# 数分例题整理

Noflowerzzk

# 目 录

# 第一部分 实数基本定理与极限

## 第一章 实数的定义

### § 1.1 自然数与其定义

#### 一、自然数的定义

**定义 1.1.1** (Peano 公理) (略)

**定义 1.1.2** (自然数加法与乘法) **自然数加法**定义为映射 $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a + b = b + a$
- $a + 1 = S(a)$
- $a + S(b) = S(a + b)$

**自然数的乘法**定义为映射 $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 满足以下性质:

- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot 1 = a$
- $a \cdot S(b) = a + (a \cdot b)$

**定义 1.1.3** (自然数的大小关系) $a < b$ 当且仅当存在 $c \in \mathbb{N}, b = a + c$.

### § 1.2 实数的定义

(略)

### § 1.3 实数基本定理

**例 1.3.1** 证明: $\mathbb{R}$ 不可列.

**证明** 使用闭区间套定理.

反证法. 假设 $\mathbb{R}$ 可列, 记 $\mathbb{R}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$.

(1) 取 $[a_1,b_1]$ 使得 $x_1\notin[a_1,b_1]$.

(2) 三分 $[a_1,b_1]$ 得三个小区间, 三者必有其一不含 $x_2$. 记为 $[a_2,b_2]$ ⋮

由此得到一个闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. 由闭区间套定理, $\exists\xi\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\xi\in[a_n,b_n]$.

但对 $\forall k\in\mathbb{N},x_k\notin[a_k,b_k]$, 所以 $x_k\notin\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 故 $\mathbb{R}\cap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\right)=\varnothing$, 矛盾!

# 第二章 数列极限与相关计算

## § 2.1 数列极限与相关计算

**例 2.1.1** 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

**证明** 令 $\sqrt[n]{n}=1+y_n$, 有

$$n=(1+y_n)^n>1+\frac{n(n-1)}{2}y_n.$$

故

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=|y_n|<\sqrt{\frac{2}{n}},\forall n\in\mathbb{N}.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right]+1$, 则对 $n<N$ 有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$

**例 2.1.2** 判断以下命题是否正确. 若正确, 给出证明; 若不正确, 给出反例:

数列 $a_n$ 收敛的充要条件是，对任意正正数 $p$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-a_{n+p}|=0$.

**解** 反例如下: 令 $a_n=\sqrt{n}$, 则 $\forall p>0$

$$|a_{n+p}-a_n|=\frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}\to 0,$$

但显然该数列不收敛.

**例 2.1.3** 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\sqrt{4n^2+n}\pi\right)$.

**解**

$$\begin{aligned}\sin\left(\sqrt{4n^2+n}\pi\right) &= \sin\left(\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)\pi\right)\\ &= \sin\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\pi\right)\\ &= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}\pi\right)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\sqrt{4n^2+n}\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

# 第三章 函数极限、连续相关定理

## § 3.1 函数极限

**定理 3.1.1** 单调函数任意一点左右极限均存在

**证明** 不妨 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上单增，对任意 $x_0\in(a,b)$, $\{f(x)|x\in(a,x_0)\}$ 有上确界 $\alpha$.

对任意 $x\in(a,x_0), f(x)\leqslant\alpha$, 但 $\forall\varepsilon>0,\exists x'\in(a,x_0), f(x')>\alpha$. 由 $f(x)$ 单调性，$\forall x\in(x',x_0), -\varepsilon<f(x')\leqslant f(x)-\alpha\leqslant 0$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\alpha$.

右极限同理. □

## § 3.2 连续函数与间断

**引理 3.2.1** (单调函数的不连续点) 单调函数的不连续点必然是跳跃间断点

**证明** 由定理3.1.1即得 □

**定理 3.2.1** 单调函数至多有可列个间断点

**证明** 由单调性及间断点的性质，$\lim_{x\to x_0^-} f(x) < f(x_0) < \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.
由有理数的稠密性，在每个间断点 $x_0$ 的区间（由单调性，它们两两不交）$\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to x_0^+} f(x)\right)$, 必存在一个有理数，用这个有理数代表这个区间. 则这些有理数与这些间断点一一对应.
因此间断点至多有可列个. □

**例 3.2.1** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数. 定义 $L(f)=\{x\in\mathbb{R}|f(x)=0\}$. 证明：若 $L(f)$ 非空，则 $L(f)$ 是一个闭集.（闭集是包含所有聚点的集合）
**解**

# 第二部分 微分与积分

# 第四章 函数微分、导数相关定理

## § 4.1 导数基本性质与中值定理

### 一、中值定理

**例 4.1.1** $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$, 其中 $a>0$ 且 $f(a)=0$. 证明：$\exists\xi\in(a,b), f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.
**解** 令 $F(x)=(b-x)^a f(x)$, 易知 $F(x)\in C[a,b]\cap D(a,b), F(a)=F(b)=0$, 由 Rolle 定理，$\exists\xi\in(a,b), F'(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

用 Rolle 定理证明等式的基本方法：

- 将等号一端改写成只有零，形成 $g(\xi)=0$
- 求积分 $G(x)=\displaystyle\int g(x)\mathrm{d}x$
- 验证 $G(x)$ 满足 Rolle 中值定理条件

例如上题，化简为 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{a}{b-x}=0$, 有 $G(x)=(b-x)^a f(x)$

**例 4.1.2** $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1), f'(1)=1$, 求证：存在 $\xi\in(0,1), f''(\xi)=2$.

**解** $f''(x)-2=0$，有 $f'(x)-2x=C_1$，由条件 $f'(1)=1$，有 $C_1=-1$，化简有 $f'(x)-2x+1=0$，故 $F(x)=f(x)-x^2+x$. 下略.

**例 4.1.3** 证明 $2^x-x^2=1$ 有且仅有三个实根

**解** 有三个解证明略.

假设有四个解，反复使用中值定理可以证明最后的导函数没有解。

**例 4.1.4** $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，且 $f(0)=0, |f'(x)|\leqslant p\,|f(x)|$, 证明 $f(x)\equiv 0, x\in\mathbb{R}$

**证明** 先考虑 $x\in\left[0,\dfrac{1}{2p}\right]$ 的情形. $|f(x)|$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2p}\right]$ 的最大值为 $|f(x_0)|=M\geqslant 0$

$$M=|f(x)-f(0)|=|f'(\xi)x_0|\leq\frac{1}{2p}\cdot p\,|f(\xi)|\leqslant\frac{1}{2}M$$

因此 $M=0$. 对其它区间同理归纳即可.

