

# 数分例题整理

---

## 目 录

## 第一部分 实数基本定理与极限 1

## 第一章 实数的定义 1

## § 1.1 自然数与其定义 . . . . . 1

## 一、自然数的定义 . . . . . 1

## § 1.2 实数的定义 . . . . . 1

## § 1.3 实数基本定理 . . . . . 1

## 第二章 数列极限与相关计算 2

## § 2.1 数列极限与相关计算 . . . . . 2

## 第三章 函数极限、连续相关定理 3

## § 3.1 函数极限 . . . . . 3

## § 3.2 连续函数与间断 . . . . . 3

## 第二部分 微分与积分 4

## 第四章 函数微分、导数相关定理 4

## § 4.1 导数基本性质与中值定理 4

## 一、中值定理 . . . . . 4

## 二、导函数的性质 . . . . . 5

## § 4.2 Taylor 公式 . . . . . 5

## 一、推导与证明 . . . . . 6

## § 4.3 凸函数与 Lipschitz 条件 . . . . . 9

## 一、凸函数与二阶导的关系 . . . . . 9

## 二、Lipschitz 条件 . . . . . 10

## 三、开区间上的凸函数 . . . . . 11

## 四、相关不等式 . . . . . 13

## 第五章 函数不定积分、定积分相关定理 14

## § 5.1 不定积分 . . . . . 14

## 一、计算计巧 . . . . . 15

## 二、一些例题 . . . . . 15

## § 5.2 定积分 . . . . . 15

## 一、定积分的定义与 Darboux 和 . . . . . 16

# 第一部分 实数基本定理与极限

## 第一章 实数的定义

### § 1.1 自然数与其定义

#### 一、自然数的定义

定义 1.1.1 (Peano 公理) (略)

定义 1.1.2 (自然数加法与乘法) 自然数加法定义为映射  $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 满足以下性质:

- $a + b = b + a$
- $a + 1 = S(a)$
- $a + S(b) = S(a + b)$

自然数的乘法定义为映射  $\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 满足以下性质:

- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot 1 = a$
- $a \cdot S(b) = a + (a \cdot b)$

定义 1.1.3 (自然数的大小关系)  $a < b$  当且仅当存在  $c \in \mathbb{N}, b = a + c$ .

### § 1.2 实数的定义

(略)

### § 1.3 实数基本定理

**例 1.3.1** 证明:  $\mathbb{R}$  不可列.

**证明** 使用闭区间套定理.

反证法. 假设  $\mathbb{R}$  可列, 记  $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ .

(1) 取  $[a_1, b_1]$  使得  $x_1 \notin [a_1, b_1]$ .

(2) 三分  $[a_1, b_1]$  得三个小区间, 三者必有其一不含  $x_2$ . 记为  $[a_2, b_2]$ :

由此得到一个闭区间套  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ . 由闭区间套定理,  $\exists \xi \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \xi \in [a_n, b_n]$ .

但对  $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \notin [a_k, b_k]$ , 所以  $x_k \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ . 故  $\mathbb{R} \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \right) = \emptyset$ , 矛盾!

## 第二章 数列极限与相关计算

### § 2.1 数列极限与相关计算

**例 2.1.1** 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**证明** 令  $\sqrt[n]{n} = 1 + y_n$ , 有

$$n = (1 + y_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} y_n.$$

故

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = |y_n| < \sqrt{\frac{2}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$ , 则对  $n < N$  有  $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$

**例 2.1.2** 判断以下命题是否正确. 若正确, 给出证明; 若不正确, 给出反例:

数列  $a_n$  收敛的充要条件是, 对任意正数  $p$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$ .

**解** 反例如下: 令  $a_n = \sqrt{n}$ , 则  $\forall p > 0$

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

但显然该数列不收敛.

例 2.1.3 求极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{4n^2 + n}\pi)$ .

