

数分例题整理

目 录

第一部分 实数基本定理与极限 1

第一章 实数的定义 1

§ 1.1 自然数与其定义 1

一、自然数的定义 1

§ 1.2 实数的定义 1

§ 1.3 实数基本定理 1

第二章 数列极限与相关计算 2

§ 2.1 数列极限与相关计算 2

第三章 函数极限、连续相关定理 3

§ 3.1 函数极限 3

§ 3.2 连续函数与间断 3

第二部分 微分与积分 4

第四章 函数微分、导数相关定理 4

§ 4.1 导数基本性质与中值定理 4

一、中值定理 4

二、导函数的性质 5

§ 4.2 Taylor 公式 6

一、推导与证明 6

§ 4.3 凸函数与 Lipschitz 条件 9

一、凸函数与二阶导的关系 9

二、Lipschitz 条件 10

三、开区间上的凸函数 11

四、相关不等式 13

第五章 函数不定积分、定积分相关定理 14

§ 5.1 不定积分 14

一、计算计巧 15

二、一些例题 16

§ 5.2 定积分 16

一、定积分的定义与 Darboux 和 16

二、定积分存在的充要条件——Darboux 定理 16

三、定积分存在的充要条件——Lebesgue 判别法 17

四、积分中值定理与微积分基本定理 21

第一部分 实数基本定理与极限

第一章 实数的定义

§ 1.1 自然数与其定义

一、自然数的定义

定义 1.1.1 (Peano 公理) (略)

定义 1.1.2 (自然数加法与乘法) 自然数加法定义为映射 $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a + b = b + a$
- $a + 1 = S(a)$
- $a + S(b) = S(a + b)$

自然数的乘法定义为映射 $\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot 1 = a$
- $a \cdot S(b) = a + (a \cdot b)$

定义 1.1.3 (自然数的大小关系) $a < b$ 当且仅当存在 $c \in \mathbb{N}, b = a + c$.

§ 1.2 实数的定义

(略)

§ 1.3 实数基本定理

例 1.3.1 证明: \mathbb{R} 不可列.

证明 使用闭区间套定理.

反证法. 假设 \mathbb{R} 可列, 记 $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$.

(1) 取 $[a_1, b_1]$ 使得 $x_1 \notin [a_1, b_1]$.

(2) 三分 $[a_1, b_1]$ 得三个小区间, 三者必有其一不含 x_2 . 记为 $[a_2, b_2]$:

由此得到一个闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. 由闭区间套定理, $\exists \xi \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \xi \in [a_n, b_n]$.

但对 $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \notin [a_k, b_k]$, 所以 $x_k \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. 故 $\mathbb{R} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]\right) = \emptyset$, 矛盾!

第二章 数列极限与相关计算

§ 2.1 数列极限与相关计算

例 2.1.1 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明 令 $\sqrt[n]{n} = 1 + y_n$, 有

$$n = (1 + y_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} y_n.$$

故

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = |y_n| < \sqrt{\frac{2}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$, 则对 $n < N$ 有 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$

例 2.1.2 判断以下命题是否正确. 若正确, 给出证明; 若不正确, 给出反例:

数列 a_n 收敛的充要条件是, 对任意正数 p , 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$.

解 反例如下: 令 $a_n = \sqrt{n}$, 则 $\forall p > 0$

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

但显然该数列不收敛.

例 2.1.3 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{4n^2 + n}\pi)$.

解

$$\begin{aligned}\sin(\sqrt{4n^2 + n}\pi) &= \sin\left(\left(\sqrt{4n^2 + n} - 2n\right)\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2}\pi\right)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{4n^2 + n}\pi) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

第三章 函数极限、连续相关定理

§ 3.1 函数极限

定理 3.1.1 单调函数任意一点左右极限均存在

证明 不妨 $f(x)$ 在 (a, b) 上单增, 对任意 $x_0 \in (a, b)$, $\{f(x) | x \in (a, x_0)\}$ 有上确界 α .

