0. Indução e recursão nos naturais

0.1 Prove, de duas formas diferentes, que, para todo o número natural $n \geq 2$, $2n \leq n^2$.

0.2 Prove por indução que, para todo o número natural $n > 4$, $n^2 < 2^n$. Note como é útil provar simultaneamente $2n + 1 < n^2$.

0.3 Para $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ a propriedade: $2^n < n!$.

a) Mostre que: para $k \in \mathbb{N}$ e $k > 3$, se $P(k)$ é verdadeira, $P(k+1)$ também é verdadeira.

b) Indique, justificando, quais os naturais n para os quais $P(n)$ é verdadeira.

0.4 Prove que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $1 + ... + n = n(n+1)/2$.

0.5 Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$; **b)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (2i + 1) = (n + 1)^2$;

c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$; **d)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, com $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

0.6 Seja $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ a função definida recursivamente por $f(0) = 1$ e $f(n+1) = 2f(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Calcule $f(1)$ e $f(2)$.

b) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $f(n) = 2^n$.

0.7 Seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ a função definida por $s(1) = 2$ e $s(n + 1) = \frac{2}{s(n)}$.

a) Determine $s(1), s(2)$ e $s(3)$.

b) Determine o contradomínio de s. Prove a sua afirmação por indução.

0.8 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 1$ e seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a função definida recursivamente por $f(1) = a$ e $f(n + 1) = f(n) + ab^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

a) Verifique que $f(n) = \dfrac{a(1 - b^n)}{1 - b}$ para $n \in \{1, 2, 3\}$.

b) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \dfrac{a(1 - b^n)}{1 - b}$.

0.9 Seja A um conjunto finito.

a) Prove que, se A tem n subconjuntos e $a \notin A$, então $A \cup \{a\}$ tem $2n$ subconjuntos.

b) Prove que: $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$.

c) Qual é o número de subconjuntos de A^3, quando A é um conjunto com 3 elementos?

1. Indução e recursão estruturais

1.1 Seja S o subconjunto de $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ definido indutivamente pelas 3 regras apresentadas de seguida: (1) $1 \in S$; (2) $2 \in S$; (3) $q \in S \Rightarrow \frac{1}{q} \in S$.

a) Dê exemplos de elementos de S.

b) Mostre que o conjunto $\{\frac{1}{2}, 2\}$ é fechado para a operação $f : \mathbb{Q}\setminus\{0\} \to \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ tal que $f(q) = \frac{1}{q}$, para qualquer $q \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

c) Determine o conjunto S.

1.2 Seja $A = \{a, b, c, d\}$ e seja $f : A \times A \to A$ a operação em A definida pela tabela que se segue.

f	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	b	c
c	a	c	b	b
d	a	c	b	a

a) Calcule os conjuntos indutivos, sobre A, de base $\{b\}$ e conjunto de operações $\{f\}$.

b) Prove que c é um dos elementos do conjunto gerado pela definição indutiva $(\{b\}, \{f\})$.

c) Indique qual é o conjunto gerado pela definição indutiva $(\{b\}, \{f\})$.

1.3 Apresente definições indutivas de cada um dos conjuntos que se seguem, explicitando a respetiva base e respetivo conjunto de operações.

a) Conjunto dos naturais múltiplos de 5.

b) Conjunto dos números inteiros.

c) Conjunto das palavras sobre o alfabeto $A = \{0, 1\}$ cujo comprimento é ímpar.

d) Conjunto das palavras sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$ que têm um número par de ocorrências do símbolo a.

1.4 Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja G o subconjunto de A^* dado pela seguinte definição indutiva determinista:

(1) $1 \in G$;
(2) se $x \in G$ então $2x \in G$, para todo $x \in A^*$;
(3) se $x, y \in G$ então $3xy \in G$, para todo $x, y \in A^*$.

Considere ainda a função $S : G \longrightarrow \mathbb{N}$ definida, por recursão estrutural, do seguinte modo:

- $S(1) = 1$;
- para todo $x \in G$, $S(2x) = 2 + S(x)$;
- para todo $x, y \in G$, $S(3xy) = 3 + S(x) + S(y)$.

a) Para cada letra $a \in A$, indique uma palavra $u \in G$ cuja primeira letra seja a e apresente uma sequência de formação de u.

b) Indique uma sequência de formação do elemento $v = 3213211$ de G.

c) Defina por recursão estrutural a função $C : G \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in G$, $C(x)$ é o comprimento da palavra x.

d) Calcule $S(3211)$ e $C(3211)$.

e) Enuncie o Princípio de Indução Estrutural para G.

f) Mostre que, para todo $x \in G$, **i.** $S(x)$ é ímpar; **ii.** $C(x) \leq S(x)$.

