

INTERVALOS DE CONFIANÇA



INTERVALOS DE CONFIANÇA



- Estabelecer um intervalo de confiança para o parâmetro θ .

$$P(\hat{\theta}_l < \theta < \hat{\theta}_s) = 1 - \alpha$$

- Determinar os dois limites que definem o intervalo,

$$\hat{\theta}_l < \theta < \hat{\theta}_s$$

limites que dependem da distribuição amostral de θ e são, respectivamente, os limites inferior e superior do intervalo.



INTERVALO DE CONFIANÇA

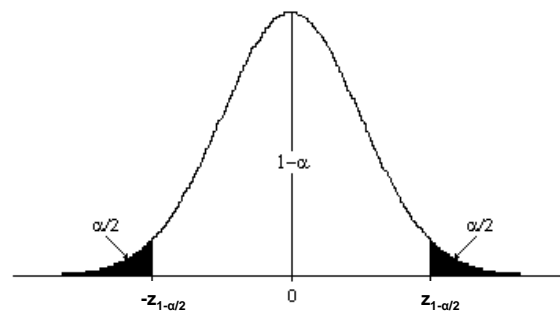
- A média de uma amostra possui uma distribuição, σ^2 conhecido.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/n \quad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$P(-z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$



INTERVALO DE CONFIANÇA





INTERVALO DE CONFIANÇA

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$



INTERVALO DE CONFIANÇA: MÉDIA

- σ^2 conhecido

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$



EXEMPLO 1

- Suponha que era conhecido que a média e o desvio padrão das alturas dos rapazes com 20 anos era $\mu = 170 \text{ cm}, \sigma = 10 \text{ cm}$
- Considere que foram recolhidas 5 amostras de 25 rapazes, tendo sido observadas as seguintes médias

Amostra	1	2	3	4	5
Média (cm)	172	168	171	165	172

Profª Ana Cristina Braga

10



SOLUÇÃO 1

- Intervalo de Confiança de 95%

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

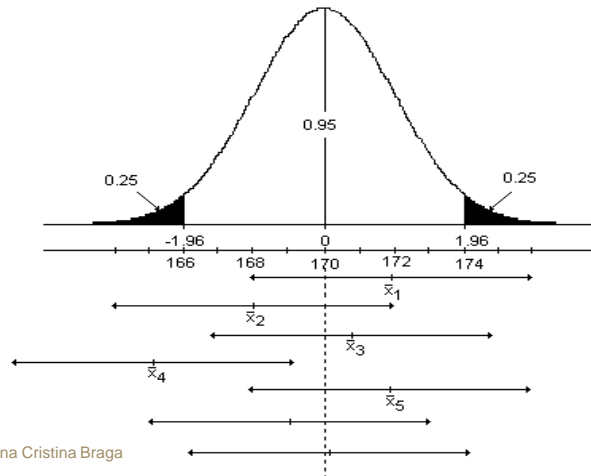
$$\bar{x} - 1.96 \frac{10}{\sqrt{25}} < \mu < \bar{x} + 1.96 \frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$\bar{x} \pm 4 \text{ cm}$$

Profª Ana Cristina Braga

11

SOLUÇÃO 1



Profª Ana Cristina Braga

12

EXEMPLO 2



- O peso ao nascer é uma das variáveis mais importantes na avaliação do bem-estar de um recém nascido.
- Suponha que o valor do desvio padrão para os bebês de sexo masculino é 562 gramas. Num determinado centro de saúde, uma amostra de 19 recém nascidos apresentou uma média 3222 gramas.
- Construa um intervalo de confiança de 95% para média do peso dos bebês.

