Lógica CC

Lic. em Ciências da Computação

2009/2010

2. Lógica

Um dos objectivos da Lógica é a formalização da linguagem natural e dos métodos do raciocínio. Ao longo dos anos vários sistemas lógicos foram sendo desenvolvidos. Nesta unidade curricular estudamos três destes sistemas: o Cálculo Proposicional da Lógica Clássica, Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica e a Lógica Intuicionista Proposicional.

Na definição de um sistema lógico procura-se estabelecer regras que permitam, em situações como a do exemplo seguinte, sistematizar a construção de argumentos rigorosos e válidos.

Exemplo 2.1. *Os seguintes factos são conhecidos acerca de um roubo*

1. *Se A é culpado e B é inocente, então C é culpado;*
2. *C nunca trabalha sozinho;*
3. *A nunca trabalha com C;*
4. *Mais ninguém, para além de A, B, e C, está envolvido no roubo e pelo menos um destes elementos está envolvido no roubo.*

A partir destes factos será que conseguimos inferir quem é inocente e quem é culpado?

Em cada um dos sistemas lógicos que estudamos nas secções que se seguem são definidas linguagens que nos permitirão representar formalmente e de forma rigorosa informação que seja disponibilizada em linguagem natural e regras que nos permitirão sistematizar a construção de argumentos válidos.

2.1 Cálculo Proposicional da Lógica Clássica

Nesta secção abordamos noções elementares do Cálculo Proposicional - estudamos a sua sintaxe, a sua semântica e o sistema formal de dedução natural.

Este sistema lógico tem como elementos básicos as proposições e é baseado em conectivos lógicos bem conhecidos tais como a negação, a conjunção, a disjunção, a implicação e a equivalência.

Por **proposição** entende-se uma afirmação formal sobre a qual é possível dizer, objectivamente, se é verdadeira ou falsa (ainda que não sejamos capazes de, no momento actual, determinar se a afirmação é verdadeira ou não). Por exemplo, a Conjectura de Goldbach's

"Todo o número maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos"

é uma proposição, embora ainda não exista qualquer prova da sua veracidade ou da sua falsidade.

Uma proposição diz-se **simples** ou **atómica** se não for possível decompô-la em outras proposições - é o caso da afirmação 2. do exemplo anterior. As proposições simples podem ser ligadas entre si, através de **conectivos**, e dão origem a novas proposições designadas por proposições **compostas** - é o caso das afirmações 1. e 3..

Um argumento é representado por uma sequência finita de proposições $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi$ em que as n primeiras são as **premissas** e a última é a **conclusão**.

2.1.1 Sintaxe

A linguagem do Cálculo Proposicional permite representar de forma clara e sem ambiguidade uma parte significativa da linguagem natural. Vejamos qual a sua sintaxe.

Definição 2.1. *O* **alfabeto do Cálculo Proposicional**, *que se denota por $\mathcal{A}^{CP}$, é o conjunto constituído pelos seguintes elementos:*

- $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$, *($n \in \mathbb{N}_0$), designados por* **variáveis proposicionais***; o conjunto formado por estes símbolos é um conjunto numerável e é representado por $\mathcal{V}^{CP}$;*
- $\perp, \neg, \wedge, \vee$ $\rightarrow$ *e* $\leftrightarrow$*, chamados* **conectivos proposicionais** *(e designados, respectivamente, por absurdo, negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência);*
- (*e*)*, designados por* **símbolos auxiliares***.*

Aos conectivos $\wedge$, $\vee$ $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ $\neg$ e $\perp$ é usual associar a leitura "e", "ou", "se ... então", "se e só se", "não" e "falsidade", respectivamente.

As variáveis proposicionais serão utilizadas na representação de proposições simples - por exemplo, a afirmação "A é inocente" pode ser representada por p_0.

As proposições compostas serão representadas por palavras construídas a partir de variáveis proposicionais e ligadas entre si por conectivos. Falta-nos, no entanto, saber quais as palavras admitidas na linguagem do Cálculo Proposicional.

Definição 2.2. *A* **linguagem do Cálculo Proposicional**, *que se denota por $\mathcal{F}^{CP}$, é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:*

$$\frac{}{\perp \in \mathcal{F}^{CP}} \perp \qquad \frac{}{p_i \in \mathcal{F}^{P}} p_i \quad (i \in \mathbb{N}_0) \qquad \frac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}} f_\neg$$

$$\frac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{CP}} f_\wedge \qquad \frac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{CP}} f_\vee$$

$$\frac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}} f_\rightarrow \qquad \frac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}} f_\leftrightarrow$$

Aos elementos de $\mathcal{F}^{CP}$ dá-se a designação de **fórmulas** *do Cálculo Proposicional.*

Exemplo 2.2.

- *A palavra $((\neg p_0 \wedge (p_1)) \rightarrow (\neg p_2))$ é uma fórmula do Cálculo Proposicional - se as afirmações "A é inocente", "B é inocente" e "C é inocente" forem representadas, respectivamente, por p_0, p_1 e p_2, então a afirmação 1. do exemplo anterior será representada por esta fórmula.*

- *A palavra* $((p_3 \to \neg(p4)) \vee \perp)$ *não é um elemento de* $\mathcal{F}^{CP}$ *- a formação desta palavra com base nas regras que definem a linguagem de* $\mathcal{F}^{CP}$ *implicaria a construção da sequência de símbolos* $\neg(p_4)$*, mas tal não é possível através destas regras.*

Para que uma palavra sobre o alfabeto $\mathcal{F}^{CP}$ seja considerada uma fórmula, os parêntesis têm de ocorrer na palavra de acordo com as regras que definem $\mathcal{F}^{CP}$. Porém, para simplificação de escrita, é usual omitir os parêntesis extremos e os parêntesis à volta da negação. Interpretando os conectivos como operações em $\mathcal{F}^{CP}$, convenciona-se a seguinte prioridade na aplicação dos conectivos:

1. $\neg$
2. $\vee$ e $\wedge$
3. $\to$ e $\leftrightarrow$.

Por exemplo, a palavra $\neg(p_0 \wedge p_1) \to \neg\perp$ será usada como representação da fórmula $((\neg(p_0 \wedge p_1)) \to (\neg\perp))$.

Definição 2.3. *Uma fórmula* ψ *é uma* **subfórmula** *de uma fórmula* φ *quando* ψ *é um sub-objecto de* φ*.*

Exemplo 2.3. *Cada um dos elementos de*

$$\{p_0, p_1, \perp, (\neg\perp), (p_0 \wedge p_1), (\neg(p_0 \wedge p_1)), ((\neg(p_0 \wedge p_1)) \to (\neg\perp))\}$$

é um sub-objecto de $((\neg(p_0 \wedge p_1)) \to (\neg\perp))$*, logo cada um destes elementos é, também, uma subfórmula de* $((\neg(p_0 \wedge p_1)) \to (\neg\perp))$*.*

Uma vez que $\mathcal{F}^{CP}$ é um conjunto definido indutivamente, a prova de propriedades válidas em $\mathcal{F}^{CP}$ pode ser feita recorrendo ao Princípio de Indução Estrutural relativo a este conjunto.

Proposição 2.4 (Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$)**.** *Seja* P *uma propriedade relativa aos elementos de* $\mathcal{F}^{CP}$*.*
Se

1. $P(\perp)$;
2. $P(p)$*, para qualquer* $p \in \mathcal{V}^{CP}$;
3. *Para quaisquer* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$
   a) $P(\varphi) \Rightarrow P(\neg\varphi)$;
   b) $P(\varphi)$ e $P(\psi) \Rightarrow P(\varphi \wedge \psi)$;
   c) $P(\varphi)$ e $P(\psi) \Rightarrow P(\varphi \vee \psi)$;

d) $P(\varphi)$ *e* $P(\psi) \Rightarrow P(\varphi \to \psi)$;

e) $P(\varphi)$ *e* $P(\psi) \Rightarrow P(\varphi \leftrightarrow \psi)$

então $P(\sigma)$, *para todo* $\sigma \in \mathcal{F}^{CP}$.

Recorrendo ao Principio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$ prova-se que todo o elemento de $\mathcal{F}^{CP}$ admite uma única árvore de formação; assim, a **definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ é determinista**. Desta forma, é válido o Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$.

Teorema 2.5 (Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$). *Seja* Y *um conjunto e sejam* $\overline{f_\neg} : Y \to Y$, $\overline{f_\vee}, \overline{f_\wedge}, \overline{f_\to}, \overline{f_\leftrightarrow} : Y \times Y \to Y$ *funções. Então existe uma, e uma só, função* $F : \mathcal{F}^{CP} \to Y$ *tal que:*

1. $F(\perp) = y$, *para algum* $y \in Y$;
2. $F(p_i) = y_i$, *para algum* $y_i \in Y \quad (i \in \mathbb{N}_0)$;
3. *para quaisquer* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,

   a) $F(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(F(\varphi))$;

   b) $F(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(F(\varphi), F(\psi))$;

   c) $F(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(F(\varphi), F(\psi))$;

   d) $F(\varphi \to \psi) = \overline{f_\to}(F(\varphi), F(\psi))$;

   e) $F(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(F(\varphi), F(\psi))$

A definição de uma função em $\mathcal{F}^{CP}$ que resulte da aplicação do teorema anterior diz-se uma **definição por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$**.

