线代例题整理

目　录

第一章 定义和关键性质

§ 1.1 矩阵相关运算

一、矩阵的转置、伴随、迹、行列式、秩

- 对加法：
  - $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$
  - $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})+\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$
- 对乘法：
  - $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{T}=\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{A}^{T}$
  - $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{*}=\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{A}^{*}$
  - $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
  - $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$
  - $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$
  - $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})$
  - $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times s}$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-n\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\leqslant\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$
- 组合：
  - $\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=|\boldsymbol{A}|$
  - $|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{*}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^{*}}{|\boldsymbol{A}|}$
  - $|\boldsymbol{A}^{*}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$
  - $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$
  - $(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\,\boldsymbol{A}$

二、分块矩阵

- 分块对角阵：
  - $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1\ \boldsymbol{A}_2\ \cdots\ \boldsymbol{A}_n) \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1^{-1}\ \boldsymbol{A}_2^{-1}\ \cdots\ \boldsymbol{A}_n^{-1})$
  - $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_n & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$
  - $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{pmatrix}$$

- 分块矩阵的秩：
  - $\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$
  - $\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$
  - $\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$

三、线性相关与极大线性无关组

- 线性相关：
  - $\boldsymbol{\alpha}$ **线性相关** $\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$
  - 向量组里有 $\mathbf{0}$, 则必然 **线性相关**
  - 两个向量 **线性相关** $\Leftrightarrow$ 二者对应成比例
  - 部分 **线性相关** $\Rightarrow$ 整体 **线性相关**; 整体 **线性无关** $\Rightarrow$ 部分 **线性无关**
  - $(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)<n \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n$ **线性相关**

    $(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)=n \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n$ **线性无关**

– n 个 m 维向量，$m < n$ 时 **线性相关**

线性无关的 m 维向量最多有 n 个

– $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ \boldsymbol{\beta}_i \end{pmatrix}$ **线性相关** $\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_i$ **线性相关**

$\boldsymbol{\alpha}_i$ **线性无关** $\Rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ \boldsymbol{\beta}_i \end{pmatrix}$ **线性无关**

第二章 例题们

dfdf $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}\Omega$ $R_1 = 2\Omega$

$$
\begin{cases}
+i_a & -i_{CF} & -i_{CD} & & & & & = 0 \\
+i_a & & & -i_3 & -i_{ED} & & & = 0 \\
& & & & +i_{ED} & -i_{FE} & -i_c & = 0 \\
& +i_{CF} & & & & -i_{FE} & -i_c & = 0 \\
(R_1 + R_2)i_a & & & R_3 i_3 & & & & = u_s \\
& -R_4 i_{CF} & & R_3 i_3 & & -R_5 i_{FE} & & = 0 \\
& & & & & R_5 i_{FE} & (R_6 + R_7)i_c & = 0
\end{cases}
$$