作业二

noflowerzzk

2025.02.27

P114 T2

令 $t = \dfrac{y}{x} \in \mathbb{R}$, 有

$$f(t) = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

故 $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

P114 T4

(1) 由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0);y=0} f(x,y) = 1$ 而 $\lim\limits_{(x,y)\to 0;x=0} f(x,y) = -1$, 故极限不存在.

(2) 由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0);y=0} f(x,y) = 0$ 而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0);y=x} = \dfrac{1}{2}$, 故极限不存在.

(3) 由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0);y=1} f(x,y) = 0$ 而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0);0<y<x^2} f(x,y) = 1$, 故极限不存在.

(4) 极限存在. 因为 $\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{8} > 1$. 且极限为 0.

P114 T7

(1)

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2} = \frac{1-0}{0+1} = 1$$

(3)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{xy} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t} = \frac{1}{2}$$

(5)

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(x^2+\mathrm{e}^{y^2}\right)}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+\mathrm{e}^{y^2}-1}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=\infty\end{aligned}$$

P115 T11

证明. $x \neq y$ 时，由 Lagrange 中值定理，有存在 ξ 在 x, y 之间，

$$F(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)\to f'(c).$$

$x=y$ 时，

$$F(x,y)=f'(x)\to f'(c)$$

□

补充题 1

证明. 设集合 $A \subseteq X$ 是度量空间 (X, d) 的一个子集，且存在有限个点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 构成 A 的一个 ε-网.

我们证明，$\{x_k\}_{k=1}^n$ 是 $\overline{A}$ 的一个 2ε-网.

$\forall y \in \overline{A}, \exists a \in A, d(a,y) < \varepsilon$. 同时，$\exists x_i \in A, a \in B(x_i, \varepsilon)$, 即 $d(a, x_i) < \varepsilon$. 故由三角不等式，$d(x_i, y) < 2\varepsilon$.

因此 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 是 $\overline{A}$ 的一个 2ε-网. □

补充题 2

证明. 反证法. 假设存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是 Cauchy 列但其不收敛到 X 中.

由 Cauchy 列的定义，对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$，任意 $m, n > N, d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$. 故取 $A = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$，$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}$，$\{x_1, \cdots, x_N\}$ 是 A 的一个 ε-网. 故由补充题 1，有 $\{x_1, \cdots, x_N\}$ 也是 $\overline{A}$ 的一个 2ε-网. 也即 $\overline{A}$ 是 X 中的完全有界闭集，其为列紧集.

因此 $\overline{A}$ 有收敛子列，收敛到 $x \in \overline{A}$. 由收敛的定义易推出原 Cauchy 列一定也收敛到 $\overline{A} \subseteq X$, 矛盾！

因此原集合为完备集. □