Calculus with SageMath

미적분학(calculus)은 우리가 생활을 영위하는 공간에서 일어나는 물리적인 현상을 이해하고 설명하는 데 필수적이고 기초적인 수학적 요소를 모아 놓은 것이다. 미적분학은 과학이나 공학의 거의 모든 분야의 연구자들이 반드시 습득해야 하는 기본적인 지식을 포함하고 있다. 심지어는 경제학, 경영학은 물론이고 사회과학이나 인문학의 여러 분야에서조차 미적분학을 이해하고 활용하는 능력이 연구자들의 주요 덕목이 되어가고 있다. 최근 화두가 되고 있는 4차 산업혁명은 컴퓨터와 정보통신 기술의 비약적인 발전에 기인한다. 이러한 사회적 변화에 뒤쳐지지 않고 따라가기 위해서는, 그리고 보다 적극적으로 앞서가기 위해서는, **수학 기초지식의 습득**과 **수학적 사고 훈련이 필수적이다.** 수학교육의 중요성이 더욱 주목받고 있는 이유이다.

함수
극한
미분
적분
무한급수
멱급수와 테일러 정리
좌표계
벡터와 행렬
복소수
곡선
다변수함수와 미분
편미분의 활용
다중적분
곡면
벡터장
벡터장의 적분정리

함수는 무엇인가?(What is a function?)

함수(function)라는 단어는 **종속(dependence)**의 개념을 표현한다.

선거결과는 경제의 함수이다.

자동차판매는 기후의 함수이다.

함수(function)는 **두 양(two quantity)** 사이의 **관계(relation, rule)**이다. 만약 첫 번째 양의 값이 두 번째 양의 값을 정확히 하나만 결정한다면 두 번째 양은 첫 번째 양의 함수라 한다.

(Q) 집에 페인트 칠을 한다고 하자. 부피가 $1l$인 페인트 한 통은 $20m^2$를 칠한다고 하자. 페인트 칠을 할 집의 면적이 A일 때, 페인트는 몇 통(n)이 필요한다?

함수를 표현하는 방법은?

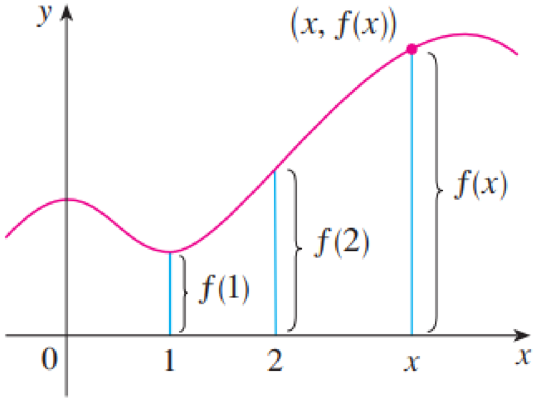
Words, Tables, $\boxed{\textbf{Graphs, Formulas}}$

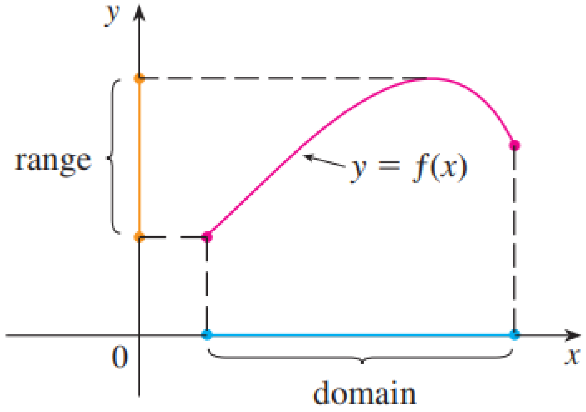
$\mathbb{N}$: 자연수의 집합 $\subset$ $\mathbb{Z}$: 정수의 집합 $\subset$ $\mathbb{Q}$: 유리수의 집합 $\subset$ $\mathbb{R}$: 실수의 집합 $\subset$ $\mathbb{C}$: 복소수의 집합

일반수학에서 다루는 함수는 **실함수(real valued function of a real variable)**이다.

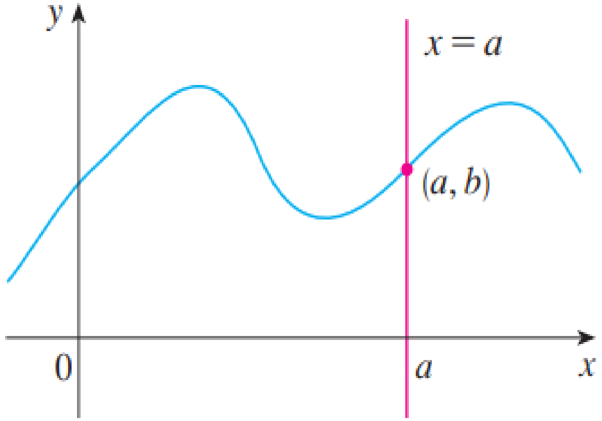
$$f : (\mathbb{R} \supset) D \to \mathbb{R},\ y = f(x)$$

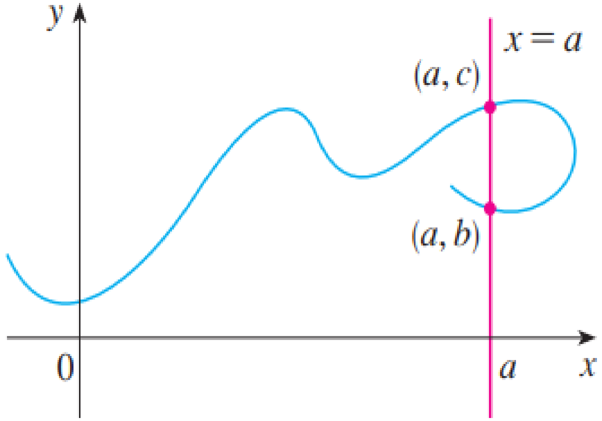
여기서
D : f의 **정의역(domain)**,
$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$: f의 **치역(range)**
$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}$: f의 **그래프(graph)**



