Universidade do Minho

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Ano Letivo 2017/18

Caderno de Apontamentos das Aulas Teóricas

Modelos Estocásticos de Investigação Operacional

1. *Processos Estocásticos e Programação Dinâmica Estocástica*
2. *Teoria de Filas de Espera*
3. *Gestão de Stocks ou Inventários*

1.1 Introdução aos Processos Estocásticos

Sistemas, Estados e Transições

Sistema representa a situação em estudo.
ex., clientes numa fila de espera do banco
ex., equipamento num processo produtivo

Estado representa a descrição do sistema.
ex., número de clientes na fila de espera
ex., equipamento a funcionar *vs.* avariado

O sistema e os estados possíveis são determinados de acordo com:

a) aquilo que se pretende saber;

b) o método de análise que se supõe o mais apropriado.

A mudança de um estado para outro estado, num determinado passo do processo, designa-se por ***transição***.

Matriz transição é a matriz de probabilidades de mudança a partir de um estado para qq outro estado, num determinado passo do processo. É necessariamente uma *matriz quadrada*!

Sistemas estocásticos ou probabilísticos

Em virtude das influências aleatórias, não se pode prever, com uma certeza absoluta, o comportamento futuro do sistema.

Em vez disso, apenas podemos esperar encontrar respostas para questões do seguinte tipo (*ex.s*):

a) Com que frequência a fila de espera do banco excederá 10 clientes?

b) Qual a probabilidade de o equipamento estar a funcionar após um ano desde a última reparação?

Na generalidade, as teorias que estão na base da modelação estocástica são complexas, e ainda não foram desenvolvidas extensivamente.

Uma das exceções, é a teoria das ***Cadeias de Markov*** (processos Markovianos). Esta é uma teoria relativamente fácil e já estudada extensivamente.

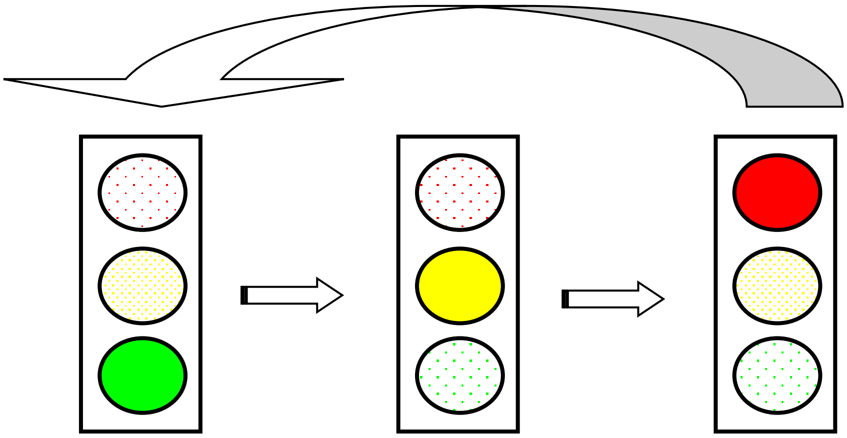
Estados nas Cadeias de Markov

Os ***estados*** do sistema devem ser especificados para instantes de tempo particulares, e, além disso, devem ser:

a) ***exaustivos***, *i.e.* o sistema deverá ser sempre descrito por algum deles;

b) ***mutuamente exclusivos***, *i.e.* o sistema só poderá ser descrito por um único estado, num determinado instante ou estágio.

Exemplo 1: Semáforo (continental)



Estados possíveis: Verde, Amarelo, Vermelho

Transição válida: *ex.* Verde → Amarelo

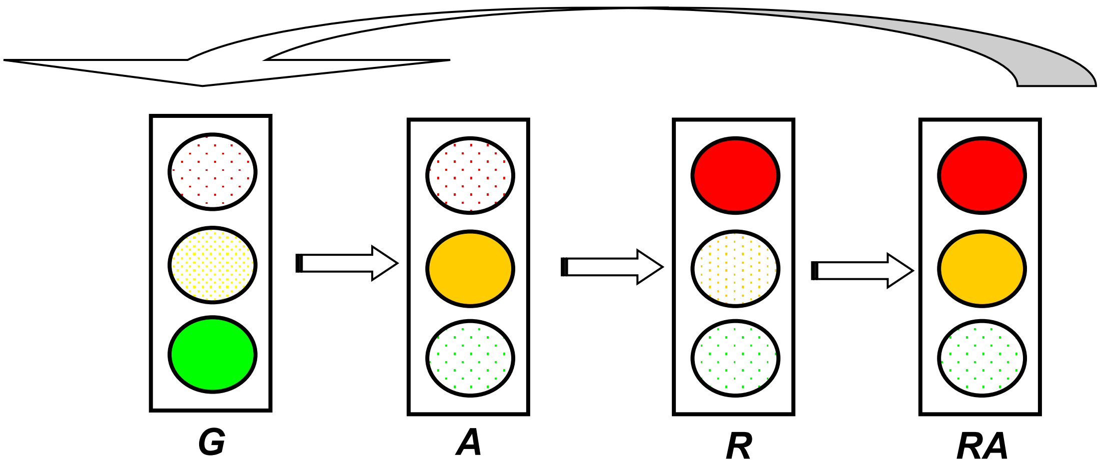
Transição não válida: *ex.* Verde → Vermelho

Matriz de transição:

(*matriz "estocástica" ou de probabilidades*)

De: \ Para:	***Verde***	***Amarelo***	***Vermelho***
Verde	0	1	0
Amarelo	0	0	1
Vermelho	1	0	0

Exemplo 2: Semáforo (britânico)



Neste caso:

- Não será aceitável a definição de estados - ***G, A, R*** - porque, embora exaustivos, não são mutuamente exclusivos!

- O conjunto completo de estados deverá ser então: ***G, A, R, RA***

Matriz de transição:

De: \ Para:	***Green***	***Amber***	***Red***	***Red-Amber***
Green	0	1	0	0
Amber	0	0	1	0
Red	0	0	0	1
Red-Amber	1	0	0	0

Exemplo 3: Produção

Cada semana uma empresa recebe 0, 1, ou 2 encomendas de um seu produto com probabilidades respetivas de 0.5, 0.3 e 0.2.

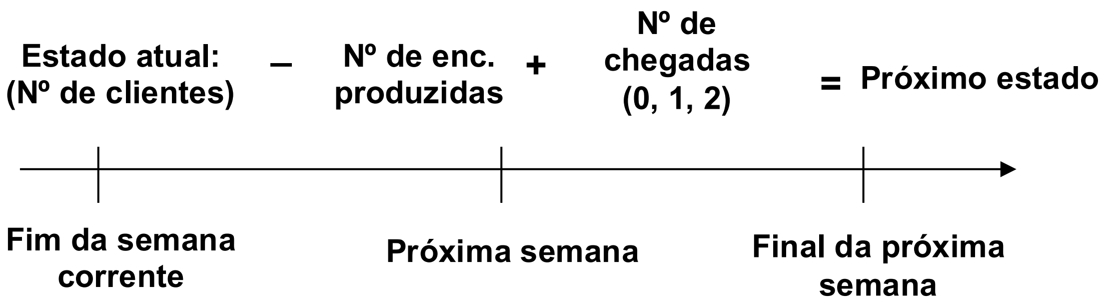
A empresa, no entanto, só pode produzir uma encomenda por semana.

