Lógica EI
Engenharia Informática
2012-2013

Notas de apoio à UC

Cláudia Mendes Araújo, José Carlos Espírito Santo, Luís Pinto
Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

Capítulo 1

Indução e Recursão Estruturais

Exemplo 1: Seja C o menor[1] subconjunto de $\mathbb{N}_0$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $0 \in C$;
2. para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se $n \in C$, então $n + 2 \in C$.

Exemplos de elementos de C são: 0, 2, 4. De facto:

- 0 é um elemento de C, por C satisfazer 1.;
- sabendo que $0 \in C$, por C satisfazer 2., segue $0 + 2 = 2 \in C$;
- sabendo que $2 \in C$, por C satisfazer 2., segue $2 + 2 = 4 \in C$.

Adiante (e como é fácil de intuir), mostraremos que C é o conjunto dos números pares.

Esta forma de definir o conjunto C é um caso particular das chamadas *definições indutivas de conjuntos*, um mecanismo muito útil para definir conjuntos (e de uso frequente em Ciências de Computação), que apresentaremos de seguida.

Definição 2: Sejam X um conjunto e B um subconjunto não vazio de X. Seja O um conjunto de *operações em* X (*i.e.*, funções do tipo $X^n \longrightarrow X$, com $n \in \mathbb{N}$). Um subconjunto I de X tal que

i) $B \subseteq I$ e

ii) I é *fechado* para as operações de O (*i.e.*, as operações de O quando aplicadas a elementos de I produzem elementos de I ou, por outras palavras, para cada operação $f : X^n \longrightarrow X$ de O e para cada $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, $f(x_1, ..., x_n) \in I$)

é chamado um *conjunto indutivo, sobre* X, *de base* B e *conjunto de operações* O.

Observação 3: Admitamos as suposições da definição anterior. Então:

[1] Dizemos que um conjunto A é mais pequeno que um conjunto B quando $A \subseteq B$

i) X é um conjunto indutivo para qualquer O;

ii) B é um conjunto indutivo quando $O = \emptyset$.

Donde podemos concluir que, em geral, os subconjuntos indutivos de um conjunto, para uma dada base e um dado conjunto de operações, não são únicos, pois X e B são ambos conjuntos indutivos, sobre X, de base B e conjunto de operações $\emptyset$.

Definição 4: Sejam X um conjunto, B um subconjunto não vazio de X e O um conjunto de *operações* em X. O mais pequeno conjunto indutivo, sobre X, de base B e conjunto de operações O é chamado o *conjunto definido indutivamente* (ou *conjunto gerado*) por O em B. Chamaremos ao par (B, O) uma *definição indutiva sobre* o conjunto suporte X.

Exercício 5: Explicite X, B e O no caso do conjunto definido indutivamente no exemplo inicial.

Observação 6: Nas condições da definição anterior, demonstra-se que o conjunto G gerado por O em B é a interseção de todos os conjuntos indutivos, sobre X, de base B e conjunto de operações O. Alternativamente, demonstra-se que os elementos de G são exatamente os objetos que podem ser obtidos a partir de B, aplicando um número finito de operações de O.

Definição 7:

1. Chamaremos *alfabeto* a um conjunto de símbolos e chamaremos *letras* aos elementos de um alfabeto.

2. Dado um alfabeto A, chamaremos *palavra* (ou *string*) *sobre* o alfabeto A a uma sequência finita de letras de A. A notação A^* representará o conjunto de todas as palvras sobre A.

3. À sequência vazia de letras de A chamaremos *palavra vazia*, notando-a por ϵ.

4. Dado $n \in \mathbb{N}$ e dadas n letras a_1, a_2, ..., a_n de um alfabeto A (possivelmente com repetições), utilizamos a notação $a_1 a_2 ... a_n$ para representar a palavra sobre A cuja i-ésima letra (para $1 \leq i \leq n$) é a_i.

5. O *comprimento* de uma palavra é o comprimento da respetiva sequência de letras. (Em particular, a única palavra de comprimento 0 é ϵ.)

6. Duas palavras sobre um alfabeto dizem-se *iguais* quando têm o mesmo comprimento e coincidem letra a letra.

7. Dadas duas palavras u, v sobre um alfabeto, utilizamos a notação uv para representar a *concatenação* de u com v (*i.e.*, a concatenação das respetivas sequências de letras, colocando primeiro a sequência de letras relativa a u).

8. Uma *linguagem* sobre um alfabeto A é um conjunto de palavras sobre A (i.e. um subconjunto de A^*).

Exemplo 8: Seja A o alfabeto $\{0, s, +, \times, (,)\}$. Consideremos a linguagem E em A (E para *expressões*), definida indutivamente pelas seguintes *regras*:

1. $0 \in E$;

2. $e \in E \Rightarrow s(e) \in E$, para todo $e \in A^*$;

3. $e_1, e_2 \in E \Rightarrow (e_1 + e_2) \in E$, para todo $e_1, e_2 \in A^*$;

4. $e_1, e_2 \in E \Rightarrow (e_1 \times e_2) \in E$, para todo $e_1, e_2 \in A^*$.

Por exemplo, as palavras 0, $s(0)$, (0×0), $(s(0) + (0 \times 0))$ pertencem a E. De facto:

- $0 \in E$, pela regra 1.;
- de $0 \in E$, pela regra 2., segue $s(0)$;
- de $0 \in E$, pela regra 4., segue (0×0);
- de $s(0) \in E$ e (0×0), pela regra 3., segue $(s(0) + (0 \times 0))$.

Já as palavras sobre A $+(00)$ e $s0$ não pertencem a E. Note-se que nenhuma palavra de E tem a letra $+$ como primeira letra e nenhuma palavra de E, com exceção da palavra 0, tem 0 como última letra.

Definição 9: Seja (B, O) uma definição indutiva sobre um conjunto suporte X de um conjunto I e seja $e \in X$. Uma *sequência de formação* de e é uma sequência finita de elementos de X na qual:

1. o último elemento é e;

2. cada elemento pertence a B ou é imagem de elementos anteriores na sequência por uma operação de O.

Na representação de uma sequência de formação, habitualmente, usaremos vírgulas a separar os elementos da sequência.

Exemplo 10: Retomemos o exemplo anterior. A sequência de palavras

$$0, s(0), (0 \times 0), (s(0) + (0 \times 0))$$

é uma sequência de formação de $(s(0) + (0 \times 0))$. Porquê? Esta sequência de formação representa o essencial da justificação que apresentámos no Exemplo 8 para provar que $(s(0) + (0 \times 0))$ é uma palavra da linguagem E.

Proposição 11: Seja I um conjunto definido indutivamente, sobre um conjunto X, e seja $e \in X$. Então, e é um dos elementos de I se e somente se e admite uma sequência de formação.

Observação 12: Retomemos o Exemplo 10. A sequência de formação de $(s(0)+(0\times 0))$ que aí apresentamos não é única. Por exemplo,

$$0, (0 \times 0), s(0), (s(0) + (0 \times 0))$$

é também uma sequência de formação de $(s(0) + (0 \times 0))$. Porquê?

Na verdade, quando um objeto tem uma sequência de formação, esse objeto admite uma infinidade de sequências de formação. Por exemplo, no caso anterior, podemos aumentar o comprimento da sequência acima, tanto quanto queiramos, adicionando 0's no início da sequência.

Observação 13: A demonstração da Proposição 11, em particular, requer a ferramenta de *indução estrutural*, que estudaremos de seguida.

Teorema 14 (Princípio de indução estrutural associado a uma definição indutiva): Considere-se uma definição indutiva (B, O) de um conjunto I sobre X e seja $P(e)$ uma propriedade sobre $e \in I$. Se:

1. para todo $b \in B$, $P(b)$ é verdadeira;
2. para cada operação $f : X^n \to X$ de O, para todo $e_1, ..., e_n \in I$, se $P(e_1), \ldots P(e_n)$ são verdadeiras, então $P(f(e_1, \ldots, e_n))$ é verdadeira;

então para todo $e \in I$, $P(e)$ é verdadeira.

Dem.: Seja $Y = \{e \in I : P(e) \text{ é verdadeira}\}$. Então Y é um conjunto indutivo pois contém B e é fechado para as operações de O. Logo, como I é o mais pequeno dos conjuntos indutivos, $I \subseteq Y$. Como da definição de Y se tem também $Y \subseteq I$, segue que $Y = I$ e, portanto, para todo $e \in I$, $P(e)$ é verdadeira. □

Observação 15:

1. A cada definição indutiva de um conjunto I está associado um princípio de indução estrutural.

2. O usual Princípio de indução sobre os naturais é o princípio de indução estrutural associado à seguinte caracterização indutiva de $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}$ é o menor subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisfaz as seguintes condições:

   (a) $1 \in \mathbb{N}$;

   (b) para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \in \mathbb{N}$, então $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Exemplo 16: O Princípio de indução estrutural associado à definição indutiva do conjunto C do Exemplo 1 é o seguinte:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa a $n \in C$. Se:

1. $P(0)$;

2. se $P(k)$, então $P(k + 2)$, para todo o $k \in C$;

então $P(n)$ é verdadeira, para todo o $n \in C$.

Consideremos a propriedade $P(n)$, relativa a $n \in C$, dada por "n é par". Provemos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in C$. Pelo Princípio de indução estrutural para C, basta mostrarmos as duas condições acima descritas.

1. 0 é par. Logo, $P(0)$ é verdadeira.

2. Seja $k \in C$. Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira. Então, k é par. Logo, $k + 2$ é também par e, portanto, $P(k + 2)$ é verdadeira. Provámos, assim, a condição 2 do Princípio de indução estrutural para C.

Para mostar que C é efetivamente o conjunto dos números pares, falta ainda demonstrar que C contém o conjunto dos números pares. Para tal, pode provar-se, por indução em $\mathbb{N}_0$, que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $2n \in C$. (Exercício.)

Exemplo 17: O Princípio de indução estrutural associado à linguagem de expressões E do Exemplo 8 é o seguinte:

Seja $P(e)$ uma propriedade sobre $e \in E$. Se:

1. $P(0)$;

2. se $P(e)$, então $P(s(e))$, para todo $e \in E$;

3. se $P(e_1)$ e $P(e_2)$, então $P((e_1 + e_2))$, para todo $e_1, e_2 \in E$;

4. se $P(e_1)$ e $P(e_2)$, então $P((e_1 \times e_2))$, para todo $e_1, e_2 \in E$;

então $P(e)$, para todo $e \in E$.

Exemplo 18: Consideremos de novo a linguagem de expressões E do Exemplo 8 e consideremos a função $np : E \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada expressão de E faz corresponder o número de ocorrências de parênteses nessa expressão. Esta função pode ser definida por *recursão estrutural em E* do seguinte modo:

1. $np(0) = 0$;
2. para todo $e \in E$, $np(s(e)) = 2 + np(e)$;
3. para todo $e_1, e_2 \in E$, $np((e_1 + e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$;
4. para todo $e_1, e_2 \in E$, $np((e_1 \times e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$.

Notemos que, nos casos relativos às regras indutivas de E (os casos 2, 3 e 4), a caracterização da imagem é feita em termos da imagem da *subexpressão direta* (caso 2) ou das imagens das *subexpressões diretas* (casos 3 e 4).

Mostremos, agora, uma das propriedades das expressões de E relativa à função np. Designadamente, mostremos que, para todo $e \in E$, $np(e)$ é par. A prova será feita com recurso ao Princípio de indução estrutural para E, descrito no exemplo anterior.

Para cada $e \in E$, seja $P(e)$ a afirmação "$np(e)$ é par".

1. $P(0)$ é a afirmação "$np(0)$ é par". Ora, $np(0) = 0$, que, evidentemente, é par. Logo, $P(0)$ é verdadeira.
2. Seja $e \in E$ e suponhamos que $P(e)$ é válida (a hipótese de indução (H.I.)). Ou seja, suponhamos que $np(e)$ é par. Queremos provar que $P(s(e))$ é válida, i.e., que $np(s(e))$ é par. Ora, $np(s(e)) = 2 + np(e)$. Sendo $np(e)$ par, por H.I., e sendo a soma de dois pares um par, é óbvio que também $np(s(e))$ é par. Logo, podemos deduzir que $P(s(e))$ é válida.
3. Sejam $e_1, e_2 \in E$ e suponhamos que $P(e_1)$ e $P(e_2)$ são válidas (as hipóteses de indução (H.I.)). Ou seja, suponhamos que $np(e_1)$ é par, assim como $np(e_2)$. Queremos provar que $P((e_1 + e_2))$ é válida, i.e., que $np(e_1 + e_2)$ é par. Note-se que $np((e_1 + e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$. Por H.I., sabemos que $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Como a soma de pares é também par, é claro que $np((e_1 + e_2))$ é par. Assim, pode-se concluir que $P((e_1 + e_2))$ é válida.
4. Sejam $e_1, e_2 \in E$ e suponhamos que $P(e_1)$ e $P(e_2)$ são válidas (H.I.). Logo, $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Queremos mostrar que $P((e_1 \times e_2))$ é válida, ou seja, que $np(e_1 \times e_2)$ é par. Temos que $np((e_1 \times e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$. Ora, sabemos, por H.I., que $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Consequentemente, $np((e_1 \times e_2))$ é par. Assim, podemos afirmar que $P((e_1 \times e_2))$ é válida.

Mostramos assim que as condições 1, 2, 3 e 4 do Princípio de indução estrutural para E são válidas. Logo, por esse Princípio, conclui-se que $P(e)$ é verdadeira para todo o $e \in E$, ou seja, que $np(e)$ é par para todo o $e \in E$.

Exemplo 19: A definição indutiva do conjunto C do Exemplo 1 também permite a definição de funções por recursão estrutural. Por exemplo, existe uma e uma só função $f : C \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $f(0) = 0$;
2. para todo $n \in C$, $f(n+2) = 1 + f(n)$.

Acerca desta função, pode provar-se, com recurso ao Princípio de indução para C (ver Exemplo 1), que, para todo $n \in C$, $f(n) = \frac{n}{2}$. (Exercício.)

Observação 20: Ao contrário do que sucede em relação ao *Princípio de indução estrutural*, nem todas as definições indutivas têm um *Princípio de recursão estrutural* associado. Este princípio é válido apenas para as chamadas *definições indutivas deterministas*, classe na qual se inserem as definições indutivas de C e E, que vimos nos Exemplos 1 e 8, e que se caracterizam por permitirem *decomposições únicas* dos seus elementos.

Vejamos um exemplo de uma definição indutiva não-determinista e de problemas que surgiriam com um hipotético Princípio de recursão estrutural associado.

Tomemos a definição indutiva de C do Exemplo 1 e acrescentemos-lhe, agora, a regra:

3. para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se $n \in C$, então $2 \times n \in C$.

Simultaneamente, às condições que definem a função f, no exemplo anterior, acrescentemos, agora, a seguinte condição associada à regra que acabámos de introduzir:

3. para todo $n \in C$, $f(2n) = 2 + f(n)$.

O Princípio de recursão estrutural associado asseguraria que esta condição, juntamente com as condições 1 e 2 do exemplo anterior, definiriam uma função.

Mas, por exemplo, qual seria a imagem de 4 por f?

Por um lado, $f(4) = f(2 \times 2) = 2 + f(2) = 2 + f(2+0) = 2 + 1 + f(0) = 3 + 0 = 3$ (fazendo na primeira igualdade a *decomposição de* 4 *pela regra* 3 e usando a condição 3 na segunda igualdade).

Por outro lado, $f(4) = f(2+2) = 1+f(2) = 1+1 = 2$ (fazendo na primeira igualdade a *decomposição de* 4 *pela regra* 2 e usando a condição 2 na segunda igualdade).

Teríamos, portanto, duas imagens distintas para 4, o que é impossível. Consequentemente, o Princípio de recursão estrutural não pode ser válido para esta definição indutiva.

Capítulo 2

Cálculo Proposicional da Lógica Clássica

Notação 21: Normalmente, usaremos CP para abreviar Cálculo Proposicional da Lógica Clássica.

2.1 Sintaxe

Definição 22: O *alfabeto do CP* é notado por $\mathcal{A}^{CP}$ e é constituído pelos seguintes símbolos (letras):

a) $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ (com $n \in \mathbb{N}_0$), chamados *variáveis proposicionais*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}^{CP}$;

b) $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, chamados *conetivos proposicionais* (respetivamente, *absurdo*, *negação*, *conjunção*, *disjunção*, *implicação* e *equivalência*);

c) (,) (abrir e fechar parênteses), chamados *símbolos auxiliares*.

Exemplo 23: As sequências de símbolos $\perp p_{20})$ e (p_1) (ambas de comprimento 3) são palavras sobre $\mathcal{A}^{CP}$. A sequência de símbolos p_1 (de comprimento 1) é também uma palavra sobre $\mathcal{A}^{CP}$, sendo diferente da palavra (p_1).