对任意 $x \in (a, x_0)$, $f(x) \leq \alpha$, 但 $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in (a, x_0), f(x') > \alpha - \varepsilon$. 由 $f(x)$ 单调性, $\forall x \in (x', x_0), -\varepsilon < f(x) - \alpha \leq 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$.

右极限同理. □

§ 3.2 连续函数与间断

引理 3.2.1 (单调函数的不连续点) 单调函数的不连续点必然是跳跃间断点

证明 由定理 3.1.1 即得 □

定理 3.2.1 单调函数至多有可列个间断点

证明 由单调性及间断点的性质, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

由有理数的稠密性, 在每个间断点 x_0 的区间 (由单调性, 它们两两不交)

$\left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right)$, 必存在一个有理数, 用这个有理数代表这个区间. 则这些有理数与这些间断点一一对应.

因此间断点至多有可列个. \square

例 3.2.1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续函数. 定义 $L(f) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$. 证明: 若 $L(f)$ 非空, 则 $L(f)$ 是一个闭集. (闭集是包含所有聚点的集合)

解

第二部分 微分与积分

第四章 函数微分、导数相关定理

§ 4.1 导数基本性质与中值定理

一、中值定理

例 4.1.1 $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$, 其中 $a > 0$ 且 $f(a) = 0$. 证明: $\exists \xi \in (a, b), f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$.

解 令 $F(x) = (b-x)^a f(x)$, 易知 $F(x) \in C[a, b] \cap D(a, b), F(a) = F(b) = 0$, 由 Rolle 定理, $\exists \xi \in (a, b), F'(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$

用 Rolle 定理证明等式的基本方法:

- 将等号一端改写成只有零, 形成 $g(\xi) = 0$
- 求积分 $G(x) = \int g(x) dx$
- 验证 $G(x)$ 满足 Rolle 中值定理条件

例如上题, 化简为 $\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{a}{b-x} = 0$, 有 $G(x) = (b-x)^a f(x)$

例 4.1.2 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1), f'(1) = 1$, 求证: 存在 $\xi \in (0, 1), f''(\xi) = 2$.

解 $f''(x) - 2 = 0$, 有 $f'(x) - 2x = C_1$, 由条件 $f'(1) = 1$, 有 $C_1 = -1$, 化简有 $f'(x) - 2x + 1 = 0$, 故 $F(x) = f(x) - x^2 + x$. 下略.

例 4.1.3 证明 $2^x - x^2 = 1$ 有且仅有三个实根

解 有三个解证明略.

假设有四个解, 反复使用中值定理可以证明最后的导函数没有解.

例 4.1.4 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可微, 且 $f(0) = 0, |f'(x)| \leq p|f(x)|$, 证明 $f(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$

证明 先考虑 $x \in \left[0, \frac{1}{2p}\right]$ 的情形. $|f(x)|$ 在 $\left[0, \frac{1}{2p}\right]$ 的最大值为 $|f(x_0)| = M \geq 0$

$$M = |f(x) - f(0)| = |f'(\xi)x_0| \leq \frac{1}{2p} \cdot p|f(\xi)| \leq \frac{1}{2}M$$

因此 $M = 0$. 对其它区间同理归纳即可.

二、导函数的性质

定理 4.1.1 (导数的 Darboux 定理 (介值性)) $f(x)$ 可导且 $f'(a) \neq f'(b)$, 则对任意介于 $f'(a), f'(b)$ 之间的 r , 都存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $r = f'(\xi)$

两种证明方法

证明 不妨 $f'(a) < f'(b)$, 对任意 $r \in (f'(a), f'(b))$, 令 $F(x) = f(x) - rx$, 有 $F(a) < 0, F(b) > 0$. 故由极限保号性, 存在 $\delta > 0, \forall x \in (a, a + \delta), \frac{F(x) - F(a)}{x - a} < 0$, 即 $F(x) < F(a)$, $F(a)$ 不是最小值.

同理 $F(b)$ 也不是最小值. 因此最小值 $F(\xi)$ 在开区间 (a, b) 上取到, 由费马定理, $F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = r$. \square

证明 假设同上, 作函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & x \neq a \\ f'(a), & x = a \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}, & x \neq b \\ f'(b), & x = b \end{cases}$$

r 要么在 $F(a), F(b)$ 之间, 要么在 $G(a), G(b)$ 之间.

