

# DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE



## Distribuições de Probabilidade



### Exemplo

Duas meias são selecionadas aleatoriamente de uma gaveta contendo 5 meias castanhas e 3 verdes. Liste os elementos do espaço amostral, as probabilidades correspondentes, os valores da variável aleatória  $W$ , que representa o número de meias castanhas selecionadas.

Elementos	Probabilidade	$w$
CC	$5/8 \times 4/7 = 20/56$	2
CV	$5/8 \times 3/7 = 15/56$	1
VC	$3/8 \times 5/7 = 15/56$	1
VV	$3/8 \times 2/7 = 6/56$	0



## Distribuições de Probabilidade

### Exemplo

Considere o lançamento de 2 dados. Liste os elementos do espaço amostral, as probabilidades correspondentes, os valores da variável aleatória  $X$ , que representa a soma dos pontos.

$x$	$P(X=x)$	$x$	$P(X=x)$
2	1/36	3	2/36
4	3/36	5	4/36
6	5/36	7	6/36
8	5/36	9	4/36
10	3/36	11	2/36
12	1/36		

$$f(x) = (6 - |x - 7|) / 36 \quad x = 2, \dots, 12$$

3



## Distribuições de Probabilidade Discretas

Se  $X$  é uma variável aleatória discreta, a função dada por  $f(x) = P(X = x)$ , para cada valor de  $x$  na gama de valores de  $X$ , é **chamada função de probabilidade de  $X$** .

4



## Distribuições de Probabilidade Discretas

### Exemplo

Encontre a fórmula para a distribuição de probabilidade do número total de caras (F) obtidas no lançamento de 4 moedas equilibradas

Resultados possíveis		$2^4 = 16$	
FFFF	4	CFFC	2
FFFC	3	CFCF	2
FFCF	3	CCFF	2
FCFF	3	FCCC	1
CFFF	3	CFCC	1
FFCC	2	CCFC	1
FCFC	2	CCCF	1
FCCF	2	CCCC	0

x	f(x)
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16

$$f(x) = {}_4C_x / 16 \quad x=0,1,2,3,4$$

5



## Função de Probabilidade

Uma função pode servir como função de probabilidade (f.p.) de uma variável aleatória discreta  $X$  se e só se os seus valores  $f(x)$  satisfazem as seguintes condições:

1.  $f(x) \geq 0$  para qualquer valor do seu domínio;
2.  $\sum f(x) = 1$  onde o somatório se estende a todos os valores no seu domínio.

6



## Função de Probabilidade

### Exemplo

Verifique se a função dada por

$$f(x) = \frac{x+2}{25} \quad x = 1, 2, 3, 4, 5$$

pode servir como função de probabilidade de uma variável aleatória

7



## Função de Distribuição

- Existem muitas situações onde há interesse em conhecer a probabilidade de que o valor de uma variável aleatória seja menor ou igual a algum número real  $x$ .
- A probabilidade de que  $X$  tome um valor menor ou igual a  $x$ , dada por  $F(x) = P(X \leq x)$ , é uma função definida para todos os números reais, designada por **função de probabilidade acumulada** da variável aleatória  $X$ .

8

## Função de Distribuição



Se  $X$  é uma variável aleatória discreta, a função dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \quad -\infty < x < \infty$$

onde  $f(t)$  é o valor da função de probabilidade de  $X$  em  $t$ , é chamada a função de probabilidade acumulada de  $X$ .

9

## Propriedades



Os valores de  $F(x)$  da função de probabilidade acumulada de uma variável aleatória  $X$  satisfazem as condições:

- $F(-\infty) = 0$
- $F(\infty) = 1$
- Se  $a < b$ , então  $F(a) \leq F(b)$  para quaisquer números reais  $a$  e  $b$ .

10

# Função de Distribuição



## Exemplo

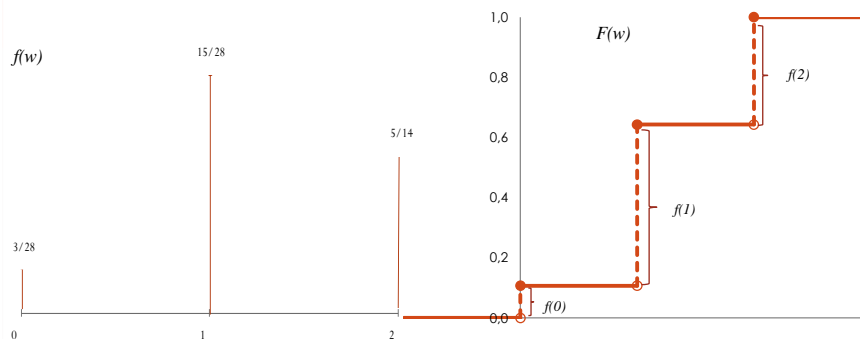
Encontre a função de probabilidade acumulada da variável  $W$ , número de meias castanhas retiradas da gaveta, e trace o respectivo gráfico.

