函数极限、连续相关定理

### § 3.1 函数极限

定理 3.1.1 单调函数任意一点左右极限均存在

**证明** 不妨  $f(x)$  在  $(a, b)$  上单增, 对任意  $x_0 \in (a, b)$ ,  $\{f(x) | x \in (a, x_0)\}$  有上确界  $\alpha$ .

对任意  $x \in (a, x_0)$ ,  $f(x) \leq \alpha$ , 但  $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in (a, x_0), f(x') > \alpha - \varepsilon$ . 由  $f(x)$  单调性,  $\forall x \in (x', x_0)$ ,  $-\varepsilon < f(x') \leq f(x) - \alpha \leq 0$ , 即  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$ .

右极限同理. □

### § 3.2 连续函数与间断

引理 3.2.1 (单调函数的不连续点) 单调函数的不连续点必然是跳跃间断点

**证明** 由定理 3.1.1 即得 □

定理 3.2.1 单调函数至多有可列个间断点

**证明** 由单调性及间断点的性质,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .

由有理数的稠密性, 在每个间断点  $x_0$  的区间 (由单调性, 它们两两不交)

$\left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right)$ , 必存在一个有理数, 用这个有理数代表这个区间. 则这些有理数与这些间断点一一对应.

因此间断点至多有可列个.  $\square$

**例 3.2.1**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个连续函数. 定义  $L(f) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$ . 证明: 若  $L(f)$  非空, 则  $L(f)$  是一个闭集. (闭集是包含所有聚点的集合)

**解**

## 第二部分 微分与积分

### 第四章 函数微分、导数相关定理

#### § 4.1 导数基本性质与中值定理

##### 一、中值定理

**例 4.1.1**  $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ , 其中  $a > 0$  且  $f(a) = 0$ . 证明:  $\exists \xi \in (a, b), f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$ .

**解** 令  $F(x) = (b-x)^a f(x)$ , 易知  $F(x) \in C[a, b] \cap D(a, b), F(a) = F(b) = 0$ , 由 Rolle 定理,  $\exists \xi \in (a, b), F'(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$

用 Rolle 定理证明等式的基本方法:

- 将等号一端改写成只有零, 形成  $g(\xi) = 0$
- 求积分  $G(x) = \int g(x) dx$
- 验证  $G(x)$  满足 Rolle 中值定理条件

例如上题, 化简为  $\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{a}{b-x} = 0$ , 有  $G(x) = (b-x)^a f(x)$

**例 4.1.2**  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶可导,  $f(0) = f(1), f'(1) = 1$ , 求证: 存在  $\xi \in (0, 1), f''(\xi) = 2$ .

**解**  $f''(x) - 2 = 0$ , 有  $f'(x) - 2x = C_1$ , 由条件  $f'(1) = 1$ , 有  $C_1 = -1$ , 化简有  $f'(x) - 2x + 1 = 0$ , 故  $F(x) = f(x) - x^2 + x$ . 下略.

**例 4.1.3** 证明  $2^x - x^2 = 1$  有且仅有三个实根

**解** 有三个解证明略.

假设有四个解, 反复使用中值定理可以证明最后的导函数没有解。

**例 4.1.4**  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可微, 且  $f(0) = 0, |f'(x)| \leq p|f(x)|$ , 证明  $f(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$

**证明** 先考虑  $x \in \left[0, \frac{1}{2p}\right]$  的情形.  $|f(x)|$  在  $\left[0, \frac{1}{2p}\right]$  的最大值为  $|f(x_0)| = M \geq 0$

$$M = |f(x) - f(0)| = |f'(\xi)x_0| \leq \frac{1}{2p} \cdot p|f(\xi)| \leq \frac{1}{2}M$$

因此  $M = 0$ . 对其它区间同理归纳即可.

## 二、导函数的性质

**定理 4.1.1** (导数的 Darboux 定理 (介值性))  $f(x)$  可导且  $f'(a) \neq f'(b)$ , 则对任意介于  $f'(a), f'(b)$  之间的  $r$ , 都存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $r = f'(\xi)$

两种证明方法

**证明** 不妨  $f'(a) < f'(b)$ , 对任意  $r \in (f'(a), f'(b))$ , 令  $F(x) = f(x) - rx$ , 有  $F(a) < 0, F(b) > 0$ . 故由极限保号性, 存在  $\delta > 0, \forall x \in (a, a + \delta), \frac{F(x) - F(a)}{x - a} < 0$ , 即  $F(x) < F(a)$ ,  $F(a)$  不是最小值.

同理  $F(b)$  也不是最小值. 因此最小值  $F(\xi)$  在开区间  $(a, b)$  上取到, 由费马定理,  $F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = r$ .  $\square$



**证明** 假设同上, 作函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & x \neq a \\ f'(a), & x = a \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}, & x \neq b \\ f'(b), & x = b \end{cases}$$

$r$  要么在  $F(a), F(b)$  之间, 要么在  $G(a), G(b)$  之间.

如果  $r$  在  $F(a), F(b)$  之间, 由连续函数的介值定理, 存在  $x_0 \in (a, b), r = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}$  再对  $F(x)$  用 Lagrange 中值定理即可.  $r$  在  $G(a), G(b)$  之间同理.  $\square$

## § 4.2 Taylor 公式

### 一、推导与证明

**引理 4.2.1** 若  $r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$ , 则  $r(x) = o((x - x_0)^n) (x \rightarrow x_0)$ .

**证明** 对  $n$  归纳.

当  $n = 1$  时,  $r(x) = r(x_0) + r'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0)$

假设当  $n \geq 1$  有  $r^{(n)}(x) = o((x - x_0)^n)$  成立.

则当  $n + 1$  时, 由 Lagrange 中值定理,

$$r(x) = r(x_0) + r'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0) = r'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0)$$

当  $x \rightarrow x_0$  时,

$$r'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0) = o((x - x_0)^n) \cdot (x - x_0) = o((x - x_0)^{n+1})$$

由归纳原理, 原命题成立.  $\square$

**定理 4.2.1** (带 Lagrange 余项的泰勒公式) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上  $n$  阶可导, 在  $(a, b)$  上

有  $n+1$  阶导. 设  $x_0$  为  $[a, b]$  内一点, 则对任意  $x \in [a, b]$  存在  $\theta \in (0, 1)$ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{(n+1)}$$

**证明** 令  $r(x) = f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$ , 有  $r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$ .

