作业四

Noflowerzzk

2025 年 3 月 16 日

1

(1) 特征多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda+3)$ 因此 Jordan 标准型为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(2) 特征多项式为 $(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$ 因此 Jordan 标准型为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) 由于 A 的特征值均为 1, 且 $\eta_k = n - r((\lambda E - A)^k) = k$ 因此只有一个 Jordan 块，为 $J_n(1)$

2

(1) 观察即得为 $f(x) = (x-1)^2$

(2) 由于 $A^2 = E$, $f(x) = x^2 - 1$

(3) 观察即得为 $f(x) = (x-1)^2(x-2)$

(4) 同理仍然是 $f(x) = (x-1)^2(x-2)$

(5) 由于 $A^2 = 0$, $f(x) = x^2$

3

证明. 假设其最小多项式常数项为 0, 则其因式分解后必有 x 项，表明其特征多项式中也有 x 项. 因此其有特征值 0, 与其可逆矛盾. 因此其最小多项式常数项不为 0. □

4

由于 A 与 A^T 相似形成的 Jordan 标准型相同，故最小多项式仍旧为 $\lambda^5+2\lambda^4-7\lambda^3-6\lambda^2+5\lambda+4$. 由于 $1+2A^{-1}-7A^{-2}-6A^{-3}+5A^{-4}+4A^{-5} = A^{-5}f(A) = 0$ $1+2\lambda-7\lambda^2-6\lambda^3+5\lambda^4+4\lambda^5$ 为 A^{-1} 的一个化零多项式. 故 A^{-1} 的最小多项式为 $\lambda^5 + \frac{5}{4}\lambda^4 - \frac{3}{2}\lambda^3 - \frac{7}{4}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}$.

5

证明. 由于 $x^m - 1$ 没有重根，故 A 的最小多项式也没有重根. 因此 A 的 Jordan 标准型为对角阵，即 A 可相似对角化. $\square$