

数分例题整理

目 录

§ 3.1	函数极限	3
§ 3.2	连续函数与间断	3

第一部分 实数基本定理与极限

第一章	实数的定义	1
§ 1.1	自然数与其定义	1
一、	自然数的定义	1
§ 1.2	实数的定义	1
§ 1.3	实数基本定理	1
第二章	数列极限与相关计算	2
§ 2.1	数列极限与相关计算	2
第三章	函数极限、连续相关定理	3

第二部分 微分与积分

第四章	函数微分、导数相关定理	4
§ 4.1	导数基本性质与中值定理	4
§ 4.2	Taylor 公式	4
一、	推导与证明	4
§ 4.3	凸函数与 Lipschitz 条件 . .	5
一、	凸函数与二阶导的 关系	6
二、	Lipschitz 条件	7
三、	开区间上的凸函数	8
四、	相关不等式	10

第一部分 实数基本定理与极限

第一章 实数的定义

§ 1.1 自然数与其定义

一、自然数的定义

定义 1.1.1 (Peano 公理) (略)

定义 1.1.2 (自然数加法与乘法) 自然数加法定义为映射 $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a + b = b + a$
- $a + 1 = S(a)$
- $a + S(b) = S(a + b)$

自然数的乘法定义为映射 $\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot 1 = a$
- $a \cdot S(b) = a + (a \cdot b)$

定义 1.1.3 (自然数的大小关系) $a < b$ 当且仅当存在 $c \in \mathbb{N}, b = a + c$.

§ 1.2 实数的定义

(略)

§ 1.3 实数基本定理

例 1.3.1 证明: \mathbb{R} 不可列.

证明 使用闭区间套定理.

反证法. 假设 \mathbb{R} 可列, 记 $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$.

(1) 取 $[a_1, b_1]$ 使得 $x_1 \notin [a_1, b_1]$.

(2) 三分 $[a_1, b_1]$ 得三个小区间, 三者必有其一不含 x_2 . 记为 $[a_2, b_2]$:

由此得到一个闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. 由闭区间套定理, $\exists \xi \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \xi \in [a_n, b_n]$.

但对 $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \notin [a_k, b_k]$, 所以 $x_k \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. 故 $\mathbb{R} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \right) = \emptyset$, 矛盾!

第二章 数列极限与相关计算

§ 2.1 数列极限与相关计算

例 2.1.1 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明 令 $\sqrt[n]{n} = 1 + y_n$, 有

$$n = (1 + y_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} y_n.$$

故

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = |y_n| < \sqrt{\frac{2}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$, 则对 $n < N$ 有 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$

例 2.1.2 判断以下命题是否正确. 若正确, 给出证明; 若不正确, 给出反例:

数列 a_n 收敛的充要条件是, 对任意正数 p , 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$.

解 反例如下: 令 $a_n = \sqrt{n}$, 则 $\forall p > 0$

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

但显然该数列不收敛.

例 2.1.3 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{4n^2 + n}\pi)$.

解

$$\begin{aligned}\sin(\sqrt{4n^2 + n}\pi) &= \sin\left(\left(\sqrt{4n^2 + n} - 2n\right)\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2}\pi\right)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{4n^2 + n}\pi) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

第三章 函数极限、连续相关定理

§ 3.1 函数极限

定理 3.1.1 单调函数任意一点左右极限均存在

证明 不妨 $f(x)$ 在 (a, b) 上单增, 对任意 $x_0 \in (a, b)$, $\{f(x) | x \in (a, x_0)\}$ 有上确界 α .

对任意 $x \in (a, x_0)$, $f(x) \leq \alpha$, 但 $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in (a, x_0), f(x') > \alpha - \varepsilon$. 由 $f(x)$ 单调性, $\forall x \in (x', x_0), -\varepsilon < f(x) - \alpha \leq 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$.

右极限同理. □

§ 3.2 连续函数与间断

引理 3.2.1 (单调函数的不连续点) 单调函数的不连续点必然是跳跃间断点

证明 由定理 3.1.1 即得 □

定理 3.2.1 单调函数至多有可列个间断点

证明 由单调性及间断点的性质, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

由有理数的稠密性, 在每个间断点 x_0 的区间 (由单调性, 它们两两不交)

$\left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right)$, 必存在一个有理数, 用这个有理数代表这个区间. 则这些有理数与这些间断点一一对应.

因此间断点至多有可列个. \square

例 3.2.1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续函数. 定义 $L(f) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$. 证明: 若 $L(f)$ 非空, 则 $L(f)$ 是一个闭集. (闭集是包含所有聚点的集合)

解

第二部分 微分与积分

第四章 函数微分、导数相关定理

§ 4.1 导数基本性质与中值定理

§ 4.2 Taylor 公式

一、推导与证明

引理 4.2.1 若 $r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$, 则 $r(x) = o((x - x_0)^n) (x \rightarrow x_0)$.

证明 对 n 归纳.

当 $n = 1$ 时, $r(x) = r(x_0) + r'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0)$

假设当 $n \geq 1$ 有 $r^{(n)}(x) = o((x - x_0)^n)$ 成立.

