数分例题整理

目 录

第一部分　实数基本定理与极限

第一章　实数的定义

§ 1.1 自然数与其定义

一、自然数的定义

定义 1.1.1 (Peano 公理)　(略)

定义 1.1.2 (自然数加法与乘法)　**自然数加法**定义为映射 $+:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a+b=b+a$
- $a+1=S(a)$
- $a+S(b)=S(a+b)$

自然数的乘法定义为映射 $\cdot:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a\cdot b=b\cdot a$
- $a\cdot 1=a$
- $a\cdot S(b)=a+(a\cdot b)$

定义 1.1.3 (自然数的大小关系)　$a<b$ 当且仅当存在 $c\in\mathbb{N}, b=a+c$.

§ 1.2 实数的定义

(略)

§ 1.3 实数基本定理

例 1.3.1 证明: $\mathbb{R}$ 不可列.

证明 使用闭区间套定理.

反证法. 假设 $\mathbb{R}$ 可列, 记 $\mathbb{R}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$.

(1) 取 $[a_1,b_1]$ 使得 $x_1\notin[a_1,b_1]$.

(2) 三分 $[a_1,b_1]$ 得三个小区间, 三者必有其一不含 x_2. 记为 $[a_2,b_2]$ ⋮

由此得到一个闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. 由闭区间套定理, $\exists\xi\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\xi\in[a_n,b_n]$.

但对 $\forall k\in\mathbb{N},x_k\notin[a_k,b_k]$, 所以 $x_k\notin\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 故 $\mathbb{R}\cap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\right)=\varnothing$, 矛盾!

第二章 数列极限与相关计算

§ 2.1 数列极限与相关计算

例 2.1.1 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明 令 $\sqrt[n]{n}=1+y_n$, 有

$$n=(1+y_n)^n>1+\frac{n(n-1)}{2}y_n.$$

故

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=|y_n|<\sqrt{\frac{2}{n}},\forall n\in\mathbb{N}.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+1$, 则对 $n<N$ 有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$

例 2.1.2 判断以下命题是否正确. 若正确, 给出证明; 若不正确, 给出反例:

数列 a_n 收敛的充要条件是，对任意正正数 p, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-a_{n+p}|=0$.

解 反例如下: 令 $a_n=\sqrt{n}$, 则 $\forall p>0$

$$|a_{n+p}-a_n|=\frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}\to 0,$$

但显然该数列不收敛.

例 2.1.3 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\sqrt{4n^2+n}\pi\right)$.

解

$$\begin{aligned}\sin\left(\sqrt{4n^2+n}\pi\right) &= \sin\left(\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)\pi\right)\\ &= \sin\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\pi\right)\\ &= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}\pi\right)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\sqrt{4n^2+n}\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

第三章 函数极限、连续相关定理

§ 3.1 函数极限

定理 3.1.1 单调函数任意一点左右极限均存在

证明 不妨 $f(x)$ 在 (a,b) 上单增，对任意 $x_0\in(a,b)$, $\{f(x)|x\in(a,x_0)\}$ 有上确界 α.

对任意 $x\in(a,x_0)$, $f(x)\leqslant\alpha$, 但 $\forall\varepsilon>0,\exists x'\in(a,x_0)$, $f(x')>\alpha$. 由 $f(x)$ 单调性，$\forall x\in(x',x_0)$, $-\varepsilon<f(x')\leqslant f(x)-\alpha\leqslant 0$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\alpha$.

右极限同理. □

§ 3.2 连续函数与间断

引理 3.2.1 (单调函数的不连续点) 单调函数的不连续点必然是跳跃间断点

证明 由**定理**3.1.1即得 □

定理 3.2.1 单调函数至多有可列个间断点

证明 由单调性及间断点的性质，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) < f(x_0) < \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.
由有理数的稠密性，在每个间断点 x_0 的区间（由单调性，它们两两不交）$\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right)$, 必存在一个有理数，用这个有理数代表这个区间. 则这些有理数与这些间断点一一对应.
因此间断点至多有可列个. □

例 3.2.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数. 定义 $L(f) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$. 证明：若 $L(f)$ 非空，则 $L(f)$ 是一个闭集. （闭集是包含所有聚点的集合）
解

第二部分　微分与积分

第四章　函数微分、导数相关定理

§ 4.1 导数基本性质与中值定理

§ 4.2 Taylor 公式

一、推导与证明

引理 4.2.1 若 $r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$，则 $r(x) = o((x - x_0)^n)$ $(x \to x_0)$.