1.5 Seja V o conjunto numerável formado pelos símbolos $v_0, v_1, v_2, ...$ (designados por variáveis) e seja A o alfabeto $V \cup \{c, f, g, (,), ,\}$. Considere que E é a linguagem em A definida indutivamente do seguinte modo:

(1) $c \in E$;
(2) $v_n \in E$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$;
(3) se $t \in E$, então $f(t) \in E$, para todo $t \in A^*$;
(4) se $t_1 \in E$ e $t_2 \in E$, então $g(t_1, t_2) \in E$, para todo $t_1, t_2 \in A^*$.

a) Dê exemplos de palavras sobre A que pertençam à linguagem E e de palavras sobre A que não pertençam a E.

b) Investigue se a linguagem E é fechada para cada uma das operações que se seguem.

i) $\begin{array}{rccc} s_1 : & A^* \times A^* & \longrightarrow & A^* \\ & (t_1, t_2) & \mapsto & f(t_1, t_2) \end{array}$ **ii)** $\begin{array}{rccc} s_2 : & A^* & \longrightarrow & A^* \\ & t & \mapsto & g(t, c) \end{array}$

c) Para cada um das seguintes palavras pertencentes a E, indique 2 sequências de formação cujos comprimentos sejam diferentes.

i) c **ii)** $f(v_2)$ **iii)** $g\big(g(v_0, c), c\big)$ **iv)** $f\Big(g\big(f(v_1), f(v_1)\big)\Big)$

d) Defina funções $n_a, n_g : E \longrightarrow \mathbb{N}_0$, por recursão estrutural, que a cada palavra $e \in E$ façam corresponder, o número de ocorrências de *átomos* (i.e. variáveis ou a letra c) em e e o número de ocorrências da letra g em e, respetivamente,.

e) Enuncie o teorema de indução estrutural para a linguagem E.

f) Mostre que, para todo $e \in E$, $n_g(e) = n_a(e) - 1$.

1.6 Seja $A = \{0, 1\}$ e seja G o subconjunto de A^* dado pela seguinte definição indutiva determinista:

1. $1 \in G$;
2. se $x \in G$, então $x0 \in G$ e $x1 \in G$, para todo $x \in A^*$;

Considere ainda a função $i : G \longrightarrow \mathbb{N}$ definida, por recursão estrutural, do seguinte modo:

- $i(1) = 1$;
- para todo o $x \in G$, $i(x0) = 2i(x)$;
- para todo o $x \in G$, $i(x1) = 2i(x) + 1$.

a) Indique os elementos de G que admitem sequências de formação de comprimento inferior a 3.

b) Defina por recursão estrutural a função $h : G \longrightarrow G$ tal que, para cada $x \in G$, $h(x) = 1x$.

c) Determine $i(11)$ e $i(101)$.

d) Enuncie o teorema de indução estrutural para G.

e) Mostre que, para todo o $x \in G$, $i\big(h(x)\big) = 2^n + i(x)$, em que n é o comprimento da palavra x.

2. Sintaxe do Cálculo Proposicional

2.1 Represente as seguintes frases através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar *frases atómicas*:

a) Se o Sr. João é feliz, a sua mulher é infeliz e se o Sr. João é infeliz, a sua mulher também o é.

b) Vou de comboio e perco o avião ou vou de camioneta e não perco o avião.

c) Se ganho sempre que jogo bem e não ganhei, então não joguei bem.

d) Não se pode ter sol na eira e chuva no nabal.

e) Sou preso por ter cão, mas também sou preso por o não ter.

f) Uma condição necessária para aprovação a Lógica por avaliação periódica é ter pelo menos 7 valores no primeiro teste.

g) Uma condição suficiente para aprovação a Lógica é ter 14 valores no primeiro teste e 7 valores no segundo teste.

2.2 Encontre exemplos de *frases verdadeiras* que possam ser representadas através das seguintes fórmulas:

a) $(p_1 \rightarrow ((\neg p_2) \vee p_3))$. **b)** $((p_4 \wedge (\neg p_0)) \vee p_6)$.

c) $(p_{13} \leftrightarrow (\neg p_8))$. **d)** $((p_{98} \wedge (p_{98} \rightarrow p_{99})) \rightarrow p_{99})$.

2.3 De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$:

a) $(\neg\, (p_1 \vee p_2))$. **b)** $((p_0 \wedge \neg p_0) \rightarrow \perp)$.

c) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6))$. **d)** $(\perp)$.

e) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($. **f)** $(((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp)))$.

2.4 Para cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

i) p_{2015}. **ii)** $\neg \perp \vee \perp$. **iii)** $p_0 \rightarrow (\neg p_0 \rightarrow \neg p_1)$.

a) construa sequências de formação;

b) indique o número mínimo de elementos numa sua sequência de formação e diga quantas destas sequências de formação de comprimento mínimo existem.

2.5 Para cada fórmula φ do exercício anterior, calcule $\varphi[p_2/p_0]$, $\varphi[p_0 \wedge p_1/p_1]$ e $\varphi[p_{2016}/p_{2015}]$.