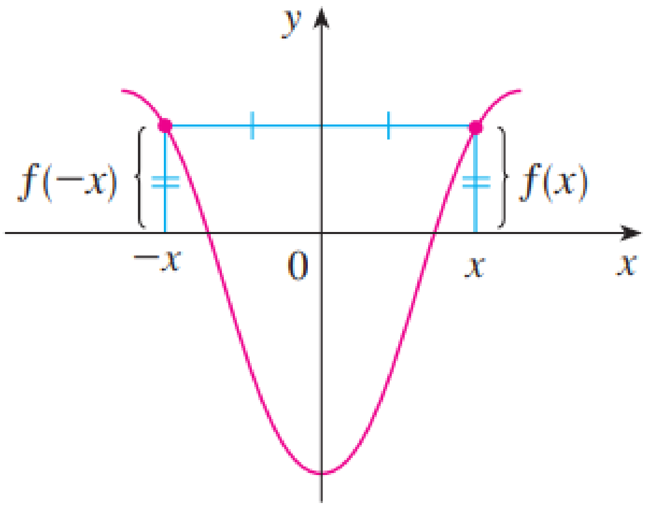


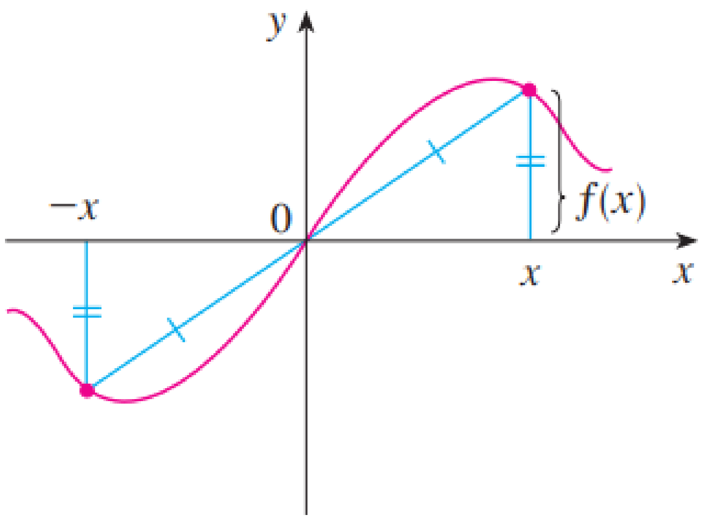
xy-평면에 있는 **곡선(curve)**이
x의 **함수의 그래프**일 필요충분조건은
어떤 수직선도 곡선과 한점에서만 만난다.
(The Vertical Line Test)





함수 f가 $f(-x) = f(x)$를 만족하면 이 함수의 그래프는 y**축에 대칭**이며, 이런 함수를 **우함수(even function)**라 한다. 한편 $f(-x) = -f(x)$를 만족하면 이 함수의 그래프는 **원점에 대칭**이며, 이런 함수를 **기함수(odd function)**라 한다.





함수의 연산: f와 g가 함수이고 c가 실수일 때 cf, $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$는 다음과 같이 정의되는 함수이다.

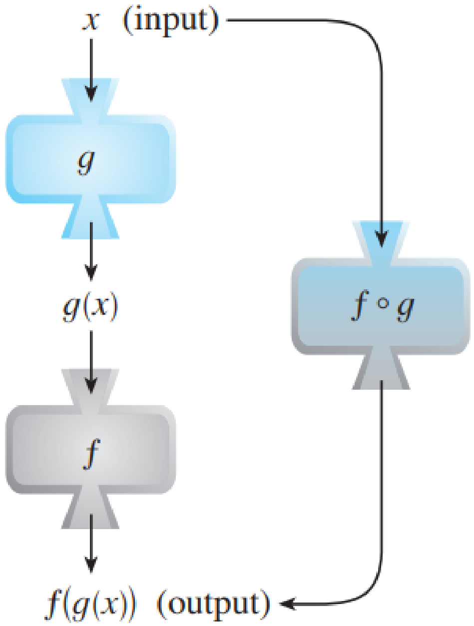
$$(cf)(x) = cf(x), \quad (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \ g(x) \neq 0$$

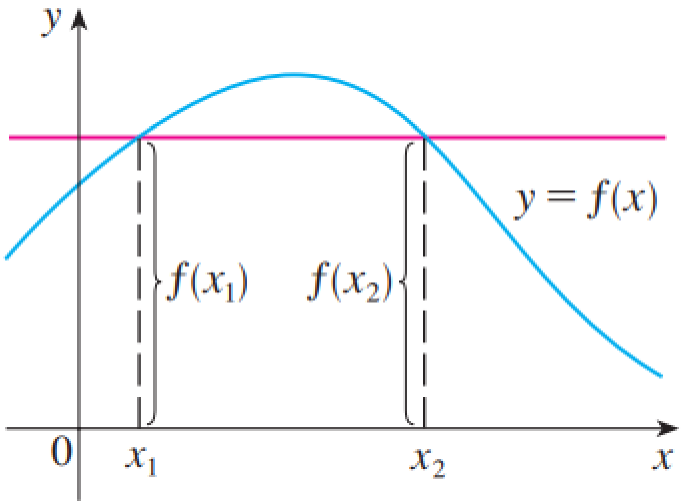
두 함수 $f : A \to B$와 $g : B \to C$에 대해 <u>f**의 치역이** g**의 정의역에 포함**</u>이 되면

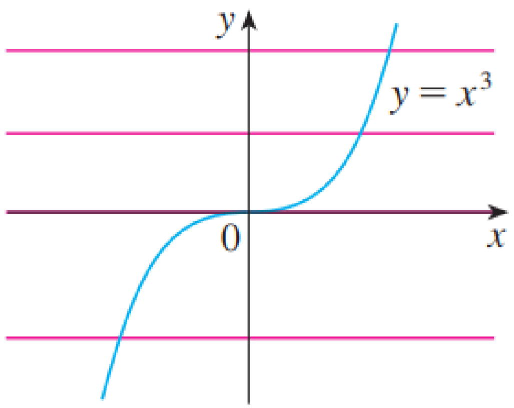
$$h = g \circ f : A \to C,\ \ h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in A)$$

와 같이 함수 $h = g \circ f$를 정의할 수 있다. 이 함수를 f와 g의 **합성함수(composite function)**라 한다.



함수 f가 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$을 만족할 때, f를 **일대일함수(one-to-one function)**라 한다. 일대일함수가 될 필요충분조건은 어떤 수평선도 곡선과 한점에서만 만난다. **(The Horizontal Line Test)**



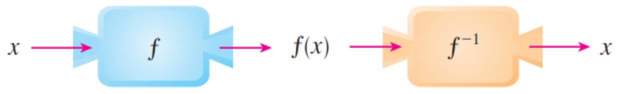


함수 f가 **정의역** A에서 **치역** $B = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$로 가는 **일대일함수** (이런 함수를 **일대일대응** 또는 **전단사함수**라 부른다.)이면, 역으로 B에서 A로 가는 함수를 정의할 수 있다. 이 함수를 f의 **역함수(inverse function)**라 부르고 f^{-1}로 나타낸다.

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \quad (x \in A)$$

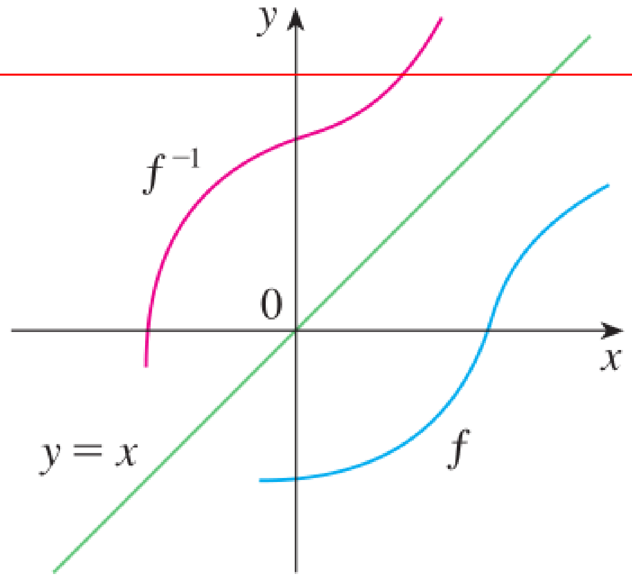
함수 f와 그 역함수 f^{-1}는 다음과 같은 특징을 갖는다.

