Relatório Trabalho Prático 3

Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Braga, 5 de janeiro de 2017

Grupo 33

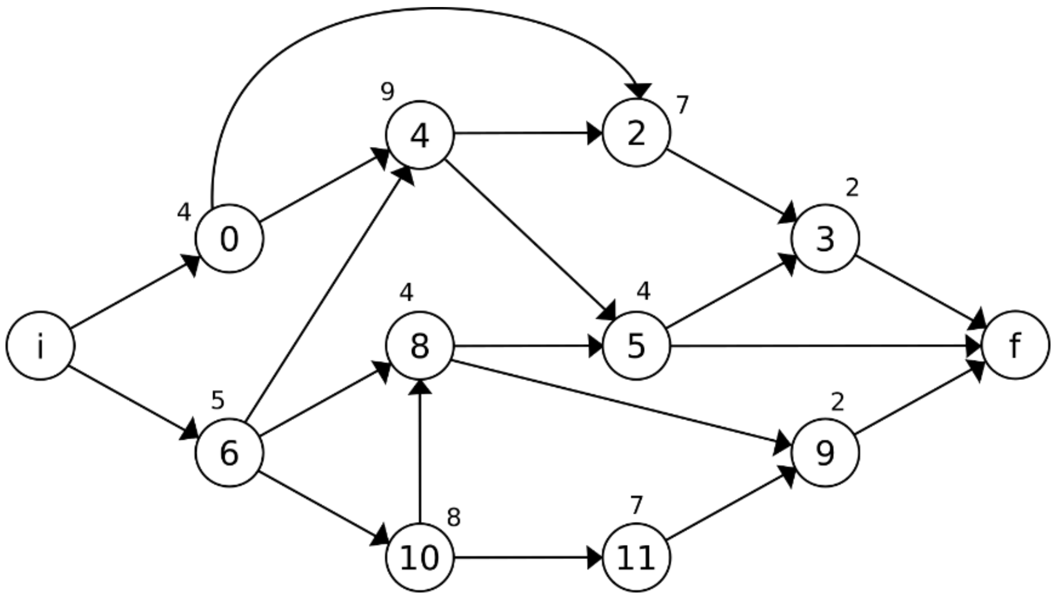
Francisco Oliveira – 78416

Raul Vilas Boas – 79617

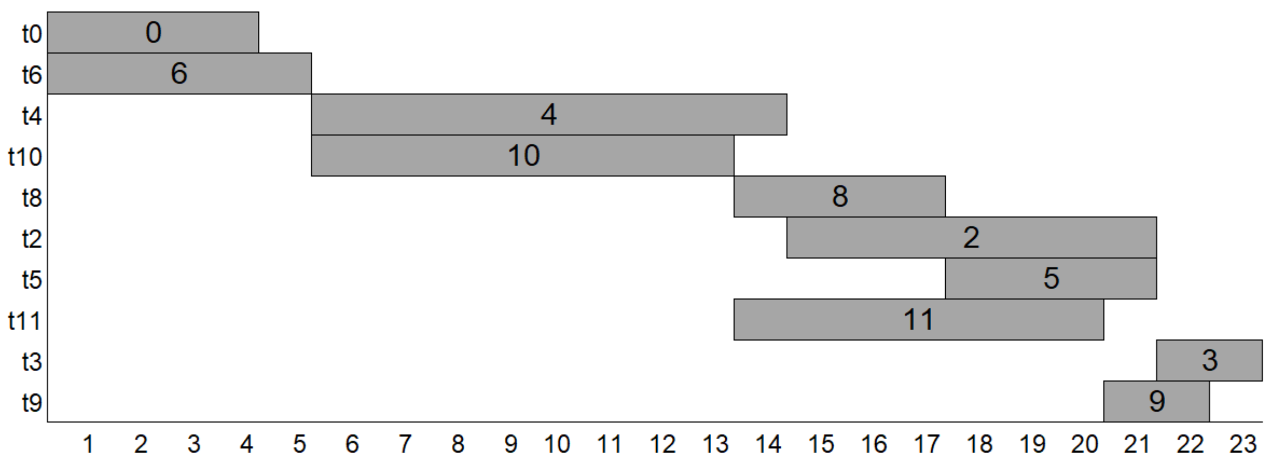
Vitor Peixoto – 79175

PARTE I

1. Após eliminar as atividades indicadas na secção "Determinação da lista de atividades" com base no número de aluno ABCDE = 79617, obteve-se o seguinte grafo.



