Transportes - grafos bipartidos

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

18 de setembro de 2017

Transportes - grafos bipartidos

antes

- O algoritmo simplex resolve problemas de programação linear.

Guião

- O problema de transportes é um caso particular do problema de programação linear em que o modelo é definido num grafo (rede).
- O algoritmo para o problema de transportes é uma especialização do algoritmo simplex que tira partido dessa estrutura em rede.
- A sua implementação, usando estruturas de dados adequadas, pode traduzir-se em resoluções muito mais rápidas.

depois

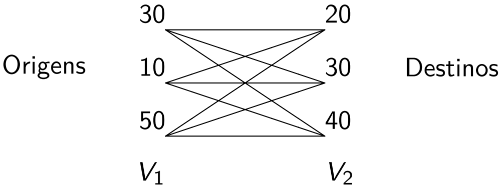
- Veremos um algoritmo para grafos (redes) gerais.

Conteúdo

- Modelo do Problema de Transportes
- Solução inicial
  - Método do canto NW
  - Método dos custos mínimos
- Pivôs
- Teste de optimalidade
  - Método do Stepping-stone
  - Método dos multiplicadores
- Dual do problema de transportes

Problema de Transportes

- Conjunto V_1 de pontos de produção (origens) ($|V_1| = m$)
- Conjunto V_2 de pontos de consumo (destinos) ($|V_2| = n$)
- Cada origem i produz a_i unidades.
- Cada destino j necessita de b_j unidades.
- Custo unitário de transporte entre a origem i e o destino j é c_{ij}.



- *Grafo bipartido* $G = (V_1, V_2, A) : \forall (i,j) \in A, i \in V_1, j \in V_2$,
- é um grafo cujo conjunto de vértices é *partido* em V_1 e V_2, e em que todos os arcos ligam uma origem $i \in V_1$ a um destino $j \in V_2$.

- As unidades a transportar são entidades de um único tipo.

Modelo de transportes

Variáveis de decisão:

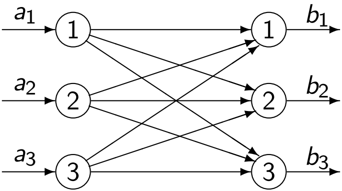
- x_{ij} - quantidade a transportar da origem i para o destino j.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} c_{ij} x_{ij} \\
\text{suj. a} \quad & \sum_{j \in V_2} x_{ij} = a_i \ , \ \forall i \in V_1 \\
& \sum_{i \in V_1} x_{ij} = b_j \ , \ \forall j \in V_2 \\
& x_{ij} \geq 0
\end{aligned}
$$

- Objectivo: minimizar o custo de transporte das unidades entre os pontos de produção (origens) e os pontos de consumo (destinos).

Diversas representações

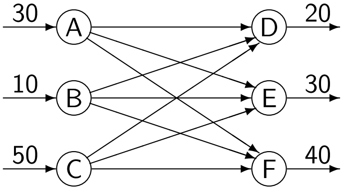
	1	2	3	
1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	x_{13} c_{13}	a_1
2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	x_{23} c_{23}	a_2
3	x_{31} c_{31}	x_{32} c_{32}	x_{33} c_{33}	a_3
	b_1	b_2	b_3	



	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
origem 1	1	1	1							$= a_1$
origem 2				1	1	1				$= a_2$
origem 3							1	1	1	$= a_3$
destino 1	1			1			1			$= b_1$
destino 2		1			1			1		$= b_2$
destino 3			1			1			1	$= b_3$
min	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	

Exemplo

	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	

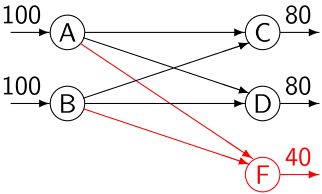


	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
A	1	1	1							= 30
B				1	1	1				= 10
C							1	1	1	= 50
D	1			1			1			= 20
E		1			1			1		= 30
F			1			1			1	= 40
min	3	6	5	2	5	5	1	2	3	

Balanceamento

- Produção $= \sum_{i \in V_1} a_i$ deve ser **sempre** igual ao consumo $= \sum_{j \in V_2} b_j$

- Se (produção $>$ consumo), criar destino fictício que absorva excesso.



Destino fictício F absorve excesso. Geralmente, custos unitários de transporte dos novos arcos são nulos (*i.e.*, $c_{AF} = c_{BF} = 0$).

