RESOLUÇÃO 2º TESTE

LÓGICA EI

17. junho. 2011

1.

(a)

i)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}^{(2)}}{p_1}\,\wedge_2 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}^{(2)}}{p_0}\,\wedge_1 E \qquad \cancel{p_0 \to \neg p_1}^{(1)}}{\neg p_1}\,\to E}{\perp}}{\neg(p_0 \wedge p_1)}\,\neg I^{(2)}}{(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)}\,\to I^{(1)}
$$

é uma derivação em DNP cuja conclusão é $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$ e em que todas as folhas estão cortadas. Assim, esta derivação prova que $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$ é um teorema.

ii)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \qquad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_0 \wedge p_1}\,\wedge I \qquad \neg(p_0 \wedge p_1)}{\perp}\,\neg E}{\neg p_1}\,\neg I^{(2)}}{p_0 \to \neg p_1}\,\to I^{(1)}
$$

é uma derivação em DNP cuja conclusão é $p_0 \to \neg p_1$ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\neg(p_0 \wedge p_1)\}$, pelo que prova que $\neg(p_0 \wedge p_1) \vdash p_0 \to \neg p_1$.

(b) Admitamos que $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$. Então, existe uma derivação D em DNP cuja conclusão é $\neg(p_0 \wedge p_1)$ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas Δ é um subconjunto de Γ. Assim,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \qquad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_0 \wedge p_1}\,\wedge I \qquad \begin{matrix} D \\ \neg(p_0 \wedge p_1)\end{matrix}}{\bot}\,\neg E}{\neg p_1}\,\neg I^{(2)}}{p_0 \to \neg p_1}\,\to I^{(1)}$$

é uma derivação cuja conclusão é $p_0 \to \neg p_1$ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\Delta \subseteq T$. Logo, $T \vdash p_0 \to \neg p_1$.

2.

a) OBS: $\mathcal{T}_L$ é o conjunto definido indutivamente por

1) $0 \in \mathcal{T}_L$;
2) $x_i \in \mathcal{T}_L$, $\forall i \in \mathbb{N}_0$;
3) $s(t) \in \mathcal{T}_L$, $\forall t \in \mathcal{T}_L$;
4) $t_1 - t_2 \in \mathcal{T}_L$, $\forall t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$.

At_L é o conjunto definido indutivamente por

1) $P(t) \in \mathcal{F}_L$, $\forall t \in \mathcal{T}_L$;
2) $t_1 < t_2 \in \mathcal{F}_L$, $\forall t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$.

—— // ——

i) $0, x_1, x_2, s(0), s(x_1), x_2 - s(0), \underbrace{s(x_1) - (x_2 - s(0))}_{t}$

é uma sequência de formação de t em $\mathcal{T}_L$.

Assim $t \in \mathcal{T}_L$

ii) $(x_1 - 0) \vee P(x_2) \notin \mathcal{T}_L$

e $(x_1 - 0) \vee P(x_2) \notin \mathcal{F}_L$

(OBS: $x_1 - 0 \in \mathcal{T}_L$
$P(x_2) \in \mathcal{F}_L$
mas P não é um símbolo de relação — e, por isso, $P(x_2) \notin \mathcal{T}_L$, nem tão pouco "$\vee$" ocorre em L-termos; além disso, $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$ se e só se $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$ — e $(x_1 - 0) \notin \mathcal{F}_L$)

(iii)

$\psi = \exists x_2 \, (P(x_1) \wedge \forall x_1 (x_2 < x_1)) \in \mathcal{F}_L$

pois

$P(x_1)$, $x_2 < x_1$, $\forall x_1 (x_2 < x_1)$, $P(x_1) \wedge \forall x_1 (x_2 < x_1)$, ψ é uma sequência de formação de ψ em $\mathcal{F}_L$

(iv) $\forall x_0 \, (P(x_0, 0) \vee (s(x_0) < 0)) \notin \mathcal{T}_L$

e $\forall x_0 \, (P(x_0, 0) \vee (s(x_0) < 0)) \notin \mathcal{F}_L$ (OBS: $\mathcal{N}(P) = 1$)

b) $\varphi = \forall x_1 \, (\underset{a)}{P(x_4)} \rightarrow \exists x_0 \, \neg (\underset{b)}{x_0} < \underset{c)}{x_2} - s(\underset{d)}{x_1} - 0)))$

A ocorrência

- a) de x_4 é livre e está no alcance de $\forall x_1$
- b) de x_0 é ligada (está no alcance de $\exists x_0$)
- c) de x_2 é livre e está no alcance de $\forall x_1$ e $\exists x_0$
- d) de x_1 é ligada (está no alcance de $\forall x_1$)

Se $x \in \mathcal{V}$ e $x \notin Liv(\varphi)$, então x é substituível por qualquer L-termo t em φ.

