함수의 극한은 미적분학에서 가장 중요하고도 기본적인 개념이다. 함수의 극한을 토대로 연속성과 미분가능성을 도입할 수 있으며, 미분을 이용하여 자연 현상을 수학적으로 분석하고 가까운 미래의 일을 예측할 수 있다.

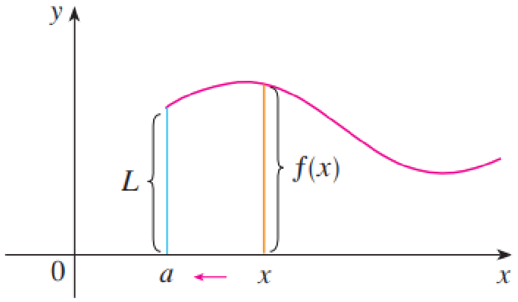
함수 $y = f(x)$에서 x가 a의 오른쪽에서(x가 a보다 큰 쪽에서) a에 가까워짐에 따라 함숫값 $f(x)$가 A로 가까워진다고 하자. 이를 기호로 $\lim_{x\to a^+} f(x) = A$로 나타내고, 이때 값 A를 $f(x)$의 $x = a$에서의 **우극한(right-hand limit)**이라 한다. 마찬가지로 x가 a의 왼쪽에서(x가 a보다 작은 쪽에서) a에 가까워짐에 따라 함숫값 $f(x)$가 B로 가까워진다고 하자. 이를 기호로 $\lim_{x\to a^-} f(x) = B$로 나타내고, 값 B를 $f(x)$의 $x = a$에서의 **좌극한(left-hand limit)**이라 한다.

또한 x가 a의 왼쪽과 오른쪽 어느 쪽에서 가까워지든 함숫값 $f(x)$가 같은 값 L로 가까워지면

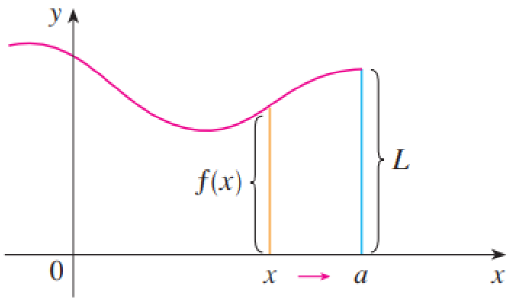
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

로 나타내며, 이때 값 L을 함수 $f(x)$의 $x = a$에서의 **극한(limit)**이라고 한다.

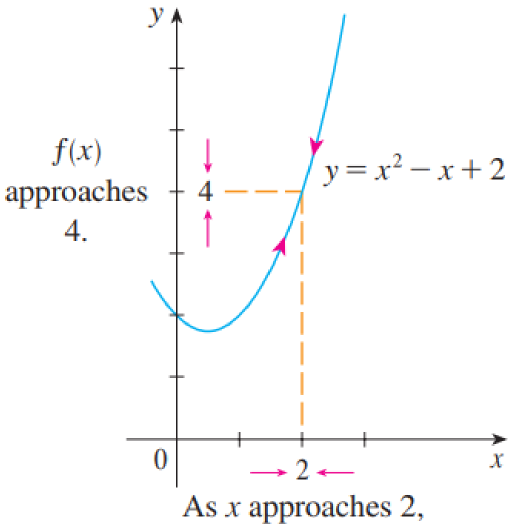
직관적 정의 $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$



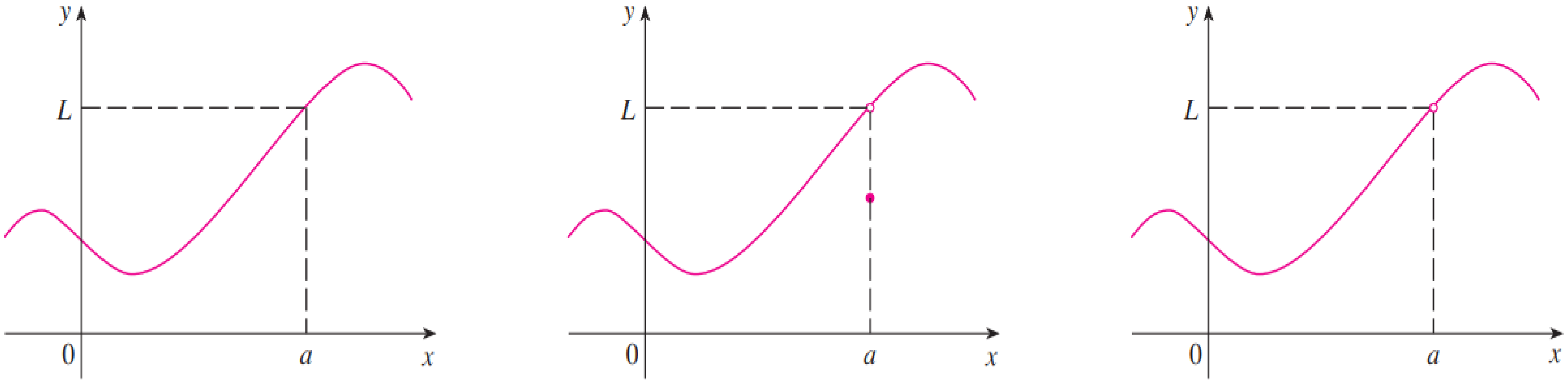
(b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$



(a) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$



x가 a로 다가갈 때 $f(x)$가 어떤 상수로 수렴하면 x가 a로 다가갈 때 $f(x)$가 **수렴**한다고 한다. 그렇지 않으면 x가 a로 다가갈 때 $f(x)$가 **발산**한다고 한다.



점 a에서 함수 f가 정의되어 있든, 정의되어 있지 않든, 극한은 점 a가 아닌, **그 근방에서 함숫값의 변화를 다루는 개념이다.**

$$\lim_{x\to c}(ax+b) = ac+b$$

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+1} = \sqrt{3^2+1} = \sqrt{10}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{3x-1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 2}\ln(x^2-3) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

극한의 기본성질

함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to a} f(x)=A,\ \lim_{x\to a} g(x)=B$$

라 하자. 이때 다음 식이 성립한다.