Os clientes interessados podem juntar-se à fila de espera para atendimento, a qual é revista no final de cada semana.

Sistema: lista de esperas.

Estados: número de clientes na lista no final da semana (*N.B. responde a: o quê? e quando?)*

Exemplo 3: Produção (cont.)



<u>*Por exemplo:*</u>

$$0 - 0 + (\overset{0.5}{0}, \overset{0.3}{1}, \overset{0.2}{2}) = (\overset{\boxed{0.5}}{0}, \overset{\boxed{0.3}}{1}, \overset{\boxed{0.2}}{2})$$

$$1 - 1 + (0, 1, 2) = (0, 1, 2)$$

$$2 - 1 + (0, 1, 2) = (1, 2, 3)$$

A matriz de probabilidades ou de transição será:

	0	***1***	***2***	***3***	**...**
0	0.5	0.3	0.2	0	...
1	0.5	0.3	0.2	0	...
2	0	0.5	0.3	0.2	...
3	0	0	0.5	0.3	...
...	...	...	...	...	...

N.B. Os estados devem ser listados, na linha e na coluna, em igual sequência!

Exemplo 3: Produção (2º caso)

Se a lista de espera (o sistema) não devesse exceder 2 clientes:

<u>*Exemplo:*</u>

$$2 - 1 + (\overset{0.5}{0},\ \overset{0.3+0.2}{1}) = (1,\ 2)$$

A nova matriz de transição seria:

	0	***1***	***2***
0	0.5	0.3	0.2
1	0.5	0.3	0.2
2	0	0.5	0.5

Na prática, o limite superior da fila é maior do que 2, por exemplo 20,… tudo depende da razoabilidade de se ignorar valores superiores a um determinado limite crítico.

O que é um processo estocástico?

Seja X uma variável em análise, característica do sistema de interesse, e designe-se por X_t o valor dessa variável no instante t.

Ex.: a procura em diferentes períodos de tempo.

Numa situação de incerteza, X_t não pode ser conhecida antecipadamente, mas antes estimada como uma variável aleatória.

Um *processo estocástico* é simplesmente uma descrição da relação entre os valores aleatórios sequenciais:

$$X_0, X_1, X_2, \ldots$$

Um processo estocástico pode ser *discreto* ou *contínuo*, de acordo com a medida de tempo em consideração.

Exemplos de processos estocásticos:

(1) discreto (X_n): procura semanal.

(2) contínuo (X_t): número de clientes na fila do hipermercado, t minutos depois da abertura.

O que é uma cadeia de Markov?

(ou *processo Markoviano discreto*)?

É um processo estocástico discreto, em que:

$$P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$
$$\boxed{= P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1})}$$

i.e., em que a distribuição de probabilidades de ocorrência de um particular valor da varável aleatória X (estado), no instante ou *estágio* n, depende apenas da anterior ocorrência (no instante $n\text{-}1$).

Exemplo: o jogo do monopólio, e a probabilidade de, numa jogada, parar em determinada casa.

Matriz de transição: É a matriz cujo termo genérico representa a probabilidade de transição do estado i para o estado j, quando se passa do estágio n para o estágio seguinte $n+1$ (*i.e.* passo n): $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}$.

$$P_n = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix}$$

Característica 1: $0 \le p_{ij} \le 1 \quad \forall i, j \in S$

Característica 2: $\sum_{j=1}^{j=s} p_{ij} = 1 \qquad \forall i \in S$

($S = \{1, 2, \ldots, s\}$, conjunto finito de estados)

Probabilidade de transição após *n* passos

Se a cadeia de Markov está no estado i no estágio m, qual é a probabilidade de, após n transições posteriores e consecutivas, ficar no estado j?

Esta probabilidade, independente de m, é escrita como:

$$P(X_{m+n} = j \mid X_m = i) = P(X_n = j \mid X_0 = i) = S_n(i, j)$$

É óbvio que, se $n=1$, $S_1(i, j) = p_{ij}$. $\qquad S_1 = P$

No caso de $n=2$, virá $S_2(i, j) = \sum_{r=1}^{s} p_{ir} \cdot p_{rj}$ $\qquad S_2 = P^2$

No caso geral, será $S_n(i, j) = \sum_{r=1}^{s} S_{n-1}(i, r) \cdot p_{rj}$, ou:

$$\boxed{S_n = S_{n-1} \cdot P = P^n}$$

Inicialização: $S_0(i, j) = P(X_0 = j \mid X_0 = i)$

$S_0(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases}$, ou seja, $S_0 = I$.

Exemplo 4: "Stands" de automóveis

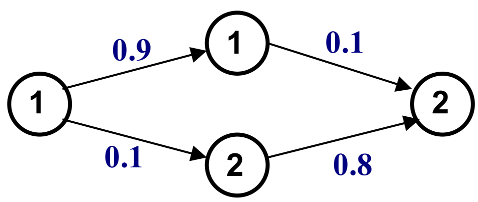
Considere:

- Dois *stands* de vendas de automóveis (1º e 2º);
- Se um cliente possui um automóvel comprado no 1º (2º) *stand*, há uma possibilidade de 90% (80%) de comprar novamente no 1º *stand* na próxima aquisição.

A matriz de transição será:

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Supondo que um dos clientes possui um automóvel comprado no 1º stand, qual é a probabilidade desse cliente vir a adquirir um automóvel ao 2º stand, nas suas futuras segunda e terceira aquisições?



$0.9*0.1 + 0.1*0.8 = 0.17$

P =	0.900	0.100
	0.200	0.800
P2 =	0.830	0.170
	0.340	0.660
P3 =	0.781	0.219
	0.438	0.562

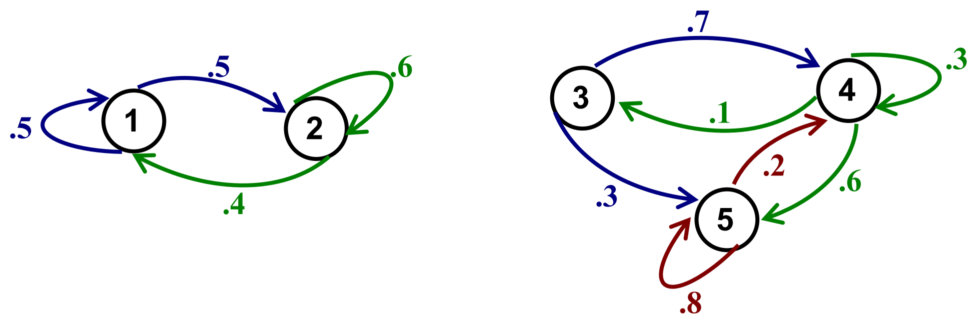
P18 =	0.667	0.333
	0.666	0.334
P19 =	0.667	0.333
	0.666	0.334
P20 =	0.667	0.333
	0.666	0.334

<u>Respostas:</u> 17% e 22%.

