TESTES DE HIPÓTESES

OBJETIVO

Verificar se os dados amostrais (ou estimativas obtidas a partir deles) são ou não compatíveis com determinadas populações (ou valores previamente fixados dos parâmetros populacionais).

PROCEDIMENTO

- Definição das hipóteses
  - H_0 – hipótese nula
  - H_1 – hipótese alternativa
- Identificação da estatística de teste (ET)
- Definição da regra de decisão
- Cálculo da estatística de teste e tomada de decisão

Critérios para um teste de hipóteses

Hipótese \ Decisão	Não rejeitar H_0	Rejeitar H_0
H_0 é verdadeira	Decisão correta	**Erro Tipo I**
H_0 é falsa	**Erro Tipo II**	Decisão correta

ERROS

- α = P(erro tipo I) = P(rej. H_0 | H_0)
- β = P(erro tipo II)=P(não rej H_0 | H_1)

Função potência de um teste

$$\boldsymbol{k(\theta)} = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} & H_0 \\ \boldsymbol{1-\beta} & H_1 \end{cases}$$

DECISÃO

- Se o valor calculado para a ET > ET(α) então rejeita-se H_0 (valor p < α)

"**valor p** é a probabilidade de se obter uma estatística de teste igual ou mais extrema quanto aquela observada em uma amostra, assumindo verdadeira a hipótese nula"

- Se o valor calculado para a ET < ET(α) então não se rejeita H_0; (valor p > α) - resultado inconclusivo.

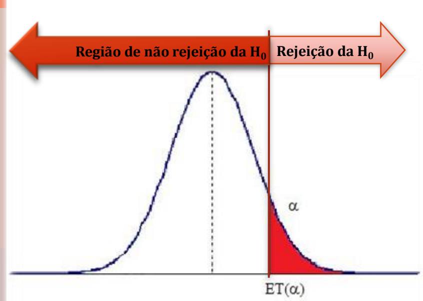
Nota: A magnitude do valor p não indica o tamanho ou a importância de um efeito observado

TESTE DE SIGNIFICÂNCIA

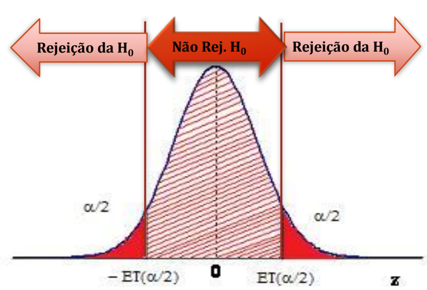
- Se a diferença entre o que esperamos e o que obtemos é tão grande que não pode ser atribuída ao acaso, nós rejeitamos a hipótese na qual baseamos as nossas expectativas.

- Se a diferença entre o que esperamos e o que obtemos é tão pequena que pode ser realmente atribuída ao acaso, nós não rejeitamos a hipótese na qual baseamos as nossas expectativas, dizemos que o resultado do teste não é (estatisticamente) significativo.

Teste de hipóteses unilateral



Testes de hipóteses bilateral



MÉDIA

Teste Unilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$
$$(H_1 : \mu < \mu_0)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estatística

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \approx \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Região de Rejeição (unilateral)

$$z > z_{1-\alpha}$$
$$(z < -z_{1-\alpha})$$

Região de Rejeição (bilateral)

$$|z| > z_{1-\alpha/2}$$

EXEMPLO 1

- Suponha que a Inspeção das Atividades Económicas quer verificar se os sacos de cimento de uma determinada fábrica têm um peso médio de 15 Kg. Para tal recolheu uma amostra aleatória de 50 sacos, tendo encontrado uma média de 14.81 Kg com um desvio padrão de 0.62 Kg. Permitem os dados concluir que a fábrica está a fornecer sacos com um peso inferior ao especificado?. Assuma α=0.05.