由 Cauchy 中值定理,

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{r(x) - r(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} \\ &= \frac{r'(\xi_1) - r'(x_0)}{(n+1)((\xi_1 - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n)} && \xi_1 \in (x_0, x) \text{ 或 } (x, x_0) \\ &= \frac{r''(\xi_2) - r''(x_0)}{(n+1) \cdot n \cdot ((\xi_2 - x_0)^{n-1} - (x_0 - x_0)^{n-1})} && \xi_2 \in (x_0, \xi_1) \text{ 或 } (\xi_1, x_0) \\ &= \cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{r^{(n)}(\xi_n)}{\xi_n - x_0} && \xi_n \in (x_0, \xi_{n-1}) \text{ 或 } (\xi_{n-1}, x_0) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} r^{(n+1)}(\xi) && \xi \in (x_0, \xi_n) \text{ 或 } (\xi_n, x_0) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \end{aligned}$$

$$\text{因此 } r(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

□

**例 4.2.1** (Taylor 公式的应用套路)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导,  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

**证明** 由最值存在定理,  $\exists x_0 \in [a, b], |f(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ , 且  $f'(x_0) = 0$

把  $f(x)$  在  $x = x_0$  处展开, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2, \quad \xi \text{ 在 } x, x_0 \text{ 之间}$$

代入  $x = a, x = b$  有:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2 &= f(a) - f(x_0) - f'(x_0)(a-x_0) & a < \xi_1 < x_0 \\ \frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_0-b)^2 &= f(b) - f(x_0) - f'(x_0)(b-x_0) & x_0 < \xi_2 < b\end{aligned}$$

相加有

$$\begin{aligned}|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)| &= 2|f(x_0)| \left( \frac{1}{(a-x_0)^2} + \frac{1}{(b-x_0)^2} \right) \\ &\geq 2|f(x_0)| \left( \frac{(1+1)^3}{(a-x_0+x_0-b)^2} \right) \\ &= \frac{16}{(a-b)^2} |f(x_0)|\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| &\geq \frac{1}{2} (|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|) \\ &= \frac{8}{(a-b)^2} |f(x_0)| \\ &= \frac{8}{(a-b)^2} \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|\end{aligned}$$

即

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(a-b)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

□

**例 4.2.2**  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上二阶可导,  $|f(x)| < k_0, |f''(x)| < k_1$ , 证明:

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2k_0k_1}$$

**证明** 由 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2 \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2\end{aligned}$$

化简有:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{1}{4}(f''(\xi_2) - f''(\xi_1))h$$

因此

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h)| + |f(x-h)|}{2h} + \frac{1}{4} (|f''(\xi_2)| + |f''(\xi_1)|) h \leq \frac{k_0}{h} + \frac{h}{2} k_1 \quad \forall h > 0$$

因此

$$|f'(x)| \leq \min_{h \in (0, +\infty)} \left( \frac{k_0}{h} + \frac{h}{2} k_1 \right) = \sqrt{2k_0 k_1}$$

□

## § 4.3 凸函数与 Lipschitz 条件

### 一、凸函数与二阶导的关系

**定义 4.3.1 (凸函数)** 对某函数  $f(x)$  定义域的任意区间  $[a, b]$ ，有任意  $\lambda \in [0, 1]$ ，满足

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则成  $f(x)$  为其定义区间上的**下凸函数**

**定理 4.3.1**  $f(x)$  在区间  $I$  上二阶可导，则  $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$  是  $f(x)$  在  $I$  上下凸的充要条件.

**证明** 充分性:

任取  $x_1, x_2 \in I$ ，不妨设  $x_1 < x_2$ 。任取  $\lambda \in (0, 1)$ ，根据 Lagrange 中值定理

$$\begin{aligned} & \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \\ &= -\lambda (f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - f(x_1)) + (1 - \lambda) (f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) \\ &= -\lambda f'(\xi_1) \cdot (1 - \lambda)(x_2 - x_1) + (1 - \lambda) f'(\xi_2) \cdot \lambda(x_2 - x_1) \\ & \quad (x_1 < \xi_1 < \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 < \xi_2 < x_2) \\ &= \lambda(1 - \lambda) f''(\xi)(x_2 - x_1)(\xi_2 - \xi_1) \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

必要性: 假设  $f(x)$  是  $I$  上的下凸函数，且处处二阶可导。取  $x_0 \in I$ ，则  $\forall \Delta x > 0$ ，

有

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{\Delta x^2} \geq 0 \quad \left( x_0 = \frac{1}{2}(x_0 - \Delta x) + \frac{1}{2}(x_0 + \Delta x) \right)$$

另一方面, 根据带 Peano 余项的 Taylor 公式,

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{\Delta x^2} \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} \left( f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + o(\Delta x^2) \right. \\ & \quad \left. + f(x_0) + f'(x_0)(-\Delta x) + \frac{1}{2}f''(x_0)(-\Delta x)^2 + o(\Delta x^2) - 2f(x_0) \right) \\ &= f''(x_0) + \frac{o(\Delta x^2)}{\Delta x^2} \quad (\Delta x \rightarrow 0) \\ &= f''(x_0) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

## 二、Lipschitz 条件

**定义 4.3.2 (局部 Lipschitz 函数)** 对任意  $x_0 \in D_f$ , 存在邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 与常数  $C$  ( $\delta, C$  均依赖于  $x_0$ ), 使得

$$\forall x, x' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_f : \quad |f(x) - f(x')| \leq C |x - x'|$$

则称  $f(x)$  为**局部 Lipschitz 函数**.

**定义 4.3.3 (Lipschitz 函数)** 若存在常数  $C$ , 使得

$$\forall x, x' \in D_f : \quad |f(x) - f(x')| \leq C |x - x'|$$

则称  $f(x)$  为**Lipschitz 函数**.

又由限覆盖定理, 闭区间上的局部 Lipschitz 函数是 Lipschitz 函数.

**定理 4.3.2** Lipschitz 函数是连续函数.

### 三、开区间上的凸函数

**引理 4.3.1**  $f(x)$  是  $(a, b)$  上的下凸函数当且仅当任意  $(x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ , 任意  $x \in (x_1, x_2)$ , 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

**证明** 由  $x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2$ , 有

$$\begin{aligned} f(x) \text{ 是下凸函数} &\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2) \quad (\forall a < x_1 < x < x_2 < b) \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

另一边同理. □

**引理 4.3.2** 闭区间上的下凸函数有界.

**证明** 设闭区间  $[a, b]$ , 任取  $x \in [a, b]$ ,  $\exists \lambda \in (0, 1)$ ,  $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ ,  $f(x) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \leq \max\{f(a), f(b)\}$ .

又将  $f(x)$  连续延拓到  $[c, d] \supseteq [a, b]$  上且保证其在  $[c, d]$  上下凸, 有  $f(x)$  在  $[c, d]$  上有上界.

由于  $f(a) \leq \lambda_1 f(x) + (1 - \lambda_1)f(c)$ , 有  $f(x) \geq \frac{1}{\lambda_1}f(a) - \left(\frac{1}{\lambda_1} - 1\right)f(c)$ .