Classificação dos estados

(de uma cadeia de Markov)

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.4 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$



Caminho entre dois estados i e j: É uma sequência de transições (com probabilidade > 0) que permitem chegar a j partindo de i.

O estado j é *acessível* a partir do estado i, se existe um caminho que permita chegar ao estado j, a partir do estado i.

Ex.: 5 acessível a partir de 3 e vice-versa.

Os estados i e j *comunicam* entre si, se j é acessível a partir de i, e i é acessível a partir de j.

Ex.: Estados 1 e 2 comunicam.

O estado i é um estado *absorvente* (ou *armadilha*), se $p_{ii} = 1$.

Classificação dos estados (*cont.*)

(de uma cadeia de Markov)

O estado i é <u>*transiente*</u> se existe um estado j, acessível a partir de i, tal que o estado i não seja, no entanto, acessível a partir do estado j.

Um estado não transiente é chamado de <u>*recorrente*</u>.

<u>Ex.:</u> todos os estados são recorrentes, no exemplo anterior.

Uma <u>*cadeia recorrente*</u> é um conjunto de estados tais que o sistema executa transições no interior do conjunto, mas nunca o abandona, uma vez que nele tenha entrado. Se tiver mais que uma cadeia recorrente, o processo diz-se de *cadeia múltipla* ou de *multi-cadeia*, *ex.* dupla: $\{1,2\}$, $\{3,4,5\}$.

O estado i é <u>*periódico*</u>, de periodicidade *k>1*, se todos os caminhos que partem de i e chegam a i são de duração múltipla de *k*. Um estado não periódico é dito de <u>*aperiódico*</u>.

Um processo é periódico se possui algum estado periódico. <u>*Para que um processo seja periódico, é necessário que tenha uma matriz de transição cujos elementos da diagonal principal sejam todos nulos!*</u>

Cadeias ergódicas

Uma cadeia de Markov é <u>*ergódica*</u> se todos os estados dessa cadeia são recorrentes, aperiódicos e comunicam com cada um dos restantes.

$\Rightarrow$ *N.B. <u>Necessariamente, terá de ser uma cadeia única!</u>*

<u>Exemplos</u>

- *Porque é que a cadeia anterior não é ergódica?*
- *Quais das seguintes cadeias são ergódicas?*

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estado estacionário de uma cadeia ergódica

Teorema

Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov <u>ergódica</u>. Então existe um vetor $\pi = [\pi_1 \ \ \pi_2 \ldots \pi_s]$, tal que:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_s \end{bmatrix}$$

O vetor $\pi = [\pi_1 \ \ \pi_2 \ldots \pi_s]$ representa a *distribuição estacionária* (ou de *equilíbrio*) da cadeia de Markov.

(N.B. $\sum_{j=1}^{j=s} \pi_j = 1$*)*

<u>N.B.</u> Relacionando com a notação anterior, podemos dizer então que: $\lim_{n\to\infty} S_n(i,j) = \lim_{n\to\infty} \left(P^n\right)_{ij} = \pi_j$.

Para n grande: $S_{n+1}(i,j) \cong S_n(i,j) \cong \pi_j$

Em termos matriciais, facilmente se chega à conclusão de que:

$$\boxed{\pi = \pi \cdot P}$$

Determinação do estado estacionário

(Através de um sistema de equações)

Seja, por exemplo, $P = \begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix}$

Ficará: $\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \pi_1 = .90\pi_1 + .20\pi_2 \\ \pi_2 = .10\pi_1 + .80\pi_2 \end{cases}$$

Tem uma infinidade de soluções, porque *rank=1<2*. Mas, substituindo uma das equações pela equação de probabilidade total, fica:

$$\begin{cases} \pi_1 = .90\pi_1 + .20\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

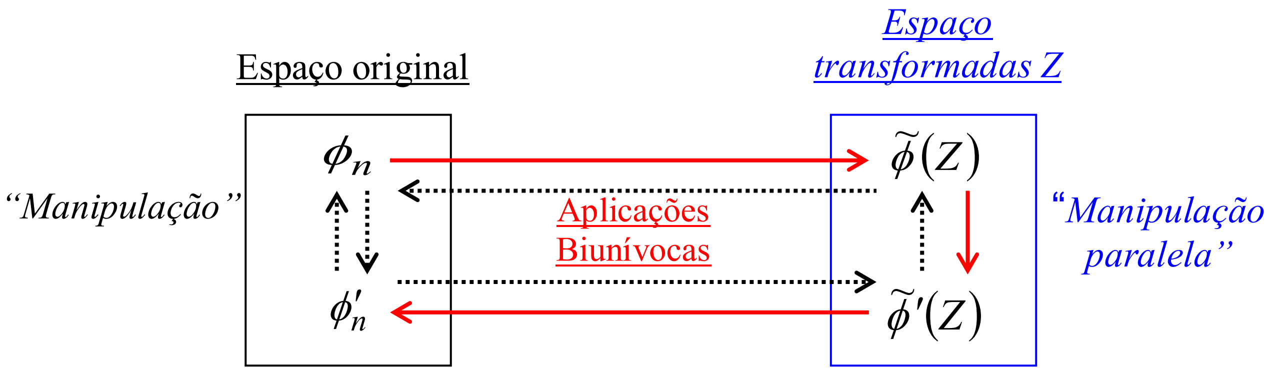
$$\begin{cases} \pi_1 = 2/3 \\ \pi_2 = 1/3 \end{cases}$$

Como interpretar estes resultados, no caso do exemplo dos stands de automóveis?

Estado estacionário (aplicação)

- Margem de lucro L;
- Possibilidade de fazer publicidade (*stand* 1) aumentando para 95% as hipóteses de fidelidade na escolha do *stand* por parte dos clientes:
- *i.e.*, nova $P = \begin{bmatrix} .95 & .05 \\ .20 & .80 \end{bmatrix}$;
- no entanto, a publicidade custará aproximadamente $200L$, para o período médio de troca de automóvel;
- *Será que vale a pena o investimento?*

Método da *"Transformada Z"*



Considere-se a função ϕ_n que toma valores no conjunto de índices $n = 0, 1, 2, \ldots$, tal que:

$$\phi_n \geq 0 \quad n \geq 0$$

$$\phi_n = 0 \quad n < 0$$

A *transformada Z* de ϕ_n é definida como:

$$\boxed{\tilde{\phi}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \cdot Z^n}$$

para valores de Z tal que a soma converge, *i.e.* tal que $|Z| < 1$.

