Universidade do Minho	2º Teste de **Lógica EI**	15 de Junho de 2012
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. (a) Construa derivações em DNP que provem que:
   (i) $(p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow \neg(p_0 \rightarrow p_1)$ é um teorema;
   (ii) $p_0 \rightarrow p_3, \neg p_3 \vee p_1 \vdash p_0 \rightarrow (p_3 \wedge p_1)$.

   (b) Seja Γ um conjunto de fórmulas do Cálculo Proposicional. Prove que, se $\Gamma \models p_0 \rightarrow p_3$, então $\Gamma, \neg p_3 \vee p_1 \vdash p_0 \rightarrow (p_3 \wedge p_1)$. [Sugestão: use (a)(ii)]

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \mathsf{q}, +\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{q}) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$.

   (a) Das seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_L$, apresente árvores de formação das que pertencem a $\mathcal{T}_L$ ou $\mathcal{F}_L$, e indique (sem justificar) quais as que não pertencem a nenhum desses conjuntos.
   (i) $(\forall_{x_1}(\mathsf{q}(x_1) \rightarrow \mathsf{P}(x_1)))$
   (ii) $+(\mathsf{q}(+(0, \mathsf{q}(x_0)), x_3))$
   (iii) $(\exists_{x_0}((\forall_{x_1}\mathsf{P}(x_1)) \vee = (x_0, \mathsf{q}(x_1))))$
   (iv) $+(= (0, \mathsf{q}(x_0)), \mathsf{q}(x_1))$

   (b) Indique, justificando, o conjunto das variáveis substituíveis pelo L-termo $(\mathsf{q}(x_1) + x_3) + 0$ na L-fórmula $\mathsf{P}(x_2) \leftrightarrow \exists_{x_1}((x_5 = x_1 + \mathsf{q}(x_2 + 0)) \wedge \forall_{x_0}(\mathsf{P}(x_1 + x_0) = x_3))$.

   (c) Defina por recursão estrutural a função $f : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t faz corresponder o número de ocorrências do símbolo 0 em t.

3. Sejam L o tipo de linguagem da pergunta anterior e $E = (\mathbb{Q}, \overline{})$ a L-estrutura tal que $\overline{0}$ é o número *zero*, $\overline{\mathsf{q}}(n) = n^2$ para cada $n \in \mathbb{Q}$, $\overline{+}$ é a função de *adição* em $\mathbb{Q}$, $\overline{\mathsf{P}} = \mathbb{Q}^+$ (ou seja, $\overline{\mathsf{P}}$ é o predicado "é positivo"), e $\equiv$ é a relação de igualdade em $\mathbb{Q}$.

   (a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo o $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i - 3$. Calcule:
   (i) $(\mathsf{q}(0 + x_0) + x_3)\,[a]$
   (ii) $(\mathsf{P}(x_5) \wedge \exists_{x_3}(\mathsf{q}(x_3) = 0 + x_5))\,[a]$

   (b) Seja φ a L-fórmula $\mathsf{P}(\mathsf{q}(x_1)) \rightarrow \neg\forall_{x_2}(0 = \mathsf{q}(x_2))$. Prove que:
   (i) φ é válida em E;
   (ii) φ não é universalmente válida.

   (c) Indique, justificando, uma L-fórmula ψ tal que $\psi[a']_{E'} = 0$ para toda a atribuição a' numa qualquer L-estrutura E'.

   (d) Para cada uma das seguintes afirmações, indique (sem justificar) uma L-fórmula que a represente:
   (i) Existe um número cujo quadrado é positivo;
   (ii) O quadrado da soma de quaisquer dois números é não nulo.

4. (a) Sejam L um tipo de linguagem, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x uma variável. Mostre que:
   (i) $\forall_x\varphi \vee \forall_x\psi \models \forall_x(\varphi \vee \psi)$;
   (ii) $\neg\forall_x(\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \exists_x(\varphi \wedge \neg\psi)$. [Sugestão: exiba uma série de equivalências lógicas.]

   (b) Indique, justificando, um tipo de linguagem L, uma L-fórmula φ e duas variáveis x e y tais que $\not\models \forall_x\exists_y\varphi \rightarrow \exists_y\forall_x\varphi$.

Cotações	1.	2.	3.	4.
	3+1	1,5+1+1,5	2,5+2+1,5+1,5	3+1,5