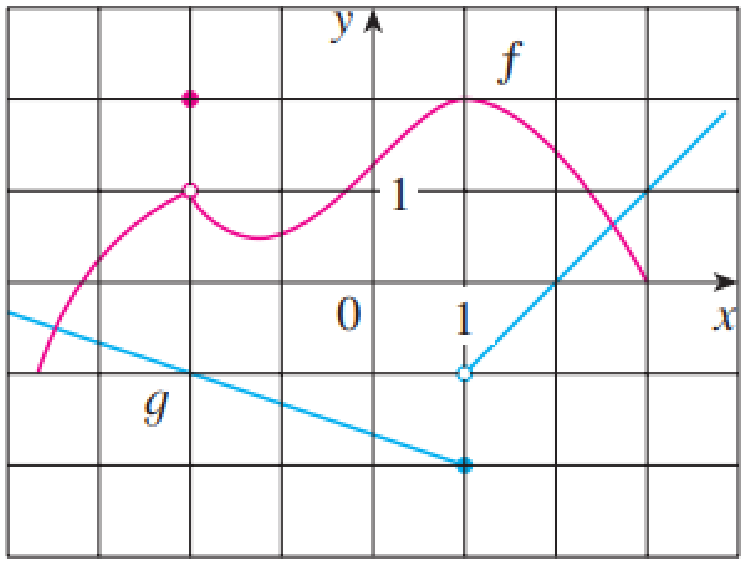
(1) $\lim_{x\to a}(kf(x))=kA$ (k는 임의의 상수)

(2) $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$

(3) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=AB$

(4) $B\neq 0$이면, $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$

(5) $f(x)\le g(x)$이면 $A\le B$



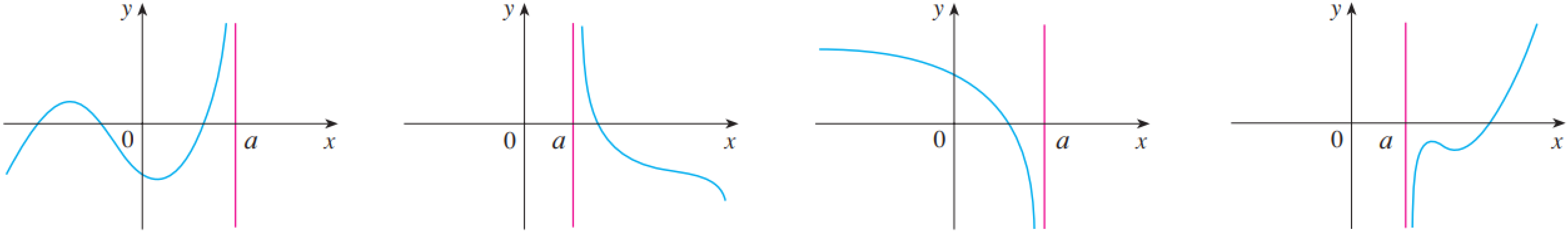
(a) $\lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ (c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ x**가** a**로 다가갈 때** $f(x)$**가** ∞**로 발산한다**고 한다. ($-\infty$의 경우도 같다.) $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{|x-1|}=\infty$

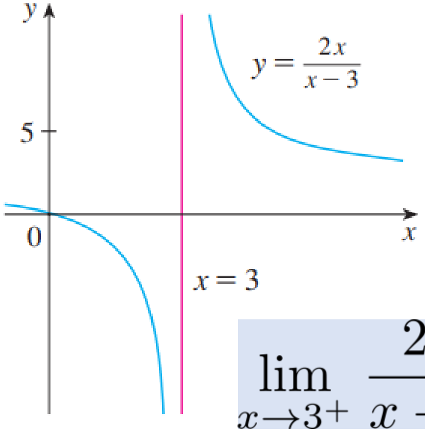
$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ x**가 무한히 커질 때** $f(x)$**는** L**로 수렴한다**고 한다. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

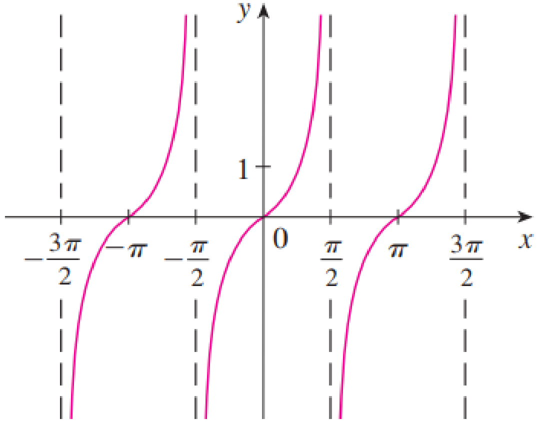
$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ x**가** a**로 다가갈 때** $f(x)$**가** ∞**로 발산한다**고 한다. ($-\infty$의 경우도 같다.)

$\lim_{x\to \infty} f(x) = L$ x**가 무한히 커질 때** $f(x)$**는** L**로 수렴한다**고 한다.



(a) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$





$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{|x-1|} = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

$$\lim_{x\to 3^1} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

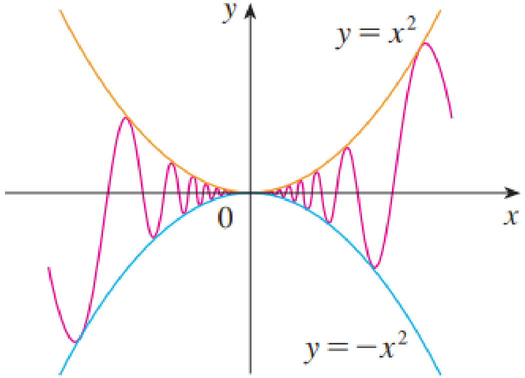
정리: 함수 $f, g : I - \{a\} \to \mathbb{R}$가 다음 두 조건
(a) 모든 $x \in I - \{a\}$에 대해 $|f(x)| \le g(x)$이고, (b) $\lim_{x\to a} g(x) = 0$
을 만족하면 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$이다.