- Se (produção $<$ consumo), problema é impossível, porque não é possível satisfazer a procura (assumindo que não é possível recorrer a ofertas externas ao modelo).

Número de equações linearmente independentes

- Das $n+m$ equações, há $n+m-1$ equações linearmente independentes,
- porque qualquer equação pode ser expressa como uma combinação linear das restantes.

- Exemplo:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
A	1	1	1							$= 30$
B				1	1	1				$= 10$
C							1	1	1	$= 50$
D	1			1			1			$= 20$
E		1			1			1		$= 30$
F			1			1			1	$= 40$
min	3	6	5	2	5	5	1	2	3	

- A equação de E é igual à soma das equações de A, B e C subtraída das equações de D e F.

Caracterização das soluções básicas

- O grafo associado a uma solução básica é uma *árvore*$^{(*)}$.

Uma *árvore* é um grafo com as seguintes propriedades:

- ***ligado*** (existe um caminho entre cada par de vértices),
- **sem ciclos**,
- com um **número de arcos = número de vértices -1.**

- Pode ser provado que quaisquer 2 das propriedades caracterizam uma árvore e implicam a terceira.

Independência e dependência linear num grafo

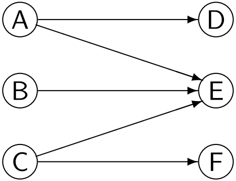
- Os arcos de uma árvore correspondem a um conjunto de vectores linearmente independentes do modelo de programação linear.
- Os arcos de um ciclo correspondem a um conjunto de vectores linearmente dependentes: um arco do ciclo pode ser expresso como uma combinação dos restantes arcos.

(*) quando há vários componentes (floresta), em soluções degeneradas, também se pode associar à solução básica uma árvore (veremos).

Exemplo: resolver sistema em ordem às variáveis básicas

- Conjunto das variáveis básicas $\mathscr{B} = \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{33}\}$.
- Grafo correspondente é uma árvore: ligado, sem ciclos e $|\mathscr{B}| = 5$.
- Conjunto das variáveis não-básicas $\mathscr{N} = \{x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}\}$.

	D	E	F	
A	? 3	? 6	5	30
B	2	? 5	5	10
C	1	? 2	? 3	50
	20	30	40	

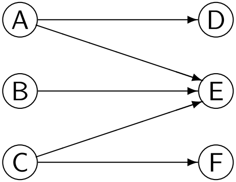


- Resolvendo o sistema de equações em ordem às variáveis básicas, obtém-se uma solução básica (única) do sistema (determinado) com 5 equações linearmente independentes e com 5 variáveis,
- sendo as variáveis não-básicas iguais a 0,

Solução básica (vértice do poliedro de transportes)

- Solução básica é admissível, porque $x_{ij} \geq 0, \forall i, j$.
- Há $m+n-1$ variáveis básicas (exemplo, quadro tem 5 casas básicas).
- As restantes variáveis são não-básicas.

	D	E	F	
A	$20\ _{3}$	$10\ _{6}$	$_{5}$	30
B	$_{2}$	$10\ _{5}$	$_{5}$	10
C	$_{1}$	$10\ _{2}$	$40\ _{3}$	50
	20	30	40	



Custo da solução básica:

- custo $= 20(3)+10(6)+10(5)+10(2)+40(3)=310$

Algoritmo de transportes

Algoritmo

Obter um quadro inicial (*i.e.*, solução básica inicial)
Enquanto (quadro não óptimo)
    mudar para um quadro adjacente melhor

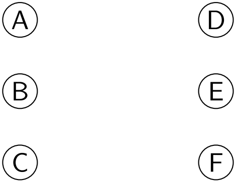
Dois métodos para obter um quadro inicial:

- Método do canto NW
- Método dos custos mínimos

Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

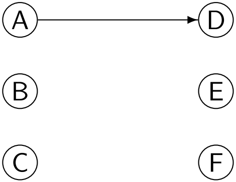
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

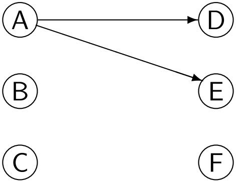
	D	E	F	
A	20 3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

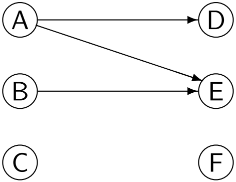
1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
A	20 / 3	10 / 6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

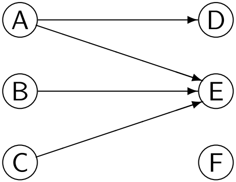
	D	E	F	
A	20 3	10 6	5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

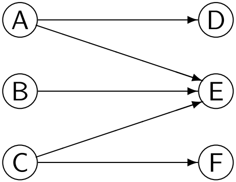
	D	E	F	
A	20 3	10 6	5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	10 2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
A	20 3	10 6	5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	10 2	40 3	50
	20	30	40	

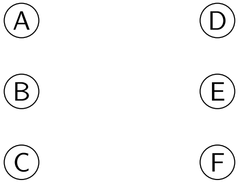


- Desvantagem: não toma em consideração os custos das casas, que podem ser muito elevados nas casas a NW.

Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

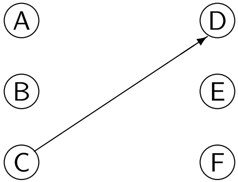
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

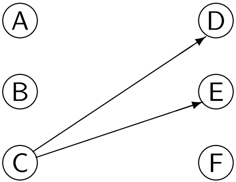
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	20 / 1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

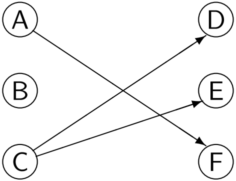
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

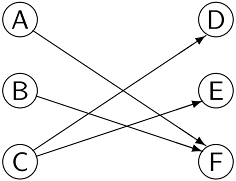
	D	E	F	
A	3	6	30 5	30
B	2	5	5	10
C	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

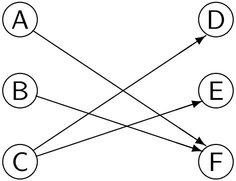
	D	E	F	
A	3	6	30 (5)	30
B	2	5	10 (5)	10
C	20 (1)	30 (2)	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
A	3	6	30 5	30
B	2	5	10 5	10
C	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	

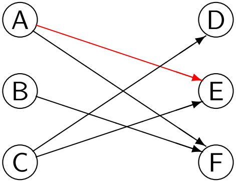


- Solução básica deve ter 5 variáveis básicas. Esta solução é admissível, mas ...

Solução inicial ... deve ter 5 variáveis básicas

- Considerar uma variável com valor nulo como variável básica.
- (neste caso, seleccionamos x_{AE}).
- A solução básica admissível é uma solução degenerada.

	D	E	F	
A	3	0 6	30 5	30
B	2	5	10 5	10
C	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	



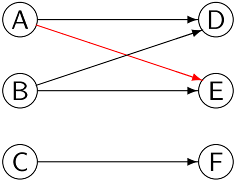
- Grafo associado à solução básica é uma árvore (depois de adicionar o arco).

Havia 2 componentes (floresta com 2 árvores), e a adição de um arco deu origem a uma **única** árvore que suporta todos os vértices.

Nota: selecção da variável básica com valor 0

- Nem todas as variáveis podem ser escolhidas!
- No seguinte exemplo, escolher a variável x_{AE} dá origem a um grafo que não é uma árvore.

	D	E	F
A	*	0	
B	*	*	
C			*



- A escolha errónea impossibilita o uso do método dos multiplicadores [veremos depois], porque há multiplicadores que não podem ser calculados.

Pivô: variação das variáveis não-básicas

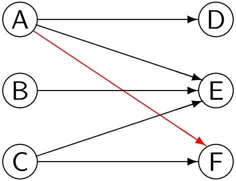
- Pivô: quadro inicial → quadro adjacente

- No movimento ao longo de uma aresta do poliedro do modelo de programação linear (de transportes):
- todas as variáveis não-básicas permanecem nulas, excepto uma **única** que aumenta de valor.

Pivô: como variam os valores das variáveis básicas?

- Exemplo: quando a variável x_{AF} (não-básica) aumenta de uma quantidade θ, como variam os valores das variáveis básicas?

	D	E	F	
A	20 $_{3}$	10 $_{6}$	$+\theta$ $_{5}$	30
B	$_{2}$	10 $_{5}$	$_{5}$	10
C	$_{1}$	10 $_{2}$	40 $_{3}$	50
	20	30	40	



Propriedades das árvores:

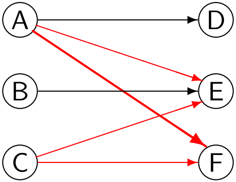
- Há 1 caminho (e 1 só) entre cada par de vértices. Porquê?
- A adição de 1 arco a uma árvore dá origem a 1 (e 1 só) ciclo. Porquê?

