

# Programação Linear - dualidade

## Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho

`vc@dps.uminho.pt`

Departamento de Produção e Sistemas  
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

23 de outubro de 2017

## antes

- A programação linear visa seleccionar as actividades que melhor usam os recursos disponíveis.

## Guião

- A um problema de programação linear, podemos associar um problema dual, um problema equivalente, visto de outra perspectiva.
- As variáveis de decisão do problema dual têm um significado económico, relacionado com o valor dos recursos.
- O problema dual visa encontrar o melhor valor a dar aos recursos quando podem ser usados num conjunto de actividades.

## depois

- Iremos complementar estes conceitos com a análise de sensibilidade.

- Problema dual
- Informação primal e dual num quadro simplex
- Significado económico das variáveis duais
- Relação entre os dois problemas
  - Teorema fraco da dualidade
  - Teorema forte da dualidade
  - Teorema da folga complementar
- Método simplex dual

# Problema Dual

- Dado um problema (*primal*) de programação linear:

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{suj. a} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

sendo  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,

- o *problema dual* é construído associando a cada restrição  $i$  do problema (*primal*),  $i = 1, \dots, m$ , uma variável de decisão dual  $y_i$ :

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{y}\mathbf{b} \\ \text{suj. a} & \mathbf{y}\mathbf{A} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

sendo  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  um vector de *variáveis duais*.

# Exemplo

PRIMAL		DUAL	
$\max$	$\mathbf{cx}$	$\min$	$\mathbf{yb}$
suj. a	$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	suj. a	$\mathbf{yA} \geq \mathbf{c}$ $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$
$\max$	$30x_1 + 20x_2 + 10x_3$	$\min$	$40y_1 + 150y_2 + 20y_3$
suj. a	$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$	suj. a	$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$
	$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$		$1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$
	$2x_1 + 1x_2 \leq 20$		$2y_1 + 1y_2 \geq 10$
	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$		$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Para construir o problema dual, o problema original deve estar numa das *Formas*:

- Problema de *max* com todas as restrições de  $\leq$ .
- Problema de *min* com todas as restrições de  $\geq$ .
- O problema dual do problema dual é o problema primal.
- No que se segue, designa-se o problema de maximização por primal.

# Forma canónica e solução do problema dual

## Transformação na forma canónica

$$\begin{array}{ll} \min z = yb & \min z = yb \\ yA \geq c & \rightarrow yA - u = c \\ y \geq 0 & y, u \geq 0 \end{array}$$

sendo  $u \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$  um vector de variáveis de folga da mesma dimensão que  $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

## Solução do problema dual é:

- variáveis de decisão do dual:  $y = c_B B^{-1}$ ,
  - variáveis de folga do dual:  $u = c_B B^{-1} A - c$  ( $u = yA - c$ ).
  - Valor da função objectivo do dual:  $yb = (c_B B^{-1})b$ .
- 
- Solução do problema dual é admissível quando  $y, u \geq 0$ .

# Valores das variáveis duais no quadro simplex

O quadro simplex fornece os valores das:

- variáveis de decisão do dual:  $c_B B^{-1} = \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) = (5, 0, 15)$ ,
- variáveis de folga do dual:  $c_B B^{-1} A - c = \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (5, 0, 0)$ ,
- e da função objectivo da solução dual:  $\mathbf{y}b = (c_B B^{-1})b = 500$ .

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$x_3$	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
$s_2$	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
$x_2$	2	1	0	0	0	1	20
	<b>5</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>5</b>	<b>0</b>	<b>15</b>	<b>500</b>

Modelo dual	Verificação da solução dual
min $40y_1 + 150y_2 + 20y_3$	min $40(5) + 150(0) + 20(15) = 500$
suj. $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$	suj. $1(5) + 2(0) + 2(15) \geq 30$ (folga $u_1 = 5$ )
$1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$	$1(5) + 2(0) + 1(15) \geq 20$ (folga $u_2 = 0$ )
$2y_1 + 1y_2 \geq 10$	$2(5) + 1(0) \geq 10$ (folga $u_3 = 0$ )
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$	

# Variáveis duais têm um significado económico

- O valor da variável dual  $(c_B B^{-1})_i$  é o *preço-sombra* do recurso  $i$ .