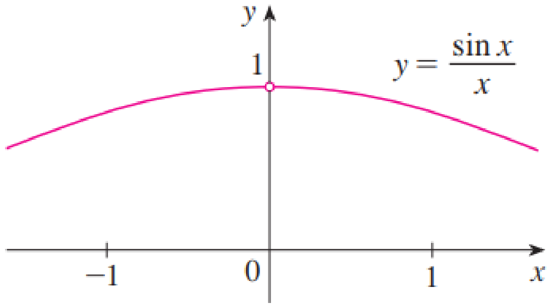
정리: 함수 $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$가 다음 두 조건
(a) 모든 $x \in [a, \infty)$에 대해 $|f(x)| \le g(x)$이고, (b) $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$
을 만족하면 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$이다.

$$\begin{array}{ccccc} -g(x) & \le & f(x) & \le & g(x) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

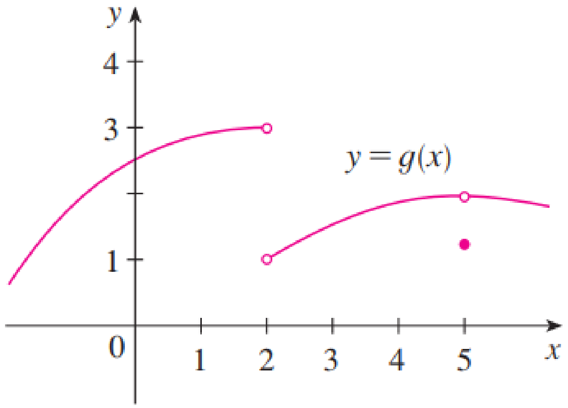
$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$





$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

정리: 함수 $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$가 다음 두 조건
(a) 모든 $x \in [a, \infty)$에 대해 $f(x) \ge g(x)$이고, (b) $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$
을 만족하면 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$이다.



$f(x) = [x]$일 때,

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = \qquad \lim_{x\to n^+} f(x) =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-3}{x^2-4x+3} = \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x^2-4x+3} =$$

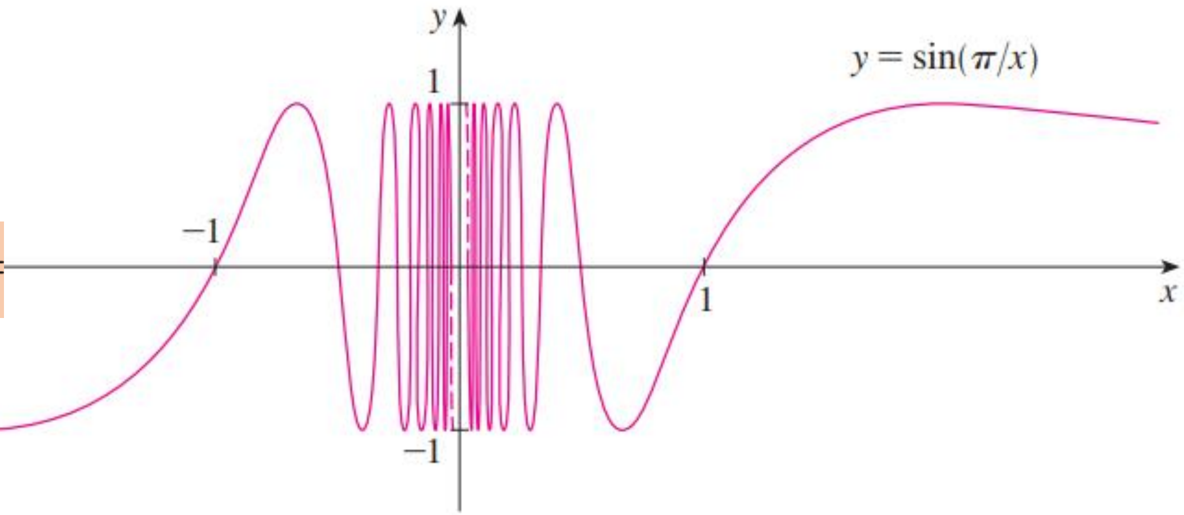
$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ 일 때,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) =$$

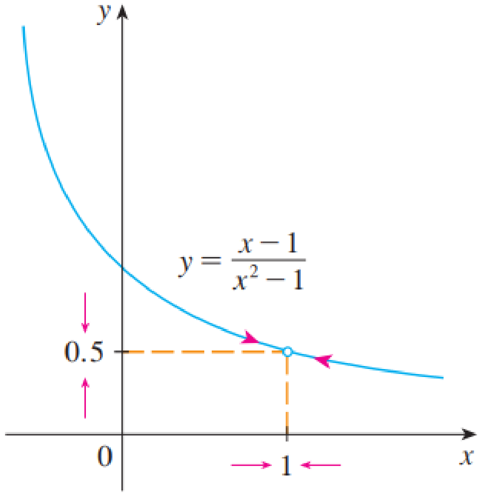
$$\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \right) =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{\pi}{x} =$$

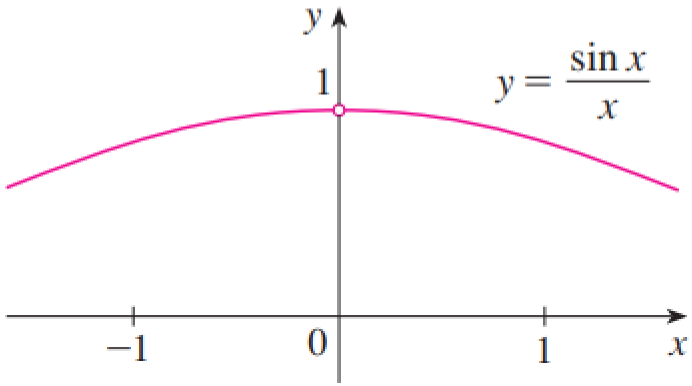


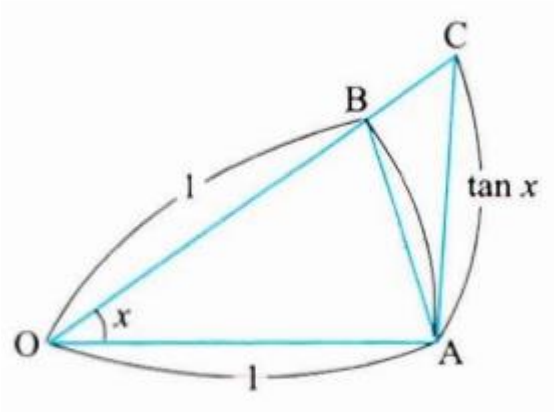
$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$