Profª Ana Cristina Braga

13

SOLUÇÃO 2



$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$3222 - 1.96 \frac{562}{\sqrt{19}} < \mu < 3222 + 1.96 \frac{562}{\sqrt{19}}$$

$$3222 \pm 253g$$

$$2969 < \mu < 3475$$

Profª Ana Cristina Braga

14

IC1.sav [DataSet0] - SPSS Data Editor

File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help

1 :

	peso	var	var
1	3233		
2	3700		
3	2673		
4	3564		
5	3416		
6	3423		
7	4154		
8	2963		
9	2826		
10	4140		
11	2726		
12	3252		
13	3237		
14	2994		
15	2910		
16	2879		
17	2833		
18	3015		
19	3281		
20			
21			

Reports

- Descriptive Statistics
 - Frequencies...
 - Descriptives...
 - Explore... (selected)
 - Crosstabs...
 - Ratio...
 - P-P Plots...
 - Q-Q Plots...
- Tables
- Compare Means
- General Linear Model
- Generalized Linear Models
- Mixed Models
- Correlate
- Regression
- Loglinear
- Classify
- Data Reduction
- Scale
- Nonparametric Tests
- Time Series
- Survival
- Multiple Response
- Missing Value Analysis...
- Complex Samples
- Quality Control
- ROC Curve...

Profª Ana Cristina Braga

15

IC1.sav [DataSet0] - SPSS Data Editor

File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help

1: peso

1	3233
2	3700
3	2673
4	3564
5	3416
6	3423
7	4154
8	2963
9	2826
10	4140
11	2726
12	3252
13	3237
14	2994
15	2910
16	2679
17	2833
18	3015
19	3281
20	
21	
22	
23	
24	
25	

Explore

Dependent List: peso

Factor List:

Label Cases by:

Display: ☐ Both ☒ Statistics ☐ Plots

Statistics... Plots... Options...

Explore: Statistics

☒ Descriptives

Confidence Interval for Mean: 95 %

☐ M-estimators

☐ Outliers

☐ Percentiles

Continue Cancel Help

Profª Ana Cristina Braga

16

resultados [Document1] - SPSS Viewer

File Edit View Data Transform Insert Format Analyze Graphs Utilities Window Help

Output

- Log
- Explore
- Table
- Notes
- Active Dataset
- Case Processing Summary
- Descriptives

EXAMINE

VARIABLES=peso

/PLOT NONE

/STATISTICS DESCRIPTIVES

/CINTERVAL 95

/MISSING LISTWISE

/NOTOTAL

➔ Explore

[DataSet0] C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\Aulaa_2007_08\Aplicada_LEI0708\IC1.sav

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
peso	19	100,0%	0	,0%	19	100,0%

Descriptives

			Statistic	Std. Error
peso	Mean		3222,00	89,279
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	3012,42	
		Upper Bound	3430,57	
	5% Trimmed Mean		3200,75	
	Median		3233,04	
	Variance		107366,3	
	Std. Deviation		327,445	
	Minimum		2673	
	Maximum		4154	
	Range		1481	
	Interquartile Range		544	
	Skewness		,942	,524
	Kurtosis		,328	1,014

Profª Ana Cristina Braga

17

INTERVALO DE CONFIANÇA: MÉDIA



- σ^2 desconhecido, $n < 30$

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \quad P(-t_{\alpha/2, n-1} < T < t_{\alpha/2, n-1}) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-t_{\alpha/2, n-1} < \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2, n-1}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Profª Ana Cristina Braga

18

INTERVALO DE CONFIANÇA: MÉDIA



- σ^2 desconhecido, $n < 30$

$$\bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Profª Ana Cristina Braga

19



EXEMPLO 3

- Numa universidade, uma amostra de 12 estudantes foi seleccionada.
- O comprimento médio da mão encontrado foi de 19.92 cm com um desvio padrão de 0.17cm.
- Construa um intervalo de confiança de 95% para o verdadeiro valor do comprimento médio.

