

ESPERANÇA MATEMÁTICA



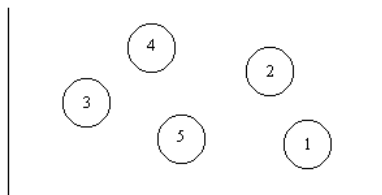
1

Esperança Matemática



Exemplo

Considere uma urna que contém 5 fichas idênticas, numeradas de 1 a 5. As fichas são mexidas de forma aleatória e é retirada uma, sendo registado o seu valor, após o que é novamente introduzida na urna. O jogo é repetido 25 vezes. Qual o valor esperado da soma dos valores registados em cada ficha retirada?



2



Esperança Matemática

- Probabilidade de sair um número = $1/5$
- Soma das 5 fichas = 15
- Valor esperado de uma ficha = 3
- Repetindo o processo 25 vezes, valor esperado da soma dos valores registados em cada ficha retirada é $25 \cdot 3 = 75$



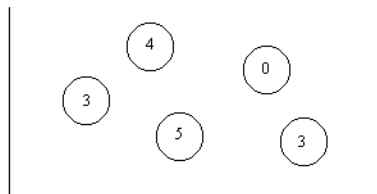
3



Esperança Matemática

Exemplo

Considere o exemplo anterior, agora com as fichas apresentadas na figura. Qual o valor esperado da soma dos valores registados em cada ficha retirada?



4

Esperança Matemática



Exemplo

No jogo da roleta existem 36 números, inscritos, alternadamente, em casas vermelhas e negras. Além destes 36 números existem ainda duas casas, de cor verde, com 0 e 00 inscritos. Neste jogo existe a possibilidade de apostar na cor negra (18) ou na cor vermelha (18). A ocorrência da cor escolhida dá direito a um prémio igual ao montante apostado. Caso ocorra uma das casas verdes, a banca recolhe tudo o que está em cima das mesas, isto é, nenhuma aposta sai vitoriosa. Suponha que um jogador pode apostar exactamente 1000 unidades monetárias e o decide fazer na cor preta. Calcule o valor esperado do ganho por parte da banca.

5

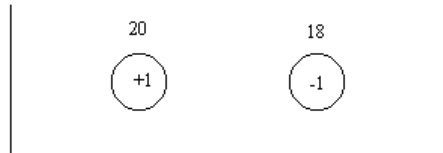


6

Esperança Matemática



Exemplo



$$E[X] = (-1)\frac{18}{38} + (+1)\frac{20}{38} = \frac{2}{38} = 0.055$$

7

Valor Esperado



Definição:

Se o acontecimento cujo resultado é X for realizado muitas vezes, então a média de todos os resultados será aproximadamente igual a $E(x)$

8

Valor Esperado



- Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ o valor da sua distribuição de probabilidade em x , o valor esperado da variável aleatória

$$E[X] = \sum_x x f(x)$$

- Se X é uma variável contínua e $f(x)$ o valor da sua função densidade de probabilidade em x , o valor esperado da variável aleatória

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

9

Valor Esperado



Exemplo

Um conjunto de 12 televisores contém 2 com defeito. Deste conjunto, 3 são escolhidos aleatoriamente. Quantos televisores com defeito são esperados?

x	0	1	2
$f(x)$	6/11	9/22	1/22

$$f(x) = \frac{C_x^2 C_{3-x}^{10}}{C_3^{12}} \quad x = 0, 1, 2$$

$$E[X] = 0 \frac{6}{11} + 1 \frac{9}{22} + 2 \frac{1}{22} = \frac{1}{2}$$

10



Valor Esperado

- Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ o valor da sua distribuição de probabilidade em x , o valor esperado da variável aleatória $g(X)$ é

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)f(x)$$

- Se X é uma variável aleatória contínua e $f(x)$ o valor da sua função densidade de probabilidade em x , o valor esperado da variável aleatória $g(X)$ é

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

11



Propriedades

1. $E[aX + b] = aE[X] + b$ a, b constantes

2. $E\left[\sum_{i=1}^n c_i g_i(X)\right] = \sum_{i=1}^n c_i E[g_i(X)]$ c_i constantes

12



Variância

- Se X é uma variável aleatória discreta e $f(x)$ o valor da sua distribuição de probabilidade em x , a variância da variável aleatória

$$\sigma^2 = Var[X] = \sum_x (x - \mu)^2 f(x)$$

- Se X é uma variável contínua e $f(x)$ o valor da sua função densidade de probabilidade em x , a variância da variável aleatória

$$\sigma^2 = Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

13



Variância

$$\sigma^2 = Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

14



Propriedades

1. $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$ a, b constantes

2. $Var[X_1 \pm X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] \pm 2Cov[X_1, X_2]$

$$Cov[X_1, X_2] = E[X_1 - \mu_1]E[X_2 - \mu_2]$$