同理  $f(x) \geq \frac{1}{\lambda_2}f(b) - \left(\frac{1}{\lambda_2} - 1\right)f(d)$ . 即  $f(x)$  有下界. □

**定理 4.3.3** 开区间上的凸函数必为连续函数.

**证明** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 任意  $x_0 \in (a, b)$ , 存在  $\delta > 0$ ,  $[x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta] \subseteq (a, b)$ .

任取  $x > y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $x = \lambda(x_0 + 2\delta) + (1 - \lambda)y$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ .

由凸函数性质,  $f(x) \leq \lambda f(x_0 + 2\delta) + (1 - \lambda)f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) \leq \lambda[f(x_0 + 2\delta) - f(y)]$ .

由引理 3.3.2,  $|f(x)| < M$ ,  $\exists M > 0$ . 故  $|f(y) - f(x)| \leq \lambda[f(x_0 + 2\delta) - f(y)] \leq 2\lambda M$ .

又由  $x = \lambda(x_0 + 2\delta) + (1 - \lambda)y \Rightarrow |x - y| = \lambda(x_0 + 2\delta - y) > \lambda\delta$ , 故  $2\lambda M < \frac{|x - y|}{\delta}$ .  
代入有  $|f(x) - f(y)| < \frac{|x - y|}{\delta}$ , 满足 **局部 Lipschitz** 性质, 因此  $f(x)$  连续.  $\square$

**定理 4.3.4** 开区间上的凸函数必为 Lipschitz 函数.

**例 4.3.1** 设函数  $f(x)$  是  $(a, b)$  上的下凸函数, 证明:

- (1) 在每个  $x \in (a, b)$ ,  $f'_-(x)$  与  $f'_+(x)$  均存在, 且  $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ .
- (2) 若  $a < x_1 < x_2 < b$ , 则有  $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$ .
- (3)  $f(x)$  不可导的点至多有可列个.

**证明**

- (1) 取  $x_0 \in (a, b)$ , 由引理 4.3.1,  $\frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \geq \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2\Delta x)}{2\Delta x}$ , 表明

$$F_-(\Delta x) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \text{ 关于 } \Delta x \text{ 单减.}$$

又取定  $x' > x_0$ ,  $F_-(\Delta x) \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$ ,  $F_-(\Delta x)$  在  $\Delta x \rightarrow 0^+$  时单调递增且有上界, 故极限存在, 即  $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F_-(\Delta x)$  存在. 同理  $f'_+(x_0)$  也存在.

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \quad (\text{由引理 4.3.1})$$

- (2) 任取  $x \in (x_1, x_2)$ ,

$$\begin{aligned} \text{有 } f'_+(x_1) &= \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \leq \\ &\lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'_-(x_2) \end{aligned}$$

- (3) 由 (2) 知, 如果存在一点  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f'_-(x_0) < f'_+(x_0)$ , 则开区间  $(f'_-(x_0), f'_+(x_0))$  中不含  $f'_-(x), f'_+(x), \forall x \in (a, b)$  的所有值.

假设有两点  $x_1 < x_2$ , 有  $f'_-(x_i) < f'_+(x_i), i \in \{1, 2\}$ . 则易得  $f'_-(x_1) < f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) < f'_+(x_2)$ .

由引理 3.2.1, 同理有这样的  $x_0$  有可列个.

## 四、相关不等式

**定理 4.3.5 (Young 不等式)**  $p, q$  不等于 0 或 1,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则对任意正数  $a, b$ , 有

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad p > 1$$

$$ab \geq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad p < 1$$

**证明** 求导即可. □

**定理 4.3.6 (Hölder 不等式)**  $p, q$  不等于 0 或 1,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则对任意正数数列  $\{a_k\}_{k=1}^n, \{b_k\}_{k=1}^n$ , 有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad p > 1$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad p < 1$$

**证明** 令  $A = \sum_{i=1}^n a_i^p, B = \sum_{i=1}^n b_i^q$

$p > 1$  时, 对  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 由 **Young 不等式**,

$$\frac{a_i b_i}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{A} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{B}$$

故

$$\frac{1}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

即

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} = \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□



**证明** (用 Jensen 不等式的证明)  $p > 1$  时,  $f(x) = x^p$  为下凸函数.

由于  $q = \frac{p}{p-1}$ , 把  $x_i y_i$  分解为

$$x_i y_i = y_i^q \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \cdot x_i y_i^{1-q} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)$$

注意到

$$\sum_{i=1}^n \left( y_i^q \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \right) = 1$$

由 Jensen 不等式,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^p &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ y_i^q \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \cdot x_i y_i^{1-q} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right) \right] \right\}^p \\ &\leq \sum_{i=1}^n y_i^q \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \cdot x_i^p y_i^{p-pq} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^p \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{p-1} \end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

## 第五章 函数不定积分、定积分相关定理

### § 5.1 不定积分

(全是计算题)

## 一、计算计巧

## 例 5.1.1 (凑微分技巧)

- $\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = d(\sqrt{1+x^2})$
- $\int x^{2k+1} \sqrt{a+bx^2} dx \xrightarrow{t=\sqrt{a+bx^2}} \dots, (bx dx = t dt)$

## 例 5.1.2 (分部积分法则)

- $\int f(x) \ln g(x) dx = \int \ln g(x) dF(x)$
- $\int f(x) \arctan g(x) dx$  分两种情况.
  - $f(x)$  能凑微分, 则化为  $\int \arctan g(x) dF(x)$
  - $f(x)$  不能凑微分, 则换元  $t = \arctan g(x)$

## 定理 5.1.1 (用于求分段函数积分)

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt$$

## 定理 5.1.2 (记不住就完了!)

•

$$\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\bullet I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

则

$$I_n = \begin{cases} \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C & n = 1 \\ \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} & n \geq 2 \end{cases}$$

## 二、一些例题

**例 5.1.3** (正余弦齐次分式函数) 计算  $\int \frac{7 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x} dx$ .

**解** 由于  $7 \sin x + \cos x = 3 \sin x + 4 \cos x - (3 \sin x + 4 \cos x)'$ , 有

$$\int \frac{7 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x} dx = \int dx - \int \frac{d(3 \sin x + 4 \cos x)}{3 \sin x + 4 \cos x} = x - \ln |3 \sin x + 4 \cos x| + C$$

## § 5.2 定积分

### 一、定积分的定义与 Darboux 和

**定义 5.2.1** (Riemann 和与定积分) (略)

**定义 5.2.2** (Darboux 和) (略)

### 二、定积分存在的充要条件 —— Darboux 定理

**引理 5.2.1** (Darboux 引理) 对于  $[a, b]$  上的有界函数  $f(x)$ , 成立

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \overline{S}(P) = \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \underline{S}(P) = \int_a^b f(x) dx.$$

确切地说, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对任意划分  $P$ , 只要  $0 < \lambda(P) < \delta$ , 则有

$$\left| \overline{S}(P) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon, \quad \left| \underline{S}(P) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