## 二、导函数的性质

**定理 4.1.1** (导数的 Darboux 定理 (介值性)) $f(x)$ 可导且 $f'(a)\neq f'(b)$, 则对任意介于 $f'(a), f'(b)$ 之间的 $r$, 都存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $r=f'(\xi)$

两种证明方法

**证明** 不妨 $f'(a)<f'(b)$, 对任意 $r\in(f'(a),f'(b))$, 令 $F(x)=f(x)-rx$, 有 $F(a)<0, F(b)>0$. 故由极限保号性，存在 $\delta>0,\forall x\in(a,a+\delta), \dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}<0$, 即 $F(x)<F(a)$, $F(a)$ 不是最小值.

同理 $F(b)$ 也不是最小值. 因此最小值 $F(\xi)$ 在开区间 $(a,b)$ 上取到，由费马定理，$F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=r$. □

**证明** 假设同上，作函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\neq a\\ f'(a), & x=a\end{cases},\quad G(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}, & x\neq b\\ f'(b), & x=b\end{cases}$$

$r$ 要么在 $F(a),F(b)$ 之间，要么在 $G(a),G(b)$ 之间.

如果 $r$ 在 $F(a),F(b)$ 之间，由连续函数的介值定理，存在 $x_0\in(a,b), r=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$ 再对 $F(x)$ 用 Lagrange 中值定理即可. $r$ 在 $G(a),G(b)$ 之间同理. □

## § 4.2 Taylor 公式

### 一、推导与证明

**引理 4.2.1** 若 $r(x_0)=r'(x_0)=r''(x_0)=\cdots=r^{(n)}(x_0)=0$，则 $r(x)=o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0)$.

**证明** 对 $n$ 归纳.

当 $n=1$ 时，$r(x)=r(x_0)+r'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)=o(x-x_0)$

假设当 $n\geqslant 1$ 有 $r^{(n)}(x)=o((x-x_0)^n)$ 成立.

则当 $n+1$ 时，由 Lagrange 中值定理，

$$r(x)=r(x_0)+r'(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)=r'(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)$$

当 $x\to x_0$ 时，

$$r'(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)=o((x-x_0)^n)\cdot(x-x_0)=o((x-x_0)^{n+1})$$

由归纳原理，原命题成立. □

**定理 4.2.1** (带 Lagrange 余项的泰勒公式) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $n$ 阶可导，在 $(a,b)$ 上

有 $n+1$ 阶导. 设 $x_0$ 为 $[a,b]$ 内一点，则对任意 $x\in[a,b]$ 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$
\begin{aligned}
f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+ \\
\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^{(n+1)}
\end{aligned}
$$

**证明** 令 $r(x)=f(x)-f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$, 有 $r(x_0)=r'(x_0)=r''(x_0)=\cdots=r^{(n)}(x_0)=0$.
由 Cauchy 中值定理，

$$
\begin{aligned}
\frac{r(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{r(x)-r(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} \\
&= \frac{r'(\xi_1)-r'(x_0)}{(n+1)((\xi_1-x_0)^n-(x_0-x_0)^n)} && \xi_1\in(x_0,x)\text{或}(x,x_0) \\
&= \frac{r''(\xi_2)-r''(x_0)}{(n+1)\cdot n\cdot((\xi-x_0)^{(n-1)}-(x_0-x_0)^{(n-1)})} && \xi_1\in(x_0,\xi_1)\text{或}(x,\xi_1) \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{r^{(n)}(\xi_n)}{\xi_n-x_0} && \xi_n\in(x_0,\xi_{n-1})\text{或}(\xi_{n-1},x_0) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}r^{(n+1)}(\xi) && \xi\in(x_0,\xi_n)\text{或}(\xi_n,x_0) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)
\end{aligned}
$$

因此 $r(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ □

**例 4.2.1** (Taylor 公式的应用套路) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$, 证明：

$$
\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|
$$

**证明** 由最值存在定理，$\exists x_0\in[a,b],|f(x_0)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$, 且 $f'(x_0)=0$
把 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展开，有

$$
f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,\quad \xi\text{在}x,x_0\text{之间}
$$

代入 $x=a, x=b$ 有:

$$\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2 = f(a)-f(x_0)-f'(x_0)(a-x_0) \qquad a<\xi_1<x_0$$
$$\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_0-b)^2 = f(b)-f(x_0)-f'(x_0)(b-x_0) \qquad x_0<\xi_2<b$$

相加有

$$\begin{aligned}|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)| &= 2\,|f(x_0)|\left(\frac{1}{(a-x_0)^2}+\frac{1}{(b-x_0)^2}\right)\\ &\geqslant 2\,|f(x_0)|\left(\frac{(1+1)^3}{(a-x_0+x_0-b)^2}\right)\\ &= \frac{16}{(a-b)^2}\,|f(x_0)|\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)| &\geqslant \frac{1}{2}\left(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\right)\\ &= \frac{8}{(a-b)^2}\,|f(x_0)|\\ &= \frac{8}{(a-b)^2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\end{aligned}$$

即

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \leqslant \frac{1}{8}(a-b)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$$