如果 r 在 $F(a), F(b)$ 之间, 由连续函数的介值定理, 存在 $x_0 \in (a, b), r = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}$ 再对 $F(x)$ 用 Lagrange 中值定理即可. r 在 $G(a), G(b)$ 之间同理. \square

§ 4.2 Taylor 公式

一、推导与证明

引理 4.2.1 若 $r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$, 则 $r(x) = o((x - x_0)^n) (x \rightarrow x_0)$.

证明 对 n 归纳.

当 $n = 1$ 时, $r(x) = r(x_0) + r'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0)$

假设当 $n \geq 1$ 有 $r^{(n)}(x) = o((x - x_0)^n)$ 成立.

则当 $n + 1$ 时, 由 Lagrange 中值定理,

$$r(x) = r(x_0) + r'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0) = r'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0)$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时,

$$r'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0) = o((x - x_0)^n) \cdot (x - x_0) = o((x - x_0)^{n+1})$$

由归纳原理, 原命题成立. \square

定理 4.2.1 (带 Lagrange 余项的泰勒公式) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 n 阶可导, 在 (a, b) 上

有 $n+1$ 阶导. 设 x_0 为 $[a, b]$ 内一点, 则对任意 $x \in [a, b]$ 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{(n+1)}$$

证明 令 $r(x) = f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$, 有 $r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$.

由 Cauchy 中值定理,

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{r(x) - r(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} \\ &= \frac{r'(\xi_1) - r'(x_0)}{(n+1)((\xi_1 - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n)} && \xi_1 \in (x_0, x) \text{ 或 } (x, x_0) \\ &= \frac{r''(\xi_2) - r''(x_0)}{(n+1) \cdot n \cdot ((\xi_2 - x_0)^{n-1} - (x_0 - x_0)^{n-1})} && \xi_2 \in (x_0, \xi_1) \text{ 或 } (\xi_1, x_0) \\ &= \cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{r^{(n)}(\xi_n)}{\xi_n - x_0} && \xi_n \in (x_0, \xi_{n-1}) \text{ 或 } (\xi_{n-1}, x_0) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} r^{(n+1)}(\xi) && \xi \in (x_0, \xi_n) \text{ 或 } (\xi_n, x_0) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \end{aligned}$$

因此 $r(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$ □

例 4.2.1 (Taylor 公式的应用套路) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, 证明:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

证明 由最值存在定理, $\exists x_0 \in [a, b], |f(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, 且 $f'(x_0) = 0$

把 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展开, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2, \quad \xi \text{ 在 } x, x_0 \text{ 之间}$$

代入 $x = a, x = b$ 有:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2 &= f(a) - f(x_0) - f'(x_0)(a-x_0) & a < \xi_1 < x_0 \\ \frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_0-b)^2 &= f(b) - f(x_0) - f'(x_0)(b-x_0) & x_0 < \xi_2 < b\end{aligned}$$

相加有

$$\begin{aligned}|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)| &= 2|f(x_0)| \left(\frac{1}{(a-x_0)^2} + \frac{1}{(b-x_0)^2} \right) \\ &\geq 2|f(x_0)| \left(\frac{(1+1)^3}{(a-x_0+x_0-b)^2} \right) \\ &= \frac{16}{(a-b)^2} |f(x_0)|\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| &\geq \frac{1}{2} (|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|) \\ &= \frac{8}{(a-b)^2} |f(x_0)| \\ &= \frac{8}{(a-b)^2} \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|\end{aligned}$$

即

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(a-b)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

□

例 4.2.2 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, $|f(x)| < k_0, |f''(x)| < k_1$, 证明:

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2k_0k_1}$$

证明 由 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2 \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2\end{aligned}$$

化简有:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{1}{4}(f''(\xi_2) - f''(\xi_1))h$$