**定理 5.2.1** (可积的充要条件, Darboux 定理) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 则以下命题等价:

1.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积;

2.  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ ;

$$3. \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0;$$

$$4. \text{ 存在一列划分 } \{P_l\}_{l=1}^{\infty}, \text{ 使得 } \lim_{l \rightarrow \infty} (\overline{S}(P_l) - \underline{S}(P_l)) = 0.$$

$$4'. \text{ 对任意 } \varepsilon > 0, \text{ 存在划分 } P, \text{ 使得 } \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \varepsilon.$$

最后, 若  $f(x)$  可积, 则成立

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx} = \underline{\int_a^b f(x) dx}.$$

### 三、定积分存在的充要条件 —— Lebesgue 判别法

先给出一个较弱的定理

**定理 5.2.2** 闭区间上的连续函数可积.

**证明** 由一致连续性即得. □

**定义 5.2.3 (区间的测度与零测集)** 定义开、闭区间  $I = (a, b)$  的长度  $|I| = b - a$ . 设集合  $S \subseteq \mathbb{R}$ . 如果对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在至多可列个开区间  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 使得

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{且} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon,$$

则称  $S$  是一个零测集。

**例 5.2.1** 证明:  $\mathbb{R}$  中的可列集是零测集.

**证明** 设  $S \subset \mathbb{R}$  是可列集, 记

$$S = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}.$$

任取  $\varepsilon > 0$ , 对每个  $n$ , 记

$$I_n = \left( x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right).$$

则显然

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon.$$

所以,  $S$  是零测集。

**注:** 如果在某区间上, 某数学性质在一个零测集之外均成立, 则称该区间上该性质几乎处处成立.

再给出一道相关例题

**例 5.2.2** 证明: 对任意有界函数  $f(x)$ ,  $f(x)$  可积当且仅当对任意  $\varepsilon, \sigma > 0$ , 存在一划分  $P$ , 使得

$$\sum_{\omega_i \geq \varepsilon} \omega_i \Delta x_i < \sigma$$

**证明**  $f(x)$  可积等价于  $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p w_i \Delta x_i = 0$ . 令  $\max_{x \in [a, b]} f(x) = M$ ,  $\min_{x \in [a, b]} f(x) = m$

• 充分性:

对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(p-1)}}$ ,  $\sigma = \frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}$ ,  $\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(p-1)}}$  取分划  $P$  满足  $\lambda(P) < \delta$ , 有

$$\sum_{i=1}^p w_i \Delta x_i = \sum_{w_i \geq \varepsilon_0} w_i \Delta x_i + \sum_{w_i < \varepsilon_0} w_i \Delta x_i < (p-1)(M-m)\sigma + (p-1)\varepsilon_0 \delta = \varepsilon$$

即  $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p w_i \Delta x_i = 0$ ,  $f(x)$  可积.

• 必要性:

取定  $\varepsilon_0 > 0$ , 存在  $\sigma = \min\{b-a, \sqrt{\varepsilon_0}\}$ ,  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$ . 假设对任意分划  $P$  满足

$\sum_{w_i \geq \varepsilon} \Delta x_i \geq \sigma$ , 有

$$\sum_{i=1}^p w_i \Delta x_i = \sum_{w_i \geq \varepsilon_0} w_i \Delta x_i + \sum_{w_i < \varepsilon_0} w_i \Delta x_i \geq \varepsilon \sigma + 0 = \varepsilon_0$$

表明  $f(x)$  不可积, 矛盾! 因此对任意  $\varepsilon > 0, \sigma > 0$ , 存在划分  $P$ ,  $\sum_{w_i \geq \varepsilon} \Delta x_i < \sigma$

**定理 5.2.3 (Lebesgue 判别法)**  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的有界函数,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积的充要条件是  $f(x)$  的间断点集是一个可列集. ( $f(x)$  几乎处处连续)

**证明** 首先我们定义符号: 对于任意  $x \in D_f$ ,

$$\omega_f(x, \varepsilon) := \sup_{x_1, x_2 \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)} |f(x_1) - f(x_2)|$$

以及由于  $\omega_f(x, \varepsilon)$  关于  $\varepsilon$  单增由下界, 由单调有界定理, 当  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  的极限存在. 因此定义

$$\omega_f(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \omega_f(x, \varepsilon)$$

因此我们易得如下引理:

**引理 5.2.2**  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续当且仅当  $\omega_f(x_0) = 0$ .

**充分性:**

$f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 记  $|f(x)| \leq M$ .

设  $K \subseteq [a, b]$  是  $f(x)$  所有间断点的集合, 则  $K$  为零测集.

任取  $\varepsilon > 0$ . 则由零测集的定义, 存在至多可列个开区间  $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ , 使得

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

另一方面, 对任意  $x \in [a, b] \setminus K$ , 由于  $x$  是连续点, 所以有

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(x, \delta) = 0.$$

由极限的定义, 存在  $\delta_x > 0$ , 使得

$$\omega_f(x, 2\delta_x) := \sup_{x', x'' \in (x-2\delta_x, x+2\delta_x) \cap [a, b]} |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

显然,  $\{(x - \delta_x, x + \delta_x)\}_{x \in [a, b] \setminus K} \cup \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$  是  $[a, b]$  的一个开覆盖, 因为它分别地覆盖了  $[a, b] \setminus K$  与  $K$  中的每一个点. 根据有限覆盖定理, 它有有限子覆盖, 记为

$$[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^N (y_j - \delta_{y_j}, y_j + \delta_{y_j}) \cup \bigcup_{l=1}^M I_{k_l}.$$

该子覆盖中所有开区间的端点构成了  $[a, b]$  的一个划分  $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$  ( $[a, b]$  之外的端点忽略). 该划分所决定的小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  可以分为两类:

- I.  $(x_{i-1}, x_i)$  包含于某个  $I_{k_l}$ . 则所有这类小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  的长度之和不超所有  $I_{k_l}$  的长度之和, 从而小于  $\frac{\varepsilon}{4M}$ . 记这些  $i$  构成的集合为  $\Lambda_1$
- II.  $(x_{i-1}, x_i)$  不包含于任何  $I_{k_l}$ . 根据覆盖关系, 可以通过左端点  $x_{i-1}$  的位置讨论  $[x_{i-1}, x_i]$  的位置:
  - $x_{i-1}$  属于某个  $I_{k_l}$ . 由于  $x_i$  是一切  $x_{i-1}$  右侧端点中距离  $x_{i-1}$  最近的那一个, 所以它不比  $I_{k_l}$  的右端点更靠右. 此时  $(x_{i-1}, x_i) \subset I_{k_l}$ . 因此该情形不会发生.
  - $x_{i-1}$  不属于任意  $I_{k_l}$ , 根据覆盖, 它必属于某个  $(y_j - \delta_{y_j}, y_j + \delta_{y_j})$ . 利用类似于上一种情形的讨论, 必有

$$(x_{i-1}, x_i) \subset (y_j - \delta_{y_j}, y_j + \delta_{y_j}).$$

从而

$$[x_{i-1}, x_i] \subset (y_j - 2\delta_{y_j}, y_j + 2\delta_{y_j}).$$

可见, 第二类区间上函数的振幅小于  $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . 记这些  $i$  构成的集合为  $\Lambda_2$

最后, 对于该划分  $P$

$$S(P) - S(P) = \sum_{i \in \Lambda_1} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i \in \Lambda_2} \omega_i \Delta x_i < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

**必要性:**

先证明一个引理:

**引理 5.2.3** 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则对任意  $\sigma > 0$ , 集合

$$\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > \sigma\}$$

是零测集.