解

$$\begin{aligned}\sin(\sqrt{4n^2 + n}\pi) &= \sin\left(\left(\sqrt{4n^2 + n} - 2n\right)\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2}\pi\right)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{4n^2 + n}\pi) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## 第三章 函数极限、连续相关定理

### § 3.1 函数极限

定理 3.1.1 单调函数任意一点左右极限均存在

**证明** 不妨  $f(x)$  在  $(a, b)$  上单增, 对任意  $x_0 \in (a, b)$ ,  $\{f(x) | x \in (a, x_0)\}$  有上确界  $\alpha$ .

对任意  $x \in (a, x_0)$ ,  $f(x) \leq \alpha$ , 但  $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in (a, x_0), f(x') > \alpha - \varepsilon$ . 由  $f(x)$  单调性,  $\forall x \in (x', x_0), -\varepsilon < f(x) - \alpha \leq 0$ , 即  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$ .

右极限同理. □

### § 3.2 连续函数与间断

引理 3.2.1 (单调函数的不连续点) 单调函数的不连续点必然是跳跃间断点

**证明** 由定理 3.1.1 即得 □

定理 3.2.1 单调函数至多有可列个间断点

**证明** 由单调性及间断点的性质,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .

由有理数的稠密性, 在每个间断点  $x_0$  的区间 (由单调性, 它们两两不交)

$\left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right)$ , 必存在一个有理数, 用这个有理数代表这个区间. 则这些有理数与这些间断点一一对应.

因此间断点至多有可列个. □

**例 3.2.1**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个连续函数. 定义  $L(f) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$ . 证明: 若  $L(f)$  非空, 则  $L(f)$  是一个闭集. (闭集是包含所有聚点的集合)

**解**

## 第二部分 微分与积分

### 第四章 函数微分、导数相关定理

#### § 4.1 导数基本性质与中值定理

##### 一、中值定理

**例 4.1.1**  $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ , 其中  $a > 0$  且  $f(a) = 0$ . 证明:  $\exists \xi \in (a, b), f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$ .

**解** 令  $F(x) = (b-x)^a f(x)$ , 易知  $F(x) \in C[a, b] \cap D(a, b), F(a) = F(b) = 0$ , 由 Rolle 定理,  $\exists \xi \in (a, b), F'(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$

用 Rolle 定理证明等式的基本方法:

- 将等号一端改写成只有零, 形成  $g(\xi) = 0$
- 求积分  $G(x) = \int g(x) dx$
- 验证  $G(x)$  满足 Rolle 中值定理条件

例如上题, 化简为  $\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{a}{b-x} = 0$ , 有  $G(x) = (b-x)^a f(x)$

**例 4.1.2**  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶可导,  $f(0) = f(1), f'(1) = 1$ , 求证: 存在  $\xi \in (0, 1), f''(\xi) = 2$ .

**解**  $f''(x) - 2 = 0$ , 有  $f'(x) - 2x = C_1$ , 由条件  $f'(1) = 1$ , 有  $C_1 = -1$ , 化简有  $f'(x) - 2x + 1 = 0$ , 故  $F(x) = f(x) - x^2 + x$ . 下略.

**例 4.1.3** 证明  $2^x - x^2 = 1$  有且仅有三个实根

**解** 有三个解证明略.

假设有四个解, 反复使用中值定理可以证明最后的导函数没有解。

**例 4.1.4**  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可微, 且  $f(0) = 0, |f'(x)| \leq p|f(x)|$ , 证明  $f(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$

**证明** 先考虑  $x \in \left[0, \frac{1}{2p}\right]$  的情形.  $|f(x)|$  在  $\left[0, \frac{1}{2p}\right]$  的最大值为  $|f(x_0)| = M \geq 0$

$$M = |f(x) - f(0)| = |f'(\xi)x_0| \leq \frac{1}{2p} \cdot p|f(\xi)| \leq \frac{1}{2}M$$

因此  $M = 0$ . 对其它区间同理归纳即可.

