

数模笔记

Noflowerzzk

目 录

第一部分 概率论	1	一、 χ^2 分布	3
		二、 t 分布 (学生氏分布) .	3
		三、 F 分布	4
		§ 2.3 正态总体的抽样分布 . . .	4
第一章 随机变量	1	第三章 参数估计	4
§ 1.1 随机变量的数值性质 . . .	1	§ 3.1 点估计	4
§ 1.2 大数定律	1	一、 矩估计	4
§ 1.3 中心极限定理	2	二、 极大似然估计	5
		§ 3.2 点估计的优良性判断标准	5
第二部分 数理统计	2	一、 无偏性	5
		二、 有效性	6
第二章 统计量	2	三、 相合性 (一致性) . . .	6
§ 2.1 无偏估计	2	§ 3.3 区间估计	6
一、 样本方差	2		
§ 2.2 三大分布	3	第三部分 数学建模	6

第一部分 概率论

第一章 随机变量

§ 1.1 随机变量的数值性质

定义 1.1.1

- 协方差 $\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$
- 相关系数/标准化协方差 $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$
- 变异系数 $\delta_X = \frac{\sqrt{D(X)}}{|E(X)|}$
- k 阶原点矩 $E(X^k)$
- k 阶中心矩 $E((X - E(X))^k)$

§ 1.2 大数定律

定理 1.2.1 (Chebyshev 不等式)

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

定义 1.2.1 (依概率收敛) $\exists c, \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - c| \leq \varepsilon) = 1$, 则称随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 c , 记作 $X_n \xrightarrow{P} c$

定理 1.2.2 (Chebyshev 大数定律) 随机变量序列 $\{X_n\}$ 两两不(线性)相关, 且 $D(X_i)$ 有一致上界 c (即 $D(X_i) < c$), 则有

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

定理 1.2.3 (相互独立同分布 (辛钦) 大数定律) $\{X_i\}$ 相互独立同分布, $E(X_i) = \mu$ 有限, 则

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$$

§ 1.3 中心极限定理

定理 1.3.1 (列维-林德伯格中心极限定理) $\{X_i\}$ 相互独立同分布, $D(X_i) = \sigma^2$ 有限, $E(X_i) = \mu$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \right) = \Phi(x)$$

即当 n 充分大时, 可以认为 $\sum_{i=1}^n X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$ 或者 $\bar{X} \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

第二部分 数理统计

第二章 统计量

§ 2.1 无偏估计

一、样本方差

定义 2.1.1 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是取自总体的一个样本, 称

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

为样本均值,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

为样本方差.

§ 2.2 三大分布

一、 χ^2 分布

定义 2.2.1 设 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 为相互独立的标准正态分布随机变量, 称随机变量 $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 记为 $Y \sim \chi^2(n)$.
 χ^2 分布的密度函数为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

定理 2.2.1 $Y \sim \chi^2(n)$ 有以下性质

- $E(Y) = n, D(Y) = 2n$
- 可加性, $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n), X, Y$ 相互独立, 则 $X + Y \sim \chi^2(m+n)$

二、 t 分布 (学生氏分布)

定义 2.2.2 设 X, Y 相互独立, $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$, 则称 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布.
 t 分布的密度函数为

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$t(n)$ 的密度函数与标准正态分布 $N(0, 1)$ 密度很相似, 它们都是关于原点对称, 单峰偶函数, 在 $x = 0$ 处达到极大. 但 $t(n)$ 的峰值低于 $N(0, 1)$ 的峰值, $t(n)$ 的密度函数尾部都要比 $N(0, 1)$ 的两侧尾部粗一些. 容易证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \Phi(x)$$

三、 F 分布

定义 2.2.3 设 X, Y 相互独立, $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$, 则称 $F = \frac{X/m}{Y/n}$ 服从 F 分布, 记为 $F \sim F(m, n)$ 其中 m 称为第一自由度, n 称为第二自由度.

$F(m, n)$ 分布的概率密度函数为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

定理 2.2.2 记 $F_\alpha(m, n)$ 为 F 分布的第 α 分位数 (即 $P(F \leq F_\alpha(m, n)) = \alpha$) 有性质:

$$F_\alpha(m, n) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n, m)}$$

§ 2.3 正态总体的抽样分布

暂时略.

第三章 参数估计

§ 3.1 点估计

一、矩估计

用样本原点矩估计总体原点矩.

设总体的 k 阶原点矩为 $\mu_k = E(X^k)$, 样本的 k 阶原点矩为 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$, 用 A_k 估计 μ_k , 对某个依赖 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 的分布参数 $\theta = \theta(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, 有 θ 的估计

$$\hat{\theta} = \theta(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

二、极大似然估计

定义设总体 X 有分布律 $P(X = x; \theta)$ 或密度函数 $f(x; \theta)$ (其中 θ 为一个未知参数或几个未知参数组成的向量 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$)，已知 $\theta \in \Theta$ ， Θ 是参数空间。 (x_1, x_2, \dots, x_n) 为取自总体 X 的一个样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的观测值，将样本的联合分布律或联合密度函数看成 θ 的函数，用 $L(\theta)$ 表示，又称为 θ 的似然函数，则似然函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i; \theta), \text{ 或 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta),$$

称满足关系式 $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$ 的解 $\hat{\theta}$ 为 θ 的极大似然估计量。

§ 3.2 点估计的优良性判断标准

一、无偏性

定义 3.2.1 设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 θ 的一个估计量， θ 取值的参数空间为 Θ ，若对任意的 $\theta \in \Theta$ ，有

$$E_{\theta}(\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \theta,$$

则称 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 θ 的一个无偏估计(量)，否则称为有偏估计(量)。如果有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\theta}(\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \theta,$$

则称 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 θ 的一个渐近无偏估计(量)。

估计量的无偏性是指，由估计量得到的估计值相对于未知参数真值来说，取某些样本观测值时偏大，取另一些样本观测值时偏小。反复将这个估计量使用多次，就平均来说其偏差为 0。如果估计量不具有无偏性，则无论使用多少次，其平均值也与真值有一定的距离，这个距离就是系统误差了。

二、有效性

定义 3.2.2 设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是 θ 的两个无偏估计, 若对任意的 $\theta \in \Theta$, 有 $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$, 且至少有一个 $\theta \in \Theta$ 使得上述不等式严格成立, 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

三、相合性 (一致性)

定义 3.2.3 设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 θ 的一个估计量, 若对 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) = 0,$$

则称估计量 $\hat{\theta}$ 具有相合性 (一致性), 即 $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$, 或称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的相合 (一致) 估计量.

相合性被视为对估计的一个很基本的要求, 如果一个估计量, 在样本量不断增大时, 它不能把被估参数估计到任意指定的精度内, 那么这个估计是不好的. 通常, 不满足相合性的估计一般不予考虑.

§ 3.3 区间估计

定义 3.3.1 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是取自总体 X 的一个样本, 总体 $X \sim f(x; \theta), \theta \in \Theta$ 未知, 对于 $\forall 0 < \alpha < 1$, 若统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) < \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{\theta}$, 使得

$$P(\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}) = 1 - \alpha, \theta \in \Theta,$$

则称 $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ 为 θ 的双侧 $1 - \alpha$ 置信区间, $\underline{\theta}, \bar{\theta}$ 分别称为 θ 的双侧 $1 - \alpha$ 置信区间的置信下限和置信上限, $1 - \alpha$ 为置信水平, 一旦样本有观测值 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 则称相应的 $[\underline{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n), \bar{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ 为置信区间的观测值.

第三部分 数学建模

证明: 当 $m < n$ 时,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)^m C_n^k = 0$$