由 **例题 5.2.2** 立得.

注意到

$$\begin{aligned} x \in \{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\} &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \omega_f(x) > \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > \frac{1}{n} \right\} \end{aligned}$$

因此

$$\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

即  $\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\}$  是可列集. □

**例 5.2.3** 闭区间上的单调有界函数可积.

**证明** 由 **定理 3.2.1** 立得.

## 四、积分中值定理与微积分基本定理

**定理 5.2.4** (积分第一中值定理) 设  $f(x), g(x)$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 且  $g(x)$  在  $[a, b]$  上不变号. 记  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ , 则存在  $\eta \in [m, M]$ , 使得.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \eta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

特别地, 当  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则存在  $\xi \in [a, b]$ ,

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

**定义 5.2.4** 有界函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则对任意  $x \in [a, b]$ ,  $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$  为  $f$  的变上限积分.

关于  $F(x)$  有性质:



## 定理 5.2.5

- $F(x)$  有 Lipschitz 性质.
- 若  $f(x)$  连续,  $F(x)$  可导, 且  $F'(x) = f(x)$

## 证明

- 由  $|f(x)| \leq M$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \int_x^y f(x) dx \right| \\ &\leq \int_x^y |f(x)| dx \\ &\leq \int_x^y M dx = M |y - x| \end{aligned}$$

即证.

- 考虑  $x_0 \in (a, b)$  的情形. 任取  $\varepsilon > 0$ . 根据  $f(x)$  在  $x_0$  的连续性, 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

对任意  $\Delta x$ , 根据定积分的区间可加性与第一中值定理:

$$\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt = f(\xi),$$

其中  $\xi \in [x_0, x_0 + \Delta x]$  或  $\xi \in [x_0 + \Delta x, x_0]$ . 所以, 只要  $0 < |\Delta x| < \delta$ , 就有

$$\left| \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| = |f(\xi) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

由定义

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

□

**定理 5.2.6** (微积分第一基本定理) 若  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数, 则其变上限积分  $F(x) = \int_a^x f(x)dx$  是  $f(x)$  的一个原函数.

**定理 5.2.7** (微积分第二基本定理, Newton-Leibniz 公式) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

**定理 5.2.7** 可以加强为:

**定理 5.2.8** 设函数  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上可导. 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 且有  $F'(x) = f(x), x \in (a, b)$ . 那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**定理 5.2.9** (积分第二中值定理)  $f(x)$  在  $[a, b]$  可积,  $g(x)$  在  $[a, b]$  上单调有界. 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx$$

**证明** 不妨  $g(x)$  单增.

令  $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ .  $F(x)$  连续,  $F(x)$  有最大、最小值  $M, m$ .

由于

$$\begin{aligned} g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx &= g(a)F(x) \Big|_a^\xi + g(b)F(x) \Big|_\xi^b \\ &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)(g(b) - g(a)) \end{aligned}$$

因此原式等价于:

$$-\int_a^b f(x)g(x)dx + F(x)g(x) \Big|_a^b = F(\xi)g(x) \Big|_a^b$$

由于  $F(x)$  连续,  $g(x)$  单增, 只需证

$$mg(x)\Big|_a^b \leq -\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + F(x)g(x)\Big|_a^b \leq Mg(x)\Big|_a^b$$

$\Leftrightarrow$

$$mg(x)\Big|_a^b + \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq F(x)g(x)\Big|_a^b \leq Mg(x)\Big|_a^b + \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \quad (1)$$

取  $[a, b]$  的任意划分  $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ , 有

$$\begin{aligned} F(x)g(x)\Big|_a^b &= \sum_{i=1}^n (F(x_i)g(x_i) - F(x_{i-1})g(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n F(x_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) + \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) \end{aligned}$$

显然

$$mg(x)\Big|_a^b \leq \sum_{i=1}^n F(x_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) \leq Mg(x)\Big|_a^b$$

而

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) - \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)| |g(x_{i-1}) - g(t)| \mathrm{d}t \\ &\leq M \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_i(g) \mathrm{d}x \\ &= M \sum_{i=1}^n \omega_i(g) \Delta x_i \end{aligned}$$

当  $\lambda(P) \rightarrow 0$  时, 上式趋近于 0. 因此式 (1) 成立. □

## 五、积分不等式

**定义 5.2.5** (函数的  $p$ -范数) 对  $[a, b]$  上可积的函数  $f(x)$ , 定义  $f(x)$  的  $p$ -范数:

$$\|f(x)\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

**定理 5.2.10** (Hölder 不等式)  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 且有  $p, q > 1$  且  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \|f(x)\|_p \cdot \|g(x)\|_q$$

当  $p = q = 2$  时, 即 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2 dx$$

**证明** 由 Young 不等式, 类似 四离散 Hölder 不等式即可. □

**例 5.2.4** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有连续导数,  $f(a) = f(b) = 0$ , 且  $\int_a^b f(x)^2 dx = 1$ . 证明:

$$\int_a^b x^2 (f'(x))^2 dx \geq \frac{1}{4}$$

## 证明

$$\begin{aligned}
1 &= \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x \\
&= x f(x)^2 \Big|_a^b - \int_a^b x (f(x)^2)' \mathrm{d}x \\
&= - \int_a^b 2x f'(x) f(x) \mathrm{d}x \\
&= 2 \int_a^b (-x f'(x)) f(x) \mathrm{d}x \\
&\leq 2 \left( \int_a^b (-x f'(x))^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2 \left( \int_a^b x^2 (f'(x))^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

□

## 六、有关可求长曲线

**定义 5.2.6 (曲线的定义)** • 参数方程：闭区间  $[a, b]$  到  $\mathbb{R}^2$  的连续映射  $\gamma$

• 曲线：映射  $\gamma$  的象空间

**定义 5.2.7 (可求长曲线)** 若对  $[a, b]$  的任意划分  $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ , 极

限  $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)}$  存在且其值不依赖划分的选取.

改极限定义为曲线的长度.