Quadro Óptimo		$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	$x_3$	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
	$s_2$	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
	$x_2$	0	2	1	0	0	0	1	20
	$z$	1	5	0	0	5	0	15	500

*Preço-sombra*: valor que o decisor atribui a uma unidade do recurso, medido pelo aumento do valor da função objectivo resultante de se usar uma unidade adicional do recurso.

- $(c_B B^{-1})_i = \delta z / \delta(-s_i)$ , ou seja,
- o valor da função objectivo aumenta  $\delta z / \delta(-s_i)$  unidades por cada unidade adicional do recurso  $i$ .
- A unidade dimensional de  $\delta z / \delta(-s_i)$  é: [unidade da função objectivo / unidade de recurso].



# Preço-sombra dos recursos 1 e 2

Quadro Óptimo		$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	$x_3$	0	$-1/2$	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	10
	$s_2$	0	$-3/2$	0	0	$-1/2$	1	$-3/2$	100
	$x_2$	0	2	1	0	0	0	1	20
	$z$	1	5	0	0	5	0	15	500

- O preço-sombra do recurso 1 é  $\delta z / \delta(-s_1) = +5$  (o valor da função objectivo aumenta 5 unidades por cada unidade adicional do recurso 1).
- O preço-sombra do recurso 2 é  $\delta z / \delta(-s_2) = +0$  (variável dual com valor nulo).
- Não há interesse em ter unidades adicionais de recurso 2: o aumento do recurso 2 não aumenta o valor da função objectivo, só aumenta a folga  $s_2$ .

# Teorema fraco da dualidade

## Teorema

*Se  $\hat{x}$  for uma solução válida do problema primal (max.) e  $\hat{y}$  for uma solução válida do problema dual (min.), então*

$$c\hat{x} \leq \hat{y}b$$

## Prova:

- Se  $\hat{y}$  é uma solução válida do dual, então  $\hat{y} \geq 0$ , e podemos pré-multiplicar por  $\hat{y}$  as restrições  $A\hat{x} \leq b$ , obtendo  $\hat{y}A\hat{x} \leq \hat{y}b$ .
- Se  $\hat{x}$  é uma solução válida do primal, então  $\hat{x} \geq 0$ , e podemos pós-multiplicar por  $\hat{x}$  as restrições  $\hat{y}A \geq c$ , obtendo  $\hat{y}A\hat{x} \geq c\hat{x}$ .
- Conjugando as duas relações, obtém-se  $c\hat{x} \leq \hat{y}b$ . □

*i.e., qualquer solução válida do problema de maximização tem um valor de função objectivo menor do que ou igual a qualquer solução válida do problema de minimização.*

# Teorema fraco da dualidade: exemplo

PRIMAL		DUAL	
$\max$	$cx$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$	$\min$	$yb$ $yA \geq c$ $y \geq 0$
$\max$	$30x_1 + 20x_2 + 10x_3$	$\min$	$40y_1 + 150y_2 + 20y_3$
$\text{suj.}$	$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$	$\text{suj.}$	$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$
	$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$		$1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$
	$2x_1 + 1x_2 \leq 20$		$2y_1 + 1y_2 \geq 10$
	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$		$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

- $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)^t = (10, 0, 0)^t$  é um ponto válido do problema primal.
- $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3) = (30, 0, 0)$  é um ponto válido do problema dual.
- $cx = 30(10) + 20(0) + 10(0) = \mathbf{300}$
- $yb = 40(30) + 150(0) + 20(0) = \mathbf{1200}$
- este par de pontos verifica o teorema fraco da dualidade:  $cx \leq yb$ ,  
i.e.,  $\mathbf{300} \leq \mathbf{1200}$ .