Apresenta-se de seguida algumas funções definidas por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Definição 2.6. *A função* $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$, *que a cada fórmula* $\sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ *associa o conjunto de variáveis proposicionais que ocorrem em* σ, *é definida por recursão estrutural do seguinte modo:*

1. $var(\perp) = \emptyset$;
2. $var(p) = \{p\}$, *para cada* $p \in \mathcal{V}^{CP}$;
3. *para quaisquer* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,

   a) $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$,

   b) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,

   c) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$, *d)* $var(\varphi \to \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,

e) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Exemplo 2.4.

$$\begin{array}{rcl} var(((p_3 \to (\neg p4)) \vee \bot)) & = & var((p_3 \to (\neg p4))) \cup var(\bot) \\ & = & var(p_3) \cup var((\neg p_4)) \cup \emptyset \\ & = & \{p_3\} \cup var(p_4) \\ & = & \{p_3\} \cup \{p_4\} \\ & = & \{p_3, p_4\} \end{array}$$

Definição 2.7. *A* **complexidade lógica** *de uma fórmula σ é um número $r(\sigma)$, onde $r : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é a unica função que se define por recursão estrutural da seguinte forma:*

1. $r(\bot) = 0$;
2. $r(p) = 0$, *para cada* $p \in \mathcal{V}^{CP}$;
3. *para quaisquer* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,

   a) $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$,

   b) $r(\varphi \vee \psi) = 1 +$ *máximo*$\{r(\varphi), r(\psi)\}$,

   c) $r(\varphi \wedge \psi) = 1 +$ *máximo*$\{r(\varphi), r(\psi)\}$,

   d) $r(\varphi \to \psi) = 1 +$ *máximo*$\{r(\varphi), r(\psi)\}$,

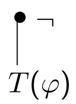
   e) $r(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 +$ *máximo*$\{r(\varphi), r(\psi)\}$.

Exemplo 2.5.

$$\begin{array}{rcl} r(((p_3 \to (\neg p4)) \vee \bot)) & = & 1 + \textit{máximo}(r((p_3 \to (\neg p4))), r(\bot)) \\ & = & 1 + \textit{máximo}(1 + \textit{máximo}(r(p_3), r((\neg p_4))), 0) \\ & = & 1 + \textit{máximo}(1 + \textit{máximo}(0, r((\neg p_4))), 0) \\ & = & 1 + \textit{máximo}(1 + \textit{máximo}(0, 1 + r(p_4)), 0) \\ & = & 1 + \textit{máximo}(1 + \textit{máximo}(0, 1 + 0), 0) \\ & = & 1 + \textit{máximo}(1 + 1, 0) \\ & = & 1 + 2 \\ & = & 3 \end{array}$$

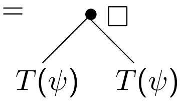
Definição 2.8. *A cada fórmula $\sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ pode associar-se uma árvore $T(\sigma)$, designada a* **árvore de parsing** *de σ, sendo T a única função definida por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$ do seguinte modo:*

1. *$T(\bot) = \ \bullet\bot$;*
2. *para cada $p \in \mathcal{V}^{CP}$, $T(p) = \ \bullet\, p$;*
3. *para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $T((\neg\phi)) =$*

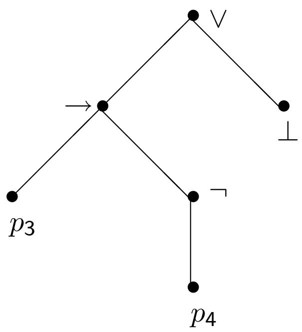


4. *para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para qualquer $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,*

$T(\varphi \Box \psi) =$



Exemplo 2.6. *A árvore de parsing da fórmula $((p_3 \rightarrow (\neg p4)) \vee \bot)$ é*



Definição 2.9. *A função $h : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$, que a cada fórmula σ faz corresponder o número de nodos máximo em ramos da árvore de parsing de σ, é definida, por recursão estrutural, como a única função tal que:*

1. *$h(\bot) = 1$;*
2. *para cada $p \in \mathcal{V}^{CP}$, $h(p) = 1$;*
3. *para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,*
   a) *$h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$,*
   b) *$h(\varphi \vee \psi) = 1 +$ máximo$(h(\varphi), h(\psi))$,*
   c) *$h(\varphi \wedge \psi) = 1 +$ máximo$(h(\varphi), h(\psi))$,*

d) $h(\varphi \to \psi) = 1 + \textit{máximo}(h(\varphi), h(\psi))$,

e) $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \textit{máximo}(h(\varphi), h(\psi))$.

Para cada $\sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, $h(\sigma)$ *é chamada a* **altura** *de* σ.

2.1.2 Semântica

Até ao momento estudámos, apenas, a sintaxe do Cálculo Proposicional, sem darmos qualquer significado às fórmulas. Uma fórmula por si só não tem qualquer significado, este depende da substituição das variáveis por proposições concretas. Por outro lado, a veracidade de proposições expressas em linguagem natural pode depender do contexto em que nos encontramos. Por exemplo, a proposição

"este livro está escrito numa língua estrangeira" (1.)

pode ser verdadeira em determinadas circunstâncias e falsas noutras. O mesmo acontece com outras proposições atómicas, é o caso da proposição

"este livro tem uma capa vermelha" (2.)

A veracidade de uma proposição composta pode também depender das circunstâncias em que nos encontramos, mas para a avaliarmos basta saber o que acontece com as proposições simples que a compõem. A afirmação

"este livro está escrito numa língua estrangeira e tem uma capa vermelha"

é verdade para alguns livros e falsa para outros, mas será verdadeira sempre que as afirmações 1. e 2. forem verdadeiras.

Assim

a) A veracidade de uma proposição simples depende da sua interpretação em função das circunstâncias em que nos encontramos;

b) A veracidade de proposições compostas depende das proposições simples que a compõem.

No Cálculo Proposicional não se pretende estudar o processo de determinar a veracidade de uma proposição atómica, mas sim, como determinar a veracidade de proposições compostas a partir da informação que se dispõe acerca das proposições simples que a compõem.

Formalmente a semântica é definida como uma função que a cada variável proposicional associa um dos dois valores lógicos admitidos no Cálculo Proposicional.

Definição 2.10. *Os valores lógicos do Cálculo Proposicional são* **verdadeiro** *(ou* $\mathbf{V}$, *ou* $\mathbf{1}$*) e* **falso** *(ou* $\mathbf{F}$, *ou* $\mathbf{0}$*).*

A veracidade de uma proposição composta está dependente não só das proposições atómicas, mas também dos conectivos envolvidos na ligação destas proposições. Por exemplo, se assumirmos que a afirmação 1. é verdadeira, é de esperar que a afirmação

"este livro não está escrito numa língua estrangeira"

seja uma afirmação falsa. Relativamente à afirmação 3. espera-se que esta seja verdadeira se e só se as proposições 1. e 2. forem simultaneamente verdadeiras. Aos restantes conectivos está, também, associada uma função que a uma determinada sequência de valores lógicos associa um valor lógico.

Definição 2.11. *Dá-se a designação de* **função de verdade** *ou* **operador lógico** *a toda a aplicação* $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

Aos conectivos do Cálculo Proposicional são associadas as funções de verdade a seguir apresentadas:

$$\begin{array}{rccc} \overline{v_\neg}: & \{0,1\} & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & 1-x \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \overline{v_\vee}: & \{0,1\}\times\{0,1\} & \to & \{0,1\} \\ & (x,y) & \mapsto & \text{máximo}(x,y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \overline{v_\wedge}: & \{0,1\}\times\{0,1\} & \to & \{0,1\} \\ & (x,y) & \mapsto & \text{mínimo}(x,y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \overline{v_\to}: & \{0,1\}\times\{0,1\} & \to & \{0,1\} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x=0 \text{ ou } y=1 \\ 0 & \text{se} \quad x=1 \text{ e } y=0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \overline{v_\leftrightarrow}: & \{0,1\}\times\{0,1\} & \to & \{0,1\} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x=y \\ 0 & \text{se} \quad x\neq y \end{cases} \end{array}$$

As funções anteriores podem alternativamente ser definidas através de uma tabela:

$\overline{v_\neg}$	
1	0
0	1

$\overline{v_\wedge}$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\overline{v_\vee}$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\overline{v_\to}$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\overline{v_\leftrightarrow}$	0	1
0	1	0
1	0	1

É fácil justificar a definição das funções de verdade associadas aos conectivos $\neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow$. De facto, se p e q representam proposições, então

- $\neg p$ é verdadeiro se e só p é falso;
- $p \wedge q$ é verdadeiro se e só se p e q são verdadeiras;
- $p \vee q$ é verdadeiro se e só uma das proposições p ou q for verdadeira;
- $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro se e só p e q são ambas verdadeiras ou são ambas falsas.

A definição da função de verdade associada ao conectivo $\rightarrow$ poderá não ser tão simples de entender. Por exemplo, suponha que lhe foi dada a seguinte informação

"Se o livro está escrito numa língua estrangeira, então tem uma capa vermelha".

Se representarmos por p e por q, respectivamente, as proposições

"o livro está escrito numa língua estrangeira" e "o livro tem uma capa vermelha".

e se a informação dada estiver correcta, ou seja se $p \rightarrow q$ é verdadeiro, é de esperar que

- se p é verdadeiro, então q é verdadeiro;
- se q é falso, então p é falso.

Reciprocamente, se verificarmos que p e q são verdadeiras ou que p e q são falsas, diremos que a informação dada estava certa. No entanto, se chegarmos à conclusão que o livro está escrito numa língua estrangeira, mas que não tem capa vermelha, então diremos que nos deram uma informação errada.