## 二、导函数的性质

**定理 4.1.1** (导数的 Darboux 定理 (介值性))  $f(x)$  可导且  $f'(a) \neq f'(b)$ , 则对任意介于  $f'(a), f'(b)$  之间的  $r$ , 都存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $r = f'(\xi)$

两种证明方法

**证明** 不妨  $f'(a) < f'(b)$ , 对任意  $r \in (f'(a), f'(b))$ , 令  $F(x) = f(x) - rx$ , 有  $F(a) < 0, F(b) > 0$ . 故由极限保号性, 存在  $\delta > 0, \forall x \in (a, a + \delta), \frac{F(x) - F(a)}{x - a} < 0$ , 即  $F(x) < F(a)$ ,  $F(a)$  不是最小值.

同理  $F(b)$  也不是最小值. 因此最小值  $F(\xi)$  在开区间  $(a, b)$  上取到, 由费马定理,  $F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = r$ .  $\square$

**证明** 假设同上, 作函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & x \neq a \\ f'(a), & x = a \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}, & x \neq b \\ f'(b), & x = b \end{cases}$$

$r$  要么在  $F(a), F(b)$  之间, 要么在  $G(a), G(b)$  之间.

如果  $r$  在  $F(a), F(b)$  之间, 由连续函数的介值定理, 存在  $x_0 \in (a, b), r = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}$  再对  $F(x)$  用 Lagrange 中值定理即可.  $r$  在  $G(a), G(b)$  之间同理.  $\square$

## § 4.2 Taylor 公式

### 一、推导与证明

**引理 4.2.1** 若  $r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$ , 则  $r(x) = o((x - x_0)^n) (x \rightarrow x_0)$ .

**证明** 对  $n$  归纳.

当  $n = 1$  时,  $r(x) = r(x_0) + r'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0)$

假设当  $n \geq 1$  有  $r^{(n)}(x) = o((x - x_0)^n)$  成立.

则当  $n + 1$  时, 由 Lagrange 中值定理,

$$r(x) = r(x_0) + r'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0) = r'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0)$$

当  $x \rightarrow x_0$  时,

$$r'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0) = o((x - x_0)^n) \cdot (x - x_0) = o((x - x_0)^{n+1})$$

由归纳原理, 原命题成立.  $\square$

**定理 4.2.1** (带 Lagrange 余项的泰勒公式) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上  $n$  阶可导, 在  $(a, b)$  上



有  $n+1$  阶导. 设  $x_0$  为  $[a, b]$  内一点, 则对任意  $x \in [a, b]$  存在  $\theta \in (0, 1)$ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{(n+1)}$$

**证明** 令  $r(x) = f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$ , 有  $r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$ .

由 Cauchy 中值定理,

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{r(x) - r(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} \\ &= \frac{r'(\xi_1) - r'(x_0)}{(n+1)((\xi_1 - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n)} && \xi_1 \in (x_0, x) \text{ 或 } (x, x_0) \\ &= \frac{r''(\xi_2) - r''(x_0)}{(n+1) \cdot n \cdot ((\xi_2 - x_0)^{n-1} - (x_0 - x_0)^{n-1})} && \xi_2 \in (x_0, \xi_1) \text{ 或 } (x, \xi_1) \\ &= \cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{r^{(n)}(\xi_n)}{\xi_n - x_0} && \xi_n \in (x_0, \xi_{n-1}) \text{ 或 } (\xi_{n-1}, x_0) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} r^{(n+1)}(\xi) && \xi \in (x_0, \xi_n) \text{ 或 } (\xi_n, x_0) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \end{aligned}$$

$$\text{因此 } r(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

□

**例 4.2.1** (Taylor 公式的应用套路)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导,  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

**证明** 由最值存在定理,  $\exists x_0 \in [a, b], |f(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ , 且  $f'(x_0) = 0$

把  $f(x)$  在  $x = x_0$  处展开, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2, \quad \xi \text{ 在 } x, x_0 \text{ 之间}$$

代入  $x = a, x = b$  有:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2 &= f(a) - f(x_0) - f'(x_0)(a-x_0) & a < \xi_1 < x_0 \\ \frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_0-b)^2 &= f(b) - f(x_0) - f'(x_0)(b-x_0) & x_0 < \xi_2 < b\end{aligned}$$