□

**例 4.2.2** $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，$|f(x)|<k_0, |f''(x)|<k_1$, 证明:

$$|f'(x)| \leqslant \sqrt{2k_0k_1}$$

**证明** 由 Taylor 公式，

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2$$
$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2$$

化简有:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+\frac{1}{4}\left(f''(\xi_2)-f(\xi_1)\right)h$$

因此

$$|f'(x)| \leqslant \frac{|f(x+h)|+|f(x-h)|}{2h} + \frac{1}{4}\left(|f''(\xi_2)|+|f''(\xi_1)|\right)h \leqslant \frac{k_0}{h}+\frac{h}{2}k_1 \qquad \forall h>0$$

因此

$$|f'(x)| \leqslant \min_{h\in(0,+\infty)}\left(\frac{k_0}{h}+\frac{h}{2}k_1\right) = \sqrt{2k_0k_1}$$

□

## § 4.3 凸函数与 Lipschitz 条件

### 一、凸函数与二阶导的关系

**定义 4.3.1** (凸函数) 对某函数 $f(x)$ 定义域的任意区间 $[a,b]$，有任意 $\lambda\in[0,1]$, 满足

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

则成 $f(x)$ 为其定义区间上的**下凸函数**

**定理 4.3.1** $f(x)$ 在区间 $I$ 上二阶可导，则 $\forall x\in I, f''(x)\geqslant 0$ 是 $f(x)$ 在 $I$ 上下凸的充要条件.

**证明** 充分性:
任取 $x_1,x_2\in I$，不妨设 $x_1<x_2$。任取 $\lambda\in(0,1)$，根据 Lagrange 中值定理

$$\begin{aligned}
&\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\\
=&-\lambda\left(f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-f(x_1)\right)+(1-\lambda)\left(f(x_2)-f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\right)\\
=&-\lambda f'(\xi_1)\cdot(1-\lambda)(x_2-x_1)+(1-\lambda)f'(\xi_2)\cdot\lambda(x_2-x_1)\\
&\qquad (x_1<\xi_1<\lambda x_1+(1-\lambda)x_2<\xi_2<x_2)\\
=&\lambda(1-\lambda)f''(\xi)(x_2-x_1)(\xi_2-\xi_1)\quad(\xi_1\leq\xi\leq\xi_2)\\
\geqslant&\, 0
\end{aligned}$$

必要性: 假设 $f(x)$ 是 $I$ 上的下凸函数，且处处二阶可导。取 $x_0\in I$，则 $\forall\Delta x>0$，

有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)+f(x_0-\Delta x)-2f(x_0)}{\Delta x^2}\geq 0 \qquad \left(x_0=\frac{1}{2}(x_0-\Delta x)+\frac{1}{2}(x_0+\Delta x)\right)$$

另一方面，根据带 Peano 余项的 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_0+\Delta x)+f(x_0-\Delta x)-2f(x_0)}{\Delta x^2}\\
&=\frac{1}{\Delta x^2}\Bigg(f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2+o(\Delta x^2)\\
&\quad +f(x_0)+f'(x_0)(-\Delta x)+\frac{1}{2}f''(x_0)(-\Delta x)^2+o(\Delta x^2)-2f(x_0)\Bigg)\\
&=f''(x_0)+\frac{o(\Delta x^2)}{\Delta x^2} \quad (\Delta x\to 0)\\
&=f(x_0)\\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

□

## 二、Lipschitz 条件

**定义 4.3.2** (局部 Lipschitz 函数) 对任意 $x_0\in D_f$, 存在邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 与常数 $C$ ($\delta, C$ 均依赖于 $x_0$), 使得

$$\forall x,x'\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap D_f: \quad |f(x)-f(x')|\leqslant C\,|x-x'|$$

则称 $f(x)$ 为**局部 Lipschitz 函数**.

**定义 4.3.3** (Lipschitz 函数) 若存在常数 $C$, 使得

$$\forall x,x'\in D_f: \quad |f(x)-f(x')|\leqslant C\,|x-x'|$$

则称 $f(x)$ 为 **Lipschitz 函数**.

又由限覆盖定理，闭区间上的局部 Lipschitz 函数是 Lipschitz 函数.

**定理 4.3.2** Lipschitz 函数是连续函数.

## 三、开区间上的凸函数

**引理 4.3.1** $f(x)$ 是 $(a,b)$ 上的下凸函数当且仅当任意 $(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$, 任意 $x\in(x_1,x_2)$, 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

**证明** 由 $x=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1+\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2$, 有

$$f(x)\text{是下凸函数}\Leftrightarrow\quad f(x)\leqslant\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)\quad(\forall a<x_1<x<x_2<b)$$
$$\Leftrightarrow\quad\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

另一边同理. □

**引理 4.3.2** 闭区间上的下凸函数有界.

**证明** 设闭区间 $[a,b]$, 任取 $x\in[a,b]$, $\exists\lambda\in(0,1)$, $x=\lambda a+(1-\lambda)b$, $f(x)\leqslant\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\leqslant\max\{f(a),f(b)\}$.
又将 $f(x)$ 连续延拓到 $[c,d]\supseteq[a,b]$ 上且保证其在 $[c,d]$ 上下凸，有 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上有上界.
由于 $f(a)\leqslant\lambda_1f(x)+(1-\lambda_1)f(c)$, 有 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{\lambda_1}f(a)-\left(\dfrac{1}{\lambda_1}-1\right)f(c)$.
同理 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{\lambda_2}f(b)-\left(\dfrac{1}{\lambda_2}-1\right)f(d)$. 即 $f(x)$ 有下界. □

**定理 4.3.3** 开区间上的凸函数必为连续函数.

**证明** 对任意 $\varepsilon>0$, 任意 $x_0\in(a,b)$, 存在 $\delta>0$, $[x_0-2\delta,x_0+2\delta]\subseteq(a,b)$.
任取 $x>y\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $x=\lambda(x_0+2\delta)+(1-\lambda)y$, $\lambda\in(0,1)$.
由凸函数性质，$f(x)\leqslant\lambda f(x_0+2\delta)+(1-\lambda)f(y)\Leftrightarrow f(x)-f(y)\leqslant\lambda[f(x_0+2\delta)-f(y)]$.
由引理 **3.3.2**，$|f(x)|<M$, $\exists M>0$. 故 $|f(y)-f(x)|\leqslant\lambda[f(x_0+2\delta)-f(y)]\leqslant2\lambda M$.