- 정의역과 치역이 바뀐다.
- 합성하면 자기자신이다. $f(f^{-1}(x)) = x,\ f^{-1}(f(x)) = x$
- 직선 $y = x$에 대하여 대칭인 그래프를 갖는다.



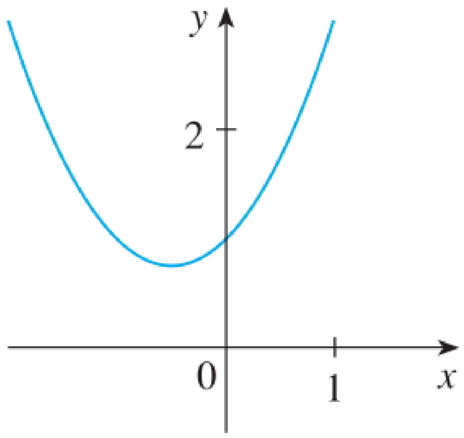
$f^{-1}(x)$는 $\dfrac{1}{f(x)}$을 의미하는 것이 아니다.

$\dfrac{1}{f(x)}$은 $[f(x)]^{-1}$로 표현한다.

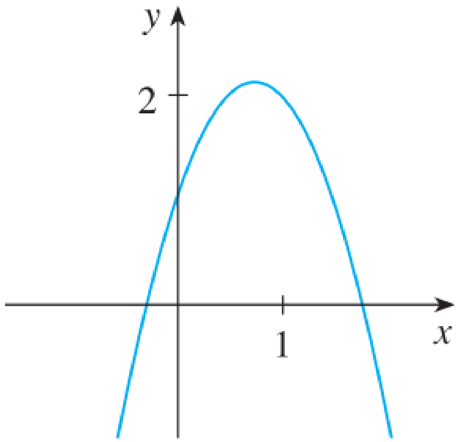


다항함수(polynomial function): $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ (a_0, \cdots a_n \in \mathbb{R})$