相加有

$$\begin{aligned}|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)| &= 2|f(x_0)| \left( \frac{1}{(a-x_0)^2} + \frac{1}{(b-x_0)^2} \right) \\ &\geq 2|f(x_0)| \left( \frac{(1+1)^3}{(a-x_0+x_0-b)^2} \right) \\ &= \frac{16}{(a-b)^2} |f(x_0)|\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| &\geq \frac{1}{2} (|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|) \\ &= \frac{8}{(a-b)^2} |f(x_0)| \\ &= \frac{8}{(a-b)^2} \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|\end{aligned}$$

即

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(a-b)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

□

**例 4.2.2**  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上二阶可导,  $|f(x)| < k_0, |f''(x)| < k_1$ , 证明:

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2k_0k_1}$$

**证明** 由 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2 \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2\end{aligned}$$

化简有:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{1}{4}(f''(\xi_2) - f''(\xi_1))h$$

因此

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h)| + |f(x-h)|}{2h} + \frac{1}{4} (|f''(\xi_2)| + |f''(\xi_1)|) h \leq \frac{k_0}{h} + \frac{h}{2} k_1 \quad \forall h > 0$$

因此

$$|f'(x)| \leq \min_{h \in (0, +\infty)} \left( \frac{k_0}{h} + \frac{h}{2} k_1 \right) = \sqrt{2k_0 k_1}$$

□

## § 4.3 凸函数与 Lipschitz 条件

### 一、凸函数与二阶导的关系

**定义 4.3.1 (凸函数)** 对某函数  $f(x)$  定义域的任意区间  $[a, b]$ , 有任意  $\lambda \in [0, 1]$ , 满足

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则成  $f(x)$  为其定义区间上的**下凸函数**

**定理 4.3.1**  $f(x)$  在区间  $I$  上二阶可导, 则  $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$  是  $f(x)$  在  $I$  上下凸的充要条件.

**证明** 充分性:

任取  $x_1, x_2 \in I$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ . 任取  $\lambda \in (0, 1)$ , 根据 Lagrange 中值定理

$$\begin{aligned} & \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \\ &= -\lambda (f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - f(x_1)) + (1 - \lambda) (f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) \\ &= -\lambda f'(\xi_1) \cdot (1 - \lambda)(x_2 - x_1) + (1 - \lambda) f'(\xi_2) \cdot \lambda(x_2 - x_1) \\ & \quad (x_1 < \xi_1 < \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 < \xi_2 < x_2) \\ &= \lambda(1 - \lambda) f''(\xi)(x_2 - x_1)(\xi_2 - \xi_1) \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

必要性: 假设  $f(x)$  是  $I$  上的下凸函数, 且处处二阶可导. 取  $x_0 \in I$ , 则  $\forall \Delta x > 0$ ,

有

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{\Delta x^2} \geq 0 \quad \left( x_0 = \frac{1}{2}(x_0 - \Delta x) + \frac{1}{2}(x_0 + \Delta x) \right)$$

另一方面, 根据带 Peano 余项的 Taylor 公式,

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{\Delta x^2} \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} \left( f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + o(\Delta x^2) \right. \\ & \quad \left. + f(x_0) + f'(x_0)(-\Delta x) + \frac{1}{2}f''(x_0)(-\Delta x)^2 + o(\Delta x^2) - 2f(x_0) \right) \\ &= f''(x_0) + \frac{o(\Delta x^2)}{\Delta x^2} \quad (\Delta x \rightarrow 0) \\ &= f''(x_0) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

## 二、Lipschitz 条件

**定义 4.3.2 (局部 Lipschitz 函数)** 对任意  $x_0 \in D_f$ , 存在邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 与常数  $C$  ( $\delta, C$  均依赖于  $x_0$ ), 使得

$$\forall x, x' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_f : \quad |f(x) - f(x')| \leq C |x - x'|$$

则称  $f(x)$  为**局部 Lipschitz 函数**.

