

线代例题整理

目 录

第一章	定义和关键性质	1	二、	分块矩阵	2
§ 1.1	矩阵相关运算	1	三、	线性相关与极大线性无关组	2
一、	矩阵的转置、伴随、迹、行列式、秩 . . .	1	第二章	例题们	3

第一章 定义和关键性质

§ 1.1 矩阵相关运算

一、矩阵的转置、伴随、迹、行列式、秩

- 对加法:

$$- (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$- \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

- 对乘法:

$$- (AB)^T = B^T A^T$$

$$- (AB)^* = B^* A^*$$

$$- (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$- \text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$$

$$- |AB| = |A| |B|$$

$$- P, Q \text{ 可逆}, r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$$

$$- A_{m \times n}, B_{n \times s}, r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\}$$

- 组合:

$$- |A^T| = |A|$$

$$- |A| A^{-1} = A^* \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

$$- |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$- |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$- (A^*)^* = |A|^{n-2} A$$

二、分块矩阵

- 分块对角阵:

$$- A = \text{diag}(A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n) \Rightarrow A^{-1} = \text{diag}(A_1^{-1} \ A_2^{-1} \ \cdots \ A_n^{-1})$$

$$- A = \begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & & \\ & & A_2 & \\ & \ddots & & \\ A_n & & & \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_n^{-1} \\ & & & \\ & & A_2^{-1} & \\ & \ddots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

$$- A = \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}, B, C \text{ 可逆, 则}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$

- 分块矩阵的秩:

$$- r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$$

$$- r \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$$

$$- \max \{r(A), r(B)\} \leq r(A \ B) \leq r(A) + r(B)$$

三、线性相关与极大线性无关组

- 线性相关:

$$- \alpha \text{ 线性相关} \Leftrightarrow \alpha = 0$$

- 向量组里有 0 , 则必然 线性相关

- 两个向量 线性相关 \Leftrightarrow 二者对应成比例

- 部分 线性相关 \Rightarrow 整体 线性相关; 整体 线性无关 \Rightarrow 部分 线性无关

- $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) X = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) < n \Leftrightarrow \alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n$ 线性相关

$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) X = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = n \Leftrightarrow \alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n$ 线性无关

- n 个 m 维向量, $m < n$ 时 线性相关
线性无关的 m 维向量最多有 n 个
- $\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$ 线性相关 $\Rightarrow \alpha_i$ 线性相关
 α_i 线性无关 $\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$ 线性无关

第二章 例题们

dfdf