고유값과 고유벡터 구하기

- **함수(function)**란 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 오직 하나의 원소를 대응시키는 규칙 f이다. f가 원소 x에 원소 y를 대응시킬 때 $y = f(x)$로 표기하고 y를 f에 의한 **상(image)** 또는 x에서 f의 **값(value)**이라한다. 집합 X를 f의 **정의역(domain)**, 집합 Y를 f의 **공변역(codomain)**이라 한다. x가 X에서 변할 때 f의 의한 모든 가능한 값으로 이루어진 Y의 부분집합을 f의 **치역(range)**이라 한다.

함수 f의 정의역이 $\mathbb{R}^n$이고 그 공변역이 $\mathbb{R}^m$일 때 f를 $\mathbb{R}^n$에서 $\mathbb{R}^m$으로의 **변환(transformation)**이라 하고, 이 경우 f는 $\mathbb{R}^n$을 $\mathbb{R}^m$으로 **사상(map)**한다고 하고 이것은 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$으로 표기한다.

일반적으로 $m \times n$ 행렬 A는 $\mathbb{R}^n$ 공간에서 $\mathbb{R}^m$ 공간으로 **선형변환(linear transformation)**이다. 특히 $m = n$일 때는 **선형연산자(linear operator)**라 한다.

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

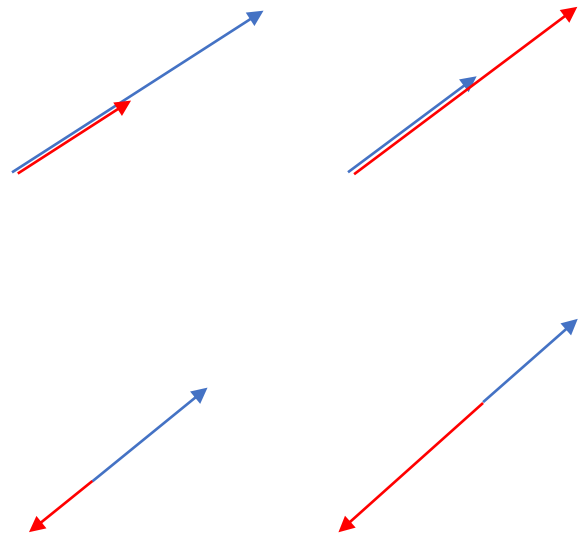
A가 $n \times n$ 행렬이고 $\mathbf{x}$가 $\mathbb{R}^n$의 벡터이면 $A\mathbf{x}$도 $\mathbb{R}^n$의 벡터이다. 그런데 일반적으로 $\mathbf{x}$와 $A\mathbf{x}$ 사이의 간단한 기하학적 관계는 존재하지 않는다. 그러나 $\mathbf{x}$가 0이 아닌 벡터이고 $A\mathbf{x}$가 $\mathbf{x}$의 스칼라배인 특수한 경우는 간단한 기하학적 관계가 나타난다.

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

선형연산자에 의해서 자기 자신의 스칼라배로 사상되어지는 0이 아닌 벡터는 당연히 기하학에서뿐만 아니라 진동, 유전학, 모집단의 동태, 양자역학과 경제학의 연구에서 나타난다.

• 선형대수의 여러 응용에서 λ가 임의의 스칼라일 때

$Ax = \lambda x.$



$$(1) \quad A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

인 형식으로 표현되는 n개의 미지수를 갖는 n개의 1차방정식으로 이루어진 연립방정식과 관련된다. 이와 같은 연립방정식은 실제로, 동차연립방정식의 변형이다. 그 이유는 식 (1)이 $\lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{0}$이므로, 단위행렬 $\mathbf{I}$을 삽입하고, 인수분해하여

$$(2) \quad (\lambda\mathbf{I} - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

과 같이 고쳐 쓸 수 있는 까닭이다. 형식 (2)의 연립1차방정식에 관한 흥미 있는 주요문제는 이 연립방정식이 **자명해(trivial solution)**를 갖지 않는 λ의 값을 결정하는 것이다. 이와 같은 λ의 값을 A의 **특성값(characteristic value)** 또는 **고유값(eigenvalue)**이라 한다. λ가 A의 고유값일 때 식 (2)의 **비자명해(nontrivial solution)**를 λ에 대응하는 A의 **고유벡터(eigenvector)**라 한다. 그리고 A의 고유값들의 집합을 A의 **스펙트럼(spectrum)**이라 한다.

• 연립방정식 $(\lambda\mathbf{I} - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$이 비자명해를 가지기 위한 필요충분조건은

$$(3) \quad det(\lambda\mathbf{I} - A) = 0$$ (실수 계수를 갖는 λ에 대한 n차 방정식이다.)

으로 되는 것이다. 이것은 A의 **특성방정식(characteristic equation)**이라 하고 A의 고유값은 이 방정식을 λ에 관하여 풀어서 구해질 수 있다.

예제 1: 행렬 $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$의 고유값과 고유벡터를 구해보자.

