作业九

Noflowerzzk

2025.4.17

P201 T1

(1) $L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x+y-1)$, 求导得驻点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 又 $xy\leq\frac{1}{4}$ 得其最大值为 $\frac{1}{4}$

(2) $L(x,y,z,\lambda)=x-2y-2z-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$. 求导得 $(x,y,z)=\pm\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. $f_{\max}(x)=3, f_{\min}(x)=-3$.

(3)

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda(x^2+y^2+z^2)-\mu(Ax,+By+Cz)$$

计算得 f 的最大值和最小值为 $\lambda^2+\left(\frac{A^2-1}{a^2}+\frac{B^2-1}{b^2}+\frac{C^2-1}{c^2}\right)\lambda+\left(\frac{A^2}{b^2c^2}+\frac{B^2}{a^2c^2}+\frac{C^2}{a^2b^2}\right)=0$ 的两个根

P201 T8

$L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x^4+y^4)-\lambda(x+y-a)$ 得 f 的最小值为 $f\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{16}a^4$, 也即 $\frac{x^4+y^4}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^4$

P201 T9

$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-6R^2)$ 得驻点 $x^2=R^2, y^2=2R^2, z^2=3R^2$, 代入得最大值为 $\ln\left(6\sqrt{3}R^6\right)$, 也即 $ab^2c^3\leq 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^2$

P201 T10

(1) 同理求偏导数有 $x^k=\frac{a}{a+b+c}, y^k=\frac{b}{a+b+c}, z^k=\frac{c}{a+b+c}$，唯一驻点为最大值，因此最大值为 $\left(\frac{a^ab^bc^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\right)^{\frac{1}{k}}$

(2) $x=\frac{u}{u+w+v}$, 同理得 y,z. 由 (1) 有 $\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c\leq\left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$.

P201 T11

取 $L(x,y,\lambda)=(x-1)^2+y^2-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 同理求偏导得 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2},b=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 是满足题目条件.

P201 T13

显然 $f(x)$ 没有驻点. $L(x_1,\cdots,x_n,\lambda)=f(x_1,\cdots,x_n)-\lambda(x_1^2+\cdots+x_n^2-1)$ 有 $x_k=\frac{a_k}{2\lambda}$ 故 $f_{\max}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2},f_{\max}=-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$