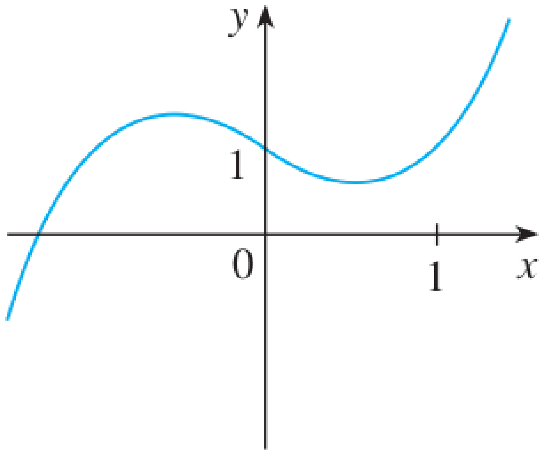
정의역은 실수 전체 $\mathbb{R}$



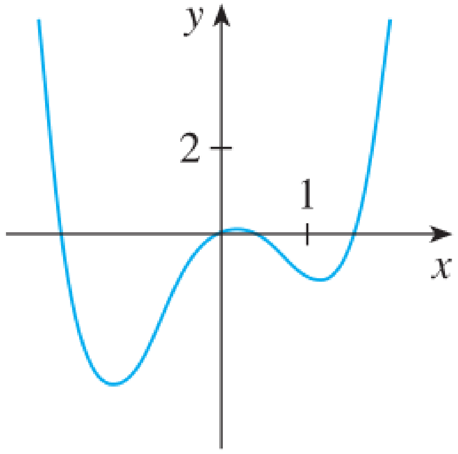
(a) $y = x^2 + x + 1$



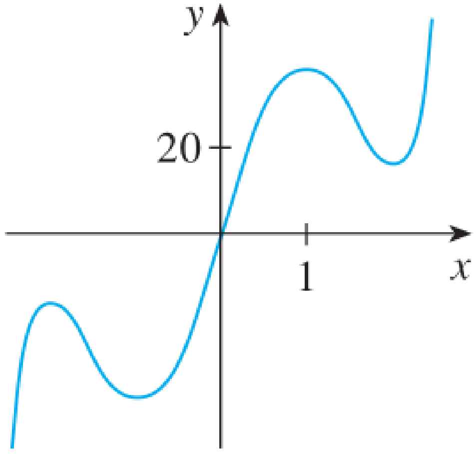
(b) $y = -2x^2 + 3x + 1$



(a) $y = x^3 - x + 1$

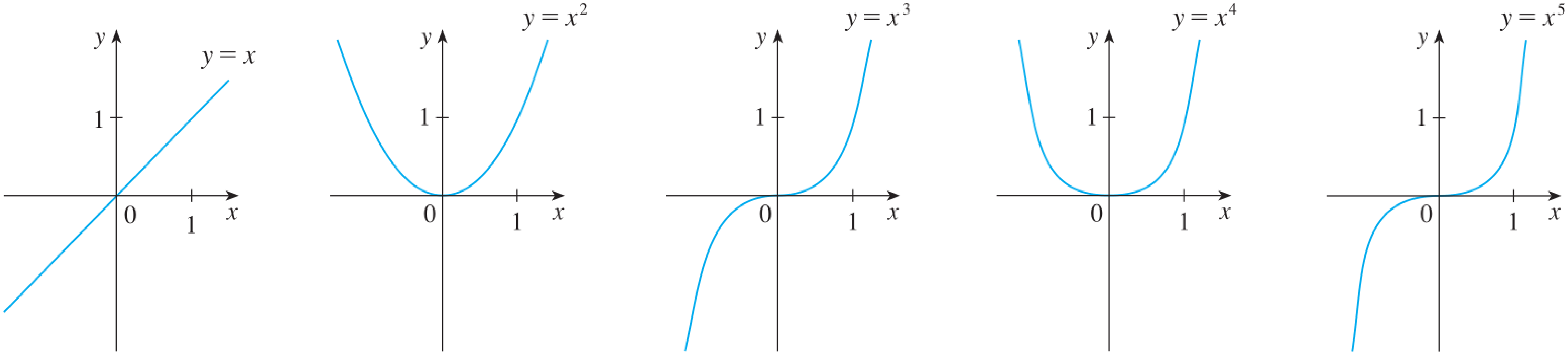


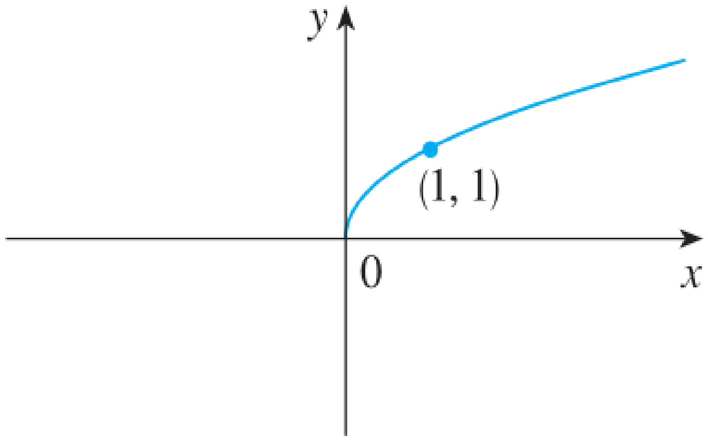
(b) $y = x^4 - 3x^2 + x$



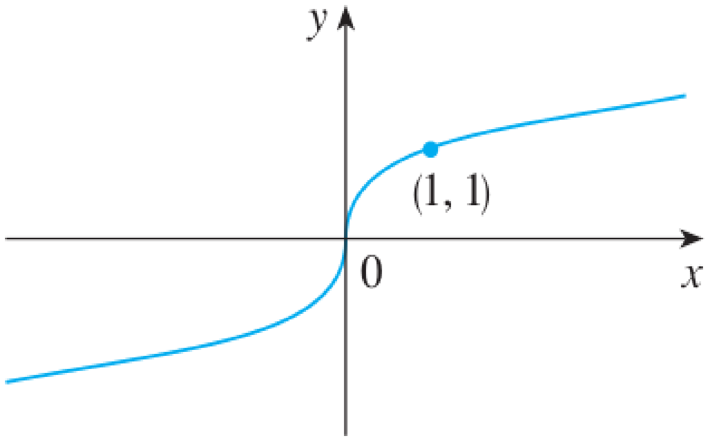
(c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

멱함수(power function): $f(x) = x^a \ (a \in \mathbb{R})$ 정의역은 a에 따라 달라진다.

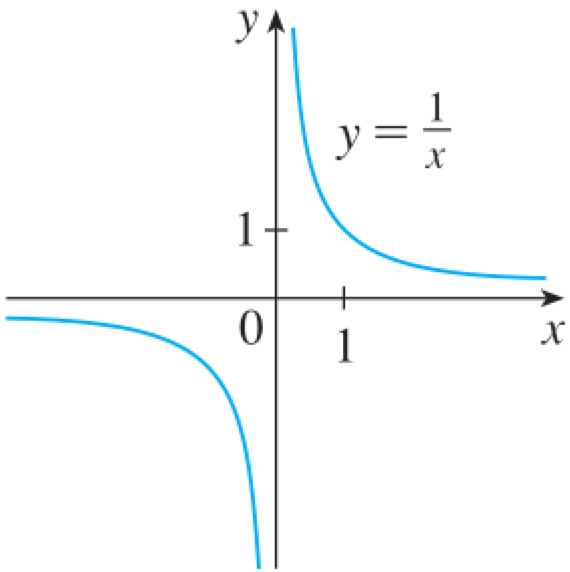




(a) $f(x) = \sqrt{x}$

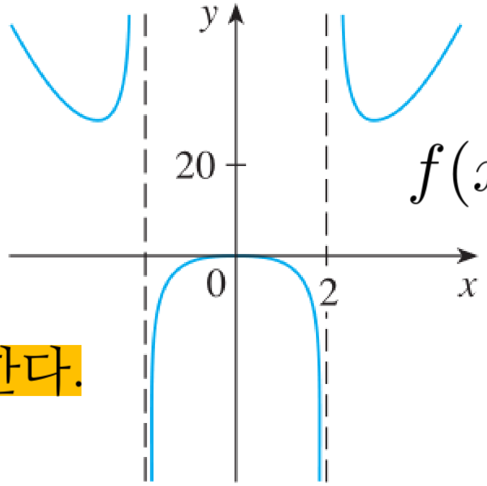


(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$



유리함수(rational function):

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$ 여기서 $p(x)$와 $q(x)$는 다항함수
정의역 : $\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$

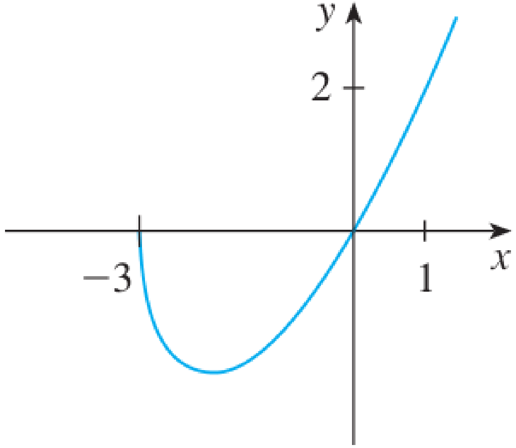


$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

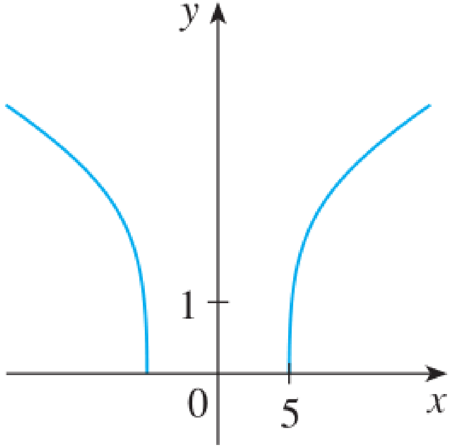
그림에서 점선을 주어진 유리함수의 **수직점근선**이라 한다.

다항식에 사칙연산(덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈)과 거듭제곱근과 같은 연산을 유한 번 시행하여 얻을 수 있는 함수를 **대수적 함수(algebraic function)**라 부른다. 다항함수, 멱함수, 유리함수는 당연히 대수적 함수이며 다음 함수들도 대수적 함수들이다.

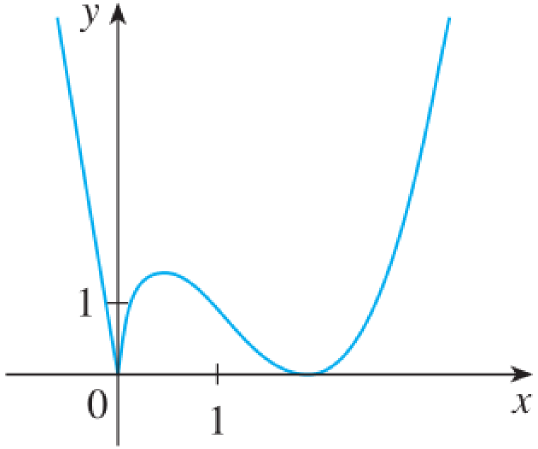
대수적 함수의 정의역을 구할 수 있다.



