数分作业三

noflowerzzl

2024.10.16

1

(1)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right)^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2}=\mathrm{e}$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}=\sqrt{\mathrm{e}}$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}=1$$

(5) 由 $\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

且 $\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}\frac{n-1}{n}}>\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}$

由夹逼原理,
$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=e$$

2

(1) 收敛.

证明. 由 $x_1=\sqrt{2}<2, x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}<2\Leftrightarrow x_n<2$, 归纳得 $x_n<2$.

又 $x_n<x_{n+1}\Leftrightarrow(x_n+1)(x_n-2)<0$, 由 $0<x<2$ 知其成立. 所以 x_n 单调递增有上界, 极限存在, 设为 A.

有 $A=\sqrt{A+2}\Rightarrow A=2$. □

(2) 收敛.

证明. 由 $x_1=\sqrt{2}<2, x_{n+1}=\sqrt{2x_n}<2 \Leftrightarrow x_n<2$, 归纳得 $x_n<2$.
又 $x_n<x_{n+1} \Leftrightarrow x_n^2<2x_n$, 由 $0<x<2$ 知其成立. 所以 x_n 单调递增有上界, 极限存在, 设为 A.
有 $A=\sqrt{2A} \Rightarrow A=2$. □

(3) 收敛.

证明. 由 $x_1=\sqrt{2}>-1, x_{n+1}=\frac{-1}{x_n+2}>-1$, 归纳得 $x_n>-1$
又 $x_n>x_{n+1} \Leftrightarrow (x_n+1)^2>0$, 由 $x>-1$ 知其成立. 所以 x_n 单调递减有下界, 极限存在, 设为 A.
有 $A=\frac{-1}{A+2} \Rightarrow A=-1$. □

(4) 收敛.

证明. 由 $x_1=1<4, x_{n+1}=\sqrt{4+3x_n}<4 \Leftrightarrow x_n<4$, 归纳得 $x_n<4$.
又 $x_n<x_{n+1} \Leftrightarrow (x_n-4)(x_n+1)<0$, 由 $0<x<4$ 知其成立. 所以 x_n 单调递增有上界, 极限存在, 设为 A.
有 $A=\sqrt{4+3A} \Rightarrow A=4$. □

(5) 收敛.

证明. 由 $x_1\in(0,1), x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}\in(0,1) \Leftrightarrow x_n\in(0,1)$, 归纳得 $x_n\in(0,1)$.
又 $x_n>x_{n+1} \Leftrightarrow 1-x_n>(1-x_n)^2$, 由 $0<x<1$ 知其成立. 所以 x_n 单调递减有下界, 极限存在, 设为 $A<1$.
有 $A=1-\sqrt{1-A} \Rightarrow A=0$. □

(6) 收敛.

证明. 由 $x_1\in(0,1), x_{n+1}=x_n(1-x_n)\in(0,1) \Leftrightarrow x_n\in(0,1)$, 归纳得 $x_n\in(0,1)$.
又 $x_n>x_{n+1} \Leftrightarrow x_n>x_n(1-x_n)$, 由 $0<x$ 知其成立. 所以 x_n 单调递减有下界, 极限存在, 设为 $A<1$.
有 $A=A(1-A) \Rightarrow A=0$. □

15

证明. 充分性:
$\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1>0$, $n>N_1$时, $|\mathrm{diam}A_n|<\varepsilon$.
由 $\mathrm{diam}A_k$ 定义, $\forall p,q>n>N_1, |x_p-x_q|\leqslant|\mathrm{diam}A_n|<\varepsilon$.
由柯西收敛准则, x_n 收敛.
必要性:
由于 $\{x_n\}$ 收敛, 由柯西收敛准则, $\forall\varepsilon>0, \exists N>0, p,q>N$ 时 $|x_p-x_q|<\varepsilon$.
则 $\mathrm{diam}A_n=\sup|x_p-x_q|<\varepsilon$.
即 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}A_n=0$. □

16

证明. 设 $\{x_n\}$ 单调递且有上界.
假设其不收敛, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists m, n > N, |x_m - x_n| \geqslant \varepsilon_0$.
取 $N_1 = 1$, $|x_{n_1} - x_{m_1}| \geqslant \varepsilon_0$, 且 $n_1 < m_1$
取 $N_2 = m_1$, $|x_{n_2} - x_{m_2}| \geqslant \varepsilon_0$, 且 $n_2 < m_2$
...
取 $N_k = m_{k-1}$, $|x_{n_k} - x_{m_k}| \geqslant \varepsilon_0$, 且 $n_k < m_k$.
有 $x_{n_k} - x_{n_1} > k\varepsilon_0$, $\{x_{n_k}\}$ 无上界, 矛盾! 所以 $\{x_n\}$ 收敛. $\square$