**定义 4.3.3 (Lipschitz 函数)** 若存在常数  $C$ , 使得

$$\forall x, x' \in D_f : \quad |f(x) - f(x')| \leq C |x - x'|$$

则称  $f(x)$  为**Lipschitz 函数**.

又由限覆盖定理, 闭区间上的局部 Lipschitz 函数是 Lipschitz 函数.

**定理 4.3.2** Lipschitz 函数是连续函数.

### 三、开区间上的凸函数

**引理 4.3.1**  $f(x)$  是  $(a, b)$  上的下凸函数当且仅当任意  $(x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ , 任意  $x \in (x_1, x_2)$ , 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

**证明** 由  $x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2$ , 有

$$\begin{aligned} f(x) \text{ 是下凸函数} &\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2) \quad (\forall a < x_1 < x < x_2 < b) \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

另一边同理. □

**引理 4.3.2** 闭区间上的下凸函数有界.

**证明** 设闭区间  $[a, b]$ , 任取  $x \in [a, b]$ ,  $\exists \lambda \in (0, 1)$ ,  $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ ,  $f(x) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \leq \max\{f(a), f(b)\}$ .

又将  $f(x)$  连续延拓到  $[c, d] \supseteq [a, b]$  上且保证其在  $[c, d]$  上下凸, 有  $f(x)$  在  $[c, d]$  上有上界.

由于  $f(a) \leq \lambda_1 f(x) + (1 - \lambda_1)f(c)$ , 有  $f(x) \geq \frac{1}{\lambda_1}f(a) - \left(\frac{1}{\lambda_1} - 1\right)f(c)$ .

同理  $f(x) \geq \frac{1}{\lambda_2}f(b) - \left(\frac{1}{\lambda_2} - 1\right)f(d)$ . 即  $f(x)$  有下界. □

**定理 4.3.3** 开区间上的凸函数必为连续函数.

**证明** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 任意  $x_0 \in (a, b)$ , 存在  $\delta > 0$ ,  $[x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta] \subseteq (a, b)$ .

任取  $x > y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $x = \lambda(x_0 + 2\delta) + (1 - \lambda)y$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ .

由凸函数性质,  $f(x) \leq \lambda f(x_0 + 2\delta) + (1 - \lambda)f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) \leq \lambda[f(x_0 + 2\delta) - f(y)]$ .

由引理 3.3.2,  $|f(x)| < M$ ,  $\exists M > 0$ . 故  $|f(y) - f(x)| \leq \lambda[f(x_0 + 2\delta) - f(y)] \leq 2\lambda M$ .

又由  $x = \lambda(x_0 + 2\delta) + (1 - \lambda)y \Rightarrow |x - y| = \lambda(x_0 + 2\delta - y) > \lambda\delta$ , 故  $2\lambda M < \frac{|x - y|}{\delta}$ .  
代入有  $|f(x) - f(y)| < \frac{|x - y|}{\delta}$ , 满足 **局部 Lipschitz** 性质, 因此  $f(x)$  连续.  $\square$

**定理 4.3.4** 开区间上的凸函数必为 Lipschitz 函数.

**例 4.3.1** 设函数  $f(x)$  是  $(a, b)$  上的下凸函数, 证明:

- (1) 在每个  $x \in (a, b)$ ,  $f'_-(x)$  与  $f'_+(x)$  均存在, 且  $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ .
- (2) 若  $a < x_1 < x_2 < b$ , 则有  $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$ .
- (3)  $f(x)$  不可导的点至多有可列个.

**证明**

- (1) 取  $x_0 \in (a, b)$ , 由引理 4.3.1,  $\frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \geq \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2\Delta x)}{2\Delta x}$ , 表明

$$F_-(\Delta x) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \text{ 关于 } \Delta x \text{ 单减.}$$

又取定  $x' > x_0$ ,  $F_-(\Delta x) \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$ ,  $F_-(\Delta x)$  在  $\Delta x \rightarrow 0^+$  时单调递增且有上界, 故极限存在, 即  $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F_-(\Delta x)$  存在. 同理  $f'_+(x_0)$  也存在.