因此

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h)| + |f(x-h)|}{2h} + \frac{1}{4} (|f''(\xi_2)| + |f''(\xi_1)|) h \leq \frac{k_0}{h} + \frac{h}{2} k_1 \quad \forall h > 0$$

因此

$$|f'(x)| \leq \min_{h \in (0, +\infty)} \left(\frac{k_0}{h} + \frac{h}{2} k_1 \right) = \sqrt{2k_0 k_1}$$

□

§ 4.3 凸函数与 Lipschitz 条件

一、凸函数与二阶导的关系

定义 4.3.1 (凸函数) 对某函数 $f(x)$ 定义域的任意区间 $[a, b]$ ，有任意 $\lambda \in [0, 1]$ ，满足

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则成 $f(x)$ 为其定义区间上的**下凸函数**

定理 4.3.1 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导，则 $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$ 是 $f(x)$ 在 I 上下凸的充要条件.

证明 充分性:

任取 $x_1, x_2 \in I$ ，不妨设 $x_1 < x_2$ 。任取 $\lambda \in (0, 1)$ ，根据 Lagrange 中值定理

$$\begin{aligned} & \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \\ &= -\lambda (f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - f(x_1)) + (1 - \lambda) (f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) \\ &= -\lambda f'(\xi_1) \cdot (1 - \lambda)(x_2 - x_1) + (1 - \lambda) f'(\xi_2) \cdot \lambda(x_2 - x_1) \\ & \quad (x_1 < \xi_1 < \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 < \xi_2 < x_2) \\ &= \lambda(1 - \lambda) f''(\xi)(x_2 - x_1)(\xi_2 - \xi_1) \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

必要性: 假设 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数，且处处二阶可导。取 $x_0 \in I$ ，则 $\forall \Delta x > 0$ ，

有

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{\Delta x^2} \geq 0 \quad \left(x_0 = \frac{1}{2}(x_0 - \Delta x) + \frac{1}{2}(x_0 + \Delta x) \right)$$

另一方面, 根据带 Peano 余项的 Taylor 公式,

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{\Delta x^2} \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} \left(f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + o(\Delta x^2) \right. \\ & \quad \left. + f(x_0) + f'(x_0)(-\Delta x) + \frac{1}{2}f''(x_0)(-\Delta x)^2 + o(\Delta x^2) - 2f(x_0) \right) \\ &= f''(x_0) + \frac{o(\Delta x^2)}{\Delta x^2} \quad (\Delta x \rightarrow 0) \\ &= f''(x_0) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

二、Lipschitz 条件

定义 4.3.2 (局部 Lipschitz 函数) 对任意 $x_0 \in D_f$, 存在邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 与常数 C (δ, C 均依赖于 x_0), 使得

$$\forall x, x' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_f : \quad |f(x) - f(x')| \leq C |x - x'|$$

则称 $f(x)$ 为**局部 Lipschitz 函数**.

定义 4.3.3 (Lipschitz 函数) 若存在常数 C , 使得

$$\forall x, x' \in D_f : \quad |f(x) - f(x')| \leq C |x - x'|$$

则称 $f(x)$ 为**Lipschitz 函数**.

又由限覆盖定理, 闭区间上的局部 Lipschitz 函数是 Lipschitz 函数.

定理 4.3.2 Lipschitz 函数是连续函数.

三、开区间上的凸函数

引理 4.3.1 $f(x)$ 是 (a, b) 上的下凸函数当且仅当任意 $(x_1, x_2) \subseteq (a, b)$, 任意 $x \in (x_1, x_2)$, 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

证明 由 $x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2$, 有

$$\begin{aligned} f(x) \text{ 是下凸函数} &\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2) \quad (\forall a < x_1 < x < x_2 < b) \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

另一边同理. □

引理 4.3.2 闭区间上的下凸函数有界.

证明 设闭区间 $[a, b]$, 任取 $x \in [a, b]$, $\exists \lambda \in (0, 1)$, $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, $f(x) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \leq \max\{f(a), f(b)\}$.

