Universidade do Minho	2º Teste de **Lógica EI**	13 de Junho de 2013
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. (a) Construa uma derivação em DNP que prove que $(p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)$ é um teorema.
   (b) Prove que se Γ é um conjunto de fórmulas proposicionais tal que $\Gamma \vdash p_1 \to p_2$, então $\Gamma \vdash \neg p_2 \to \neg p_1$.

2. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira para quaisquer fórmulas proposicionais φ e ψ.

   (a) $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ é um teorema.
   (b) $\varphi \vee \psi \vdash \varphi \to \psi$.

3. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$.

   (a) Dê exemplo de um L-termo t que tenha 3 subtermos, explicitando o conjunto $subt(t)$ dos subtermos de t.
   (b) Dê exemplo de uma L-fórmula φ tal que $LIG(\varphi) = \{x_0\}$ e $LIV(\varphi) = \{x_1\}$, indicando uma sequência de formação de φ.
   (c) Considere a L-fórmula $\varphi_0 = \exists x_1((\mathsf{P}(x_0) \wedge x_0 = \mathsf{f}(x_1)) \to \forall x_2 \neg(x_0 = \mathsf{f}(x_2)))$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira.
      (i) A variável x_0 é substituível pelo L-termo $\mathsf{f}(x_3)$ em φ_0.
      (ii) Qualquer variável é substituível por qualquer L-termo em φ_0.
   (d) Defina por recursão estrutural a função $h : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t faz corresponder o número de ocorrências do símbolo de função f em t.

4. Sejam L o tipo de linguagem do exercício anterior e $E = (\mathbb{N}_0, \overline{})$ a L-estrutura onde $\overline{0}$ é o número inteiro *zero*, $\overline{\mathsf{f}} : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é a função definida por $\overline{\mathsf{f}}(n) = n + 3$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $\overline{\mathsf{P}} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ é múltiplo de } 3\}$ e $\overline{=}$ é a relação de *igualdade* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\overline{=} = \{(n, m) \in \mathbb{N}_0^2 \mid n = m\}$.

   (a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i$. Calcule:
      (i) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(x_4))[a]$
      (ii) $(\exists x_1 \mathsf{f}(x_1) = 0) \vee \neg\mathsf{P}(\mathsf{f}(x_2))[a]$
   (b) Seja φ a $L-$fórmula $(\mathsf{f}(x_1) = x_2 \wedge \mathsf{P}(x_1)) \to \mathsf{P}(x_2)$. Prove que:
      (i) φ é válida em E;
      (ii) φ não é universalmente válida.
   (c) Indique uma L-fórmula ψ que seja uma instância da fórmula proposicional $p_0 \leftrightarrow p_0$. A L-fórmula ψ que indicou é universalmente válida? Justifique.
   (d) Para cada uma das seguintes afirmações, indique (sem justificar) uma L-fórmula que a represente:
      (i) Existe um número que é múltiplo de 3 mas não é zero.
      (ii) Para todo o número que seja múltiplo de 3, esse número mais 3 é ainda múltiplo de 3.

5. Sejam L um tipo de linguagem, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x arbitrários. Mostre que $\exists x\varphi, \forall x(\varphi \to \psi) \vDash \exists x\psi$.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.
	1,5+1,5	1,5+1,5	1+1,5+2+1	2,5+2+1,5+1,5	1