2. As atividades escolhidas que decorrem em paralelo foram as atividades 2, 5 e 9.



3. O objetivo do problema é realizar o projeto no menor tempo possível tendo em conta estas novas situações. Por isso, a função objetivo continua a ser minimizar o tempo final do projeto.

Visto que, as tarefas não podem ser realizadas ao mesmo tempo por causa de requererem o uso da mesma máquina foi necessário criar novas restrições. No entanto, conforme dito no enunciado, umas destas atividades pode ser contrada pelo exterior para ser realizada, apesar de que a duração desta é aumentada em 1 U.T.

Para tratar da questão da contratação da empresa criou-se uma variável binária *vi* que toma o valor de 1 se a atividade for realizada pela empresa e 0 caso contrário. Para além disto, visto que apenas uma delas pode ser realizada pela empresa teve-se que criar outra restrição em que a soma deles tem que ser menor ou igual a 1.

v2 + v5 + v9 <= 1;

Bin v2 v5 v9;

A contratação de uma certa atividade por uma empresa exterior um aumento da duração da atividade numa unidade. Por este motivo, nas restrições de tempo onde aparecem as atividades em causa é adicionado a variável *vi* da respetiva atividade porque assim se essa atividade for realizada pela empresa, isto é, o seu valor é 1, o tempo da atividade vai aumentar numa unidade.

arco_23: t3 >= t2 + 7 + v2 ;
arco_53: t3 >= t5 + 4 + v5;
arco_5f: tf >= t5 + 4 + v5;
arco_9f: tf >= t9 + 2 + v9;

Como foram escolhidas 3 atividades, existem 6 situações diferentes que podem ocorrer.
Ex: A atividade 2 precede a atividade 5 e a atividade 9 é realizada pela empresa (caso 1).

	Atividades	Primeira	Segunda	Empresa
Caso 1	2	x		
	5		x	
	9			x
Caso 2	2		x	
	5	x		
	9			x
Caso 3	2	x		
	5			x
	9		x	
Caso 4	2		x	
	5			x
	9	x		
Caso 5	2			x
	5	x		
	9		x	
Caso 6	2			x
	5		x	
	9	x		

Para estas situações, criou-se uma variável binária yij que representa que atividades precedem quais. Por exemplo, *y25* é destinado ás situações em que a atividade 2 precede a atividade 5 ou caso contrário. Ao esta variável ter o valor de 1 representa as situação em que a atividade 2 precede a 5 e quando tem o valor de 0 é quando a atividade 5 precede a 2.

Logo, criou-se as seguintes restrições para estes acontecimentos.

$$t5 + M - M\ y25 + M\ v2 + M\ v5 >= t2 + 7;$$
$$t2 + M\ y25 + M\ v2 + M\ v5 >= t5 + 4;$$

A primeira representa a situação em que y25 tem o valor de um, isto faz com que o valor de M se anule tornando a restrição insignificante. Isto vai implicar que o tempo da atividade 5 seja dependente do tempo da atividade 2, isto é, só pode ser realizada após a atividade 2 ser realizada $(t5 >= t2 + 7)$.

A segunda representa a situação em que y25 tem o valor de zero. Quando isto acontece, a primeira restrição torna-se insignificante pois $M >= t2 + 7$ não restringe nada. O que faz com que a segunda restrição possa ter efeito, ficando $t2 >= t5 + 4$ que representa que a atividade 2 só pode acontecer quando a atividade 5 acontecer, isto é, 5 precede 2.

Para além disto, em ambas as restrições tem que existir a certeza que nenhuma delas é realizada pela empresa, pois caso isto acontece elas deixam de restringir, por causa dos $M\ v2 + M\ v5$.

No LPSolve utilizou-se o valor de 1 milhão para o valor do M.