A dúvida sobre a validade da informação dada surge quando temos a seguinte situação: o livro não está escrito numa língua estrangeira, mas tem capa vermelha. Será que neste caso podemos concluir que nos deram uma informação errada? Na verdade, apenas poderemos dizer que a informação dada foi irrelevante e, em situações como esta, opta-se por assumir que a informação estava correcta. Note-se que se trata, de facto, de uma opção.

Vejamos, agora, de que forma o valor lógico de uma fórmula é determinado a partir do valor lógico das subfórmulas que a compõem.

Definição 2.12. *Dá-se a designação de* **valoração** *a toda a aplicação $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \{0,1\}$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. $v(\perp) = 0$;
2. *para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;*

   a) $v(\neg\varphi) = \overline{v_\neg}(v(\varphi))$;

   b) $v(\varphi \wedge \psi) = \overline{v_\wedge}(v(\varphi), v(\psi))$;

   c) $v(\varphi \vee \psi) = \overline{v_\vee}(v(\varphi), v(\psi))$;

d) $v(\varphi \to \psi) = \overline{v_{\to}}(v(\varphi), v(\psi))$;

e) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{v_{\leftrightarrow}}(v(\varphi), v(\psi))$.

Nas condições da proposição anterior, e tendo em conta a definição das funções de verdade, tem-se, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,

- $v(\varphi) = 1 - v(\varphi)$;
- $v(\varphi \wedge \psi) =$ mínimo$(v(\varphi), v(\psi))$;
- $v(\varphi \vee \psi) =$ máximo$(v(\varphi), v(\psi))$;
- $v(\varphi \to \psi) = 0$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;
- $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$.

Proposição 2.13. *Seja* $v : \mathcal{F}^{CP} \to \{0, 1\}$ *uma valoração e sejam* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$. *Então são válidas as seguintes proposições:*

a) *Se* $v(\varphi) = 1$ *e* $v(\psi) = 1$*, então*

$v(\neg\varphi) = 0$; $v(\varphi \wedge \psi) = 1$; $v(\varphi \vee \psi) = 1$; $v(\varphi \to \psi) = 1$; $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$;

b) *Se* $v(\varphi) = 1$ *e* $v(\psi) = 0$*, então*

$v(\neg\varphi) = 0$; $v(\varphi \wedge \psi) = 0$; $v(\varphi \vee \psi) = 1$; $v(\varphi \to \psi) = 0$; $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0$;

c) *Se* $v(\varphi) = 0$ *e* $v(\psi) = 1$*, então*

$v(\neg\varphi) = 1$; $v(\varphi \wedge \psi) = 0$; $v(\varphi \vee \psi) = 1$; $v(\varphi \to \psi) = 1$; $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0$;

c) *Se* $v(\varphi) = 0$ *e* $v(\psi) = 0$*, então*

$v(\neg\varphi) = 1$; $v(\varphi \wedge \psi) = 0$; $v(\varphi \vee \psi) = 0$; $v(\varphi \to \psi) = 1$; $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$.

Dem.: Imediata a partir da definição de valoração. ■

Proposição 2.14. *Sejam* $g : \mathcal{V}^{CP} \to \{0, 1\}$ *uma função. Então existe uma, e uma só, valoração* v *tal que, para todo* $p \in \mathcal{V}^{CP}$, $v(p) = g(p)$.

Dem.: A prova da existência e unicidade da função v é feita recorrendo ao Teorema da Recusão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$. De facto, se considerarmos $Y = \{0, 1\}$ e as funções de verdade $\overline{v_{\neg}}$, $\overline{v_{\vee}}$, $\overline{v_{\wedge}}$, $\overline{v_{\to}}$, $\overline{v_{\leftrightarrow}}$, sabemos que existe uma única função $v : \mathcal{F}^{CP} \to \{0, 1\}$ tal que

1. $v(\perp)$=0;
2. $v(p) = g(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

3. para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$

   a) $v(\neg\varphi) = \overline{v_{\neg}}(v(\varphi))$;

   b) $v(\varphi \vee \psi) = \overline{v_{\vee}}(v(\varphi), v(\psi))$;

   c) $v(\varphi \wedge \psi) = \overline{v_{\wedge}}(v(\varphi), v(\psi))$;

   d) $v(\varphi \to \psi) = \overline{v_{\to}}(v(\varphi), v(\psi))$;

   e) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{v_{\leftrightarrow}}(v(\varphi), v(\psi))$.

Esta função v é, obviamente, uma valoração. ■

Definição 2.15. *Sejam $v : \mathcal{F}^{CP} \to \{0,1\}$ uma valoração e $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Ao valor $v(\varphi)$ dá-se a designação de* **valor lógico de φ para a valoração** *v.*

Exemplo 2.7. *Seja v a única valoração tal que $v(p_1) = 1$ e $v(p_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$. Seja $\varphi = (p_1 \vee p_2) \to (p_1 \wedge p_2)$. Então, por definição de valoração,*

$$v(\varphi) = \begin{cases} 0 & \textit{se} \quad v(p_1 \vee p_2) = 1 \textit{ e } v(p_1 \wedge p_2) = 0 \\ 1 & \textit{se} \quad v(p_1 \vee p_2) = 0 \textit{ ou } v(p_1 \wedge p_2) = 1 \end{cases}$$

Uma vez que

$$v(p_1 \vee p_2) = \textit{máximo}(v(p_1), v(p_2)) = \textit{máximo}(1,0) = 1 \textit{ e}$$
$$v(p_1 \wedge p_2) = \textit{mínimo}(v(p_1), v(p_2)) = \textit{mínimo}(1,0) = 0$$

temos $v(\varphi) = 0$.

Proposição 2.16. *Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula. Se para todo $p \in var(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.*

Dem.: Demonstração por indução estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$. Representemos por $P(\varphi)$ a propriedade: "Se para todo $p \in var(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$".

1. Caso $\varphi = \bot$.
   Por definição de valoração, temos $v_1(\varphi) = 0 = v_2(\varphi)$. Logo $P(\bot)$.

2. Caso $\varphi = p_i$, para algum $i \in \mathbb{N}_0$.
   Suponhamos que, para todo $p \in var(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p)$. Então, como $p_i \in var(\varphi)$, temos
   $$v_1(\varphi) = v_1(p_i) = v_2(p_i) = v_2(\varphi).$$
   Logo $P(p_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

3. Caso $\varphi = (\neg\psi)$, para algum $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$.
   Pretendemos mostrar que se $P(\psi)$ é verdadeira, então $P(\neg\psi)$ é também verdadeira. Suponhamos, por hipótese de indução, que $P(\psi)$ é verdadeira. Com base nesta suposição prova-se que $P(\neg\psi)$ é, de facto, verdadeira. Com efeito, se admitirmos que,

   $$v_1(p) = v_2(p), \text{ para todo } p \in var(\neg\varphi),$$

   então também temos

   $$v_1(p) = v_2(p), \text{ para todo } p \in var(\varphi),$$

   uma vez que $var(\varphi) = var(\neg\varphi)$. Desta forma, e pela hipótese de indução, vem que

   $$v_1(\neg\varphi) = 1 - v_1(\varphi) = 1 - v_2(\varphi) = v_2(\neg\varphi).$$

   Logo, assumindo que $P(\varphi)$ é verdadeira, provou-se que $P(\neg\varphi)$ é também verdadeira.

4. Caso $\varphi = (\psi_1 \Box \psi_2)$, para algum $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e para algum $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
   Pretendemos mostrar que se $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$ são verdadeiras, então $P(\psi_1 \Box \psi_2)$ é também verdadeira. Suponhamos, por hipótese de indução, que $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$ são verdadeiras. Se admitirmos que

   $$v_1(p) = v_2(p), \text{ para todo } p \in var(\psi_1 \Box \psi_2),$$

   temos

   $$v_1(p) = v_2(p), \text{ para todo } p \in var(\psi_i), \quad (i \in \{1, 2\})$$

   uma vez que $var(\psi_1), var(\psi_2) \subseteq var(\psi_1 \Box \psi_2) = var(\psi_1) \cup var(\psi_2)$. Assim, tendo em conta a hipótese de indução,

   $$v_1(\psi_1 \Box \psi_2) = \overline{v_\Box}(v_1(\psi_1), v_1(\psi_2)) = \overline{v_\Box}(v_2(\psi_1), v_2(\psi_2)) = v_2(\psi_1 \Box \psi_2).$$

De 1., 2. 3. e 4. concluímos, pelo Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, que se $v_1(p) = v_2(p)$, para todo $p \in var(\varphi)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$. ■

Desta proposição resulta que o valor lógico de uma fórmula φ para uma determinada valoração v depende apenas do valor lógico das variáveis que ocorrem em φ.

Definição 2.17.

1. *Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ é uma* **tautologia**, *e escreve-se $\models \varphi$, se $v(\varphi) = 1$, para qualquer valoração v.*

2. *Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ é uma* **contradição** *se $v(\varphi) = 0$, para qualquer valoração v.*

Exemplo 2.8. *A fórmula $\varphi = p_0 \to ((\neg p_0) \to \bot)$ é uma tautologia. Para provar esta afirmação temos de mostrar que, para toda a valoração v, $v(\varphi) = 1$. Pela proposição anterior sabemos que o valor lógico da fórmula φ depende apenas do valor lógico de p_0. Então, se considerarmos uma valoração v tal que*

- $v(p_0) = 0$, *temos*
  - $v(\neg p_0) = 1$;
  - $v((\neg p_0) \to \bot) = 0$, *pois* $v(\neg p_0) = 1$ *e* $v(\bot) = 0$;
  - $v(\varphi) = 1$, *uma vez que* $v(p_0) = 0$ *e* $v((\neg p_0) \to \bot) = 0$;
- $v(p_0) = 1$, *temos*
  - $v(\neg p_0) = 0$;
  - $v((\neg p_0) \to \bot) = 1$, *pois* $v(\neg p_0) = 0$ *e* $v(\bot) = 0$;
  - $v(\varphi) = 1$, *uma vez que* $v(p_0) = 1$ *e* $v((\neg p_0) \to \bot) = 1$.