Se $x \in Liv(\varphi)$ então $x = x_4$ ou $x = x_2$:

① se $x = x_4$, como a ocorrência livre de x_4 em φ está no alcance de $\forall x_1$ e como $x_1 \in VAR(x_2 - s(x_1))$, x_4 não é substituível por $x_2 - s(x_1)$ em φ.

② se $x = x_2$, como a ocorrência livre de x_2 está no alcance de $\forall x_1$ e $\exists x_0$ e como $x_1 \in VAR(x_2 - s(x_1))$, x_2 não é substituível por $x_2 - s(x_1)$ em φ.

Logo, o conjunto das variáveis substituíveis por $x_2 - s(x_1)$ em φ é $\mathcal{V} \setminus \{x_2, x_4\}$.

c) $f: T_L \to \mathbb{N}_0$ é definida por recursão estrutural do seguinte modo:

(1) $f(0) = 0$;

(2) $f(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 2011 \\ 0 & \text{se } i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2011\} \end{cases}$

(3) $f(s(t)) = f(t)$, para todo $t \in T_L$

(4) $f(t_1 - t_2) = f(t_1) + f(t_2)$, para quaisquer $t_1, t_2 \in T_L$

3.

a) i) $(0 - s(x_1 - x_8))[a] = \bar{0} \,\bar{-}\, \bar{s}\,(a(x_1) \,\bar{-}\, a(x_8)))$

$= 0 - [(1-8)+1]$

$= -(-6) = 6$

ii) $(P(x_2) \wedge \exists x_1\,(s(x_1) < 0))[a] = 1$

sse $(P(x_2)[a] = 1$ e $\exists x_1\,(s(x_1) < 0)[a] = 1)$

sse $(a(x_2) \in \bar{P}$ e $\exists d \in \mathbb{Z}$ t.q. $(s(x_1) < 0)[a\binom{x_1}{d}] = 1)$

sse $\underbrace{a(x_2) \text{ é par}}_{V}$ e $\underbrace{\exists d \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } d+1 < 0}_{V}$, uma afirmação verdadeira.

Logo, $(P(x_2) \wedge \exists x_1\,(s(x_1) < 0))[a] = 1$

b) i) Seja a' uma atribuição arbitrária em E.

Temos que $\varphi[a']_E = 1$ se e só se

$\neg P(x_0 - x_1)[a']_E = 0$ ou $((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a']_E = 1$.

Assim,

$$\varphi[a']_E = 1 \text{ sse } P(x_0 - x_1)[a']_E = 1 \text{ ou } (x_0 < x_1)[a']_E = 1 \text{ ou } (x_1 < x_0)[a']_E = 1$$

$$\text{sse } a'(x_0) \bar{-} a'(x_1) \in \bar{P} \text{ ou } a'(x_0) \bar{<} a'(x_1) \text{ ou } a'(x_1) \bar{<} a'(x_0)$$

$$\text{sse } \underbrace{a'(x_0) - a'(x_1) \text{ é par}}_{A} \text{ ou } \underbrace{a'(x_0) < a'(x_1)}_{B} \text{ ou } \underbrace{a'(x_1) < a'(x_0)}_{C}$$

Se B é V, então $A \vee B \vee C$ é V. Se C é V, também $A \vee B \vee C$ é V. Resta analisar o caso em que B e C são F's. Nesse caso, temos

$$a'(x_0) \not< a'(x_1) \quad \text{e} \quad a'(x_1) \not< a'(x_0).$$

Podemos, então, concluir que $a'(x_1) = a'(x_0)$. Logo,

$$a'(x_0) - a'(x_1) = 0 \quad \text{e, portanto, } A \text{ é V}.$$

Sendo assim, $A \vee B \vee C$ é V. Assim, $A \vee B \vee C$ é sempre V, pelo que $\varphi[a']_E = 1$.

Portanto, φ é válida em E

ii) Considerando $E' = (\mathbb{Z}, \sim)$ a L-estrutura igual a E exceto na interpretação de P que é $\tilde{P} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é ímpar}\}$.