SOLUÇÃO 1

- 1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : \mu = 15$$
$$H_1 : \mu < 15$$

- 2. Região crítica

$$z < -z_{0.95} = -1.65$$

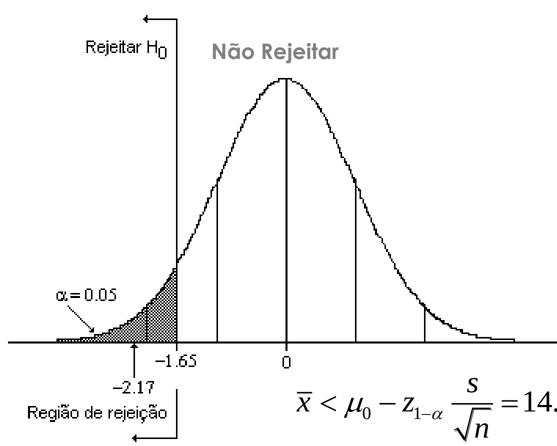
- 3. Teste estatístico

$$z \approx \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{14.81 - 15}{0.62/\sqrt{50}} = -2.17$$

- 4. Decisão

  Rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, os sacos têm, em média, um peso inferior a 15 Kg.

SOLUÇÃO 1



$$\overline{x} < \mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} = 14.86$$

MÉDIA

Teste Unilateral

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

$(H_1 : \mu < \mu_0)$

Teste Bilateral

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

Estatística

$$T = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Região de Rejeição

$t > t_\alpha$

$(t < -t_\alpha)$

Região de Rejeição

$|t| > t_{\alpha/2}$

EXEMPLO 2

- Uma máquina produz seringas com 2.5 cm de comprimento. No entanto, se as seringas forem demasiado curtas ou longas, serão rejeitadas. Neste caso a máquina necessita de ser ajustada. Para tal, uma amostra de seringas é recolhida, a intervalos regulares, para verificar se as mesmas estão a ser produzidas com o comprimento médio de 2.5 cm.
- Suponha que foi recolhida uma amostra de 16 seringas, com uma média $\overline{x}$ =2.5138 cm e um desvio padrão s=0.03594 cm.
- Há evidência suficiente para assumir que a máquina não está a produzir segundo as especificação, isto é, que a máquina está fora de controlo? Use a=0.01.

SOLUÇÃO 2

- 1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : \mu = 2.5$$
$$H_1 : \mu \neq 2.5$$