2.6 Defina por recursão estrutural as seguintes funções

a) $p : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $p(\varphi)$ = número de ocorrências de parêntesis em φ.

b) $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $v(\varphi)$ = número de ocorrências de vars. proposicionais em φ.

c) $c : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{P}(BIN)$ tal que $c(\varphi) = \{\square \in BIN : \square \text{ ocorre em } \varphi\}$, onde $BIN = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

d) $n : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $n(\varphi)$ = o número de nodos na árvore sintática de φ.

e) $\_[\perp /p_7] : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi[\perp /p_7]$ = resultado de substituir em φ todas as ocorrências de p_7 por $\perp$.

2.7 Considere de novo as funções definidas no exercício anterior. Prove, por indução estrutural, que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\varphi) \geq \#var(\varphi)$.

b) $p(\varphi) \geq \#c(\varphi)$.

c) $v(\varphi) \geq v(\varphi[\perp/p_7])$.

d) $c(\varphi) = c(\varphi[\perp/p_7])$.

e) se $c(\varphi) \neq \emptyset$ então $p(\varphi) > 0$.

f) se $p_7 \notin var(\varphi)$ então $\varphi[\perp/p_7] = \varphi$.

2.8 Para cada fórmula φ do exercício 2.4, indique o conjunto das suas subfórmulas.

2.9 Considere a função n do exercício 2.6.

a) Dê exemplo de fórmulas φ e ψ, com 3 subfórmulas, tais que $n(\varphi) = 3$ e $n(\psi) > 3$

b) Mostre que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $n(\varphi) \geq \#subf(\varphi)$.

2.10 Mostre que:

a) se S é uma sequência de formação de ψ e φ é uma subfórmula de ψ, então φ é um dos elementos de S;

b) toda a fórmula ψ admite uma sequência de formação que contém apenas subfórmulas de ψ;

c) uma fórmula ψ tem n subfórmulas se e só se as sequências de formação de ψ mais curtas têm n elementos.

2.11 Considere que $\mathcal{F}^{CP}_X$ denota o subconjunto de $\mathcal{F}^{CP}$ cujos conetivos pertencem ao conjunto X.

a) Dê uma definição indutiva determinista do conjunto $\mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$.

b) Enuncie o Teorema da Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$.

c) Defina por recursão estrutural a função $f : \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}} \to \mathcal{P}(\mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}})$ tal que $f(\varphi)$ é o conjunto das subfórmulas de φ.

d) Prove que: para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$, se $\vee$ não ocorre em φ, então $\#f(\varphi) - 1$ é o número de ocorrências de $\neg$ em φ.

2.12 Seja Γ o subconjunto de $\mathcal{F}^{CP}$dado pela seguinte definição indutiva determinista:

(i) Para cada variável proposicional p, $p \in \Gamma$.

(ii) Para cada variável proposicional p, $\neg p \in \Gamma$.

(iii) Se $\varphi, \psi \in \Gamma$ então $\varphi \vee \psi \in \Gamma$.

a) Indique, justificando, fórmulas em Γ.

b) Enuncie o Teorema da Indução Estrutural para Γ.

c) Prove que: para todo $\varphi \in \Gamma$, $\perp$ não ocorre em φ.

d) Defina por recursão estrutural a função $f : \Gamma \to \mathbb{N}_0$ tal que $f(\varphi)$ é o número de ocorrências de $\neg$ em φ.

e) Diga se $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$ e se $\mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}} \subseteq \Gamma$.

3. Semântica do Cálculo Proposicional

3.1 Sejam v_1 e v_2 as únicas valorações tais que

$$v_1(p) = \begin{cases} 0 \text{ se } p \in \{p_0, p_1\} \\ \\ 1 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_1\} \end{cases} \quad \text{e} \quad v_2(p) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \in \{p_1, p_3\} \\ \\ 0 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_1, p_3\} \end{cases}.$$

Considere as fórmulas: $\varphi_1 = (p_2 \vee (\neg p_1 \wedge p_3))$; $\varphi_2 = (p_2 \vee p_0) \wedge \neg(p_2 \wedge p_0)$; $\varphi_3 = (p_1 \to ((p_5 \leftrightarrow p_3) \vee \perp))$. Calcule os valores lógicos das fórmulas φ_1, φ_2 e φ_3 para as valorações v_1 e v_2.

3.2 Considere as fórmulas: $\varphi_1 = \neg p_3 \wedge (\neg p_1 \vee p_2)$; $\varphi_2 = (\neg p_3 \vee \neg p_1) \leftrightarrow (p_1 \to p_2)$; $\varphi_3 = \neg p_3 \to (p_1 \wedge \neg p_2)$.

a) Para cada um dos conjuntos $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ e $\{\varphi_2, \varphi_3\}$, dê exemplo de uma valoração que atribua o valor lógico 1 a todos os seus elementos.

b) Mostre que não existem valorações que, em simultâneo, atribuam o valor lógico 1 a φ_1 e φ_3.