$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$의 증명 :

x	$\frac{\sin x}{x}$
±1.0	0.84147098
±0.5	0.95885108
±0.4	0.97354586
±0.3	0.98506736
±0.2	0.99334665
±0.1	0.99833417
±0.05	0.99958339
±0.01	0.99998333
±0.005	0.99999583
±0.001	0.99999983





그림에서 $\triangle OAB$, 부채꼴 OAB 및 $\triangle OAC$의 면적을 비교하면

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

이다. 이 식을 변형하여 $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$을 얻는다. 다시 역수를 취하면

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

여기서 $\lim_{x\to 0^+}\cos x = 1$이므로 압착법칙으로부터 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$이다. 한편,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1$$

이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$이다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$$

[**예제 1**] 다음 극한(limit)을 구하여라.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin x}{x+1},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{|\cos x|},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x^2}{\sin x},\quad \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{|x-2|},\quad \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{|x-2|}$$

```
var( 'x' )
f1(x) = sin(x)/(x +1)
f2(x)=sin(x)/abs(cos(x))
f3(x)=x^2/sin(x)
print(limit(f1(x), x = 2)) # x = 2일 때 극한
print(limit(f2(x), x =pi/2)) # x =pi/2일 때 극한
print(limit(f3(x), x =pi/4)) # x =pi/4일 때 극한
f4(x) = (x^2 - 4)/abs(x - 2)
print(limit(f4(x), x = 2, dir = '-')) # x = 2일 때 좌극한
print(limit(f4(x), x = 2, dir = '+')) # x = 2일 때 우극한
```

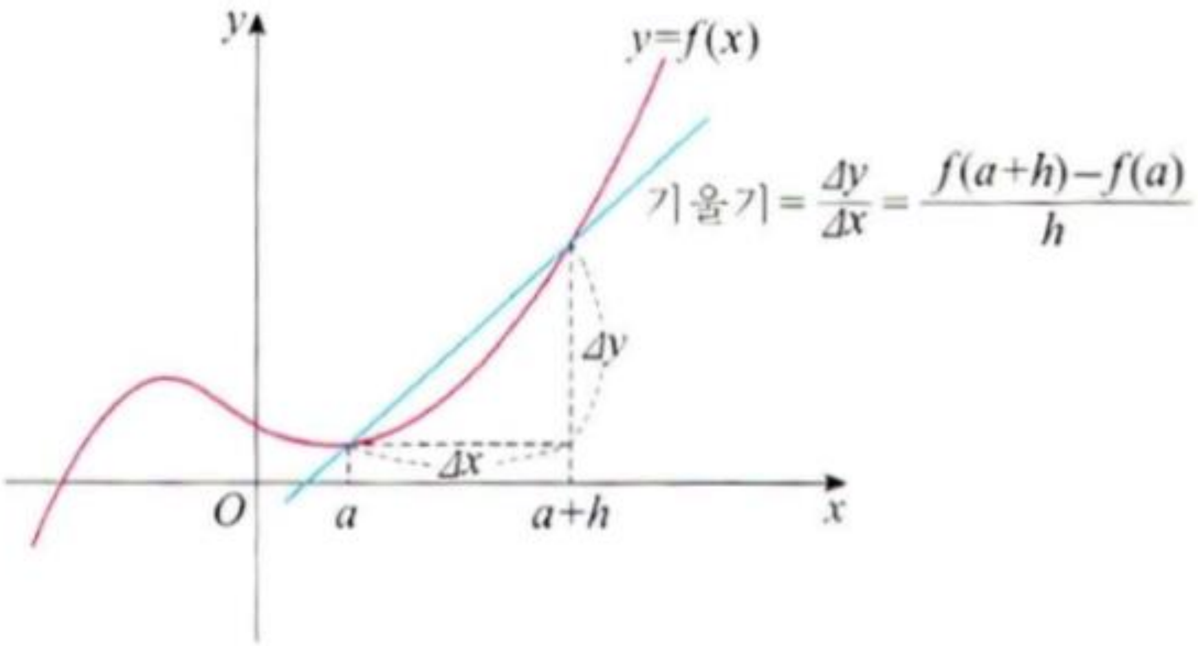
함수 $y = f(x)$에서 x가 $x = a$에서 $x = a + h$까지 변한다고 하자. 이때 x의 **증분(increment)**을 Δx로 나타내고, 함숫값의 증분을 Δy로 나타낸다. 즉

$$\Delta x = (a + h) - a = h, \quad \Delta y = f(a + h) - f(a)$$

이다. 그리고

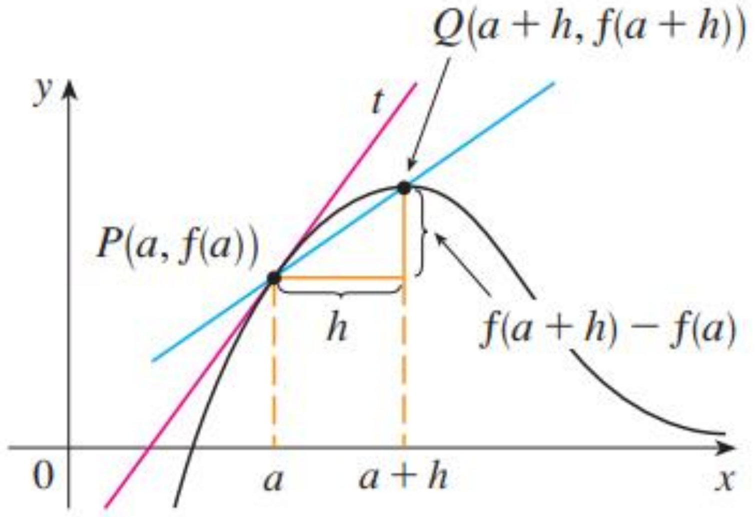
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

를 $y = f(x)$의 a에서 $a + h$까지의 **평균변화율(average rate of change)**이라 하며, 이는 두 점 $(a, f(a))$와 $(a + h, f(a + h))$를 잇는 직선의 기울기가 된다.