- 2. Região crítica

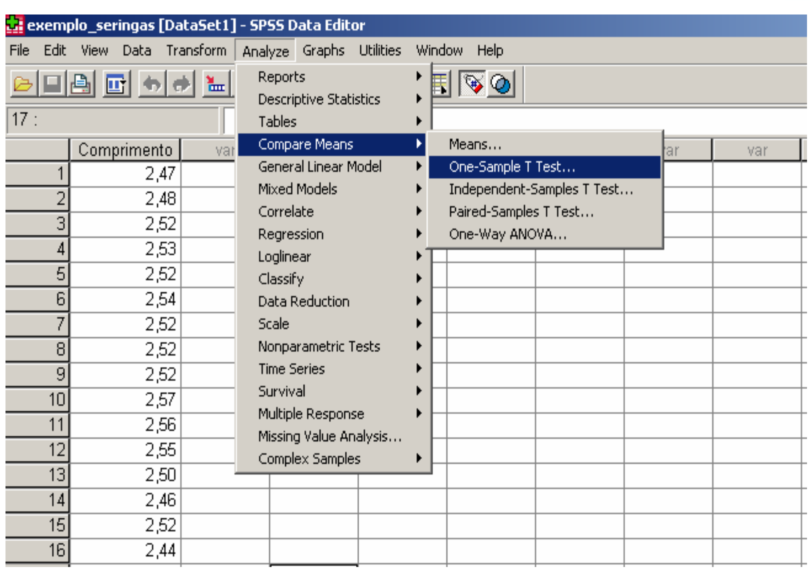
$$|t| \geq t_{0.005} = 2.947$$

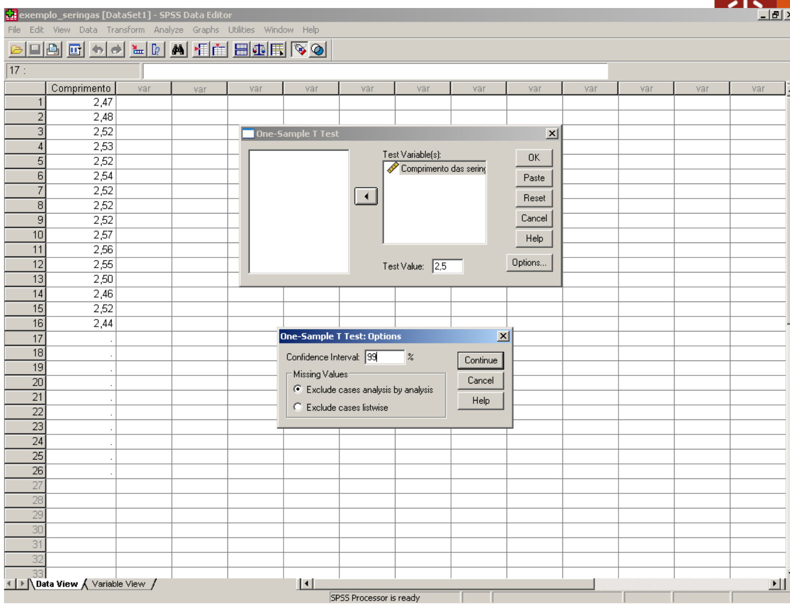
- 3. Teste estatístico

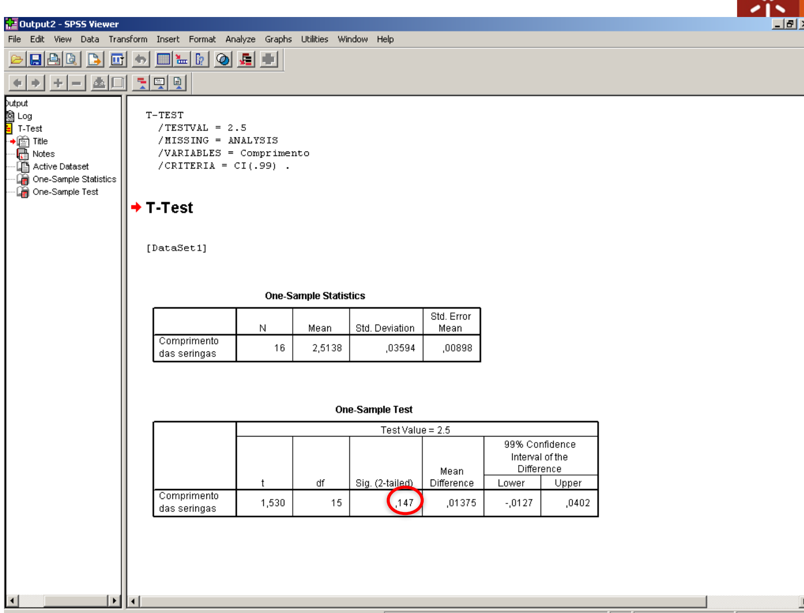
$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{2.5138 - 2.5}{0.03594/\sqrt{16}} = 1.536$$

- 4. Decisão

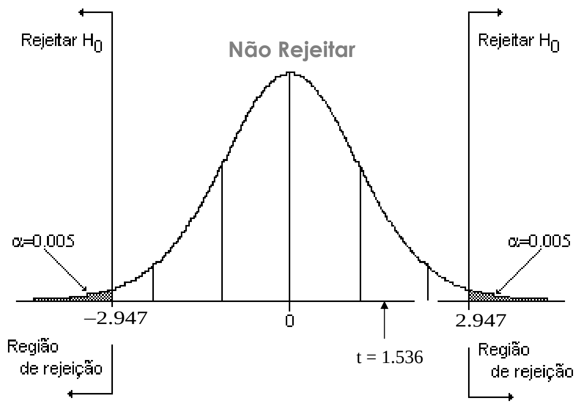
Não rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, as seringas podem apresentar um comprimento médio de 2.5 cm.




exemplo_seringas [DataSet1] - SPSS Data Editor
File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help
17 :
Comprimento
1 2,47
2 2,48
3 2,52
4 2,53
5 2,52
6 2,54
7 2,52
8 2,52
9 2,52
10 2,57
11 2,56
12 2,55
13 2,50
14 2,46
15 2,52
16 2,44
One-Sample T Test
Test Variable(s):
Comprimento das sering
Test Value: 2,5
OK
Paste
Reset
Cancel
Help
Options...
One-Sample T Test: Options
Confidence Interval: 99 %
Missing Values
Exclude cases analysis by analysis
Exclude cases listwise
Continue
Cancel
Help
Data View
Variable View
SPSS Processor is ready