3.3 Seja v uma valoração. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

a) $v((p_3 \to p_2) \to p_1) = 0$ e $v(p_2)=0$ é uma condição suficiente para $v(p_3) = 0$.

b) Uma condição necessária para $v(p_1 \to (p_2 \to p_3)) = 0$ é $v(p_1) = 1$ e $v(p_3) = 0$.

c) Uma condição necessária e suficiente para $v(p_1 \wedge \neg p_3) = 1$ é $v((p_3 \to (p_1 \to p_3)) = 1$.

3.4 De entre as seguintes fórmulas, indique as tautologias e as contradições.

a) $(p_1 \to \perp) \vee p_1$

b) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$

c) $\neg(p_1 \wedge p_2) \to (p_1 \vee p_2)$

d) $(p_1 \vee \neg p_1) \to (p_1 \wedge \neg p_1)$

3.5 Das seguintes proposições, indique as verdadeiras. Justifique.

a) $\models \varphi \wedge \psi$ se e só se $\models \varphi$ e $\models \psi$.

b) Se $\models \varphi \vee \psi$, então $\models \varphi$ ou $\models \psi$.

c) Se $\models \varphi$ ou $\models \psi$, então $\models \varphi \vee \psi$.

d) Se $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\not\models \psi$, então $\not\models \varphi$.

3.6 Seja $\varphi = (\neg p_2 \to \perp) \wedge p_1$.

a) Dê exemplo de:

i) uma valoração v tal que $v(\varphi) = v(\varphi[p_0 \wedge p_3/p_2])$;

ii) uma valoração v tal que $v(\varphi) \neq v(\varphi[p_0 \wedge p_3/p_2])$.

b) Seja ψ uma fórmula. Indique uma condição suficiente para que uma valoração v satisfaça $v(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_2])$. A condição que indicou é necessária?

3.7 Considere o conjunto $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$ das fórmulas cujos conetivos estão no conjunto $\{\vee,\wedge\}$.

a) Enuncie o teorema de indução estrutural para $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

b) Seja v a valoração que a cada variável proposicional atribui o valor lógico 0. Mostre que $v(\varphi) = 0$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

c) Existem tautologias no conjunto $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$? Justifique.

3.8 Para cada uma das seguintes fórmulas, encontre uma fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas conetivos no conjunto $\{\neg,\vee\}$.

a) $(p_0 \wedge p_2) \to p_3$. **b)** $p_1 \vee (p_2 \to \perp)$.

c) $\neg p_4 \leftrightarrow p_2$. **d)** $(p_1 \vee p_2) \to \neg(p_1 \wedge \perp)$.

3.9 Defina, por recursão estrutural em fórmulas, uma função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$ que a cada fórmula φ faça corresponder uma fórmula $f(\varphi)$ logicamente equivalente a φ.

3.10 Investigue se os conjuntos de conetivos $\{\vee,\wedge\}$ e $\{\neg,\vee,\wedge\}$ são ou não completos.

3.11 Calcule formas normais conjuntivas e disjuntivas logicamente equivalentes a cada uma das seguintes fórmulas:

a) $\neg p_0$. **b)** $p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$. **c)** $(p_1 \vee p_0) \vee \neg(p_2 \vee p_0)$.

d) $(p_1 \to \perp)$. **e)** $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \vee (p_1 \wedge p_0))$. **f)** $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$.

3.12 Considere que φ e ψ são fórmulas cujo conjunto de variáveis é $\{p_1, p_2\}$ e $\{p_1, p_2, p_3\}$, respetivamente, e que têm as seguintes tabelas de verdade:

p_1	p_2	φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

e

p_1	p_2	p_3	ψ
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Determine FND's e FNC's logicamente equivalentes a cada uma das fórmulas.

3.13 Será que existem outros conetivos binários para além de $\wedge$, $\vee$, $\to$, e $\leftrightarrow$? Para responder a esta questão, adotemos esta definição: um conetivo binário é uma função de tipo $\{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$.

a) Quantos conetivos binários existem?

b) Para cada conetivo binário $f : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$, escreva f como uma tabela de verdade, e "traduza" essa tabela de verdade como uma FND.

c) Conclua que $\{\neg,\wedge,\vee\}$ permaneceria um conjunto completo de conetivos, mesmo se tivéssemos adoptado no Cálculo Proposicional outros conetivos binários.

3.14 Nenhum dos conetivos $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ é completo (i.e. constitui, por si só, um conjunto completo de conetivos). No entanto, existem conetivos binários completos.