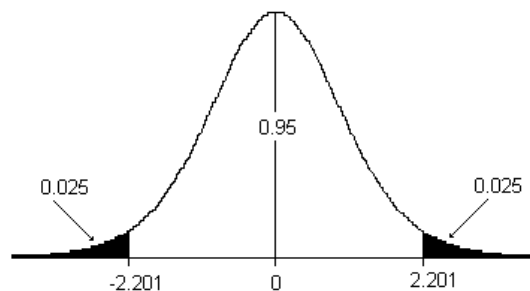
Profª Ana Cristina Braga

20



SOLUÇÃO 3

- t -Student, com 11 graus de liberdade



Profª Ana Cristina Braga

21

SOLUÇÃO 3



$$19.92 - 2.201 \frac{0.17}{\sqrt{12}} < \mu < 19.92 + 2.201 \frac{0.17}{\sqrt{12}}$$

$$19.92 \pm 0.108$$

$$19.812 < \mu < 20.028$$

Profª Ana Cristina Braga

22

INTERVALO DE CONFIANÇA DIFERENÇA DE MÉDIAS



- \bar{x}_1 , \bar{x}_2 médias de amostras aleatórias independentes, de dimensão n_1 , n_2
- Populações normais com médias μ_1 e μ_2 e variância comum desconhecida σ^2

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Profª Ana Cristina Braga

23

INTERVALO DE CONFIANÇA DIFERENÇA DE MÉDIAS



$$\begin{aligned} & (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 \\ & < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \\ & s_p^2 = \frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \end{aligned}$$

Profª Ana Cristina Braga

24

EXEMPLO 5



- Pretende-se testar duas formulações alimentares no crescimento de frangos de aviário. Os frangos, distribuídos por dois pavilhões A e B, foram alimentados durante cinco semanas com a respetiva ração. No fim do período de crescimento, foram selecionadas duas amostras.

Grupo	n	Média (g)	Desvio Padrão (g)
Pav. A	16	1623,7500	192,7131
Pav. B	10	1588,0000	167,1194

Profª Ana Cristina Braga

25



SOLUÇÃO 5

- *t*-Student

$$s_p^2 = \frac{(16-1)(192.7131)^2 + (10-1)(167.1194)^2}{16+10-2}$$

$$s_p^2 = 33684.7970$$

$$t_{0.025,24} = 2.06$$

$$(1623.75 - 1588.00) \pm (2.06)(183.5342) \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{10}}$$

$$35.75 \pm 152.4091$$

$$-116.6591 < \mu_1 - \mu_2 < 188.1591$$

Profª Ana Cristina Braga

26



INTERVALO DE CONFIANÇA DIFERENÇA DE MÉDIAS

- \bar{x}_1 , \bar{x}_2 médias de amostras aleatórias independentes
- Populações normais com médias μ_1 e μ_2 e variâncias desconhecidas e diferentes

Profª Ana Cristina Braga

27

INTERVALO DE CONFIANÇA DIFERENÇA DE MÉDIAS



$$n_1 = n_2 = n$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2, 2(n-1)} \sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{n}}$$

$$n_1 + n_2 - 2 = 2(n-1)$$

$$n_1 \neq n_2$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2, \nu} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$\nu = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

Profª Ana Cristina Braga

28

INTERVALO DE CONFIANÇA DIFERENÇA DE MÉDIAS



- Amostras emparelhadas

$$\mu_d = (\mu_1 - \mu_2)$$

$$\bar{d} - t_{\alpha/2, n-1} \left(\frac{s_d}{\sqrt{n}} \right) < \mu_d < \bar{d} + t_{\alpha/2, n-1} \left(\frac{s_d}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2, n-1} \left(\frac{s_d}{\sqrt{n}} \right)$$

Profª Ana Cristina Braga

29



EXEMPLO 6

- Uma amostra de dez trabalhadores de uma fábrica onde existe a manipulação de dioxinas foi seleccionada aleatoriamente.
- Nestes trabalhadores foi determinada a concentração (em ppm, partes por milhão) de dioxinas no plasma e no tecido gordo.
- Construa um intervalo de confiança para a diferença entre as concentrações de dioxina no plasma e no tecido gordo.