又由 $x=\lambda(x_0+2\delta)+(1-\lambda)y \Rightarrow |x-y|=\lambda(x_0+2\delta-y)>\lambda\delta$, 故 $2\lambda M<\dfrac{|x-y|}{\delta}$.
代入有 $|f(x)-f(y)|<\dfrac{|x-y|}{\delta}$, 满足 **局部 Lipschitz 性质**，因此 $f(x)$ 连续. $\square$

**定理 4.3.4** 开区间上的凸函数必为 Lipschitz 函数.

**例 4.3.1** 设函数 $f(x)$ 是 $(a,b)$ 上的下凸函数，证明:

(1) 在每个 $x\in(a,b)$，$f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 均存在，且 $f'_-(x)\leqslant f'_+(x)$.

(2) 若 $a<x_1<x_2<b$，则有 $f'_+(x_1)\leqslant f'_-(x_2)$.

(3) $f(x)$ 不可导的点至多有可列个.

**证明**

(1) 取 $x_0\in(a,b)$, 由**引理4.3.1**, $\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\geqslant\dfrac{f(x_0)-f(x_0-2\Delta x_0)}{2\Delta x}$, 表明
$F_-(\Delta x)=\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 关于 $\Delta x$ 单减.
又取定 $x'>x_0, F_-(\Delta x)\leqslant\dfrac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}$, $F_-(\Delta x)$ 在 $\Delta x\to 0^+$ 时单调递增且有上界，故极限存在，即 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}F_-(\Delta x)$ 存在. 同理 $f'_+(x_0)$ 也存在.

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\leqslant\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)\quad(\text{由**引理4.3.1**})$$

(2) 任取 $x\in(x_1,x_2)$,
有 $f'_+(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1^+}\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\leqslant\lim\limits_{x\to x_2^-}\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'_-(x_2)$

(3) 由 (2) 知，如果存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'_-(x_0)<f'_+(x_0)$，则开区间 $(f'_-(x_0),f'_+(x_0))$ 中不含 $f'_-(x),f'_+(x)$, $\forall x\in(a,b)$ 的所有值.|
假设有两点 $x_1<x_2$, 有 $f'_-(x_i)<f'_+(x_i)$, $i\in\{1,2\}$. 则易得 $f'_-(x_1)<f'_+(x_1)\leqslant f'_-(x_2)<f'_+(x_2)$.
由**引理3.2.1**, 同理有这样的 $x_0$ 有可列个.

## 四、相关不等式

**定理 4.3.5** (Young 不等式) $p,q$ 不等于 0 或 1, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则对任意正数 $a,b$, 有

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad p>1$$

$$ab \geqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad p<1$$

**证明** 求导即可. □

**定理 4.3.6** (Hölder 不等式) $p,q$ 不等于 0 或 1, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则对任意正数数列 $\{a_k\}_{k=1}^n, \{b_k\}_{k=1}^n$, 有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad p>1$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad p<1$$

**证明** 令 $A=\sum_{i=1}^n a_i^p, B=\sum_{i=1}^n b_i^q$

$p>1$ 时，对 $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$, 由 **Young 不等式**，

$$\frac{a_i b_i}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{A} + \frac{1}{q}\frac{b_i^p}{B}$$

故

$$\frac{1}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

即

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

**证明 (用 Jesen 不等式的证明)** $p>1$ 时，$f(x)=x^p$ 为下凸函数.
由于 $q=\dfrac{p}{p-1}$, 把 $x_iy_i$ 分解为

$$x_iy_i=y_i^q\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{-1}\cdot x_iy_i^{1-q}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)$$

注意到

$$\sum_{i=1}^n\left(y_i^q\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{-1}\right)=1$$

由 **Jesen** 不等式，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^p&=\left\{\sum_{i=1}^n\left[y_i^q\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{-1}\cdot x_iy_i^{1-q}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)\right]\right\}^p\\&\leqslant\sum_{i=1}^n y_i^q\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{-1}\cdot x_i^py_i^{p-pq}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^p\\&=\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{p-1}\end{aligned}$$

因此，

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i=\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

# 第五章 函数不定积分、定积分相关定理

## § 5.1 不定积分

(全是计算题)

## 一、计算计巧

**例 5.1.1** (凑微分技巧)

- $\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{d}\left(\sqrt{1+x^2}\right)$
- $\displaystyle\int x^{2k+1}\sqrt{a+bx^2}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{a+bx^2}} \cdots$ , $(bx\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t)$

**例 5.1.2** (分部积分法则)

- $\displaystyle\int f(x)\ln g(x)\mathrm{d}x = \int \ln g(x)\mathrm{d}F(x)$
- $\displaystyle\int f(x)\arctan g(x)\mathrm{d}x$ 分两种情况.
  - $f(x)$ 能凑微分，则化为 $\displaystyle\int \arctan g(x)\mathrm{d}F(x)$
  - $f(x)$ 不能凑微分，则换元 $t = \arctan g(x)$

**定理 5.1.1** (用于求分段函数积分)

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

**定理 5.1.2** (记不住就完了!)

- $$\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$
- $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$
  则
  $$I_n = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C & n = 1 \\ \dfrac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1} + \dfrac{1}{2a^2(n-1)}\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} & n \geqslant 2 \end{cases}$$