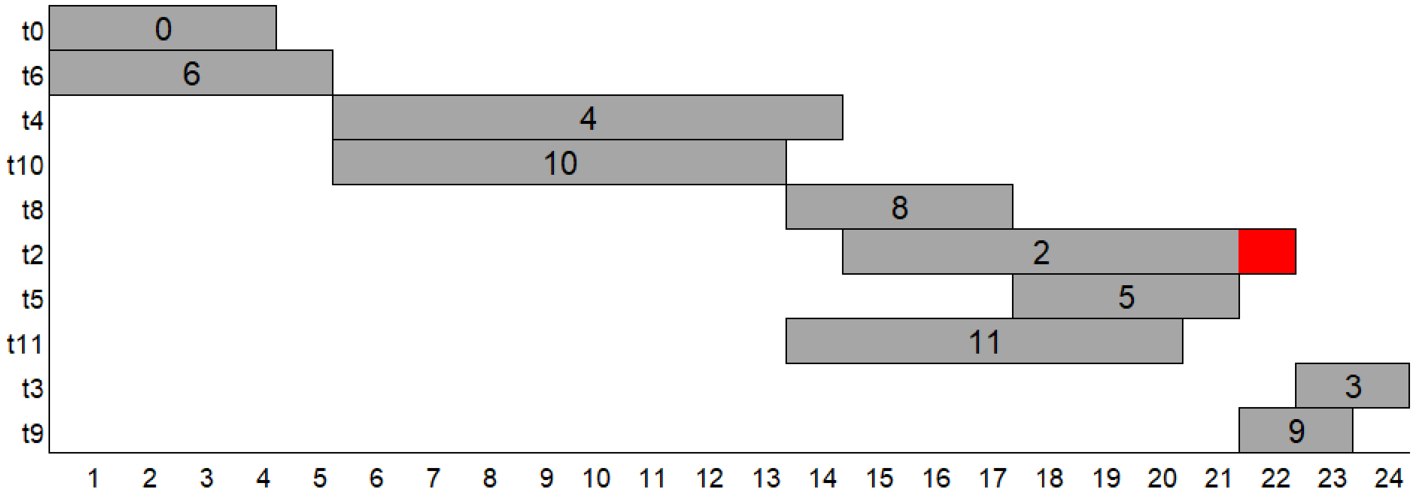
4.

```
/* Objective function */
min: tf ;

/* Restrições */
arco_02: t2 >= t0 + 4;
arco_23: t3 >= t2 + 7 + v2;
arco_i0: t0 >= ti + 0;
arco_04: t4 >= t0 + 4;
arco_42: t2 >= t4 + 9;
arco_53: t3 >= t5 + 4 + v5;
arco_3f: tf >= t3 + 2;
arco_45: t5 >= t4 + 9;
arco_5f: tf >= t5 + 4 + v5;
arco_i6: t6 >= ti + 0;
arco_64: t4 >= t7 + 5;
arco_85: t5 >= t8 + 4;
arco_9f: tf >= t9 + 2 + v9;
arco_68: t8 >= t7 + 5;
arco_89: t9 >= t8 + 4;
arco_610: t10 >= t6 + 5;
arco_108: t8 >= t10 + 8;
arco_119: t9 >= t11 + 7;
arco_1011: t11 >= t10 + 8;
t5 + 1000000 - 1000000 y25 + 1000000 v2 + 1000000 v5 >= t2 + 7;
t2 + 1000000 y25 + 1000000 v2 + 1000000 v5 >= t5 + 4;

t9 + 1000000 - 1000000 y29 + 1000000 v2 + 1000000 v9 >= t2 + 7;
t2 + 1000000 y29 + 1000000 v2 + 1000000 v9 >= t9 + 2;

t9 + 1000000 - 1000000 y59 + 1000000 v5 + 1000000 v9 >= t5 + 4;
t5 + 1000000 y59 + 1000000 v5 + 1000000 v9 >= t9 + 2 ;

y25 + y29 + y59 <= 1;
v2 + v5 + v9 <= 1;

Bin y25 y29 y59 v2 v5 v9;
```

5. O resoltado obtido foi 24 porque é o tempo menor possível.

Variables	MILP ...	MILP ...	result
	27,00...	24	24
tf	27,00...	24	24
t2	14	14	14
t0	0	0	0
t3	25,00...	22	22
v2	0	1	1
ti	0	0	0
t4	5	5	5
t5	21,00...	17	17
v5	0	0	0
t6	0	0	0
t7	0	0	0
t8	13	13	13
t9	20	21,00...	21,00...
v9	1	0	0
t10	5	5	5
t11	13	13	13
y25	1	0	0
y29	0	0	0
y59	0	1	1

6. Novo diagrama de Grant do projeto.



O diagrama obedece ás restrições porque como a tarefa 5 precede a 9, a atividade 9 só pode acontecer depois da atividade 5 e é isso que acontece no diagrama.