Output2 - SPSS Viewer
File Edit View Data Transform Insert Format Analyze Graphs Utilities Window Help
Output
Log
T-Test
Title
Notes
Active Dataset
One-Sample Statistics
One-Sample Test
T-TEST
/TESTVAL = 2.5
/MISSING = ANALYSIS
/VARIABLES = Comprimento
/CRITERIA = CI(.99) .
T-Test
[DataSet1]
One-Sample Statistics
N Mean Std. Deviation Std. Error Mean
Comprimento das seringas 16 2,5138 ,03594 ,00898
One-Sample Test
Test Value = 2.5
t df Sig. (2-tailed) Mean Difference 99% Confidence Interval of the Difference Lower Upper
Comprimento das seringas 1,530 15 ,147 ,01375 -,0127 ,0402
SPSS Processor is ready

SOLUÇÃO 2



DIFERENÇA DE MÉDIAS AMOSTRAS INDEPENDENTES

Teste Unilateral

$$H_0:(\mu_1-\mu_2)=d_0$$

$$H_1:(\mu_1-\mu_2)>d_0$$

$$\left(H_1:(\mu_1-\mu_2)<d_0\right)$$

Teste Bilateral

$$H_0:(\mu_1-\mu_2)=d_0$$
$$H_1:(\mu_1-\mu_2)\neq d_0$$

Estatística

$$T=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$$s_p^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Região de Rejeição

$$t>t_\alpha$$

$$\left(t<-t_\alpha\right)$$

Região de Rejeição

$$|t|>t_{\alpha/2}$$

EXEMPLO 4

O desgaste da cabeça do fémur conduz à implantação de uma cabeça de substituição numa liga metálica leve e resistente. Esta implantação é feita com um cimento especial, que alguns médicos suspeitam que possa diminuir a resistência do osso. No entanto, as opiniões dos ortopedistas dividem-se quanto à necessidade de introdução de um tampão que evite que o cimento se espalhe pelo espaço disponível. Para comparar o efeito do uso do tampão na resistência à flexão, foram efetuados vários implantes em animais de laboratório, tendo sido obtidos os seguintes resultados de resistência (Nm):

C/ Tampão	7.0	6.2	7.1	8.1	5.1	5.6
S/ Tampão	8.9	7.7	5.3	8.6	7.1	4.6

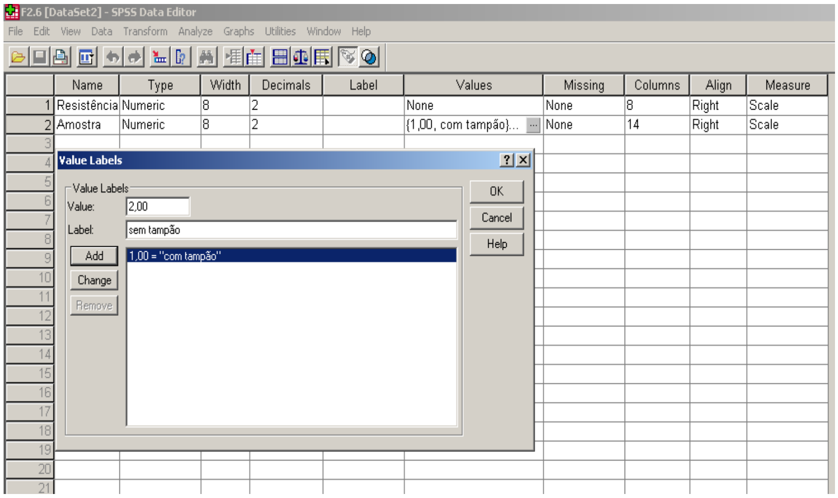
O que pode concluir acerca do efeito do tampão na resistência à flexão? Use α=0.05.