不难发现

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)} = \sup_P \sum_{i=1}^n \overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)}$$

**定义 5.2.8 (光滑曲线)** 对曲线的参数方程  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , 若  $x(t), y(t)$  均有连续导数, 且

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$$

则称该曲线为光滑曲线.

**定理 5.2.11** 若曲线的参数方程的各个分量均可求导且导数可积, 则曲线可求长, 且其长度为

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

光滑曲线是其一特殊情况.

(相当于速率乘以时间)

### 证明

由 Lagrange 中值定理,

$$\begin{aligned} \overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)} &= \sqrt{(x(t_{i-1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i-1}) - y(t_i))^2} \\ &= \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} \Delta t_i \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} & \left| \overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| \\ &= \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} - \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \right) dt \right| \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} - \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \right| dt \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} (|x'(\xi_i) - x'(t)| + |y'(\eta_i) - y'(t)|) dt \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\omega_i(x') + \omega_i(y')) dt \end{aligned}$$

注意到  $\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ , 得

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)} - \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(x') \Delta t + \sum_{i=1}^n \omega_i(y') \Delta t \rightarrow 0 \quad (\lambda(P) \rightarrow 0) \end{aligned}$$

故二者相等.

□

**例 5.2.5**  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) = 0$ , 证明:  $\sup_{x \in [a, b]} f^2(x) \leq (b-a) \int_a^b (f'(x))^2 dx$

**证明**

$$(b-a) \int_a^x (f'(t))^2 dt \geq (x-a) \int_a^x (f'(t))^2 dt \geq \left( \int_a^x f'(t) dt \right)^2 = f^2(x)$$

由于存在  $x_0 \in [a, b]$ ,  $f^2(x_0) = \sup_{x \in [a, b]} f^2(x)$

$$(b-a) \int_a^b (f'(x))^2 dx \geq (b-a) \int_a^{x_0} (f'(x))^2 dx \geq \sup_{x \in [a, b]} f^2(x)$$

□

**例 5.2.6**  $f(x), g(x)$  连续且单调递增, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \leq (b-a) \int_a^b f(x)g(x) dx$$

**证明** 类似 Chebyshev 不等式.

□

## § 5.3 广义积分

### 一、无穷积分和瑕积分的定义

(略)

**例 5.3.1** 求积分  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$

**解**

$$I_n = -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1}$$

又

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

因此  $I_n = n!$

我们令  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$

**例 5.3.2** 求积分  $I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$ .

解

$$\begin{aligned} I &\stackrel{x=2t}{=} 2 \int_0^{\pi/4} \ln 2 \sin t \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \left( \int_0^{\pi/4} \ln \sin x dx + \int_0^{\pi/4} \ln \cos x dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I \end{aligned}$$

因此  $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$

记住上述结论

**例 5.3.3** 求积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{1+x^\alpha} dx$ .

解

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \frac{1}{1+\frac{1}{t^\alpha}} d\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha} dx + \int_0^1 \frac{t^\alpha dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

## 二、广义积分敛散性的判别法

**定理 5.3.1** (比较判别法)  $f(x), \varphi(x) \geq 0$  在任意有限区间上 Riemann 可积, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = k \geq 0 \text{ 或 } +\infty$$

则

•  $k \in [0, +\infty)$ , 则  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  收敛  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛.



•  $k \in (0, +\infty]$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$  发散.

常用  $\varphi(x) = \frac{1}{x^p}$ , 是为 Cauchy 判别法.

**定理 5.3.2** (Abel-Dirichlet 判别法)  $f(x), \varphi(x) \geq 0$  在任意有限区间上 Riemann 可积, 一下条件成立之一时,  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  收敛

- (Abel)  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛,  $g(x)$  单调有界
- (Dirichlet)  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  有界,  $g(x)$  单调且收敛到 0

**证明** 由  $g(x)$  单调,

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx = g(A') \int_{A'}^{\xi} f(x)dx + g(A'') \int_{\xi}^{A''} f(x)dx$$

上述两个条件依次对应  $\int_{A'}^{A''} f(x)dx$  小和  $g(A)$  小, 再利用 Cauchy 收敛原理即可.  $\square$

## 第三部分 级数

### 第六章 数项级数

#### § 6.1 定义与基本性质

**定义 6.1.1**  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$  为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和序列.

**定理 6.1.1** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的必要条件为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**定理 6.1.2** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则在其求和表达式中任意添加括号所得级数任然收敛.

## § 6.2 正项级数

### 一、上下极限的定义与性质

**定义 6.2.1** 设  $\{x_n\}$  是一有界个数列,  $\xi \in \mathbb{R}$ . 如果存在  $\{x_n\}$  的一个子列  $\{x_{n_k}\}$  满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi,$$

则称  $\xi$  是  $\{x_n\}$  的一个极限点。将  $\{x_n\}$  一切极限点所组成的集合记作  $E$ .  $\sup E$  称为  $\{x_n\}$  的上极限, 记作  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .  $\inf E$  称为  $\{x_n\}$  的下极限, 记作  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**定理 6.2.1** 设  $x_n$  有界, 则

- 存在子列  $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ , 使得  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ;
- 存在子列  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**定理 6.2.2** 设  $x_n$  有界, 则

- $H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  的充要条件是: 对任意给定  $\varepsilon > 0$ 
  - 存在  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N : x_n < H + \varepsilon$ ;
  - 数列  $\{x_n\}$  中有无穷多项大于  $H - \varepsilon$ .
- $h = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  的充要条件是: 对任意给定  $\varepsilon > 0$ 
  - 存在  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N : x_n > h - \varepsilon$ ;
  - 数列  $\{x_n\}$  中有无穷多项小于  $h + \varepsilon$ .

**定理 6.2.3**  $\{x_n\}$  收敛的充要条件是  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**定理 6.2.4** 设  $\{x_n\}, \{y_n\}$  是两个数列, 则

$$\bullet \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

• 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**定理 6.2.5**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k.$

## 二、正项级数敛散性的判别法

**定理 6.2.6** 正项数列  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充要条件是其部分和序列是有界序列.

**定理 6.2.7 (比较判别法)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$  是正项级数, 且存在常数  $A > 0$ , 使得

$$x_n \leq A y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

• 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  收敛;

• 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  发散。

**定理 6.2.8 (比较判别法的极限形式)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$  是正项级数, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, +\infty).$$

• 若  $0 \leq l < +\infty$ , 则当  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  也收敛;

- 若  $0 < l \leq +\infty$  , 则当  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  也发散。

**定理 6.2.9 (Cauchy 判别法)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  是正项数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = r$  , 则:

- 如果  $r < 1$  , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  收敛;
- 如果  $r > 1$  , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  发散;
- 如果  $r = 1$  , 则无法判断。

**定理 6.2.10 (d'Alembert 判别法)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  是正项数列, 且  $x_n \neq 0$  , 则:

- 如果  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \bar{r} < 1$  , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  收敛;
- 如果  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \underline{r} > 1$  , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  发散;
- 如果  $\bar{r} \geq 1$  或  $\underline{r} \leq 1$  , 则无法判断。

**定理 6.2.11 (积分判别法)** 设  $f(x)$  是  $[a, +\infty)$  上的非负函数, 且在任意有限区间  $[a, A] \subset [a, +\infty)$  上 Riemann 可积。取一个严格单增的无穷大量  $\{a_n\}$  :

$$a = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots \rightarrow +\infty$$

令

$$u_n := \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx$$

则无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  同时收敛或同为  $+\infty$  .

