introdução aos sistemas dinâmicos

resolução dos exercícios de sistemas de edos lineares, homogéneas e autónomas — parte um

1.

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$. Um vector próprio da matriz A associado a cada um desses valores próprios pode ser dado, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = C_2\,\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-2t} + 2C_2\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

2.

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Um vector próprio da matriz A associado a cada um desses valores próprios pode ser dado, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{3t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2\,\mathrm{e}^{3t} \\ y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + 2C_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{cases}$$

3.

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 0$. Um vector próprio da matriz A associado a cada um desses valores próprios pode ser dado, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = -C_1\, \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \\ y(t) = C_1\, \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \end{cases}$$

Procurando escrever as constantes arbitrárias em função do valor da solução no instante inicial, $(x_\circ, y_\circ)$, temos que

$$\begin{cases} x_\circ = -C_1 + C_2 \\ y_\circ = C_1 + C_2 \end{cases}$$

donde se retira que

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}(-x_\circ + y_\circ) \\ C_2 = \frac{1}{2}(x_\circ + y_\circ) \end{cases}$$

Deste modo, a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(x_\circ - y_\circ)\, \mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}(x_\circ + y_\circ) \\ y(t) = \frac{1}{2}(-x_\circ + y_\circ)\, \mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}(x_\circ + y_\circ) \end{cases}$$

4.

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$. Um vector próprio da matriz A associado a cada um desses valores próprios pode ser dado, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = 2C_2\, \mathrm{e}^{2t} \\ y(t) = C_1\, \mathrm{e}^{-2t} + C_2\, \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

Procurando escrever as constantes arbitrárias em função do valor da solução no instante inicial, $(x_\circ, y_\circ)$, temos que

$$\begin{cases} x_\circ = 2C_2 \\ y_\circ = C_1 + C_2 \end{cases}$$

donde se retira que

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}(-x_\circ + 2y_\circ) \\ C_2 = \frac{1}{2}x_\circ \end{cases}$$

Deste modo, a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$\begin{cases} x(t) = x_\circ\, \mathrm{e}^{2t} \\ y(t) = \frac{1}{2}(2y_\circ - x_\circ)\, \mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}x_\circ\, \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

A partir da expressão para a solução geral do sistema, temos que, se $(x_o, y_o) = (1, 1)$, então

$$\begin{cases} x(1.2) = \mathrm{e}^{2\times 1.2} = 11.0232 \\ y(1.2) = 0.5\,\mathrm{e}^{-2\times 1.2} + 0.5\,\mathrm{e}^{2\times 1.2} = 5.55695 \end{cases}$$

5.

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$. Um vector próprio da matriz A associado a cada um desses valores próprios pode ser dado, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = -C_1\,\mathrm{e}^{-2t} - 4C_2\,\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-2t} + 3C_2\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

Procurando escrever as constantes arbitrárias em função do valor da solução no instante inicial, (x_o, y_o), temos que

$$\begin{cases} x_o = -C_1 - 4C_2 \\ y_o = C_1 + 3C_2 \end{cases}$$

donde se retira que

$$\begin{cases} C_1 = 3x_o + 4y_o \\ C_2 = -x_o - y_o \end{cases}$$

Assim sendo, a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$\begin{cases} x(t) = -(3x_o + 4y_o)\,\mathrm{e}^{-2t} + 4(x_o + y_o)\,\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = (3x_o + 4y_o)\,\mathrm{e}^{-2t} - 3(x_o + y_o)\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

A partir da expressão para a solução geral do sistema, temos que, se $(x_o, y_o) = (2, -1)$, então

$$\begin{cases} x(1) = -2\,\mathrm{e}^{-2} + 4\,\mathrm{e}^{-1} = 1.20085 \\ y(1) = -2\,\mathrm{e}^{-2} + 3\,\mathrm{e}^{-1} = -0.832968 \end{cases}$$

6.

6.1

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$. Um vector próprio da matriz A associado a cada um desses valores próprios pode ser dado, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Então, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-3t} - C_2\,\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-3t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

Procurando escrever as constantes arbitrárias em função do valor da solução no instante inicial, $(x_\circ, y_\circ)$, temos que

$$\begin{cases} x_\circ = C_1 - C_2 \\ y_\circ = C_1 + C_2 \end{cases}$$

pelo que a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(x_\circ + y_\circ)\,\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{2}(-x_\circ + y_\circ)\,\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{2}(x_\circ + y_\circ)\,\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{2}(-x_\circ + y_\circ)\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

6.2

Pelas expressões da solução geral do sistema verifica-se facilmente que

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0 \end{cases}$$

qualquer que seja a escolha para o ponto inicial $(x_\circ, y_\circ)$.