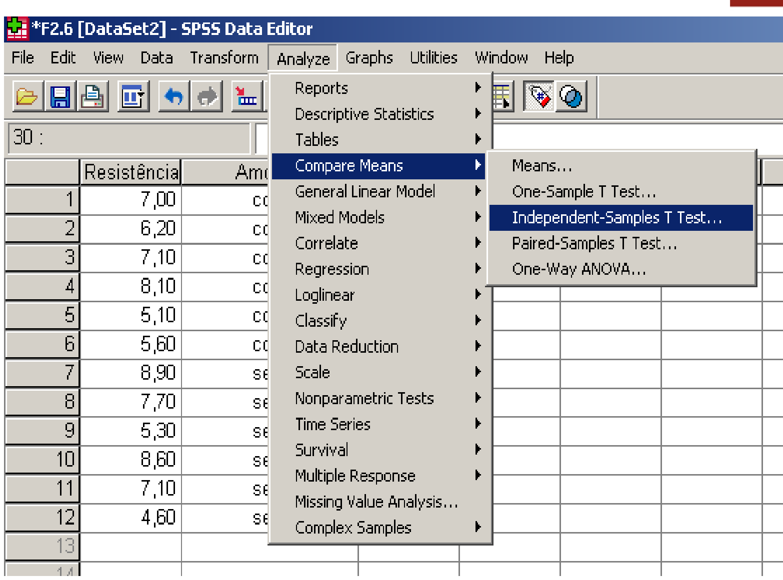
F2.6 [DataSet2] - SPSS Data Editor

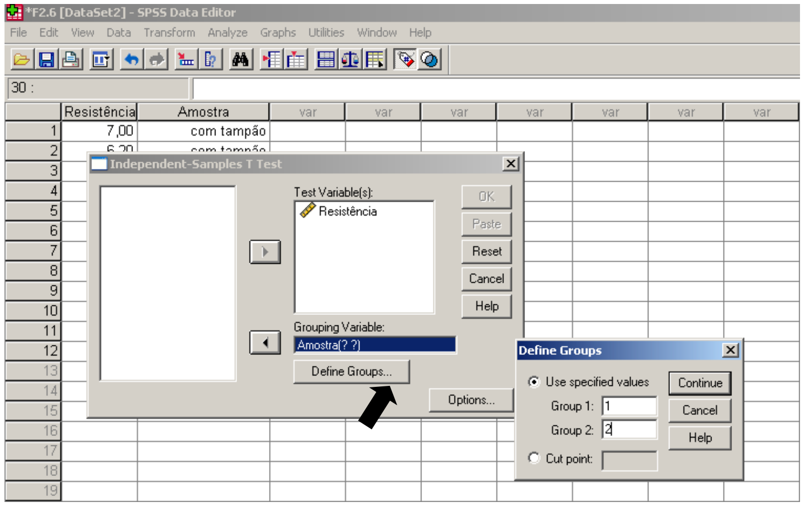
File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help

30 :

	Resistência	Amostra	var	var	var
1	7,00	com tampão			
2	6,20	com tampão			
3	7,10	com tampão			
4	8,10	com tampão			
5	5,10	com tampão			
6	5,60	com tampão			
7	8,90	sem tampão			
8	7,70	sem tampão			
9	5,30	sem tampão			
10	8,60	sem tampão			
11	7,10	sem tampão			
12	4,60	sem tampão			
13					


F2.6 [DataSet2] - SPSS Data Editor
File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help
Name Type Width Decimals Label Values Missing Columns Align Measure
1 Resistência Numeric 8 2 None None 8 Right Scale
2 Amostra Numeric 8 2 {1,00, com tampão}... None 14 Right Scale
Value Labels
Value Labels
Value: 2,00
Label: sem tampão
Add
Change
Remove
1,00 = "com tampão"
OK
Cancel
Help


*F2.6 [DataSet2] - SPSS Data Editor
File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help
30 :
Resistência
1 7,00
2 6,20
3 7,10
4 8,10
5 5,10
6 5,60
7 8,90
8 7,70
9 5,30
10 8,60
11 7,10
12 4,60
Reports
Descriptive Statistics
Tables
Compare Means
General Linear Model
Mixed Models
Correlate
Regression
Loglinear
Classify
Data Reduction
Scale
Nonparametric Tests
Time Series
Survival
Multiple Response
Missing Value Analysis...
Complex Samples
Means...
One-Sample T Test...
Independent-Samples T Test...
Paired-Samples T Test...
One-Way ANOVA...