### 二、一些例题

**例 5.1.3** (正余弦齐次分式函数) 计算 $\displaystyle\int \frac{7\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x}\mathrm{d}x.$

**解** 由于 $7\sin x+\cos x=3\sin x+4\cos x-(3\sin x+4\cos x)'$, 有

$$\int \frac{7\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x}\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x-\int \frac{\mathrm{d}\,(3\sin x+4\cos x)}{3\sin x+4\cos x}=x-\ln|3\sin x+4\cos x|+C$$

## § 5.2 定积分

### 一、定积分的定义与 Darboux 和

**定义 5.2.1** (Riemann 和与定积分) (略)

**定义 5.2.2** (Darboux 和) (略)

### 二、定积分存在的充要条件 —- Darboux 定理

**引理 5.2.1** (Darboux 引理) 对于 [a, b] 上的有界函数 f(x)，成立

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\overline{S}(P)=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x,\qquad \lim_{\lambda(P)\to 0}\underline{S}(P)=\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

确切地说，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意划分 P，只要 $0<\lambda(P)<\delta$，则有

$$\left|\overline{S}(P)-\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\qquad \left|\underline{S}(P)-\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

**定理 5.2.1** (可积的充要条件，Darboux 定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则以下命题等价：

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积；
2. $\displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$;

3. $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\left(\overline{S}(P)-\underline{S}(P)\right)=0$;

4. 存在一列划分 $\{P_l\}_{l=1}^{\infty}$，使得 $\lim\limits_{l\to\infty}\left(\overline{S}(P_l)-\underline{S}(P_l)\right)=0$.

4'. 对任意 $\varepsilon>0$，存在划分 $P$，使得 $\overline{S}(P)-\underline{S}(P)<\varepsilon$。

最后，若 $f(x)$ 可积，则成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

## 三、定积分存在的充要条件 —- Lebesgue 判别法

先给出一个较弱的定理

**定理 5.2.2** 闭区间上的连读函数可积.

**证明** 由一致连续性即得. □

**定义 5.2.3** (区间的测度与零测集) 定义开、闭区间 $I=(a,b)$ 的长度 $|I|=b-a$
设集合 $S\subseteq\mathbb{R}$。如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在至多可列个开区间 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$S\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n \quad 且 \quad \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|<\varepsilon,$$

则称 $S$ 是一个零测集。

**例 5.2.1** 证明：$\mathbb{R}$ 中的可列集是零测集.
**证明** 设 $S\subset\mathbb{R}$ 是可列集，记

$$S=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots\}.$$

任取 $\varepsilon>0$，对每个 $n$，记

$$I_n=\left(x_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+2}},x_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right).$$

则显然

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon.$$

所以，$S$ 是零测集。

**注**：如果在某区间上，某数学性质在一个零测集之外均成立，则称该区间上该性质**几乎处处成立**.

再给出一道相关例题

**例 5.2.2** 证明：对任意有界函数 $f(x)$, $f(x)$ 可积当且仅当对任意 $\varepsilon, \sigma > 0$, 存在一划分 $P$, 使得

$$\sum_{\omega_i \geqslant \varepsilon} \omega_i \Delta x_i < \sigma$$

**证明** $f(x)$ 可积等价于 $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{p} w_i \Delta x_i = 0$. 令 $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = M$, $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = m$

- 充分性：
  对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2(p-1)}}, \sigma = \dfrac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}, \varepsilon_0 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2(p-1)}}$ 取分划 $P$ 满足 $\lambda(P) < \delta$, 有

  $$\sum_{i=1}^{p} w_i \Delta x_i = \sum_{w_i \geqslant \varepsilon_0} w_i \Delta x_i + \sum_{w_i < \varepsilon_0} w_i \Delta x_i < (p-1)(M-m)\sigma + (p-1)\varepsilon_0 \delta = \varepsilon$$

  即 $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{p} w_i \Delta x_i = 0$, $f(x)$ 可积.

- 必要性：
  取定 $\varepsilon_0 > 0$, 存在 $\sigma = \min\{b-a, \sqrt{\varepsilon_0}\}, \varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{\sigma}$. 假设对任意分划 $P$ 满足

$\sum\limits_{w_i \geqslant \varepsilon} \Delta x_i \geqslant \sigma$, 有

$$\sum_{i=1}^{p} w_i \Delta x_i = \sum_{w_i \geqslant \varepsilon_0} w_i \Delta x_i + \sum_{w_i < \varepsilon_0} w_i \Delta x_i \geqslant \varepsilon\sigma + 0 = \varepsilon_0$$

表明 $f(x)$ 不可积，矛盾！因此对任意 $\varepsilon > 0, \sigma > 0$, 存在划分 $P$, $\sum\limits_{w_i \geqslant \varepsilon} \Delta x_i < \sigma$

**定理 5.2.3** (Lebesgue 判别法) $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充要条件是 $f(x)$ 的间断点集是一个可列集. ($f(x)$ 几乎处处连续)

**证明** 首先我们定义符号：对于任意 $x \in D_f$,

$$\omega_f(x, \varepsilon) := \sup_{x_1, x_2 \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)} |f(x_1) - f(x_2)|$$

以及由于 $\omega_f(x, \varepsilon)$ 关于 $\varepsilon$ 单增由下界，由单调有界定理，当 $\varepsilon \to 0^+$ 的极限存在. 因此定义

$$\omega_f(x) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \omega_f(x, \varepsilon)$$

因此我们易得如下引理：

**引理 5.2.2** $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续当且仅当 $\omega_f(x_0) = 0$.

**充分性：**

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，记 $|f(x)| \leqslant M$.

设 $K \subseteq [a, b]$ 是 $f(x)$ 所有间断点的集合，则 $K$ 为零测集.