Para além disto como a atividade 2 foi realizada no exterior levou ao aumenta de uma unidade de tempo que por consequência levou ao aumento do tempo final. Isto porque como a atividade 3 dependia da atividade 2 esta atrasou-se numa unidade também.

PARTE II

O objetivo do problema é reduzir o tempo de execução encontrado na parte I do trabalho 2 em 4 U.T. com um custo suplementar mínimo. Sendo que o tempo de obtido foi de 24 U.T. a nova solução terá de ter um tempo de execução igual a 19 U.T., reduzindo o tempo nas atividades necessárias.

1. Para isso, criou se uma nova variável de decisão *rij*, que representa o número de reduções que ocorrem na atividade i de custo c1 ou c2.
Ex: *r21*: número de reduções da atividade 2 com o custo de 600 U.M (c1).
Ex: *r22:* número de reduções da atividade 2 com custo de 400 U.M (c2).

Visto que, se trata de um problema de programação inteira e não pode haver variáveis com valores fracionários, nas atividades onde a redução máxima é de 0.5 (atividade 0, 3, 5, 8, 10) juntou-se os custos c1 e c2 fazendo com que a redução máxima passasse a ser 1, para isso então utilizou-se a variável *ri.*
Ex: *r3* -> número de reduções da atividade 3.

Obtendo assim a função objetivo apresentada abaixo.

Min z: min: 200 r0 + 600 r21 + 400 r22 + 220 r3 + 600 r41 + 400 r42 + 1600 r5 + 120 r61 + 90 r62 + 210 r8 + 900 r10 + 400 r111 + 200 r112;

O tempo máximo de execução do projeto tem de ser 19 U.T.

tf = 19;

As restrições relativas aos arcos também tiveram de ser alteradas, para acrescentar a variável *rij* e *ri* pois, os valores dos tempos podem ser reduzidos devido à variável da respetiva atividade.

t2 >= t0 - r0 + 4;	*t4 >= t6 - r61 - r62 + 6;*
t3 >= t2 - r21 - r22 + 7;	*t5 >= t8 - r8 + 4;*
t0 >= ti + 0;	*tf >= t9 + 2;*
t4 >= t0 - r01 - r02 + 4;	*t8 >= t6 - r61 - r62 + 6;*
t2 >= t4 - r41 - r42 + 9;	*t9 >= t8 - r8 + 4;*
t3 >= t5 - r5 + 4;	*t10 >= t6 - r61 - r62 + 5;*
tf >= t3 - r3 + 2;	*t8 >= t10 - r10 + 8;*
t5 >= t4 - r41 - r42 + 9;	*t9 >= t11 - r111 - r112 + 7;*
tf >= t5 - r5 + 4;	*t11 >= t10 - r10 + 8;*
t6 >= ti + 0;	*t4 >= t6 - r61 - r62 + 6;*

Para além disso, é necessário introduzir outras restrições porque as reduções *ri2* não podem acontecer caso não se atinga a máxima redução com o custo c1. Por esse motivo, acrescentou-se as seguintes variáveis para os casos mais simples.

r61 >= r62;
r111 >= r112;

Esta restrição faz com que a redução *r62* só possa acontecer caso a redução r61 tenha ocorrido, tal como é descrito no enunciado. O mesmo se verifica com a atividade 11.

r61= 0 -> r62 = 0, 0 >= 0

r61= 1 -> r62 = 0 $\vee$ r62 = 1, 1 >= 0 $\vee$ 1 >= 1

No entanto, estas restrições apenas funcionam para os casos em que a redução máxima de custo c1 e c2 é 1. Para o caso das atividades 2 e 4 é necessário utilizar uma variável binária como auxiliar.

