作业一

Noflowerzzk

2025.02.19

1

(1) 证明. 设 $x \in (A^o)^c$, 则 $x \notin A^o$. 故 $x \in A'$ 或 $x \in A^c$. 若 $x \in A'$, 则 $x \in (A^c)' \subseteq \overline{A^c}$; 若 $x \in A^c$, 则显然 $x \in \overline{A^c}$. 因此 $(A^o)^c \subseteq \overline{A^c}$

设 $x \in \overline{A^c}$, 则 $x \in A^c$ 或 $x \in (A^c)' = A'$. 若 $x \in A^c$, 则由于 $A^c \subseteq (A^o)^c$, 故 $x \in (A^o)^c$; 若 $x \in (A^c)' = A'$, 则 $x \notin A^o$, 即 $x \in (A^o)^c$. 因此 $\overline{A^c} \subseteq (A^o)^c$ □

(2) 证明. 由于 $\overline{A} = ((A^c)^o)^c$, 故 $(\overline{A})^c = (A^c)^o$. □

2

(1) 证明. $\forall a \in B(x, r)$, 取 $\varepsilon = r - d(a, x) > 0$, 构造球 $B(a, \varepsilon/2)$, 有 $\forall a_0 \in B(a, \varepsilon/2), d(a_0, x) \leqslant d(a, x) + \varepsilon/2 < r$, 故 $a_0 \in B(x, r)$, 即 $B(a, \varepsilon) \subseteq B(x, r)$，因此 $B(x, r)$ 是开集. □

(2) 证明. 由于对任意闭球内的点列 $\{x_n\}$, 有 $d(x_n, x) \leqslant r$. 因此对任意收敛点列，设其收敛到 x_0, 有 $d(x, x_0) \leqslant r$, 即 $x_0 \in \overline{B}(x, r)$. 因此 $(\bar{B}(x, r))' \in \overline{B}(x, r)$, 即 $\overline{B}(x, r)$ 是闭集. □

3

(1) 证明.

- 取一族开集 $\{U_i\}_{i \in I}$.
  任取 $x \in \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, 不妨 $x \in U_1$. 则存在 $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \subseteq U_1$. 因此 $B(x, \varepsilon) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, 即 $\bigcup\limits_{i \in I} U_i$ 是开集.

- 当 I 为有限集时，任取 $x \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$, 对任意 $i \in I$ 有存在 $\varepsilon_i > 0$, $B(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i$. 取 $\varepsilon = \min\limits_{i \in I} \varepsilon_i$, 有 $B(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} U_i$, 即 $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ 是开集.

□

(2) 证明.

- 取一族闭集 $\{U_i\}_{i \in I}$. 令 $S_i = U_i^c$, 则 S_i 是开集.
  由于 $\bigcup\limits_{i \in I} S_i$ 是开集，则 $\bigcap\limits_{i \in I} U_i = \left(\bigcup\limits_{i \in I} S_i \right)^c$ 为闭集.

– 当 I 是有限集时，由于 $\bigcap_{i\in I} S_i$ 是开集，则 $\bigcup_{i\in I} U_i = \left(\bigcup_{i\in I} S_i\right)^c$ 为闭集.

□

4

(1) 证明. 任取 Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 由于 Y 列紧，其存在收敛子列收敛到 Y 内. 即存在 $x \in Y$，任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0, \forall n > N$ 有 $d(x_{k_n}, x) < \varepsilon/2$. 又由于其为 Cauchy 列，存在 $N' > 0, \forall m > n > N'$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$. 因此任意 $n > \max\{k_N, N'\}$, 有 $d(x_n, x) < \varepsilon$, 即 $\{x_n\}$ 收敛到 $x \in Y$. 因此 Y 完备. □

(2) 证明. 取 Y 中 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 由于 X 完备，有 $\{x_n\}$ 收敛到 $x \in X$. 而由于 Y 是闭集，$\{x_n\}$ 若收敛，必收敛到 Y 内，即 $x \in Y$. 故 Y 中 Cauchy 列收敛，即 Y 完备. □

5

证明. 任取 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 取 $A_n = \{a \mid d(a, x_n) \leqslant \frac{1}{n}\} \cap X$. 由于 A_n 是闭球，A_n 是闭集. 且由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，任意 $m > n$, 有 $x_m \in A_n$. 因此 A_n 构成闭集套，且 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$. 故由闭集套定理，存在唯一 $\zeta \in A_n(\forall n)$. 此时任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = 1/\varepsilon + 1$, 任意 $n > N, \zeta \in A_n \Rightarrow d(x_n, \zeta) < \varepsilon$, 即 $\{x_n\}$ 收敛到 $\zeta \in X$. 故 X 完备. □