任取 $\varepsilon > 0$. 则由零测集的定义，存在至多可列个开区间 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

另一方面，对任意 $x \in [a, b] \setminus K$，由于 $x$ 是连续点，所以有

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(x, \delta) = 0.$$

由极限的定义，存在 $\delta_x > 0$，使得

$$\omega_f(x, 2\delta_x) := \sup_{x', x'' \in (x-2\delta_x, x+2\delta_x) \cap [a,b]} |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

显然，$\{(x-\delta_x, x+\delta_x)\}_{x\in[a,b]\setminus K} \cup \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖，因为它分别地覆盖了 $[a,b]\setminus K$ 与 $K$ 中的每一个点. 根据有限覆盖定理，它有有限子覆盖，记为

$$[a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{N}(y_j-\delta_{y_j}, y_j+\delta_{y_j}) \cup \bigcup_{l=1}^{M} I_{k_l}.$$

该子覆盖中所有开区间的端点构成了 $[a,b]$ 的一个划分 $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ($[a,b]$ 之外的端点忽略). 该划分所决定的小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 可以分为两类：

I. $(x_{i-1}, x_i)$ 包含于某个 $I_{k_l}$. 则所有这类小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度之和不超过所有 $I_{k_l}$ 的长度之和，从而小于 $\dfrac{\varepsilon}{4M}$. 记这些 $i$ 构成的集合为 $\Lambda_1$

II. $(x_{i-1}, x_i)$ 不包含于任何 $I_{k_l}$. 根据覆盖关系，可以通过左端点 $x_{i-1}$ 的位置讨论 $[x_{i-1}, x_i]$ 的位置：

- $x_{i-1}$ 属于某个 $I_{k_l}$. 由于 $x_i$ 是一切 $x_{i-1}$ 右侧端点中距离 $x_{i-1}$ 最近的那一个，所以它不比 $I_{k_l}$ 的右端点更靠右. 此时 $(x_{i-1}, x_i) \subset I_{k_l}$. 因此该情形不会发生.
- $x_{i-1}$ 不属于任意 $I_{k_l}$，根据覆盖，它必属于某个 $(y_j-\delta_{y_j}, y_j+\delta_{y_j})$. 利用类似于上一种情形的讨论，必有

$$(x_{i-1}, x_i) \subset (y_j-\delta_{y_j}, y_j+\delta_{y_j}).$$

从而

$$[x_{i-1}, x_i] \subset (y_j-2\delta_{y_j}, y_j+2\delta_{y_j}).$$

可见，第二类区间上函数的振幅小于 $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 记这些 $i$ 构成的集合为 $\Lambda_2$

最后，对于该划分 $P$

$$S(P)-S(P) = \sum_{i\in\Lambda_1}\omega_i\Delta x_i + \sum_{i\in\Lambda_2}\omega_i\Delta x_i < 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a) = \varepsilon.$$

**必要性：**

先证明一个引理：

> 引理 **5.2.3** 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则对任意 $\sigma > 0$, 集合
>
> $$\{x\in[a,b] \mid \omega_f(x) > \sigma\}$$
>
> 是零测集.

由 **例题 5.2.2** 立得.

注意到

$$
\begin{aligned}
x \in \{x \in [a,b] \mid \omega_f(x) > 0\} &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \omega_f(x) > \frac{1}{n} \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ x \in [a,b] \,\middle|\, \omega_f(x) > \frac{1}{n} \right\}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\{x \in [a,b] \mid \omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ x \in [a,b] \,\middle|\, \omega_f(x) > \frac{1}{n} \right\}
$$

即 $\{x \in [a,b] \mid \omega_f(x) > 0\}$ 是可列集. □

**例 5.2.3** 闭区间上的单调有界函数可积.

**证明** 由 **定理 3.2.1** 立得.

## 四、积分中值定理与微积分基本定理

**定理 5.2.4** (积分第一中值定理) 设 $f(x), g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号. 记 $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x), m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 则存在 $\eta \in [m, M]$, 使得.

$$
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \eta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x
$$

特别地，当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi \in [a,b]$,

$$
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x
$$

**定义 5.2.4** 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则对任意 $x \in [a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 为 $f$ 的变上限积分.

关于 $F(x)$ 有性质：

**定理 5.2.5**

- $F(x)$ 有 Lipschitz 性质.
- 若 $f(x)$ 连续，$F(x)$ 可导，且 $F'(x) = f(x)$

**证明**

- 由 $|f(x)| \leqslant M$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \int_x^y f(x) \mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \int_x^y |f(x)| \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_x^y M \mathrm{d}x = M \, |y - x| \end{aligned}$$

即证.

- 考虑 $x_0 \in (a, b)$ 的情形. 任取 $\varepsilon > 0$. 根据 $f(x)$ 在 $x_0$ 的连续性，存在 $\delta > 0$，使得

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

对任意 $\Delta x$，根据定积分的区间可加性与第一中值定理：

$$\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) \, dt = f(\xi),$$

其中 $\xi \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ 或 $\xi \in [x_0 + \Delta x, x_0]$. 所以，只要 $0 < |\Delta x| < \delta$，就有

$$\left| \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| = |f(\xi) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

由定义

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

$\square$

**定理 5.2.6** (微积分第一基本定理) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则其变上限积分 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

**定理 5.2.7** (微积分第二基本定理，Newton-Leibniz 公式) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

**定理** 5.2.7可以加强为：

**定理 5.2.8** 设函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上可导. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且有 $F'(x)=f(x), x\in(a,b)$。那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

**定理 5.2.9** (积分第二中值定理) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调有界. 则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

**证明** 不妨 $g(x)$ 单增.
令 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$. $F(x)$ 连续, $F(x)$ 有最大、最小值 $M,m$.
由于

$$\begin{aligned} g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x &= g(a)F(x)\Big|_a^\xi + g(b)F(x)\Big|_\xi^b \\ &= F(b)g(b)-F(a)g(a)-F(\xi)(g(b)-g(a)) \end{aligned}$$