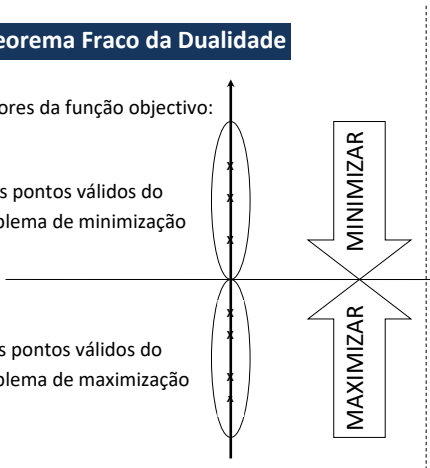
# Teorema fraco da dualidade: ilustração gráfica

## Teorema Fraco da Dualidade

Valores da função objectivo:

- dos pontos válidos do  
problema de minimização

- dos pontos válidos do  
problema de maximização



# Teorema fraco da dualidade: caso valor óptimo ilimitado

## Corolário (do teorema fraco da dualidade)

*Se o problema primal de maximização tiver uma solução óptima ilimitada, então o problema dual é impossível.*

### Prova:

- Não pode haver nenhuma solução admissível do problema dual com um valor de função objectivo maior do que o valor da solução óptima ilimitada do problema primal,
- porque os coeficientes da função objectivo do problema dual são finitos.
- Portanto, o domínio do dual é vazio, e o problema dual é impossível.

Usando o mesmo argumento, se o problema dual de minimização tiver uma solução óptima ilimitada, então o problema primal é impossível.

# Teorema forte da dualidade

## Teorema (Teorema Forte da Dualidade)

*Se o problema primal tiver uma solução óptima com valor finito, então o problema dual tem, pelo menos, uma solução óptima com valor finito, e os valores das soluções óptimas são iguais, i.e.,*

$$cx^* = y^*b$$

sendo

- $x^*$  : solução óptima do problema primal
- $y^*$  : solução óptima do problema dual

**Prova:** O quadro simplex óptimo apresenta soluções válidas para o problema primal e para o problema dual com o mesmo valor finito de função objectivo:

$$y^*b = (c_B B^{-1})b = c_B(B^{-1}b) = cx^*.$$

# Teorema forte da dualidade: quadro óptimo

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$x_3$	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
$s_2$	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
$x_2$	2	1	0	0	0	1	20
	5	0	0	5	0	15	500

- Solução é válida para o problema primal se:
    - variáveis de decisão e de folga do primal:  $B^{-1}b \geq 0$ ,
    - ou seja, todos os elementos do lado direito do quadro simplex não-negativos.
  - Solução é válida para o problema dual se:
    - variáveis de decisão do dual:  $y = c_B B^{-1} \geq 0$
    - variáveis de folga do dual:  $u = c_B B^{-1}A - c \geq 0$ ,
    - ou seja, todos os elementos da linha da função objectivo do quadro simplex não-negativos.
- No quadro óptimo, há pontos válidos dos problemas primal e do dual que têm o mesmo valor de função objectivo.
- ∴ São as soluções óptimas dos problemas respectivos.

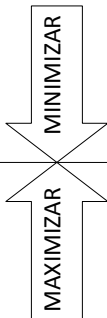
# Teorema forte da dualidade: ilustração gráfica

## Teorema Fraco da Dualidade

Valores da função objectivo:

- dos pontos válidos do problema de minimização

- dos pontos válidos do problema de maximização



## Teorema Forte da Dualidade

Valor da solução óptima do problema primal =  
Valor da solução óptima do problema dual



# Teorema forte da dualidade: exemplo

PRIMAL		DUAL	
$\max$	$cx$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$	$\min$	$yb$ $yA \geq c$ $y \geq 0$
$\max$	$30x_1 + 20x_2 + 10x_3$	$\min$	$40y_1 + 150y_2 + 20y_3$
$\text{suj.}$	$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$	$\text{suj.}$	$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$
	$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$		$1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$
	$2x_1 + 1x_2 \leq 20$		$2y_1 + 1y_2 \geq 10$
	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$		$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

- $x^* = (x_1, x_2, x_3)^t = (0, 20, 10)^t$  é o ponto ótimo do problema primal.
- $y^* = (y_1, y_2, y_3) = (5, 0, 15)$  é o ponto ótimo do problema dual.
- $cx^* = 30(0) + 20(20) + 10(10) = \mathbf{500}$
- $y^*b = 40(5) + 150(0) + 20(15) = \mathbf{500}$
- o ótimo é finito, e verifica o teorema forte da dualidade:  
 $cx^* = y^*b = \mathbf{500}$ .