<u>Função</u> (ex.)	***<u>Transformada Z</u>***
(1) $\phi_n \quad =1; \quad n \geq 0$ $\qquad =0; \quad n<0$	$\tilde{\phi}(Z) \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \cdot Z^n$ $=1+Z+Z^2+\ldots+Z^n+\ldots$ $=\dfrac{1}{1-Z}$
(2) $c\phi_n$	$\tilde{\phi}(Z) \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} (c\phi_n)\cdot Z^n \quad = c\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \cdot Z^n$ $=c\tilde{\phi}(Z)$
(3) $F_T=\theta_n+\phi_n$	$\tilde{\phi}(Z) \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} (\theta_n+\phi_n)\cdot Z^n$ $=\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cdot Z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \cdot Z^n$ $=\tilde{\theta}(Z)+\tilde{\phi}(Z)$
(4) $\alpha^n\phi_n$	$\tilde{\phi}(Z) \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha^n \phi_n\right)\cdot Z^n \; = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n (\alpha \cdot Z)^n$ $=\tilde{\phi}(\alpha \cdot Z)$
(5) ϕ_{n+1}	$\tilde{\phi}(Z) \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{n+1} \cdot Z^n$ $=\phi_1+\phi_2 Z+\phi_3 Z^2+\ldots$ $=\dfrac{1}{Z}\left(-\phi_0+\phi_0+\phi_1 Z+\phi_2 Z^2+\ldots\right)$ $=\dfrac{1}{Z}\left(\tilde{\phi}(Z)-\phi_0\right)$

Cálculo de S_n pelo *método da transformada* Z

Seja $\widetilde{S}(Z)$ a *transformada* Z de S_n.

A partir de: $\boxed{S_{n+1} = S_n \cdot P}$

e aplicando as transformadas fundamentais *(5)* e *(2)*, respetivamente aos lados esquerdo e direito da equação, obtém-se:

$$\frac{1}{Z}\left[\widetilde{S}(Z) - S_0\right] = \widetilde{S}(Z) \cdot P$$

$$\widetilde{S}(Z) \cdot (I - ZP) = S_0 = I$$

A *transformada* Z de S_n pode pois calcular-se, fazendo:

$$\boxed{\widetilde{S}(Z) = (I - ZP)^{-1}}$$

Exemplo de aplicação

Transformada Z

Cálculo das matrizes transiente e limite (*cadeia ergódica*):

$$P = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$(I - ZP) = \begin{bmatrix} 1-(3/4)Z & -(1/4)Z \\ -(1/3)Z & 1-(2/3)Z \end{bmatrix}$$

$$(I - ZP)^{-1} = \frac{1}{(1-Z)\cdot(1-(5/12)Z)} \begin{bmatrix} 1-(2/3)Z & (1/4)Z \\ (1/3)Z & 1-(3/4)Z \end{bmatrix}$$

Pondo esta expressão na forma: $\dfrac{X}{1-Z} + \dfrac{Y}{1-(5/12)Z}$

resulta que, por exemplo:

$$\frac{1-(2/3)Z}{(1-Z)\cdot(1-(5/12)Z)} = \frac{X}{1-Z} + \frac{Y}{1-(5/12)Z} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X = 4/7 \\ Y = 3/7 \end{cases}$$

Resolvendo de forma semelhante para todos os outros elementos da matriz, obtém-se:

$$\tilde{S}(Z) = \frac{1}{1-Z} \begin{bmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 4/7 & 3/7 \end{bmatrix} + \frac{1}{1-(5/12)Z} \begin{bmatrix} 3/7 & -3/7 \\ -4/7 & 4/7 \end{bmatrix}$$

Exemplo de aplicação

Transformada Z

<u>Exemplo do cálculo da matriz transiente e limite</u> (cont.)

Tomando as transformadas inversas, de:

$$\tilde{S}(Z) = \frac{1}{1-Z}\begin{bmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 4/7 & 3/7 \end{bmatrix} + \frac{1}{1-(5/12)Z}\begin{bmatrix} 3/7 & -3/7 \\ -4/7 & 4/7 \end{bmatrix}$$

Pode obter-se, a partir das relações fundamentais *(1)*+*(2)*, e *(4)*+*(2)*, respetivamente para o 1º e 2º termos:

$$S_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 4/7 & 3/7 \end{bmatrix}}_{S} + \underbrace{\underbrace{(5/12)^n}_{\alpha^n}\begin{bmatrix} 3/7 & -3/7 \\ -4/7 & 4/7 \end{bmatrix}}_{T_n}$$

Genericamente, obtém-se então: $S_n = S + T_n$.

Neste caso particular, pode observar-se que $T_n \to 0$, à medida que $n \to \infty$, o que impele $S_n \to S$! <u>Contudo, este comportamento pode ser generalizado para qq outra cadeia de Markov *ergódica*, pois nestas é certo que</u> $|\alpha| < 1$.

Cadeias de Markov periódicas

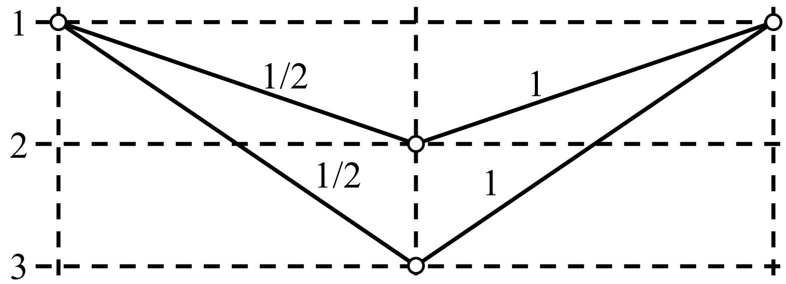
Exemplo

São processos em que o conjunto de estados I pode ser dividido em subconjuntos disjuntos $I_0, I_1, I_2, ..., I_{k-1}$, tais que, se o sistema estiver no estado I_0 após n transições, estará no estado I_t após $n+t$ transições ($t = 1,2,...,n-1$), e de novo, em I_0 após $n+k$ transições.

Ex.: a cadeia de Markov representada pela matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

terá periodicidade k=2:



Os conjuntos disjuntos são: $I_0 = \{1\}$ e $I_1 = \{2,3\}$.

Cadeias de Markov periódicas

Exemplo (cont.)

Da aplicação do método da transformada Z, ao exemplo da cadeia periódica anterior, resulta:

$$S_n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} + (-1)^n \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

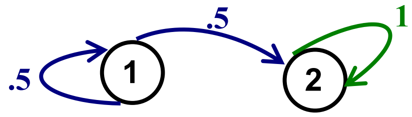
Neste caso, é notório que o sistema oscilará contínua e indefinidamente, não existindo um valor de n para o qual as linhas da matriz limite sejam idênticas.

Cadeias de Markov com estados absorventes

Exemplos

1º Exemplo, no qual o estado 2 é absorvente ($p_{22}=1$):

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



A cadeia não é ergódica. Porquê? A decomposição da matriz S_n conduz a:

$$S_n=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+(-1/2)^n\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2º Exemplo: a que matriz limite conduzirá a seguinte cadeia, com dois estados absorventes (considere que $p_{22}<1$)?