特别地, 如果  $f(x)$  单减,  $a_n = n$  , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与  $\sum_{n=[a]+1}^{\infty} f(n)$  同时收敛或发散.

**例 6.2.1** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  在  $0 < p \leq 1$  时发散, 在  $p > 1$  时收敛.

## § 6.3 任意项级数

### 一、基本性质

**定义 6.3.1 (条件收敛和绝对收敛)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是任意项级数, 如果正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛。如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  发散, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛.

**定理 6.3.1** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 则其收敛.

### 二、Leibniz 判别法

**定义 6.3.2 (Leibniz 级数)** 设  $\{u_n\}_1^{\infty}$  是正项数列, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$  为交错级数。若  $u_n$  单减且收敛到 0, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$  为 Leibniz 级数.

**定理 6.3.2** Leibniz 级数收敛.

### 三、Abel 判别法与 Dirichlet 判别法

## 第四部分 度量空间与函数

### 第七章 度量空间

## § 7.1 度量空间的定义

### 一、度量空间、内积、范数

**定义 7.1.1 (度量空间)** 设  $X$  是一个集合, 如果定义在  $X \times X$  上的映射  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  满足

- 正定性:  $d(x, y) \geq 0$ , 且  $d(x, y) = 0$  当且仅当  $x = y$ ;
- 对称性:  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- 三角不等式:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

则称  $d$  为  $X$  上的一个度量,  $(X, d)$  为一个度量空间.

**定义 7.1.2 (内积)** 设  $X$  是一个实线性空间, 如果定义在  $X \times X$  上的映射  $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  满足

- 正定性:  $\langle x, x \rangle \geq 0$ , 且  $\langle x, x \rangle = 0$  当且仅当  $x = 0$ ;
- 对称性:  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ;
- 线性性:  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ,  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ .

则称  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  为  $X$  上的一个内积,  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  为一个内积空间.

**定义 7.1.3 (范数)** 设  $X$  是一个实线性空间, 如果定义在  $X$  上的映射  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  满足

- 正定性:  $\|x\| \geq 0$ , 且  $\|x\| = 0$  当且仅当  $x = 0$ ;
- 齐次性:  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ;
- 三角不等式:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

则称  $\|\cdot\|$  为  $X$  上的一个范数.

## 二、Euclid 空间

**定义 7.1.4 (Euclid 空间)** 设  $\mathbb{R}^n$  上定义内积

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

则称  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  为  $n$  维 Euclid 空间.

Euclid 空间是一个内积空间, 且其范数有多种定义:

- 1-范数:  $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ ;
- 2-范数:  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ ;
- $\infty$ -范数:  $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}$ .
- $p$ -范数:  $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ .

## § 7.2 度量空间的子集

### 一、聚点、内点、外点和边界点

**定义 7.2.1 (聚点)** 如果  $\forall \varepsilon > 0$ , 有  $A \cap \mathring{B}(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ , 则称  $x$  为  $A$  的一个聚点.

等价地有若存在  $\{x_n\} \in A$  且  $x_n \neq x$ , 成立  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

所有聚点构成的集合为  $A$  的导集, 记作  $A'$

**定义 7.2.2 (收敛序列)**  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  是度量空间  $X$  中的一个序列, 如果对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N > 0$ , 任意  $n > N$  有  $d(x_n, x) < \varepsilon$ , 则称  $x_n$  收敛到  $x$ .

**定义 7.2.3 (内点、外点和边界点)** 设  $(X, d)$  是一个度量空间,  $A \subset X$  是  $X$  的一个子集,  $x \in X$ .

- (1) (内点) 如果  $\exists \varepsilon > 0$ , 使得  $B(x, \varepsilon) \subset A$ , 则称  $x$  为  $A$  的一个内点. 集合  $A$  的一切内点所组成的集合称为  $A$  的内部, 记作  $A^\circ$ .
- (2) (外点) 如果  $\exists \varepsilon > 0$ , 使得  $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ , 则称  $x$  为  $A$  的一个外点.  $A$  的一切外点组成的集合为  $(A^c)^\circ$ .
- (3) (边界点) 如果  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  且  $B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ , 则称  $x \in X$  为  $A$

的一个边界点.  $A$  的所有边界点组成的集合记作  $\partial A$ .

显然,  $A$  的内点集合、外点集合和边界点集合的并集为整个空间  $X$ , 即

$$A^\circ \cup (A^c)^\circ \cup \partial A = X.$$

在  $\mathbb{R}^n$  的子集中,

- 内点必为聚点
- 外点必为非聚点

## 二、开集、闭集、邻域

**定义 7.2.4 (邻域)** 设  $(X, d)$  是一个度量空间,  $x \in X$ , 如果存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $B(x, \varepsilon)$ , 则称  $B(x, \varepsilon)$  为  $x$  的一个 (开) 邻域.

**定义 7.2.5 (开集)** 设  $(X, d)$  是一个度量空间,  $U \subset X$ , 如果对任意  $x \in U$ , 存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $B(x, \varepsilon) \subset U$ , 则称  $U$  为  $X$  中的一个开集.  
也即  $A = A^\circ$

**定义 7.2.6 (闭集)** 设  $(X, d)$  是一个度量空间,  $F \subset X$ , 如果  $X \setminus F$  是一个开集, 则称  $F$  为  $X$  中的一个闭集.  
也即  $A' \subseteq A$

我们称  $\overline{A} = A \cup A'$  为  $A$  的闭包.

**定理 7.2.1** 设  $(X, d)$  是一个度量空间. 以下命题等价:

- (1)  $A \subset X$  是一个闭集;
- (2)  $A = \overline{A}$ ;
- (3) 若序列  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$  收敛, 则其极限属于  $A$ ;
- (4)  $A^c$  是开集.



**定理 7.2.2** 任意个开集 (未必可数个) 的并是开集. 任意个闭集的交 (未必可数个) 是闭集. 有限个开集的交是开集. 有限个闭集的并是闭集.

**定理 7.2.3** 设  $(X, d)$  是一个度量空间,  $A \subset X$ . 则:

- (1)  $\bar{A}$  是包含  $A$  的最小闭集. 即:  $\bar{A}$  是闭集且对任意闭集  $K$ , 若  $A \subset K$ , 则必有  $\bar{A} \subset K$ ;
- (2)  $A^\circ$  是包含于  $A$  的最大开集. 即:  $A^\circ$  是开集且对任意开集  $U$ , 若  $U \subset A$ , 则必有  $U \subset A^\circ$ .

