下作业六

Noflowerzzk

2025.3.27

P93 T1

(7) 为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(x-1)^n$, 收敛半径为 $R=2$. 又当 $x=-1$ 和 $x=3$ 时级数发散。故收敛域为 $(-1,3)$.

(8) $\displaystyle(1+x)\ln(1-x)=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}x^n=-x-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)x^n$. 收敛半径 $x=1$. 又检验 $x\pm 1$ 有收敛域为 $[-1,1)$

(9) $\displaystyle\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$. 收敛域为 $(-1,1)$.

(10) $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)x^n$. 显然 x^n 的系数有界，故收敛半径为 1. 检验得收敛域为 $(-1,1)$.

P94 T2

(1)

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\sin x}&=\frac{x}{x-\frac{1}{6}x^3+\cdots}=\frac{1}{1-\frac{1}{6}x^2+\cdots}\\
&=1+\left(1-\frac{1}{6}x^2+\cdots\right)+\left(1-\frac{1}{6}x^2+\cdots\right)^2+\cdots\\
&=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\sin x}&=1+\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\cdots\\
&=1+\left(x+\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^2+\cdots\\
&=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots
\end{aligned}
$$

(3)

$$\begin{aligned}\ln\cos x &= -(1-\cos x)-\frac{1}{2}(1-\cos x)^2+\cdots &(1)\\ &= \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)^2+\cdots &(2)\\ &= -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+\cdots &(3)\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \sqrt{1+2(x+x^2+\cdots)} &(4)\\ &= 1+(x+x^2+x^3+\cdots)+\frac{1}{2}(x+x^2+x^3+\cdots)^2+\cdots &(5)\\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4+\cdots &(6)\end{aligned}$$

P94 T4

证明. 由于 $\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n!}\right)$. 两边求导有 $\frac{(x-1)\mathrm{e}^x+1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$ 代入 $x=1$ 即证. □

P94 T5

(1) 显然由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{1}t^{n-1}=\frac{1}{1+t}$. 逐项积分两次有 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}=(1+x)\ln(1+x)-x$ 即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(n+1)x^n=\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x+1)-1$. 带入 $x=\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2$ 即有原式为 $2\frac{x^2+4}{(x+2)^2}\ln\frac{2(x^2+4)}{(x-2)^2}-1, x\leq 0$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{x}\right)=\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}$, $x\in(-1,1)$.

P94 T6

设 $a_n=c+(n-1)d$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{b^n}+d\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}=\frac{c}{b-1}+d\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}$. 又根据逐项积分定理有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}=\frac{1}{(b-1)^2}$，故原式为 $\frac{c}{b-1}+\frac{d}{(b-1)^2}$

P94 T7

由于 $\frac{\ln x}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\ln x$. 故 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x\mathrm{d}x=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 得原式为 $-\frac{\pi^2}{8}$