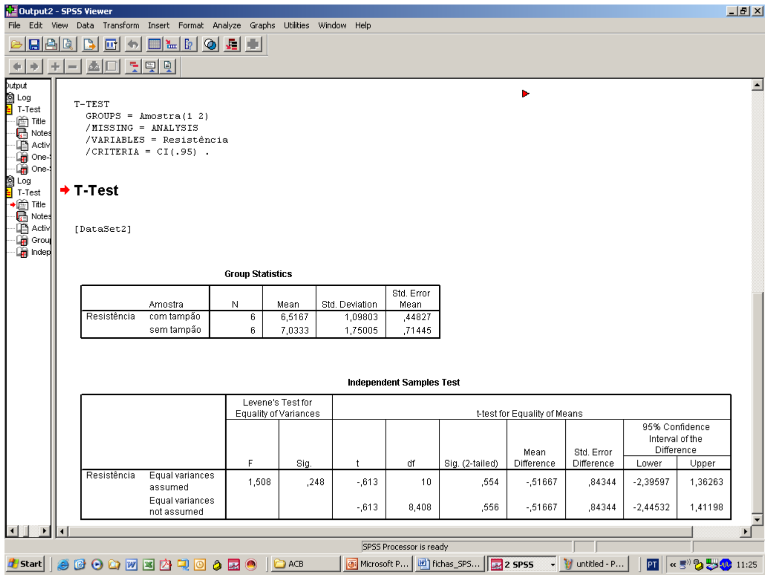
SOLUÇÃO 4

$$\bar{x}_1 = 6.517 \quad s_1 = 1.098$$
$$\bar{x}_2 = 7.033 \quad s_2 = 1.750$$

- 1. Formulação das hipóteses $H_0: (\mu_1 - \mu_2) = 0$, $H_1: (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$

- 2. Região crítica

$$|t| \geq t_{0.025} = 2.228$$



Output2 - SPSS Viewer

```
T-TEST
  GROUPS = Amostra(1 2)
  /MISSING = ANALYSIS
  /VARIABLES = Resistência
  /CRITERIA = CI(.95) .
```

T-Test

[DataSet2]

Group Statistics

	Amostra	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Resistência	com tampão	6	6,5167	1,09803	,44827
	sem tampão	6	7,0333	1,75005	,71445

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Resistência	Equal variances assumed	1,508	,248	-,613	10	,554	-,51667	,84344	-2,39597	1,36263
	Equal variances not assumed			-,613	8,408	,556	-,51667	,84344	-2,44532	1,41198

SPSS Processor is ready

DIFERENÇA DE MÉDIAS AMOSTRAS EMPARELHADAS

Teste Unilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$
$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$$
$$\left(H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0\right)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$
$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$$

Estatística

$$t = \frac{\bar{d} - D_0}{s_d / \sqrt{n}}$$

Região de Rejeição

$$t > t_\alpha$$
$$(t < -t_\alpha)$$

Região de Rejeição

$$|t| > t_{\alpha/2}$$

PROPORÇÃO

Teste Unilateral

$$H_0 : \pi = \pi_0$$
$$H_1 : \pi > \pi_0$$
$$(H_1 : \pi < \pi_0)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : \pi = \pi_0$$
$$H_1 : \pi \neq \pi_0$$

Estatística

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$

Região de Rejeição

$$z > z_{1-\alpha}$$
$$(z < -z_{1-\alpha})$$

Região de Rejeição

$$|z| > z_{1-\alpha/2}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

DIFERENÇA DE PROPORÇÕES

Teste Unilateral

$$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$$
$$H_1 : \pi_1 - \pi_2 > d_0$$
$$(H_1 : \pi_1 - \pi_2 < d_0)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$$
$$H_1 : \pi_1 - \pi_2 \neq d_0$$

