2º TESTE LÓGICA EI

20 / junho / 2014

1

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_1\wedge\neg p_2}^{(2)}}{p_1}\wedge_1 E \qquad \cancel{p_1\to p_2}^{(1)}}{p_2}\to E \qquad \dfrac{\cancel{p_1\wedge\neg p_2}^{(2)}}{\neg p_2}\wedge_2 E}{\bot}\neg E}{\neg(p_1\wedge\neg p_2)}\neg I^{(2)}}{(p_1\to p_2)\to\neg(p_1\wedge\neg p_2)}\to I^{(1)}$$

é uma derivação cuja conclusão é $(p_1\to p_2)\to\neg(p_1\wedge\neg p_2)$ sem hipóteses não canceladas. Logo, é uma derivação em DNP que prova que $(p_1\to p_2)\to\neg(p_1\wedge\neg p_2)$ é um teorema.

b) Pelo Teorema da Adequação, sabemos que $(p_1\to p_2)\to(\neg p_1\wedge p_2)$ não é um teorema se e só se não é uma tautologia. Atendendo à tabela de verdade

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_1\wedge p_2$	$p_1\to p_2$	$(p_1\to p_2)\to(\neg p_1\wedge p_2)$
1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0

podemos comprovar que $(p_1\to p_2)\to(\neg p_1\wedge p_2)$ não assume sempre o valor lógico 1, pelo que não é uma tautologia. Portanto, $(p_1\to p_2)\to(\neg p_1\wedge p_2)$ não é um teorema.

c) Admitamos que $\Gamma, p_1 \vdash \neg p_1\wedge p_2$. Pelo Teorema da Adequação resulta que $\Gamma, p_1 \models \neg p_1\wedge p_2$. Suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma\cup\{p_1\}$. Sabemos, então, que $v(\neg p_1\wedge p_2)=1$. Deste modo, $v(p_1)=1$ (porque $v\models\Gamma\cup\{p_1\}$) e $v(\neg p_1)=1$ (porque $v(\neg p_1\wedge p_2)=1$), o que é uma contradição. Assim, não existe nenhuma valoração que satisfaça $\Gamma\cup\{p_1\}$, pelo que $\Gamma\cup\{p_1\}$ é inconsistente. Logo, para qualquer $\varphi\in\mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma, p_1\vdash\varphi$.

2.

$$L = (\{c, f, g\}, \{Q, R\}, \mathcal{N})$$

$\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(Q) = 1$, $\mathcal{N}(R) = 2$.

a)

<u>OBS</u>: O conjunto $\mathcal{T}_L$ é definido indutivamente por:

1) $c \in \mathcal{T}_L$;
2) $x_i \in \mathcal{T}_L$ (para todo $i \in \mathbb{N}_0$);
3) se $t \in \mathcal{T}_L$ então $f(t) \in \mathcal{T}_L$;
4) se $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$ então $g(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_L$.

Consideremos $t = g(x_1, f(x_0))$. Os subtermos de t são x_0, x_1, $f(x_0)$ e $g(x_1, f(x_0))$. Logo, todas as sequências de formação de t têm, pelo menos, estes quatro elementos.

b) Consideremos a L-fórmula $\varphi = Q(c)$. φ é uma L-fórmula atómica, sem ocorrências de variáveis. Logo, $LIV(\varphi) = \emptyset$. Além disso, $subf(\varphi) = \{\varphi\}$.

<u>OBS</u>: Há um nº infinito de exemplos possíveis. Se, por exemplo, considerássemos $\varphi = \forall x_0\, Q(x_0)$, teríamos $LIV(\varphi) = \emptyset$ e $subf(\varphi) = \{\forall x_0 Q(x_0), Q(x_0)\}$.

c)

$$\psi = (\forall x_0\, Q(f(\underset{(1)}{x_0})) \wedge R(\underset{(2)}{x_1}, c)) \to \exists x_2 \neg Q(g(\underset{(3)}{x_1}, \underset{(4)}{x_2}))$$

As ocorrências (1) e (4) são ligadas e as (2) e (3) são livres.

A ocorrência (2) de x_1 não está no alcance de nenhum quantificador, mas a ocorrência (3) de x_1 está no alcance de $\exists x_2$. Assim, se $x_2 \in VAR(t)$, x_1 não é substituível por t em ψ. Consideremos, por exemplo, $t = f(x_2)$ para $x = x_1$.

d) A função $u: T_L \to \mathbb{N}_0$ é definida por recursão estrutural como:

1) $u(c) = 0$;
2) $u(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;
3) $u(f(t)) = 1 + u(t)$, para todo $t \in T_L$;
4) $u(g(t_1,t_2)) = 1 + u(t_1) + u(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in T_L$.

3.

$L = (\{c, f\}, \{R, =\}, \mathcal{N})$

$\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(R) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$

$E = (\mathbb{Z}, \bar{\ })$ em que $\bar{c} = 0$, $\bar{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto |x|$; $\bar{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x < y\}$, $\bar{=} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} : x = y\}$

a)

i) $f(f(x_2))[a] = \bar{f}(\bar{f}(a(x_2))) = \bar{f}(\bar{f}(1-2)) = \bar{f}(\bar{f}(-1)) =$

$= ||-1|| = 1$.

ii) Seja τ a L-fórmula $\exists x_1 (R(x_2,x_1) \wedge f(x_2) = x_1)$.