No caso da atividade 2, a redução *r22* só pode acorrer quando o valor da redução *r21* seja 3. Para isso acrescentou-se as seguintes restrições:

r21 >= 3 y2;
r22 <= 1000000 y2;

A restrição *r21 >= 3 y2* permite que a variável binária *y2* apenas seja 1 quando a redução *r21* seja 3. Como comprovado pelos seguintes exemplos.

r21= 0 -> y2 = 0,	0 >= 0
r21= 1 -> y2 = 0,	1 >= 0
r21= 2 -> y2 = 0,	2 >= 0
r21= 3 -> y2 = 0 ∨ y2 = 1,	3 >= 0 ∨ 3 >= 3

Visto que, a variável binária *y2* representa se a redução máxima de custo c1 ocorre então temos de permitir que a variável *r22* tenha a possibilidade de ser reduzida. Para isso utiliza-se um valor bastante elevado, normalmente denominado por *M*, em que neste caso foi usado 1 milhão.

y2 = 0 -> r22 <= 0
y2 = 1 -> r22 <= 1000000

Estas restrição fazem com que, se *y2* for zero r22 vai ser zero também, enquanto que se *y2* for 1, *r22* vai poder tomar qualquer valor até M.

O mesmo acontece com a atividade 4, em que se utilizou as seguintes restrições:

r41 >= y4;

r42 <= 1000000 y4;

Por último, adicionou-se as restrições relativas ás máximas reduções permitidas de cada redução.

r0 <= 1;

r21 <= 3;

r22 <= 1;

r3 <= 1;

r41 <= 1;

r42 <= 2;

r5 <= 1;

r61 <= 1;

r62 <= 1;

r8 <= 1;

r10 <= 1;

r111 <= 1;

r112 <= 1;

Como é um problema de programação inteira é necessário que as variáveis não tenham valores inteiros, por isso definiu-se as como inteiras e as variáveis y2 e y4 como binárias.

int r0 r21 r22 r3 r41 r42 r5 r61 r62 r8 r10 r111 r112;

bin y2 y4;

2.