则当 $n + 1$ 时, 由 Lagrange 中值定理,

$$r(x) = r(x_0) + r'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0) = r'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0)$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时,

$$r'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0) = o((x - x_0)^n) \cdot (x - x_0) = o((x - x_0)^{n+1})$$

由归纳原理, 原命题成立. □

定理 4.2.1 (带 Lagrange 余项的泰勒公式) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 n 阶可导, 在 (a, b) 上有 $n+1$ 阶导. 设 x_0 为 $[a, b]$ 内一点, 则对任意 $x \in [a, b]$ 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{(n+1)}$$

证明 令 $r(x) = f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$, 有 $r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$.

由 Cauchy 中值定理,

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{r(x) - r(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} \\ &= \frac{r'(\xi_1) - r'(x_0)}{(n+1)((\xi_1 - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n)} && \xi_1 \in (x_0, x) \text{ 或 } (x, x_0) \\ &= \frac{r''(\xi_2) - r''(x_0)}{(n+1) \cdot n \cdot ((\xi_2 - x_0)^{n-1} - (x_0 - x_0)^{n-1})} && \xi_2 \in (x_0, \xi_1) \text{ 或 } (x, \xi_1) \\ &= \cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{r^{(n)}(\xi_n)}{\xi_n - x_0} && \xi_n \in (x_0, \xi_{n-1}) \text{ 或 } (\xi_{n-1}, x_0) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} r^{(n+1)}(\xi) && \xi \in (x_0, \xi_n) \text{ 或 } (\xi_n, x_0) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \end{aligned}$$

因此 $r(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$ □

§ 4.3 凸函数与 Lipschitz 条件

一、凸函数与二阶导的关系

定义 4.3.1 (凸函数) 对某函数 $f(x)$ 定义域的任意区间 $[a, b]$ ，有任意 $\lambda \in [0, 1]$ ，满足

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则成 $f(x)$ 为其定义区间上的下凸函数

定理 4.3.1 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导，则 $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$ 是 $f(x)$ 在 I 上下凸的充要条件.

证明 充分性:

任取 $x_1, x_2 \in I$ ，不妨设 $x_1 < x_2$ 。任取 $\lambda \in (0, 1)$ ，根据 Lagrange 中值定理

$$\begin{aligned} & \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \\ &= -\lambda(f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - f(x_1)) + (1 - \lambda)(f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) \\ &= -\lambda f'(\xi_1) \cdot (1 - \lambda)(x_2 - x_1) + (1 - \lambda)f'(\xi_2) \cdot \lambda(x_2 - x_1) \\ & \quad (x_1 < \xi_1 < \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 < \xi_2 < x_2) \\ &= \lambda(1 - \lambda)f''(\xi)(x_2 - x_1)(\xi_2 - \xi_1) \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

必要性: 假设 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数，且处处二阶可导。取 $x_0 \in I$ ，则 $\forall \Delta x > 0$ ，有

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{\Delta x^2} \geq 0 \quad \left(x_0 = \frac{1}{2}(x_0 - \Delta x) + \frac{1}{2}(x_0 + \Delta x) \right)$$

另一方面, 根据带 Peano 余项的 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}
 & \frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{\Delta x^2} \\
 &= \frac{1}{\Delta x^2} \left(f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + o(\Delta x^2) \right. \\
 & \quad \left. + f(x_0) + f'(x_0)(-\Delta x) + \frac{1}{2}f''(x_0)(-\Delta x)^2 + o(\Delta x^2) - 2f(x_0) \right) \\
 &= f''(x_0) + \frac{o(\Delta x^2)}{\Delta x^2} \quad (\Delta x \rightarrow 0) \\
 &= f''(x_0) \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

□

二、Lipschitz 条件

定义 4.3.2 (局部 Lipschitz 函数) 对任意 $x_0 \in D_f$, 存在邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 与常数 C (δ, C 均依赖于 x_0), 使得

$$\forall x, x' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_f: \quad |f(x) - f(x')| \leq C |x - x'|$$

则称 $f(x)$ 为**局部 Lipschitz 函数**.

定义 4.3.3 (Lipschitz 函数) 若存在常数 C , 使得

$$\forall x, x' \in D_f: \quad |f(x) - f(x')| \leq C |x - x'|$$

则称 $f(x)$ 为**Lipschitz 函数**.

又由限覆盖定理, 闭区间上的局部 Lipschitz 函数是 Lipschitz 函数.

定理 4.3.2 Lipschitz 函数是连续函数.

三、开区间上的凸函数

引理 4.3.1 $f(x)$ 是 (a, b) 上的下凸函数当且仅当任意 $(x_1, x_2) \subseteq (a, b)$, 任意 $x \in (x_1, x_2)$, 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

证明 由 $x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2$, 有

$$\begin{aligned} f(x) \text{ 是下凸函数} &\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2) \quad (\forall a < x_1 < x < x_2 < b) \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

另一边同理. □

引理 4.3.2 闭区间上的下凸函数有界.

证明 设闭区间 $[a, b]$, 任取 $x \in [a, b]$, $\exists \lambda \in (0, 1)$, $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, $f(x) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \leq \max\{f(a), f(b)\}$.