(a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$



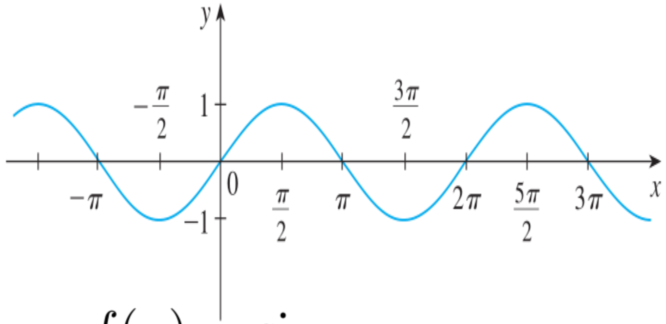
(b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$



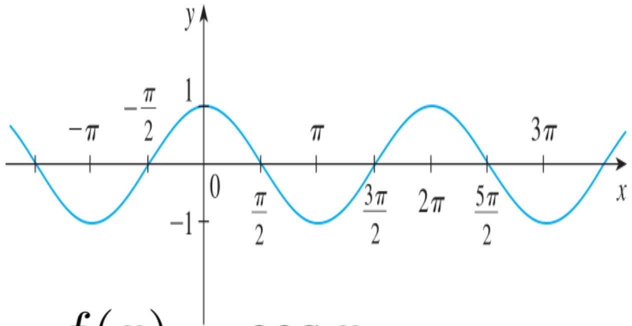
(c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

대수적 함수가 아닌 함수를 **초월 함수(transcendental function)**라 부른다. 가장 기본적인 초월 함수는 **삼각함수, 지수함수, 쌍곡선함수**와 **그 들의 역함수**들이다.

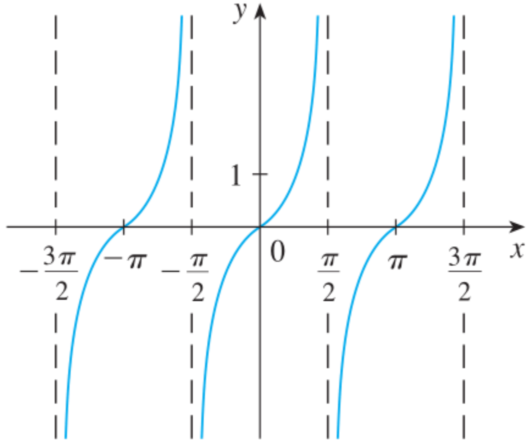
삼각함수(trigonometric function):



$f(x) = \sin x$



$f(x) = \cos x$



$f(x) = \tan x$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

삼각함수의 중요한 공식

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

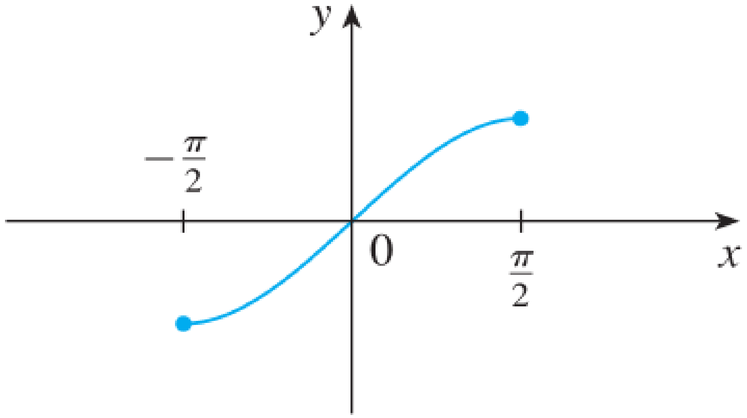
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \begin{cases} 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$
$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

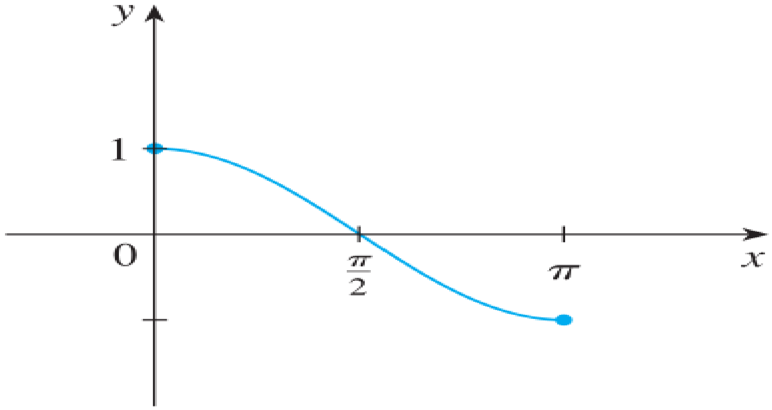
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$
$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$
$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$
$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

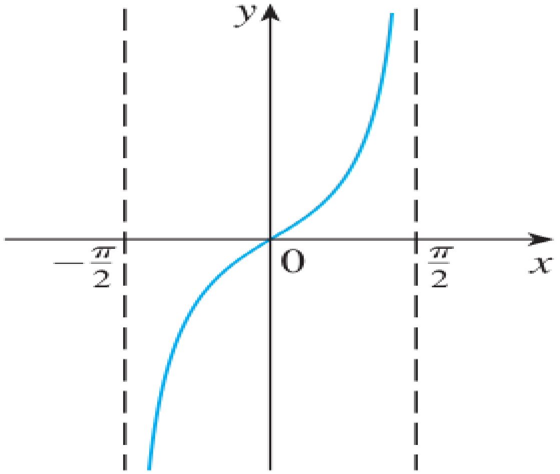
역삼각함수(inverse trigonometric function):