Considere-se a extensão do conjunto das fórmulas proposicionais $\mathcal{F}^{CP}$ com o conetivo binário $\uparrow$ (conhecido como *seta de Sheffer* ou *nand*), determinado pela função booleana $f_\uparrow$ t.q. $f_\uparrow(1,1) = 0$, $f_\uparrow(1,0) = 1$, $f_\uparrow(0,1) = 1$ e $f_\uparrow(0,0) = 1$. Mais precisamente:

i) acrescente-se ao alfabeto do Cálculo Proposicional a letra $\uparrow$;

ii) considere-se a definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ (sobre este alfabeto estendido) com uma nova regra: se $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, então $(\varphi \uparrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$;

iii) à definição de valoração v, acrescente-se a condição $v(\varphi \uparrow \psi) = f_\uparrow(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

a) Encontre fórmulas φ, ψ logicamente equivalentes a $p_0 \uparrow p_1$ e tais que i) φ é FND; ii) ψ é FNC.

b) Mostre que, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$: i) $\varphi \uparrow \psi \Leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$; ii) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \uparrow \varphi$.

c) Dê exemplo de tautologias e de contradições onde o único conetivo usado seja $\uparrow$.

d) O conjunto $\{\uparrow\}$ é completo? Justifique.

3.15 De entre os seguintes conjuntos de fórmulas, indique os que são consistentes e os que são inconsistentes.

a) $\{p_0 \wedge p_2, p_1 \rightarrow \neg p_3, p_1 \vee p_2\}$.

b) $\{p_0 \vee \neg p_1, p_1, p_0 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3)\}$.

c) $\mathcal{F}^{CP}$.

d) $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

3.16 Sejam $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

a) Se $\Gamma \cup \Delta$ é consistente, então Γ e Δ são conjuntos consistentes.

b) Se Γ e Δ são conjuntos consistentes, então $\Gamma \cup \Delta$ é consistente.

c) Se Γ é consistente e $\varphi \in \Gamma$, então $\neg\varphi \notin \Gamma$.

d) Se Γ contém uma contradição, então Γ é inconsistente.

3.17 Este exercício ilustra um método para decidir se uma fórmula do Cálculo Proposicional é uma tautologia (que está na base do chamado método da *resolução*), assente em formas normais conjuntivas e na análise da consistência de conjuntos de fórmulas.

Considere as fórmulas

$$\varphi = (p_3 \rightarrow (p_1 \vee p_2)) \vee \neg(\neg p_1 \rightarrow p_2),$$

$$\psi = \neg p_2 \wedge p_3 \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_2 \vee p_1).$$

a) Observe que ψ é uma FNC e mostre que ψ é logicamente equivalente a $\neg\varphi$.

b) Observe que para toda a valoração v, $v(\psi) = 1$ sse v satisfaz $\{\neg p_2, p_3, \neg p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2, p_2 \vee p_1\}$.

c) Mostre que $\{\neg p_2, p_3, \neg p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2, p_2 \vee p_1\}$ é inconsistente e diga se ψ é uma contradição.

d) Diga se φ é uma tautologia.

e) Aplique a sequência de passos anterior, considerando

$$\varphi = (p_2 \rightarrow p_1) \rightarrow (\neg p_2 \wedge p_3), \qquad \psi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3).$$

3.18 Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) $p_3 \vee p_0, \neg p_0 \models p_3$.

b) $p_0 \vee \neg p_1, p_1 \vee p_2 \models p_0 \vee p_2$.

c) $\neg p_2 \to (p_1 \vee p_3), \neg p_2 \models \neg p_1$.

d) para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, $\neg\psi,\ \psi \to \sigma \models \sigma \vee \varphi$.

3.19 Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ um conjunto de fórmulas. Demonstre que:

a) $\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \sigma \models \psi \vee \sigma$.

b) $\models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

c) $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \models \psi$.

d) Γ é inconsistente se e só se $\Gamma \models \perp$.

3.20 Considere as seguintes afirmações:

- Se há vida em Marte, então Zuzarte gosta de tarte.
- Zuzarte é um marciano ou não gosta de tarte.
- Zuzarte não é um marciano, mas há vida em Marte.

a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.

b) Mostre que as três afirmações acima não podem ser simultaneamente verdadeiras.

3.21 Considere as seguintes afirmações:

- Se a porta do cofre foi arrombada, então: o inspetor Heitor desvenda o crime ou o segurança Bragança é culpado.
- O segurança Bragança não é culpado se e só se: a porta do cofre não foi arrombada e o inspetor Heitor desvenda o crime.
- Não é verdade que: o segurança Bragança não é culpado ou a porta do cofre foi arrombada.

a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.

b) Admitindo que todas as afirmações são verdadeiras, podemos concluir que o inspetor Heitor desvenda o crime? Justifique.

3.22 O Carlos, o João e o Manuel, suspeitos de um crime, fizeram os seguintes depoimentos, respetivamente:

- O João é culpado, mas o Manuel é inocente.
- Se o Carlos é culpado, o Manuel também o é.
- Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

a) Os três depoimentos são consistentes?

b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?

c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?

d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é culpado?

e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e que os culpados mentiram, quem é culpado?

4. Dedução Natural para o Cálculo Proposicional

4.1 **a)** Indique uma derivação em DNP cuja conclusão seja $p_0 \wedge p_1$ e cuja única hipótese não cancelada seja $p_1 \wedge p_0$.

b) Indique duas derivações distintas em DNP de conclusão $p_0 \to (p_1 \to (p_0 \vee p_1))$ e sem hipóteses por cancelar.

c) Indique as subderivações de cada uma das derivações que apresentou em **a)** e em **b)**.

