RESOLUÇÃO 2º TESTE

19. junho. 2015

1.

a) Temos que

$$
\dfrac{\cancel{p_1}^{(1)} \qquad \dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\neg p_1 \vee p_2}} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_1}^{(1)} \quad \cancel{\neg p_1}^{(3)}}{\perp}\,\neg E}{p_2}\,(\perp) \qquad \cancel{p_2}^{(3)}}{p_2}\,\vee E^{(3)}}{\dfrac{p_1 \wedge p_2}{\dfrac{(\neg p_1 \vee p_2) \to (p_1 \wedge p_2)}{p_1 \to ((\neg p_1 \vee p_2) \to (p_1 \wedge p_2))}\,\to I^{(1)}}\,\to I^{(2)}}\,\wedge I
$$

é uma derivação em DNP cuja conclusão é $p_1 \to ((\neg p_1 \vee p_2) \to (p_1 \wedge p_2))$ sem hipóteses não canceladas, o que prova que $p_1 \to ((\neg p_1 \vee p_2) \to (p_1 \wedge p_2))$ é um teorema.

b) Admitamos que $\Gamma \vdash p_1$ e que $\Gamma \vdash \neg p_1 \vee p_2$.
Então, existe uma derivação D_1 de p_1 a partir de Γ e uma derivação D_2 de $\neg p_1 \vee p_2$ a partir de Γ.

Assim,

$$
\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ p_1 \end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_2 \\ \neg p_1 \vee p_2 \end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ p_1 \end{matrix} \quad \cancel{\neg p_1}^{(1)}}{\perp}\,\neg E}{p_2}\,(\perp) \qquad \cancel{p_2}^{(1)}}{p_2}\,\vee E^{(1)}}{p_1 \wedge p_2}\,\wedge I
$$

é uma derivação em DNP cuja conclusão é $p_1 \wedge p_2$ e cujas hipóteses não canceladas são precisamente as de D_1 e as de D_2. Logo, são elementos de Γ.

Portanto, $\Gamma \vdash p_1 \wedge p_2$.

(ou resolução alternativa:

Admitamos que $\Gamma \vdash p_1$ e $\Gamma \vdash \neg p_1 \vee p_2$. Pelo Teorema da Adequação, sabemos que $\Gamma \models p_1$ e $\Gamma \models \neg p_1 \vee p_2$. Logo, se v é uma valoração tal que $v \models \Gamma$, então $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$. Ora, se $v(p_1) = 1$, segue-se que $v(\neg p_1) = 0$, pelo que, sendo $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos que $v(p_2) = 1$. Assim, se v é uma valoração tal que $v \models \Gamma$, então $v(p_1) = v(p_2) = 1$ e, por conseguinte, $v(p_1 \wedge p_2) = 1$. Logo, $\Gamma \models p_1 \wedge p_2$. Novamente pelo Teorema da Adequação, podemos afirmar que $\Gamma \vdash p_1 \wedge p_2$)

c) Consideremos $\varphi = p_1$ e $\psi = p_2$.

Pelo Teorema da Adequação, sabemos que

$$p_1 \to p_2, p_2 \vdash p_1$$

se e só se

$$p_1 \to p_2, p_2 \models p_1.$$

Se v é uma valoração tal que $v(p_1) = 0$ e $v(p_2) = 1$, temos que

$$v \models \{p_1 \to p_2, p_2\} \quad (\text{pois } v(p_1 \to p_2) = v(p_2) = 1)$$

mas

$$v(p_1) = 0. \quad \text{Logo,}$$

$$p_1 \to p_2, p_2 \not\models p_1$$

e, portanto,

$$p_1 \to p_2, p_2 \nvdash p_1.$$

Assim, a afirmação é falsa.

2. $L = (\{c, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$

$\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 2$, $\mathcal{N}(g) = 1$, $\mathcal{N}(R) = 2$

a) Consideremos $t = g(f(c,c))$.

Há uma ocorrência de cada um dos símbolos de função f e g e duas ocorrências de c em t.

Os subtermos de t são c, $f(c,c)$ e $g(f(c,c))$, pelo que t tem três subtermos.

Uma sequência de formação de t pode ser:

c, $f(c,c)$, $g(f(c,c))$.

b) $\varphi = \forall x_0 (R(f(x_0,c), x_1) \to \exists x_1 R(g(x_0), x_1))$

i) $\forall x_0 (R(f(x_0,c), g(x_0)) \to \exists x_1 R(g(x_0), x_1))$.

ii) A primeira ocorrência de x_1 em φ (a contar da esquerda para a direita) é livre e está no alcance do quantificador $\forall x_0$. Assim, se $x_0 \in var(t)$, x_1 não será substituível por t em φ (com $t \in T_L$). Por exemplo, x_1 não é substituível por $g(x_0)$ em φ pois $x_0 \in VAR(g(x_0)) = \{x_0\}$.

Logo, a afirmação é falsa.

c) $h: T_L \to \{0,1\}$ é definida por recursão estrutural do seguinte modo:

1) $h(c) = 1$;
2) $h(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;
3) $h(f(t_1,t_2)) = \text{máximo}(h(t_1), h(t_2))$, para quaisquer $t_1, t_2 \in T_L$;
4) $h(g(t)) = h(t)$, para todo $t \in T_L$.