Definição 24: O conjunto das *fórmulas do CP* é notado por $\mathcal{F}^{CP}$ e é a linguagem em $\mathcal{A}^{CP}$ definida indutivamente pelas seguintes regras:

a) $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$;

b) $p \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\varphi \in \left(\mathcal{A}^{CP}\right)^*$;

d) $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\varphi\Box\psi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \left(\mathcal{A}^{CP}\right)^*$.

Exemplo 25: A palavra $((\neg \perp) \wedge (p_6 \rightarrow p_0))$ é uma fórmula do CP. Por exemplo,

$$\perp, (\neg \perp), p_6, p_0, (p_6 \rightarrow p_0), ((\neg \perp) \wedge (p_6 \rightarrow p_0))$$

é uma sua sequência de formação.

As palavras $\perp p_{20})$ e (p_1) não são fórmulas do CP. De facto, nenhuma palavra sobre $\mathcal{A}^{CP}$ de comprimento 3 é uma fórmula do CP.

Exercício 26: Particularize o conceito de sequência de formação apresentado na Definição 9 ao caso da definição indutiva do conjunto $\mathcal{F}^{CP}$.

Notação 27: Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações são muitas vezes omitidos. Por exemplo, a palavra $(p_5 \wedge \neg p_0) \vee \perp$ será utilizada como uma representação da fórmula $((p_5 \wedge (\neg p_0)) \vee \perp)$. Por abuso de linguagem, chamaremos fórmulas a tais representações de fórmulas.

Teorema 28 (Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP): Seja $P(\varphi)$ uma propriedade sobre fórmulas $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Se:

a) $P(\perp)$;

b) $P(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \Box \psi_2)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dem.: Basta particularizar o Princípio de indução estrutural associado a uma definição indutiva ao caso da definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$. $\Box$

Observação 29: Uma aplicação do resultado anterior para demonstrar uma proposição é chamada uma *demonstração por indução estrutural em fórmulas do CP.*

Observação 30: A definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ é determinista e, por esta razão, admite um princípio de recursão estrutural. Uma aplicação deste princípio para definir uma função é chamada uma *definição por recursão estrutural em fórmulas do CP.*

Definição 31: A função $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$, que a cada fórmula faz corresponder o conjunto das variáveis proposicionais que nela ocorrem, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

- **a)** $var(\bot) = \emptyset$;
- **b)** $var(p) = \{p\}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;
- **c)** $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- **d)** $var(\varphi\Box\psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 32:

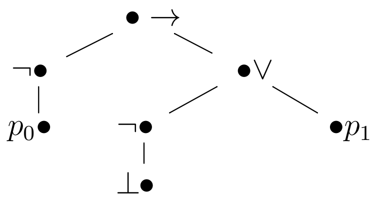
$$\begin{array}{rl}
 & var(p_1 \rightarrow (\neg p_2 \vee \bot)) \\
= & var(p_1) \cup var(\neg p_2 \vee \bot) \\
= & \{p_1\} \cup var(\neg p_2) \cup var(\bot) \\
= & \{p_1\} \cup var(p_2) \cup \emptyset \\
= & \{p_1\} \cup \{p_2\} \\
= & \{p_1, p_2\}.
\end{array}$$

Definição 33: A função as que a cada fórmula φ faz corresponder um elemento de $\textit{Árvores}(\mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\})$[1], ao qual chamamos a *árvore sintática* ou a *árvore de parsing* de φ, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função t.q.:

- **a)** $as(\varphi) = \quad \bullet\varphi \quad$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot\}$;
- **b)** $$as(\neg\varphi) = \begin{array}{c} \bullet\neg \\ | \\ as(\varphi) \end{array}$$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- **c)** $$as(\varphi\Box\psi) = \begin{array}{ccc} & \bullet\Box & \\ \diagup & & \diagdown \\ as(\varphi) & & as(\psi) \end{array}$$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

[1] Dado um conjunto X, a notação *Árvores*(X) representará o conjunto das árvores (finitas) cujos nodos estão anotados com um elemento de X. Observe que, na representação de árvores sintáticas, utilizamos uma orientação inversa àquela que é vulgarmente utilizada na representação da árvores, onde os *descendentes diretos* de um nodo são representados abaixo do nodo.

Exemplo 34: A árvore sintática da fórmula $\neg p_0 \to (\neg \perp \vee p_1)$ é:



Definição 35: A função $cl : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função t.q.:

a) $cl(\varphi) = 0$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$;

b) $cl(\neg\varphi) = 1 + cl(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $cl(\varphi \Box \psi) = 1 + \mathit{máximo}(cl(\varphi), cl(\psi))$[2], para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dada uma fórmula φ, chamaremos a $cl(\varphi)$ a *complexidade lógica* ou o *rank* de φ.

Exemplo 36:

$$
\begin{array}{rl}
 & cl(p_0 \to (\neg p_1 \vee \perp)) \\
= & 1 + \mathit{máximo}(cl(p_0), cl(\neg p_1 \vee \perp)) \\
= & 1 + \mathit{máximo}(0, 1 + \mathit{máximo}(cl(\neg p_1), cl(\perp))) \\
= & 1 + 1 + \mathit{máximo}(cl(\neg p_1), cl(\perp)) \\
= & 2 + \mathit{máximo}(1 + cl(p_1), 0) \\
= & 2 + 1 + cl(p_1) \\
= & 3 + 0 \\
= & 3
\end{array}
$$

Definição 37: A função $alt : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$, que a cada fórmula φ faz corresponder a altura da sua árvore sintática[3], é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função t.q.:

a) $alt(\varphi) = 1$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$;

b) $alt(\neg\varphi) = 1 + alt(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $alt(\varphi \Box \psi) = 1 + \mathit{máximo}(alt(\varphi), alt(\psi))$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dada uma fórmula φ, chamaremos a $alt(\varphi)$ a *altura* de φ.

[2] *máximo* denota a função que a cada par de números naturais faz corresponder o máximo destes números.

[3] Um *ramo* de uma árvore é uma sequência de nodos desde a sua *raiz* até uma das suas *folhas* e a *altura de uma árvore* é dada pelo comprimento máximo dos seus ramos.

Exemplo 38: Verifique que, para a fórmula φ do exemplo anterior, $alt(\varphi) - 1 = cl(\varphi)$. De facto, esta igualdade é válida para qualquer fórmula do CP, como se demonstra de seguida, com recurso ao Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP.

Seja $P(\varphi)$ a propriedade "$cl(\varphi) = alt(\varphi) - 1$", para $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

a) Seja $\psi \in \{\perp\} \cup \mathcal{V}^{CP}$. Então, aplicando as definições de cl e de alt, $cl(\psi) = 0$ e $alt(\psi) = 1$. Donde, $cl(\psi) = 0 = alt(\psi) - 1$. Assim, demonstramos que $P(\psi)$ é válida, para todo $\psi \in \{\perp\} \cup \mathcal{V}^{CP}$.

b) Seja $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$. (Queremos demonstrar que $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$.) Suponhamos que $P(\psi)$ é válida, *i.e.*, suponhamos que $cl(\psi) = alt(\psi) - 1$ (HI). Pelas definições de cl e alt, respetivamente, temos que i) $cl(\neg\psi) = 1 + cl(\psi)$ e ii) $alt(\neg\psi) = 1 + alt(\psi)$. Assim,

$$cl(\neg\psi) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{i)}}}{=} 1 + cl(\psi) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{HI}}}{=} 1 + alt(\psi) - 1 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ii)}}}{=} alt(\neg\psi) - 1,$$

Portanto, $cl(\neg\psi) = alt(\neg\psi) - 1$, pelo que $P(\neg\psi)$ é válida.

c) Sejam $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. (Queremos demonstrar que: $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \Box \psi_2)$.) Neste caso as hipóteses de indução são $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$, *i.e.*, $cl(\psi_1) = alt(\psi_1) - 1$ e $cl(\psi_2) = alt(\psi_2) - 1$ (HI). Então, i) $cl(\psi_1 \Box \psi_2) = 1 + máximo(cl(\psi_1), cl(\psi_2))$ e ii) $alt(\psi_1 \Box \psi_2) = 1 + máximo(alt(\psi_1), alt(\psi_2))$, aplicando as respetivas definições. Assim,

$$cl(\psi_1 \Box \psi_2) \overset{\substack{\text{i)} \\ \uparrow}}{=} 1 + máximo(cl(\psi_1), cl(\psi_2)) \overset{\substack{\text{HI} \\ \uparrow}}{=} 1 + máximo(alt(\psi_1) - 1, alt(\psi_2) - 1)$$

$$= 1 + máximo(alt(\psi_1), alt(\psi_2)) - 1 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ii)}}}{=} alt(\psi_1 \Box \psi_2) - 1.$$

Portanto, $cl(\psi_1 \Box \psi_2) = alt(\psi_1 \Box \psi_2) - 1$, pelo que $P(\psi_1 \Box \psi_2)$ é válida.

De **a)**, **b)** e **c)**, pelo Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP, $P(\varphi)$ é válida para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Definição 39: Sejam ψ uma fórmula e p uma variável proposicional. A função $[\psi/p] : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$, que a cada fórmula φ faz corresponder a fórmula notada por $\varphi[\psi/p]$, que resulta de φ por *substituição* das ocorrências de p por ψ, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função t.q.:

a) $\perp [\psi/p] = \perp$;

b) $p_i[\psi/p] = \begin{cases} \psi & \text{se } p_i = p \\ p_i & \text{se } p_i \neq p \end{cases}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

c) $(\neg\varphi_1)[\psi/p] = \neg\varphi_1[\psi/p]$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $(\varphi_1 \Box \varphi_2)[\psi/p] = \varphi_1[\psi/p] \Box \varphi_2[\psi/p]$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 40:

a)
$$\begin{array}{rl} & (\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1/p_2] \\ = & (\neg p_1)[p_0 \vee p_1/p_2] \rightarrow (p_2 \wedge \perp)[p_0 \vee p_1/p_2] \\ = & \neg p_1[p_0 \vee p_1/p_2] \rightarrow (p_2[p_0 \vee p_1/p_2] \wedge \perp [p_0 \vee p_1/p_2]) \\ = & \neg p_1 \rightarrow ((p_0 \vee p_1) \wedge \perp) \end{array}$$

b) Verifique que $(\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1/p_0] = (\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))$. Esta igualdade corresponde a um caso particular da proposição que se segue (observe que $p_0 \notin var(\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))$).

Proposição 41: Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $p \in \mathcal{V}^{CP}$, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$.

Dem.: Por indução estrutural em φ. (Exercício.) $\Box$

Definição 42: A função $subf : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}^{CP})$ é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $subf(\varphi) = \{\varphi\}$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$;

b) $subf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup subf(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $subf(\varphi \Box \psi) = \{\varphi \Box \psi\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dadas fórmulas φ e ψ, diremos que φ é uma *subfórmula* de ψ quando $\varphi \in subf(\psi)$.

Exemplo 43:
$$\begin{array}{rl} & subf(\neg p_1 \rightarrow p_2) \\ = & \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup subf(\neg p_1) \cup subf(p_2) \\ = & \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup subf(p_1) \cup \{p_2\} \\ = & \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup \{p_1\} \cup \{p_2\} \\ = & \{\neg p_1 \rightarrow p_2, \neg p_1, p_1, p_2\}. \end{array}$$

Proposição 44: Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, φ é uma subfórmula de ψ se e só se uma das seguintes condições é satisfeita:

a) $\psi = \varphi$;

b) existe $\psi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \neg\psi_1$ e φ é uma subfórmula de ψ_1;

c) existe um conetivo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e existem fórmulas $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \psi_1 \Box \psi_2$ e φ é uma subfórmula de ψ_1 ou de ψ_2.

Dem.: Por análise de casos em ψ.

Caso $\psi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot\}$. Então,

$$\begin{array}{ll} & \varphi \text{ subfórmula de } \psi \\ \text{sse} & \varphi \in subf(\psi) \\ \text{sse} & \varphi \in \{\psi\} \\ \text{sse} & \varphi = \psi. \end{array}$$

Assim, supondo que φ é uma subfórmula de ψ, teremos que a condição **a)** é satisfeita. Reciprocamente, uma vez que $\psi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot\}$, as condições **b)** e **c)** não são satisfeitas, pelo que teremos que ter $\varphi = \psi$, donde, pela sequência de equivalências anterior, segue que φ é uma subfórmula de ψ.

Restantes casos (caso $\psi = \neg\psi_1$, para algum $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, e caso $\psi = \psi_1 \Box \psi_2$, para algum $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para alguns $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$): exercício. $\Box$

2.2 Semântica

Definição 45: Os *valores lógicos* do CP são 1 e 0. Estes valores são habitualmente chamados *verdadeiro* e *falso*, respetivamente, sendo também notados por **V** e **F**, respetivamente.

Definição 46: Uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ é uma *valoração* quando satisfaz as seguintes condições:

a) $v(\bot) = 0$;

b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $v(\varphi \wedge \psi) = \mathit{mínimo}(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $v(\varphi \vee \psi) = \mathit{máximo}(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

e) $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Proposição 47: Sejam v uma valoração e φ, ψ fórmulas do CP. Então,

1. se $v(\varphi) = 1$, então $v(\neg\varphi) = 0$ e se $v(\varphi) = 0$, então $v(\neg\varphi) = 1$;

2. se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 1$, $v(\varphi \vee \psi) = 1$, $v(\varphi \to \psi) = 1$ e $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$;

3. se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 0$, $v(\varphi \vee \psi) = 1$, $v(\varphi \to \psi) = 0$ e $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0$;

4. se $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 0$, $v(\varphi \vee \psi) = 1$, $v(\varphi \to \psi) = 1$ e $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0$;

5. se $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = 0$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 0$, $v(\varphi \vee \psi) = 0$, $v(\varphi \to \psi) = 1$ e $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$.

Dem.: Imediata, a partir da definição de valoração. □

Proposição 48: Seja $f : \mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ uma função. Então, existe uma e uma só valoração v t.q. $v(p) = f(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$.

Dem.: Consequência imediata do Princípio de recursão estrutural para fórmulas do CP. □

Definição 49: O *valor lógico de uma fórmula* φ *para uma valoração* v *é* $v(\varphi)$.

Exemplo 50: Sejam v_1 a única valoração t.q. $v_1(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$, e v_2 a única valoração t.q.

$$v_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{p_0, p_2\} \\ 0 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_2\} \end{cases} .$$

Sejam ainda $\varphi = (p_1 \vee p_2) \to (p_1 \wedge p_2)$ e $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \to \perp)$. Então:

a) por definição de valoração,

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_1 \vee p_2) = 1 \text{ e } v_1(p_1 \wedge p_2) = 0 \\ 1 & \text{se } v_1(p_1 \vee p_2) = 0 \text{ ou } v_1(p_1 \wedge p_2) = 1 \end{cases} .$$

Assim, como $v_1(p_1 \vee p_2) = \textit{máximo}(v_1(p_1), v_1(p_2)) = \textit{máximo}(0, 0) = 0$, segue que $v_1(\varphi) = 1$.

(Exercício: verifique que $v_2(\varphi) = 0$.)

b) por definição de valoração,

$$v_1(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_1(\neg p_1) = v_1(p_1 \to \perp) \\ 0 & \text{se } v_1(\neg p_1) \neq v_1(p_1 \to \perp) \end{cases} .$$

Assim, como $v_1(\neg p_1) = 1 - v_1(p_1) = 1$ e $v_1(p_1 \to \perp) = 1$, segue que $v_1(\psi) = 1$.

(Exercício: verifique que $v_2(\psi) = 1$; em particular, observe que v_2 e v_1 atribuem o mesmo valor lógico à única variável proposicional que ocorre em ψ.)

Proposição 51: Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula do CP. Se, para todo $p \in var(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.
Dem.: Por indução estrutural em fórmulas do CP.
Seja $P(\varphi)$ a propriedade: para todo $p \in var(\varphi), v_1(p) = v_2(p) \Rightarrow v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

a) $P(\perp)$ é verdadeira, pois $v_1(\perp) = 0 = v_2(\perp)$, por definição de valoração.

b) Suponhamos que p' é uma variável proposicional e que, para todo $p \in var(p')$, $v_1(p) = v_2(p)$. Assim, como $p' \in var(p')$, temos $v_1(p') = v_2(p')$. Deste modo, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

c) Mostremos que $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ implicam $P(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.

Suponhamos que, para todo $p \in var(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $v_1(p) = v_2(p)$. Então, como $var(\varphi_i) \subseteq var(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $v_1(p) = v_2(p)$, para todo $p \in var(\varphi_i)$ $(i \in \{1, 2\})$ e, aplicando as hipóteses de indução $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$, segue que $v_1(\varphi_i) = v_2(\varphi_i)$ $(i \in \{1, 2\})$.