又将 $f(x)$ 连续延拓到 $[c, d] \supseteq [a, b]$ 上且保证其在 $[c, d]$ 上下凸, 有 $f(x)$ 在 $[c, d]$ 上有上界.

由于 $f(a) \leq \lambda_1 f(x) + (1 - \lambda_1)f(c)$, 有 $f(x) \geq \frac{1}{\lambda_1}f(a) - \left(\frac{1}{\lambda_1} - 1\right)f(c)$.

同理 $f(x) \geq \frac{1}{\lambda_2}f(b) - \left(\frac{1}{\lambda_2} - 1\right)f(d)$. 即 $f(x)$ 有下界. □

定理 4.3.3 开区间上的凸函数必为连续函数.

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 任意 $x_0 \in (a, b)$, 存在 $\delta > 0$, $[x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta] \subseteq (a, b)$.

任取 $x > y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x = \lambda(x_0 + 2\delta) + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in (0, 1)$.

由凸函数性质, $f(x) \leq \lambda f(x_0 + 2\delta) + (1 - \lambda)f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) \leq \lambda[f(x_0 + 2\delta) - f(y)]$.

由引理 3.3.2, $|f(x)| < M$, $\exists M > 0$. 故 $|f(y) - f(x)| \leq \lambda[f(x_0 + 2\delta) - f(y)] \leq 2\lambda M$.

又由 $x = \lambda(x_0 + 2\delta) + (1 - \lambda)y \Rightarrow |x - y| = \lambda(x_0 + 2\delta - y) > \lambda\delta$, 故 $2\lambda M < \frac{|x - y|}{\delta}$.
代入有 $|f(x) - f(y)| < \frac{|x - y|}{\delta}$, 满足 **局部 Lipschitz** 性质, 因此 $f(x)$ 连续. \square

定理 4.3.4 开区间上的凸函数必为 Lipschitz 函数.

例 4.3.1 设函数 $f(x)$ 是 (a, b) 上的下凸函数, 证明:

- (1) 在每个 $x \in (a, b)$, $f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 均存在, 且 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.
- (2) 若 $a < x_1 < x_2 < b$, 则有 $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$.
- (3) $f(x)$ 不可导的点至多有可列个.

证明

- (1) 取 $x_0 \in (a, b)$, 由引理 4.3.1, $\frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \geq \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2\Delta x)}{2\Delta x}$, 表明

$$F_-(\Delta x) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \text{ 关于 } \Delta x \text{ 单调递减.}$$

又取定 $x' > x_0$, $F_-(\Delta x) \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$, $F_-(\Delta x)$ 在 $\Delta x \rightarrow 0^+$ 时单调递增且有上界, 故极限存在, 即 $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} F_-(\Delta x)$ 存在. 同理 $f'_+(x_0)$ 也存在.

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \quad (\text{由引理 4.3.1})$$

- (2) 任取 $x \in (x_1, x_2)$,

$$\begin{aligned} \text{有 } f'_+(x_1) &= \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \leq \\ &\lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'_-(x_2) \end{aligned}$$

- (3) 由 (2) 知, 如果存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'_-(x_0) < f'_+(x_0)$, 则开区间 $(f'_-(x_0), f'_+(x_0))$ 中不含 $f'_-(x), f'_+(x), \forall x \in (a, b)$ 的所有值.

假设有两点 $x_1 < x_2$, 有 $f'_-(x_i) < f'_+(x_i), i \in \{1, 2\}$. 则易得 $f'_-(x_1) < f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) < f'_+(x_2)$.

由引理 3.2.1, 同理有这样的 x_0 有可列个.

四、相关不等式

定理 4.3.5 (Young 不等式) p, q 不等于 0 或 1, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对任意正数 a, b , 有

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad p > 1$$

$$ab \geq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad p < 1$$

证明 求导即可. □

定理 4.3.6 (Hölder 不等式) p, q 不等于 0 或 1, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对任意正数数列 $\{a_k\}_{k=1}^n, \{b_k\}_{k=1}^n$, 有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad p > 1$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad p < 1$$

证明 令 $A = \sum_{i=1}^n a_i^p, B = \sum_{i=1}^n b_i^q$

$p > 1$ 时, 对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 由 **Young 不等式**,

$$\frac{a_i b_i}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{A} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{B}$$

故

$$\frac{1}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

即

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

证明 (用 Jensen 不等式的证明) $p > 1$ 时, $f(x) = x^p$ 为下凸函数.