Uma vez que $v(\varphi) = 1$, para toda a valoração v, concluímos que φ é uma tautologia.

Tendo em conta a proposição anterior e uma vez que cada fórmula do Cálculo Proposicional tem apenas um número finito de variáveis proposicionais, a análise do valor lógico de uma fórmula pode alternativamente ser apresentada através de uma tabela, designada por **tabela de verdade**. Na tabela de verdade de uma fórmula φ aparece uma coluna para cada uma das variáveis proposicionais que ocorrem em φ, uma coluna para a fórmula φ e colunas (auxiliares) para cada uma das sub-fórmulas de φ. No que diz respeito às linhas, a tabela tem uma linha para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis que ocorrem na fórmula. Assim, e uma vez que cada variável só pode assumir dois valores lógicos, a tabela de verdade de uma fórmula com n variáveis tem 2^n linhas.

Exemplo 2.9. *Seja φ a fórmula $(p_1 \wedge p_2) \to (p_1 \vee p_2)$. Da tabela de verdade de φ*

p_1	p_2	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \vee p_2$	$(p_1 \wedge p_2) \to (p_1 \vee p_2)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

concluímos que esta fórmula é uma tautologia, uma vez que o seu valor lógico (apresentado na última coluna) é verdadeiro qualquer que seja a valoração.

Definição 2.18. *Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$. Diz-se que a fórmula φ é* **logicamente equivalente à fórmula** *ψ, e escreve-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.*

Exemplo 2.10. *Para toda a fórmula* $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

$$\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \to \bot).$$

De facto, se v *é uma valoração tal que*

- $v(\varphi) = 0$, *então* $v(\neg\varphi) = 1$, $v(\varphi \to \bot) = 1$ *e, portanto,* $v(\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \bot)) = 1$;
- $v(\varphi) = 1$, *então* $v(\neg\varphi) = 0$, $v(\varphi \to \bot) = 0$ *e, portanto,* $v(\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \bot)) = 1$.

Assim, $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \bot)$ *é uma tautologia e, portanto, a fórmula* $\neg\varphi$ *é logicamente equivalente à fórmula* $\varphi \to \bot$.

Proposição 2.19. *Sejam* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$. *Então a fórmula* φ *é logicamente à fórmula* ψ *se e só se* $v(\varphi) = v(\psi)$, *para toda a valoração* v.

Dem.: Resulta de imediato da definição de fórmulas logicamente equivalentes. ■

Proposição 2.20. *A relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em* $\mathcal{F}^{CP}$, *ou seja,*

i. *Para todo* $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow \varphi$;

ii. *Para todo* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, *se* $\varphi \Leftrightarrow \psi$ *então* $\psi \Leftrightarrow \varphi$;

iii. *Para todo* $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, *se* $\varphi \Leftrightarrow \psi$ *e* $\psi \Leftrightarrow \sigma$, *então* $\varphi \Leftrightarrow \sigma$;

Dem.: Exercício. ■

Proposição 2.21. *Para todo* $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, *são válidas as seguintes equivalências lógicas*

$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$	*associatividade*
$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$	$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$	*comutatividade*
$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$	*idempotência*
$\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \wedge \neg\bot \Leftrightarrow \varphi$	*elemento neutro*
$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$	$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$	*distributividade*
$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	*leis de De Morgan*
$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$		*lei da dupla negação*
$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$		
$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$		
$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi$		
$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$		
$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \bot$		
$\bot \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$		

Dem.: Exercício. ■

Uma vez que a conjunção (resp. disjunção) é associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ (resp. $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$), $n \in \mathbb{N}$, para representar o resultado de aplicações sucessivas da conjunção (resp. disjunção) aos elementos da sequência $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_n$, independentemente da forma como eles são agrupados. Por exemplo, a fórmula $p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$ é logicamente equivalente à fórmula $(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$ e, para simplificação de escrita, podemos representá-la por $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$.

Definição 2.22. *Sejam ψ uma fórmula proposicional e p uma variável proposicional. A função*

$$\begin{array}{rccc} [\psi/p]: & \mathcal{F}^{CP} & \rightarrow & \mathcal{F}^{CP} \\ & \varphi & \mapsto & \varphi[\psi/p] \end{array}$$

que a cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ faz corresponder a fórmula, representada por $\varphi[\psi/p]$, que resulta de φ substituindo todas as ocorrências de p por ψ, é definida, por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$, como a única função tal que:

1. *$\perp[\psi/p] = \perp$;*
2. *Para todo $i \in \mathbb{N}_0$,*
$$p_i[\psi/p] = \begin{cases} \psi & \text{se} \quad p_i = p \\ p_i & \text{se} \quad p_i \neq p \end{cases};$$
3. *Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,*
$$(\neg\varphi)[\psi/p] = (\neg\varphi[\psi/p]);$$
4. *Para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,*
$$(\varphi_1 \,\Box\, \varphi_2)[\psi/p] = (\varphi_1[\psi/p] \,\Box\, \varphi_2[\psi/p]).$$

Exemplo 2.11.

$$\begin{aligned} (p_1 \wedge (p_2 \rightarrow \perp))[(p_3 \vee p_1)/p_2] &= (p_1[(p_3 \vee p_1)/p_2] \wedge (p_2 \rightarrow \perp)[(p_3 \vee p_1)/p_2]) \\ &= (p_1 \wedge (p_2[(p_3 \vee p_1)/p_2] \rightarrow \perp[(p_3 \vee p_1)/p_2])) \\ &= (p_1 \wedge ((p_3 \vee p_1) \rightarrow \perp)) \end{aligned}$$

Teorema 2.23 (Generalização). *Sejam $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e p uma variável proposicional. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p]$ é também uma tautologia.*

Dem.: Dada uma valoração v, seja v' a valoração definida, a partir de v, por

$$v'(p') = \begin{cases} v(\psi) & \text{se} \quad p' = p \\ v(p') & \text{se} \quad p' \in \mathcal{V}^{CP} \setminus \{p\} \end{cases} \qquad \text{para todo } p' \in \mathcal{V}^{CP}$$

Por indução estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$, prova-se que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p])$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Assim, se admitirmos que φ é uma tautologia, segue que $v(\varphi[\psi/p]) = v'(\varphi) = 1$, para toda a valoração v, donde $\varphi[\psi/p]$ é uma tautologia. ■

Exemplo 2.12. *Como já verificámos antes, a fórmula $\varphi = (p_1 \wedge p_2) \rightarrow (p_1 \vee p_2)$ é uma tautologia. Logo, para qualquer $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, a fórmula $\varphi[\psi/p_1] = (\psi \wedge p_2) \rightarrow (\psi \vee p_2)$ é também uma tautologia.*

Teorema 2.24 (Substituição). *Sejam $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e p uma variável proposicional. Então,*

$$\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2 \text{ se e só se } \forall \varphi \in \mathcal{F}^{CP} \varphi[\psi_1/p] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p].$$

Dem.: Suponhamos que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p]$. Então, em particular, quando $\varphi = p$, temos $p[\psi_1/p] \Leftrightarrow p[\psi_2/p]$. Logo, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$.

Reciprocamente, suponhamos que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. Por indução estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$, vamos mostrar que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p]$.

1. Caso $\varphi = \perp$.
   Uma vez que $\varphi[\psi_1/p] = \perp = \varphi[\psi_2/p]$ e a relação $\Leftrightarrow$ é reflexiva, temos $\varphi[\psi_1/p] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p]$.

2. Caso $\varphi = p_i$, para algum $i \in \mathbb{N}_0$.

   - Caso $p_i = p$, $\varphi[\psi_1/p] = \psi_1$ e $\varphi[\psi_2/p] = \psi_2$. Logo, tendo em conta que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, segue que $\varphi[\psi_1/p] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p]$.
   - Caso $p_i \neq p$, $\varphi[\psi_1/p] = p_i = \varphi[\psi_2/p]$. Assim, novamente pelo facto da relação $\Leftrightarrow$ ser reflexiva, temos $\varphi[\psi_1/p] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p]$.

3. Caso $\varphi = (\neg\varphi_1)$, para algum $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$.
   Suponhamos, por hipótese de indução, que $\varphi_1[\psi_1/p] \Leftrightarrow \varphi_1[\psi_2/p]$. Então $\varphi_1[\psi_1/p] \leftrightarrow \varphi_1[\psi_2/p]$ é uma tautologia e, portanto, para toda a valoração v, $v(\varphi_1[\psi_1/p]) = v(\varphi_1[\psi_2/p])$. Pretendemos mostrar que $(\neg\varphi_1)[\psi_1/p] \Leftrightarrow (\neg\varphi_1)[\psi_2/p]$, ou seja, que $(\neg\varphi_1)[\psi_1/p] \leftrightarrow (\neg\varphi_1)[\psi_2/p]$ é uma tautologia. De facto, como para toda a valoração v,

$$\begin{array}{rcll} v((\neg\varphi_1)[\psi_1/p]) & = & v((\neg\varphi_1[\psi_1/p])) & \text{(definição de substituição)} \\ & = & 1 - v(\varphi_1[\psi_1/p]) & \text{(definição de valoração)} \\ & = & 1 - v(\varphi_1[\psi_2/p]) & \text{(hipótese de indução)} \\ & = & v(\neg\varphi_1[\psi_2/p]) & \text{(definição de valoração)} \\ & = & v((\neg\varphi_1)[\psi_2/p]) & \text{(definição de substituição).} \end{array}$$

   então $(\neg\varphi_1)[\psi_1/p] \Leftrightarrow (\neg\varphi_1)[\psi_2/p]$.