# Teorema da folga complementar

## Teorema

*No ponto óptimo, se uma variável for positiva, a variável dual correspondente é nula.*

(ver no diapositivo seguinte a correspondência entre variáveis primais e duais)

### Prova:

- No óptimo,  $cx^* = y^*Ax^* = y^*b$ . Há duas equações:

$$\begin{cases} y^*Ax^* &= y^*b \\ cx^* &= y^*Ax^* \end{cases} \quad \begin{cases} y^*(b - Ax^*) &= 0 \\ (y^*A - c)x^* &= 0 \end{cases}$$

- Na primeira equação,  $(b - Ax^*) = s^*$  é o vector das variáveis de folga do problema primal.
- Para o produto escalar  $y^*s^* = 0$ , como  $y^* \geq 0$  e  $s^* \geq 0$ ,
- se  $y_i^* > 0 \Rightarrow s_i^* = 0$ ; se  $s_i^* > 0 \Rightarrow y_i^* = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

O mesmo resultado aplica-se à segunda equação  $(y^*A - c)x^* = 0$ .

# Correspondência entre variáveis primais e duais

## Regra de correspondência:

(var. folga de uma restrição)  $\Leftrightarrow$  (var. decisão dual associada à restrição).

PRIMAL		DUAL	
max	$30x_1 + 20x_2 + 10x_3$	min	$40y_1 + 150y_2 + 20y_3$
suj.	$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 = 40$	suj.	$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 - u_1 = 30$
	$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + s_2 = 150$		$1y_1 + 2y_2 + 1y_3 - u_2 = 20$
	$2x_1 + 1x_2 + s_3 = 20$		$2y_1 + 1y_2 - u_3 = 10$
	$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$		$y_1, y_2, y_3, u_1, u_2, u_3 \geq 0$

Correspondência entre Variáveis		
PRIMAL		DUAL
var. folga	$\left\{ \begin{array}{l} s_1 \Leftrightarrow y_1 \\ s_2 \Leftrightarrow y_2 \\ s_3 \Leftrightarrow y_3 \end{array} \right\}$	var. decisão
var. decisão	$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \Leftrightarrow u_1 \\ x_2 \Leftrightarrow u_2 \\ x_3 \Leftrightarrow u_3 \end{array} \right\}$	var. folga

# Teorema da folga complementar: exemplo

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$x_3$	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
$s_2$	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
$x_2$	2	1	0	0	0	1	20
	5	0	0	5	0	15	500

Folga complementar no quadro simplex óptimo:

- Para uma variável básica do problema primal  $\geq 0 \Rightarrow$  coeficiente da linha da função objectivo (variável dual correspondente) é nulo.
- Exemplo:  $x_2 = 20$ ,  $u_2 = 0$ , e  $x_2 u_2 = 0$ .
- Para um coeficiente da linha da função objectivo (variável do problema dual)  $\geq 0 \Rightarrow$  variável não-básica primal correspondente é nula.
- Exemplo:  $y_3 = 15$ ,  $s_3 = 0$ , e  $y_3 s_3 = 0$ .

Relação entre os valores dos óptimos do primal e do dual

Primal		Dual
óptimo finito	$\Leftrightarrow$	óptimo finito
óptimo ilimitado	$\Rightarrow$	problema impossível
problema impossível	$\Rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{óptimo ilimitado} \\ \text{problema impossível} \end{array} \right.$

# Método simplex dual

- Estratégia
- Algoritmo
- Exemplo

# Método simplex dual: estratégia

Teorema: um quadro simplex é óptimo se a solução:

- for admissível para o problema primal,
- for admissível para o problema dual, e
- obedecer ao teorema da folga complementar.

ou seja: um quadro simplex é óptimo se:

- os coeficientes do lado direito forem todos  $\geq 0$ ,
- os coeficientes da linha da função objectivo forem
  - todos  $\leq 0$  num problema de minimização, ou
  - todos  $\geq 0$  num problema de maximização,
- a matriz identidade existir.

Estratégia:

- Quando existe uma solução admissível para o problema dual, o *algoritmo simplex dual* mantém a solução admissível para o dual, e procura encontrar uma solução admissível para o primal.