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex.: se $p_{21}=p_{22}=p_{23}=1/3$*:*

$$S_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+(-1/3)^n\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tempos médios da primeira passagem

Seja:

m_{ij} = número esperado de transições para atingir o estado j, supondo que o estado atual é o estado i.

$$m_{ij} = p_{ij}(1) + \sum_{r \neq j} p_{ir}(1 + m_{rj})$$

ou $$m_{ij} = p_{ij} + \sum_{r \neq j} p_{ir} + \sum_{r \neq j} p_{ir} \cdot m_{rj}$$

$$m_{ij} = 1 + \sum_{r \neq j} p_{ir} \cdot m_{rj}$$

Pode mostrar-se ainda que: $m_{ii} = \dfrac{1}{\pi_i}$

No nosso exemplo (*stands*):

$$m_{11} = \frac{1}{2/3} = 1.5$$

$$m_{22} = \frac{1}{1/3} = 3$$

$$m_{12} = 10$$

$m_{21} = 5$ *Como interpretar?*

Exemplo: Doença com 2 tratamentos alternativos

- Duas formas de tratamento (T1, T2=cirúrgico);

- Quando um paciente é detetado com a doença, é medicado imediatamente com T1;

Após vários anos de colheita de dados, chegou-se à conclusão de que:

1. Se um paciente está sob medicação T1, num ano, é 33% provável que venha a ser sujeito a tratamento T2 no ano seguinte, e 10% provável que venha a falecer. Caso contrário, continuará sob medicação T1.

2. Se está sob tratamento T2, num dado ano, tem 15% probabilidade de voltar ao tratamento T1, e 5% de falecer, durante o ano seguinte. Caso contrário, continuará sob tratamento T2.

Exemplo: Doença com 2 tratamentos alternativos (cont.)

a) Definir o sistema, os estados, e a matriz de transição.

b) Para um determinado paciente, qual a probabilidade de continuar sob tratamento T1, mudar para T2, ou falecer após 1, 2, 5, 10, e 20 anos?

c) Supondo o aparecimento de um conjunto de 30 novos pacientes, quantos destes estarão previsivelmente em cada um dos estados, ao fim de 1, 2, 5, 10, e 20 anos?

d) Supondo que todos os anos são detetados cada vez mais doentes (mais 5 em relação ao ano anterior), qual o número de doentes que previsivelmente estarão sob os tratamentos T1 e T2 após 10 anos?

e) Sugira um modelo mais realista, tendo em conta fatores como idade do doente, estado geral de saúde, e o facto de ter já havido lugar ou não a um tratamento cirúrgico T2.

Exemplo: Doença com 2 tratamentos alternativos

(Cálculos)

	0.570	0.330	0.100		0.186	0.437	0.377		0.130	0.316	0.554		0.093	0.227	0.681
P =	0.150	0.800	0.050	P6 =	0.199	0.491	0.311	P11 =	0.144	0.350	0.506	P16 =	0.103	0.251	0.646
	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000
	0.374	0.452	0.174		0.172	0.411	0.417		0.121	0.296	0.583		0.087	0.212	0.701
P2 =	0.206	0.690	0.105	P7 =	0.187	0.458	0.355	P12 =	0.134	0.328	0.538	P17 =	0.096	0.235	0.669
	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000
	0.281	0.485	0.234		0.159	0.385	0.455		0.114	0.277	0.610		0.081	0.198	0.720
P3 =	0.221	0.619	0.160	P8 =	0.175	0.428	0.397	P13 =	0.126	0.306	0.568	P18 =	0.090	0.220	0.690
	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000
	0.233	0.481	0.286		0.149	0.361	0.490		0.106	0.259	0.635		0.076	0.185	0.738
P4 =	0.219	0.568	0.213	P9 =	0.164	0.400	0.436	P14 =	0.118	0.287	0.596	P19 =	0.084	0.205	0.710
	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000
	0.205	0.462	0.333		0.139	0.338	0.523		0.099	0.242	0.658		0.071	0.173	0.755
P5 =	0.210	0.527	0.263	P10 =	0.154	0.374	0.472	P15 =	0.110	0.268	0.622	P20 =	0.079	0.192	0.729
	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	1.000

Cadeias com estados absorventes

Sejam $s\text{-}m$ estados transientes ($t_1, t_2, ..., t_{s-m}$) e m estados absorventes ($a_1, a_2, ..., a_m$). Podemos escrever:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} s\text{-}m \text{ colunas} & m \text{ colunas} \end{array} \\ \begin{array}{c} s\text{-}m \text{ linhas} \\ m \text{ linhas} \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{R} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{array}\right] \end{array}$$

<u>*Questões:*</u>

1. Se o processo começa num dado estado transiente t_i, e antes que caia num dos estados absorventes, qual é o número esperado de vezes com que o estado transiente t_j será visitado? *(ou, qual é o nº esperado de estágios em que o sistema será descrito pelo estado transiente t_j?)*

<u>Resposta</u>: ij *elemento da "matriz fundamental"* $(I-Q)^{-1}$.

2. Se o processo começa num dos estados transientes t_i, com que probabilidade cairá no estado absorvente a_j?

<u>Resposta</u>: ij *elemento da matriz* $(I-Q)^{-1} \cdot R$.

Cadeias com estados absorventes

Exemplo de aplicação

Uma empresa emprega três tipos de operários: estagiários, seniores e sócios. Durante um dado ano, há uma probabilidade de 0.15 de que um estagiário seja promovido a sénior, e uma probabilidade de 0.05 de deixar a empresa. Há uma probabilidade de 0.20 de um sénior passar a sócio, e uma probabilidade de 0.10 de deixar a empresa. Um sócio deixará a empresa com uma probabilidade de 0.05. Nesta empresa nunca há despromoções.

1. Em média, durante quanto tempo um estagiário permanece na empresa?

2. Qual a probabilidade de um estagiário conseguir chegar a sócio da empresa?

3. Em média, durante quanto tempo um sócio permanecerá na empresa (nessa condição)?

1.2 Programação Dinâmica Estocástica

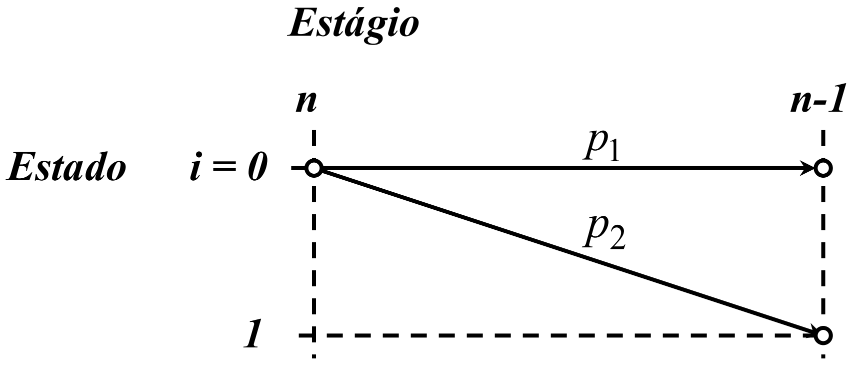
Problemas determinísticos *vs.* estocásticos

Problemas determinísticos:

Para qualquer nodo (n,i), o nodo seguinte $(n-1,j)$ fica completamente determinado pela ação selecionada.