Assim, $v_1(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \mathit{mínimo}(v_1(\varphi_1), v_1(\varphi_2)) = \mathit{mínimo}(v_2(\varphi_1), v_2(\varphi_2)) = v_2(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, e, portanto, $P(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ é verdadeira.

d) Exercício: demonstrar as restantes condições necessárias à aplicação do Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP. □

Definição 52:

1. Uma fórmula φ é uma *tautologia* quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 1$.

2. Uma fórmula φ é uma *contradição* quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 0$.

Notação 53: A notação $\models \varphi$ significará que φ é uma tautologia e a notação $\not\models \varphi$ significará que φ não é uma tautologia.

Exemplo 54:

1. A fórmula $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \to \perp)$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, dada uma valoração v arbitrária, sabemos que $v(p_1) = 0$ ou $v(p_1) = 1$, e:

   (a) caso $v(p_1) = 0$, então $v(\neg p_1) = 1$ e $v(p_1 \to \perp) = 1$, donde $v(\psi) = 1$.

   (b) caso $v(p_1) = 1$, então $v(\neg p_1) = 0$ e $v(p_1 \to \perp) = 0$, donde $v(\psi) = 1$.

2. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \wedge \neg\varphi$ é uma contradição. De facto, dada uma valoração v arbitrária, sabemos que $v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = 1$, e:

   (a) caso $v(\varphi) = 0$, então $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = \textit{mínimo}(0, v(\neg\varphi)) = 0$.

   (b) caso $v(\varphi) = 1$, então $v(\neg\varphi) = 0$ e $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = \textit{mínimo}(v(\varphi), 0) = 0$.

3. As fórmulas $p_0, \neg p_0, p_0 \vee p_1, p_0 \wedge p_1, p_0 \rightarrow p_1, p_0 \leftrightarrow p_1$ não são tautologias nem são contradições. (Porquê?)

Proposição 55: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

1. φ é tautologia se e só se $\neg\varphi$ é contradição;

2. φ é contradição se e só se $\neg\varphi$ é tautologia.

Dem.: Exercício. □

Observação 56: Sabendo que φ não é uma tautologia, não podemos concluir que φ é uma contradição e, analogamente, sabendo que φ não é uma contradição, não podemos concluir que φ é uma tautologia. Tenha-se em atenção que existem fórmulas que não são tautologias, nem são contradições (como vimos no exemplo anterior).

Observação 57: Pela Proposição 51, para decidir se uma fórmula φ é uma tautologia, basta calcular o valor lógico de φ para $2^{\#var(\varphi)}$ valorações (o número de atribuições, possíveis, às variáveis proposicionais de φ), o que pode ser descrito através de uma *tabela de verdade*, como se segue. Introduzimos: uma coluna para cada variável proposicional de φ; uma coluna para φ; e colunas (auxiliares) para cada uma das restantes subfórmulas de φ. Introduzimos linhas para cada uma das atribuições, possíveis, de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ (*i.e.*, sequências de 0's e 1's de comprimento igual ao número de variáveis proposicionais em φ). Preenchemos as colunas respeitantes às variáveis proposicionais com essas atribuições. Nas restantes posições pos_{ij} da tabela, escrevemos o valor lógico da fórmula respeitante à coluna j, para uma valoração que satisfaz as atribuições às variáveis proposicionais na linha i.

Exemplo 58: Seja φ a fórmula $(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$. Da tabela de verdade para φ, apresentada de seguida, podemos concluir que φ é uma tautologia, uma vez que φ assume o valor lógico 1, para todas as possíveis atribuições de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ.

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$\neg p_1 \rightarrow \neg p_2$	$p_2 \rightarrow p_1$	$(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Tabela de verdade de $(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$.

Teorema 59 (Generalização): Sejam p uma variável proposicional e sejam φ e ψ fórmulas do CP. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p]$ é também uma tautologia.

Dem.: Qualquer que seja a valoração v, demonstra-se, por indução estrutural na fórmula φ, que a valoração v' definida, a partir de v e de ψ, do seguinte modo

$$v'(p') = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } \ p' = p \\ \\ v(p') & \text{se } \ p' \in \mathcal{V}^{CP} - \{p\} \end{cases}$$

é tal que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p])$. Portanto, se φ é uma tautologia, $v'(\varphi) = 1$ e, pela igualdade anterior, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$. Assim, qualquer que seja a valoração v, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$, *i.e.*, $\varphi[\psi/p]$ é uma tautologia. $\square$

Exemplo 60: A fórmula $p_0 \vee \neg p_0$ é uma tautologia. Logo, para qualquer fórmula ψ, a fórmula $(p_0 \vee \neg p_0)[\psi/p_0] = \psi \vee \neg\psi$ é ainda uma tautologia.

Definição 61: Uma fórmula φ diz-se *logicamente equivalente* a uma fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo 62: Para toda a fórmula φ,$\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \to\perp)$. A demonstração deste resultado pode ser sintetizada numa *tabela de verdade*, como se segue:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \to\perp$	$\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to\perp)$
1	0	0	1
0	1	1	1

Tabela de verdade de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to\perp)$.

Na primeira linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to\perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 1. Na segunda linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to\perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 0.

Proposição 63: A relação de equivalência lógica satisfaz as seguintes propriedades:

1. para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ (*reflexividade*);
2. para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\psi \Leftrightarrow \varphi$ (*simetria*);
3. para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e $\psi \Leftrightarrow \sigma$, então $\varphi \Leftrightarrow \sigma$ (*transitividade*).

Dem.: Para mostrar 1, temos que mostar que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a fórmula $\varphi \leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia. De facto, dado $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = v(\varphi)$, donde, pela definição de valoração, $v(\varphi \leftrightarrow \varphi) = 1$, e, consequentemente, $\varphi \leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia. (Exercício: mostrar 2 e 3.) $\square$

Corolário 64: A relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}^{CP}$.

Dem.: Imediata, a partir da proposição anterior. □

Proposição 65: As seguintes equivalências lógicas são válidas.

$$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma) \qquad (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$$

(*associatividade*)

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi \qquad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$$

(*comutatitvidade*)

$$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$$

(*idempotência*)

$$\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \neg \perp \Leftrightarrow \varphi$$

(*elemento neutro*)

$$\varphi \vee \neg \perp \Leftrightarrow \neg \perp \qquad \varphi \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$$

(*elemento absorvente*)

$$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \qquad \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$$

(*distributividade*)

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \qquad \neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

(*leis de De Morgan*)

$$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$$

(*lei da dupla negação*)

$$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \qquad \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \rightarrow \psi \qquad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \perp \qquad \perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$$

(*expressão de um conetivo em termos de outros conetivos*)

Dem.: Exercício. □

Notação 66: Uma vez que a conjunção é uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ (com $n \in \mathbb{N}$) para representar qualquer associação, através da conjunção, das fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ duas a duas. Analogamente, e uma vez que a disjunção é tambem uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$ para representar qualquer associação, através da disjunção, das fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ duas a duas. Em ambos os casos, quando $n = 1$, as notações anteriores representam simplesmente a fórmula φ_1.

Teorema 67 (Substituição): Sejam $p \in \mathcal{V}^{CP}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$. Então, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ se e só se para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Dem.:

i) Suponhamos que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$. Então, em particular, teremos que $p[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p[\varphi_2/p]$, *i.e.*, por definição de substituição, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$.

ii) Suponhamos agora que $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$. Vamos demonstrar, por indução estrutural em fórmulas do CP, que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\psi)$, onde $P(\psi)$ é a propriedade: $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

a) Por definição de substituição, $\perp [\varphi_1/p] = \perp = \perp [\varphi_2/p]$. Assim, como a relação $\Leftrightarrow$ é reflexiva, $\perp \Leftrightarrow \perp$, ou equivalentemente $\perp [\varphi_1/p] \Leftrightarrow \perp [\varphi_2/p]$, e, portanto, $P(\perp)$ é verdadeira.

b) Seja $p' \in \mathcal{V}^{CP}$. Consideremos dois casos.

b.1) Caso $p' = p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = \varphi_1$ e $p'[\varphi_2/p] = \varphi_2$. Assim, como por hipótese $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, segue que $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$,

b.2) Caso $p' \neq p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = p'$ e $p'[\varphi_2/p] = p'$. Assim, tal como em a), por $\Leftrightarrow$ ser reflexiva, $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$.

Assim, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

c) Seja ψ_1 uma fórmula e suponhamos $P(\psi_1)$ (H.I.), tendo em vista mostrar que $P(\neg\psi_1)$ é verdadeira, ou, dito por outras palavras, pretende-se mostar que $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_1)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.
Seja v uma valoração. Então:

$$\begin{array}{rll} & v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p]) & \\ = & v(\neg\psi_1[\varphi_1/p]) & \text{(definição de substituição)} \\ = & 1 - v(\psi_1[\varphi_1/p]) & \text{(definição de valoração)} \\ = & 1 - v(\psi_1[\varphi_2/p]) & (*) \\ = & v(\neg\psi_1[\varphi_2/p]) & \text{(definição de valoração)} \\ = & v((\neg\psi_1)[\varphi_2/p]) & \text{(definição de substituição).} \end{array}$$

onde a igualdade assinalada com (*) é consequência da HI, pois da HI, por definição de $\Leftrightarrow$, segue que $\psi_1[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi_1[\varphi_2/p]$ é uma tautologia, donde, para toda a valoração v, $v(\psi_1[\varphi_1/p]) = v(\psi_1[\varphi_2/p])$.

Assim sendo, $v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]) = 1$ e, portanto, a fórmula $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.

d) Para completar a prova, falta mostar que, para $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$, se $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$, então $P(\psi_1 \Box \psi_2)$. (Exercício.)

$\Box$

Exemplo 68: Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

$$\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg\neg\varphi \vee \neg\psi \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \varphi \vee \neg\psi.$$

Justificações

(1) Lei de De Morgan.
(2) Dada uma variável proposicional $p \notin var(\psi)$ (que existe sempre, pois o número de variáveis proposicionais que ocorrem em φ é finito), pelo Teorema da Substituição, como $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] \Leftrightarrow (p \vee \psi)[\varphi/p]$ e assim, uma vez que $(p\vee\psi)[\neg\neg\varphi/p] = \neg\neg\varphi\vee\psi$ e $(p\vee\psi)[\varphi/p] = \varphi \vee \psi$, segue-se que $\neg\neg\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \varphi \vee \psi$.

Donde, como $\Leftrightarrow$ é transitiva, podemos concluir a equivalência lógica entre a primeira fórmula e a última fórmula.

Definição 69: Seja $X \subseteq \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ um conjunto de conetivos. X diz-se *completo* quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e todos os conetivos de ψ estão em X.

Proposição 70: Os conjuntos de conetivos $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \perp\}$, $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são completos.

Dem.: Vamos demonstrar que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos. (A demonstração de que os outros conjuntos de conetivos mencionados são completos é deixada como exercício.) Para tal, comecemos por definir, por recursão estrutural em fórmulas, a função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ como a única função t.q.:

a) $f(\perp) = \neg(p_0 \rightarrow p_0)$;

b) $f(p) = p$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

e) $f(\varphi \vee \psi) = \neg f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

f) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(f(\varphi) \rightarrow \neg f(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

g) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg((f(\varphi) \rightarrow f(\psi)) \rightarrow \neg(f(\psi) \rightarrow f(\varphi)))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Lema: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e os conetivos de $f(\varphi)$ estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.
Dem.: Por indução estrutural em φ. Exercício.

Do lema anterior concluimos de imediato que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos, pois, para toda a fórmula φ, existe uma fórmula ψ —a fórmula $f(\varphi)$— tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e os conetivos de ψ estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$. $\square$

Exemplo 71: Da demonstração da proposição anterior, podemos concluir que a fórmula $f((\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow \perp) = \neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \rightarrow \neg(p_0 \rightarrow p_0)$ é logicamente equivalente a $(\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow \perp$ e os seus conetivos estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.

Definição 72: As variáveis proposicionais e as negações de variáveis proposicionais são chamadas *literais*.

Definição 73: Fórmulas do CP das formas

i) $(l_{11} \vee ... \vee l_{1m_1}) \wedge ... \wedge (l_{n1} \vee ... \vee l_{nm_n})$

ii) $(l_{11} \wedge ... \wedge l_{1m_1}) \vee ... \vee (l_{n1} \wedge ... \wedge l_{nm_n})$

em que os l_{ij} são literais e n, bem como os m_i, pertencem a $\mathbb{N}$, serão designadas por *formas normais conjuntivas* (FNC) e *formas normais disjuntivas* (FND), respetivamente.

Exemplo 74:

a) Todo o literal l é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e disjuntiva (na definição de formas normais, basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $l_{11} = l$).

b) A fórmula $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_0$ é uma FNC (faça-se $n = 3$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, $l_{11} = p_1$, $l_{21} = \neg p_2$ e $l_{31} = \neg p_0$) e é também uma FND (faça-se $n = 1$, $m_1 = 3$, $l_{11} = p_1$, $l_{12} = \neg p_2$ e $l_{13} = \neg p_0$). Também a fórmula $p_1 \vee p_2$ é, em simultâneo, uma FND e uma FNC. Mais geralmente, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.

c) A fórmula $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_0 \vee \neg p_1)$ é uma FNC, mas não é uma FND.

d) A fórmula $\neg(p_1 \vee p_0)$ não é nem uma FNC nem uma FND.

Proposição 75: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe uma forma normal conjuntiva φ^c tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e existe uma formal normal disjuntiva φ^d tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

Dem.: Dada uma fórmula φ, uma forma normal conjuntiva e uma formal normal disjuntiva logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar equivalências, implicações e ocorrências do absurdo, utilizando as equivalências lógicas $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow (\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1)$, $\varphi_1 \to \varphi_2 \Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\perp \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge \neg\varphi_1$.

2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.

3. Eliminar duplas negações.

4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção. □

Exemplo 76: Seja $\varphi = ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3) \wedge p_0$. Então:

i)

$$\begin{array}{ll} & \varphi \\ \Leftrightarrow & ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & (\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & ((\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & (p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge p_0 \end{array}$$

e a última fórmula é uma FNC;

ii)

$$\begin{array}{lll} & \varphi & \\ \Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 & \text{por } \mathbf{i)} \\ \Leftrightarrow & (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_0) \vee (p_3 \wedge p_0), & \end{array}$$

sendo a última fórmula uma FND.

Observação 77: Consideremos de novo a Proposição 75 e a sua demonstração. Uma demonstração alternativa, que permite obter uma FND e uma FNC logicamente equivalentes a uma dada fórmula φ, pode ser feita com recurso à tabela de verdade de φ. Em particular, vejamos como obter uma FND φ^d, logicamente equivalente a φ, a partir da tabela de verdade de φ.

- Se φ é uma contradição ou uma tautologia, basta tomar, respetivamente, uma FND que seja uma contradição e uma FND que seja uma taotologia; por exemplo, tome-se, respetivamente, $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$ e $\varphi^d = p_0 \vee \neg p_0$.

- Doutro modo, sem perda de generalidade, suponhamos, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as variáveis proposicionais que ocorrem em φ[4]. A tabela de verdade de φ terá 2^n linhas e pode ser representada da seguinte forma:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha $i \to$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad \text{(para todo } j \in \{1, \ldots, n\})$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.^5$$

Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Prova-se que φ^d assim definida, de facto, é uma FND e é logicamente equivalente a φ. (Exercício.)

Exemplo 78: Consideremos a fórmula $\varphi = ((p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)) \wedge p_2$. Denotemos por ψ a subfórmula $(p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)$ de φ. A tabela de verdade de φ é:

[4] Note-se que uma fórmula que não é tautologia nem é contradição terá que ter pelo menos uma variável proposicional. (Exercício)

[5] Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0.

	p_1	p_2	p_3	$\perp$	$\neg p_1$	$p_3 \to p_1$	$\neg p_1 \leftrightarrow \perp$	ψ	φ
linha 1 $\to$	1	1	1	0	0	1	1	1	1
linha 2 $\to$	1	1	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	0	1	1	1	0
	1	0	0	0	0	1	1	1	0
	0	1	1	0	1	0	0	0	0
linha 6 $\to$	0	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	1	0

As linhas para as quais φ tem valor lógico 1 são a 1, a 2 e a 6. Portanto, uma FND logicamente equivalente a φ é: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$.

Definição 79: Seja v uma valoração.

1. Dizemos que v *satisfaz uma fórmula do CP* φ , e escrevemos $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$. Quando v *não satisfaz* φ (*i.e.*, quando $v(\varphi) = 0$, escrevemos $v \not\models \varphi$).