4. Caso $\varphi = (\varphi_1 \Box \varphi_2)$, para algum $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e para algum $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
   Exercício. ■

Exemplo 2.13. *Sejam $\sigma, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi_1 = \neg\psi$ e $\psi_2 = \psi \to \bot$. Consideremos $p \in \mathcal{V}^{CP} \backslash var(\sigma)$ (existe sempre, uma vez que o conjunto de variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula é finito). Seja $\varphi = (p \vee \sigma)$. Então, como $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ segue, pelo Teorema da Substituição, que $\varphi[\psi_1/p] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p]$. Logo $((\neg\psi) \vee \sigma) \Leftrightarrow ((\psi \to \bot) \vee \sigma)$.*

Definição 2.25. *Um conjunto X de conectivos diz-se* **completo** *quando, para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe uma fórmula $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e todos os conectivos de ψ pertencem a X.*

Proposição 2.26. *Os conjuntos de conectivos $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \to, \}$ e $\{\bot, \leftrightarrow\}$ são completos.*

Dem.: Vamos mostrar que $\{\neg, \wedge\}$ é um conjunto completo de conectivos.

Seja $f : \mathcal{F}^{CP} \to \mathcal{F}^{CP}$ a única função definida, por recursão estrutural, do seguinte modo:

1. $f(\bot) = (p_0 \wedge \neg p_0)$;
2. $f(p_i) = p_i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;
3. Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$;
   b) $f(\varphi \wedge \psi) = f(\varphi) \wedge f(\psi)$;
   c) $f(\varphi \vee \psi) = \neg((\neg f(\varphi)) \wedge (\neg f(\psi)))$;
   d) $f(\varphi \to \psi) = \neg(f(\varphi) \wedge (\neg f(\psi)))$;
   e) $f(\varphi \to \psi) = \neg(f(\varphi) \wedge (\neg f(\psi))) \wedge \neg(f(\psi) \wedge (\neg f(\varphi)))$

Por indução estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$ prova-se que, para toda a fórmula $\sigma \in \mathcal{F}^{CP}$,

$$\sigma \Leftrightarrow f(\sigma) \text{ e os conectivos de } f(\sigma) \text{ pertencem ao conjunto } \{\neg, \wedge\}.$$

Assim, toda a fórmula σ é logicamente equivalente a uma fórmula na qual só ocorrem conectivos de $\{\neg, \wedge\}$ e, portanto, este conjunto de conectivos é completo.

De forma análoga prova-se que os conjuntos de conectivos $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \to, \}$ e $\{\bot, \leftrightarrow\}$ são completos. ■

Definição 2.27. *Dá-se a designação de* **literal** *a toda a fórmula que seja uma variável proposicional ou a negação de uma variável proposicional.*

Definição 2.28.

i) Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ *diz-se uma* **forma normal conjuntiva** *(FNC) se*

$$\varphi = (l_{11} \vee \ldots \vee l_{1i_1}) \wedge \ldots \wedge (l_{n1} \vee \ldots \vee l_{ni_n}),$$

onde $n, i_1, \ldots i_n \in \mathbb{N}$ *e os* l_{ij} *são literais.*

ii) Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ *diz-se uma* **forma normal disjuntiva** *(FND) se*

$$\varphi = (l_{11} \wedge \ldots \wedge l_{1j_1}) \vee \ldots \vee (l_{m1} \wedge \ldots \wedge l_{mj_m}),$$

onde $m, j_1, \ldots j_m \in \mathbb{N}$ *e os* l_{ij} *são literais.*

Exemplo 2.14.

1. p_0 *é uma FNC (considere-se* $n = 1$*,* $i_1 = 1$ *e* $l_{11} = p_0$*) e uma FND (onde* $m = 1$*,* $j_1 = 1$ *e* $l_{11} = p_0$*). Note-se que todo o literal é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e uma forma normal disjuntiva.*

2. *A fórmula* $\neg p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$ *é uma FNC (corresponde a considerar* $n = 3$*,* $i_1 = 1$*,* $i_2 = 1$ *e* $i_3 = 1$*,* $l_{11} = \neg p_1$*,* $l_{21} = p_2$ *e* $l_{31} = \neg p_3$*) e é também uma FND (tomando* $m = 1$*,* $j_1 = 3$*,* $l_{11} = \neg p_1$*,* $l_{12} = p_2$ *e* $l_{13} = \neg p_3$*).*

3. *A fórmula* $(\neg p_1 \vee p_3 \vee \neg p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_1)$ *é uma FNC (considerando* $n = 2$*,* $i_1 = 3$*,* $i_2 = 2$*,* $l_{11} = \neg p_1$*,* $l_{12} = p_3$*,* $l_{13} = \neg p_2$*,* $l_{21} = p_0$ *e* $l_{22} = \neg p_1$*. Esta fórmula não é, no entanto, uma FND.*

Proposição 2.29. *Para toda a fórmula* φ*, existem formas normais conjuntivos* φ^c *e formas normais disjuntivas* φ^d *tais que* $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ *e* $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$*.*

Dem.: Dada uma fórmula φ, é possível obter fórmulas normais conjuntivas e formas normais disjuntivas logicamente equivalentes a φ através das seguintes transformações:

1. Eliminar equivalências, implicações e ocorrências do absurdo, utilizando as equivalências lógicas

$$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow ((\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)),\ \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2 \text{ e } \perp \Leftrightarrow (\varphi_1 \wedge \neg\varphi_1).$$

2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.

3. Eliminar duplas negações.

4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção. ■

Exemplo 2.15. *Seja* $\varphi = ((\neg p_0 \wedge p_1) \to p_2) \vee p_3$. *Então*

1. $$\begin{aligned} \varphi &\Leftrightarrow (\neg(\neg p_0 \vee p_1) \vee p_2) \vee p_3 \\ &\Leftrightarrow (((\neg\neg p_0) \wedge \neg p_1) \vee p_2) \vee p_3 \\ &\Leftrightarrow ((p_0 \wedge \neg p_1) \vee p_2) \vee p_3 \qquad \textit{(Esta fórmula é uma FND)} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \varphi &\Leftrightarrow ((p_0 \wedge \neg p_1) \vee p_2) \vee p_3 \\ &\Leftrightarrow (p_0 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3) \qquad \textit{(Esta fórmula é uma FNC)} \end{aligned}$$

Alternativamente, pode obter-se uma FND (resp. FNC), φ^d (resp. φ^c), logicamente equivalente a φ, recorrendo à tabela de verdade de φ. A demonstração seguinte é uma alternativa à demonstração anterior e descreve de que forma se obtêm as formas normais por este processo.

(Demonstração alternativa)

- Se φ é uma **contradição**, toma-se $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$.
- Senão suponhamos, sem perda de generalidade, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as variáveis que ocorrem em φ. A tabela de verdade de φ pode ser representada na seguinte forma:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha i $\to$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para cada valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.$$

Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0. Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais a fórmula φ tem valor lógico 1, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \beta_{i_k}.$$

Então φ^d é uma FND e, por construção,

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi^d.$$

De modo análogo também é possível obter uma FNC, φ^c, logicamente equivalente a φ, recorrendo à tabela de verdade de φ: no processo anterior troca-se *contradição* por *tautologia*, $\wedge$ por $\vee$, $\vee$ por $\wedge$, 0 por 1 e 1 por 0. ■

Exemplo 2.16. *Consideremos a fórmula* $\varphi = ((p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \bot)) \wedge p_2$. *Denotemos por* ψ *a subfórmula* $(p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \bot)$ *de* φ. *A tabela de verdade de* φ *é*

	p_1	p_2	p_3	$\bot$	$\neg p_1$	$p_3 \to p_1$	$\neg p_1 \leftrightarrow \bot$	ψ	φ
linha 1 $\to$	1	1	1	0	0	1	1	1	1
linha 2 $\to$	1	1	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	0	1	1	1	0
	1	0	0	0	0	1	1	1	0
	0	1	1	0	1	0	0	0	0
linha 6 $\to$	0	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	1	0

As linhas para as quais φ *tem valor lógico* 1 *são a* 1ª, *a* 2ª *e a* 6ª. *Portanto uma FND logicamente equivalente a* φ *é*

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3).$$

Definição 2.30. *Seja* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. *Diz-se que uma valoração* v **satisfaz o conjunto de fórmulas** Γ, *e escreve-se* $v \models \Gamma$, *se* $v(\varphi) = 1$, *para todo* $\varphi \in \Gamma$. *Quando existe* $\varphi \in \Gamma$ *tal que* $v(\varphi) = 0$, *diz-se que a valoração* v **não satisfaz o conjunto** Γ, *neste caso escreve-se* $v \not\models \Gamma$.