Problemas *estocásticos* ou *probabilísticos*:

O nodo no estágio seguinte, não é completamente determinado pela *ação* selecionada; *para cada ação, existem valores (positivos) de probabilidade de ocorrerem transições para determinados estados*:



Considerações gerais

Vamos considerar:

- Processos Markovianos (ou *cadeias de Markov*), *ou seja*, processos estocásticos discretos, em que a probabilidade de ocorrência de um particular valor (ou *estado*) para a variável aleatória de interesse, depende apenas da anterior ocorrência (ou *estado no estágio anterior*):

$$P\left(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\right)$$

$$= P\left(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\right)$$

- Problemas com um número finito *vs.* infinito de estágios;

- Problemas sem *vs.* com alternativas;

- Problemas sem *vs.* com contribuições de estágio;

- Problemas descontados.

Número finito de estágios, sem alternativas

Definição da relação de recorrência

Matriz de transição: $P_{n(M*N)} = \lfloor p_{ij,(n)} \rfloor$,

tal que $p_{ij} \geq 0$

e $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1 \quad (i = 1,2,...,M\,;\; j = 1,2,...,N)$

Esperança da contribuição de estágio:

$q_{i,(n)} = \sum_{j=1}^{N} p_{ij,(n)} \cdot r_{ij,(n)}$, r = contribuição de estágio;

$Q_n = \lfloor q_{i,(n)} \rfloor$

Esperança do total da contribuição, a partir de (n,i):

$$V_{i,(n)} = \sum_{j=1}^{N} p_{ij,(n)} \cdot \left[r_{ij,(n)} + V_{j,(n-1)} \right]$$

$$= q_{i,(n)} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij,(n)} \cdot V_{j,(n-1)}$$

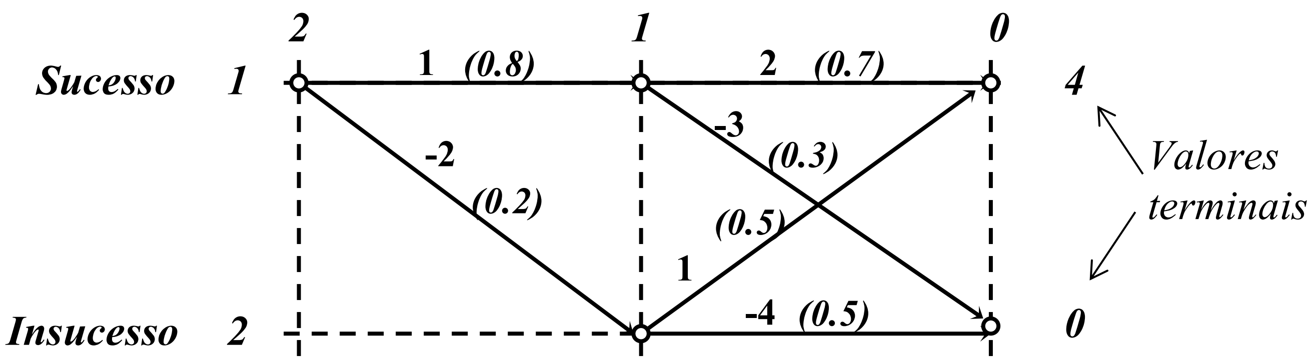
Em termos matriciais, podemos escrever a fórmula de recorrência como:

$$\boxed{V_n = Q_n + P_n V_{n-1}}$$

Número finito de estágios, sem alternativas

Exemplo

Determinado detergente é considerado correntemente "um sucesso". As probabilidades de vir a ser "um sucesso" durante os próximos anos, e as respetivas contribuições são:



Determine a esperança do total da contribuição no fim do 2º ano.

n	P_n	R_n	Q_n	P_nV_{n-1}	V_n
0	…. ….	…. ….	….	….	$\begin{array}{cc} 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$
1	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 0.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 2.8 \\ 2.0 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 3.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$
2	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ 1 & \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$	$1 \begin{bmatrix} 0.4 \end{bmatrix}$	$1 \begin{bmatrix} 2.74 \end{bmatrix}$	$1 \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{3.14}} \end{bmatrix}$

Número finito de estágios, com alternativas

Definição da relação de recorrência (problema de decisão)

Objetivo: selecionar a política (sucessão de ações, $\boldsymbol{k}$) que otimiza a esperança do total da contribuição.

Matrizes de transição, contribuições e esperanças:

P_n^K, R_n^K e Q_n^K

Esperança do total da contribuição quando o sistema parte de (n,i) e segue uma política ótima:

$f_{i,(n)}$

e $F_n = \lfloor f_{i,(n)} \rfloor$

Seguindo uma política ótima a partir do estágio seguinte *(n-1)*, temos que para qualquer ação k no estágio n:

$$V_n^k = Q_n^k + P_n^k F_{n-1}$$

Se calcularmos V_n^k para todas as ações k, podemos obter o vetor F_n a partir da escolha do valor ótimo em cada linha (estado) de V_n^k:

$$\boxed{F_n = opt\left\lfloor \left\langle Q_n^k + P_n^k F_{n-1} \right\rangle \right\rfloor}$$

Número finito de estágios, com alternativas

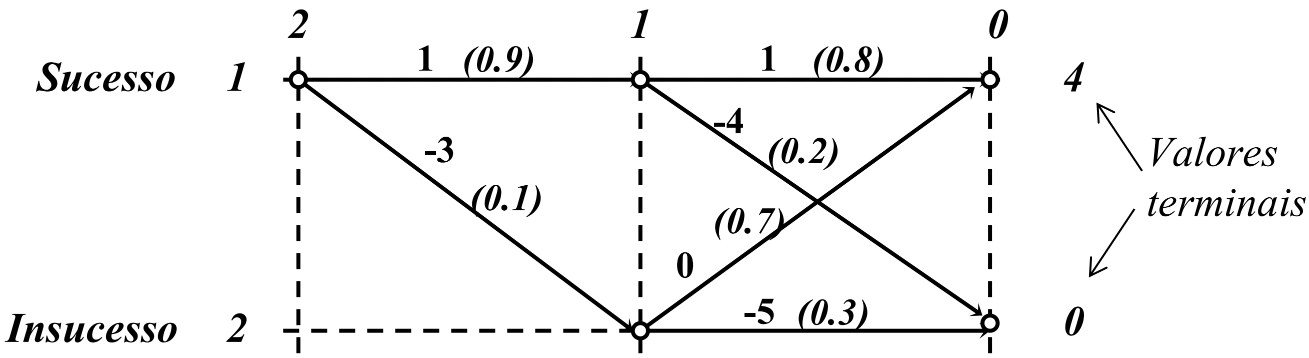
Exemplo de problema de decisão

Vamos considerar o mesmo problema anterior (detergente), agora com a opção de aumentar as hipóteses de sucesso, fazendo determinado tipo de publicidade:

Temos assim as ações alternativas:

k = 1 Não fazer publicidade (rede anterior)

k = 2 Fazer publicidade (rede seguinte).



Qual será a melhor política, se o objetivo for a maximização da esperança do total da contribuição, ao fim do 2º ano?

