作业十四

noflowerzzk

2024.12.25

P38 T1

(1) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 不绝对收敛.

又 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ 收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 不条件收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x}$ 不收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 不绝对收敛.

由于 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+x} = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{n+1}}{n+x}$ 为 Lebniz 级数，条件收敛.

(3) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n}$, 设当 $n > N$ 时 $\sin\frac{x}{n} \geqslant \frac{2}{\pi}x$，则 $n_0 > N$ 时部分和 $\sum_{i=1}^{n} \left|\sin\frac{x}{i}\right| \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{x}{i} \geqslant \sum_{i=1}^{N} \sin\frac{x}{i} + \frac{2}{\pi}\sum_{i=N+1}^{n} \frac{x}{i}$ 无上界. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 不绝对收敛.

而 $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{x}{n} = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 为 Lebniz 级数，条件收敛.

(4) 由于 $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$, 不绝对收敛，不条件收敛.

(5) 由于 $\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln^2 i}{i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, 不绝对收敛.

又 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2 n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{n+1}{n}(\ln n + \ln(n+1)) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n + \ln(n+1)}{n} = 0$, $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln^2 n}{n}$ 是 Lebniz 级数，条件收敛.

(6) 由 $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}\right| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$ $(n = 6k+2$ 或$n = 6k+4)$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$ 不绝对收敛.

而 $S_{6n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i-1}}{2\sqrt{3i-2}} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^i}{2\sqrt{3i-1}} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^i}{\sqrt{3i}}$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$ 条件收敛.

(7) 当 $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ 时，$4\sin^2 x < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n}$ 收敛，原级数绝对收敛.

当 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 时，原级数即为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, 条件收敛.

当 $x \in \left(k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$ 时，$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n \sin^{2n} x}{n} = \infty$, 不收敛.

(8) - $x=\dfrac{k\pi}{2}$ 时，原式 $=0$, 绝对收敛.

- $x\neq\dfrac{k\pi}{2}, p>1$ 时，$\left|\dfrac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^p}$, 绝对收敛.

- $x\neq\dfrac{k\pi}{2}, p\in(0,1]$ 时，$\dfrac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}=\dfrac{\sin 2nx}{2n^p}+\dfrac{\sin 2x}{2n^p}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2x}{2n^p}$ 发散. 由于 $\dfrac{\sin 2nx}{2n^p}$ 中，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n^p}=0$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sin 2ix=\dfrac{1}{\cos x}\left(\sin(2n+1)x-\sin x\right)$ 有界，故由 Dirichlet 判别法，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx}{2n^p}$ 收敛，故原级数发散.

- $x\neq\dfrac{k\pi}{2}, p\leqslant 0$ 时，显然 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}\neq 0$, 不收敛.

P38 T2

(1)

$$
\begin{aligned}
S_{6n}-S_{3n} &= \sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k}\right)\\
&\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{3k-2}\\
&\geqslant \frac{1}{3}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k-1}\\
&\geqslant \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

由 Cauchy 收敛原理，该级数不收敛.

(2) 相似的，

$$
S_{6n}-S_{3n}\leqslant\frac{1}{6}
$$

由 Cauchy 收敛原理，该级数不收敛.

P39 T4

不成立. 反例 $x_n=\dfrac{1}{n}$

P39 T5

不一定.

去 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛. 取 $y_n=x_n+\dfrac{1}{n}$, 有 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=1$, 但 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 不收敛.

P39 T6

不一定. 取

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & 2\mid n\\ \dfrac{1}{n^2}, & 2\nmid n\end{cases}$$

P39 T7

是.

证明. 由 Lebniz 定理，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A>0$. 因此当 $n>N$ 时，$x_n>\dfrac{A}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n&\leqslant\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{1+x_i}\right)^i+\sum_{i=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{A}{2}}\right)^i\\&<\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{1+x_i}\right)^i+\sum_{i=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{A}{2}}\right)^N\end{aligned}$$

是收敛的. □

P39 T8

证明.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}}$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{i^{\alpha_0}}$ 有界，$\dfrac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}}$ 单调递减且趋近于 0, 由 D-A 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n}{n^\alpha}$ 收敛. □

P39 T9

证明.

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n-1}i(x_i-x_{i+1})+nx_n$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}i(x_i-x_{i+1})$, nx_n 均收敛，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 收敛. □

P39 T10

证明.

$$\sum_{i=m}^{n}x_iy_i=\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})\sum_{j=1}^{i}y_j+x_n\sum_{j=1}^{n}y_j$$

故对任意 $\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > m > N, \left|\sum_{i=m+1}^{n} y_i\right| < \varepsilon$, $x_n \leqslant M$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| = M_0$ 因此

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=m+1}^{n} x_i y_i\right| &= \left|\sum_{i=m+1}^{n} (x_i - x_{i+1}) \sum_{j=m+1}^{i} y_j + x_n \sum_{j=m+1}^{n} y_j\right| \\ &\leqslant (M_0 + M)\varepsilon\end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛准则，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 收敛. □

P39 T11

证明. 由 L'Hospital 定理，$f(0) = f'(0) = 0$. 又 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)$, 因此若 $f''(0) \neq 0$, $\lim_{n\to+\infty} \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \Big/ \left(\frac{1}{2}f''(0) \cdot \frac{1}{n^2}\right) = 1$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}f''(0)\frac{1}{n^2}$ 收敛，有比较判别法显然 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

又 $f''(0) = 0$, 显然成立. □

P39 T15

(1) 证明. 令 $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \cdot \frac{(-1)^n}{(n-i)!}$ 有

$$c_n = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = 0 \quad (n \geqslant 1)$$

$$c_0 = 1$$

因此 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$ □

(2) 证明. 令 $c_n = \sum_{i=0}^{n} q^i \cdot q_{n-i} = (n+1)q^n$, 则原式化为

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (n+1)q^n = \frac{1}{(q-1)^2}$$

□