4.2 Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$. Encontre demonstrações em DNP das fórmulas abaixo indicadas.

a) $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \psi)$. **b)** $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$.

c) $\varphi \to \varphi$. **d)** $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.

e) $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$. **f)** $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

g) $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$. **h)** $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

4.3 Mostre que:

a) $p_0 \to p_1, \neg p_1 \vdash \neg p_0$.

b) $p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_0 \vdash ((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \wedge (p_0 \leftrightarrow p_2)$.

c) $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$ é sintaticamente inconsistente.

4.4 Represente o raciocínio que se segue através de uma relação de consequência sintática e construa uma derivação em DNP que prove a validade dessa relação: O Tiago disse: "Vou almoçar ao McDonald's ou à Pizza Hut". E, acrescentou: "Se comer no McDonald's, fico mal disposto e não vou ao cinema". Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e conclui: "O Tiago foi almoçar à Pizza Hut".

4.5 Mostre que o conjunto das fórmulas do Cálculo Proposicional referidas na alínea **a)** do exercício **3.20** é sintaticamente inconsistente.

4.6 Demonstre as seguintes proposições, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$.

a) $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ sse $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$. **b)** $\Gamma \vdash \varphi$ sse $\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp$.

c) $\Gamma \vdash \perp$ se e só se $\Gamma \vdash p_0 \wedge \neg p_0$. **d)** Se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

4.7 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ fórmulas. A fórmula $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ é chamada a *Lei de Peirce*. Mostre que a Lei de Peirce é um teorema de DNP. (Sugestão: tenha em atenção a resolução da alínea **d)** do exercício anterior.)

4.8 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que:

a) $(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não é um teorema de DNP.

b) $p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$.

c) $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge p_1\}$ é sintaticamente consistente.

d) $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se e só se Γ é semanticamente inconsistente.

e) Se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e φ é uma tautologia, então $\Gamma \vdash \psi$.

(Sugestão: aplique o Teorema da Correção e/ou o Teorema da Completude.)

5. Sintaxe do Cálculo de Predicados

5.1 Seja $L = (\{0, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem tal que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(R) = 2$.

a) Explicite a definição indutiva do conjunto dos L-termos.

b) Indique quais das seguintes sequências de símbolos constituem L-termos:

i)	0.	**ii)**	$f(0)$.	**iii)**	$f(1)$.
iv)	$g(f(x_1, x_0), x_0)$.	**v)**	$g(x_0, f(x_1))$.	**vi)**	$R(x_0, x_1)$.

c) Calcule o conjunto das variáveis de cada um dos seguintes L-termos:

i)	0.	**ii)**	$g(x_1, f(x_1))$.
iii)	$g(x_1, x_2)$.	**iv)**	$g(x_1, g(x_2, x_3))$.

d) Para cada um dos L-termos t da alínea anterior, calcule $subt(t)$.

e) Para cada um dos L-termos t da alínea **c)**, calcule $t[g(x_0, 0)/x_1]$.

5.2 Seja L o tipo de linguagem definido no exercício 5.1.

a) Enuncie o teorema de indução estrutural para o conjunto dos L-termos.

b) Defina, por recursão estrutural em L-termos, funções $r, h : \mathcal{T}_L \to \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t fazem corresponder o número de ocorrências de variáveis em t e o número de ocorrências de símbolos de função em t, respetivamente.

c) Dê exemplos de L-termos t_1 e t_2 tais que $\#\mathrm{VAR}(t_1) = r(t_1)$ e $\#\mathrm{VAR}(t_2) < r(t_2)$.

d) Demonstre que, para todo o L-termo t, $\#\mathrm{VAR}(t) \leq r(t)$.

5.3 Seja L um tipo de linguagem. Demonstre que: para todo o L-termo t, $\mathrm{VAR}(t) \subseteq subt(t)$.

5.4 Escreva as seguintes afirmações como fórmulas para um tipo de linguagem apropriado.

a) Todo aquele que é persistente aprende Lógica.

b) Quem quer vai, quem não quer manda.

c) Nem todos os pássaros voam.

d) Se toda a gente consegue, também o João consegue.

e) Para todo o número natural que é maior do que 6, o seu dobro é maior do que 12.

f) Quaisquer dois conjuntos que têm os mesmos elementos são iguais.

g) Existe um inteiro positivo menor do que qualquer inteiro positivo.

h) Todo o inteiro positivo é menor do que algum inteiro positivo.

i) Não há barbeiro que barbeie precisamente aqueles homens que não se barbeiam a si próprios.