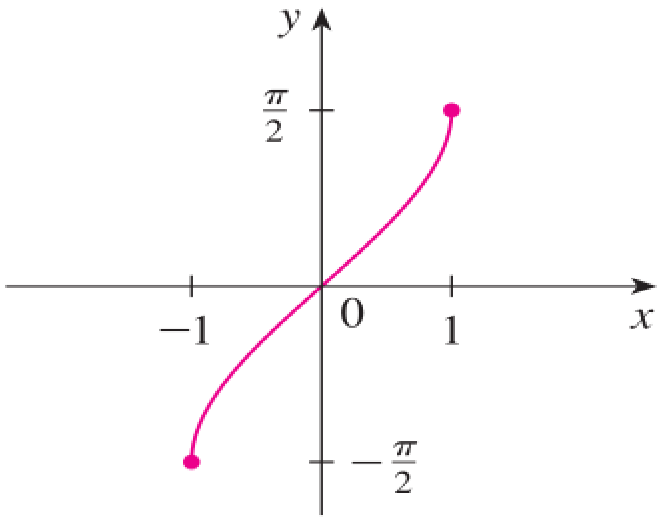
$y = \sin x \ (-\pi/2 \le x \le \pi/2)$



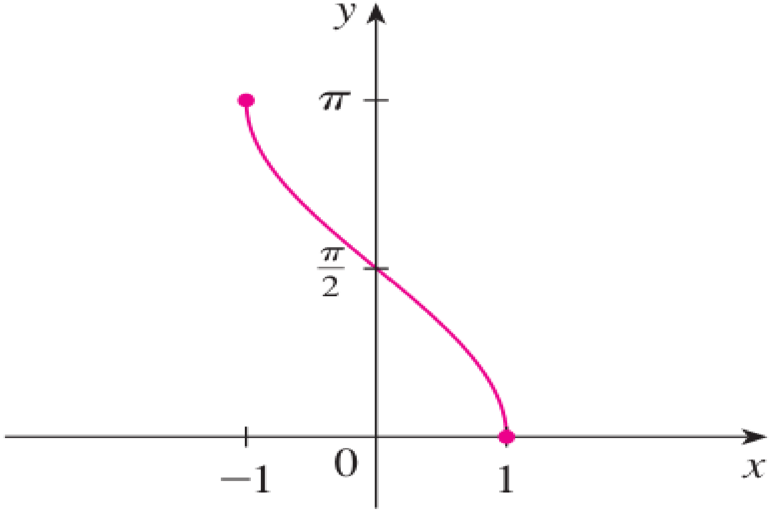
$y = \cos x \ (0 \le x \le \pi)$



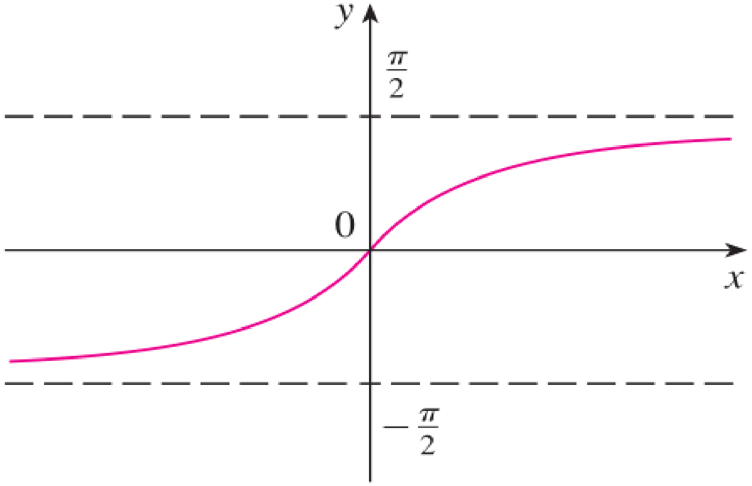
$y = \tan x \ (-\pi/2 < x < \pi/2)$



$y = \sin^{-1} x \ (-1 \le x \le 1)$



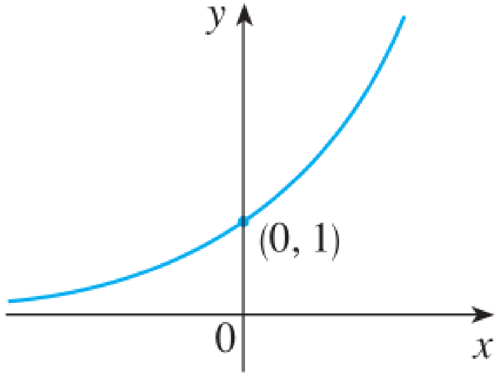
$y = \cos^{-1} x \ (-1 \le x \le 1)$



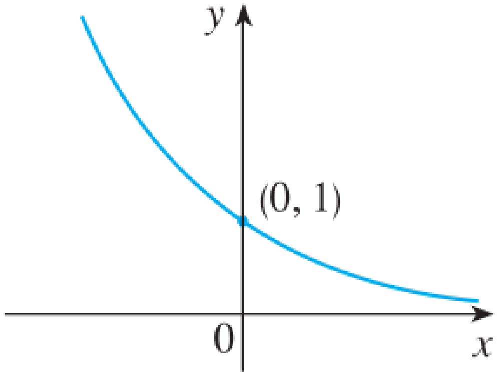
$y = \tan^{-1} x \ (-\infty < x < \infty)$

$$y = \csc^{-1} x, \quad y = \sec^{-1} x, \quad y = \cot^{-1} x$$

지수함수(exponential function)와 로그함수(logarithmic function):



$y = b^x \ (b > 1)$



$y = b^x \ (0 < b < 1)$

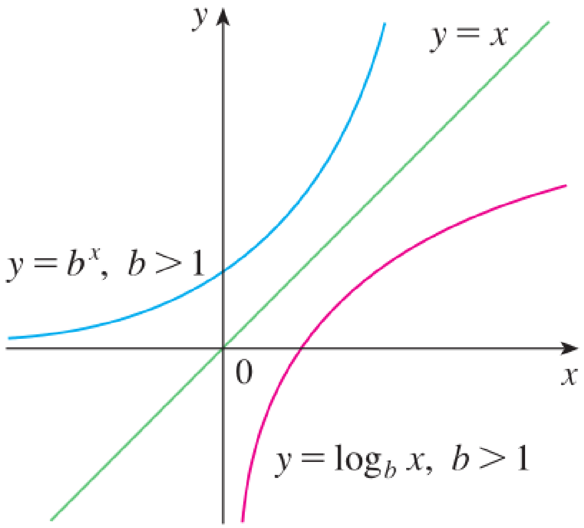
지수법칙

$$\begin{aligned} b^x b^y &= b^{x+y} \\ \frac{b^x}{b^y} &= b^{x-y} \\ b^{xy} &= (b^x)^y \\ a^x b^x &= (ab)^x \end{aligned}$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

자연상수, 오일러 수
무리수, 비순환무한소수
2.7182⋯

$\log_e = \ln$



$\log_b b^x = x \ (x \in \mathbb{R}), \quad b^{\log_b x} = x \ (x > 0)$

로그법칙

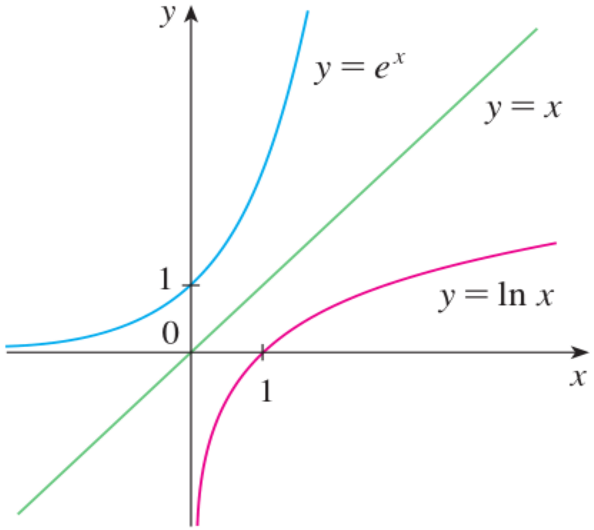
$$\log_b b = 1, \ \log_b 1 = 0$$

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b(x^r) = r\log_b x$$

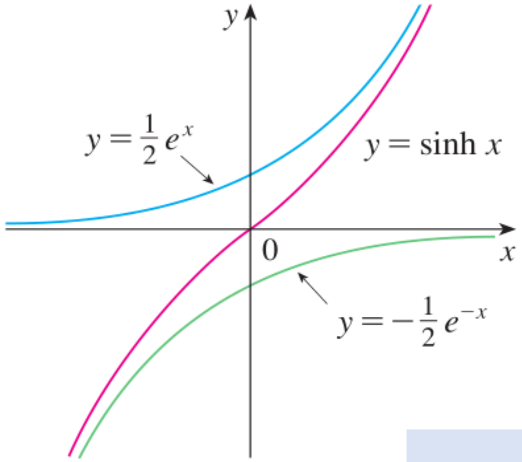
$$\log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x}$$