이제 $x = a$에서 $x = a + h$까지의 평균변화율에서 h를 점점 0으로 보내는 극한을 생각하자.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



물론 이 극한이 존재하지 않을 수도 있지만, 이 **극한이 존재할 때** 그 극한을 $x = a$에서 함수 $y = f(x)$의

도함수(derivative of f at a) 또는

순간변화율(instantaneous rate of change) 또는

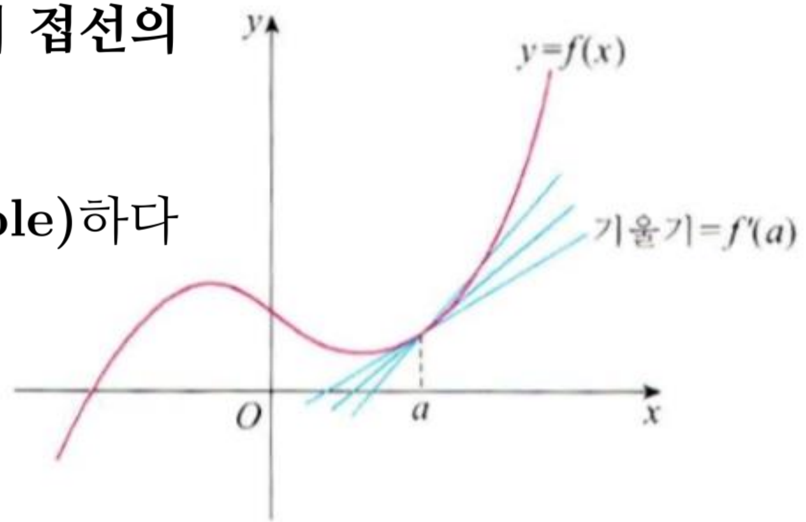
변화율(rate of change) 또는

미분계수(differential coefficient)

라 하고, 이를 기호로 $f'(a)$로 표현한다.

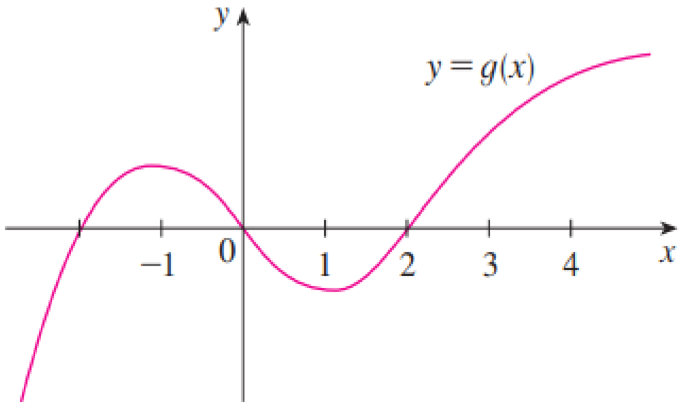
그리고 $f'(a)$의 기하학적 의미는 $y = f(x)$의 그래프에서 $x = a$에서의 **접선의 기울기(slope of tangent line)**를 나타낸다.

또한 $f'(a)$가 존재하면 $y = f(x)$는 $x = a$에서 **미분가능(differentiable)**하다고 하고, $f'(a)$를 다음과 같이 여러 가지로 표현할 수 있다.

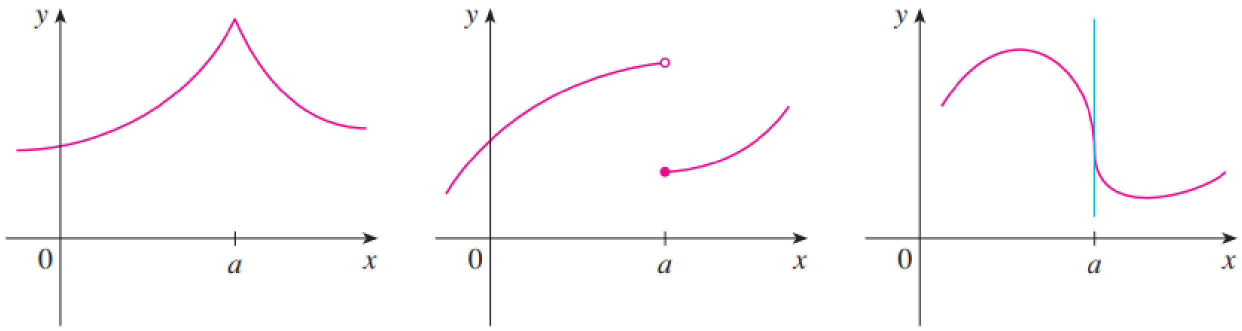


$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

아래 그래프에서
$0,\quad g'(-2),\quad g'(0),\quad g'(2),\quad g'(4)$
을 크기순으로 나열하여라.



(1) $y = f(x) = |x|$
(2) $y = g(x) = x|x|$
(3) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|}, & x < 0 \end{cases}$
의 $x = 0$에서의 미분가능성을 말하여라.



(a) A corner (b) A discontinuity (c) A vertical tangent

미분이 불가능한 점:
첨점, 불연속점, 수직접선을 갖는 점

정리: $y = f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하면, $x = a$에서 연속이다.

이 정리의 역은 성립하지 않는다.