## § 7.3 度量空间的紧性

### 一、紧集

**定义 7.3.1** (有限覆盖) 设  $(X, d)$  是一个度量空间,  $A \subset X$ , 如果存在一族开集  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , 使得  $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ , 且  $I$  是有限集, 则称  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  是  $A$  的一个有限覆盖.

**定义 7.3.2** (紧集) 设  $(X, d)$  是一个度量空间,  $A \subset X$ , 如果对任意  $A$  的开覆盖  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , 都存在有限子覆盖  $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ , 使得  $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ , 则称  $A$  是一个紧集.

**定理 7.3.1** 紧集是有界集.

**证明** 任取  $x \in A$ ,  $\{B(x, n)\}_{n=1}^\infty$  构成  $A$  的开覆盖. 有有限子覆盖  $\{B(x, n_i)\}_{i=1}^k$ . 则  $A \subset \bigcup_{i=1}^k B(x, n_i) = B(x, n_k)$ , 故  $A$  有界. □

## 二、列紧集

**定义 7.3.3 (列紧集)** 如果  $A$  中的任意序列都有子列收敛到  $A$  中元素, 则称  $A$  是列紧集.

**定理 7.3.2** 紧集是列紧集.

**证明** 反证法, 设  $A$  是紧集但非列紧集. 设  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  是包含于  $A$  的一个序列, 没有任何子列收敛到  $A$  中的元素. 先证明以下引理:

**引理 7.3.1** 对任意  $x \in A$ , 存在  $\delta_x > 0$ , 使得  $B(x, \delta_x)$  仅含  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  中的有限项.

**引理的证明** 设引理为假, 则存在  $x \in A$ , 使得对任意  $\delta > 0$ ,  $B(x, \delta)$  含有  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  中的无限项. 于是, 取  $\delta = 1, 1/2, 1/3, \dots$ , 可以取  $x_{k_1} \in B(x, 1) \cap A$ ,  $x_{k_2} \in B(x, 1/2) \cap A$  ( $k_2 > k_1$ ),  $x_{k_3} \in B(x, 1/3) \cap A$  ( $k_3 > k_2$ ),  $\dots$  由此得到子列  $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$  收敛到  $x \in A$ . 与  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  没有任何子列收敛到  $A$  中的条件矛盾. 引理得证.

显然,  $\{B(x, \delta_x)\}_{x \in A}$  构成  $A$  的开覆盖. 且由  $A$  的紧致性, 必有有限子覆盖  $\{B(x_{k_i}, \delta_{x_{k_i}})\}_{i=1}^N$ . 由此,

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_{k_i}, \delta_{x_{k_i}})$$

只有有限项, 矛盾. □

**定理 7.3.3** 列紧集都是闭集. 故紧集都是有界闭集.

## § 7.4 度量空间的完备性

### 一、完备的定义

**定义 7.4.1 (Cauchy 列)** 略

**定义 7.4.2 (完备集的定义)** 如果度量空间  $(X, d)$  中的任意 Cauchy 序列收敛, 则称该度量空间为完备空间.

## 二、完备空间的性质

### 定理 7.4.1

- 度量空间中的列紧集完备.
- 完备空间中的闭集完备.

**定理 7.4.2 (闭集套定理)** 完备空间中的非空闭集列  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  构成套, 且  $A_n$  的直径  $\delta_n \rightarrow 0$ . 其中  $\delta_n = \sup_{x, y \in A_n} d(x, y)$ . 则存在唯一  $\xi \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**定义 7.4.3 (完全有界)**  $(X, d)$  度量空间,  $A \subseteq X$ , 若对  $\forall \varepsilon > 0, \exists x_1, \dots, x_n$  (依赖于  $\varepsilon$ ), 满足

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$$

则称  $A$  完全有界, 且称  $\{x_k\}_{k=1}^n$  为  $A$  的一个  $\varepsilon$ -网.

**例 7.4.1**  $A$  是完全有界集, 证明:

- $A$  的任意子集完全有界.
- $\bar{A}$  完全有界.

离散度量空间中的无限有界集不完全有界.

**定理 7.4.3 (紧性定理)**  $(X, d)$  完备度量空间,  $A \subseteq X$ , 下列命题等价:

- (1)  $A$  是紧集.
- (2)  $A$  是列紧集.
- (3)  $A$  是完全有界闭集.

## 证明

(1)  $\Rightarrow$  (2) 即为 定理7.3.2

(2)  $\Rightarrow$  (3) 反证. 无限取点 + 无收敛子列.

(3)  $\Rightarrow$  (1) 设  $A$  是完全有界的闭集。注意完全有界集合的子集必然完全有界。现使用反证法证明  $A$  是紧集。假设  $\Gamma$  是  $A$  的开覆盖，但不存在  $A$  的有限子覆盖。按完全有界的定义，取  $\varepsilon_1 = 1$ ，则能找到有限个点  $x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^{n_1}$ ，使得

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_1^i, 1).$$

在  $A \cap B(x_1^i, 1)$  中，必有一个集合不能被  $\Gamma$  有限覆盖，记作  $A_1$ 。因为  $A_1$  完全有界，故取  $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ ，能找到有限个点  $x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^{n_2}$ ，使得

$$A_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B\left(x_2^i, \frac{1}{2}\right).$$

在  $A_1 \cap B\left(x_2^i, \frac{1}{2}\right)$  中，必有一个集合不能被  $\Gamma$  有限覆盖，记作  $A_2$ 。以此类推，我们构造了一个闭集套  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，满足：

- (1)  $A_{n+1} \subset A_n$ ， $\forall n \in \mathbb{N}$ ；
- (2)  $A_n$  的直径不超过  $\frac{2}{n}$ ；
- (3) 每一个  $A_n$  不能被  $\Gamma$  有限覆盖。

由闭集套定理，存在唯一的  $\zeta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 。因为  $\zeta \in A$ ，而  $A$  被  $\Gamma$  覆盖，故存在  $\Gamma$  中的开集  $U$ ，使得  $\zeta \in U$ 。又按开集的定义，存在  $\delta > 0$ ，使得  $B(\zeta, \delta) \subset U$ 。取足够大的  $n$ ，使得  $\frac{2}{n} < \delta$ ，则有

$$A_n \subset B\left(\zeta, \frac{2}{n}\right) \subset U$$

这与  $A_n$  不能被  $\Gamma$  有限覆盖矛盾。因此， $A$  是紧集。

□

注：上面只有  $(3) \Rightarrow (1)$  使用了完备性！

## § 7.5 Euclid 空间的完备性