2. Dizemos que v *satisfaz um conjunto de fórmulas do CP* Γ, e escrevemos $v \models \Gamma$, quando v satisfaz todas as fórmulas de Γ. Quando v *não satisfaz* Γ (*i.e.*, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v \not\models \varphi$ ou, equivalentemente, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$) escrevemos $v \not\models \Gamma$.

Exemplo 80: Seja v_0 a valoração que atribui o valor lógico 0 a todas as variáveis proposicionais.

1. $v_0 \models p_1 \leftrightarrow p_2$ e $v_0 \models \neg p_1 \wedge \neg p_2$;

2. $v_0 \not\models p_1 \vee p_2$ e $v_0 \not\models p_1 \leftrightarrow \neg p_2$;

3. $v_0 \models \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ (por 1);

4. $v_0 \not\models \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$ (v_0 não satisfaz a $2^{\underline{a}}$ fórmula);

5. $v_0 \not\models \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$ (v_0 não satisfaz a $2^{\underline{a}}$ fórmula).

Observação 81: Dado que no conjunto vazio não há qualquer fórmula, tem-se, trivialmente, que, para toda a valoração v, $v \models \emptyset$.

Definição 82: Seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

1. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *consistente* ou *satisfazível* quando existe alguma valoração que satisfaz Γ.

2. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *inconsistente* ou *insatisfazível* quando não há valorações que satisfaçam Γ.

Exemplo 83:

a) Como vimos no exemplo anterior, o conjunto de fórmulas $\Delta_1 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ é satisfeito pela valoração v_0 desse exemplo e, portanto, Δ_1 é consistente.

b) O conjunto $\Delta_2 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$, considerado no exemplo anterior, não é satisfeito pela valoração v_0, mas é satisfeito, por exemplo, pela valoração que atribui valor lógico 1 a qualquer variável proposicional. Logo, Δ_2 é também consistente.

c) O conjunto $\Delta_3 = \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$, considerado no exemplo anterior, é inconsistente.

Dem.: Suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz Δ_3. Então, $v(\neg p_1 \wedge \neg p_2) = 1$, e portanto $v(p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$, e $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Ora, de $v(p_2) = 0$, segue $v(\neg p_2) = 1$ e daqui e de $v(p_1) = 0$, segue $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 0$, o que contradiz $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Logo, não podem existir valorações que satisfaçam Δ_3 e, assim, Δ_3 é inconsistente.

Proposição 84: Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas do CP tais que $\Gamma \subseteq \Delta$. Então:

i) se Δ é consistente, então Γ é consistente;

ii) se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Dem.: Exercício. $\square$

Definição 85: Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjnunto de fórmulas do CP.

1. Dizemos que φ é uma *consequência semântica* de Γ, e escrevemos $\Gamma \models \varphi$, quando, para toda a valoração v, se $v \models \Gamma$, então $v \models \varphi$.
2. Escrevemos $\Gamma \not\models \varphi$ quando φ *não é consequência semântica* de Γ, *i.e.*, quando existe alguma valoração v t.q. $v \models \Gamma$ e $v \not\models \varphi$.

Observação 86: Da definição anterior, aplicando as definições de satisfação de uma fórmula e satisfação de um conjunto de fórmulas, segue de imediato que:

1. $\Gamma \models \varphi$ se e só se para toda a valoração v, se para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.

2. $\Gamma \not\models \varphi$ se e só se existe alguma valoração v tal que, para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$ e $v(\varphi) = 0$.

Exemplo 87:

1. Seja $\Gamma = \{p_1, \neg p_1 \vee p_2\}$. Então:
   (a) $\Gamma \models p_1$. (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, *i.e.*, uma valoração tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, em particular, temos $v(p_1) = 1$.)
   (b) $\Gamma \models p_2$. (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos $v(\neg p_1) = 0$ e daqui e de $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, segue $v(p_2) = 1$.)
   (c) $\Gamma \models p_1 \wedge p_2$. (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos necessariamente $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 1$ (tal como vimos nos exemplos anteriores) e, por isso, temos $v(p_1 \wedge p_2) = 1$.)
   (d) $\Gamma \not\models p_3$. (Existem valorações v tais que $v \models \Gamma$ e $v(p_3) = 0$. Por exemplo, a valoração que atribui valor lógico 1 a p_1 e p_2 e valor lógico 0 às restantes variáveis proposicionais é uma tal valoração.)
   (e) $\Gamma \not\models \neg p_1 \vee \neg\, p_2$. (Por exemplo, para a valoração v_1 tal que $v_1(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, temos $v_1 \models \Gamma$ e, no entanto, $v_1(\neg p_1 \vee \neg p_2) = 0$.)
   (f) $\Gamma \models p_3 \vee \neg p_3$. (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, temos $v(p_3 \vee \neg p_3)$. De facto, $p_3 \vee \neg p_3$ é uma tautologia e, como tal, o seu valor lógico é 1 para qualquer valoração (em particular, para aquelas valorações que satisfazem Γ).)

2. Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$. De facto, para qualquer valoração v, se $v(\varphi) = 1$ e $v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

3. Já a afirmação "para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}, \{\varphi \to \psi\} \models \psi$" é falsa. Por exemplo, $\{p_1 \to p_2\} \not\models p_2$ (uma valoração v tal que $v(p_1) = v(p_2) = 0$ satisfaz $\{p_1 \to p_2\}$ e não satisfaz p_2.

Proposição 88: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\models \varphi$ se e só se $\emptyset \models \varphi$.
Dem.: Suponhamos que φ é uma tautologia. Então, para toda a valoração v, $v \models \varphi$ e, assim, de imediato, a implicação "$v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi$" é verdadeira, pelo que, $\emptyset \models \varphi$.

Reciprocamente, suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$, *i.e.*, suponhamos que para toda a valoração v,

$$v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi.$$

Seja v uma valoração arbitrária. Pretendemos mostrar que $v(\varphi) = 1$. Ora, trivialmente, $v \models \emptyset$ (Observação 81). Assim, da suposição, segue $v \models \varphi$, ou seja, $v(\varphi) = 1$. □

Observação 89: Se Γ é um conjunto de fórmulas inconsistente, então $\Gamma \models \varphi$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. (Porquê?) Como tal, é possível ter-se $\Gamma \models \varphi$ sem que existam valorações que satisfaçam Γ.

Notação 90: Muitas vezes, no contexto da relação de consequência semântica, usaremos a vírgula para denotar a união de conjuntos e escrevemos uma fórmula para denotar o conjunto singular composto por essa fórmula. Assim, por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \psi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e conjuntos de fórmulas Γ, Δ, escrevemos:

a) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$;

b) $\Gamma, \varphi \models \psi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$;

c) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \varphi$.

Proposição 91: Sejam φ e ψ fórmulas e sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Delta, \Gamma \models \psi$.

d) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$.

e) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz Γ. Então, da definição de satisfação de conjuntos, sabemos que v atribui valor lógico 1 a todas as fórmulas de Γ. Assim, dado que por hipótese $\varphi \in \Gamma$, temos $v(\varphi) = 1$.

b) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Δ. Assim, em particular, v satisfaz Γ, pois (por hipótese) $\Gamma \subseteq \Delta$. Donde, pela hipótese de que φ é uma consequência semântica de Γ, segue que $v(\varphi) = 1$.

c) Exercício.

d) $\Rightarrow$) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, por definição de satisfação de conjuntos, v satisfaz Γ e $v(\varphi) = 1$ $\quad (*)$. Assim, como v satisfaz Γ, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$ segue que $v(\varphi \to \psi) = 1$ $\quad (**)$. Logo, de $(*)$ e $(**)$, por definição de valoração, $v(\psi) = 1$.

$\Leftarrow$) Exercício.

e) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Γ. Então, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$, podemos concluir que $v(\varphi \to \psi) = 1$ $(*)$ e, da hipótese $\Gamma \models \varphi$, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$ $(**)$. Logo, de $(*)$ e $(**)$, por definição de valoração, $v(\psi) = 1$. □

Proposição 92: Sejam $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ fórmulas, onde $n \in \mathbb{N}$. As seguintes proposições são equivalentes:

i) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$;

ii) $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \models \varphi$;

iii) $\models (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi$.

Dem.: A equivalência entre ii) e iii) é um caso particular de d) da proposição anterior. A equivalência entre i) e ii) pode ser demonstrada a partir da equivalência mais geral: para todo o conjunto Γ de fórmulas,

$$\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi \text{ se e só se } \Gamma, \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \models \varphi,$$

a qual pode ser demonstrada por indução em n (exercício). A equivalência entre i) e iii) segue, então, por transitividade. □

Proposição 93 (Redução ao absurdo): Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP. Então: $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Dem.:

$\Rightarrow$) Tendo em vista uma contradição, suponhamos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, *i.e.*, suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, v satisfaz Γ e $v(\neg\varphi) = 1$, *i.e.*, $v(\varphi) = 0$ $(*)$. Contudo, da hipótese, uma vez que v satisfaz Γ, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$, o que é contraditório com $(*)$. Logo, por redução ao absurdo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

$\Leftarrow$) Suponhamos que v satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$, de outra forma teríamos $v(\neg\varphi) = 1$, donde, como v satisfaz Γ, seguiria que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. Mostrámos, assim, que toda a valoração que satisfaz Γ também satisfaz φ e, portanto, $\Gamma \models \varphi$. □

2.3 Sistema Formal de Dedução Natural

Observação 94: O sistema formal de demonstrações que estudaremos nesta secção será notado por DNP e designado por *Dedução Natural Proposicional*.

Observação 95: O sistema DNP constitui uma certa formalização da noção de *demonstração* para as fórmulas do Cálculo Proposicional, num estilo conhecido como *dedução natural*. As demonstrações permitirão uma abordagem alternativa à relação de consequência semântica (definida à custa do conceito de valoração) e, em particular, permitirão identificar as tautologias com as fórmulas para as quais podem ser construídas demonstrações.

Exemplo 96: Demonstrações em DNP serão construídas usando um certo conjunto de regras (chamadas *regras de inferência*), que codificam raciocínios elementares utilizados habitualmente na elaboração de demonstrações matemáticas.

Um raciocínio elementar que usamos frequentemente na construção de demonstrações é o seguinte: de φ e $\varphi \to \psi$ podemos concluir ψ. Representaremos este raciocínio do seguinte modo:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

Esta regra é habitualmente conhecida por *modus ponens*, embora no formalismo DNP adotemos um nome diferente para esta regra, como veremos adiante.

Um outro raciocínio elementar é o seguinte: se assumindo φ por hipótese podemos concluir ψ, então podemos concluir $\varphi \to \psi$. Este raciocínio será representado do seguinte modo:

$$\frac{\begin{array}{c}\not\varphi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}$$

Neste raciocínio, φ é uma *hipótese temporária* usada para concluir ψ. A notação $\not\varphi$ reflete o facto de que a conclusão $\varphi \to \psi$ *não depende* da hipótese temporária φ. Nesta representação, a notação $\vdots$ simboliza a possibilidade de podermos concluir ψ a partir de φ.

Notação 97: O conceito de demonstração em DNP será formalizado adiante, através de uma definição indutiva. As demonstrações corresponderão a certas *árvores finitas de fórmulas*, onde uma fórmula φ que ocorra como *folha* poderá estar *cortada*, o que será notado por $\not\varphi$ ou por $[\varphi]$. Na apresentação das regras de inferência de DNP, usaremos a notação

$$\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}$$

para representar uma árvore de fórmulas cuja *raiz* é ψ e cujas eventuais ocorrrências da fórmula φ como folha estão necessariamente cortadas.

Definição 98: As *regras de inferência* do sistema formal DNP são apresentadas de seguida. Cada regra origina uma regra na definição indutiva do *conjunto das derivações* (Definição 100). As regras de inferência recebem derivações (uma ou mais) e produzem uma nova derivação.

Regras de **I***ntrodução* *Regras de* **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi} \to E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi} \wedge I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\varphi} \wedge_1 E \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\psi} \wedge_2 E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi} \neg I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \neg\varphi\end{array}}{\bot} \neg E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi} \vee_1 I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \vee \psi} \vee_2 I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \vee \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \sigma\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma} \vee E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array}}{\psi} \leftrightarrow_1 E \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array}}{\varphi} \leftrightarrow_2 E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi} (RAA) \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi} (\bot)$$

Numa regra de inferência, as fórmulas imediatamente acima do *traço de inferência* serão chamadas as *premissas* da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a *conclusão* da regra de inferência.

Uma *aplicação* ou *instância* de uma regra de inferência é uma *substituição das fórmulas da regra (meta-variáveis) por fórmulas do CP*. Chamaremos *inferência* a uma aplicação de uma regra de inferência.

Exemplo 99: Vejamos dois exemplos de inferências $\wedge_1 E$:

$$\frac{p_1 \wedge p_2}{p_1}\,\wedge_1 E \qquad \frac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\,\wedge_1 E \tag{2.1}$$

Estas duas inferências podem ser *combinadas* do seguinte modo:

$$\cfrac{\cfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\,\wedge_1 E}{p_1}\,\wedge_1 E \tag{2.2}$$

Combinando esta construção com uma inferênica $\to I$ podemos obter:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\,(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)\,]}{p_1 \wedge p_2}\,\wedge_1 E}{p_1}\,\wedge_1 E}{((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)) \to p_1}\,\to I \tag{2.3}$$

As duas inferências em (2.1), assim como as combinações de inferências em (2.2) e (2.3), são exemplos de demonstrações no sistema formal DNP.

Definição 100: O *conjunto* $\mathcal{D}^{DNP}$ *das derivações de DNP* é o menor conjunto X, de árvores finitas de fórmulas, com folhas possivelmente cortadas, tal que:

a) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a árvore cujo único nodo é φ pertence a X;

b) X é *fechado* para cada uma das regras de inferência de DNP; por exemplo, X é fechado para as regras $\to E$ e $\to I$ quando as seguintes condições são satisfeitas (respetivamente):

i) $\begin{array}{c} D \\ \psi \end{array} \in X \implies \cfrac{\begin{array}{c} \not\varphi \\ D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi}\,\to I \in X$

(onde $\begin{array}{c} D \\ \psi \end{array}$ denota uma derivação (árvore de fórmulas) cuja raiz é ψ e $\begin{array}{c} \not\varphi \\ D \\ \psi \end{array}$ denota a árvore de fórmulas obtida de D cortando todas as eventuais ocorrências de φ como folha);

$$\textbf{ii)}\quad \begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \in X \text{ e } \begin{array}{c}D_2\\ \varphi\to\psi\end{array} \in X \Longrightarrow \dfrac{\begin{array}{cc}D_1 & D_2\\ \varphi & \varphi\to\psi\end{array}}{\psi}\to E \quad \in X.$$

As derivações de DNP são também chamadas *deduções.* No nosso estudo, privilegiaremos a terminologia derivação. A terminologia *demonstração* será reservada para uma classe especial de derivações (ver Definição 104).

Observação 101: O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP admite princípios de indução estrutural e de recursão estrutural. Existe também um conceito natural de *subderivação.* Por exemplo, a derivação (2.3) tem as seguintes quatro subderivações:

$$(p_1\wedge p_2)\wedge(p_1\to\neg p_3)\,, \qquad \dfrac{(p_1\wedge p_2)\wedge(p_1\to\neg p_3)}{p_1\wedge p_2}\wedge_1 E\,,$$

$$\dfrac{\dfrac{(p_1\wedge p_2)\wedge(p_1\to\neg p_3)}{p_1\wedge p_2}\wedge_1 E}{p_1}\wedge_1 E\,, \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\,(p_1\wedge p_2)\wedge(p_1\to\neg p_3)\,]}{p_1\wedge p_2}\wedge_1 E}{p_1}\wedge_1 E}{((p_1\wedge p_2)\wedge(p_1\to\neg p_3))\to p_1}\to I\,.$$

De facto, estas quatro derivações, lidas como uma sequência, constituem uma sequência de formação da derivação (2.3).

Exemplo 102: Para quaisquer fórmulas do CP φ, ψ e σ, as construções abaixo são exemplos de derivações de DNP.

1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\psi}\wedge_2 E \qquad \psi\to(\varphi\to\sigma)}{\varphi\to\sigma}\to E}{\sigma}\to E}{(\varphi\wedge\psi)\to\sigma}\to I^{(1)}$$

2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(2)} \qquad \neg\cancel{\neg\varphi}^{(1)}}{\bot}\neg E}{\varphi}RAA^{(2)}}{\neg\neg\varphi\to\varphi}\to I^{(1)}$$

3)

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)}}{\psi\to\varphi}\to I^{(2)}}{\varphi\to(\psi\to\varphi)}\to I^{(1)}$$

Os números naturais que aparecem a anotar inferências e fórmulas cortadas estabelecem uma correspondência, unívoca, entre as fórmulas cortadas e as regras que permitem efetuar esses cortes. Por exemplo, em **3)**, a inferência $\to I$ anotada com (1) é utilizada para cortar a única ocorrência como folha de φ, enquanto que a inferência $\to I$ anotada com (2) não é utilizada para efetuar qualquer corte.