Pivô: variação dos valores das variáveis básicas

- O arco (A, F) (variável não-básica) forma um ciclo com os arcos (C, F), (C, E) e (A, E) (das variáveis básicas).

- Os arcos do ciclo formam um conjunto linearmente dependente.

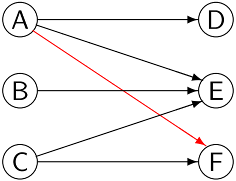
	D	E	F	
A	$20 \quad {}_3$	$10-\theta \quad {}_6$	$+\theta \quad {}_5$	30
B	${}_2$	$10 \quad {}_5$	${}_5$	10
C	${}_1$	$10+\theta \quad {}_2$	$40-\theta \quad {}_3$	50
	20	30	40	



- As variáveis básicas do ciclo são designadas por *Stepping-stones.*
- Os valores das variáveis básicas que ficam fora do ciclo não mudam.

Pivô: qual o aumento máximo de x_{AF}?

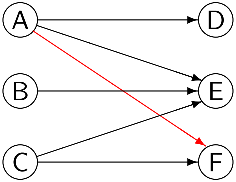
	D	E	F	
A	20 $_{3}$	$10-\theta$ $_{6}$	$+\theta$ $_{5}$	30
B	$_{2}$	10 $_{5}$	$_{5}$	10
C	$_{1}$	$10+\theta$ $_{2}$	$40-\theta$ $_{3}$	50
	20	30	40	



- Quanto pode aumentar a variável não-básica x_{AF} sem nenhuma das variáveis básicas se tornar negativa?
- $\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

Pivô: exemplo

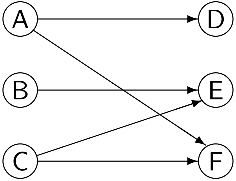
	D	E	F	
A	20 3	$10-\theta$ 6	$+\theta$ 5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	$10+\theta$ 2	$40-\theta$ 3	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

- A variável x_{AF} entra na base e x_{AE} sai da base.

	D	E	F	
A	20 3	6	10 5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	20 2	30 3	50
	20	30	40	



Teste de optimalidade

Um vértice (quadro) adjacente é melhor se:

- caminhando ao longo da aresta (aumentar uma variável não-básica e manter as restantes iguais a 0), no sentido do vértice adjacente, a função objectivo melhora.

- Se o valor da função objectivo não melhorar em nenhuma aresta, a solução actual (vértice actual) é uma solução óptima.

Dois métodos para fazer o teste de optimalidade:

- método do *stepping-stone*.
- método dos multiplicadores.

- O método do *stepping-stone* deve ser repetido para cada variável não-básica.
- O *método dos Multiplicadores* é uma forma alternativa (e mais eficiente) de fazer a análise para todas as variáveis não-básicas.

Teste de optimalidade: método do *stepping-stone*

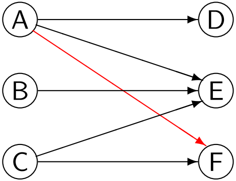
Análise da atractividade de uma dada variável não-básica:

- Os valores das variáveis do ciclo (a variável não-básica e as variáveis do *stepping-stone*) mudam, com reflexo nos custos.
- A soma das variações dos custos fornece a variação do valor da função objectivo.

Exemplo: variável não-básica x_{AF}

	D	E	F	
A	$20 \;{}_{3}$	$10-\theta \;{}_{6}$	$+\theta \;{}_{5}$	30
B	${}_{2}$	$10 \;{}_{5}$	${}_{5}$	10
C	${}_{1}$	$10+\theta \;{}_{2}$	$40-\theta \;{}_{3}$	50
	20	30	40	

$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$



Por cada unidade de aumento da variável não-básica x_{AF},

- gastam-se mais 5 unidades em (A, F),
- economizam-se 3 unidades em (C, F),
- gastam-se mais 2 unidades em (C, E),
- economizam-se 6 unidades em (A, E),
- pelo que o valor da função objectivo diminui 2 unidades: $\delta_{AF} = +5 - 3 + 2 - 6 = -2$.

Teste de optimalidade: método dos multiplicadores

Output do método dos multiplicadores:

- os δ_{ij} de todas as variáveis não-básicas ij.

- Vantagem: mais eficiente do que calcular as variações de custo para todos os ciclos.

Validade do método: resulta da teoria da dualidade (veremos depois)

- Os multiplicadores são variáveis duais associadas às restrições.

Teste de optimalidade: método dos multiplicadores (cont.)