由于 $q = \frac{p}{p-1}$, 把 $x_i y_i$ 分解为

$$x_i y_i = y_i^q \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \cdot x_i y_i^{1-q} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)$$

注意到

$$\sum_{i=1}^n \left(y_i^q \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \right) = 1$$

由 Jensen 不等式,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^p &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left[y_i^q \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \cdot x_i y_i^{1-q} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right) \right] \right\}^p \\ &\leq \sum_{i=1}^n y_i^q \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \cdot x_i^p y_i^{p-pq} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^p \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{p-1} \end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

第五章 函数不定积分、定积分相关定理

§ 5.1 不定积分

(全是计算题)

一、计算计巧

例 5.1.1 (凑微分技巧)

- $\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = d(\sqrt{1+x^2})$
- $\int x^{2k+1} \sqrt{a+bx^2} dx \xrightarrow{t=\sqrt{a+bx^2}} \dots, (bx dx = t dt)$

例 5.1.2 (分部积分法则)

- $\int f(x) \ln g(x) dx = \int \ln g(x) dF(x)$
- $\int f(x) \arctan g(x) dx$ 分两种情况.
 - $f(x)$ 能凑微分, 则化为 $\int \arctan g(x) dF(x)$
 - $f(x)$ 不能凑微分, 则换元 $t = \arctan g(x)$

定理 5.1.1 (用于求分段函数积分)

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt$$

定理 5.1.2 (记不住就完了!)

•

$$\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\bullet I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

则

$$I_n = \begin{cases} \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C & n = 1 \\ \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} & n \geq 2 \end{cases}$$

二、一些例题

例 5.1.3 (正余弦齐次分式函数) 计算 $\int \frac{7 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x} dx$.

解 由于 $7 \sin x + \cos x = 3 \sin x + 4 \cos x - (3 \sin x + 4 \cos x)'$, 有

$$\int \frac{7 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x} dx = \int dx - \int \frac{d(3 \sin x + 4 \cos x)}{3 \sin x + 4 \cos x} = x - \ln |3 \sin x + 4 \cos x| + C$$

§ 5.2 定积分

一、定积分的定义与 Darboux 和

定义 5.2.1 (Riemann 和与定积分) (略)

定义 5.2.2 (Darboux 和) (略)

二、定积分存在的充要条件 —— Darboux 定理

引理 5.2.1 (Darboux 引理) 对于 $[a, b]$ 上的有界函数 $f(x)$, 成立

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \overline{S}(P) = \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \underline{S}(P) = \int_a^b f(x) dx.$$

确切地说, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意划分 P , 只要 $0 < \lambda(P) < \delta$, 则有

$$\left| \overline{S}(P) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon, \quad \left| \underline{S}(P) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

定理 5.2.1 (可积的充要条件, Darboux 定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 则以下命题等价:

1. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积;

2. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$;

$$3. \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0;$$

$$4. \text{ 存在一列划分 } \{P_l\}_{l=1}^{\infty}, \text{ 使得 } \lim_{l \rightarrow \infty} (\overline{S}(P_l) - \underline{S}(P_l)) = 0.$$

$$4'. \text{ 对任意 } \varepsilon > 0, \text{ 存在划分 } P, \text{ 使得 } \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \varepsilon.$$

最后, 若 $f(x)$ 可积, 则成立

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx} = \underline{\int_a^b f(x) dx}.$$

三、定积分存在的充要条件 —— Lebesgue 判别法

先给出一个较弱的定理

定理 5.2.2 闭区间上的连续函数可积.

证明 由一致连续性即得. □

定义 5.2.3 (区间的测度与零测集) 定义开、闭区间 $I = (a, b)$ 的长度 $|I| = b - a$. 设集合 $S \subseteq \mathbb{R}$. 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在至多可列个开区间 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{且} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon,$$

则称 S 是一个零测集。

例 5.2.1 证明: \mathbb{R} 中的可列集是零测集.

