数模的概率统计笔记

Noflowerzzk

目 录

第一部分 概率论

第一章 随机变量

§ 1.1 随机变量的数值性质

定义 1.1.1

- 协方差 $\operatorname{cov}(X,Y)=E((X-E(X))(Y-E(Y)))$
- 相关系数/标准化协方差 $\rho(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$
- 变异系数 $\delta_X=\dfrac{\sqrt{D(X)}}{|E(X)|}$
- k 阶原点矩 $E(X^k)$
- k 阶中心矩 $E\left((X-E(X))^k\right)$

§ 1.2 大数定律

定理 1.2.1 (Chebyshev 不等式)

$$P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

定义 1.2.1 (依概率收敛) $\exists c,\forall\varepsilon>0,\ \lim\limits_{n\to+\infty}P\left(|X_n-c|\leqslant\varepsilon\right)=1$, 则称随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 c, 记作 $X_n\xrightarrow{P}c$

定理 1.2.2 (Chebyshev 大数定律) 随机变量序列 $\{X_n\}$ 两两不 (线性) 相关，且 $D(X_i)$ 有一致上界 c (即 $D(X_i)<c$), 则有

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

定理 1.2.3 (相互独立同分布 (辛钦) 大数定律) $\{X_i\}$ 相互独立同分布，$E(X_i)=\mu$ 有限，则

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$$

§ 1.3 中心极限定理

定理 1.3.1 (列维-林德伯格中心极限定理) $\{X_i\}$ 相互独立同分布，$D(X_i)=\sigma^2$ 有限，$E(X_i)=\mu$，则

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)=\Phi(x)$$

即当 n 充分大时，可以认为 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\overset{\text{近似}}{\sim}N(n\mu,n\sigma^2)$ 或者 $\bar{X}\overset{\text{近似}}{\sim}N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

第二部分 数理统计

第二章 统计量

§ 2.1 三大分布

一、χ^2 分布

定义 2.1.1 设 $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ 为相互独立的标准正态分布随机变量，称随机变量 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $Y\sim\chi^2(n)$.

χ^2 分布的密度函数为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

定理 2.1.1 $Y \sim \chi^2(n)$ 有以下性质

- $E(Y) = n, D(Y) = 2n$
- 可加性，$X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n), X, Y$ 相互独立，则 $X + Y \sim \chi^2(m+n)$

二、t 分布 (学生氏分布)

定义 2.1.2 设 X, Y 相互独立，$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, 则称 $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布.

t 分布的密度函数为

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$t(n)$ 的密度函数与标准正态分布 $N(0,1)$ 密度很相似, 它们都是关于原点对称, 单峰偶函数, 在 $x = 0$ 处达到极大. 但 $t(n)$ 的峰值低于 $N(0,1)$ 的峰值, $t(n)$ 的密度函数尾部都要比 $N(0,1)$ 的两侧尾部粗一些. 容易证明:

$$\lim_{n \to \infty} f(x) = \Phi(x)$$