Definição 2.31. *Seja* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. *Diz-se que o conjunto de fórmulas* Γ *é* **(semanticamente) consistente** *quando existe alguma valoração que o satisfaça; caso contrário dizemos que o conjunto* Γ *é* **(semanticamente) inconsistente**.

Exemplo 2.17. *Consideremos os conjuntos de fórmulas proposicionais*

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{p_1 \wedge (\neg p_2), p_1 \to (p_2 \vee p_3)\}, \\ \Gamma_2 &= \{\bot, p_1 \vee \neg p_1\}, \\ \Gamma_3 &= \{p_1 \wedge p_2, p_1 \to \bot\}. \end{aligned}$$

Seja v *uma valoração tal que* $v(p_1) = v(p_3) = 1$ *e* $v(p_2) = 0$. *Então* $v(\neg p_2) = 1$, *pelo que* $v(p_1 \wedge (\neg p_2)) = 1$. *Temos também* $v(p_2 \vee p_3) = 1$ *e, portanto,* $v(p_1 \to (p_2 \vee p_3)) = 1$. *Assim, a valoração* v *satisfaz o conjunto de fórmulas* Γ_1; *logo* Γ_1 *é semanticamente consistente.*

Para toda a valoração v, $v(\bot) = 0$, logo Γ_2 é semanticamente inconsistente, pois não existe qualquer valoração que satisfaça toda a fórmula de Γ_2.

O conjunto Γ_3 é, também, semanticamente inconsistente. De facto, se admitirmos que existe uma valoração v que satisfaz Γ_3, então $v(p_1 \wedge p_2) = 1$ e $v(p_1 \to \bot) = 1$. Como $v(p_1 \wedge p_2) = 1$, temos $v(p_1) = v(p_2) = 1$. Por outro lado, de $v(p_1 \to \bot) = 1$ resulta $v(p_1) = 0$. Temos, então, uma contradição. Logo não existe qualquer valoração que satisfaça Γ_3.

Alternativamente podemos analisar se um conjunto de fórmulas é semanticamente consistente recorrendo a uma tabela. Relativamente ao conjunto Γ_3 temos

p_1	p_2	$\bot$	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \to \bot$
1	1	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

Como é possível verificar não há qualquer linha na tabela em que as duas fórmulas de Γ_3 sejam simultaneamente verdadeiras, o que confirma a conclusão a que já tínhamos chegado - o conjunto Γ_3 é semanticamente inconsistente.

Proposição 2.32. *Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas tais que $\Gamma \subseteq \Delta$. Então são válidas as seguintes proposições:*

1. *Se Δ é consistente, então Γ é consistente.*
2. *Se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.*

Dem.: Exercício. ■

Definição 2.33. *Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diz-se que a fórmula φ é uma* **consequência semântica** *do conjunto de fórmulas Γ quando, para toda a valoração v, se v satisfaz Γ, então $v(\varphi) = 1$.*

Exemplo 2.18.

1. *A fórmula $\varphi = p_4 \vee \neg p_2$ não é consequência semântica do conjunto de fórmulas $\Gamma = \{p_1 \to (p_2 \vee p_3), p_1 \wedge p_0, p_3 \leftrightarrow p_4\}$. De facto, é simples de verificar que uma valoração v tal que*

$$v(p_0) = v(p_1) = v(p_2) = 1 \text{ e } v(p_3) = v(p_4) = 0$$

satisfaz o conjunto Γ, mas $v(\varphi) = 0$.

2. *Sejam* $\Gamma = \{p_1 \vee p_2, p_2 \to (p_3 \wedge p_1), p_1 \leftrightarrow p_3\}$ *e* $\varphi = p_3 \vee \neg p_2$. *Da tabela de verdade seguinte*

p_1	p_2	p_3	$p_1 \vee p_2$	$p_2 \to (p_3 \wedge p_1)$	$p_1 \leftrightarrow p_3$	$p_3 \vee \neg p_2$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

conclui-se que a fórmula φ *é consequência semântica de* Γ *pois, para toda a valoração que satisfaz simultaneamente as três fórmulas do conjunto* Γ *(linhas 1 e 3), a fórmula* φ *tem o valor lógico verdadeiro.*

3. *Dadas fórmulas* φ *e* ψ, $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$, *pois, para qualquer valoração* v, *se* $v(\varphi) = 1$ *e* $v(\varphi \to \psi) = 1$, *então* $v(\psi) = 1$.

Notação: Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{F}^{CP}$, onde $n \in \mathbb{N}$, e $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Para simplificação de escrita, escrevemos

a) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ para representar $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$;

b) $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ para representar $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$;

c) $\Gamma, \Delta \models$ para representar $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Proposição 2.34. *Para toda a fórmula* φ,

$$\models \varphi \text{ se e só se } \emptyset \models \varphi.$$

Dem.:

$\Rightarrow$) Suponhamos que $\models \varphi$. Então, para toda a valoração v, $v(\varphi) = 1$; em particular, para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$, $v(\varphi) = 1$. Logo $\emptyset \models \varphi$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que $\emptyset \models \varphi$. Então, para toda a valoração v que satisfaça o conjunto vazio, tem-se $v(\varphi) = 1$. Ora, como toda a valoração satisfaz o conjunto vazio vem que $v(\varphi) = 1$, para toda a valoração v. Logo $\models \varphi$. ■

Proposição 2.35. *Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e sejam $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Então*

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

d) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$.

e) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$; em particular, $v(\varphi) = 1$. Logo $\Gamma \models \varphi$.

b), c) Exercício.

d) ($\Rightarrow$) Admitindo que $\Gamma \models \varphi \to \psi$, prova-se que $\Gamma, \varphi \models \psi$. De facto, se v é uma valoração que satisfaz $\Gamma \cup \varphi$, então v satisfaz Γ e $v(\varphi) = 1$. Logo, como v satisfaz Γ e $\Gamma \models \varphi \to \psi$, segue que $v(\varphi \to \psi) = 1$. Desta última igualdade e de $v(\varphi) = 1$ resulta $v(\psi) = 1$. Assim, $\Gamma, \varphi \models \psi$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma, \varphi \models \psi$. Pretendemos mostrar que $\Gamma \models \varphi \to \psi$, ou seja, que toda a valoração que satisfaz Γ também satisfaz $\varphi \to \psi$. Admitamos, então, que v é uma valoração que satisfaz Γ. Para provar que $v(\varphi \to \psi) = 1$, temos de mostrar que se $v(\varphi) = 1$, então $v(\psi) = 1$. Com efeito, se $v(\varphi) = 1$, então v satisfaz $\Gamma \cup \varphi$ e, da hipótese $\Gamma, \varphi \models \psi$, segue que $v(\psi) = 1$. Assim, para toda a valoração v que satisfaça Γ, tem-se $v(\varphi \to \psi) = 1$ e, portanto, $\Gamma \models \varphi \to \psi$.

e) Exercício. ■

Proposição 2.36. *Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{F}^{CP}$, onde $n \in \mathbb{N}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$;

ii) $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \models \varphi$;

iii) $\models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \varphi$;

Dem.: Da alínea d) da proposição anterior resulta a equivalência entre ii) e iii). A equivalência entre i) e ii) pode ser demonstrada por indução em n. A equivalência entre i) e iii) segue, então, por transitividade. ■

Proposição 2.37 (Redução ao absurdo)**.** *Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Então*

$$\Gamma \models \varphi \text{ se e só se } \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ é semanticamente inconsistente .}$$

Dem.: Suponhamos que $\Gamma \models \varphi$. Então, para toda a valoração v que satisfaça Γ, $v(\varphi) = 1$, donde $v(\neg\varphi) = 0$. Logo não há qualquer valoração que satisfaça simultaneamente Γ e $\neg\varphi$. Logo $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente. Então, para toda a valoração v que satisfaz Γ, temos necessariamente $v(\varphi) = 1$ (caso contrário teríamos $v(\neg\varphi) = 1$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente). Logo $\Gamma \models \varphi$. ■

2.1.3 Sistema Formal de Dedução Natural

Um dos objectivos da Lógica é a formalização do raciocínio e definir processos que permitam a construção sistemática de argumentos rigorosos e válidos. Tal levou a que nos diversos sistemas lógicos estudados fossem definidos conjuntos de regras que permitem derivar uma conclusão a partir de um conjunto de premissas independentemente da semântica que lhes está associada.

De seguida apresentamos um sistema de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional (**DNP**) o qual compreende:

- uma lista finita de regras de inferência, que correspondem a formas simples e frequentes da argumentação;
- um conceito de derivação ou dedução que corresponde à noção intuitiva de demonstração matemática.

Para cada conectivo, indicaremos regras de **introdução** e regras de **eliminação**. As primeiras dizem-nos a partir de que premissas se pode inferir uma conclusão na qual ocorre um determinado conectivo, as segundas dizem que conclusão podemos tirar a partir de premissas nas quais ocorre um determinado conectivo.