5.5 Seja $L = (\{0, -\}, \{\mathsf{P}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(-) = \mathcal{N}(<) = 2$.

a) Dê exemplos de L-termos e indique sequências de formação desses termos.

b) Dê exemplos de L-fórmulas atómicas.

c) Indique sequências de formação de cada uma das seguintes L-fórmulas.

i) $x_2 - 0 < x_1$.

ii) $\exists x_0 \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0)$.

iii) $\forall x_2 (\exists x_0 (x_0 < x_1) \to \exists x_1 (x_2 < x_1 - x_0)) \wedge \mathsf{P}(x_2)$.

iv) $\forall x_0 (x_0 < x_1) \vee \exists x_1 (x_1 < x_0)$.

d) Para cada L-fórmula da alínea anterior, calcule o conjunto das suas subfórmulas.

e) Calcule os conjuntos de variáveis livres e de variáveis ligadas de cada uma das fórmulas da alínea c).

f) A proposição "Para toda a L-fórmula φ, $\mathrm{LIV}(\varphi) \cap \mathrm{LIG}(\varphi) = \emptyset$" é verdadeira?

5.6 Para cada uma das fórmulas φ do exercício 5.5 c), calcule $\varphi[x_2 - x_0/x_1]$.

5.7 Considere o tipo de linguagem L do exercício 5.5. Para cada uma das fórmulas φ do exercício 5.5 c), indique quais das seguintes proposições são verdadeiras.

a) A variável x_1 é substituível pelo L-termo 0 em φ.

b) A variável x_1 é substituível pelo L-termo x_2 em φ.

c) A variável x_2 é substituível por qualquer L-termo em φ.

d) Toda a variável é substituível pelo L-termo $x_1 - x_3$ em φ.

5.8 Seja L um tipo de linguagem.

a) Defina, por recursão estrutural em L-fórmulas, a função $\mathrm{SUBFA} : \mathcal{F}_L \to \mathcal{P}(\mathcal{F}_L)$ que a cada L-fórmula φ faz corresponder o conjunto das subfórmulas atómicas de φ.

b) Sejam φ uma L-fórmula e x uma variável. Demonstre que: se $x \notin \mathrm{LIV}(\psi)$ para todo o $\psi \in \mathrm{SUBFA}(\varphi)$, então $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$.

6. Semântica do Cálculo de Predicados

6.1 Considere o tipo de linguagem L_{Arit}, seja E_{Arit} a estrutura usual para este tipo de linguagem e sejam a_1 e a_2 atribuições em $\mathbb{N}_0$ tais que $a_1(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, e $a_2(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

a) Para cada um dos L_{Arit}-termos t que se seguem, calcule $t[a_1]_{E_{Arit}}$ e $t[a_2]_{E_{Arit}}$.
   i) 0. ii) x_5. iii) $s(x_2)$.
   iv) $+(s(0), x_3)$. v) $s(0 \times (x_2 \times x_3))$. vi) $(s(0) + x_7) \times s(x_1 + x_2)$.

b) Para cada uma das L_{Arit}-fórmulas φ que se seguem, calcule $\varphi[a_1]_{E_{Arit}}$ e $\varphi[a_2]_{E_{Arit}}$.
   i) $\bot$. iii) $s(x_1) < (x_1 + 0)$. v) $(x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2))$.
   ii) $x_1 = x_2$. iv) $\neg(x_1 = x_1)$. vi) $(x_1 < x_2) \to ((x_1 + x_3) < (x_2 + x_3))$.

c) Para cada uma das fórmulas φ da alínea anterior, indique, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, o valor de $\varphi[a_1\binom{x_1}{n}]_{E_{Arit}}$ e $\varphi[a_2\binom{x_1}{n}]_{E_{Arit}}$.

d) Para cada uma das fórmulas φ da alínea b), indique $(\forall x_1 \varphi)[a_1]_{E_{Arit}}$, $(\forall x_1 \varphi)[a_2]_{E_{Arit}}$, $(\exists x_1 \varphi)[a_1]_{E_{Arit}}$ e $(\exists x_1 \varphi)[a_2]_{E_{Arit}}$.

e) Indique se alguma das fórmulas da alínea b) é válida para a estrutura E_{Arit}.

f) Indique se alguma das fórmulas da alínea b) é universalmente válida.

6.2 Seja $L = (\{0, \times\}, \{\leq\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\times) = 2$ e $\mathcal{N}(\leq) = 2$. Seja $E = (\mathbb{N}_0, \overline{})$ a L-estrutura tal que: a interpretação $\overline{0}$ de 0 é o número inteiro *zero*; a interpretação $\overline{\times}$ de $\times$ é a função *multiplicação* em inteiros; e a interpretação $\overline{\leq}$ de $\leq$ é a relação *menor ou igual do que* em inteiros. Seja $a : \mathcal{V} \to \mathbb{N}_0$ a atribuição, em E, tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = 2i$.

a) Para cada um dos seguintes L-termos t, calcule $t[a]_E$.
   i) 0. **ii)** x_2.
   iii) $x_1 \times x_2$. **iv)** $(0 \times (x_2 \times x_1))$.

b) Sejam φ e ψ as L-fórmulas $0 \leq x_1$ e $x_2 \leq x_2 \times x_1$, respetivamente. Discuta se as fórmulas φ, $\forall x_2 \psi$ e $\forall x_1 \forall x_2 (\varphi \wedge \psi)$ são satisfeitas na estrutura E para a atribuição a. Discuta ainda a validade em E e a validade universal destas fórmulas.