우리는 $f'(a)$의 정의에 대하여 알아보았다. 이제 a**를** x**로 바꾸어** 이를 x**에 대한 함수로 생각하자**. 즉

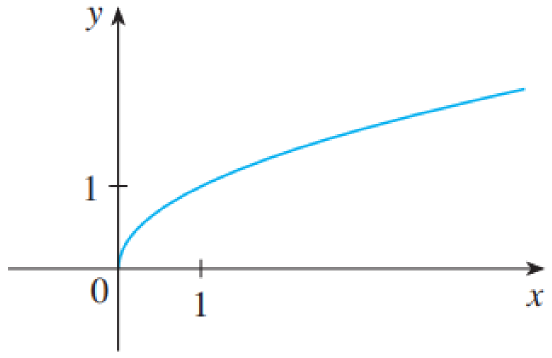
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

이렇게 얻어진 함수 $f'(x)$를 $y = f(x)$의 **도함수(derivative)**라고 한다.

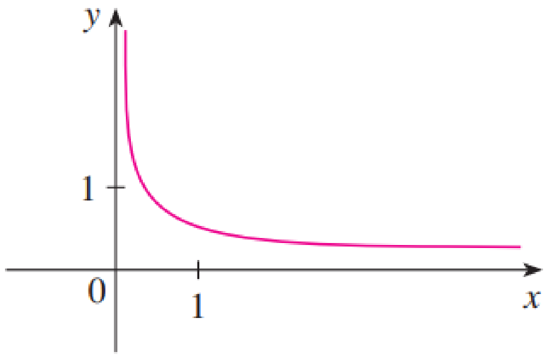
도함수를 나타내는 기호로는 f' 외에도

$$y', \ \frac{dy}{dx}, \ \frac{d}{dx}f, \ Dy, \ Df$$

등 여러 가지가 있다. 또한 도함수를 구하는 과정을 **미분하다(differentiate)**라고 한다.



(a) $f(x) = \sqrt{x}$

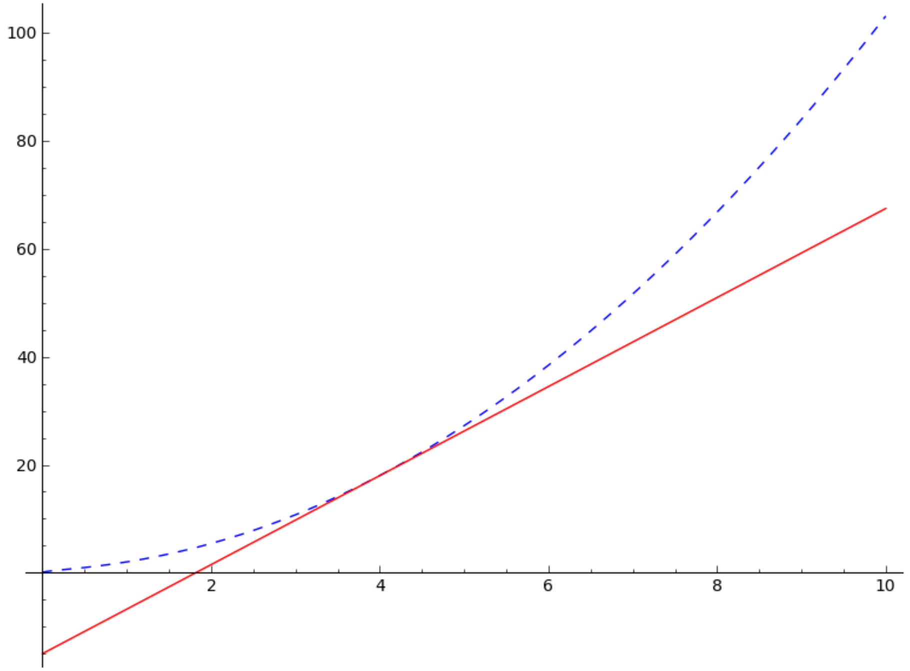


(b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

예제 2: 점 $(4, 18)$에서 곡선 $y = x^2 + \sqrt{x}$에 대한 접선의 방정식을 구하여라. 곡선과 접선을 모두 한 평면 위에 그래프로 표시하여라.

```
var('x')
f(x) = x^2 + sqrt(x)
df(x) = diff(f(x), x)     # 도함수 구하기
y(x) = df(4)*(x - 4) + 18 # 기울기(df(4))를 구하여 접선의 방정식 구하기
print(y(x))
p1 = plot(f(x), x, 0, 10, linestyle = "--", color = 'blue')   # 함수 f(x) 그리기
p2 = plot(y(x), x, 0, 10, color = 'red')   # 접선 y(x) 그리기
show(p1 + p2)   # 함수 f(x)와 접선 y(x)를 동시에 보여주기
```

33/4*x - 15



도함수를 정의만으로 구하는 것은 매우 복잡한 계산을 요구한다. 도함수를 쉽게 구할 수 있는 여러 가지 미분법을 익혀 다양한 함수에 적용해 보자.

정리:

$$(1) \quad \frac{d}{dx}(c) = 0$$

If f and g are both differentiable, then,

$$(2) \quad \frac{d}{dx}\left[cf(x)\right] = c\frac{d}{dx}f(x) \ (c \text{ is a constant})$$

$$(3) \quad \frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

$$(4) \quad \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x) + f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)$$

$$(5) \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x) - f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)}{\{g(x)\}^2}$$

$$(6) \quad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \ (n \text{ is any real number})$$

$$(7) \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

정리: 합성함수 미분법(연쇄법칙)

$u = g(x)$와 $y = f(u)$가 미분가능하면 $\frac{dy}{dx}$도 존재하며

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \ \text{즉} \ (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+1)^{100} =$$

$$y = f(x), \quad \frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}y' \ (n \text{ is any real number})$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} =$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

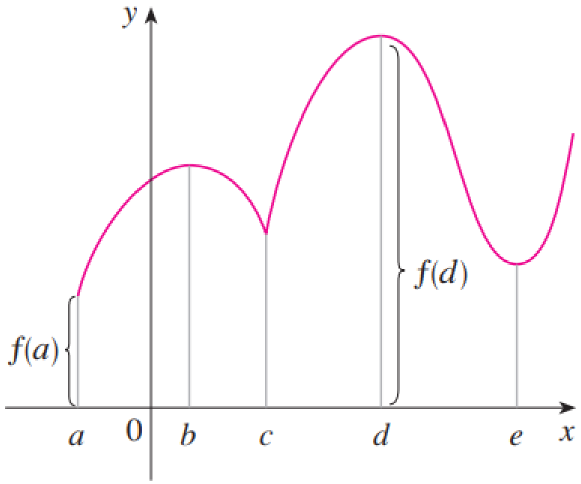
함수 $y = f(x)$를 두 번 미분하여 **2차도함수**를 기호로 $y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ 등으로 나타내며, 일반적으로 n번 미분한 n**차도함수**를 $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$ 등으로 나타낸다.