Definição 2.38. *As* **regras de inferência** *do sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional são as seguintes:*

Regras de Introdução | *Regras de eliminação*

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge I \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \wedge_1 E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge_2 E$$

$$\frac{\begin{matrix}\cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ \to I \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ \to E$$

Regras de Introdução *Regras de eliminação*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ \neg I \qquad\qquad \dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ \neg E$$

$$\dfrac{\varphi}{\varphi\vee\psi}\ \vee_1 I \qquad \dfrac{\psi}{\varphi\vee\psi}\ \vee_2 I \qquad\qquad \dfrac{\varphi\vee\psi \quad \begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \sigma\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\ \vee E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi\leftrightarrow\psi}\ \leftrightarrow I \qquad\qquad \dfrac{\varphi \quad \varphi\leftrightarrow\psi}{\psi}\ \leftrightarrow_1 E \qquad \dfrac{\psi \quad \varphi\leftrightarrow\psi}{\varphi}\ \leftrightarrow_2 E$$

$$\dfrac{\bot}{\varphi}\ \bot \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ RAA$$

Aos itens acima do traço de inferência dá-se a designação de **premissas** da regra e à fórmula abaixo do traço de inferência dá-se a designação de **conclusão** da regra de inferência. Em algumas das regras, as premissas são elas próprias derivações (noção apresentada mais à frente), que aqui aparecem representadas com as notações

$$\begin{array}{c}\rho\\ \vdots\\ \theta\end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c}\cancel{\rho}\\ \vdots\\ \theta\end{array}$$

as quais representam árvores de fórmulas anotadas construídas a partir das regras de inferência, de raiz θ, nas quais ρ aparece como folha, zero ou mais vezes, sem qualquer anotação (i.e. com anotação vazia) ou anotada com um corte, respectivamente.

Tal como já referimos antes, as regras de inferência correspondem a formas de argumentação válida que são frequentes no raciocínio. Algumas dessas regras correspondem mais propriamente a métodos de demonstração usuais em matemática.

As regras associadas ao conectivo $\wedge$ são evidentes: se tivermos φ e ψ, então podemos concluir $\varphi \wedge \psi$ e se tivermos $\varphi \wedge \psi$, então podemos concluir φ (ou ψ).

A regra $(\to E)$, conhecida por **modus ponens**, também é de aplicação muito frequente em demonstrações matemáticas; se admitirmos φ como hipótese e se φ implica ψ, então temos ψ.

A regra $(\to I)$ tem uma forma diferente e representa o conhecido método directo para demonstrar uma proposição condicional. Esta regra estabelece que se for possível demonstrar ψ assumindo (temporariamente) φ como hipótese, então podemos inferir a conclusão $\varphi \to \psi$. Note-se que nesta regra a hipótese φ aparece com um corte e diz-se que foi *cancelada*; o cancelamento não é obrigatório, mas é preferível efectuá-lo sempre que as hipóteses passam a ser desnecessárias - neste caso, a hipótese φ passa a estar incluída na própria conclusão $\varphi \to \psi$ e, portanto, torna-se informação supérflua (a dedução de $\varphi \to \psi$ pode, no entanto, estar dependente de outras hipótese iniciais).

A regra $(\perp)$ (regra do absurdo) expressa o facto de que a partir de um absurdo podemos concluir seja o que for.

A regra $(\neg E)$ é evidente: se tivermos φ e a sua negação, então temos uma contradição.

A regra $(\neg I)$ estabelece que se ao assumirmos φ chegamos a uma contradição, então é porque não é possível ter φ, ou seja, tem-se $\neg\varphi$.

A regra de redução ao absurdo (RAA) formaliza o conhecido método de prova por contradição: se chegarmos a uma contradição a partir da hipótese $\neg\varphi$, então temos uma dedução de φ. Nesta regra a hipótese $\neg\varphi$ também aparece cancelada - neste caso efectua-se o cancelamento uma vez que a hipótese contradiz a conclusão. A conclusão φ pode, no entanto, depender de outras hipóteses adicionais (das quais $\neg\varphi$ possa depender).

As duas últimas regras são semelhantes. Se aplicarmos a regra $(\neg I)$ assumindo como hipótese $\neg\varphi$, obtém-se a conclusão $\neg\neg\varphi$. Uma vez que no Cálculo Proposicional $\neg\neg\varphi$ é logicamente equivalente a φ, poderíamos ser levados a pensar que a regra (RAA) é desnecessária, porém não é possível obter $\neg\neg\varphi \to \varphi$ sem esta regra.

As regras $(\vee_1 I)$ e $(\vee_2 I)$ são óbvias. A regra $(\vee E)$ corresponde ao método de demonstração por casos, em que, partindo de um hipótese disjuntiva $\varphi \vee \psi$ (por exemplo, n é par ou n é ímpar) se pretende demonstrar uma certa tese θ. A demonstração faz-se então por casos, procurando demonstrar θ no caso φ (no caso par, prova-se θ) e também no caso ψ (no caso ímpar, prova-se que também é possível concluir θ). No nosso cálculo, isto significa admitir (temporariamente) φ e ψ como hipóteses e em cada um dos casos derivar θ. A regra $(\vee E)$ estabelece que se for possível construir duas derivações, uma com hipótese φ e outra com hipótese ψ, ambas com conclusão θ, então ao assumirmos a hipótese disjuntiva $\varphi \vee \psi$ podemos concluir θ. Numa dedução em que se aplique esta regra, a conclusão final θ não vai depender das hipóteses auxiliares φ e ψ, mas somente das hipóteses de que $\varphi \vee \psi$ depende e de outras hipóteses que ocorram nas duas derivações de θ.

As regras $(\leftrightarrow_1 I)$, $(\leftrightarrow_2 I)$, $(\leftrightarrow E)$ são óbvias.

Definição 2.39. *O conjunto* $\mathcal{D}^{DNP}$ *das* **derivações** *de DNP (também designadas por* **deduções** *ou* **demonstrações***) é o conjunto de árvores de fórmulas anotadas gerado pelo seguinte conjunto de regras*

1. *Para todo* $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \in \mathcal{D}^{DNP}$.

2. *Se* $\begin{matrix} D \\ \varphi \end{matrix}\ ,\ \begin{matrix} D' \\ \psi \end{matrix} \in \mathcal{D}^{DNP}$, *então* $\dfrac{\begin{matrix} D & & D' \\ \varphi & & \psi \end{matrix}}{\varphi \wedge \psi}\wedge I \in \mathcal{D}^{DNP}$.

   Se $\begin{matrix} D \\ \varphi \wedge \psi \end{matrix} \in \mathcal{D}^{DNP}$, *então* $\dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi \wedge \psi \end{matrix}}{\varphi}\wedge E_1\ ,\ \dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi \wedge \psi \end{matrix}}{\psi}\wedge E_2 \in \mathcal{D}^{DNP}$.

3. *Se* $\begin{matrix} \varphi \\ D \\ \psi \end{matrix} \in \mathcal{D}^{DNP}$, *então* $\dfrac{\begin{matrix} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \to \psi} \to I \in \mathcal{D}^{DNP}$.

   Se $\begin{matrix} D \\ \varphi \end{matrix}\ ,\ \begin{matrix} D' \\ \varphi \to \psi \end{matrix} \in \mathcal{D}^{DNP}$, *então* $\dfrac{\begin{matrix} D & & D' \\ \varphi & & \varphi \to \psi \end{matrix}}{\psi} \to E \in \mathcal{D}^{DNP}$.

4. *Se* $\begin{matrix} D \\ \varphi \end{matrix} \in \mathcal{D}^{DNP}$, *então* $\dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi \end{matrix}}{\varphi \vee \psi}\vee I_1 \in \mathcal{D}^{DNP}$.

   Se $\begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix} \in \mathcal{D}^{DNP}$, *então* $\dfrac{\begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \vee \psi}\vee I_2 \in \mathcal{D}^{DNP}$.

   Se $\begin{matrix} \varphi \\ D \\ \sigma \end{matrix}\ ,\ \begin{matrix} \psi \\ D' \\ \sigma \end{matrix} \in \mathcal{D}^{DNP}$, *então* $\dfrac{\begin{matrix} & \cancel{\varphi} & \cancel{\psi} \\ \varphi \vee \psi & D & D' \\ & \sigma & \sigma \end{matrix}}{\sigma}\vee E \in \mathcal{D}^{DNP}$.

5. Se $\begin{matrix}\varphi\\ D\\ \psi\end{matrix}$, $\begin{matrix}\psi\\ D'\\ \varphi\end{matrix}$ $\in \mathcal{D}^{DNP}$, *então* $\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi} & \cancel{\psi}\\ D & D'\\ \psi & \varphi\end{matrix}}{\varphi\leftrightarrow\psi}\leftrightarrow I$ $\in \mathcal{D}^{DNP}$.

Se $\begin{matrix}D\\ \varphi\end{matrix}$, $\begin{matrix}D'\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{matrix}$ $\in \mathcal{D}^{DNP}$, *então* $\dfrac{\begin{matrix}D & D'\\ \varphi & \varphi\leftrightarrow\psi\end{matrix}}{\psi}\leftrightarrow_1 E$ $\in \mathcal{D}^{DNP}$.

Se $\begin{matrix}D\\ \psi\end{matrix}$, $\begin{matrix}D'\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{matrix}$ $\in \mathcal{D}^{DNP}$, *então* $\dfrac{\begin{matrix}D' & D'\\ \psi & \varphi\leftrightarrow\psi\end{matrix}}{\varphi}\leftrightarrow_2 E$ $\in \mathcal{D}^{DNP}$.

onde $\begin{matrix}D'\\ \theta\end{matrix}$, $\begin{matrix}\sigma\\ D'\\ \theta\end{matrix}$ *e* $\begin{matrix}\cancel{\sigma}\\ D'\\ \theta\end{matrix}$ *representam derivações D' de raiz θ e nos dois últimos casos, σ ocorre como folha, zero ou mais vezes, não anotada ou anotada com um corte, respectivamente.*

Numa derivação D:

- a raiz de D é chamada a **conclusão** de D;
- as folhas de D são chamadas as **hipóteses de** D;
- as folhas de D anotadas com um corte são chamadas as **hipóteses canceladas** de D e as hipóteses de D sem qualquer anotação são chamadas as **hipóteses não canceladas** (ou não cortadas) de D.