Multiplicadores associados às restrições:

- há um multiplicador u_i associado a cada linha i, $i = 1, \ldots, m$;
- há um multiplicador v_j associado a cada coluna j, $j = 1, \ldots, n$.

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas ($ij \in \mathscr{B}$), fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

2. Para as casas não-básicas ($ij \in \mathscr{N}$), fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

Output do método dos multiplicadores:

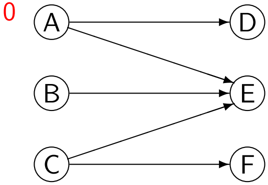
- os δ_{ij} de todas as casas não-básicas.

Exemplo: passo 0 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).

u_i \ v_j				
0	20 3	10 6	5	30
	2	10 5	5	10
	1	10 2	40 3	50



- fixar um multiplicador: $u_A = 0$.

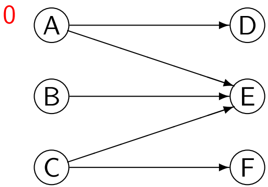
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

u_i \ v_j				
0	20 $_{3}$	10 $_{6}$	$_{5}$	30
	$_{2}$	10 $_{5}$	$_{5}$	10
	$_{1}$	10 $_{2}$	40 $_{3}$	50



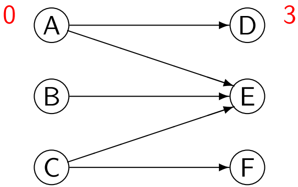
- $u_A + v_D = 3 \qquad \Rightarrow v_D =$
-
-
-
-

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

u_i \ v_j	3			
0	20 ; 3	10 ; 6	5	30
	2	10 ; 5	5	10
	1	10 ; 2	40 ; 3	50



- $u_A + v_D = 3$ $\Rightarrow v_D = 3$
- $u_A + v_E = 6$ $\Rightarrow v_E =$
-
-
-

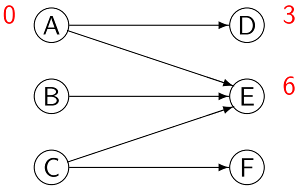
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

u_i \ v_j	3	6		
0	20 $_3$	10 $_6$	$_5$	30
	$_2$	10 $_5$	$_5$	10
	$_1$	10 $_2$	40 $_3$	50



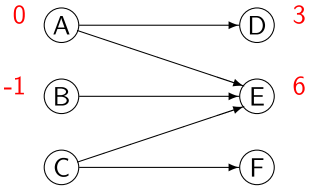
- $u_A + v_D = 3 \qquad \Rightarrow v_D = 3$
- $u_A + v_E = 6 \qquad \Rightarrow v_E = 6$
- $u_B + v_E = 5 \qquad \Rightarrow u_B =$
-
-

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

u_i \ v_j	3	6		
0	20 (3)	10 (6)	(5)	30
-1	(2)	10 (5)	(5)	10
	(1)	10 (2)	40 (3)	50



- $u_A + v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = 3$
- $u_A + v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = 6$
- $u_B + v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B = -1$
- $u_C + v_E = 2 \quad \Rightarrow u_C =$
-

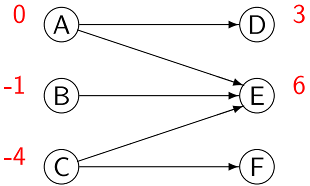
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

u_i \ v_j	3	6		
0	20 $_{3}$	10 $_{6}$	$_{5}$	30
-1	$_{2}$	10 $_{5}$	$_{5}$	10
-4	$_{1}$	10 $_{2}$	40 $_{3}$	50



- $u_A + v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = 3$
- $u_A + v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = 6$
- $u_B + v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B = -1$
- $u_C + v_E = 2 \quad \Rightarrow u_C = -4$
- $u_C + v_F = 3 \quad \Rightarrow v_F =$

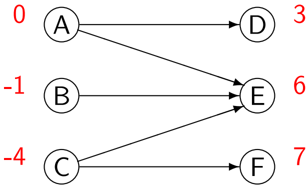
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

u_i \ v_j	3	6	7	
0	20 $_3$	10 $_6$	$_5$	30
-1	$_2$	10 $_5$	$_5$	10
-4	$_1$	10 $_2$	40 $_3$	50



- $u_A + v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = 3$
- $u_A + v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = 6$
- $u_B + v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B = -1$
- $u_C + v_E = 2 \quad \Rightarrow u_C = -4$
- $u_C + v_F = 3 \quad \Rightarrow v_F = 7$