# Método simplex dual: como começar?

Para obter a matriz  $I_{m \times m}$  no quadro simplex:

- dado um problema de minimização em que  $c \geq \tilde{0}$ :

$$\begin{aligned}\min z &= cx \\ Ax - u &= b \\ x, u &\geq 0\end{aligned}$$

- resolver:

$$\begin{aligned}\min z &= cx \\ -Ax + u &= -b \\ x, u &\geq 0\end{aligned}$$

O quadro simplex irá apresentar:

- uma *solução (primal)* não-admissível, porque pode haver elementos do lado direito com valores  $< 0$ .
- uma *solução dual* admissível.



# Exemplo

- Dado o quadro simplex sem uma matriz identidade ( $I_{m \times m}$ ) e em que os elementos da linha da função objectivo são não-negativos:

	$z_D$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	
	0	-1	0	3	1	1	12
	0	0	-1	2	2	0	10
$z_D$	1	0	0	-120	-80	-30	0

- obtém-se a  $I_{m \times m}$  multiplicando as equações das restrições por  $(-1)$ :

	$z_D$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	
$y_1$	0	1	0	-3	-1	-1	-12
$y_2$	0	0	1	-2	-2	0	-10
$z_D$	1	0	0	-120	-80	-30	0

A selecção do elemento pivô no método simplex dual destina-se a:

- manter os elementos da linha da função objectivo com valor  $\leq 0$  (i.e., manter a *solução dual* admissível).
- procurar tornar os valores dos elementos do lado direito  $\geq 0$  (i.e., procurar obter uma *solução (primal)* admissível).

# Algoritmo simplex dual (problema de minimização):

- Vértice dual admissível inicial (todos os coeficientes da função objectivo são não-negativos, *i.e.*,  $c \geq 0$ ) (\*)
- Repetir
  - Selecção da linha pivô:
    - Coeficiente mais negativo do lado direito
    - (em caso de empate, escolha arbitrária)
    - Se não existir coef.  $< 0$ , solução óptima.
  - Selecção da coluna pivô:
    - Menor valor de razão (f.objectivo/linha pivô) **negativa** (coef.linha  $< 0$ )
    - Se não existir coef.linha  $< 0$ , problema é impossível.
  - Fazer eliminação de Gauss
- Enquanto (solução não for óptima)
  - O elemento pivô tem sempre valor **negativo**.

(\*) ou seja, todos os coeficientes da linha da função objectivo do quadro simplex são  $\leq 0$ .

## Exemplo: primeira iteração do método simplex dual

	$z_D$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	
$y_1$	0	1	0	-3	-1	-1	-12
$y_2$	0	0	1	-2	-2	0	-10
$z_D$	1	0	0	-120	-80	-30	0

- Linha pivô: linha de  $y_1$  (coeficiente mais negativo é -12).
- Coluna pivô: coluna de  $y_5$  (menor valor das razões negativas é 30):
  - coluna de  $y_3$ :  $-120/-3 = 40$
  - coluna de  $y_4$ :  $-80/-1 = 80$
  - coluna de  $y_5$ :  $-30/-1 = 30$

	$z_D$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	
$y_5$	0	-1	0	3	1	1	12
$y_2$	0	0	1	-2	-2	0	-10
$z_D$	1	-30	0	-30	-50	0	360

# Exemplo: restantes iterações do método simplex dual

	$z_D$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	
$y_5$	0	-1	0	3	1	1	12
$y_2$	0	0	1	-2	-2	0	-10
$z_D$	1	-30	0	-30	-50	0	360

	$z_D$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	
$y_5$	0	-1	$3/2$	0	-2	1	-3
$y_3$	0	0	$-1/2$	1	1	0	5
$z_D$	1	-30	-15	0	-20	0	510

	$z_D$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	
$y_4$	0	$1/2$	$-3/4$	0	1	$-1/2$	$3/2$
$y_3$	0	$-1/2$	$1/4$	1	0	$1/2$	$7/2$
$z_D$	1	-20	-30	0	0	-10	540

- Solução ótima.

# Método simplex dual: problema impossível

Um problema (primal) é impossível se existir:

- uma linha com um coeficiente negativo do lado direito e com todos os coeficientes das variáveis não-básicas não-negativos ( $\geq 0$ ).