Definição 103: Numa derivação D: a raiz de D é chamada a *conclusão* de D; as folhas de D são chamadas as *hipóteses* de D; as folhas de D cortadas serão chamadas as *hipóteses canceladas* de D; as folhas de D não cortadas serão chamadas as as *hipóteses não canceladas* de D.

Definição 104: Diremos que D é uma *derivação de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ* quando φ é a conclusão de D e o conjunto das hipóteses não canceladas de D é um subconjunto de Γ.

Diremos que D é uma *derivação de uma fórmula* φ quando φ é a conclusão de D e todas as hipóteses de D estão canceladas. A uma derivação de φ chamaremos também uma *demonstração* de φ.

Exemplo 105: Sejam φ, ψ e σ fórmulas.

1. Seja D_1 a seguinte derivação de DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(2)} \qquad \varphi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \cancel{\psi \to \sigma}^{(1)}}{\sigma} \to E}{\varphi \to \sigma} \to I^{(2)}}{(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)} \to I^{(1)}$$

Então:

(a) o conjunto de hipóteses de D_1 é $\{\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \sigma\}$;

(b) o conjunto de hipóteses não canceladas de D_1 é $\{\varphi \to \psi\}$;

(c) a conclusão de D_1 é $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$;

(d) D_1 é uma derivação de $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ a partir de $\{\varphi \to \psi\}$.

2. Seja D_2 a seguinte derivação de DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\varphi} \wedge_1 E \qquad \dfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\neg\varphi} \wedge_2 E}{\bot} \neg E}{\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)} \neg I^{(1)}$$

Então:

(a) o conjunto de hipóteses de D_2 é $\{\varphi \wedge \neg\varphi\}$;

(b) o conjunto de hipóteses não canceladas de D_2 é vazio;

(c) a conclusão de D_2 é $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$;

(d) D_2 é uma derivação de $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Definição 106: Uma fórmula φ diz-se *derivável a partir de* um conjunto de fórmulas Γ ou uma *consequência sintática* de Γ (notação: $\Gamma \vdash \varphi$) quando existe uma derivação de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ. Escreveremos $\Gamma \nvdash \varphi$ para denotar que φ não é derivável a partir de Γ.

Definição 107: Uma fórmula φ diz-se um *teorema* de DNP (notação: $\vdash \varphi$) quando existe uma demonstração de φ. Escreveremos $\nvdash \varphi$ para denotar que φ não é teorema de DNP.

Exemplo 108: Atendendo ao exemplo anterior:

1. $\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ (*i.e.*, $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ é derivável a partir de $\{\varphi \to \psi\}$).

2. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (*i.e.*, $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ é um teorema de DNP).

Definição 109: Um conjunto de fórmulas Γ diz-se *sintaticamente inconsistente* quando $\Gamma \vdash \perp$ e diz-se *sintaticamente consistente* no caso contrário (i.e. quando $\Gamma \nvdash \perp$, ou seja, quando não existem derivações de $\perp$ a partir de Γ).

Exemplo 110: O conjunto $\Gamma = \{p_0, p_0 \to \neg p_0\}$ é sintaticamente inconsistente. Uma derivação de $\perp$ a partir de Γ é:

$$\dfrac{p_0 \qquad \dfrac{p_0 \quad p_0 \to \neg p_0}{\neg p_0} \to E}{\perp} \neg E$$

Proposição 111: Seja Γ um conjunto de fórmulas. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) Γ é sintaticamente inconsistente;

b) para alguma fórmula φ, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$;

c) para toda a fórmula φ, $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Por exemplo, é suficiente provar as implicações **a)**$\Rightarrow$**b)**, **b)**$\Rightarrow$**c)** e **c)**$\Rightarrow$**a)**.

a)$\Rightarrow$**b)**: admitindo que Γ é sintaticamente inconsistente, existe uma derivação D de $\perp$ a partir de Γ. Assim, fixando uma (qualquer) fórmula φ, tem-se que

$$D_1 = \begin{array}{c} D \\ \dfrac{\perp}{\varphi} (\perp) \end{array} \qquad\qquad D_2 = \begin{array}{c} D \\ \dfrac{\perp}{\neg\varphi} (\perp) \end{array}$$

são, respetivamente, derivações de φ a partir de Γ (a conclusão de D_1 é φ e as hipóteses não canceladas de D_1 são as mesmas que em D) e de $\neg\varphi$ a partir de Γ (a conclusão de D_2 é $\neg\varphi$ e as hipóteses não canceladas de D_2 são as mesmas que em D). Por conseguinte, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Exercício: prove as outras duas implicações. □

Notação 112: Na representação de consequências sintáticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas. Por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, a notação $\Gamma, \Delta, \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ abrevia $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$.

Proposição 113: Para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Dem.: Imediata a partir das definições. □

Proposição 114: Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas. Então:

a) se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$;

b) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$;

c) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Delta, \Gamma \vdash \psi$;

d) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$;

e) se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore cuja única fórmula é φ é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ, pois $\varphi \in \Gamma$. Assim, por definição de consequência sintática, $\Gamma \vdash \varphi$.

b), **c)** e **e)**: Exercício.

d) Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. Então,

$$\dfrac{\varphi \quad \begin{array}{c} D \\ \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E$$

é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, pois: i) ψ é a conclusão desta derivação; e ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas desta derivação é constituído por φ

e pelas hipóteses não canceladas de D, que formam um subconjunto de Γ, sendo portanto Δ um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Suponhamos agora que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, a derivação

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}^{(1)} \\ D \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I^{(1)},$$

é uma derivação de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ, pois: i) $\varphi \to \psi$ é a conclusão desta derivação; e ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas desta derivação é constituído por todas as hipóteses não canceladas de D (um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$), exceto φ, sendo portanto Δ um subconjunto de Γ.

$\square$

Teorema (*Correção*): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma \vdash \varphi, \text{ então } \Gamma \models \varphi.$$

Dem.: Suponhamos $\Gamma \vdash \varphi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de φ a partir de Γ. Aplicando o lema que se segue, conclui-se de imediato o resultado pretendido.

Lema: Para todo $D \in \mathcal{D}^{DNP}$, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Dem. do Lema: Por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação, de φ a partir de Γ, com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, pela Proposição 91(a), $\Gamma \models \varphi$.

b) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\psi} \\ D_1 \\ \sigma\end{array}}{\psi \to \sigma} \to I,$$

então: $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Assim, aplicando a hipótese de indução relativa à subderivação D_1, $\Gamma, \psi \models \sigma$. Donde, pela Proposição 91(d), $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

c) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\frac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \sigma & \sigma \to \psi \end{array}}{\psi} \to E,$$

então: $\varphi = \psi$; D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ; e D_2 é uma derivação de $\sigma \to \psi$ a partir de Γ. Assim, aplicando as hipóteses de indução relativas às subderivações D_1 e D_2, segue $\Gamma \models \sigma$ e $\Gamma \models \sigma \to \psi$, respetivamente. Daqui, pela Proposição 91(e), conclui-se $\Gamma \models \psi$.

d) Os restantes casos, correspondentes às outras formas possíveis de D, são deixados como exercício.

□

Observação 115: O Teorema da Correção constitui uma ferramenta para provar a não derivabilidade de fórmulas a partir de conjuntos de fórmulas. De facto, do Teorema da Correção segue que

$$\Gamma \not\models \varphi \Longrightarrow \Gamma \nvdash \varphi,$$

o que significa que, para mostrar que não existem derivações em DNP de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ, basta mostar que φ não é consequência semântica de Γ.

Exemplo 116: Seja $\Gamma = \{p_1 \vee p_2, p_1 \to p_0\}$.

1. Em DNP não existem derivações de $p_0 \vee p_1$ a partir de Γ. Se existisse uma tal derivação, pelo Teorema da Correção, teríamos $\Gamma \models p_0 \vee p_1$, mas esta consequência semântica não é válida (tome-se, por exemplo, a valoração que atribui 1 a p_2 e 0 às restantes variáveis proposicionais).

2. De forma análoga, pode mostrar-se que não existem derivações de $\perp$ a partir de Γ (exercício) e, então, concluir que Γ é sintaticamente consistente.

Proposição 117: Γ é sintaticamente consistente sse Γ é semanticamente consistente.

Dem.:

$\Leftarrow$) Consequência do Teorema da Correção. (Porquê?)

$\Rightarrow$) Ver a bibliografia recomendada. □

Teorema 118 (Completude): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma \models \varphi, \text{ então } \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.: Consequência da proposição anterior. (Exercício.) □

Teorema 119 (Adequação): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subset \mathcal{F}^{CP}$,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se e só se } \Gamma \models \varphi.$$

Dem.: Imediata, a partir dos teoremas da Correção e da Completude. □

Corolário 120: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, φ é um teorema de DNP se e só se φ é uma tautologia.
Dem.: Exercício. □

Capítulo 3

Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica

3.1 Sintaxe

Observação 121: Ao contrário do Cálculo Proposicional, no Cálculo de Predicados existem duas classes sintáticas: a classe dos *termos* e a classe das *fórmulas*. Os termos serão usados para denotar *objetos* do domínio de discurso em questão (por exemplo, *números naturais*, *conjuntos*, etc.) e as fórmulas corresponderão a *afirmações* relativas aos objetos (por exemplo, "dois é um número par" ou "o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto").

O Cálculo de Predicados será *parametrizado* por um *tipo de linguagem*, que fixará quais os símbolos que poderão ser usados para construir termos (que designaremos por *símbolos de função*) ou para denotar *relações elementares* entre os objetos (que designaremos por *símbolos de relação*). Este conjunto de símbolos dependerá, naturalmente, do problema em estudo.

Por exemplo, se estivermos a considerar a *Aritmética* (a teoria dos números naturais), entre outros, será útil ter símbolos que denotem o número 0, a operação de adição e a relação de igualdade. Já no caso de estarmos a considerar teoria de conjuntos, será útil, por exemplo, ter símbolos para denotar o conjunto vazio, as operações de reunião de conjuntos e de conjunto potência, e as relações de pertença, inclusão e igualdade de conjuntos.

Definição 122: Um *tipo de linguagem* é um terno $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$ t.q.:

a) $\mathcal{F}$ e $\mathcal{R}$ são conjuntos disjuntos;

b) $\mathcal{N}$ é uma função de $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ em $\mathbb{N}_0$.

Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados *símbolos de função* e os elementos de $\mathcal{R}$ são chamados *símbolos de relação* ou *símbolos de predicado*.

A função $\mathcal{N}$ é chamada *função aridade*, chamando-se ao número natural $n = \mathcal{N}(s)$ (para cada $s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$) a *aridade* de s e dizendo-se que s é um símbolo n-*ário*. Intuitivamente, a aridade de um símbolo corresponde ao seu *número de argumentos*.

Os símbolos de função de aridade 0 são chamados *constantes*. Neste estudo, assumiremos que os símbolos de relação nunca têm aridade 0.

Os símbolos de aridade 1 dir-se-ão também símbolos *unários*, os de aridade 2 *binários*, etc.

Exemplo 123: O terno $L_{Arit} = (\{0, s, +, \times\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(\times) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(<) = 2$, é um tipo de linguagem. Chamaremos a L_{Arit} o *tipo de linguagem para a Aritmética.*

Notação 124: Habitualmente, usaremos a letra L (possivelmente indexada) para denotar tipos de linguagens.

Caso nada seja dito em contrário, durante este capítulo L denotará um tipo de linguagem $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$, cujo conjunto de constantes será denotado por $\mathcal{C}$.

Definição 125: O *alfabeto* $\mathcal{A}_L$ *induzido pelo tipo de linguagem* L é o conjunto formado pelos seguintes símbolos:

a) $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (os *conetivos proposicionais*);

b) $\exists$ e $\forall$, chamados *quantificador existencial* e *quantificador universal*, respetivamente;

c) $x_0, x_1, ..., x_n, ...$, chamados *variáveis (de primeira ordem)*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}$;

d) "(", ")" e ",", chamados *símbolos auxiliares*;

e) os símbolos de função e os símbolos de relação de L (que se assume serem distintos de todos os símbolos anteriores).

Exemplo 126: A sequência de 8 símbolos $\exists x_0 \neg (x_0 = 0)$ é uma palavra sobre o alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, mas a sequência de 8 símbolos $\exists x_0 \neg (x_0 = 1)$ não é uma palavra sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ (1 não é uma das letras do alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$).

Definição 127: O conjunto $\mathcal{T}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{T}_L$;

b) para toda a constante c de L, $c \in \mathcal{T}_L$;

c) para todo o símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$,

$$t_1 \in \mathcal{T}_L \text{ e ... e } t_n \in \mathcal{T}_L \implies f(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{T}_L, \text{ para todo } t_1, ..., t_n \in (\mathcal{A}_L\ )^*.$$

Aos elementos de $\mathcal{T}_L$ chamaremos *termos de tipo* L ou, abreviadamente, L-*termos* .

Exemplo 128:

1. As seguintes seis palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ são L_{Arit}-termos:

$$x_1,\ x_2,\ 0,\ s(0),\ \times(x_1, x_2),\ +(\times(x_1, x_2), s(0)).$$

   Lida como uma sequência de palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, esta sequência constitui uma sequência de formação de $+(\times(x_1, x_2), s(0))$.

2. As palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ $= (0, x_1)$ e $< (0, x_1)$ (ambas de comprimento 6) não são L_{Arit}-termos. Apesar de $=$ e $<$ serem símbolos de aridade 2 e de 0 e x_1 serem dois L_{Arit}-termos, $=$ e $<$ são símbolos de relação e não símbolos de função, como exigido na condição c) da definição anterior. Estas duas palavras são exemplos do que adiante designaremos por *fórmulas atómicas*.

Exemplo 129: Seja L_0 o tipo de linguagem $(\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$. As seguintes quatro palavras sobre $\mathcal{A}_{L_0}$ são L_0-termos (e constituem uma sequência de formação do último termo):

$$c\ ,\ x_1\ ,\ f_2(c, x_1)\ ,\ f_1(f_2(c, x_1))\ .$$

Notação 130: Quando f é um símbolo de função binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, utilizamos a notação $t_1 f t_2$, possivelmente entre parênteses, para representar o L-termo $f(t_1, t_2)$. Por exemplo, a notação $(x_1 \times x_2) + s(0)$ representará o L_{Arit}-termo $+(\times(x_1, x_2), s(0))$.

Teorema 131 (Indução Estrutural em L-Termos): Seja $P(t)$ uma propriedade que depende de um L-termo t. Se:

a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $P(x)$;

b) para todo $c \in \mathcal{C}$, $P(c)$;

c) para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$P(t_1) \text{ e ... e } P(t_n) \implies P(f(t_1, ..., t_n));$$

então para todo $t \in \mathcal{T}_L$, $P(t)$.

Dem.: Exercício. $\square$

Observação 132: A definição indutiva do conjunto dos L-termos é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é o conjunto dos L-termos. Este princípio é usado nas três definições que se seguem.

Definição 133: O conjunto $VAR(t)$, das *variáveis* que ocorrem num L-termo t, é definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $VAR(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $VAR(c) = \emptyset$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $VAR(f(t_1, ..., t_n)) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} VAR(t_i)$, para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 134: O conjunto das variáveis que ocorrem no L_{Arit}-termo $x_2 + s(x_1)$ é:

$$VAR(x_2 + s(x_1)) = VAR(x_2) \cup VAR(s(x_1)) = \{x_2\} \cup VAR(x_1) = \{x_2, x_1\}.$$

Definição 135: O conjunto $subt(t)$, dos *subtermos* de um L-termo t, é definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $subt(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $subt(c) = \{c\}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $subt(f(t_1, ..., t_n)) = \{f(t_1, ..., t_n)\} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} subt(t_i)$, para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 136: O conjunto dos subtermos do L_{Arit}-termo $(x_2 + s(x_1)) \times 0$ é:

$$\{x_2, x_1, s(x_1), x_2 + s(x_1), 0, (x_2 + s(x_1)) \times 0\}$$

Definição 137: A operação de *substituição* de uma variável x por um L-termo t num L-termo t' é notada por $t'[t/x]$ e é definida por recursão estrutural (em t') do seguinte modo:

a) $y[t/x] = \begin{cases} t, & se \;\; y = x \\ \\ y, & se \;\; y \neq x \end{cases}$, para todo $y \in \mathcal{V}$;

b) $c[t/x] = c$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$, para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 138:

1. O L_{Arit}-termo que resulta da substituição da variável x_1 pelo L_{Arit}-termo $s(0)$ no L_{Arit}-termo $x_2 + s(x_1)$ é:
$$\begin{aligned} & (x_2 + s(x_1))[s(0)/x_1] \\ = \;& x_2[s(0)/x_1] + s(x_1)[s(0)/x_1] \\ = \;& x_2 + s(x_1[s(0)/x_1]) \\ = \;& x_2 + s(s(0)) \end{aligned}$$

2. $(x_2 + s(x_1))[s(0)/x_0] = x_2 + s(x_1)$ (observe que $x_0 \notin VAR(x_2 + s(x_1))$).