Temos que

$\tau[a] = 1$ se e só se Existe $d \in \text{dom}\, E$ tal que $(R(x_2,x_1) \wedge f(x_2) = x_1)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$
se e só se Existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $\left(R(x_2,x_1)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1\right.$ e $\left.f(x_2) = x_1\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1\right)$
se e só se Existe $d \in \mathbb{Z}$ t.q. $((a(x_2), d) \in \bar{R}$ e $\bar{f}(a(x_2)) \mathrel{\bar{=}} d)$
se e só se Existe $d \in \mathbb{Z}$ t.q. $(-1 < d$ e $1 = d)$, o que é verdade.

Assim, $\tau[a] = 1$

b)

(i) Seja a uma atribuição qualquer em E.

Temos que

$\varphi[a]_E = 1$ sse $\forall d \in \text{dom}\, E$, $R(x_1,c) \to (\neg(f(x_1) = x_1) \wedge f(f(x_1)) = f(x_1))\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse $\forall d \in \text{dom}\, E$, $R(x_1,c)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 0$ ou $(\neg(f(x_1) = x_1) \wedge f(f(x_1)) = f(x_1))\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse $\forall d \in \text{dom}\, E$, $(d, \bar{c}) \notin \bar{R}$ ou $\left(\neg(f(x_1) = x_1)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1\right.$ e $\left.f(f(x_1)) = f(x_1)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1\right)$

sse $\forall d \in \mathrm{dom}\, f \ \left(d \not< 0 \text{ ou } \left(f(x_1) = x_1 \left[a\binom{x_1}{d} \right] = 0 \text{ e } \bar{f}(\bar{f}(d)) \equiv \bar{f}(d) \right) \right)$

sse $\forall d \in \mathrm{dom}\, f \ \left(d \not< 0 \text{ ou } \left(\bar{f}(d) \neq d \text{ e } ||d|| = |d| \right) \right)$

sse $\forall d \in \mathrm{dom}\, f \ \left(d \not< 0 \text{ ou } \left(|d| \neq d \text{ e } |d| = |d| \right) \right)$

$\mathrm{dom}\, f = \mathbb{Z}$

Seja $d \in \mathrm{dom}\, f$. Se $d \geq 0$, então a afirmação

$$d \not< 0 \text{ ou } (|d| \neq d \text{ e } |d| = |d|)$$

é verdadeira. Se $d < 0$ então $|d| = -d$. Logo, $|d| \neq d$ e, obviamente, $|d| = |d|$. Assim,

$$d \not< 0 \text{ ou } (|d| \neq d \text{ e } |d| = |d|)$$

é verdadeira.

Portanto, $\varphi[a]_E = 1$, para qualquer atribuição a em E, donde φ é válida em E.

(ii) Seja $E' = (\mathbb{Z}, \sim)$ uma estrutura onde $\sim$ é como $-$ exceto na interpretação $\bar{c}$ de c que é o nº inteiro 6.

Dada uma qualquer atribuição a em E',

$$\varphi[a]_{E'} = 1 \text{ sse } \forall d \in \mathbb{Z} \ \underbrace{d \not< 3 \text{ ou } (|d| \neq d \text{ e } |d| = |d|)}_{*}.$$

Para $d = 2$, temos que $d = 2 < 3$,

$|d| = |2| = 2 = d$,

e $|d| = 2 = |d|$.

Assim, para $d = 2$, a afirmação $*$ é falsa, pelo que $\varphi[a]_{E'} = 0$.

Assim, φ não é universalmente válida.

c)

$$\forall x_0 \left(R(0, x_0) \to \exists x_1 \left(R(x_1, 0) \wedge R(x_0, f(x_1)) \right) \right).$$

4.

Seja (E, a) uma realização de $\{\forall_x (\varphi \vee \psi), \exists_x \neg \psi\}$.

Mostremos que $\exists_x \varphi [a]_E = 1$.

Temos que

$$\forall_x (\varphi \vee \psi) [a]_E = 1,$$

ou seja

$$(\varphi \vee \psi)\left[a \binom{x}{d}\right]_E = 1, \quad \text{para todo } d \in \operatorname{dom} E,$$

i.e.

$$\left(\varphi \left[a \binom{x}{d}\right]_E = 1 \text{ ou } \psi \left[a \binom{x}{d}\right]_E = 1 \right), \quad \text{para todo } d \in \operatorname{dom} E. \quad (*)$$

Além disso,

$$\exists_x \neg \psi [a]_E = 1,$$

donde

Existe $d_1 \in \operatorname{dom} E$ tal que $(\neg \psi)\left[a \binom{x}{d_1}\right]_E = 1$,

pelo que

Existe $d_1 \in \operatorname{dom} E$ tal que $\psi \left[a \binom{x}{d_1}\right]_E = 0$. $(**)$

De $(*)$ e $(**)$, tomando em $(*)$ $d = d_1$, podemos concluir que $\varphi \left[a \binom{x}{d_1}\right]_E = 1$ (uma vez que $\psi \left[a \binom{x}{d_1}\right]_E = 0$).

Logo,

Existe $d \in \operatorname{dom} E$ $(d = d_1)$ tal que $\varphi \left[a \binom{x}{d}\right]_E = 1$.

Assim,

$$\exists_x \varphi [a]_E = 1,$$ como queríamos mostrar.