Número finito de estágios, com alternativas

Exemplo de problema de decisão (resolução)

n	k	P_n^k	R_n^k	Q_n^k	$P_n^k F_{n-1}$	V_n^k	F_n
0		…. ….	…. ….	….	….	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}\end{array}$	
1	**1**	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}1 & 2\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\0.5 & 0.5\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}1 & 2\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}2 & -3\\1 & -4\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}0.5\\-1.5\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}2.8\\2.0\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}3.3\\0.5\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}3.3\\1.3\end{bmatrix}\end{array}$
	2	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}1 & 2\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.7 & 0.3\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}1 & 2\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}1 & -4\\0 & -5\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}0\\-1.5\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}3.2\\2.8\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}3.2\\1.3\end{bmatrix}\end{array}$	
2	**1**	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}1 & 2\end{array} \\ 1 & \begin{bmatrix}0.8 & 0.2\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}1 & 2\end{array} \\ 1 & \begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\end{array}$	$1 \begin{bmatrix}0.4\end{bmatrix}$	$1 \begin{bmatrix}2.9\end{bmatrix}$	$1 \begin{bmatrix}3.3\end{bmatrix}$	$1 \begin{bmatrix}3.7\end{bmatrix}$
	2	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}1 & 2\end{array} \\ 1 & \begin{bmatrix}0.9 & 0.1\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}1 & 2\end{array} \\ 1 & \begin{bmatrix}1 & -3\end{bmatrix}\end{array}$	$1 \begin{bmatrix}0.6\end{bmatrix}$	$1 \begin{bmatrix}3.1\end{bmatrix}$	$1 \begin{bmatrix}3.7\end{bmatrix}$	

<u>Conclusão:</u>

Estágio	i	k	Interpretação
2	1	2	1º Ano: fazer publicidade;
1	1	1	2º Ano: não fazer publicidade, se tiver sido sucesso
	2	2	ou fazer publicidade, se tiver sido insucesso

Número infinito de estágios

Sem alternativas e sem contribuições

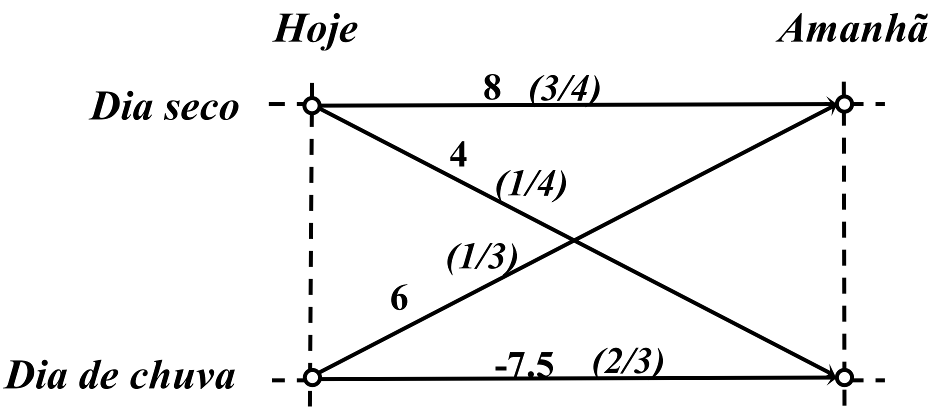
Processos Markovianos, já estudados anteriormente (Secção 1.1).

Número infinito de estágios, sem alternativas

(mas com contribuições)

Exemplo

Clássico problema do *vendedor de gelados*:



O vetor esperança da contribuição de estágio é:

$$Q = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Questões:

Qual o valor da esperança da contribuição total ao fim de n dias (estágios)?

Qual o valor esperado do ganho diário?

Número infinito de estágios, sem alternativas

Desenvolvimento da expressão do ganho

A esperança da contribuição total, para n estágios, é:

$$V_n = Q + PV_{n-1}$$

Supondo que $V_0 = [0]$, podemos desenvolver as seguintes expressões, para os sucessivos estágios:

Esperança da contribuição total	Ganho
$V_1 = Q$	$V_1 - V_0 = Q = IQ = S_0Q$
$V_2 = Q + PQ$	$V_2 - V_1 = PQ = S_1Q$
$V_3 = Q + PQ + P^2Q$	$V_3 - V_2 = P^2Q = S_2Q$
…………………………………………..	…………………………..
$V_n = Q + PQ + P^2Q + \ldots + P^{n-1}Q$	$V_n - V_{n-1} = S_{n-1}Q$

$$\begin{aligned} V_n &= Q + PQ + P^2Q + \ldots + P^{n-1}Q \\ &= S_0Q + S_1Q + S_2Q + \ldots + S_{n-1}Q \\ &= (S + T_0)Q + (S + T_1)Q + \ldots + \\ &\qquad + \ldots + (S + T_{n-1})Q \\ &= nSQ + (T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1})Q \end{aligned}$$

Definindo o vetor ganho como $G_{n(N\times 1)} = V_n - V_{n-1}$, temos que, <u>para um processo ergódico</u>: $S_{n-1} \to S$ quando $n \to \infty$

$G_n \to SQ = G$ quando $n \to \infty$

Número infinito de estágios, sem alternativas

Continuação

Do que está atrás, podemos escrever que: $V_n = nG + W_n$,
onde $W_n = \left(T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1}\right) \cdot Q$

No nosso exemplo, tínhamos determinado que:

$$S_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 4/7 & 3/7 \end{bmatrix}}_{S} + \underbrace{\underbrace{(5/12)^n}_{\alpha^n} \overbrace{\begin{bmatrix} 3/7 & -3/7 \\ -4/7 & 4/7 \end{bmatrix}}^{T_0}}_{T_n}$$

Isto confirma que, para um processo ergódico $T_n = \alpha^n T_0$,
sendo $|\alpha| < 1$. Então: $W_n = \left(T_0 + \alpha T_0 + \alpha^2 T_0 + \ldots + \alpha^{n-1} T_0\right) \cdot Q$.

Definindo então: $W = \lim_{n \to \infty} W_n = \dfrac{1}{1-\alpha} T_0 \cdot Q$,

Podemos escrever que, para n elevado, $V_n = nG + W$:

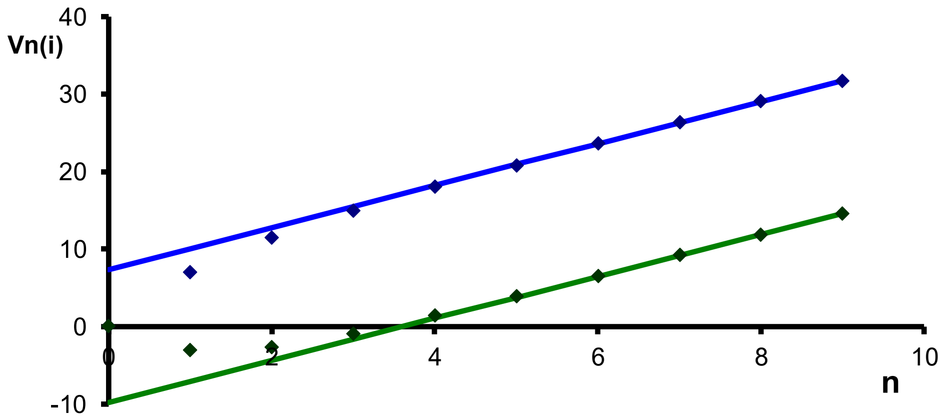
$$\begin{bmatrix} V_n(1) \\ V_n(2) \end{bmatrix} = n * \begin{bmatrix} 2.71 \\ 2.71 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.35 \\ -9.79 \end{bmatrix}$$

Número infinito de estágios, sem alternativas

Conclusão do exemplo

n	Vn(1)	Vn(1)-Vn-1(1)	Vn(2)	Vn(2)-Vn-1(2)
0	0.00		0.00	
1	7.00	7.00	-3.00	-3.00
2	11.50	4.50	-2.67	0.33
3	14.96	3.46	-0.94	1.73
4	17.98	3.02	1.36	2.30
5	20.82	2.84	3.89	2.53
6	23.59	2.77	6.50	2.61
7	26.32	2.73	9.18	2.68
8	29.03	2.71	11.89	2.71
9	31.74	2.71	14.60	2.71

Graficamente temos (obs., o processo é ergódico):



A diferença de 17.14 é praticamente constante a partir de certo ponto, mas pode considerar-se como uma quantidade desprezável para valores elevados de n.

