作业六

NoflowerzzkNoflowerzzk

2025.3.31

1

取 $M=\begin{pmatrix}\lambda E_m & A\\ B & E_n\end{pmatrix}$. 则 $\det M=\det\lambda E_m\cdot\det(E_n-B(\lambda E))=\lambda^{m-n}\det(\lambda E_n-BA)$. 而 $\det M=\det(\lambda E_m-AB)$. 故 $\det(\lambda E_m-AB)=\lambda^{m-n}\det(\lambda E_n-BA)$.

2

(1) 由于 $\det AA^T=\prod_{k=1}^{n}\sigma_k^2$, 而 $\det A=\det A^T$, 有 $|\det A|=\prod_{k=1}^{n}\sigma_k$.

(2) 显然 P,P^T 都是正交阵，且 D 为对角阵. 又显然 D 由 A 的特征值构成，不妨为从大到小排列，则 $D=\operatorname{diag}(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_n^2)$. 因此其为 QR 分解.

3

存在一组单位正交向量 $v_1,\cdots,v_n$, 其为特征值 $\lambda_i=s_i^2$ 的特征向量. 任取其中一个 v, 有 $T^TTv=s^2v$. 因此 $v^TT^TTv=|Tv|^2=s^2v^Tv=s^2$, 故 $|Tv|=s$.

4

(1) 特征多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda-4)$. 对 $\lambda_1=4$, 有 $v_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$, 对 $\lambda_2=1$, 有 $u_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T,u_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$. 故 A 的谱分解为 $4v_1v_1^T+(u_1u_1^T+u_2u_2^t)=4P_1+P_2$。
$\mathrm{e}^A=4$
$mathrme^{P_1}+\mathrm{e}^{P_2}=\begin{pmatrix}\dfrac{e^4+2e}{3} & \dfrac{e^4-e}{3} & \dfrac{e^4-e}{3}\\ \dfrac{e^4-e}{3} & \dfrac{e^4+2e}{3} & \dfrac{e^4-e}{3}\\ \dfrac{e^4-e}{3} & \dfrac{e^4-e}{3} & \dfrac{e^4+2e}{3}\end{pmatrix}$。

(2) 特征多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$，重数均为 1. $\lambda=1$ 时，$v_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)^T$，$\lambda=2$，$v_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$, $\lambda=4$, $v_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$. 故 A 的谱分解为 $v_1v_1^T+2v_2v_2^T+4v_3v_3^T=$

$$P_1+2P_2+4P_3.\ \mathrm{e}^A=\begin{pmatrix}\frac{e^2}{2}+\frac{e}{3}+\frac{e^4}{6} & -\frac{e}{3}+\frac{e^4}{3} & -\frac{e^2}{2}+\frac{e}{3}+\frac{e^4}{6}\\ -\frac{e}{3}+\frac{e^4}{3} & \frac{e}{3}+\frac{2e^4}{3} & -\frac{e}{3}+\frac{e^4}{3}\\ -\frac{e^2}{2}+\frac{e}{3}+\frac{e^4}{6} & -\frac{e}{3}+\frac{e^4}{3} & \frac{e^2}{2}+\frac{e}{3}+\frac{e^4}{6}\end{pmatrix}$$

5

(1) 计算得其奇异值为 $\sigma_1=3,\sigma_2=2$. 对应单位特征向量 $v_1=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)^T,v_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(-3,1)^T$. 计算得 $U=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}$

$A=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3&-1\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1&-3\\3&1\end{bmatrix}$

(2) 计算得其奇异值为 $\sigma_1=3,\sigma_2=2$. 对应单位特征向量 $v_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T,v_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)^T$. 计算得 $U=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

$B=U=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix}$

(3) 计算得其奇异值为 $\sigma_1=3\sqrt{10},\sigma_2=\sqrt{10}$. 计算得 $U=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&\sqrt{10}\\1&-3&0\end{bmatrix}$.

故 $C=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&\sqrt{10}\\1&-3&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}3\sqrt{10}&0\\0&\sqrt{10}\\0&0\end{bmatrix},\quad\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}$

(4) 计算得其奇异值为 $\sigma_1=5,\sigma_2=3,\sigma_3=2$. 对应单位特征向量 $v_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T,v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T,v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T$. 计算得 $U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

$$D=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$