introdução aos sistemas dinâmicos

resolução dos exercícios de sistemas de edos não-lineares e autónomas

1.

1.1

Dado o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,y) = -x - 2x^2 - 2y - y^2 \\ y'(t) = g(x,y) = -x - 2x^2 - y - 2y^2 \end{cases}$$

temos, por definição, que $(\bar{x},\bar{y})$ é uma solução de equilíbrio se

$$\begin{cases} f(\bar{x},\bar{y}) = 0 \\ g(\bar{x},\bar{y}) = 0 \end{cases}$$

Assim sendo, $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ é uma solução de equilíbrio porque $f(0,0) = g(0,0) = 0$. De forma análoga, podemos dizer que $(\bar{x},\bar{y}) = (-1/2,0)$ é uma solução de equilíbrio porque $f(-1/2,0) = g(-1/2,0) = 0$.

1.2

Denotemos por $J(x,y)$ a matriz jacobiana do sistema de equações diferenciais ordinárias e seja $(\bar{x},\bar{y})$ uma solução de equilíbrio. O teorema de Hartman-Grobman diz-nos que, se os valores próprios da matriz $J(\bar{x},\bar{y})$ tiverem parte real diferente de zero, então a dinâmica das soluções numa vizinhança da solução de equilíbrio $(\bar{x},\bar{y})$ pode ser aproximada pela dinâmica das soluções em torno da solução de equilíbrio do sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = J(\bar{x},\bar{y}) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Calculando a matriz jacobiana do sistema, temos que

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} -1-4x & -2-2y \\ -1-4x & -1-4y \end{bmatrix}.$$

Deste modo, verifica-se que a matriz jacobiana na solução de equilíbrio $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ é dada por

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são $\lambda_1 = -1-\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = -1+\sqrt{2}$. Assim sendo, podemos concluir que a dinâmica das soluções do sistema pode ser aproximada pela dinâmica das soluções em torno da solução de equilíbrio do sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{cases} x'(t) = -x - 2y \\ y'(t) = -x - y \end{cases}$$

Para tal, devemos obter vectores próprios associados a cada um dos valores próprios λ_1 e λ_2. Um cálculo fácil, permite dizer que

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

são vectores próprios da matriz dos coeficientes do sistema, associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Como sabemos, um esboço do retrato de fases que descreve razoavelmente a dinâmica numa vizinhança da solução de equilíbrio pode então ser facilmente obtido.

De modo análogo, verifica-se que a matriz jacobiana na solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1/2, 0)$ é dada por

$$J(-1/2, 0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são complexos conjugados com parte real igual a zero, $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$. Assim sendo, não é possível usar o teorema de Hartman-Grobman para conhecer a dinâmica das soluções numa vizinhança desta solução de equilíbrio.

2.

2.1

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, y) = -x - 2x^2 - 2y - y^2 \\ y'(t) = g(x, y) = -x - y^2 \end{cases}$$

Então, $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ é uma solução de equilíbrio, porque $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$. De forma análoga, também $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1, -1)$ é uma solução de equilíbrio, porque $f(-1, -1) = g(-1, -1) = 0$.

2.2

Denotemos por $J(x, y)$ a matriz jacobiana do sistema de equações diferenciais ordinárias acima apresentado. Então,

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -1 - 4x & -2 - 2y \\ -1 & -2y \end{bmatrix}.$$

Deste modo, verifica-se que a matriz jacobiana na solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ é dada por

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$. Assim sendo, o teorema de Hartman-Grobman permite concluir que a dinâmica das soluções do sistema não-linear numa vizinhança da solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ pode ser aproximada pela dinâmica do sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{cases} x'(t) = -x - 2y \\ y'(t) = -x \end{cases}$$

numa vizinhança em torno da sua solução de equilíbrio. Assim sendo, vamos calcular vectores próprios da matriz dos coeficientes associados a cada um dos valores próprios. Um cálculo fácil, permite dizer que

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são vectores próprios da matriz dos coeficientes do sistema, associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Como sabemos, um esboço do retrato de fases que descreve razoavelmente a dinâmica numa vizinhança da solução de equilíbrio pode então ser facilmente obtido.

De modo análogo, verifica-se que a matriz jacobiana na solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1, -1)$ é dada por

$$J(-1, -1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Assim sendo, o teorema de Hartman-Grobman permite concluir que a dinâmica das soluções do sistema não-linear numa vizinhança da solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1, -1)$ pode ser aproximada pela dinâmica do sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{cases} x'(t) = 3x \\ y'(t) = -x + 2y \end{cases}$$

numa vizinhança em torno da sua solução de equilíbrio. Assim sendo, vamos calcular vectores próprios da matriz dos coeficientes associados a cada um dos valores próprios. Um cálculo fácil, permite dizer que

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são vectores próprios da matriz dos coeficientes do sistema, associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Como sabemos, um esboço do retrato de fases que descreve razoavelmente a dinâmica numa vizinhança da solução de equilíbrio pode então ser facilmente obtido.

3.

3.1

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,y) = -x - 2y - y^2 \\ y'(t) = g(x,y) = -x - y \end{cases}$$

Então, $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ é uma solução de equilíbrio, porque $f(0,0) = g(0,0) = 0$. De forma análoga, também $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,-1)$ é uma solução de equilíbrio, porque $f(1,-1) = g(1,-1) = 0$.