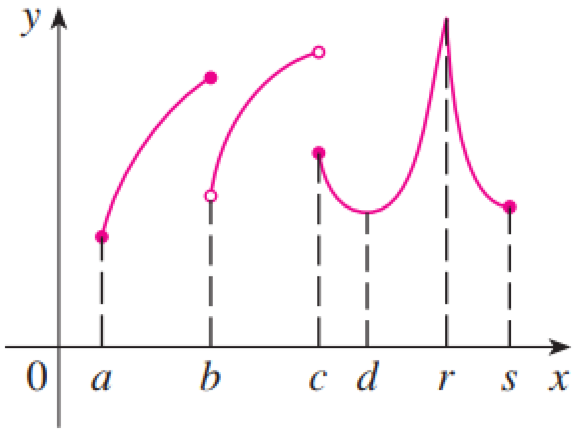
예제 3: 함수 $y = f(x) = x^2 + 3e^x$에 대해 y'''을 구하여라.

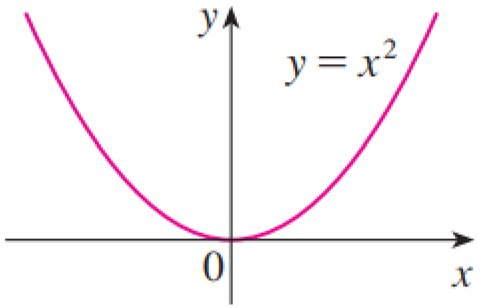
```
var('x')
f(x) = x^2 + 4*e^x
print(diff(f(x), x))   # dy/dx
print(diff(diff(f(x), x), x))   # 2계도함수
print(diff(diff(diff(f(x), x), x), x))  # 3계도함수
```

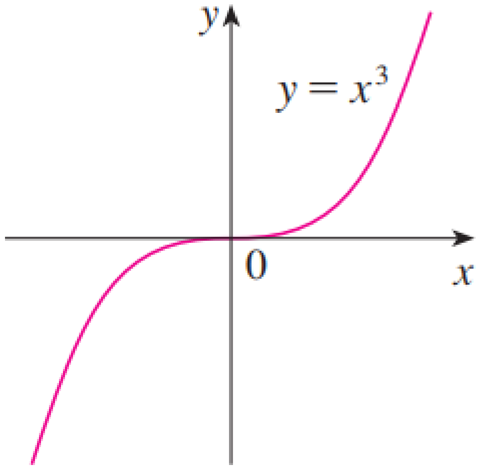
함수 $y = f(x)$가 $x = a$ **근방에서** $f(a) \geq f(x)$ (resp., $f(a) \leq f(x)$)일 때 이 함수는 $x = a$에서 **극댓값(local maximum)** (resp., **극솟값(local minimum)**) $f(a)$를 갖는다고 한다. 이때 $x = a$를 **극대점** (resp., **극소점**) 혹은 **극점(local point)**이라 하고 $f(a)$를 **극값(local value)**이라 한다.

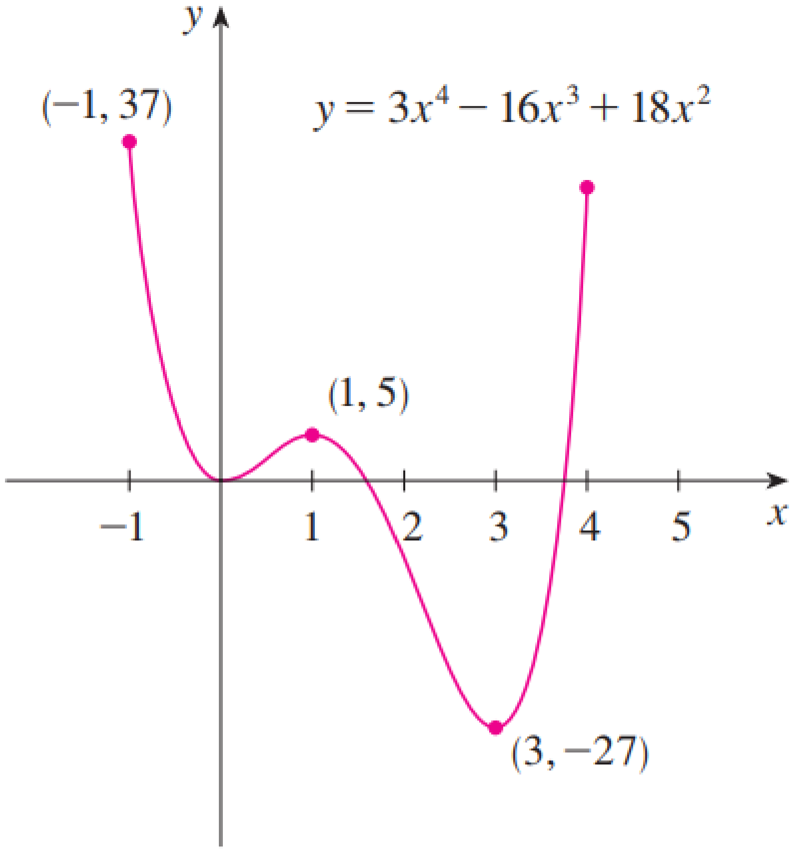
상수함수인 경우 모든 점이 극점이다.