证明 设 $S \subset \mathbb{R}$ 是可列集, 记

$$S = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}.$$

任取 $\varepsilon > 0$, 对每个 n , 记

$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right).$$

则显然

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon.$$

所以, S 是零测集。

注: 如果在某区间上, 某数学性质在一个零测集之外均成立, 则称该区间上该性质几乎处处成立.

再给出一道相关例题

例 5.2.2 证明: 对任意有界函数 $f(x)$, $f(x)$ 可积当且仅当对任意 $\varepsilon, \sigma > 0$, 存在一划分 P , 使得

$$\sum_{\omega_i \geq \varepsilon} \omega_i \Delta x_i < \sigma$$

证明 $f(x)$ 可积等价于 $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p w_i \Delta x_i = 0$. 令 $\max_{x \in [a, b]} f(x) = M$, $\min_{x \in [a, b]} f(x) = m$

• 充分性:

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(p-1)}}$, $\sigma = \frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}$, $\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(p-1)}}$ 取分划 P 满足 $\lambda(P) < \delta$, 有

$$\sum_{i=1}^p w_i \Delta x_i = \sum_{w_i \geq \varepsilon_0} w_i \Delta x_i + \sum_{w_i < \varepsilon_0} w_i \Delta x_i < (p-1)(M-m)\sigma + (p-1)\varepsilon_0 \delta = \varepsilon$$

即 $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p w_i \Delta x_i = 0$, $f(x)$ 可积.

• 必要性:

取定 $\varepsilon_0 > 0$, 存在 $\sigma = \min\{b-a, \sqrt{\varepsilon_0}\}$, $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$. 假设对任意分划 P 满足

$\sum_{w_i \geq \varepsilon} \Delta x_i \geq \sigma$, 有

$$\sum_{i=1}^p w_i \Delta x_i = \sum_{w_i \geq \varepsilon_0} w_i \Delta x_i + \sum_{w_i < \varepsilon_0} w_i \Delta x_i \geq \varepsilon \sigma + 0 = \varepsilon_0$$

表明 $f(x)$ 不可积, 矛盾! 因此对任意 $\varepsilon > 0, \sigma > 0$, 存在划分 P , $\sum_{w_i \geq \varepsilon} \Delta x_i < \sigma$

定理 5.2.3 (Lebesgue 判别法) $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充要条件是 $f(x)$ 的间断点集是一个可列集. ($f(x)$ 几乎处处连续)

证明 首先我们定义符号: 对于任意 $x \in D_f$,

$$\omega_f(x, \varepsilon) := \sup_{x_1, x_2 \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)} |f(x_1) - f(x_2)|$$

以及由于 $\omega_f(x, \varepsilon)$ 关于 ε 单增由下界, 由单调有界定理, 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 的极限存在. 因此定义

$$\omega_f(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \omega_f(x, \varepsilon)$$

因此我们易得如下引理:

引理 5.2.2 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续当且仅当 $\omega_f(x_0) = 0$.

充分性:

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 记 $|f(x)| \leq M$.

设 $K \subseteq [a, b]$ 是 $f(x)$ 所有间断点的集合, 则 K 为零测集.

任取 $\varepsilon > 0$. 则由零测集的定义, 存在至多可列个开区间 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

另一方面, 对任意 $x \in [a, b] \setminus K$, 由于 x 是连续点, 所以有

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(x, \delta) = 0.$$

由极限的定义, 存在 $\delta_x > 0$, 使得

$$\omega_f(x, 2\delta_x) := \sup_{x', x'' \in (x-2\delta_x, x+2\delta_x) \cap [a, b]} |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

显然, $\{(x - \delta_x, x + \delta_x)\}_{x \in [a, b] \setminus K} \cup \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 因为它分别地覆盖了 $[a, b] \setminus K$ 与 K 中的每一个点. 根据有限覆盖定理, 它有有限子覆盖, 记为

$$[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^N (y_j - \delta_{y_j}, y_j + \delta_{y_j}) \cup \bigcup_{l=1}^M I_{k_l}.$$