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ $\qquad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$

$$\boxed{\begin{array}{rcrcl} (\lambda+5)x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ -2x_1 & + & (\lambda+2)x_2 & = & 0 \end{array}} \qquad (\lambda\mathbf{I} - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$p(\lambda) = det(\lambda\mathbf{I} - A) = \begin{vmatrix} \lambda+5 & -2 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+5)(\lambda+2) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

특성다항식 (characteristic polynomial)

특성방정식 (characteristic equation)

실수 계수를 갖는 2차 방정식

$\lambda^2 + 7\lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda+6) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -1,\; \lambda_2 = -6$ **(고유값)**

$\lambda = \lambda_1 = -1 \;:\; \boxed{\begin{array}{rcl} 4x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ -2x_1 + x_2 & = & 0 \end{array}} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 2r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; (r \in \mathbb{R})$

고유값 $\lambda = -1$에 대응하는 **(고유벡터)**

$\lambda = \lambda_2 = -6 \;:\; \boxed{\begin{array}{rcl} -x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ -2x_1 - 4x_2 & = & 0 \end{array}} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s \\ -s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \; (s \in \mathbb{R})$

고유값 $\lambda = -6$에 대응하는 **(고유벡터)**

- n차 정사각행렬 A의 고유값과 고유벡터를 구해보자.

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \qquad (\lambda\mathbf{I} - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$D(\lambda) = det(\lambda\mathbf{I} - A) = 0$$ **실수 계수를 갖는 n차 방정식**

특성다항식
(characteristic polynomial)

(고유값)

고유값 λ에
대응하는 **(고유벡터)**

대수학의 기본정리
실수 계수를 갖는 n차 방정식은
복소평면에서 정확히 n개의 해를 갖는다.

```
A=matrix(QQ, 2, 2, [1, -3, -3, 1]) # A 입력
print A.charpoly() # A의 특성방정식

solve(x^2 - 2*x - 8==0, x)

(-2*identity_matrix(2)-A).rref()

(4*identity_matrix(2)-A).rref()
```

```
A=matrix(QQ, 2, 2, [1, -3, -3, 1]) # A 입력
print A.charpoly() # A의 특성방정식

A.eigenvalues()

A.eigenvectors_right()
```

• n차 삼각행렬 $T=[t_{ij}]$에 대하려 $\lambda\mathbf{I}-T$의 주대각선성분은 $\lambda - t_{ii}$ $(i=1,2,\ldots,n)$이다. 따라서 T의 특성다항식은 $det(\lambda\mathbf{I}-T)=(\lambda-t_{11})(\lambda-t_{22})\cdots(\lambda-t_{nn})$이므로 **삼각행렬 T의 모든 고유값은 T의 주대각선성분인 $t_{11}, t_{22}, \ldots, t_{nn}$임을 알 수 있다.**

• λ가 n차 정사각행렬 A의 고유값일 때, 동차연립방정식 $(\lambda\mathbf{I}-A)\mathbf{x}=\mathbf{0}$의 해들의 집합을 λ에 대응하는 A의 **고유공간(eigenspace)**이라고 한다.

예제 3: 행렬 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & -3 & 0\end{bmatrix}$의 고유값과 고유벡터, 그리고 고유값에 대응하는 A의 고유공간들을 구하여라.

```
A=matrix(QQ, 3, 3, [1, 2, 2, 1, 2, -1, 3, -3, 0])
print A.charpoly()

solve(x^3 - 3*x^2 - 9*x + 27==0, x)

-3*identity_matrix(3)-A).rref()

(3*identity_matrix(3)-A).rref()
```

```
A=matrix(QQ, 3, 3, [1, 2, 2, 1, 2, -1, 3, -3, 0])
print A.charpoly()

A.eigenvalues()

A.eigenvectors_right()
```

[과제 6] 다음을 Sage 명령어를 이용하여 행렬

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ -4 & 10 & -1 & -2 \\ 6 & -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

의 고유값과 고유벡터, 그리고 고유값에 대응하는 A의 고유공간들을 구하여라.

중간시험 공지

일시 : 2021년 4월 19일 오전 9시 30분 – 오전 11시 (답안 제출 시간 포함)

범위 : 2주, 3주, 4주, 5주, 6주, 7주 강의내용 + 과제 2, 3, 4, 5, 6의 내용

방식 : 오픈 북 온라인 시험(zoom 화상 감독), SageMath나 Python 사용

1. 오전 9시 25분까지 데스크 컴퓨터 혹은 노트북 혹은 핸드폰으로 zoom에 입장하여 화면이 **본인의 책상 위가 보이도록 셋팅**합니다.

2. 오전 9시 30분이 되면 zoom 채팅방과 카카오 대화방에 교수자가 올리는 **구글 드라이브 주소**를 클릭하여 **중간시험 문제를 화면에 띄우고 SageMath나 Python으로 코딩하여 답안을 작성**합니다.

3. SageMath나 Python으로 코딩된 모든 답안을 캡쳐하여 아래한글에 붙이고, **본인의 신분증을 올려 놓고 사진**을 찍습니다. (학생증, 주민등록증, 운전면허증, 여권 사용)

4. 사진 파일을 **pdf 파일**로 변환하고 파일명은 **본인 이름**으로 만들어 제 이메일 **219514@inha.ac.kr**로 **오전 11시**까지 제출합니다.

5. 다시 제출은 없으며, 오전 11시를 넘어 제출한 답안은 무효 처리합니다.