Dada uma atribuição a' em E', temos que (usando b) i))

$$\varphi[a']_{E'} = 1 \text{ sse } a'(x_0) - a'(x_1) \in \tilde{P} \text{ ou } a'(x_0) < a'(x_1) \text{ ou } a'(x_1) < a'(x_0)$$

$$\text{sse } \underbrace{a'(x_0) - a'(x_1) \text{ é ímpar ou } a'(x_0) < a'(x_1) \text{ ou } a'(x_1) < a'(x_0)}_{(*)}$$

Se a' for tal que $a'(x_0) = a'(x_1) = 1$, temos que a afirmação (*) é falsa (pois $a'(x_0) - a'(x_1) = 0$ não é ímpar, $a'(x_0) \not< a'(x_1)$ e $a'(x_1) \not< a'(x_0)$).

Logo, $\varphi[a']_{E'} = 0$, donde φ não é universalmente válida.

c) $p_0 \leftrightarrow p_0$ é uma tautologia do CP.

Tomando a L-fórmula $\psi = (x_0 < x_1) \leftrightarrow (x_0 < x_1)$, sabemos que ψ é uma instância de $p_0 \leftrightarrow p_0$.

Logo, pelo Teorema das instanciações, ψ é universalmente válida.

d) i) $\forall x_0 \exists x_1 (P(x_1) \wedge x_0 < x_1)$

ii) $\forall x_0 \forall x_1 ((P(x_0) \wedge P(x_1)) \rightarrow P(x_0 - x_1))$

4. a) Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E tais que

$E \models \exists x (\varphi \wedge \psi) [a]$. Então,

$\exists x (\varphi \wedge \psi) [a]_E = 1$.

Ora, $\exists x (\varphi \wedge \psi) [a]_E = 1$ sse $\exists d \in dom(E)$ t.q. $(\varphi \wedge \psi)[a\binom{x}{d}]_E = 1$

sse $\exists d \in dom(E)$ t.q. $(\varphi[a\binom{x}{d}]_E = 1$ e $\psi[a\binom{x}{d}]_E = 1)$.

Logo, $\exists d \in dom(E)$ t.q. $\varphi[a\binom{x}{d}]_E = 1$

e $\exists d \in dom(E)$ t.q. $\psi[a\binom{x}{d}]_E = 1$,

donde $\exists x \varphi [a]_E = 1$ e $\exists x \psi [a]_E = 1$, pelo que

$(\exists x \varphi \wedge \exists x \psi) [a]_E = 1$.

Assim, $\exists x (\varphi \wedge \psi) \models (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)$.

b) Seja L a linguagem $(\{\}, \{P\}, \mathcal{N})$ onde $\mathcal{N}(P) = 1$.

Consideremos a L-estrutura $E = (\mathbb{N}, \bar{\ })$ onde $\bar{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$.

Sejam

$x = x_0$,

$\varphi = \boxed{P(x_0)}$

e $\psi = \neg P(x_0)$.

Temos que, dada uma atribuição a em E,

$$((\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi) \to \exists x\, (\varphi \wedge \psi))[a]_E = 0$$

sse $\Big((\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)[a]_E = 1$ e $(\exists x\, (\varphi \wedge \psi))[a]_E = 0 \Big)$

sse $\Big($ $\exists d_1 \in \mathbb{N}$ t.q. d_1 é par e $\exists d_2 \in \mathbb{N}$ t.q. d_2 não é par

e $\forall d_3 \in \mathbb{N}$ $(P(x_0) \wedge \neg P(x_0))[a \binom{x_0}{d_3}] = 0 \Big)$

sse $\Big($ $\exists d_1 \in \mathbb{N}$ t.q. d_1 é par e $\exists d_2 \in \mathbb{N}$ t.q. d_2 é ímpar e

$\forall d_3 \in \mathbb{N}$ (d_3 não é par ou d_3 é par) $\Big)$, uma afirmação verdadeira.

Logo, $((\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi) \to \exists x\, (\varphi \wedge \psi))[a]_E = 0$,

donde $\not\models (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi) \to \exists x\, (\varphi \wedge \psi)$

c) ? $(\forall x\, \varphi) \to \psi \Leftrightarrow \exists x\, (\varphi \to \psi)$?

[OBS: Como $x \notin Liv(\psi)$, $\exists x \psi \Leftrightarrow \psi$ (ver Prop. 194)

Temos que $(\forall x\, \varphi) \to \psi \Leftrightarrow \neg(\forall x \varphi) \vee \psi$

$\Leftrightarrow (\exists x\, \neg\varphi) \vee \psi$ (ver Prop 194 para justificar "$\Leftrightarrow$")

$\Leftrightarrow \exists x\, \neg\varphi \vee \exists x\, \psi$

$\Leftrightarrow \exists x\, (\neg\varphi \vee \psi)$

$\Leftrightarrow \exists x\, (\varphi \to \psi)$