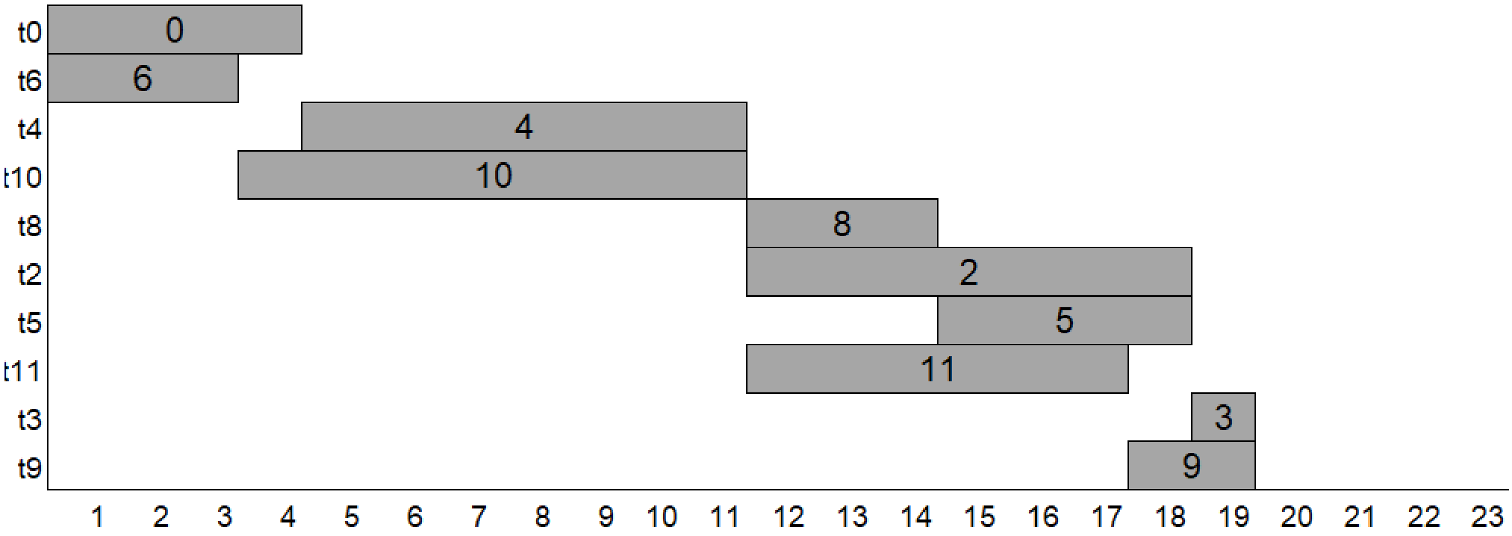
```
/* Objective function */
min: 200 r0 + 600 r21 + 400 r22 + 220 r3 + 600 r41
+ 400 r42 + 1600 r5 +  120 r61 + 90 r62
+ 210 r8 + 900 r10 + 400 r111 + 200 r112;

/* Variable bounds */
tf = 19;

arco_02: t2 >= t0 - r0 + 4 ;
arco_23: t3 >= t2 - r21 - r22 + 7 ;
arco_i0: t0 >= ti + 0 ;
arco_04: t4 >= t0 - r01 - r02 + 4 ;
arco_42: t2 >= t4 - r41 - r42 + 9 ;
arco_53: t3 >= t5 - r5 + 4 ;
arco_3f: tf >= t3 - r3 + 2 ;
arco_45: t5 >= t4 - r41 - r42 + 9 ;
arco_5f: tf >= t5 - r5 + 4 ;
arco_i6: t6 >= ti + 0 ;
arco_64: t4 >= t6 - r61 - r62 + 6 ;
arco_85: t5 >= t8 - r8 + 4 ;
arco_9f: tf >= t9 + 2 ;
arco_68: t8 >= t6 - r61 - r62 + 6 ;
arco_89: t9 >= t8 - r8 + 4 ;
arco_610: t10 >= t6 - r61 - r62 + 5 ;
arco_108: t8 >= t10 - r10 + 8 ;
arco_119: t9 >= t11 - r111 - r112 + 7 ;
arco_1011: t11 >= t10 - r10 + 8;
```

```
//atividade 6 e 11
r61 >= r62;
r111 >= r112;

//atividade 2
r21 >= 3 y2;
r22 <= 1000000 y2;

//Atividade 4
r41 >= y4;
r42 <= 1000000 y4;

// reduções máximas permitidas
r0 <= 1;
r21 <= 3;
r22 <= 1;
r3 <= 1;
r41 <= 1;
r42 <= 2;
r5 <= 1;
r61 <= 1;
r62 <= 1;
r8 <= 1;
r10 <= 1;
r111 <= 1;
r112 <= 1;

int r0 r21 r22 r3 r41 r42 r5 r61 r62 r8 r10 r111 r112;
bin y2 y4;
```

3.

Variables	MILP Feasible	result
	2040,000000...	2040,0000...
r0	0	0
r21	0	0
r22	0	0
r3	1	1
r41	1	1
r42	1	1
r5	0	0
r61	1	1
r62	1	1
r8	1	1
r10	0	0
r111	1	1
r112	0	0
tf	19	19
t2	10,99999999...	10,999999...
t0	0	0
t3	18	18
ti	0	0
t4	4	4
r01	0	0
r02	0	0
t5	14	14
t6	0	0
t8	11	11
t9	17	17
t10	3	3
t11	11	11
y2	0	0
y4	1	1

4. Diagrama de Gantt após serem efetuadas as reduções.



5. Após uma análise ao grafo, conclui-se que iria ser necessário ocorrer 7 reduções, duas na atividade 4, outras duas na atividade 6 e uma nas atividades 3, 8 e 11.
Sendo assim, somou-se os custos destas reduções tento em conta os c1 e c2 que influenciavam algumas destas reduções.

$$\text{Custo} = (120 + 100)\ r3 + 600\ r41 + 400\ r42 + 120\ r61 + 90\ r62 + (120 + 90)\ r8 + 400\ r11$$

Visto que, para todas estas variáveis o número de redução foi para todas uma, então os valores de r3, r41, r42, r61, r62, r8 e r11 são todos um.

Obtendo assim um custo de 2040 que é o mesmo obtido pelo LPSolve, sendo que se verifica que o custo da solução está correto.