Proposição 139: Sejam x uma variável e t_1 e t_2 L-termos. Se $x \notin VAR(t_1)$, então $t_1[t_2/x] = t_1$.

Dem.: Por indução estrutural em t_1. (Exercício.) □

Definição 140: Uma palavra sobre o alfabeto induzido por L da forma $R(t_1, ..., t_n)$, onde R é um símbolo de relação n-ário e $t_1, ..., t_n$ são L-termos, é chamada uma *fórmula atómica de tipo L* ou, abreviadamente, uma *L-fórmula atómica*. O conjunto das L-fórmulas atómicas é notado por At_L.

Exemplo 141:

1. As três palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ que se seguem são L_{Arit}-fórmulas atómicas:
$$= (0, x_1), < (0, x_1), = (+(0, x_1), \times(s(0), x_1)).$$

2. Já a palavra sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ $\times(0, x_1)$ não é uma L_{Arit}-fórmula atómica (note-se que $\times$ é um símbolo de função e não um símbolo de relação; de facto, esta palavra é um L_{Arit}-termo).

Notação 142: Quando R é um símbolo de relação binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, utilizamos a notação $t_1 R t_2$, possivelmente entre parênteses, para representar o L-fórmula atómica

$R(t_1, t_2)$. Por exemplo, a notação $x_0 < s(0)$ representará a L-fórmula atómica $< (x_0, s(0))$.

Definição 143: O conjunto $\mathcal{F}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $\varphi \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in At_L$;

b) $\perp \in \mathcal{F}_L$;

c) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$;

d) $\varphi \in \mathcal{F}_L$ e $\psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \Box \psi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in (\mathcal{A}_L)^*$;

e) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (Qx\,\varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$.

Aos elementos de $\mathcal{F}_L$ chamaremos *fórmulas de tipo* L ou, abreviadamente, L-*fórmulas*.

Exemplo 144: As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ são L_{Arit}-fórmulas (fazendo uso das simplificações anteriormente mencionadas na representação de fórmulas atómicas):

$$\begin{array}{l}
(x_0 < s(0)),\\
(\neg(x_0 < s(0))),\\
x_0 = x_1,\\
((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1),\\
(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1)),\\
(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1))).
\end{array}$$

Lida como uma sequência de palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, esta sequência constitui uma sequência de formação de $(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1)))$.

Exemplo 145: Recordemos o tipo de linguagem L_0 do Exemplo 129: $L_0 = (\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$.

As seguintes quatro palavras sobre $\mathcal{A}_{L_0}$ são L_0-fórmulas (e constituem uma sequência de formação da última fórmula):

$$\begin{array}{l}
R_1(x_1),\\
R_2(x_1, f_2(c, x_1)),\\
(R_1(x_1) \to R_2(x_1, f_2(c, x_1))),\\
(\forall x_1(R_1(x_1) \to R_2(x_1, f_2(c, x_1)))).
\end{array}$$

Notação 146: Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações ou de quantificadores são geralmente omitidos. Por exemplo, a L_{Arit}-fórmula

$$(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1)))$$

pode ser abreviada por

$$\forall x_0 \exists x_1(\neg(x_0 < s(0)) \to x_0 = x_1).$$

Teorema 147 (Indução Estrutural em L-Fórmulas): Seja $P(\varphi)$ uma propriedade que depende de uma L-fórmula φ. Se:

a) $P(\psi)$, para todo $\psi \in At_L$;

b) $P(\perp)$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \Box \psi_2)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $P(\psi) \implies P(Qx\,\psi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

Dem.: Exercício $\square$

Observação 148: A definição indutiva do conjunto das L-fórmulas é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é o conjunto das L-fórmulas. Este princípio é usado na definição seguinte.

Definição 149: O conjunto das *subfórmulas* de uma L-fórmula φ é notado por $\mathit{subf}(\varphi)$ e é definido, por recursão estrutural, do seguinte modo:

a) $\mathit{subf}(\psi) = \{\psi\}$, para todo $\psi \in At_L$;

b) $\mathit{subf}(\perp) = \{\perp\}$;

c) $\mathit{subf}(\neg\psi) = \mathit{subf}(\psi) \cup \{\neg\psi\}$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $\mathit{subf}(\psi_1 \Box \psi_2) = \mathit{subf}(\psi_1) \cup \mathit{subf}(\psi_2) \cup \{\psi_1 \Box \psi_2\}$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $\mathit{subf}(Qx\,\psi) = \mathit{subf}(\psi) \cup \{Qx\,\psi\}$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Definição 150: Seja φ uma L-fórmula e seja $Qx\,\psi$ uma subfórmula de φ, onde $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$. O *alcance* desta ocorrência do quantificador Qx em φ é esta ocorrência da L-fórmula ψ.

Exemplo 151: Na L_{Arit}-fórmula

$$\forall x_0(\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists x_1(x_1 < x_0))) :$$

1. o alcance da única ocorrência de $\forall x_0$ é
$$\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists x_1(x_1 < x_0));$$
2. o alcance da primeira ocorrência do quantificador $\exists x_1$ é $x_0 = s(x_1)$;
3. o alcance da segunda ocorrência do quantificador $\exists x_1$ é $x_1 < x_0$.

Definição 152: Numa L-fórmula φ, uma ocorrência (em subfórmulas atómicas de φ) de uma variável x diz-se *livre* quando x não está no alcance de nenhuma ocorrência de um quantificador Qx (com $Q \in \{\exists, \forall\}$); caso contrário, essa ocorrência de x diz-se *ligada*.

Escrevemos $LIV(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências livres em φ e $LIG(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências ligadas em φ.

Exemplo 153: Seja φ a L_{Arit}-fórmula

$$\exists x_1(\neg(\underbrace{x_0}_{(a)} < s(0)) \to \forall x_0(\underbrace{x_0}_{(b)} = \underbrace{x_1}_{(a)})).$$

A ocorrência (a) de x_0 é livre, enquanto que a ocorrência (b) de x_0 é ligada. A ocorrência (a) de x_1 é ligada. Assim, $LIV(\varphi) = \{x_0\}$ e $LIG(\varphi) = \{x_0, x_1\}$.

Observação 154: Note-se que $LIV(\varphi) \cap LIG(\varphi)$ não é necessariamente o conjunto vazio (veja-se o exemplo anterior).

Definição 155: A operação de *substituição das ocorrências livres* de uma variável x por um L-termo t numa L-fórmula φ é notada por $\varphi[t/x]$ e é definida, por recursão estrutural em L-fórmulas, do seguinte modo:

a) $R(t_1, ..., t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$ para todo $R \in \mathcal{R}$ de aridade n e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$;

b) $\perp [t/x] = \perp$;

c) $(\neg\psi)[t/x] = \neg\psi[t/x]$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $(\psi_1 \Box \psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x] \Box \psi_2[t/x]$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $(Qy\,\psi)[t/x] = \begin{cases} Qy\,\psi & \text{se } y = x \\ \\ Qy\,\psi[t/x] & \text{se } y \neq x \end{cases}$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Exemplo 156:

1.
$$\begin{array}{lll} & (x_0 < s(x_1))[0/x_0] & \\ = & x_0[0/x_0] < s(x_1)[0/x_0] & \text{(def. anterior } \textbf{a)}) \\ = & 0 < s(x_1) & \text{(substituição em } L\text{-termos)} \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{lll} & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_0] & \\ = & \exists x_0(x_0 < s(x_1)) & \text{(def. anterior } \textbf{e)}, 1^{\text{o}} \text{ caso)} \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{lll} & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_1] & \\ = & \exists x_0(x_0 < s(x_1))[0/x_1] & \text{(def. anterior } \textbf{e)}, 2^{\text{o}} \text{ caso)} \\ = & \exists x_0(x_0 < s(0)) & \text{(def. anterior } \textbf{a)} \text{ e substituição em } L\text{-termos)} \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{lll} & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge (0 < x_0))[0/x_0] & \\ = & \exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge 0 < 0 & \text{(porquê?)} \end{array}$$

Exemplo 157: Seja φ a L_{Arit}-fórmula $\exists x_1(x_0 < x_1)$. Então,

$$\varphi[s(x_1)/x_0] = \exists x_1(s(x_1) < x_1).$$

Observe que em φ a ocorrência livre de x_0 "não depende" da quantificação $\exists x_1$, mas, após a substituição, o termo $s(x_1)$, que substituiu x_0, "depende" da quantificação $\exists x_1$.[1] Na definição seguinte, identificaremos as condições que evitam este fenómeno indesejado de *captura de variáveis* em substituições.

Definição 158: Uma variável x diz-se *substituível* (*sem captura de variáveis*) por um L-termo t numa L-fórmula φ quando para todas as ocorrências livres de x em φ no alcance de algum quantificador Qy, $y \notin VAR(t)$.

[1] Note que tomando $\mathbb{N}_0$ como domínio de interpretação das variáveis e interpretando s como a função *sucessor* em $\mathbb{N}_0$ e $<$ como a relação de igualdade em $\mathbb{N}_0$, φ é verdadeira, enquanto $\varphi[s(x_1)/x_0]$ é falsa. Esta noção de interpretação de fórmulas será tornada precisa na secção seguinte.

Observação 159: Se x é uma variável que não tem ocorrências livres numa L-formula φ ou t é um L-termo onde não ocorrem variáveis, x é substituível por t em φ.

Exemplo 160: Seja $\varphi = \forall x_1(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2)$. Então:

a) x_0 é substituível por $x_1+s(x_2)$ em φ, pois x_0 não tem ocorrências livres na fórmula;

b) x_1 é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois a única ocorrência livre de x_1 não está no alcance de qualquer quantificador;

c) x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_2 tem uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall x_1$ e $x_1 \in VAR(x_1 + s(x_2))$;

d) x_2 é substituível por $x_0 + s(x_2)$ em φ, pois, embora exista uma ocorrência livre de x_2 no alcance do quantificador $\forall x_1$, $x_1 \notin VAR(x_0 + s(x_2))$.

Observação 161: Note-se que, mesmo quando uma variável x não é substituível por um L-termo t numa L-fórmula φ, a operação de substituição de x por t em φ encontra-se definida.

Por exemplo, x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em

$$\varphi = \forall x_1(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2));$$

a L_{Arit}-fórmula resultante da substituição de x_2 por $x_1+s(x_2)$ em φ encontra-se definida e é igual a

$$\forall x_1(x_1 < x_1 + s(x_2)) \vee \neg(x_1 < x_1 + s(x_2))),$$

no entanto, ao efetuar a substituição, acontece o fenómeno da captura de variáveis.

Proposição 162: Sejam φ uma L-fórmula, x uma variável e t um L-termo. Se $x \notin LIV(\varphi)$, então $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Por indução estrutural em L-fórmulas. A prova está organizada por casos, consoante a *forma* de φ.

a) Caso $\varphi = \perp$. Então, $\varphi[t/x] = \perp [t/x] \overset{(1)}{=} \perp = \varphi$.

Justificações	
(1)	Definição de substituição.

b) Caso $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$, com $R \in \mathcal{R}$, n-ário, e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Então, $x \notin VAR(t_i)$, para todo $1 \leq i \leq n$, de outra forma teríamos $x \in LIV(\varphi)$, e contrariaríamos a hipótese. Assim, aplicando a Proposição 139, $t_i[t/x] = t_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo:

$$\varphi[t/x] = R(t_1, ..., t_n)[t/x] \overset{(1)}{=} R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x]) \overset{(2)}{=} R(t_1, ..., t_n) = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.
(2)	$t_i[t/x] = t_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.

c) Caso $\varphi = Qy\,\varphi_1$, com $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$.

c.1) Caso $x = y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Qy\,\varphi_1)[t/x] \overset{(1)}{=} Qy\,\varphi_1 = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.

c.2) Caso $x \neq y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Qy\,\varphi_1)[t/x] \overset{(1)}{=} Qy\,\varphi_1[t/x] \overset{(2)}{=} Qy\,\varphi_1 = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.
(2)	Por hipótese, $x \notin LIV(\varphi)$. Como $LIV(\varphi_1) \subseteq LIV(\varphi) \cup \{y\}$ e $x \neq y$, segue-se que $x \notin LIV(\varphi_1)$. Logo, por H.I., $\varphi_1[t/x] = \varphi_1$.

d) Os restantes casos são deixados como exercício.

□

Definição 163: Uma L-fórmula φ diz-se uma *L-sentença*, ou uma *L-fórmula fechada*, quando $LIV(\varphi) = \emptyset$.

Proposição 164: Sejam φ uma L-sentença. Então, para toda a variável x e para todo o L-termo t,

1. x é substituível por t em φ;
2. $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Exercício. □

3.2 Semântica

Observação 165: As fórmulas do Cálculo de Predicados são construídas a partir das fórmulas atómicas (símbolos de relação "aplicados" a termos) e, por esta razão, as fórmulas atómicas desempenham papel semelhante ao das variáveis proposicionais no Cálculo Proposicional. Contudo, ao passo que no Cálculo Proposicional podemos atribuir "diretamente" um valor lógico a uma variável proposicional, a atribuição de valores lógicos às fórmulas atómicas é mais complexa.

Para atribuirmos valores lógicos a fórmulas atómicas, em particular, será necessário fixar previamente a *interpretação dos termos*. Tal requer que indiquemos qual o *universo de objetos* (*domínio de discurso*) pretendido para a denotação dos termos (por exemplo, números naturais, conjuntos, etc.), bem como a interpretação pretendida quer para os símbolos de função do tipo de linguagem em questão (por exemplo, para indicar que tomando $\mathbb{N}_0$ por universo, o símbolo de função binário $+$ denotará a *operação* de adição) quer para as variáveis de primeira ordem. Para a interpretação das fórmulas atómicas, será ainda necessário fixar a interpretação dos símbolos de relação como *relações* entre objetos do domínio de discurso.

A indicação de qual o domínio de discurso pretendido e de quais as interpretações que deverão ser dadas aos diversos símbolos será efetuada através daquilo que designaremos por *estrutura para um tipo de linguagem*. A interpretação de variáveis de primeira ordem será feita no contexto de um domínio de discurso, através daquilo a que chamaremos *atribuições numa estrutura*. Um par (*estrutura, atribuição*) permitirá fixar o valor lógico de qualquer fórmula e, portanto, pode ser pensado como uma *valoração*, uma vez que estes pares desempenharão papel idêntico ao das valorações do Cálculo Proposicional.

Definição 166: Seja L um tipo de linguagem. Uma *estrutura de tipo* L, que abreviadamente designaremos por L-*estrutura*, é um par $(D, \overline{})$ t.q.:

a) D é um conjunto não vazio, chamado o *domínio da estrutura*;

b) $\overline{}$ é uma função, chamada a *função interpretação da estrutura*, e é t.q.:

- a cada constante c de L faz corresponder um elemento de D, que será notado por $\overline{c}$;
- a cada símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$, faz corresponder uma função de tipo $D^n \longrightarrow D$, que será notada por $\overline{f}$;
- a cada símbolo de relação R de L, de aridade n, faz corresponder uma relação n-ária em D (i.e. um subconjunto de D^n), que será notada por $\overline{R}$.

Para cada símbolo de função ou relação s de L, $\overline{s}$ é chamada a *interpretação* de s na estrutura.

Notação 167: Habitualmente, usaremos a letra E (possivelmente indexada) para denotar estruturas. Dada uma estrutura E, a notação $dom(E)$ denotará o domínio de E.

Exemplo 168:

a) Seja $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$, onde:

- $\overline{0}$ é o número *zero*;
- $\overline{s}$ é a função *sucessor* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\begin{array}{rccc} \overline{s}: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & n & \mapsto & n+1 \end{array}$;
- $\overline{+}$ é a função *adição* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\begin{array}{rccc} \overline{+}: & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & (m,n) & \mapsto & m+n \end{array}$;
- $\overline{\times}$ é a função *multiplicação* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\begin{array}{rccc} \overline{\times}: & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & (m,n) & \mapsto & m\times n \end{array}$;
- $\overline{=}$ é a relação de *igualdade* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\overline{=} = \{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : m = n\}$;
- $\overline{<}$ é a relação *menor do que* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\overline{<} = \{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : m < n\}$.