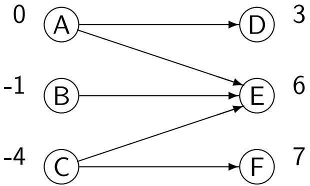
Exemplo: passo 2 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

u_i \ v_j	3	6	7	
0	20 ; 3	10 ; 6	-2 ; 5	30
-1	0 ; 2	10 ; 5	-1 ; 5	10
-4	+2 ; 1	10 ; 2	40 ; 3	50



- $\delta_{AF} = 5 - 0 - 7 = -2$
- $\delta_{BD} = 2 - (-1) - 3 = 0$
- $\delta_{BF} = 5 - (-1) - 7 = -1$
- $\delta_{CD} = 1 - (-4) - 3 = +2$
- A variável não-básica x_{AF} é a mais atractiva.

Variável não-básica que entra na base: selecção

- Seleccionar a variável não-básica com maior variação da função objectivo por unidade de incremento da variável não-básica, ou seja:

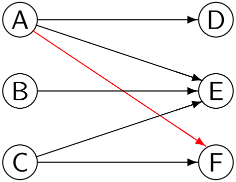
A variável não-básica a entrar na base é:

- a variável não-básica com δ_{ij} mais negativo (em problemas de minimização).

- Esta escolha visa atingir a solução óptima mais rapidamente.
- Em caso de empate, a escolha é arbitrária.

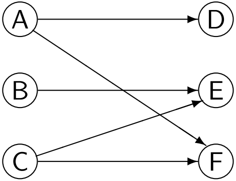
	D	E	F	
A	$20 \; {}_{3}$	$10-\theta \; {}_{6}$	$+\theta \; {}_{5}$	30
B	${}_{2}$	$10 \; {}_{5}$	${}_{5}$	10
C	${}_{1}$	$10+\theta \; {}_{2}$	$40-\theta \; {}_{3}$	50
	20	30	40	

$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$



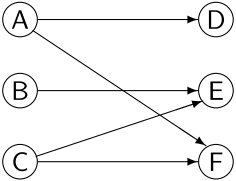
- A variável x_{AF} entra na base e x_{AE} sai da base.

	D	E	F	
A	$20 \; {}_{3}$	${}_{6}$	$10 \; {}_{5}$	30
B	${}_{2}$	$10 \; {}_{5}$	${}_{5}$	10
C	${}_{1}$	$20 \; {}_{2}$	$30 \; {}_{3}$	50
	20	30	40	



Quadro 2: teste de optimalidade

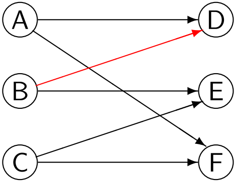
	3	4	5	
0	20 3	+2 6	10 5	30
1	-2 2	10 5	-1 5	10
-2	0 1	20 2	30 3	50
	20	30	40	



- A variável não-básica mais atractiva é a variável $x_{BD} : \delta_{BD} = -2$.

Iteração 2

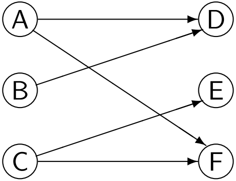
	D	E	F	
A	$20-\theta$ (3)	(6)	$10+\theta$ (5)	30
B	$+\theta$ (2)	$10-\theta$ (5)	(5)	10
C	(1)	$20+\theta$ (2)	$30-\theta$ (3)	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 20, 30\} = 10$

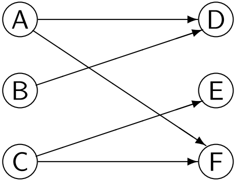
- A variável x_{BD} entra na base e x_{BE} sai da base.

	D	E	F	
A	10 (3)	(6)	20 (5)	30
B	10 (2)	(5)	(5)	10
C	(1)	30 (2)	20 (3)	50
	20	30	40	



Quadro 3: teste de optimalidade

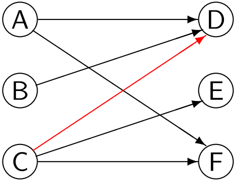
	3	4	5	
0	10 $_{3}$	+2 $_{6}$	20 $_{5}$	30
-1	10 $_{2}$	+2 $_{5}$	+1 $_{5}$	10
-2	0 $_{1}$	30 $_{2}$	20 $_{3}$	50
	20	30	40	



- Solução óptima.
- Custo da solução óptima: 10(3)+20(5)+10(2)+30(2)+20(3)=270
- Há soluções óptimas alternativas, porque $\delta_{CD} = 0$.