6.3 Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras, para quaisquer fórmulas φ e ψ num tipo de linguagem L, para qualquer variável x.

a) $\exists x \varphi \Leftrightarrow \forall x \varphi$; **b)** $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)$;

c) $\models (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$; **d)** $\models (\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$;

e) $\models \forall x(\varphi \vee \psi) \to (\forall x \varphi \vee \forall x \psi)$; **f)** $\models \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$;

g) $\models \forall x \exists y \varphi \to \exists y \forall x \varphi$; **h)** Para toda a L-estrutura E, $E \models \varphi$ ou $E \models \neg\varphi$.

6.4 Seja L o tipo de linguagem definida no exercício 6.2 e seja φ a L-fórmula

$$\neg((\exists x_1(x_1 \leq 0)) \vee (x_2 \leq 0)) \to (\neg(\exists x_1(x_1 \leq 0)) \wedge \neg(x_2 \leq 0)).$$

a) φ é uma instância de uma tautologia? **b)** φ é válida em todas as L-estruturas?

6.5 Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$, e considere a L-estrutura $E = (\mathbb{N}_0, \overline{})$, onde $\overline{0}$ é o número inteiro *zero*, $\overline{\mathsf{f}} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ é a função definida por $\overline{\mathsf{f}}(n) = n + 3$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $\overline{\mathsf{P}} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ é múltiplo de } 3\}$ e $\equiv$ é a relação de *igualdade* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\equiv = \{(n, m) \in \mathbb{N}_0^2 \mid n = m\}$.

a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i$. Calcule:
(i) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(x_4))[a]$
(ii) $(\exists x_1 \mathsf{f}(x_1) = 0) \vee \neg \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_2))[a]$

b) Seja φ a $L-$fórmula $(\mathsf{f}(x_1) = x_2 \wedge \mathsf{P}(x_1)) \to \mathsf{P}(x_2)$. Prove que:
(i) φ é válida em E;
(ii) φ não é universalmente válida.

c) Indique uma L-fórmula ψ que seja uma instância da fórmula proposicional $p_0 \leftrightarrow p_0$. A L-fórmula ψ que indicou é universalmente válida?

d) Para cada uma das seguintes afirmações, indique uma L-fórmula que a represente:
(i) Existe um número que é múltiplo de 3 mas não é zero.
(ii) Para todo o número que seja múltiplo de 3, esse número mais 3 é ainda múltiplo de 3.

6.6 Seja L o tipo de linguagem $(\{f\}, \{=\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(f) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$. Seja ainda $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura tal que $\overline{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é a função definida por $\overline{f}(n) = |n|$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, e $\equiv$ é a relação de *igualdade* em $\mathbb{Z}$, *i.e.*, $\equiv = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n = m\}$.

a) Indique L-fórmulas φ e ψ que representem, respetivamente, as afirmações "A função f é sobrejetiva" e "A função f é injetiva".

b) Verifique se as L-fórmulas φ e ψ que indicou na alínea anterior são válidas em E.

c) Para cada uma das L-fórmulas que indicou, dê exemplo, caso seja válida em E, de uma L-estrutura na qual a L-fórmula não seja válida, e, caso não seja válida em E, de uma L-estrutura na qual a L-fórmula seja válida.

6.7 Seja L o tipo de linguagem que contém apenas o símbolo de relação unário R. Justificando, diga se cada um dos seguintes conjuntos é semanticamente consistente:

a) $\{\exists x_0 R(x_0), \exists x_0 \neg R(x_0)\}$;

b) $\{R(x_1), \forall x_0 \neg R(x_0)\}$.

6.8 Sejam L um tipo de linguagem, φ uma L-fórmula e x uma variável. Mostre que $\{\exists x \neg \varphi, \forall x \varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

6.9 Seja $L = (\{c_1, c_2\}, \{R\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c_1) = \mathcal{N}(c_2) = 0$ e $\mathcal{N}(R) = 2$, um tipo de linguagem. Seja Γ o conjunto formado pelas seguintes L-sentenças:

- $\forall x_0 R(x_0, x_0)$;
- $\forall x_0 \forall x_1 (R(x_0, x_1) \to R(x_1, x_0))$;
- $\forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 ((R(x_0, x_1) \wedge R(x_1, x_2)) \to R(x_0, x_2))$.

a) Indique um modelo de Γ, i.e., indique uma L-estrutura que valide todas as fórmulas de Γ.

b) Mostre que existem modelos de $\Gamma \cup \{\neg R(c_1, c_2)\}$ e de $\Gamma \cup \{R(c_1, c_2)\}$.