Então, E_{Arit} é uma L_{Arit}-estrutura. Designaremos, por vezes, esta estrutura por *estrutura standard* para o tipo de linguagem L_{Arit}.

b) O par $E_0 = (\{a,b\}, \overline{})$, onde:

- $\overline{0} = a$;
- $\overline{s}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a,b\} & \longrightarrow & \{a,b\} \\ x & \mapsto & x \end{array}$;
- $\overline{+}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a,b\}\times\{a,b\} & \longrightarrow & \{a,b\} \\ (x,y) & \mapsto & b \end{array}$;
- $\overline{\times}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a,b\}\times\{a,b\} & \longrightarrow & \{a,b\} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} a & \text{se } x = y \\ b & \text{se } x \neq y \end{cases} \end{array}$;
- $\overline{=} = \{(a,a),(b,b)\}$;
- $\overline{<} = \{(a,b)\}$,

é também uma L_{Arit}-estrutura.

Existem $2\times 4\times 16\times 16\times 16\times 16$ L_{Arit}-estruturas cujo domínio é $\{a,b\}$. (Porquê?)

Definição 169: Seja E uma L-estrutura. Uma função $a : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$ (do conjunto $\mathcal{V}$ das variáveis de primeira ordem para o domínio de E) diz-se uma *atribuição* em E.

Exemplo 170: As funções $\begin{array}{rcl} a_0 : \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$ e $\begin{array}{rcl} a^{ind} : \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x_i & \mapsto & i \end{array}$ são atribuições em E_{Arit}.

Definição 171: O *valor de um L-termo t numa L-estrutura* $E = (D, \bar{\ })$ *para uma atribuição a* em E é notado por $t[a]_E$ ou, simplesmente, por $t[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada), e é o elemento de D definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $x[a] = a(x)$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $c[a] = \overline{c}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $f(t_1, ..., t_n)[a] = \overline{f}(t_1[a], ..., t_n[a])$ para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 172: Seja t o L_{Arit}-termo $s(0) \times (x_0 + x_2)$.

1. O valor de t para a atribuição a^{ind}, na L_{Arit}-estrutura E_{Arit}, é

$$\begin{array}{rl} & (s(0) \times (x_0 + x_2))[a^{ind}] \\ = & s(0)[a^{ind}] \times (x_0 + x_2)[a^{ind}] \\ = & (0[a^{ind}] + 1) \times (x_0[a^{ind}] + x_2[a^{ind}]) \\ = & (0 + 1) \times (0 + 2) \\ = & 2 \end{array}$$

2. Já para a atribuição a_0 (do exemplo anterior), o valor de t é 0 (porquê?).

3. Considere-se agora a L_{Arit}-estrutura E_0 do Exemplo 168 e considere-se a seguinte atribuição nesta estrutura:

$$\begin{array}{rcl} a' : \mathcal{V} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ x & \mapsto & b \end{array}$$

O valor de t em E_0 para a' é:

$$\begin{array}{rl} & (s(0) \times (x_0 + x_2))[a'] \\ = & \overline{\times}(s(0)[a'], (x_0 + x_2)[a']) \\ = & \overline{\times}(\overline{s}(0[a']), \overline{+}(x_0[a'], x_2[a'])) \\ = & \overline{\times}(\overline{s}(a), \overline{+}(b, b)) \\ = & \overline{\times}(a, b) \\ = & b \end{array}$$

Proposição 173: Seja t um L-termo e sejam a_1 e a_2 duas atribuições numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$. Se $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in VAR(t)$, então $t[a_1] = t[a_2]$.

Dem.: Por indução estrutural em t. A prova está organizada por casos, consoante *a forma* de t.

a) Caso t seja uma variável. Então, $t \in VAR(t)$. Logo, por hipótese, $a_1(t) = a_2(t)$ (*). Assim,

$$t[a_1] \overset{(1)}{=} a_1(t) \overset{(*)}{=} a_2(t) \overset{(1)}{=} t[a_2].$$

Justificações

(1) Definição de valor de um termo para uma atribuição.

b) Caso t seja uma constante. Então,

$$t[a_1] \overset{(1)}{=} \overline{t} \overset{(1)}{=} t[a_2].$$

Justificações

(1) Definição de valor de um termo para uma atribuição.

c) Caso $t = f(t_1, ..., t_n)$, com $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Então,

$$\begin{array}{rl} & t[a_1] \\ = & f(t_1, ..., t_n)[a_1] \\ \overset{(1)}{=} & \overline{f}(t_1[a_1], ..., t_n[a_1]) \\ \overset{(2)}{=} & \overline{f}(t_1[a_2], ..., t_n[a_2]) \\ \overset{(1)}{=} & f(t_1, ..., t_n)[a_2] \\ = & t[a_2]. \end{array}$$

Justificações

(1) Definição de valor de um termo para uma atribuição.
(2) Para $1 \leq i \leq n$, como $VAR(t_i) \subseteq VAR(t)$, da hipótese segue-se que: $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in VAR(t_i)$. Logo, por H.I., para todo $1 \leq i \leq n$, $t_i[a_1] = t_i[a_2]$.

□

Notação 174: Sejam a uma atribuição numa L-estrutura E, $d \in dom(E)$ e x uma variável. Escrevemos $a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)$ para a atribuição $a' : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$ em E definida por:

$$\text{para todo } y \in \mathcal{V}, \quad a'(y) = \begin{cases} d & \text{se } y = x \\ a(y) & \text{se } y \neq x \end{cases}.$$

Exemplo 175: $a^{ind}\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ denota a atribuição em L_{Arit} definida por

$$\text{para todo } i \in \mathbb{N}_0, \quad a^{ind}\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ se } i = 0 \\ \\ i \text{ se } i \neq 0 \end{cases}.$$

Exemplo 176: Verifique que $(x_0 + 0)[a^{ind}\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)] = 1 = (x_0 + 0)[s(0)/x_0][a^{ind}]$. De facto, esta igualdade é um caso particular da proposição seguinte, que fornece uma alternativa para o cálculo do valor de um termo que resulta de uma substituição.

Proposição 177: Sejam t_0 e t_1 L-termos e seja a uma atribuição numa L-estrutura. Então, $t_0[t_1/x][a] = t_0[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ t_1[a] \end{smallmatrix}\right)]$.

Dem.: Por indução estrutural em t_0. (Exercício.) $\square$

Definição 178: O *valor lógico de uma* L*-fórmula* φ *numa* L*-estrutura* $E = (D, \overline{})$ *para uma atribuição* a em E, é notado por $\varphi[a]_E$ ou, simplesmente, por $\varphi[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada) e é o elemento do conjunto dos valores lógicos $\{0, 1\}$ definido, por recursão em φ, do seguinte modo:

a) $\perp [a] = 0$;

b) $R(t_1, ..., t_n)[a] = 1$ sse $(t_1[a], ..., t_n[a]) \in \overline{R}$, para todo o símbolo de relação R de aridade n e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$;

c) $(\neg\varphi_1)[a] = 1 - \varphi_1[a]$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$;

d) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)[a] = min(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $(\varphi_1 \vee \varphi_2)[a] = max(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;

f) $(\varphi_1 \to \varphi_2)[a] = 0$ sse $\varphi_1[a] = 1$ e $\varphi_2[a] = 0$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;

g) $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[a] = 1$ sse $\varphi_1[a] = \varphi_2[a]$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;

h) $(\exists x\varphi_1)[a] = máximo\{\varphi_1[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)] : d \in D\}$, para todo $x \in \mathcal{V}, \varphi_1 \in \mathcal{F}_L$;

i) $(\forall x\varphi_1)[a] = mínimo\{\varphi_1[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)] : d \in D\}$, para todo $x \in \mathcal{V}, \varphi_1 \in \mathcal{F}_L$.

Proposição 179: Para quaisquer L-estrutura E, atribuição a em E, L-fórmula φ e variável x,

a) $(\exists x\varphi)[a] = 1$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $\varphi[a\binom{x}{d}] = 1$;

b) $(\exists x\varphi)[a] = 0$ sse para todo $d \in dom(E)$, $\varphi[a\binom{x}{d}] = 0$;

c) $(\forall x\varphi)[a] = 1$ sse para todo $d \in dom(E)$, $\varphi[a\binom{x}{d}] = 1$;

d) $(\forall x\varphi)[a] = 0$ sse existe $d \in dom(E)$, $\varphi[a\binom{x}{d}] = 0$.

Dem.: Imediata, tendo em atenção as propriedades de *máximo* e de *mínimo*. □

Exemplo 180: Consideremos a estrutura L_{Arit} e as atribuições em E_{Arit} a^{ind} e a_0 definidas no Exemplo 170.

1. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_0 = s(0) < x_2$, tem-se:

   i) $\varphi_0[a^{ind}] = 1$, dado que $s(0)[a^{ind}] = 1, x_2[a^{ind}] = 2$ e $(1,2) \in \overline{<}$ (pois 1 é menor que 2);

   ii) $\varphi_0[a_0] = 0$, dado que $s(0)[a_0] = 1, x_2[a_0] = 0$ e $(1,0) \notin \overline{<}$ (pois 1 não é menor que 0);

2. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_1 = \exists x_2(s(0) < x_2)$ tem-se:

   i) $\varphi_1[a^{ind}] = 1$, pois existe $n \in \mathbb{N}_0$ t.q. $s(0) < x_2[a^{ind}\binom{x_2}{n}] = 1$ (como $s(0)[a^{ind}\binom{x_2}{n}] = 1$, basta tomar $n > 1$);

   ii) $\varphi_1[a_0] = 1$, pois existe $n \in \mathbb{N}_0$ t.q. $s(0) < x_2[a_0\binom{x_2}{n}] = 1$ (também neste caso se tem $s(0)[a_0\binom{x_2}{n}] = 1$, pelo que, basta tomar $n > 1$);

3. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_2 = \exists x_2\neg(s(0) < x_2)$ tem-se também o valor lógico 1, quer para a^{ind} quer para a_0 (porquê?);

4. Já para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_3 = \forall x_2(s(0) < x_2)$ tem-se valor lógico 0 para ambas as atribuições (de facto, a afirmação "para todo $n \in \mathbb{N}_0, 1 < n$" é falsa).

Exemplo 181: Consideremos agora a L_{Arit}-estrutura E_0 do Exemplo 168 e as atribuições a' e a'' em E_0 t.q., para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a'(x_i) = b$ e $a''(x_i) = a$ sse i é par.

1. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_0 = s(0) < x_2$ (considerada no exemplo anterior), tem-se:

i) $\varphi_0[a'] = 1$, dado que $s(0)[a'] = a, x_2[a'] = b$ e $(a, b) \in \overline{<}$;

ii) $\varphi_0[a''] = 0$, dado que $s(0)[a''] = a, x_2[a'] = a$ e $(a, a) \notin \overline{<}$;

2. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_1 = \exists x_2(s(0) < x_2)$ o valor lógico é 1 para ambas as atribuições (porquê?).

3. Verifique que as fórmulas φ_2 e φ_3 do exemplo anterior recebem valores lógicos 1 e 0, respetivamente, para ambas as atribuições.

Definição 182: Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em a. *Em* E, dizemos que a *satisfaz uma* L*-fórmula* φ, escrevendo $E \models \varphi[a]$, quando $\varphi[a]_E = 1$. Escrevemos $E \not\models \varphi[a]$ quando a não satisfaz φ.

Proposição 183: Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. Então:

a) $E \models \exists x\varphi[a]$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$;

b) $E \models \forall x\varphi[a]$ sse $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$, para todo $d \in dom(E)$;

c) $E \not\models \exists x\varphi[a]$ sse $E \not\models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$, para todo $d \in dom(E)$;

d) $E \not\models \forall x\varphi[a]$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $E \not\models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$.

Dem.: Consequência imediata da definição de satisfação e da Proposição 179. Por exemplo:

$$\begin{array}{lll} & E \not\models \exists x\varphi[a] & \\ \text{sse} & \exists x\varphi[a]_E = 0 & \text{(por definição de } \not\models) \\ \text{sse} & \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]_E = 0, \text{ para todo } d \in dom(E) & \text{(Proposição 179 b))} \\ \text{sse} & E \not\models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E) & \text{(por definição de } \not\models). \end{array}$$

$\square$

Proposição 184: Seja φ uma L-fórmula e sejam a_1 e a_2 atribuições numa L-estrutura E. Se $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in LIV(\varphi)$, então $E \models \varphi[a_1]$ sse $E \models \varphi[a_2]$.

Dem.: Por indução estrutural em φ. (Exercício.) $\square$

Proposição 185: Sejam φ uma L-fórmula, $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura, a uma atribuição em E e x uma variável substituível sem captura de variáveis por um L-termo t em φ. Então,

$$E \models \varphi[t/x][a] \text{ sse } E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}].$$

Dem.: A demonstração segue por indução estrutural em φ. Consideremos alguns dos casos.

1) Caso $\varphi \neq \perp$. Então, $\varphi[t/x] = \perp$ e ambos os lados da equivalência são falsos.

2) Caso $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$, com $R \in \mathcal{R}$, de aridade $n \geq 1$, e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Então:

$$\begin{array}{rl} & E \models R(t_1, ..., t_n)[a\binom{x}{t[a]}] \\ \overset{(1)}{\text{sse}} & (t_1[a\binom{x}{t[a]}], ..., t_n[a\binom{x}{t[a]}]) \in \overline{R} \\ \overset{(2)}{\text{sse}} & (t_1[t/x][a], ..., t_n[t/x][a]) \in \overline{R} \\ \overset{(1)}{\text{sse}} & E \models R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])[a] \\ \overset{(3)}{\text{sse}} & E \models R(t_1, ..., t_n)[t/x][a]. \end{array}$$

<u>Justificações</u>

(1)	Definição de satisfação.
(2)	Pela Proposição 177, $t_i[a\binom{x}{t[a]}] = [t/x]t_i[a].$, para todo $1 \leq i \leq n$
(3)	Definição de substituição.

3) Caso $\varphi = \forall y \varphi_1$.

3.a) Subcaso $y = x$. Entao, $E \models \varphi[t/x][a] \overset{(1)}{\text{sse}} E \models \varphi[a] \overset{(2)}{\text{sse}} E \models \varphi[a\binom{x}{t[a]}]$.

<u>Justificações</u>

(1)	Definição de substituição.
(2)	Pela proposição anterior, uma vez que, como $x \notin LIV(\varphi)$, as duas atribuições coincidem no valor das variáveis com ocorrências livres em φ.

3.b) Subcaso $y \neq x$. Então, $y \notin VAR(t)$ (de outra forma x não seria substituível sem captura de variáveis por t em φ). Assim,

$$\begin{array}{rl} & E \models (\forall y \varphi_1)[t/x][a] \\ \overset{(1)}{\text{sse}} & E \models \forall y(\varphi_1[t/x])[a] \\ \overset{(2)}{\text{sse}} & E \models \varphi_1[t/x][a\binom{y}{d}], \text{ para todo } d \in dom(E) \\ \overset{(3)}{\text{sse}} & E \models \varphi_1[a\binom{y}{d}\binom{x}{t[a\binom{y}{d}]}], \text{ para todo } d \in dom(E) \\ \overset{(4)}{\text{sse}} & E \models \varphi_1[a\binom{x}{t[a]}\binom{y}{d}], \text{ para todo } d \in dom(E) \\ \overset{(2)}{\text{sse}} & E \models \forall y \varphi_1[a\binom{x}{t[a]}] \end{array}$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.
(2)	Proposição 183.
(3)	Hipótese de indução.
(4)	Como $y \neq x$, $a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}$ e, da Proposição 173, por $y \notin VAR(t)$, $t[a] = t[a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}]$.

4) Restantes casos: exercício.

□

Definição 186: Uma L-fórmula φ é *válida* numa L-estrutura E (notação: $E \models \varphi$) quando, para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$. Utilizamos a notação $E \not\models \varphi$ quando φ não é válida em E, *i.e.*, quando existe uma atribuição a em E tal que $E \not\models \varphi[a]$.

Exemplo 187: Consideremos a estrutura E_{Arit}.

1. A fórmula $x_0 = x_0$ é válida em E_{Arit}; de facto, para qualquer atribuição a em E_{Arit}, tem-se $E_{Arit} \models x_0 = x_0[a]$, uma vez que $x_0[a] = a(x_0)$ e $(a(x_0), a(x_0)) \in \equiv$ ($a(x_0)$ e $a(x_0)$ são naturais iguais).

2. A fórmula $x_0 = x_1$ não é válida em E_{Arit}; por exemplo, para a atribuição a^{ind} tem-se $x_0[a^{ind}] = 0$, $x_1[a^{ind}] = 1$ e $(0, 1) \notin \equiv$, pelo que $E_{Arit} \not\models x_0 = x_1[a^{ind}]$.