- Exemplo:

	$z_D$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	
$y_1$	0	1	0	3	1	1	-12
$y_2$	0	0	1	-2	-2	0	-10
$z_D$	1	0	0	-120	-80	-30	0

- Nota: na linha de  $y_1$ , os coeficientes das variáveis  $y_3, y_4$  e  $y_5$  são  $\geq 0$  (não há um elemento pivô **negativo**).
- O problema é impossível, porque nenhum conjunto  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$  satisfaz a restrição:  $y_1 + 3y_3 + y_4 + y_5 = -12$ .
- Neste caso, o problema dual tem uma solução ótima ilimitada ( $\Rightarrow$  problema primal impossível, da teoria da dualidade).

- As variáveis duais traduzem o valor dos recursos, e explicam como se forma o valor de uma actividade.
- As actividades seleccionadas são aquelas que atribuem um maior valor aos recursos.
- O problema do produtor de rações é o problema dual do problema da dieta (ver Quiz sobre dualidade), e os dois problemas mostram duas perspectivas diferentes da mesma realidade.
- Há muitos outros exemplos de pares de problemas primal-dual.



# Método Simplex Dual ou 2 Fases?

- O método simplex dual só pode ser usado se os coeficientes da linha da função objectivo do quadro simplex tiverem todos o sinal que devem ter na solução óptima, ou seja, se forem:
  - todos não-positivos ( $\leq 0$ ) num problema de minimização, ou
  - todos não-negativos ( $\geq 0$ ) num problema de maximização.
- Caso haja algum coeficiente da linha da função objectivo que não tenha o sinal devido, o Método Simplex Dual não pode ser usado, e é necessário recorrer ao Método das 2 Fases, ou seja, usar a primeira fase para obter uma solução admissível inicial para o problema primal, e depois usar o método simplex (primal).

◀ Voltar



## O que significa o valor $c_B B^{-1} A_j - c_j$ da actividade $j$ ?

$$c_B B^{-1} A_j = \sum_{i=1}^m (c_B B^{-1})_i \times a_{ij}, \quad \forall j,$$

- $(c_B B^{-1})_i$  é o valor para o decisor de uma unidade de recurso  $i$ ,
  - $a_{ij}$  é a quantidade de recurso  $i$  usado numa unidade da actividade  $j$ .
  - Portanto,  $c_B B^{-1} A_j$  é o valor dos recursos usados numa unidade da actividade  $j$ .
- $c_j$  é o valor de venda de uma unidade da actividade  $j$ .

### Na solução óptima de um problema de maximização,

- se  $c_B B^{-1} A_j - c_j > 0$ , o valor dos recursos usados é maior do que o valor da venda; é melhor não fazer esta actividade (variável não-básica); há outras actividades que usam melhor os recursos,
- se  $c_B B^{-1} A_j - c_j = 0$ , o valor de venda iguala o valor dos recursos usados; esta actividade (variável básica) dá o maior valor possível aos recursos.

# Exemplo

Quadro Inicial		$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	$s_1$	0	1	1	2	1	0	0	40
	$s_2$	0	2	2	1	0	1	0	150
	$s_3$	0	2	1	0	0	0	1	20
	$z$	1	-30	-20	-10	0	0	0	0
Quadro Óptimo		$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	$x_3$	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
	$s_2$	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
	$x_2$	0	2	1	0	0	0	1	20
	$z$	1	5	0	0	5	0	15	500

Actividade 1:  $c_B B^{-1} A_1 - c_1 = \boxed{5 \quad 0 \quad 15} * \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}} - 30 = 5$

Actividade 2:  $c_B B^{-1} A_2 - c_2 = \boxed{5 \quad 0 \quad 15} * \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} - 20 = 0$

# Como se forma o valor da solução óptima, $c_B B^{-1}b$ ?

Perspectiva primal:

$c_B (B^{-1}b) = f(\text{valor das vars decisão } (c_{ij}), \text{ nível das vars decisão } (x_{ij}))$

exemplo:

$$c_B (B^{-1}b) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} = 500$$

Perspectiva dual:

$(c_B B^{-1}) b = f(\text{valor dos recursos } (y_i), \text{ nível dos recursos } (b_i))$

exemplo:

$$(c_B B^{-1}) b = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 15 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} = 500$$

# Fim