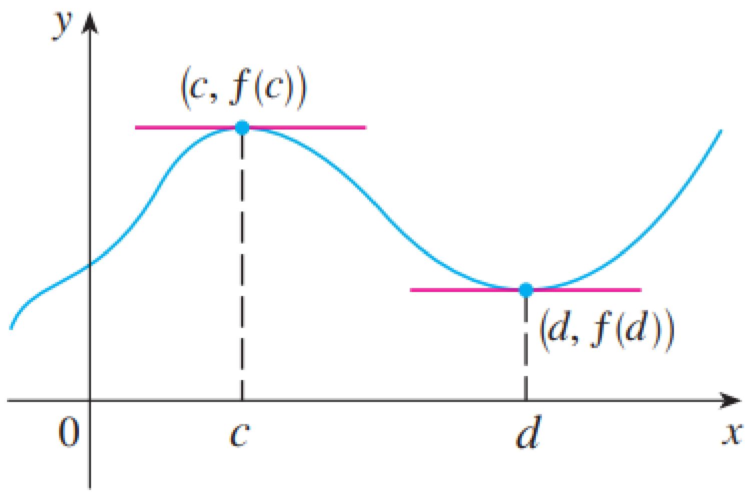




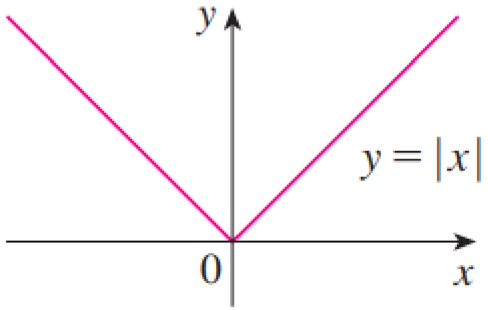


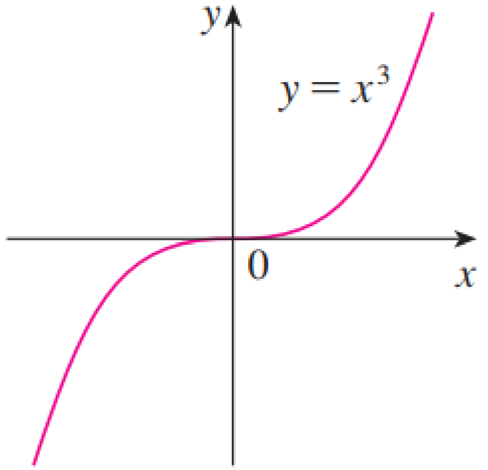


함수 $y = f(x)$가 주어졌을 때, 미분계수가 0이 되는 점과 미분이 불가능한 점들을 통틀어 이 함수의 **임계점(critical point)**이라 한다. **미분가능한 함수의 임계점**은 $f'(x) = 0$을 만족하는 점들이다.



정리 3.2.3 임계점 정리(Fermat's Theorem)
f가 $x = c$에서 극값을 갖고, $f'(c)$가 존재한다면 $f'(c) = 0$이다.
이 역은 성립하지 않는다.

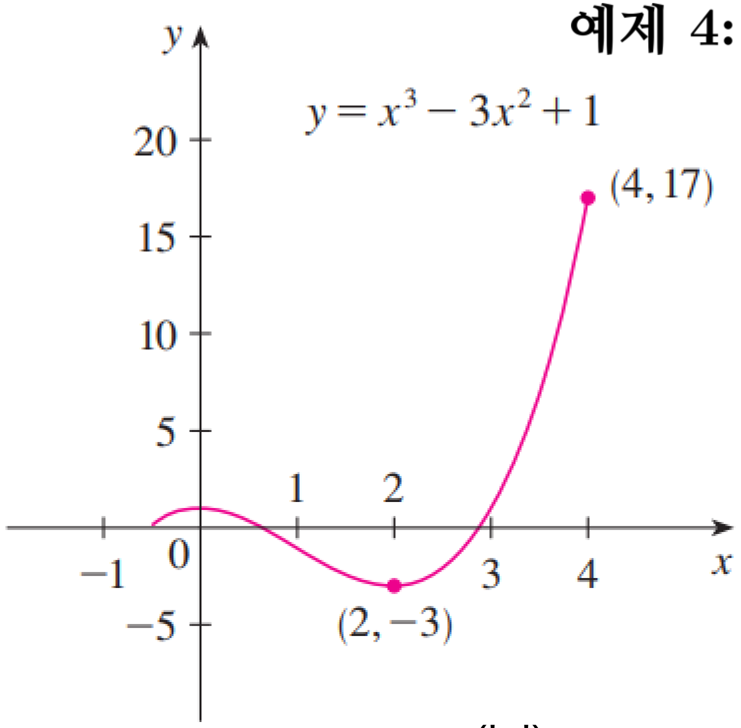




$f(x) = x^{3/5}(4 - x)$의 임계점을 구하여라.

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수의 최대, 최소는
이 구간 내의 임계점 혹은 경계점에서 얻어진다.

예제 4: Find the absolute maximum and minimum values of the function



$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

```
var('x')
f(x) = x^3 – 3*x^2 + 1
p1 = plot(f(x), x, -1/2, 4)
show(p1)
print(solve(diff(f(x)) == 0, x))   # look for the flection points of df, 0, 2
ma = max(f(0), f(2), f(-1/2), f(4))   # find maximum value
mi = min(f(0), f(2), f(-1/2), f(4))   # find minimum value
print('maximum=', ma)
print('minimum=', mi)
```

[10주차 과제]

1. 다음 극한을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}$, (2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\tan x}{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\tan x}{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

2. 점 $(e,1)$에서 곡선 $y=\ln x$에 대한 접선의 방정식을 구하여라. 한 평면 위에 모두 그래프로 표시하여라.

3. 함수 $y=f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$에 대해 $f'''(1)$의 값을 구하여라.

4. 구간 $[-1,1]$에서 $y=f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x^2-2x-6)$의 최대, 최소를 구하여라.