又将 $f(x)$ 连续延拓到 $[c, d] \supseteq [a, b]$ 上且保证其在 $[c, d]$ 上下凸, 有 $f(x)$ 在 $[c, d]$ 上有上界.

由于 $f(a) \leq \lambda_1 f(x) + (1 - \lambda_1)f(c)$, 有 $f(x) \geq \frac{1}{\lambda_1}f(a) - \left(\frac{1}{\lambda_1} - 1\right)f(c)$.

同理 $f(x) \geq \frac{1}{\lambda_2}f(b) - \left(\frac{1}{\lambda_2} - 1\right)f(d)$. 即 $f(x)$ 有下界. □

定理 4.3.3 开区间上的凸函数必为连续函数.

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 任意 $x_0 \in (a, b)$, 存在 $\delta > 0$, $[x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta] \subseteq (a, b)$.

任取 $x > y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x = \lambda(x_0 + 2\delta) + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in (0, 1)$.

由凸函数性质, $f(x) \leq \lambda f(x_0 + 2\delta) + (1 - \lambda)f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) \leq \lambda[f(x_0 + 2\delta) - f(y)]$.

由引理 3.3.2, $|f(x)| < M$, $\exists M > 0$. 故 $|f(y) - f(x)| \leq \lambda[f(x_0 + 2\delta) - f(y)] \leq 2\lambda M$.

又由 $x = \lambda(x_0 + 2\delta) + (1 - \lambda)y \Rightarrow |x - y| = \lambda(x_0 + 2\delta - y) > \lambda\delta$, 故 $2\lambda M < \frac{|x - y|}{\delta}$.

代入有 $|f(x) - f(y)| < \frac{|x - y|}{\delta}$, 满足 **局部 Lipschitz** 性质, 因此 $f(x)$ 连续. □

定理 4.3.4 开区间上的凸函数必为 Lipschitz 函数.

例 4.3.1 设函数 $f(x)$ 是 (a, b) 上的下凸函数, 证明:

- (1) 在每个 $x \in (a, b)$, $f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 均存在, 且 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.
- (2) 若 $a < x_1 < x_2 < b$, 则有 $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$.
- (3) $f(x)$ 不可导的点至多有可列个.

证明

- (1) 取 $x_0 \in (a, b)$, 由引理 4.3.1, $\frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \geq \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2\Delta x)}{2\Delta x}$, 表明 $F_-(\Delta x) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$ 关于 Δx 单减.

又取定 $x' > x_0$, $F_-(\Delta x) \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$, $F_-(\Delta x)$ 在 $\Delta x \rightarrow 0^+$ 时单调递增且有上界, 故极限存在, 即 $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F_-(\Delta x)$ 存在. 同理 $f'_+(x_0)$ 也存在.

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \quad (\text{由引理 4.3.1})$$

- (2) 任取 $x \in (x_1, x_2)$,

$$\begin{aligned} \text{有 } f'_+(x_1) &= \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \leq \\ &\lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'_-(x_2) \end{aligned}$$

- (3) 由 (2) 知, 如果存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'_-(x_0) < f'_+(x_0)$, 则开区间 $(f'_-(x_0), f'_+(x_0))$ 中不含 $f'_-(x), f'_+(x), \forall x \in (a, b)$ 的所有值.

假设有两点 $x_1 < x_2$, 有 $f'_-(x_i) < f'_+(x_i), i \in \{1, 2\}$. 则易得 $f'_-(x_1) < f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) < f'_+(x_2)$.

由引理 3.2.1, 同理有这样的 x_0 有可列个.

四、相关不等式

定理 4.3.5 (Young 不等式) p, q 不等于 0 或 1, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对任意正数 a, b , 有

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad p > 1$$

$$ab \geq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad p < 1$$

证明 求导即可. □

定理 4.3.6 (Hölder 不等式) p, q 不等于 0 或 1, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对任意正数数列 $\{a_k\}_{k=1}^n, \{b_k\}_{k=1}^n$, 有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad p > 1$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad p < 1$$

证明 令 $A = \sum_{i=1}^n a_i^p, B = \sum_{i=1}^n b_i^q$

$p > 1$ 时, 对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 由 **Young 不等式**,

$$\frac{a_i b_i}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{A} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{B}$$

故

$$\frac{1}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

即

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

证明 (用 Jensen 不等式的证明) $p > 1$ 时, $f(x) = x^p$ 为下凸函数.

由于 $q = \frac{p}{p-1}$, 把 $x_i y_i$ 分解为

$$x_i y_i = y_i^q \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \cdot x_i y_i^{1-q} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)$$

注意到

$$\sum_{i=1}^n \left(y_i^q \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \right) = 1$$

由 Jensen 不等式,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^p &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left[y_i^q \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \cdot x_i y_i^{1-q} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right) \right] \right\}^p \\ &\leq \sum_{i=1}^n y_i^q \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \cdot x_i^p y_i^{p-pq} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^p \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{p-1} \end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

第五章 函数不定积分、定积分相关定理

§ 5.1 不定积分

(全是计算题)

§ 5.2 定积分