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \quad (\text{由引理 4.3.1})$$

- (2) 任取  $x \in (x_1, x_2)$ ,

$$\begin{aligned} \text{有 } f'_+(x_1) &= \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \leq \\ &\lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'_-(x_2) \end{aligned}$$

- (3) 由 (2) 知, 如果存在一点  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f'_-(x_0) < f'_+(x_0)$ , 则开区间  $(f'_-(x_0), f'_+(x_0))$  中不含  $f'_-(x), f'_+(x), \forall x \in (a, b)$  的所有值.

假设有两点  $x_1 < x_2$ , 有  $f'_-(x_i) < f'_+(x_i), i \in \{1, 2\}$ . 则易得  $f'_-(x_1) < f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) < f'_+(x_2)$ .

由引理 3.2.1, 同理有这样的  $x_0$  有可列个.

## 四、相关不等式

**定理 4.3.5 (Young 不等式)**  $p, q$  不等于 0 或 1,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则对任意正数  $a, b$ , 有

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad p > 1$$

$$ab \geq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad p < 1$$

**证明** 求导即可. □

**定理 4.3.6 (Hölder 不等式)**  $p, q$  不等于 0 或 1,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则对任意正数数列  $\{a_k\}_{k=1}^n, \{b_k\}_{k=1}^n$ , 有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad p > 1$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad p < 1$$

**证明** 令  $A = \sum_{i=1}^n a_i^p, B = \sum_{i=1}^n b_i^q$

$p > 1$  时, 对  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 由 **Young 不等式**,

$$\frac{a_i b_i}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{A} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{B}$$

故

$$\frac{1}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

即

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} = \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

**证明** (用 Jensen 不等式的证明)  $p > 1$  时,  $f(x) = x^p$  为下凸函数.

由于  $q = \frac{p}{p-1}$ , 把  $x_i y_i$  分解为

$$x_i y_i = y_i^q \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \cdot x_i y_i^{1-q} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)$$

注意到

$$\sum_{i=1}^n \left( y_i^q \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \right) = 1$$

由 Jensen 不等式,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^p &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ y_i^q \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \cdot x_i y_i^{1-q} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right) \right] \right\}^p \\ &\leq \sum_{i=1}^n y_i^q \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{-1} \cdot x_i^p y_i^{p-pq} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^p \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{p-1} \end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

## 第五章 函数不定积分、定积分相关定理

### § 5.1 不定积分

(全是计算题)



## 一、计算计巧

例 5.1.1 (凑微分技巧)

- $\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = d(\sqrt{1+x^2})$
- $\int x^{2k+1} \sqrt{a+bx^2} dx \xrightarrow{t=\sqrt{a+bx^2}} \dots, (bx dx = t dt)$

例 5.1.2 (分部积分法则)

- $\int f(x) \ln g(x) dx = \int \ln g(x) dF(x)$
- $\int f(x) \arctan g(x) dx$  分两种情况.
  - $f(x)$  能凑微分, 则化为  $\int \arctan g(x) dF(x)$
  - $f(x)$  不能凑微分, 则换元  $t = \arctan g(x)$

定理 5.1.1 (用于求分段函数积分)

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt$$

## 二、一些例题

例 5.1.3 (正余弦齐次分式函数) 计算  $\int \frac{7 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x} dx$ .

**解** 由于  $7 \sin x + \cos x = 3 \sin x + 4 \cos x - (3 \sin x + 4 \cos x)'$ , 有

$$\int \frac{7 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x} dx = \int dx - \int \frac{d(3 \sin x + 4 \cos x)}{3 \sin x + 4 \cos x} = x - \ln |3 \sin x + 4 \cos x| + C$$

## § 5.2 定积分

## 一、定积分的定义与 Darboux 和

定义 5.2.1 (Riemann 和与定积分) (略)

定义 5.2.2 (Darboux 和) (略)