Uma solução óptima alternativa

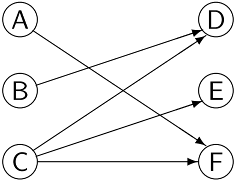
	D	E	F	
A	$10-\theta$ 3	6	$20+\theta$ 5	30
B	10 2	5	5	10
C	$+\theta$ 1	30 2	$20-\theta$ 3	50
	20	30	40	



$$\theta_{max} = \min\{10, 20\} = 10$$

- O custo da seguinte solução é o mesmo. Porquê?

	D	E	F	
A	3	6	30 5	30
B	10 2	5	5	10
C	10 1	30 2	10 3	50
	20	30	40	

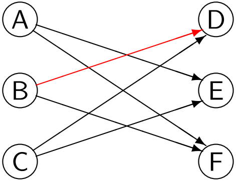


Degenerescência: pivô degenerado

- Com degenerescência, regras são semelhantes, mas θ_{max} pode ser 0.

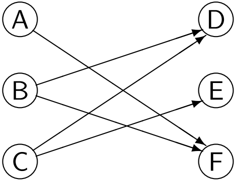
	5	6	5	
0	-2; 3	$0-\theta$; 6	$30+\theta$; 5	30
0	-3; $+\theta$; 2	-1; 5	$10-\theta$; 5	10
-4	$20-\theta$; 1	$30+\theta$; 2	+2; 3	50
	20	30	40	

$$\theta_{max} = \min\{0, 10, 20\} = 0$$



- A variável x_{BD} entra na base (com valor nulo) e x_{AE} sai da base.

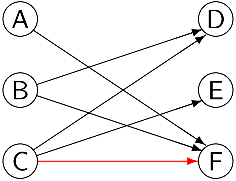
3	6	30; 5	30
0; 2	5	10; 5	10
20; 1	30; 2	3	50
20	30	40	



Degenerescência: saída do vértice degenerado

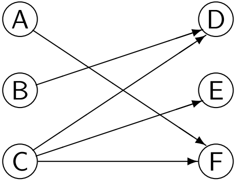
- O pivô anterior designa-se por *pivô degenerado:* a base é diferente, mas a solução básica (vértice) é a mesma.

	2	3	5	
0	+1 3	+3 6	30 5	30
0	$0{+}\theta$ 2	+2 5	$10{-}\theta$ 5	10
-1	$20{-}\theta$ 1	30 2	-1 $+\theta$ 3	50
	20	30	40	



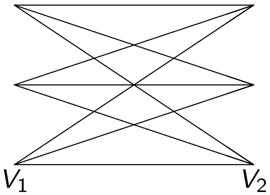
$\theta_{max} = \min\{10, 20\} = 10$

	2	3	5	
0	+1 3	+3 6	30 5	30
0	10 2	+2 5	5	10
-1	10 1	30 2	-1 10 3	50
	20	30	40	



Dual do problema de transportes

Grafo bipartido, $G = (V_1, V_2, A)$, em dois conjuntos de vértices V_1 e V_2.



Modelo primal do problema de transportes

$$
\begin{array}{ll}
\min & \displaystyle\sum_{ij: i \in V_1, j \in V_2} c_{ij} x_{ij} \\
suj. & \displaystyle\sum_{j \in V_2} x_{ij} = a_i \ , \ \forall i \in V_1 \\
& \displaystyle\sum_{i \in V_1} x_{ij} = b_j \ , \ \forall j \in V_2 \\
& x_{ij} \geq 0
\end{array}
$$

Problema de transportes: estrutura

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}			Variáveis duais
	1	1	1							$=$	a_1	u_1
				1	1	1				$=$	a_2	u_2
							1	1	1	$=$	a_3	u_3
	1			1			1			$=$	b_1	v_1
		1			1			1		$=$	b_2	v_2
			1			1			1	$=$	b_3	v_3
min	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}			

variáveis duais (multiplicadores) do problema de transportes

- u_i : variável dual associada à restrição do vértice $i \in V_1$
- v_j : variável dual associada à restrição do vértice $j \in V_2$
- Cada coluna A_{ij} tem apenas 2 elementos diferentes de 0, na posição i do bloco de cima e na posição j do bloco de baixo, respectivamente.