7.

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem um valor próprio, $\lambda = -1$, de multiplicidade 2. Um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio λ pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso, sabemos que a segunda solução particular do sistema pode ser escrita como

$$\Big(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} t\Big)\,\mathrm{e}^{-t}$$

onde o primeiro destes vectores é solução de

$$(A - \lambda I)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = -1$. Assim sendo, podemos concluir que um desses vectores pode ser

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema escreve-se então como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + C_2\Big(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t\Big)\,\mathrm{e}^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2(2t\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}) \\ y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

Procurando escrever as constantes arbitrárias em função do valor da solução no instante inicial, $(x_\circ, y_\circ)$, temos que

$$\begin{cases} x_\circ = 2C_1 - C_2 \\ y_\circ = C_1 \end{cases}$$

pelo que a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$\begin{cases} x(t) = x_\circ\,\mathrm{e}^{-t} - (2x_\circ - 4y_\circ)\,t\,\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = y_\circ\,\mathrm{e}^{-t} - (x_\circ - 2y_\circ)\,t\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

8.

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem um par de valores próprios complexos conjugados $\lambda_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$. Um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}$ pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{i}$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\Big(\cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big)\,\mathrm{e}^{t} + C_2\Big(\operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big)\,\mathrm{e}^{t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 \operatorname{sen} t\,\mathrm{e}^{t} + C_2 \cos t\,\mathrm{e}^{t} \\ y(t) = C_1 \cos t\,\mathrm{e}^{t} + C_2 \operatorname{sen} t\,\mathrm{e}^{t} \end{cases}$$

9.

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

tem um par de valores próprios complexos conjugados $\lambda_{1,2} = -3 \pm \mathrm{i}$. Um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda_1 = 3 + \mathrm{i}$ pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{i}$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\Big(\cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big)\,\mathrm{e}^{t} + C_2\Big(\operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big)\,\mathrm{e}^{t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \operatorname{sen} t\,\mathrm{e}^{t} - C_2 \cos t\,\mathrm{e}^{t} \\ y(t) = C_1 \cos t\,\mathrm{e}^{t} + C_2 \operatorname{sen} t\,\mathrm{e}^{t} \end{cases}$$

10.

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

tem um par de valores próprios complexos conjugados $\lambda_{1,2} = 2 \pm \mathrm{i}$. Um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2 + \mathrm{i}$ pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+\mathrm{i} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{i}$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \big(\cos t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\big)\, \mathrm{e}^{2t} + C_2 \big(\operatorname{sen} t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\big)\, \mathrm{e}^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = C_1(-3\cos t - \operatorname{sen} t)\, \mathrm{e}^{2t} + C_2(-3\operatorname{sen} t + \cos t)\, \mathrm{e}^{2t} \\ y(t) = 2C_1 \cos t\, \mathrm{e}^{2t} + 2C_2 \operatorname{sen} t\, \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

Procurando escrever as constantes arbitrárias em função do valor da solução no instante inicial, $(x_{\mathrm{o}}, y_{\mathrm{o}})$, temos que

$$\begin{cases} x_{\mathrm{o}} = -3C_1 + C_2 \\ y_{\mathrm{o}} = 2C_1 \end{cases}$$

pelo que a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$\begin{cases} x(t) = x_{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^{2t}\cos t - 3\mathrm{e}^{2t}\operatorname{sen} t) - 5y_{\mathrm{o}}\mathrm{e}^{2t}\operatorname{sen} t \\ y(t) = 2x_{\mathrm{o}}\mathrm{e}^{2t}\operatorname{sen} t + y_{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^{2t}\cos t + 3\mathrm{e}^{2t}\operatorname{sen} t) \end{cases}$$

A partir da expressão para a solução geral do sistema, temos que, escolhendo $(x_{\mathrm{o}}, y_{\mathrm{o}}) = (1, 0)$, então

$$\begin{cases} x(-\pi/2) = 3\,\mathrm{e}^{-\pi} = 0.129642 \\ y(-\pi/2) = -2\,\mathrm{e}^{-\pi} = -0.0864278 \end{cases}$$