因此原式等价于：

$$-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + F(x)g(x)\Big|_a^b = F(\xi)g(x)\Big|_a^b$$

由于 $F(x)$ 连续，$g(x)$ 单增，只需证

$$mg(x)\Big|_a^b \leqslant -\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + F(x)g(x)\Big|_a^b \leqslant Mg(x)\Big|_a^b$$

$\Leftrightarrow$

$$mg(x)\Big|_a^b + \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant F(x)g(x)\Big|_a^b \leqslant Mg(x)\Big|_a^b + \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

取 $[a,b]$ 的任意划分 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 有

$$\begin{aligned} F(x)g(x)\Big|_a^b &= \sum_{i=1}^n (F(x_i)g(x_i) - F(x_{i-1}g(x_{i-1}))) \\ &= \sum_{i=1}^n F(x_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) + \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) \end{aligned}$$

显然

$$mg(x)\Big|_a^b \leqslant \sum_{i=1}^n F(x_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) \leqslant Mg(x)\Big|_a^b$$

而

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) - \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \\ =&\left|\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^n f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \\ \leqslant&\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|\,|g(x_{i-1}) - g(t)|\,\mathrm{d}t \\ \leqslant&M\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_i(g)\mathrm{d}x \\ =&M\sum_{i=1}^n \omega_i(g)\Delta x_i \end{aligned}$$

当 $\lambda(P) \to 0$ 时，上式趋近于 0. 因此式 (1) 成立. □

## 五、积分不等式

**定义 5.2.5** (函数的 $p$-范数) 对 $[a,b]$ 上可积的函数 $f(x)$, 定义 $f(x)$ 的 $p$-范数:

$$\|f(x)\|_p=\left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

**定理 5.2.10** (Hölder 不等式) $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且有 $p,q>1$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\|f(x)\|_p\cdot\|g(x)\|_q$$

当 $p=q=2$ 时，即 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

**证明** 由 Young 不等式，类似 四离散 Hölder 不等式即可. □

**例 5.2.4** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续导数, $f(a)=f(b)=0$, 且 $\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x=1$. 证明:

$$\int_a^b x^2(f'(x))^2\mathrm{d}x\geq\frac{1}{4}$$

**证明**

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x \\
&= x f(x)^2 \Big|_a^b - \int_a^b x(f(x)^2)' \mathrm{d}x \\
&= -\int_a^b 2x f'(x) f(x) \mathrm{d}x \\
&= 2\int_a^b (-x f'(x)) f(x) \mathrm{d}x \\
&\le 2\left(\int_a^b (-x f'(x))^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\left(\int_a^b x^2 (f'(x))^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

□

## 六、有关可求长曲线

**定义 5.2.6** (曲线的定义)
- 参数方程：闭区间 $[a,b]$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的连续映射 $\gamma$
- 曲线：映射 $\gamma$ 的象空间

**定义 5.2.7** (可求长曲线)　若对 $[a,b]$ 的任意划分 $P: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 极限 $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)}$ 存在且其值不依赖划分的选取.
改极限定义为曲线的长度.

不难发现

$$
\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)} = \sup_{P} \sum_{i=1}^{n} \overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)}
$$

**定义 5.2.8** (光滑曲线)　对曲线的参数方程 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, 若 $x(t), y(t)$ 均有连续导数，且

$$
(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0
$$

则称该曲线为光滑曲线.

**定理 5.2.11** 若曲线的参数方程的各个分量均可求导且导数可积，则曲线可求长，且其长度为

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t$$

光滑曲线是其一特殊情况.

(相当于速率乘以时间)

**证明**

由 Lagrange 中值定理，

$$\begin{aligned}\overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)} &= \sqrt{(x(t_{i-1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i-1}) - y(t_i))^2} \\ &= \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y(\eta_i))^2} \Delta t_i\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&\left|\overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t\right| \\ =&\left|\int_{t_{i-1}}^{i_i} \left(\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y(\eta_i))^2} - \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t\right)\right| \\ \leqslant&\int_{t_{i-1}}^{i_i} \left|\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y(\eta_i))^2} - \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\right| \mathrm{d}t \\ \leqslant&\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(|x'(\xi_i) - x'(t)| + |y'(\eta_i) - y'(t)|\right) \mathrm{d}t \\ \leqslant&\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\omega_i(x') + \omega_i(y')\right) \mathrm{d}t\end{aligned}$$

注意到 $\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t$, 得

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^n \overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)} - \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t\right| \\ \leqslant&\sum_{i=1}^n \omega_i(x') \Delta t + \sum_{i=1}^n \omega_i(y') \Delta t \to 0 \quad (\lambda(P) \to 0)\end{aligned}$$

故二者相等. □

**例 5.2.5** $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=0$, 证明：$\sup\limits_{x\in[a,b]} f^2(x) \leqslant (b-a)\displaystyle\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$

**证明**

$$(b-a)\int_a^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \geqslant (x-a)\int_a^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \geqslant \left(\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2 = f^2(x)$$

由于存在 $x_0\in[a,b]$, $f^2(x_0)=\sup\limits_{x\in[a,b]} f^2(x)$

$$(b-a)\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant (b-a)\int_a^{x_0} (f'(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \sup_{x\in[a,b]} f^2(x)$$

□

**例 5.2.6** $f(x), g(x)$ 连续且单调递增，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

**证明** 类似 Chebyshev 不等式. □

# § 5.3 广义积分

## 一、无穷积分和瑕积分的定义

(略)