3. A fórmula $\neg(x_0 = x_1)$ não é válida em E_{Arit}; por exemplo, para a atribuição a_0 que atribui 0 a todas as variáveis tem-se $x_0[a_0] = 0$, $x_1[a_0] = 0$ e $(0, 0) \in \equiv$, pelo que $E_{Arit} \models x_0 = x_1[a_0]$ e, consequentemente, $E_{Arit} \not\models \neg(x_0 = x_1)[a_0]$.

4. A fórmula $x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1)$ é válida em E_{Arit} (para qualquer atribuição a em E_{Arit}, a afirmação "$(a(x_0), a(x_1)) \in \equiv$ ou $(a(x_0), a(x_1)) \notin \equiv$" é verdadeira).

5. A fórmula $\exists x_0 \neg(x_0 = x_1)$ é válida em E_{Arit} (para toda a atribuição a em E_{Arit} a afirmação "existe $n \in \mathbb{N}_0$, $n \neq a(x_1)$" é verdadeira (tome-se, por exemplo, $n = a(x_1)+1$)) e a fórmula $\forall x_1 \exists x_0 \neg(x_0 = x_1)$ é também válida em E_{Arit} (porquê?).

Proposição 188: Seja E uma L-estrutura. Se φ é uma L-sentença, então $E \models \varphi$ sse para alguma atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$.

Dem.: Se $E \models \varphi$, é imediato que $E \models \varphi[a]$ para alguma atribuição a, pois $E \models \varphi$ significa que $E \models \varphi[a]$ para toda a atribuição a.

Admitamos agora que $E \models \varphi[a]$ para alguma atribuição a. Tomemos uma atribuição a' arbitrária em E. (Queremos provar que $E \models \varphi[a']$.) Como φ é uma L-sentença e portanto $LIV(\varphi) = \emptyset$, tem-se trivialmente que $a(x) = a'(x)$ para todo $x \in LIV(\varphi)$. Assim, atendendo à Proposição 184 e a que $E \models \varphi[a]$, conclui-se $E \models \varphi[a']$. $\square$

Definição 189: Uma L-fórmula φ é *(universalmente) válida* (notação: $\models \varphi$) quando é válida em toda a L-estrutura. Utilizamos a notação $\not\models \varphi$ quando φ *não é (universalmente) válida*, *i.e.*, quando existe uma L-estrutura E tal que $E \not\models \varphi$.

Observação 190: Uma L-fórmula φ não é universalmente válida quando existe alguma L-estrutura que não valida φ, ou seja, quando existe alguma L-estrutra E e alguma atribuição a em E t.q. $E \not\models \varphi[a]$.

Exemplo 191:

1. A L_{Arit}-fórmula $x_0 = x_1$ não é universalmente válida. Como vimos no exemplo anterior, esta fórmula não é válida na estrutura E_{Arit}.

2. No exemplo anterior, vimos que a fórmula $x_0 = x_0$ é válida na estrutura E_{Arit}. No entanto, esta fórmula não é válida em todas as L_{Arit}-estruturas. Por exemplo, se considerarmos uma L_{Arit}-estrutura $E_1 = (\{a, b\}, \overline{})$ em que $\equiv$ seja a relação $\{(a, a)\}$, E_1 não valida $x_0 = x_0$, pois considerando uma atribuição a' em E_1 t.q. $a'(x_0) = b$ teremos $E_1 \not\models x_0 = x_0[a']$, uma vez que o par $(x_0[a'], x_0[a'])$, que é igual ao par (b, b), não pertence à relação $\equiv$.

3. A L_{Arit}-fórmula $\forall x_0(x_0 = x_1 \lor \neg(x_0 = x_1))$ é universalmente válida. De facto, dadas uma qualquer L_{Arit}-estrutura $E = (D, \overline{})$ e uma qualquer atribuição a em E, tem-se:

$$\begin{array}{ll} & E \models \forall x_0(x_0 = x_1 \lor \neg(x_0 = x_1))[a] \\ \text{sse} & E \models (x_0 = x_1 \lor \neg(x_0 = x_1))[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in D \\ \text{sse} & E \models x_0 = x_1[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}] \text{ ou } E \models \neg(x_0 = x_1)[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in D \\ \text{sse} & (d, a(x_1)) \in \equiv \text{ ou } E \not\models x_0 = x_1[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in D \\ \text{sse} & (d, a(x_1)) \in \equiv \text{ ou } (d, a(x_1)) \notin \equiv, \text{ para todo } d \in D \end{array}$$

   e a última afirmação é verdadeira.

Definição 192: Uma L-fórmula φ é *logicamente equivalente* a uma L-fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, *i.e.*, quando para para toda a L-estrutura E e para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$ sse $E \models \psi[a]$.

Observação 193: As propriedades enunciadas para e equivalência lógica no capítulo anterior, mantêm-se válidas no contexto do Cálculo de Predicados. Por exemplo, $\Leftrightarrow$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}_L$.

Proposição 194: Sejam $x, y \in \mathcal{V}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$. As seguintes afirmações são verdadeiras.

a) $\neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$ **b)** $\neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$

c) $\forall x\varphi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$ **d)** $\exists x\varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$

e) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ **f)** $\exists x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

g) $\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$, mas não necessariamente $\models \forall x(\varphi \vee \psi) \to (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)$

h) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$, mas não necessariamente $\models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$

i) $\forall x\forall y\varphi \Leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$ **j)** $\exists x\exists y\varphi \Leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$

k) $\models \exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$, mas não necessariamente $\models \forall x\exists y\varphi \to \exists y\forall x\varphi$

l) $Qx\varphi \Leftrightarrow \varphi$ se $x \notin LIV(\varphi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

m) $Qx\varphi \Leftrightarrow Qy\varphi[y/x]$ se $y \notin LIV(\varphi)$ e x é substituível por y em φ, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

Dem.:

c) Sejam L uma linguagem, E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. (Queremos demonstrar que: $E \models \forall x\varphi[a]$ sse $E \models \neg\exists x\neg\varphi[a]$.)

$$\begin{array}{ll} & E \models \forall x\varphi[a] \\ \overset{(1)}{\text{sse}} & E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E) \\ \overset{(2)}{\text{sse}} & E \not\models \neg\varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E) \\ \overset{(3)}{\text{sse}} & E \not\models \exists x\neg\varphi[a] \\ \overset{(2)}{\text{sse}} & E \models \neg\exists x\neg\varphi[a] \end{array}$$

Justificações

(1) Por (b) da Proposição 183.
(2) Para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$, $E \models \psi[a]$ sse $E \not\models \neg\psi[a]$ (Exercício).
(3) Por (c) da Proposição 183.
(4) Para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$, $E \not\models \psi[a]$ sse $E \models \neg\psi[a]$ (Exercício).

k) Mostremos que $\models \forall x\exists y\varphi \to \exists y\forall x\varphi$ não é necessariamente válida.

Seja L uma linguagem contendo um símbolo R de relação, binário. Seja E uma L-estrutura de domínio $\{a, b\}$, onde a interpretação de R é o conjunto $\{(a, b), (b, a)\}$. Então, $E \models \forall x_0\exists x_1 R(x_0, x_1)$, mas $E \not\models \exists x_1\forall x_0 R(x_0, x_1)$ (Porquê?). Logo, $E \not\models \forall x_0\exists x_1 R(x_0, x_1) \to \exists x_1\forall x_0 R(x_0, x_1)$.

Demonstração das restantes afirmações: exercício.

□

Definição 195: Chamaremos *instanciação (de variáveis proposicionais com L-fórmulas)* a uma função do tipo $\mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}_L$. Cada instanciação i determina uma função do tipo $\mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}_L$ que satisfaz as seguintes condições[2]:

a) $i(\bot) = \bot$;

b) $i(\neg\varphi) = \neg i(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $i(\varphi \Box \psi) = i(\varphi) \Box i(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Definição 196: Uma L-fórmula ψ é uma *instância* de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional quando existe alguma instanciação i tal que $i(\varphi) = \psi$.

Exemplo 197: A L_{Arit}-fórmula $(x_0 = x_1) \rightarrow (\exists x_0(x_0 = 0) \rightarrow (x_0 = x_1))$ é uma instância da fórmula $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$ do Cálculo Proposicional. De facto, considerando-se uma instanciação i tal que $i(p_0)$ é a fórmula $(x_0 = x_1)$ e $i(p_1)$ é a fórmula $\exists x_0(x_0 = 0)$, tem-se:

$$\begin{array}{rl} & i(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)) \\ = & i(p_0) \rightarrow i(p_1 \rightarrow p_0) \\ = & (x_0 = x_1) \rightarrow (i(p_1) \rightarrow i(p_0)) \\ = & (x_0 = x_1) \rightarrow (\exists x_0(x_0 = 0) \rightarrow (x_0 = x_1)). \end{array}$$

Mas, esta fórmula L_{Arit}-fórmula é também instância, por exemplo, de $p_0 \rightarrow p_1$ e de p_0. Porquê?

Teorema 198 (Teorema da Instanciação): Se φ é uma tautologia do Cálculo Proposicional, então toda a instância de φ é universalmente válida.

Dem.: Suponhamos que φ uma tautologia do Cálculo Proposicional e que ψ é uma L-fórmula que é instância de φ. Seja E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. (Queremos demonstrar que $E \models \psi[a]$.) Uma vez que ψ é instância de φ, existe uma instanciação i tal que $i(\varphi) = \psi$. Seja v a valoração do Cálculo Proposicional que satisfaz as seguintes condições:

$$\text{para todo } p \in \mathcal{V}^{CP}, \;\; v(p) = \begin{cases} 1 \;\text{ se }\; E \models i(p)[a] \\ \\ 0 \;\text{ se }\; E \not\models i(p)[a] \end{cases}.$$

[2]A função determinada por uma instanciação i pode ser vista como uma operação de *substituição simultânea*, onde cada variável proposicional p é substituída por $i(p)$.

Demonstra-se (por indução estrutural em φ) que: $v(\varphi) = 1$ sse $E \models \psi[a]$. Donde, como $v(\varphi) = 1$ (pois φ é uma tautologia), se segue que $E \models \psi[a]$. □

Exemplo 199: Como vimos no exemplo anterior, a L_{Arit}-fórmula $(x_0 = x_1) \to (\exists x_0(x_0 = 0) \to (x_0 = x_1))$ é instância da tautologia $p_0 \to (p_1 \to p_0)$. Logo, pelo Teorema da Instanciação, podemos concluir que esta L_{Arit}-fórmula é universalmente válida.

Observação 200: Como seria de esperar, nem todas as fórmulas universalmente válidas são instâncias de tautologias. Por exemplo, vimos no Exemplo 191 que a fórmula $\forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))$ é universalmente válida e esta fórmula não é instância de qualquer tautologia (esta fórmula é apenas instância de variáveis proposicionais, que não são tautologias).

Definição 201: Sejam E uma L-estrutura, a uma atribuição em E e Γ um conjunto de L-fórmulas. Dizemos que o par (E, a) *realiza* Γ ou que (E, a) *satisfaz* Γ quando para todo $\varphi \in \Gamma$, $E \models \varphi[a]$. Diremos que (E, a) é uma *realização* de Γ quando (E, a) realiza Γ.

Exemplo 202: O par (E_{Arit}, a^{ind}) realiza o conjunto de L_{Arit}-fórmulas

$$\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_0) = x_1)\},$$

mas não realiza o conjunto de L_{Arit}-fórmulas

$$\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_2) = x_1)\}.$$

Definição 203: Um conjunto Γ de L-fórmulas diz-se *realizável* ou *satisfazível* ou *semanticamente consistente* quando existe alguma realização de Γ. Caso contrário, Γ diz-se *irrealizável* ou *insatisfazível* ou *semanticamente inconsistente*.

Exemplo 204:

a) O conjunto de L_{Arit}-fórmulas $\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_0) = x_1)\}$ é realizável (por exemplo, (E_{Arit}, a^{ind}) realiza-o) e o conjunto de L_{Arit}-fórmulas $\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_2) = x_1)\}$ também é realizável (Exercício.)

b) O conjunto de L_{Arit}-fórmulas $\{\forall x_0(x_0 = x_0), \neg(0 = 0)\}$, é irrealizável. Se existisse uma realização (E, a) deste conjunto teríamos:

1. $(d, d) \in \equiv$, para todo $d \in D$ (dado que $E \models \forall x_0(x_0 = x_0)[a]$);

2. $(\overline{0}, \overline{0}) \notin \equiv$ (dado que $E \models \neg(0 = 0)[a]$).

onde $^{-}$ denota a função interpretação de E. Ora, $\overline{0} \in D$, pelo que de 1. seguiria $(\overline{0}, \overline{0}) \in \equiv$, contradizendo 2.

Definição 205: Sejam E uma L-estrutura e Γ um conjunto de L-fórmulas. Dizemos que E é um *modelo* de Γ, escrevendo $E \models \Gamma$, quando para toda a atribuição a em E, (E, a) realiza Γ. Caso contrário, diremos que E *não é modelo* de Γ, escrevendo $E \not\models \Gamma$.

Exemplo 206: E_{Arit} é um modelo do conjunto formado pelas seguintes L-sentenças:

$$\begin{array}{l}
\forall x_0 \neg(0 = s(x_0)); \\
\forall x_0 \forall x_1((s(x_0) = s(x_1)) \to (x_0 = x_1)); \\
\forall x_0 \neg(s(x_0) < 0); \\
\forall x_0 \forall x_1((x_0 = s(x_1)) \to ((x_0 < x_1) \vee (x_0 = x_1))); \\
\forall x_0(x_0 + 0 = x_0); \\
\forall x_0 \forall x_1(s(x_0) + x_1 = s(x_0 + x_1)); \\
\forall x_0(x_0 \times 0 = 0); \\
\forall x_0 \forall x_1(s(x_0) \times x_1 = (x_0 \times x_1) + x_1).
\end{array}$$

A *axiomática de Peano* para a Aritmética é constituída pelas fórmulas acima descritas, juntamente com um princípio de indução para $\mathbb{N}_0$.

Proposição 207: Sejam Γ um conjunto de L-sentenças, E uma L-estrutura . Então, E é um modelo de Γ sse para alguma atribuição a em E, (E, a) realiza Γ.

Dem.: Exercício. □

Definição 208: Uma L-fórmula φ diz-se uma *consequência semântica* de um conjunto de L-fórmulas Γ (notação: $\Gamma \models \varphi$) quando para toda a L-estrutura E e para toda a atribuição a em E, se (E, a) realiza Γ, então $E \models \varphi[a]$.

Observação 209: Na denotação de consequências semânticas, usaremos simplificações de notação semalhantes às utilizadas no contexto do Cálculo Proposicional. Por exemplo, dadas L-fórmulas φ e ψ, $\varphi \models \psi$ abrevia $\{\varphi\} \models \psi$.

Exemplo 210: No contexto da linguagem L_{Arit},

$$\forall x_0 \neg(x_0 = s(x_0)) \models \neg(0 = s(0)).$$

De facto, dada uma L-estrutura $E = (D, \overline{\ })$ e dada uma atribuição em E tais que $E \models \{\forall x_0 \neg(x_0 = s(x_0))\}[a]$, temos que, para todo o $d \in D$, $(d, \overline{s}(d)) \notin \equiv$. Assim, como $\overline{0} \in D$, em particular, temos que $(\overline{0}, \overline{s}(\overline{0})) \notin \equiv$ e, consequentemente, $E \models \neg(0 = s(0))[a]$.

Notação 211: Adiante, usaremos a notação $LIV(\Gamma)$, com Γ um conjunto de L-formulas, para representar o conjunto $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} LIV(\varphi)$.

Proposição 212: Sejam φ e ψ L-fórmulas, seja Γ um conjunto de L-fórmulas, sejam x e y variáveis e seja t um L-termo.

a) Se $\Gamma \models \forall x \varphi$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma \models \varphi[t/x]$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $x \notin LIV(\Gamma)$, então $\Gamma \models \forall x \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi[t/x]$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma \models \exists x \varphi$.

d) Se $\Gamma \models \exists x \varphi$, $\Gamma, \varphi \models \psi$, e $x \notin LIV(\Gamma \cup \{\psi\})$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que (E, a) satisfaz Γ. (Queremos demonstrar que: $E \models \varphi[t/x][a]$.) Então, pela hipótese, $E \models \forall x \varphi[a]$. Assim, por definição de satisfação,

$$E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E),$$

e daqui, em particular, $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]$, pois $t[a] \in dom(E)$. Logo, como por hipótese x é substituível por t em φ, aplicando a Proposição 185 tem-se que $E \models \varphi[t/x][a]$.

c-d) Exercício.

$\square$