3.

a)

i) $1 + (x_1 + x_2)\,[a] = \bar{1} \,\bar{+}\, (a(x_1) \,\bar{+}\, a(x_2))$

$= 1 + (1+1) + (2+1)$

$= 1+2+3 = 6.$

ii) $\exists x_2 \left(R(x_1 + x_2) \vee \neg P(x_2 + x_2)\right) = \sigma$

$\sigma[a] = 1$ sse Existe $d \in \operatorname{dom} E$ t.q. $\left(R(x_1+x_2) \vee \neg P(x_2+x_2)\right)\left[a\binom{x_2}{d}\right] = 1$

sse $\exists d \in \mathbb{N}$ t.q. $\left(R(x_1+x_2)\left[a\binom{x_2}{d}\right] = 1 \text{ ou } \neg P(x_2+x_2)\left[a\binom{x_2}{d}\right] = 1\right)$

sse $\exists d \in \mathbb{N}$ t.q. $\left(a(x_1) \,\bar{+}\, d \in \bar{R} \text{ ou } d \,\bar{+}\, d \notin \bar{P}\right)$

sse $\exists d \in \mathbb{N}$ t.q. ($2+d$ é primo ou $d+d$ não é par), uma

afirmação verdadeira (basta tomar $d=3$).

Logo, $\sigma[a] = 1$.

b) $\varphi : \forall x_1 \left(P(x_1) \to \neg\left(P(x_1+1) \vee R(x_1+x_1)\right)\right)$

(i) Seja a' uma atribuição em E.

Temos que

$\varphi[a']_E = 1$ sse Para todo $d \in \operatorname{dom} E$ $\left(P(x_1) \to \neg\left(P(x_1+1) \vee R(x_1+x_1)\right)\right)\left[a'\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse $\forall d \in \mathbb{N}$, $\left(P(x_1)\left[a'\binom{x_1}{d}\right] = 0 \text{ ou } \neg\left(P(x_1+1) \vee R(x_1+x_1)\right)\left[a'\binom{x_1}{d}\right] = 1\right)$.

sse $\forall d \in \mathbb{N}$ $\left(d \notin \bar{P} \text{ ou } P(x_1+1) \vee R(x_1+x_1)\left[a'\binom{x_1}{d}\right] = 0\right)$

sse $\forall d \in \mathbb{N}$ $\left(d \notin \bar{P} \text{ ou } \left(P(x_1+1)\left[a'\binom{x_1}{d}\right] = 0 \text{ e } R(x_1+x_1)\left[a'\binom{x_1}{d}\right] = 0\right)\right)$

sse $\forall d \in \mathbb{N}$ $\left(d \notin \bar{P} \text{ ou } \left(d+1 \notin \bar{P} \text{ e } d+d \notin \bar{R}\right)\right)$

sse $\forall d \in \mathbb{N}$ (d é ímpar ou ($d+1$ é ímpar e $2d$ não é primo)),

uma afirmação verdadeira pois dado $d \in \mathbb{N}$, d é ímpar ou d é par. Sendo d par, $d>2$. Logo, 2d não é primo (será divisível por 2 e será diferente de 2) e, além disso, d+1 será ímpar.

Portanto, $\varphi[a']_E = 1$.

Assim, $\varphi[a']_E = 1$ para qualquer atribuição a' em E, donde φ é válida em E.

ii) Seja $E' = (\mathbb{N}, \tilde{\ })$ a estrutura igual a E exceto na interpretação de R, que é $\tilde{R} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é múltiplo de } 3\}$

Dada uma atribuição a'' em E', temos que

$\varphi[a'']_{E'} = 1$ sse $\forall d \in \mathbb{N}$, (d é ímpar ou (d+1 é ímpar e 2d não é múltiplo de 3))

Para $d=6$, temos $\begin{cases} d \text{ é par} \\ d+1 = 7 \text{ é ímpar} \\ 2d = 12 \text{ é múltiplo de } 3 \end{cases}$

Assim, $\varphi[a'']_{E'} = 0$.

Portanto, $E' \not\models \varphi$ e φ não é universalmente válida.

c) $\forall x_0 \, (R(x_0) \to (\neg P(x_0) \vee x_0 = 1+1))$

4. Seja $E = (\mathbb{N}, \bar{\ })$ onde $\bar{c} = 2$ e $\bar{Q} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$.
Seja a uma atribuição em E.
Temos que $Q(c)[a]_E = 1$ sse $\bar{c} \in \bar{Q}$ sse 2 é par, o que é verdade. Logo, $Q(c)[a]_E = 1$.

Além disso,
$$\neg \forall x_1 \, Q(x_1) \Leftrightarrow \exists x_1 \, \neg Q(x_1)$$
e $\exists x_1 \, \neg Q(x_1) \, [a]_E = 1$ sse $\exists d \in \mathbb{N} : d \notin \bar{Q}$
sse $\exists d \in \mathbb{N}$: d não é par, o que é verdade.

Portanto,

$$\exists x_1 \neg Q(x_1)\,[a]_E = 1.$$

Logo, (E, a) é uma realização de T, pelo que T é semanticamente consistente.

5. Se φ é instância de alguma tautologia, então φ é universalmente válida. Assim, para qualquer L-estrutura E e qualquer atribuição a em E, $\varphi[a]_E = 1$. (1)

Sejam E uma L-estrutura e a' uma atribuição em E.

Temos que

$E \models \forall x \varphi\,[a']$ sse $E \models \varphi\left[a'\binom{x}{d}\right]$ para qualquer $d \in \operatorname{dom} E$.

Tomando $a = a'\binom{x}{d}$ em (1), segue-se que

$$\varphi\left[a'\binom{x}{d}\right]_E = 1.$$

Logo, $E \models \varphi\left[a'\binom{x}{d}\right]$.

Assim, $E \models \forall x \varphi\,[a']$.

Portanto, $\forall x \varphi$ é universalmente válida.