Estatística

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - d_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

se $d_0 \neq 0$

Região de Rejeição

$$z > z_{1-\alpha}$$
$$(z < -z_{1-\alpha})$$

Região de Rejeição

$$|z| > z_{1-\alpha/2}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

DIFERENÇA DE PROPORÇÕES

Teste Unilateral

$$H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$$
$$H_1: \pi_1 - \pi_2 > 0$$
$$\left(H_1: \pi_1 - \pi_2 < 0\right)$$

Teste Bilateral

$$H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$$
$$H_1: \pi_1 - \pi_2 \neq 0$$

Estatística

$$z = \frac{\left(p_1 - p_2\right)}{\sqrt{p\left(1-p\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad \text{sendo } p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

Região de Rejeição

$$z > z_{1-\alpha}$$
$$\left(z < -z_{1-\alpha}\right)$$

Região de Rejeição

$$|z| > z_{1-\alpha/2}$$

VARIÂNCIA

Teste Unilateral

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$
$$\left(H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2\right)$$

Teste Bilateral

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Estatística

$$\chi^2 = \frac{\left(n-1\right)s^2}{\sigma_0^2}$$

Região de Rejeição

$$\chi^2 > \chi_\alpha^2 \left(\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2\right)$$

Região de Rejeição

$$\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2 \quad \text{ou} \quad \chi^2 > \chi_\alpha^2$$

EXEMPLO 5

As garrafas de refrigerantes contêm um volume aproximado de 33 cl. O produtor perderá dinheiro se as garrafas contiverem muito mais do que o volume especificado, e correrá o risco de ser multado, se o volume for bastante inferior. Assim, é necessário controlar a variação do volume de enchimento das garrafas. Se a variância for superior a 0.25 o processo está fora de controlo, e a máquina de enchimento deve ser ajustada Para tal, um controlador de qualidade recolhe uma amostra de 15 garrafas, com um enchimento médio de 33.15 cl e um desvio padrão de 0.71 cl. Face a estes resultados pode-se concluir que o processo está controlado?

SOLUÇÃO 5

1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : \sigma^2 = 0.25$$
$$H_1 : \sigma^2 > 0.25$$

2. Região crítica

$$\chi^2 \geq \chi^2_{0.05} = 23.685$$

3. Teste estatístico

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{14(0.71)^2}{0.25} = 28.230$$

4. Decisão

Rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, o processo de enchimento está fora de controlo.

RAZÃO DE VARIÂNCIAS

Teste Unilateral

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \Rightarrow \left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2\right)$$

$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \Rightarrow \left(\sigma_1^2 > \sigma_2^2\right)$$

Estatística

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

$$\left(F = \frac{s_2^2}{s_1^2}\right)$$

Região de Rejeição

$$F > F_{\alpha} \quad \left[H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1 \Rightarrow \left(\sigma_1^2 < \sigma_2^2\right)\right]$$

Teste Bilateral

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \Rightarrow \left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2\right)$$

$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \Rightarrow \left(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2\right)$$

Estatística

$$F = \begin{cases} \dfrac{s_1^2}{s_2^2} & s_1^2 > s_2^2 \\[2ex] \dfrac{s_2^2}{s_1^2} & s_1^2 < s_2^2 \end{cases}$$

Região de Rejeição

$$F > F_{\alpha/2}$$

EXEMPLO 9

Uma das características importantes num vinho de qualidade é a constância do gosto no sabor e no aroma. A variabilidade no sabor depende do processo de vinificação, que pode incluir o controlo de variáveis como a temperatura, fermentação, qualidade das leveduras, etc. Um empresa quer ensaiar um novo processo de vinificação com o objetivo de reduzir a variabilidade no gosto, medido por um índice. Duas amostras aleatórias, respectivamente de 25 e 15 copos, retiradas da produção dos dois processos de vinificação foram avaliadas por um painel de provadores, produzindo os seguintes resultados: $s_1 = 1{,}22$ e $s_2 = 0{,}72$.

Permitem os dados concluir que a variabilidade no segundo processo de vinificação é menor?

SOLUÇÃO 9

1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$$

2. Região crítica

$$F \geq F_{0.01,24,14} \cong 3.41$$

3. Teste estatístico

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{(1.22)^2}{(0.72)^2} = 2.87$$

4. Decisão

Rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, a variabilidade no segundo processo de vinificação é menor.