Problema dual

Dual

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{i \in V_1} a_i u_i + \sum_{j \in V_2} b_j v_j \\
suj. & u_i + v_j \le c_{ij} \ , \ \forall i \in V_1, j \in V_2 \\
 & u_i, v_j \text{ sem restrição de sinal}
\end{array}
$$

- as variáveis duais não têm restrição de sinal; iremos justificar esse facto já a seguir.

Construção do dual do problema de transportes - I

Uma restrição de igualdade no problema primal tem associada uma variável dual sem restrição de sinal

- Vamos colocar o problema na forma canónica: problema de *min* com restrições de $\geq$,
- vamos construir o problema dual,
- e confirmar que isso se verifica.

Problema primal na forma canónica:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}			Variáveis duais
	1	1	1							$\geq$	a_1	u_1^+
	-1	-1	-1							$\geq$	$-a_1$	u_1^-
				1	1	1				$\geq$	a_2	u_2^+
				-1	-1	-1				$\geq$	$-a_2$	u_2^-
							1	1	1	$\geq$	a_3	u_3^+
							-1	-1	-1	$\geq$	$-a_3$	u_3^-
	1			1			1			$\geq$	b_1	v_1^+
	-1			-1			-1			$\geq$	$-b_1$	v_1^-
		1			1			1		$\geq$	b_2	v_2^+
		-1			-1			-1		$\geq$	$-b_2$	v_2^-
			1			1			1	$\geq$	b_3	v_3^+
			-1			-1			-1	$\geq$	$-b_3$	v_3^-
min	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}			

Construção do dual do problema de transportes - III

Problema dual correspondente:

	u_1^+	u_1^-	u_2^+	u_2^-	u_3^+	u_3^-	v_1^+	v_1^-	v_2^+	v_2^-	v_3^+	v_3^-		
	1	-1					1	-1					$\leq$	c_{11}
	1	-1							1	-1			$\leq$	c_{12}
	1	-1									1	-1	$\leq$	c_{13}
			1	-1			1	-1					$\leq$	c_{21}
			1	-1					1	-1			$\leq$	c_{22}
			1	-1							1	-1	$\leq$	c_{23}
					1	-1	1	-1					$\leq$	c_{31}
					1	-1			1	-1			$\leq$	c_{32}
					1	-1					1	-1	$\leq$	c_{33}
max	a_1	$-a_1$	a_2	$-a_2$	a_3	$-a_3$	b_1	$-b_1$	b_2	$-b_2$	b_3	$-b_3$		

Fazendo as mudanças de variável

$$u_i = u_i^+ - u_i^-, \quad \forall i$$

$$v_j = v_j^+ - v_j^-, \quad \forall j$$

obtêm-se as variáveis u_i e v_j sem restrição de sinal.

Construção do dual do problema de transportes - IV

Modelo dual com variáveis sem restrição de sinal:

	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3		
	1			1			$\leq$	c_{11}
	1				1		$\leq$	c_{12}
	1					1	$\leq$	c_{13}
		1		1			$\leq$	c_{21}
		1			1		$\leq$	c_{22}
		1				1	$\leq$	c_{23}
			1	1			$\leq$	c_{31}
			1		1		$\leq$	c_{32}
			1			1	$\leq$	c_{33}
max	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3		

As variáveis u_i e v_j não têm restrição de sinal.

Método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores: passo 1

- Para cada variável básica x_{ij}, fazer: $u_i + v_j - c_{ij} = 0$,
- porque a variável dual correspondente (variável de folga da restrição dual) deve ser nula.

Solução dual: $c_B B^{-1} = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$.

Método dos multiplicadores: passo 2

- Para cada variável não-básica x_{ij}, calcular: $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$.
- Como cada coluna A_{ij} tem apenas 2 elementos diferentes de 0,
- $(c_B B^{-1}) A_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$
- os valores são simétricos, porque o problema é de minimização.

O valor de δ_{ij} serve para avaliar se a variável não-básica é atractiva.

Conclusão

- O algoritmo apresentado é uma especialização do algoritmo simplex para um problema que é representado num grafo bipartido.
- Este problema é, por vezes, designado por problema de Hitchcock(†), que apresentou um modelo matemático e um procedimento para a sua resolução.
- Os grafos bipartidos são uma classe de grafos, e o algoritmo pode ser generalizado para grafos gerais.

(†) - Frank. L. Hitchcock, The distribution of a product from several sources to numerous localities, J. Math. Physics, 20 (1941), 224-230.

Fim