# 作业五

Noflowerzzk

2025.3.19

## P82 T2

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=a$, 收敛半径为 $R=\dfrac{1}{a}$. 又 $x=\dfrac{1}{a}$ 时，原式为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{b^n}{n^2a^n}\right)$ 发散；$x=-\dfrac{1}{a}$ 时，原式为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1)^nb^n}{n^2a^n}\right)$ 收敛。所以收敛区间为 $\left[-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a}\right)$.

(2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{a^n+b^n}}=\dfrac{1}{a}$. 收敛半径为 $a$. $x=\pm a$ 时均不收敛，故收敛域为 $(-a,a)$

(3) 令 $c_n=\begin{cases}a^n, & n\text{ 为奇数}\\ b^n, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$ 有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=\sqrt{a}$. 收敛半径为 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$. $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ 时均不收敛，故收敛域为 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{a}},\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$

## P82 T3

(1) 显然为 $\sqrt{R_1}$.

(2) $R_1\neq R_2$ 时，为 $\min\{R_1,R_2\}$. $R_1=R_2$ 时，收敛半径大于等于 $\min\{R_1,R_2\}$.

(3) 由于 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nb_n|}\leq\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}$ 有收敛半径 $\geq R_1R_2$.

## P82 T4

(4) 由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$, 故收敛半径为 1. 又 $x=\pm1$ 时级数收敛. 故和函数定义域为 $[-1,1]$. 令 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, 则 $f(x)=xS(x)$, 又 $f''(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，因此 $S(x)=1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\ln(1-x), x\in[-1,1)$, 又 $x=1$ 时,$S(1)=1$, 故 $S(x)=\begin{cases}1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\ln(1-x), & x\in[-1,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$

(5) 由定义，收敛半径为 1, 又 $x=\pm1$ 时发散，定义域为 $(-1,1)$. 令 $f(x)=S(x)/x$, 有 $\displaystyle\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^2=\frac{1}{(1-x)^2}-1$ 故 $S(x)=xf'(x)=\dfrac{2x}{(1-x)^2}$

(6) 定义域为 $\mathbb{R}$. $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. 注意到 $S(x)+S'(x)=\mathrm{e}^x, S(x)-S'(x)=\mathrm{e}^{-x}$, 得 $S(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.

(7) 定义域为 $\mathbb{R}$. $\int_0^x S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x(\mathrm{e}^x-1)$. 故 $S(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-1$。

## P82 T5

证明. 当 $x\in(0,r)$ 时，有 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. 又 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 收敛，即其在 $[0,r]$ 上连续. 令 $x\to r$ 有 $\int_0^r f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$.

$f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}$ 时，有 $\int_0^1\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ □

## P82 T6

(1) 显然 $y^{(4)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}=y$。

(2) $y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!}, y''=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!n!}$, 则 $xy''+y'=1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=y$.

## P82 T7

(4) 令 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$. $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\frac{x}{(1-x)^2}$. 故 $f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$. 原式为 $f(\frac{1}{2})=12$

(5) 令 $f(x)=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, 对照 $\arctan x$ 的 Taylor 级数有 $f(x)=\arctan x$. 有原式为 $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$.

(6) 易得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\ln(x+1)$. 令 $f(x)=x\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}x^n$, 有 $g'(x)=x\ln(x+1)$ 故原式为 $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\ln(x+1)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$, 带入 $x=\frac{1}{2}$ 有原式为 $\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}$.

(7) 令 $f(x)=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1}=\mathrm{e}^{-x}$, 代入 $x=2$, 有原式为 $\frac{2}{\mathrm{e}^2}$

## P82 T8

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径小于等于 1. 另一方面，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{A_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}-a_{n+1}}{A_{n+1}}=1$, 得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nx^x$ 的收敛半径为 1, 又显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nx^x$ 的收敛半径大于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 故其收敛半径为 1.

# P82 T9

(1) 证明. 判断易得其收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$, 且 $x=\pm\dfrac{1}{2}$ 有原级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 显然收敛. 因此 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ 上连续.

又 $f'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}$ 在 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 上内闭一致收敛. 因此 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 上可导. $\square$

(2) 不存在. $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n^2}=g(t), t=2x$. 有 $g(t)=\displaystyle\int_0^t-\frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u$. 当 $t\to 1-$ 时, $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}\to\infty$, 故其积分不存在.