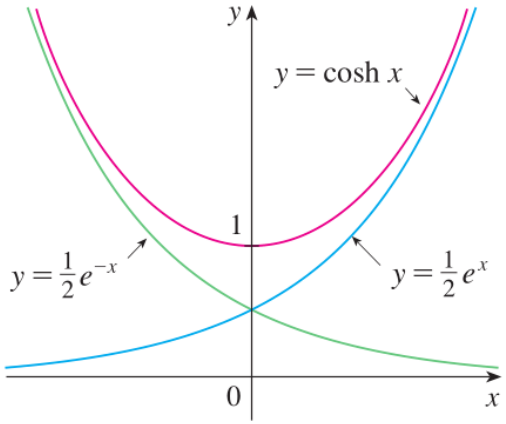


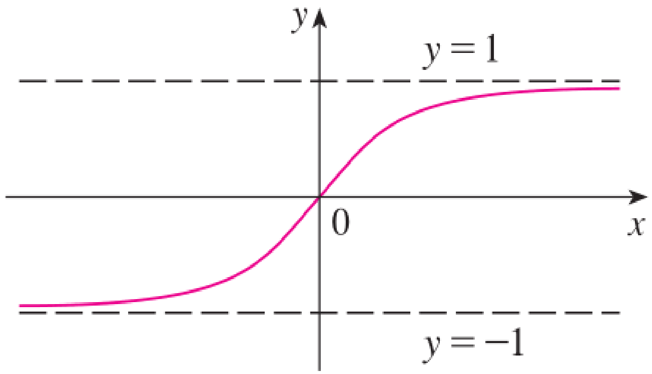
$\ln e^x = x \ (x \in \mathbb{R}), \quad e^{\ln x} = x \ (x > 0)$

쌍곡선함수(hyperbolic function)와 역쌍곡선함수(inverse hyperbolic function):

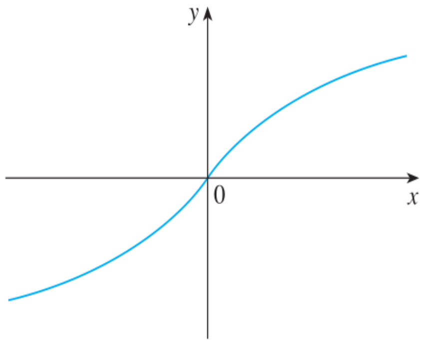
$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

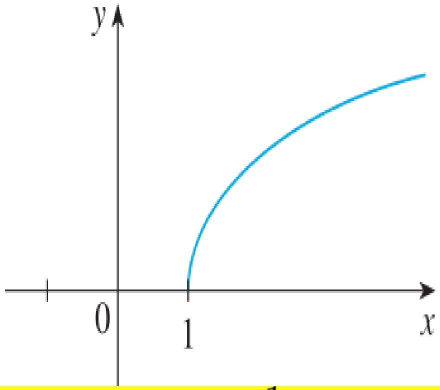


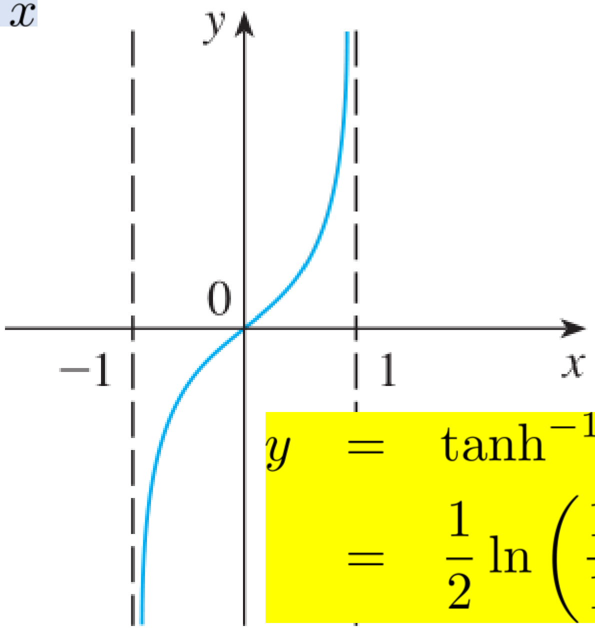




$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x}$$



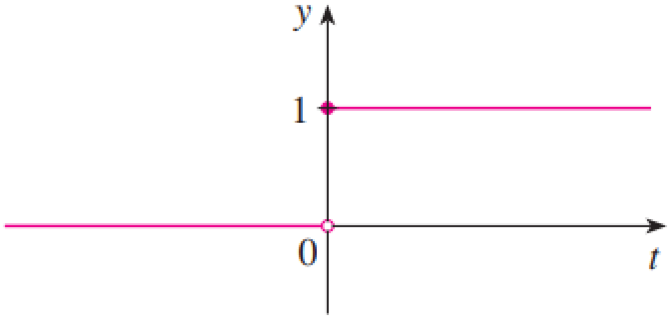




$$\begin{aligned} y &= \sinh^{-1} x \ (x \in R) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \cosh^{-1} x \ (x \geq 1) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned}$$

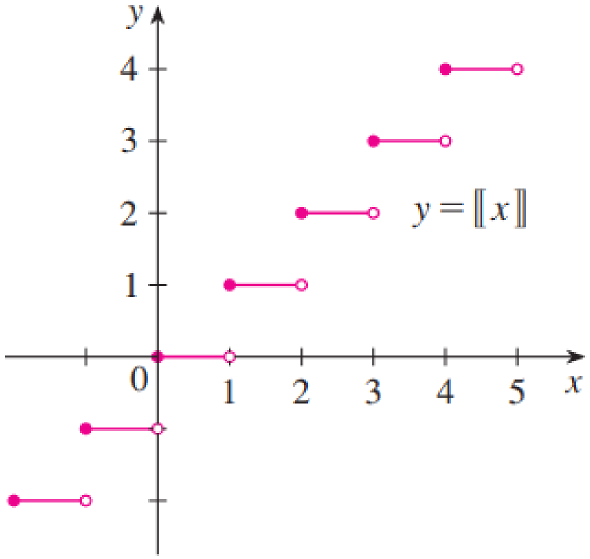
$$\begin{aligned} y &= \tanh^{-1} x \ (|x| < 1) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$



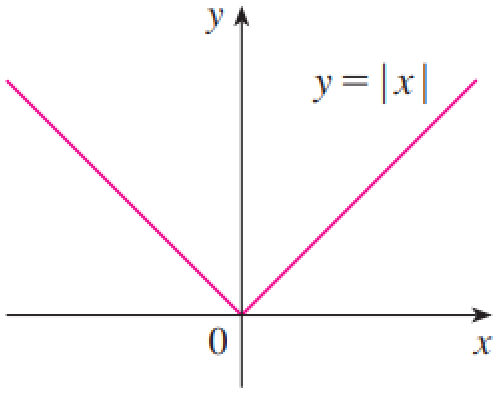
$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

단위 계단 함수(unit step function)
헤비사이드 함수(Heaviside function)

가우스 기호 혹은 절댓값 기호가 들어있는 함수의 그래프를 그릴 수 있다.



