作业十三

Noflowerzzk

2025.5.16

P264 T4

(5) 由对称性

$$\iint_\Sigma x^2\,\mathrm{d}S = \iint_\Sigma y^2\,\mathrm{d}S = \iint_\Sigma z^2\,\mathrm{d}S$$

，又由于

$$\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S = \iint_\Sigma a^2\,\mathrm{d}S = 4\pi a^4$$

，

$$\iint_\Sigma \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)\,\mathrm{d}S = \frac{13}{12}\iint_\Sigma x^2\,\mathrm{d}S = \frac{13}{9}\pi a^4$$

。

(6) 有

$$\iint_\Sigma x^3\,\mathrm{d}S = 0$$

，

$$\iint_\Sigma y^2\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\iint_\Sigma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

，又

$$\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\iint_\Sigma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

，

$$\iint_\Sigma (x^3+y^2+z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_{xy}} (x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4 \sqrt{1+r^2}r^3\,\mathrm{d}r = \pi\int_0^4 \left[(1+r^2)^{\frac{3}{2}} - (1+r^2)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}(1+r^2)$$

$$= \frac{1564\sqrt{17}+4}{15}\pi$$

。

(7) 由

$$x'_u = \cos v,\quad y'_u = \sin v,\quad z'_u = 0,\quad x'_v = -u\sin v,\quad y'_v = u\cos v,\quad z'_v = 1$$

，有

$$E = 1,\quad G = 1+u^2,\quad F = 0$$

。

故

$$\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S = \iint_{D} v\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} v\,\mathrm{d}v \int_0^a \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= \pi^2\left[a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right]$$

。

T5

$S(R)=2\pi R^2\left(1-\dfrac{R}{2a}\right)$. 求导即得当 $R=\dfrac{4}{3}a$ 是面积最大为 $\dfrac{32}{27}\pi a^2$

T7

计算得 $F=-\pi\dfrac{Ga}{b^2}\displaystyle\int_{|a-b|}^{a+b}\dfrac{b^2-a^2+t^2}{t^2}\mathrm{d}t$. 当 $b<a$, $F=0$, 当 $b>a$ 时，$F=-\dfrac{4\pi Ga^2}{b^2}$

P275 T4

(6) 由对称性，$\displaystyle\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z=0$, 故原式 $=-\dfrac{\pi}{2}\left(h^4+10h^2\right)$

(7)

$$\iint_{\Sigma_1}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{z^2+x^2}}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint_{D_{1x}}\frac{e^{\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{z^2+x^2}}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}}e^r\,\mathrm{d}r=-2\pi(e^{\sqrt{2}}-e),$$

$$\iint_{\Sigma_2}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{z^2+x^2}}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint_{D_{2x}}\frac{e}{\sqrt{z^2+x^2}}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 e\,\mathrm{d}r=-2e\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_3}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{z^2+x^2}}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{3x}}\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{z^2+x^2}}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}r=2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\pi,$$

所以

$$\iint_{\Sigma}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{z^2+x^2}}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)\pi.$$

(8) $\displaystyle\iint_{\Sigma}=\frac{4\pi ab}{c}$, 由对称性，原式 $=\dfrac{4\pi}{abc}\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$

(9) $\displaystyle\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\pi cR^2$, 故原式 $=\dfrac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$