Profª Ana Cristina Braga

30



EXEMPLO 6

Trabalhador	Plasma	Tecido Gordo
1	2.5	4.9
2	3.5	6.9
3	1.8	4.2
4	4.7	4.4
5	7.2	7.7
6	4.1	2.5
7	3.0	5.5
8	3.3	2.9
9	3.1	5.9
10	2.5	2.3

Profª Ana Cristina Braga

31



SOLUÇÃO 5

■ *t*-Student

$$\bar{d} = -1.1500$$

$$s_d = 1.7335$$

$$t_{0.025,9} = 2.262$$

$$-1.1500 - 2.262 \frac{1.7335}{\sqrt{10}} < \mu_d < -1.1500 + 2.262 \frac{1.7335}{\sqrt{10}}$$

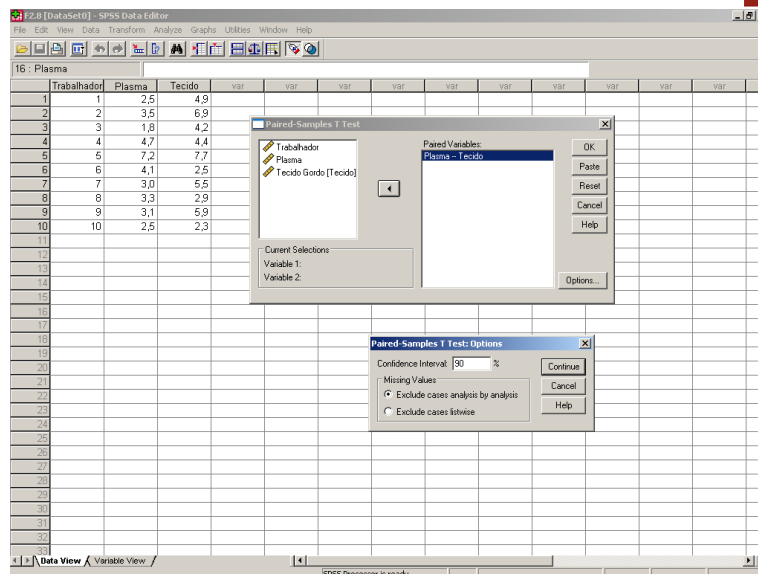
$$-1.1500 \pm 2.262 \frac{1.7335}{\sqrt{10}}$$

$$-1.1500 \pm 1.2400$$

$$-2.3900 < \mu_d < 0.0900$$

Profª Ana Cristina Braga

32



Profª Ana Cristina Braga

33

Output1 - SPSS Viewer

File Edit View Data Transform Insert Format Analyze Graphs Utilities Window Help

SPSS PROCESSOR

Output Log

T-TEST

PAIRS = Plasma WITH Tecido (PAIRED)

/CRITERIA = CI(.9)

/MISSING = ANALYSIS.

→ T-Test

[DataSet0]

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error
Pair 1	Plasma	3,570	10	1,5195	,4805
	Tecido Oloro	4,720	10	1,8289	,5787

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Plasma & Tecido Oloro	10	,577	,163

Paired Samples Test

		Paired Differences				t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error	90% Confidence Interval of the Difference			
Pair 1	Plasma - Tecido Oloro	-1,1500	1,7335	,5482	Lower: -2,1549 Upper: -.1451	-2,088	9	,065

SPSS Processor is ready

Profª Ana Cristina Braga

34

INTERVALO DE CONFIANÇA PROPORÇÃO

$$z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \quad P \left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} < z_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

$$P \left(p - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi < p + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