3.2

Denotemos por $J(x,y)$ a matriz jacobiana do sistema de equações diferenciais ordinárias acima apresentado. Então,

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} -1 & -2-2y \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, verifica-se que a matriz jacobiana na solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ é dada por

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -1$. Assim sendo, o teorema de Hartman-Grobman permite concluir que a dinâmica das soluções do sistema não-linear numa vizinhança da solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ pode ser aproximada pela dinâmica do sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{cases} x'(t) = -x \\ y'(t) = -x - y \end{cases}$$

numa vizinhança em torno da sua solução de equilíbrio. Assim sendo, vamos calcular um vector próprio da matriz dos coeficientes associado ao valor próprio encontrado. Um cálculo fácil, permite dizer que

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é um vector próprio da matriz dos coeficientes do sistema. Como sabemos, para conseguirmos desenhar o retrato de fases que descreve razoavelmente a dinâmica numa vizinhança da solução de equilíbrio é necessário obter um vector $[v_1 \ v_2]^{\mathsf{T}}$ que satisfaça

$$(A - \lambda I) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Ora, um cálculo fácil permite dizer que

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pelo que temos todos os elementos necessários para esboçar o retrato de fases numa vizinhança da solução de equilíbrio.

De modo análogo, verifica-se que a matriz jacobiana na solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, -1)$ é dada por

$$J(1,-1) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são $\lambda_1 = -1 - \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = -1 + \sqrt{2}$. Assim sendo, o teorema de Hartman-Grobman permite concluir que a dinâmica das soluções do sistema não-linear numa vizinhança da solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, -1)$ pode ser aproximada pela dinâmica do sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{cases} x'(t) = -x - 2y \\ y'(t) = -x - y \end{cases}$$

numa vizinhança em torno da sua solução de equilíbrio. Assim sendo, vamos calcular vectores próprios da matriz dos coeficientes associados a cada um dos valores próprios. Um cálculo fácil, permite dizer que

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

são vectores próprios da matriz dos coeficientes do sistema, associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Como sabemos, um esboço do retrato de fases que descreve razoavelmente a dinâmica numa vizinhança da solução de equilíbrio pode então ser facilmente obtido.

4.

4.1

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,y) = -x + x^2 - y - 2y^2 \\ y'(t) = g(x,y) = x - x^2 - y + y^2 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} f(0,0) = g(0,0) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (0,0) \text{ é uma solução de equilíbrio} \\ f(1,0) = g(1,0) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (1,0) \text{ é uma solução de equilíbrio} \\ f(3,-2) = g(3,-2) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (3,-2) \text{ é uma solução de equilíbrio} \\ f(-2,-2) = g(-2,-2) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (-2,-2) \text{ é uma solução de equilíbrio} \end{aligned}$$

4.2

Denotemos por $J(x,y)$ a matriz jacobiana do sistema. Então, temos que

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} -1+2x & -1-4y \\ 1-2x & -1+2y \end{bmatrix}.$$

Deste modo, verifica-se que a matriz jacobiana na solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ é dada por

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são $\lambda_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}$. Assim sendo, podemos concluir que a dinâmica das soluções do sistema pode ser aproximada pela dinâmica das soluções em torno da solução de equilíbrio do sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{cases} x'(t) \;=\; -x - y \\ y'(t) \;=\; x - y \end{cases}$$

Deste modo, devemos calcular um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = -1 + \mathrm{i}$, que surge facilmente como

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{i}$$

Então, um esboço do retrato de fases que descreve razoavelmente a dinâmica numa vizinhança da solução de equilíbrio pode facilmente ser obtido.

De modo análogo, verifica-se que a matriz jacobiana na solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$ é dada por

$$J(1,0) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = \sqrt{2}$. Calculando vectores próprios da matriz associados a cada um destes valores próprios, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

podemos facilmente desenhar um esboço do retrato de fases que descreve razoavelmente a dinâmica numa vizinhança da solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$ do sistema não-linear.

Para a terceira solução de equilíbrio encontrada, $(\bar{x}, \bar{y}) = (3, -2)$, temos que a matriz jacobiana na solução de equilíbrio é dada por

$$J(3,-2) \;=\; \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são complexos conjugados, com parte real igual a zero, $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{10}\,\mathrm{i}$. Assim sendo, sabemos não ser possível usar o teorema de Hartman-Grobman para conhecer a dinâmica das soluções numa vizinhança desta solução de equilíbrio.

Por fim, para a quarta e última solução de equilíbrio encontrada, $(\bar{x}, \bar{y}) = (-2, -2)$, temos que a matriz jacobiana na solução de equilíbrio é dada por

$$J(-2,-2) \;=\; \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são $\lambda_1 = -5 - \sqrt{35}$ e $\lambda_2 = -5 + \sqrt{35}$. Calculando vectores próprios da matriz associados a cada um destes valores próprios, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{35} \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{35} \\ 5 \end{bmatrix}$$

podemos facilmente desenhar um esboço do retrato de fases que descreve razoavelmente a dinâmica numa vizinhança da solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y}) = (-2, -2)$ do sistema não-linear.