Vejamos alguns exemplos de derivações do sistema de Dedução Natural do Cálculo Proposicional.

Exemplo 2.19. *Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$.*

1) De acordo com a definição anterior, é uma derivação a árvore de fórmulas que a seguir se apresenta

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\psi}\wedge_2 E \qquad \psi\to(\varphi\to\sigma)}{\varphi\to\sigma}\to E}{\sigma}\to E}{(\varphi\wedge\psi)\to\sigma}\to I^{(1)}$$

2) A regra $(\rightarrow I)$ pode ser aplicada mesmo que não exista qualquer hipótese para cancelar. Assim

$$\frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I$$

é uma derivação correcta.

3) Tendo em conta a alínea 2), também é uma derivação de DNP a que a seguir se apresenta

$$\cfrac{\cfrac{\cancel{\psi}^{(1)}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I}{\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow I^{(1)}$$

4) Apresentamos, agora, um exemplo de uma derivação de DNP em que todas as hipóteses são canceladas

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\cancel{\varphi}^{(2)} \quad \neg\neg\cancel{\varphi}^{(1)}}{\bot} \neg E}{\varphi} RAA^{(2)}}{\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi} \rightarrow I^{(1)}$$

Os números naturais que aparecem a anotar instâncias *de regras de inferência e fórmulas* cortadas *(i.e., fórmulas anotadas com cortes) não fazem parte da definição de derivação e servem apenas para clarificar a leitura da árvore de derivação, estabelecendo uma correspondência, unívoca, entre as fórmulas cortadas e as regras que permitem efectuar esses cortes.*

Uma vez que $\mathcal{D}^{DNP}$ é um conjunto definido indutivamente, existe um teorema de indução estrutural que lhe está associado. A definição indutiva de $\mathcal{D}^{DNP}$ é determinista e, portanto, existe também um teorema de recursão estrutural para $\mathcal{D}^{DNP}$.

Definição 2.40. *Seja D uma derivação de $\mathcal{D}^{DNP}$. Aos sub-objectos de D dá-se a designação de* **subderivações** *de D.*

Definição 2.41. *Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$* e *$\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diz-se que a fórmula φ é* **derivável a partir de** *um conjunto Γ de fórmulas ou uma* **consequência sintáctica** *de Γ, e escreve-se $\Gamma \vdash \varphi$, quando existe uma derivação D de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ. Neste caso, diremos que D é uma* **derivação** *de φ* **a partir de** Γ*.*

Exemplo 2.20. *Dada uma fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, consideremos a seguinte derivação*

$$\cfrac{\varphi \quad \cfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\neg\varphi} \wedge_2 E}{\cfrac{\bot}{\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)} \neg I^{(1)}} \neg E$$

Uma vez que nesta derivação o conjunto de hipóteses por cancelar está contido em $\{\varphi\}$ e a sua conclusão é $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$, então D é uma derivação de $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ a partir de $\{\varphi\}$.

Definição 2.42. *Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Diz-se que φ é um* **teorema** *de DNP, e escreve-se $\vdash \varphi$, quando existe uma derivação D de φ a partir do conjunto vazio de hipóteses não canceladas. Neste caso, diz-se que D é uma* **derivação** *de φ.*

Exemplo 2.21. *Seja D a seguinte derivação de DNP*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\varphi}\,\wedge_1 E \qquad \cfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\neg\varphi}\,\wedge_2 E}{\perp}\,\neg E}{\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)}\,\neg I^{(1)}$$

Então:

- *o conjunto de hipóteses de D é $\{\varphi \wedge \neg\varphi\}$;*
- *o conjunto de hipóteses não canceladas de D é vazio;*
- *a conclusão de D é $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.*

Logo $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ é um teorema de DNP, sendo D uma derivação de $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Notação: Na representação de consequências sintácticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas. Assim, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, escreveremos:

a) $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
b) $\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
c) $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$.

Proposição 2.43. *Para toda a fórmula φ,*

$$\vdash \varphi \text{ se e só se } \emptyset \vdash \varphi.$$

Dem: Imediata a partir das definições.

Proposição 2.44. *Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas. Então:*

a) *se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$;*

b) *se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$;*

c) *se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Delta, \Gamma \vdash \psi$;*

d) *$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$;*

e) *se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.*

Dem:

a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. De acordo com a definição do conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$, $\varphi \in \mathcal{D}^{DNP}$, isto é, a árvore de fórmulas com um único nodo, anotado por φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$. Uma vez que $\{\varphi\}$ é um subconjunto de Γ, pois $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

b), **c)** Exercício.

d) Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Então existe uma derivação D de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. Logo

$$\dfrac{\varphi \quad \begin{array}{c} D \\ \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E$$

é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, uma vez que:

i) ψ é a conclusão desta derivação;

ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas desta derivação está contido em $\Gamma \cup \{\varphi\}$ (Δ é constituído por φ e pelas hipóteses não canceladas de D, que formam um subconjunto de Γ).

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, i.e., que existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então

$$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi}^{(1)} \\ D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I^{(1)},$$

é uma derivação de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ, pois:

i) $\varphi \to \psi$ é a conclusão desta derivação;

ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas desta derivação está contido em Γ, uma vez que é constituído por todas as hipóteses não canceladas de D (que é um subconjunto de Γ), excepto φ (tendo em conta que todas as ocorrências de φ (como folha) em D são canceladas, com a aplicação de $\to I$).

e) Exercício.

Lema 2.45. *Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Para toda a derivação D, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.*

Dem: Representemos por $P(D)$ a propriedade: "se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$". A prova desta propriedade é feita por indução estrutural em derivações.

a) Caso D seja uma derivação com um único nodo.

Se admitirmos que D é uma derivação de φ a partir de Γ, o único nodo de D é φ, pelo que o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e temos $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$. Logo $\varphi \in \Gamma$ e, pela alínea a) da Proposição 2.35, $\Gamma \models \varphi$. Então $P(D)$ é verdadeira.

b) Caso D seja uma derivação da forma

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge I,$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que $P(D_i)$ é verdadeira, para cada $i \in \{1,2\}$. Sendo D uma derivação de φ a partir de Γ, então $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ e, para cada $i \in \{1,2\}$, D_i é uma derivação de φ_i a partir de Γ. Logo, por hipótese de indução, $\Gamma \models \varphi_i$ e daqui conclui-se que $\Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ (exercício). Logo, se $P(D_1)$ e $P(D_2)$ são verdadeiras, $P(D)$ é também verdadeira.

(c) Caso D seja uma derivação da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi_1 \wedge \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1} \wedge_1 E.$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que $P(D_1)$ é verdadeira. Admitindo que D é uma derivação de φ a partir de Γ, temos $\varphi = \varphi_1$ e D_i é uma derivação de $\varphi_i \wedge \varphi_2$ a partir de Γ. Assim, por hipótese de indução, $\Gamma \models \varphi_i \wedge \varphi_2$ e daqui é possível concluir que $\Gamma \models \varphi_1$ (exercício). Provámos, então, que $P(D)$ é verdadeira sempre que $P(D_1)$ o seja.

O caso em que D é da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi_1 \wedge \varphi_2 \end{array}}{\varphi_2} \wedge_2 E$$

tem uma demonstração análoga.

b) Caso D seja uma derivação da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\psi} \\ D_1 \\ \sigma \end{array}}{\psi \to \sigma} \to I,$$

Suponhamos, por hipótese de indução que $P(D_1)$ é verdadeira. Se admitirmos que D é uma derivação de φ a partir de Γ, temos $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Assim, por hipótese de indução, $\Gamma, \psi \models \sigma$. Logo, pela alínea d) da Proposição 2.35, temos $\Gamma \models \psi \to \sigma$. Desta forma, $P(D)$ é verdadeira sempre que $P(D_1)$ o seja.

c) Caso D seja uma derivação da forma

$$\frac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \sigma & \sigma \to \psi \end{array}}{\psi} \to E,$$

Admitamos, por hipótese de indução que $P(D_1)$ e $P(D_2)$ são verdadeiras. Se D é uma derivação de φ a partir de Γ, temos $\varphi = \psi$, D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ e D_2 é uma derivação de $\sigma \to \psi$ a partir de Γ. Assim, por hipótese de indução, $\Gamma \models \sigma$ e $\Gamma \models \sigma \to \psi$. Então, pela alínea e) da Proposição 2.35, $\Gamma \models \psi$. Logo, admitindo que $P(D_1)$ e $P(P_2)$ são verdadeiras, prova-se que $P(D)$ é também verdadeira.

d) Os restantes casos, correspondentes às outras formas possíveis de D, são deixados como exercício.

Teorema 2.46 (Teorema da Correcção). *Para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo o conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,*

se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$.

Dem: Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi$ é válida, i.e., que existe uma derivação D de φ a partir de Γ. Então, aplicando o lema anterior, conclui-se de imediato o resultado pretendido.

Teorema 2.47 (Teorema da Completude). *Para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo o conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,*

se $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem: Consultar a bibliografia recomendada.

Teorema 2.48 (Teorema da Adequação). *Para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo o conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,*

$\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma \models \varphi$.

Dem: Imediata, a partir dos teoremas da Correcção e da Completude.

Corolário 2.49. *Para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,*

$\vdash \varphi$ se e só se $\models \varphi$.

Dem: Consequência imediata do Teorema da Adequação e das proposições 2.34 e 2.43.