Profª Ana Cristina Braga

35



EXEMPLO 7

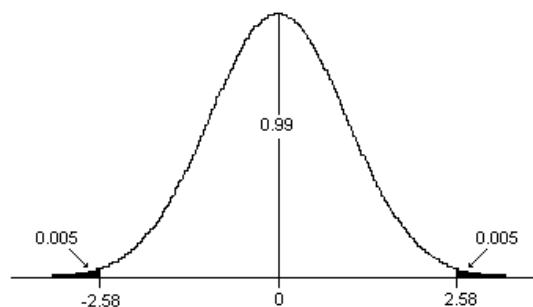
- Para determinar a incidência de uma determinada doença genética no Norte de Portugal, foi recolhida uma amostra de gotas de sangue de 500 bebés, nascidos no ano de 1994.
- As análises permitiram detetar 37 bebés portadores da doença.
- Estime um intervalo de confiança de 99% para a proporção de portadores da doença.

Profª Ana Cristina Braga

36



SOLUÇÃO 7



Profª Ana Cristina Braga

37



SOLUÇÃO 7

$$p = \frac{37}{500} = 0.074$$

$$0.074 \pm 2.58 \sqrt{\frac{0.074(1-0.074)}{500}}$$

$$0.074 \pm 0.030$$

$$0.044 < \pi < 0.104$$

Profª Ana Cristina Braga

38



Estimativa para a diferença de proporções $\pi_1 - \pi_2$

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sigma_{p_1 - p_2}} \sim N(0,1)$$

$$\rightarrow \sigma_{p_1 - p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

$$\rightarrow p_1 = \frac{x_1}{n_1} \text{ e } p_2 = \frac{x_2}{n_2}$$

$$(p_1 - p_2) - z_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 < (p_1 - p_2) + z_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

Profª Ana Cristina Braga

39



Exemplo:

- Quando um sinal de limite de velocidade de 50km/h foi colocado numa estrada, numa amostra de 100 veículos, 49 violaram o limite de velocidade. Quando o limite foi aumentado para 60 km/h, numa amostra de 100 veículos, 19 ultrapassaram o novo limite. Encontre um intervalo de confiança de 99% para $\pi_1 - \pi_2$ e interprete o seu resultado.

$$p_1 = \frac{49}{100} = 0,49 \text{ e } p_2 = \frac{19}{100} = 0,19$$

$$\sigma_{p_1 - p_2} = \sqrt{\frac{0,49(1-0,49)}{100} + \frac{0,19(1-0,19)}{100}} = 0,0635$$

$$z_{0,995}^{tab.5} = 2,575$$

$$0,30 - 0,164 < \pi_1 - \pi_2 < 0,30 + 0,164$$

$$0,136 < \pi_1 - \pi_2 < 0,464$$

Profª Ana Cristina Braga

40



Estimativa para o desvio padrão, σ

1. Grandes amostras $n \geq 100$

Se a variável em estudo apresenta uma distribuição Normal então o intervalo de confiança será:

$$s_n - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{0,71 \cdot s_n}{\sqrt{n}} < \sigma < s_n + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{0,71 \cdot s_n}{\sqrt{n}}$$

2. Pequenas amostras $n < 100$

Se a variável em estudo apresenta uma distribuição Normal então o intervalo de confiança será:

$$\frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}$$

Para o desvio padrão poder-se-á escrever:

$$\sqrt{\frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}}$$

Profª Ana Cristina Braga

41

Estimativa para o quociente das variâncias σ_1^2 / σ_2^2



Considerando duas populações, de onde são retiradas as amostras aleatórias, independentes e com distribuições aproximadamente normais, o intervalo de confiança $(1-\alpha)100\%$ para o quociente das variâncias será dado por:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} F_{\alpha/2, n_2-1, n_1-1}$$

onde $F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ é o valor que localiza uma área de $\alpha/2$ na cauda superior da distribuição F com n_1-1 no numerador e n_2-1 graus de liberdade no denominador e $F_{\alpha/2, n_2-1, n_1-1}$ é o valor que localiza um área de $\alpha/2$ na cauda superior da distribuição F com n_2-1 no numerador e n_1-1 graus de liberdade no denominador.