证明　对 n 归纳.
当 $n=1$ 时，$r(x)=r(x_0)+r'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)=o(x-x_0)$
假设当 $n\geqslant 1$ 有 $r^{(n)}(x)=o((x-x_0)^n)$ 成立.
则当 $n+1$ 时，由 Lagrange 中值定理，

$$r(x)=r(x_0)+r'(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)=r'(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)$$

当 $x\to x_0$ 时，

$$r'(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)=o((x-x_0)^n)\cdot(x-x_0)=o((x-x_0)^{n+1})$$

由归纳原理，原命题成立. □

定理 4.2.1 (带 Lagrange 余项的泰勒公式)　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 n 阶可导，在 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导. 设 x_0 为 $[a,b]$ 内一点，则对任意 $x\in[a,b]$ 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned}f(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\\&\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^{(n+1)}\end{aligned}$$

证明 令 $r(x)=f(x)-f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$, 有 $r(x_0)=r'(x_0)=r''(x_0)=\cdots=r^{(n)}(x_0)=0$.
由 Cauchy 中值定理，

$$\begin{aligned}
\frac{r(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{r(x)-r(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} \\
&= \frac{r'(\xi_1)-r'(x_0)}{(n+1)((\xi_1-x_0)^n-(x_0-x_0)^n)} && \xi_1\in(x_0,x)\text{或}(x,x_0) \\
&= \frac{r''(\xi_2)-r''(x_0)}{(n+1)\cdot n\cdot((\xi-x_0)^{(n-1)}-(x_0-x_0)^{(n-1)})} && \xi_1\in(x_0,\xi_1)\text{或}(x,\xi_1) \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{r^{(n)}(\xi_n)}{\xi_n-x_0} && \xi_n\in(x_0,\xi_{n-1})\text{或}(\xi_{n-1},x_0) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}r^{(n+1)}(\xi) && \xi\in(x_0,\xi_n)\text{或}(\xi_n,x_0) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)
\end{aligned}$$

因此 $r(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ □

§ 4.3 凸函数与 Lipschitz 条件

一、凸函数与二阶导的关系

定义 4.3.1 (凸函数) 对某函数 $f(x)$ 定义域的任意区间 $[a,b]$，有任意 $\lambda\in[0,1]$, 满足

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

则成 $f(x)$ 为其定义区间上的**下凸函数**

定理 4.3.1 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导，则 $\forall x\in I, f''(x)\geqslant 0$ 是 $f(x)$ 在 I 上下凸的充要条件.

证明 充分性:

任取 $x_1, x_2 \in I$，不妨设 $x_1 < x_2$。任取 $\lambda \in (0,1)$，根据 Lagrange 中值定理

$$\begin{aligned}
&\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \\
=& -\lambda\left(f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - f(x_1)\right) + (1-\lambda)\left(f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\right) \\
=& -\lambda f'(\xi_1)\cdot(1-\lambda)(x_2 - x_1) + (1-\lambda) f'(\xi_2)\cdot\lambda(x_2 - x_1) \\
&\qquad (x_1 < \xi_1 < \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 < \xi_2 < x_2) \\
=& \lambda(1-\lambda) f''(\xi)(x_2 - x_1)(\xi_2 - \xi_1) \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2) \\
\geqslant& 0
\end{aligned}$$

必要性: 假设 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数，且处处二阶可导。取 $x_0 \in I$，则 $\forall \Delta x > 0$，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{\Delta x^2} \geq 0 \qquad \left(x_0 = \frac{1}{2}(x_0 - \Delta x) + \frac{1}{2}(x_0 + \Delta x)\right)$$

另一方面，根据带 Peano 余项的 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_0+\Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{\Delta x^2} \\
=& \frac{1}{\Delta x^2}\Bigg(f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0)\Delta x^2 + o(\Delta x^2) \\
&\quad + f(x_0) + f'(x_0)(-\Delta x) + \frac{1}{2} f''(x_0)(-\Delta x)^2 + o(\Delta x^2) - 2f(x_0)\Bigg) \\
=& f''(x_0) + \frac{o(\Delta x^2)}{\Delta x^2} \quad (\Delta x \to 0) \\
=& f(x_0) \\
\geqslant& 0
\end{aligned}$$

□

二、Lipschitz 条件

定义 4.3.2 (局部 Lipschitz 函数) 对任意 $x_0 \in D_f$, 存在邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 与常数 C (δ, C 均依赖于 x_0), 使得

$$\forall x, x' \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap D_f: \quad |f(x)-f(x')| \leqslant C\,|x-x'|$$

则称 $f(x)$ 为**局部 Lipschitz 函数**.

定义 4.3.3 (Lipschitz 函数) 若存在常数 C, 使得

$$\forall x, x' \in D_f: \quad |f(x)-f(x')| \leqslant C\,|x-x'|$$

则称 $f(x)$ 为 **Lipschitz 函数**.

又由限覆盖定理，闭区间上的局部 Lipschitz 函数是 Lipschitz 函数.

定理 4.3.2 Lipschitz 函数是连续函数.

三、开区间上的凸函数

引理 4.3.1 $f(x)$ 是 (a,b) 上的下凸函数当且仅当任意 $(x_1,x_2) \subseteq (a,b)$, 任意 $x \in (x_1,x_2)$, 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

证明 由 $x = \dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1 + \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2$, 有

$$\begin{aligned} f(x)\text{是下凸函数} \Leftrightarrow \quad & f(x) \leqslant \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) \quad (\forall a < x_1 < x < x_2 < b) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \end{aligned}$$

另一边同理. □

引理 4.3.2 闭区间上的下凸函数有界.