该子覆盖中所有开区间的端点构成了 $[a, b]$ 的一个划分 $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ($[a, b]$ 之外的端点忽略). 该划分所决定的小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 可以分为两类:

- I. (x_{i-1}, x_i) 包含于某个 I_{k_l} . 则所有这类小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度之和不超所有 I_{k_l} 的长度之和, 从而小于 $\frac{\varepsilon}{4M}$. 记这些 i 构成的集合为 Λ_1
- II. (x_{i-1}, x_i) 不包含于任何 I_{k_l} . 根据覆盖关系, 可以通过左端点 x_{i-1} 的位置讨论 $[x_{i-1}, x_i]$ 的位置:
 - x_{i-1} 属于某个 I_{k_l} . 由于 x_i 是一切 x_{i-1} 右侧端点中距离 x_{i-1} 最近的那一个, 所以它不比 I_{k_l} 的右端点更靠右. 此时 $(x_{i-1}, x_i) \subset I_{k_l}$. 因此该情形不会发生.
 - x_{i-1} 不属于任意 I_{k_l} , 根据覆盖, 它必属于某个 $(y_j - \delta_{y_j}, y_j + \delta_{y_j})$. 利用类似于上一种情形的讨论, 必有

$$(x_{i-1}, x_i) \subset (y_j - \delta_{y_j}, y_j + \delta_{y_j}).$$

从而

$$[x_{i-1}, x_i] \subset (y_j - 2\delta_{y_j}, y_j + 2\delta_{y_j}).$$

可见, 第二类区间上函数的振幅小于 $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 记这些 i 构成的集合为 Λ_2

最后, 对于该划分 P

$$S(P) - S(P) = \sum_{i \in \Lambda_1} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i \in \Lambda_2} \omega_i \Delta x_i < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

必要性:

先证明一个引理:

引理 5.2.3 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则对任意 $\sigma > 0$, 集合

$$\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > \sigma\}$$

是零测集.

由 **例题 5.2.2** 立得.

注意到

$$\begin{aligned} x \in \{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\} &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \omega_f(x) > \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > \frac{1}{n} \right\} \end{aligned}$$

因此

$$\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

即 $\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\}$ 是可列集. □

例 5.2.3 闭区间上的单调有界函数可积.

证明 由 **定理 3.2.1** 立得.

四、积分中值定理与微积分基本定理

定理 5.2.4 (积分第一中值定理) 设 $f(x), g(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 且 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号. 记 $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, 则存在 $\eta \in [m, M]$, 使得.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \eta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

特别地, 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in [a, b]$,

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

定义 5.2.4 有界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则对任意 $x \in [a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 为 f 的变上限积分.

关于 $F(x)$ 有性质:

定理 5.2.5

- $F(x)$ 有 Lipschitz 性质.
- 若 $f(x)$ 连续, $F(x)$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$

证明

- 由 $|f(x)| \leq M$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \int_x^y f(x) dx \right| \\ &\leq \int_x^y |f(x)| dx \\ &\leq \int_x^y M dx = M |y - x| \end{aligned}$$

即证.

- 考虑 $x_0 \in (a, b)$ 的情形. 任取 $\varepsilon > 0$. 根据 $f(x)$ 在 x_0 的连续性, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

对任意 Δx , 根据定积分的区间可加性与第一中值定理:

$$\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt = f(\xi),$$

其中 $\xi \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ 或 $\xi \in [x_0 + \Delta x, x_0]$. 所以, 只要 $0 < |\Delta x| < \delta$, 就有

$$\left| \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| = |f(\xi) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

由定义

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

□

定理 5.2.6 (微积分第一基本定理) 若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 则其变上限积分 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

定理 5.2.7 (微积分第二基本定理, Newton-Leibniz 公式) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

定理 ??可以加强为:

定理 5.2.8 设函数 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导。函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且有 $F'(x) = f(x), x \in (a, b)$ 。那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$