Esta diferença representa a *esperança do benefício* que resulta de se ter partido do estado 1 (um *"dia seco"*).

Número infinito de estágios, com alternativas

Problemas de decisão Markovianos

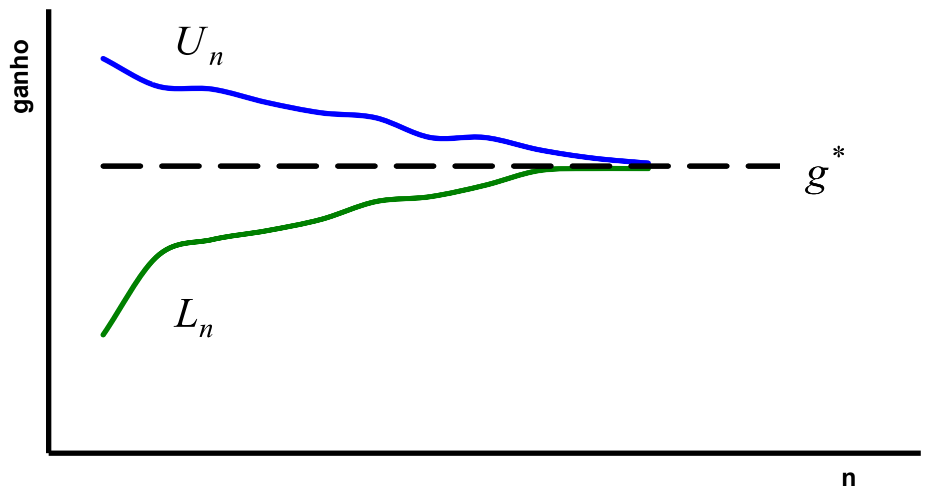
Para cada horizonte, n, pode obter-se uma política ótima. Essa política irá eventualmente variar com n.

No entanto, quando $n \to \infty$, $g_n \to g^*$, *i.e.* a política ótima para n estágios tende a ser independente de n quando $n \to \infty$ (sendo g^* o ganho da *política ótima para um número infinito de estágios*).

Sendo U_n o maior valor do ganho e L_n o menor valor do ganho no estágio n, pode provar-se que:

$$L_n \leq g^* \leq U_n$$

Graficamente, veja-se uma evolução típica destes valores extremos:



Número infinito de estágios, com alternativas

Problemas de decisão Markovianos

Metodologia

O método consiste em tomar, como aproximação para o valor do ganho g^*, o valor de g_n obtido para um valor de n (significativamente) elevado, e adotar para o horizonte ilimitado a política ótima correspondente ao número finito de estágios, n.

Como fórmula de recorrência, usa-se pois a relação atrás definida para o caso do número finito de estágios:

$$F_n = opt\left[\left\langle Q_n^k + P_n^k F_{n-1}\right\rangle\right]$$

Está provado que o processo assim realizado, é convergente!

Definindo: $D_{n\ (N\times 1)} = F_n - F_{n-1}$

$\breve{d}_n = \min_i\left[D_n(i)\right]$ (menor elemento de D_n)

$\hat{d}_n = \max_i\left[D_n(i)\right]$ (maior elemento de D_n)

…pode mostrar-se que:

(1) Para $n = 1,2,3,\ldots\ldots$; $\breve{d}_n \leq g_n, g^* \leq \hat{d}_n$

(2) $\breve{d}_1 \leq \breve{d}_2 \leq \breve{d}_3\ldots\ldots\ldots$; $\breve{d}_n \to g^*$ quando $n \to \infty$

(3) $\hat{d}_1 \geq \hat{d}_2 \geq \hat{d}_3\ldots\ldots\ldots$; $\hat{d}_n \to g^*$ quando $n \to \infty$

Número infinito de estágios, com alternativas

Problemas de decisão Markovianos

Exemplo:

Retomando o caso do problema do *vendedor de gelados*, suponhamos agora as duas *ações alternativas*:

K = 1 *Vender gelados*

K = 2 *Vender cachorros quentes*

Temos que, em ambos os casos, a matriz de transição é:

$$P = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Como contribuições, considerem-se:

$$R^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & -7.5 \end{bmatrix} R^{(2)} = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

Nestas condições, as esperanças das contribuições de estágio, são:

$$Q^{(1)} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix} \quad Q^{(2)} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Número infinito de estágios, com alternativas

Algoritmo de iteração de valor

n	K	$Q^K + P^K F_{n-1}$	F_n^T	$D_n^T = F_n^T - F_{n-1}^T$
0	-	------------------	$\begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$	--------------
1	1	$\begin{array}{c}1\\2\end{array}\begin{bmatrix}7\\-3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.00 & 9.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overset{\vee}{7.00} & \overset{\wedge}{9.00} \end{bmatrix}$
	2	$\begin{array}{c}1\\2\end{array}\begin{bmatrix}-6\\9\end{bmatrix}$		
2	1	$\begin{array}{c}1\\2\end{array}\begin{bmatrix}7+7.50\\-3+8.33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14.50\\5.33\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 14.50 & 17.33 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overset{\vee}{7.50} & \overset{\wedge}{8.33} \end{bmatrix}$
	2	$\begin{array}{c}1\\2\end{array}\begin{bmatrix}-6+7.50\\9+8.33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.50\\17.33\end{bmatrix}$		
3		------------------	$\begin{bmatrix} 22.21 & 25.39 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overset{\vee}{7.71} & \overset{\wedge}{8.06} \end{bmatrix}$
4		------------------	$\begin{bmatrix} 30.01 & 33.24 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overset{\vee}{7.80} & \overset{\wedge}{7.95} \end{bmatrix}$
⋮				
8		------------------	$\begin{bmatrix} 61.41 & 64.85 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overset{\vee}{7.86} & \overset{\wedge}{7.86} \end{bmatrix}$

A política ótima corresponde a:

i	*k*	Interpretação
1	1	Vender gelados em dias secos
2	2	Vender cachorros quentes em dias chuvosos

O ganho é assim limitado por $7.855 \le g_{n=8} \approx g^* \le 7.865$.