**例 5.3.1** 求积分 $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

**解**

$$I_n = -x^n\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = nI_{n-1}$$

又

$$I_0=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1$$

因此 $I_n=n!$

我们令 $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

**例 5.3.2** 求积分 $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x.$

**解**

$$\begin{aligned}I&\xlongequal{x=2t}2\int_0^{\pi/4}\ln 2\sin t\cos t\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\left(\int_0^{\pi/4}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/4}\ln\cos x\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/2}\ln\sin x dx=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I\end{aligned}$$

因此 $I=-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$

记住上述结论

**例 5.3.3** 求积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+x^\alpha}\mathrm{d}x.$

**解**

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\frac{1}{1+x^\alpha}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\frac{1}{1+\frac{1}{t^\alpha}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x^\alpha}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

## 二、广义积分敛散性的判别法

**定理 5.3.1** (比较判别法) $f(x),\varphi(x)\geqslant 0$ 在任意有限区间上 Riemann 可积，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=k\geqslant 0\text{ 或 }+\infty$$

则

- $k\in[0,+\infty)$, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

- $k \in (0, +\infty]$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ 发散.

常用 $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^p}$, 是为 Cauchy 判别法.

**定理 5.3.2** (Abel-Dirichlet 判别法) $f(x), \varphi(x) \geqslant 0$ 在任意有限区间上 Riemann 可积，一下条件成立之一时，$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛

- (Abel) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$g(x)$ 单调有界
- (Dirichlet) $F(x) = \int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 有界，$g(x)$ 单调且收敛到 0

**证明** 由 $g(x)$ 单调，

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(A')\int_{A'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(A'')\int_{\xi}^{A''} f(x)\mathrm{d}x$$

上述两个条件依次对应 $\int_{A'}^{A''} f(x)\mathrm{d}x$ 小和 $g(A)$ 小，再利用 Cauchy 收敛原理即可. □

# 第三部分 级数

## 第六章 数项级数

### § 6.1 定义与基本性质

**定义 6.1.1** $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和序列.

**定理 6.1.1** 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件为 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**定理 6.1.2** 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则在其求和表达式中任意添加括号所得级数任然收敛.

## § 6.2 正项级数

### 一、上下极限的定义与性质

**定义 6.2.1** 设 $\{x_n\}$ 是一有界个数列，$\xi \in \mathbb{R}$。如果存在 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi,$$

则称 $\xi$ 是 $\{x_n\}$ 的一个极限点。将 $\{x_n\}$ 一切极限点所组成的集合记作 $E$. $\sup E$ 称为 $\{x_n\}$ 的上极限，记作 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$。$\inf E$ 称为 $\{x_n\}$ 的下极限，记作 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

**定理 6.2.1** 设 $x_n$ 有界，则

- 存在子列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，使得 $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$;
- 存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

**定理 6.2.2** 设 $x_n$ 有界，则

- $H = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ 的充要条件是：对任意给定 $\varepsilon > 0$
  - 存在 $N \in \mathbb{N}$，$\forall n \geq N : x_n < H + \varepsilon$;
  - 数列 $\{x_n\}$ 中有无穷多项大于 $H - \varepsilon$.
- $h = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ 的充要条件是：对任意给定 $\varepsilon > 0$
  - 存在 $N \in \mathbb{N}$，$\forall n \geq N : x_n > h - \varepsilon$;
  - 数列 $\{x_n\}$ 中有无穷多项小于 $h + \varepsilon$.

**定理 6.2.3** $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

**定理 6.2.4** 设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是两个数列，则

- $\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$, $\liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\ge\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n$;
- 若 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

**定理 6.2.5** $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_k=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}x_k,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}x_k=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n}x_k.$

## 二、正项级数敛散性的判别法

**定理 6.2.6** 正项数列 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是其部分和序列是有界序列.

**定理 6.2.7** (比较判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 是正项级数，且存在常数 $A>0$, 使得

$$x_n\le Ay_n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

- 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛;
- 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 发散。

**定理 6.2.8** (比较判别法的极限形式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ ，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 是正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l\in[0,+\infty).$$

- 若 $0\le l<+\infty$ ，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 也收敛;

- 若 $0 < l \leq +\infty$ ，则当 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也发散。

**定理 6.2.9** (Cauchy 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项数列，且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = r$ ，则：

- 如果 $r < 1$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；
- 如果 $r > 1$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散；
- 如果 $r = 1$ ，则无法判断。

**定理 6.2.10** (d'Alembert 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项数列，且 $x_n \neq 0$ ，则：

- 如果 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \bar{r} < 1$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；
- 如果 $\underline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \underline{r} > 1$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散；
- 如果 $\bar{r} \geq 1$ 或 $\underline{\mathrm{r}} \leq 1$ ，则无法判断。

**定理 6.2.11** (积分判别法) 设 $f(x)$ 是 $[a, +\infty)$ 上的非负函数，且在任意有限区间 $[a, A] \subset [a, +\infty)$ 上 Riemann 可积。取一个严格单增的无穷大量 $\{a_n\}$ ：

$$a = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots \to +\infty$$

令

$$u_n := \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同为 $+\infty$ .

特别地，如果 $f(x)$ 单减，$a_n = n$ ，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 与 $\sum_{n=[a]+1}^{\infty} f(n)$ 同时收敛或发散.

**例 6.2.1** 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 在 $0<p\leq 1$ 时发散，在 $p>1$ 时收敛.

## § 6.3 任意项级数

### 一、基本性质

**定义 6.3.1** (条件收敛和绝对收敛) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是任意项级数，如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛。如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

**定理 6.3.1** 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则其收敛.

### 二、Leibniz 判别法

**定义 6.3.2** (Leibniz 级数) 设 $\{u_n\}_1^{\infty}$ 是正项数列，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 为交错级数. 若 $u_n$ 单减且收敛到 0, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 为 Leibniz 级数.

**定理 6.3.2** Leibniz 级数收敛.

### 三、Abel 判别法与 Dirichlet 判别法