$w$	Prob.	$f(w)$	$F(w)$	
0	3/28	3/28	3/28	$f(0)$
1	15/28	15/28	9/14	$f(0)+f(1)$
2	5/14	5/14	1	$f(0)+f(1)+f(2)$

$$F(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 3/28 & 0 \leq w < 1 \\ 9/14 & 1 \leq w < 2 \\ 1 & w \geq 2 \end{cases}$$

11

## Função de Probabilidade e Função Acumulada



12



## Função Densidade de Probabilidade

Uma função com valores de  $f(x)$  definidos sobre o conjunto de todos os números reais, é chamada uma **função densidade de probabilidade** (f.d.p.) de uma variável contínua  $X$ , se e só se

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

para quaisquer constantes reais  $a$  e  $b$ , com  $a \leq b$ .

13



## Função Densidade de Probabilidade

- De notar que  $f(c)$ , o valor da função densidade de probabilidade de  $X$  em  $c$  não é  $P(X=c)$ , como no caso discreto.
- No caso contínuo as probabilidades são sempre dadas por integrais avaliados sobre intervalos, donde  $P(X=c)=0$  para qualquer constante real  $c$ ; por outro lado, também não interessa se os pontos extremos do intervalo  $a$  a  $b$  são incluídos.
- Se  $X$  é uma variável aleatória contínua e,  $a$  e  $b$  são duas constantes reais com  $a \leq b$ , então

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

14



## Função Densidade de Probabilidade

Uma função pode servir como função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua  $X$  se e só se os seus valores  $f(x)$  satisfazem as seguintes condições:

1.  $f(x) \geq 0 \quad -\infty < x < \infty$

2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

15



## Função de Distribuição

### Exemplo

A função densidade de probabilidade da variável aleatória  $X$  é dada por

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-3x} & x > 0 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

Determine o valor de  $k$  e calcule  $P(0.5 < X < 1)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} ke^{-3x} dx = k \left. \frac{e^{-3x}}{-3} \right|_0^{\infty} = \frac{k}{3} = 1$$

$$\int_{0.5}^1 3e^{-3x} dx = -e^{-3x} \Big|_{0.5}^1 = 0.173$$

16



## Função de Distribuição



Se  $X$  é uma variável aleatória contínua, a função dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad -\infty < x < \infty$$

onde  $f(t)$  é o valor da função densidade de probabilidade de  $X$  em  $t$ , é chamada função de distribuição acumulada de  $X$ .

17

## Propriedades



Os valores de  $F(x)$  da função de probabilidade acumulada de uma variável aleatória  $X$  satisfazem as condições:

- $F(-\infty) = 0$
- $F(\infty) = 1$
- Se  $a < b$ , então  $F(a) \leq F(b)$  para quaisquer números reais  $a$  e  $b$ .

18



## Propriedades

Se  $f(x)$  e  $F(x)$  são, respectivamente, as valores da função densidade e da função acumulada de  $X$  em  $x$ , então

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

para quaisquer constantes reais  $a$  e  $b$ , com  $a \leq b$ , e

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

onde a derivada existe.

19



## Função de Distribuição

### Exemplo

Determine a função acumulada correspondente à função densidade

$$f(x) = 3e^{-3x}, x > 0$$

e calcule  $P(0.5 < X < 1)$ .

$$F(x) = \int_0^x 3e^{-3t} dt = 1 - e^{-3x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-3x} & x > 0 \end{cases}$$

$$P(0.5 < X < 1) = F(1) - F(0.5) = 0.173$$

20



## Observações

- Uma função de distribuição acumulada é uma função não decrescente de  $x$ , que é contínua à direita, com  $F(-\infty) = 0$  e  $F(\infty) = 1$ .
- Se  $x$  é um ponto de descontinuidade de  $F(x)$ , então a probabilidade  $P(X=x)$  é igual ao salto que a função de distribuição tem no ponto  $x$ . Se  $x$  é um ponto de continuidade de  $F(x)$ , então  $P(X=x) = 0$ .

21



### Exemplo

Encontre a função densidade de probabilidade para a variável aleatória cuja função de distribuição é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 1 \quad 0 < x < 1$$

22