证明 设闭区间 $[a,b]$, 任取 $x\in[a,b]$, $\exists\lambda\in(0,1)$, $x=\lambda a+(1-\lambda)b$, $f(x)\leqslant\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\leqslant\max\{f(a),f(b)\}$.
又将 $f(x)$ 连续延拓到 $[c,d]\supseteq[a,b]$ 上且保证其在 $[c,d]$ 上下凸，有 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上有上界.
由于 $f(a)\leqslant\lambda_1 f(x)+(1-\lambda_1)f(c)$, 有 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{\lambda_1}f(a)-\left(\dfrac{1}{\lambda_1}-1\right)f(c)$.
同理 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{\lambda_2}f(b)-\left(\dfrac{1}{\lambda_2}-1\right)f(d)$. 即 $f(x)$ 有下界. □

定理 4.3.3 开区间上的凸函数必为连续函数.

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 任意 $x_0\in(a,b)$, 存在 $\delta>0$, $[x_0-2\delta,x_0+2\delta]\subseteq(a,b)$.
任取 $x>y\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $x=\lambda(x_0+2\delta)+(1-\lambda)y$, $\lambda\in(0,1)$.
由凸函数性质，$f(x)\leqslant\lambda f(x_0+2\delta)+(1-\lambda)f(y)\Leftrightarrow f(x)-f(y)\leqslant\lambda[f(x_0+2\delta)-f(y)]$.
由引理 3.3.2，$|f(x)|<M,\exists M>0$. 故 $|f(y)-f(x)|\leqslant\lambda[f(x_0+2\delta)-f(y)]\leqslant 2\lambda M$.
又由 $x=\lambda(x_0+2\delta)+(1-\lambda)y\Rightarrow|x-y|=\lambda(x_0+2\delta-y)>\lambda\delta$, 故 $2\lambda M<\dfrac{|x-y|}{\delta}$.
代入有 $|f(x)-f(y)|<\dfrac{|x-y|}{\delta}$, 满足 **局部 Lipschitz 性质**，因此 $f(x)$ 连续. □

定理 4.3.4 开区间上的凸函数必为 Lipschitz 函数.

例 4.3.1 设函数 $f(x)$ 是 (a,b) 上的下凸函数，证明:

(1) 在每个 $x\in(a,b)$，$f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 均存在，且 $f'_-(x)\leqslant f'_+(x)$.

(2) 若 $a<x_1<x_2<b$，则有 $f'_+(x_1)\leqslant f'_-(x_2)$.

(3) $f(x)$ 不可导的点至多有可列个.

证明

(1) 取 $x_0\in(a,b)$, 由**引理4.3.1**, $\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\geqslant\dfrac{f(x_0)-f(x_0-2\Delta x_0)}{2\Delta x}$, 表明 $F_-(\Delta x)=\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 关于 Δx 单减.
又取定 $x'>x_0, F_-(\Delta x)\leqslant\dfrac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}$, $F_-(\Delta x)$ 在 $\Delta x\to0^+$ 时单调递增且有上界，故极限存在，即 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}F_-(\Delta x)$ 存在. 同理 $f'_+(x_0)$ 也存在.
$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\leqslant\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)$ (由**引理4.3.1**)

(2) 任取 $x\in(x_1,x_2)$,
有 $f'_+(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1^+}\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\leqslant\lim\limits_{x\to x_2^-}\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'_-(x_2)$

(3) 由 (2) 知，如果存在一点 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f'_-(x_0)<f'_+(x_0)$, 则开区间 $(f'_-(x_0),f'_+(x_0))$ 中不含 $f'_-(x),f'_+(x)$, $\forall x\in(a,b)$ 的所有值.
假设有两点 $x_1<x_2$, 有 $f'_-(x_i)<f'_+(x_i)$, $i\in\{1,2\}$. 则易得 $f'_-(x_1)<f'_+(x_1)\leqslant f'_-(x_2)<f'_+(x_2)$.
由**引理3.2.1**, 同理有这样的 x_0 有可列个.

四、相关不等式

定理 4.3.5 (Young 不等式) p,q 不等于 0 或 1, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则对任意正数 a,b, 有

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q \quad p>1$$

$$ab \geqslant \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q \quad p<1$$

证明 求导即可. □

定理 4.3.6 (Hölder 不等式) p,q 不等于 0 或 1, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则对任意正数数列 $\{a_k\}_{k=1}^n, \{b_k\}_{k=1}^n$, 有

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad p>1$$

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad p<1$$

证明 令 $A=\sum_{i=1}^n a_i^p, B=\sum_{i=1}^n b_i^q$

$p>1$ 时，对 $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$, 由 **Young 不等式**，

$$\frac{a_ib_i}{A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{A}+\frac{1}{q}\frac{b_i^p}{B}$$

故

$$\frac{1}{A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}}\sum_{i=1}^n a_ib_i \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

即

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \leqslant A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□