실수 x에 대하여 x를 넘지 않는 최대 정수를 $[x]$로 나타내고 이를 **가우스 기호**라 한다. 이때, 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $f(x) = [[x]]$를 **가우스 함수(Gauss function)** 또는 **최대정수함수(greatest integer function)**라고 한다.

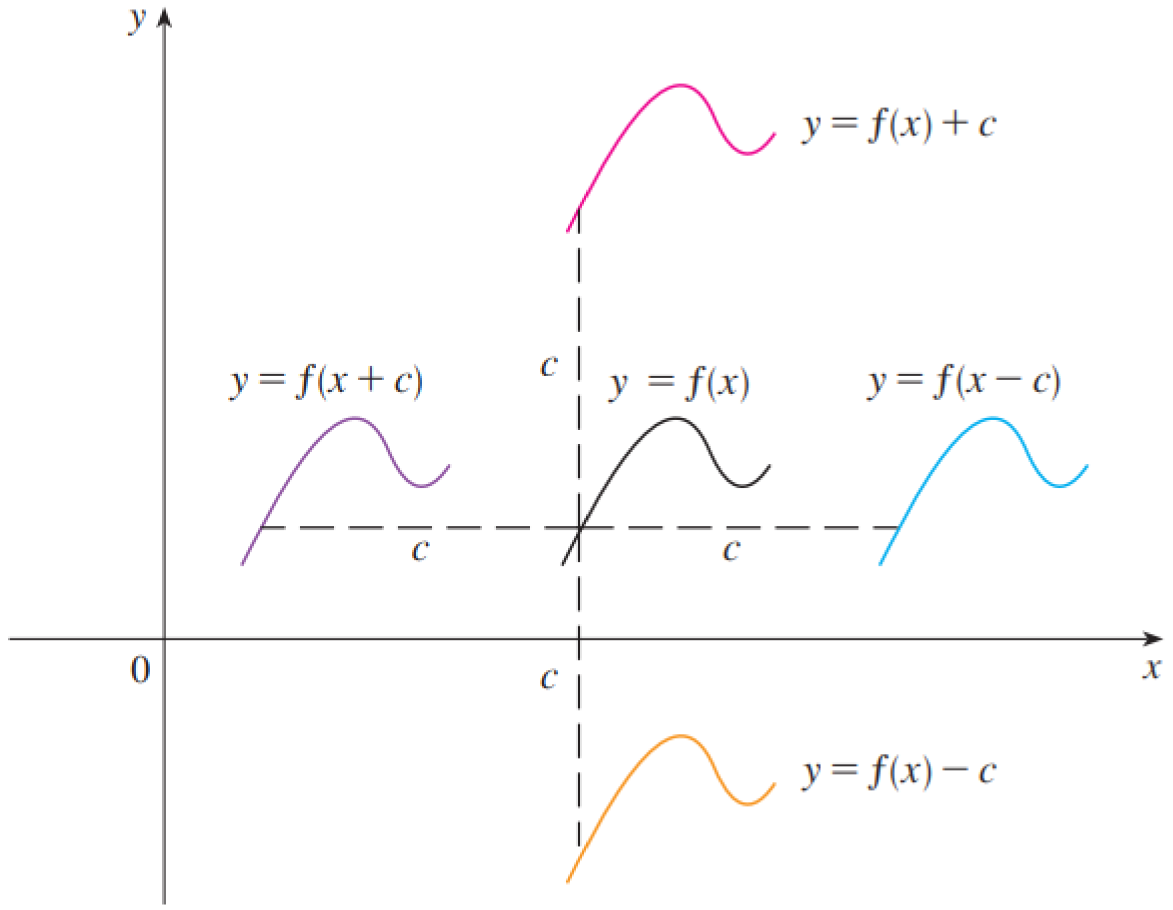


수직선 위에서 원점 0에서 실수 x까지 거리를 $|x|$로 나타낸다. 이를 실수 x의 **절댓값(absolute value)**이라 부른다. 이때, 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

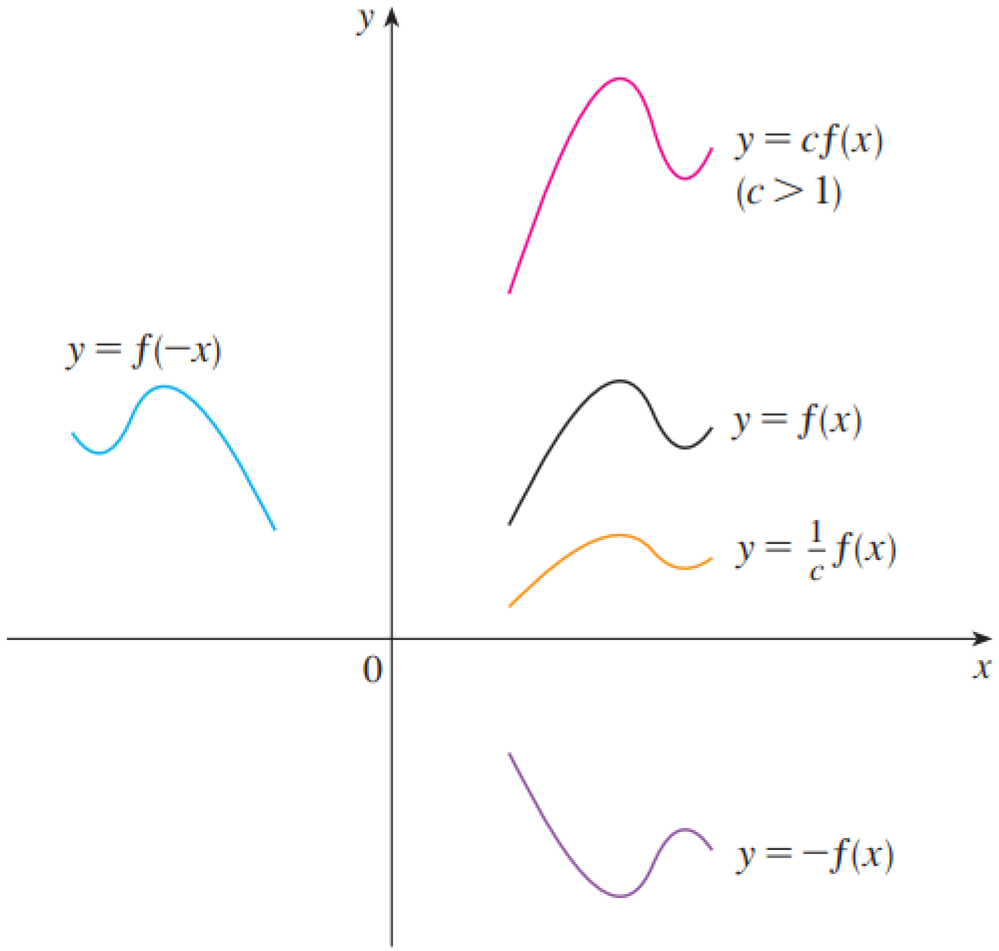
$$y = |x| = \begin{cases} x, & (x \geq 0) \\ -x, & (x < 0) \end{cases}$$

를 **절댓값 함수(absolute value function)**라 부른다.

함수의 변환(transformations of functions):



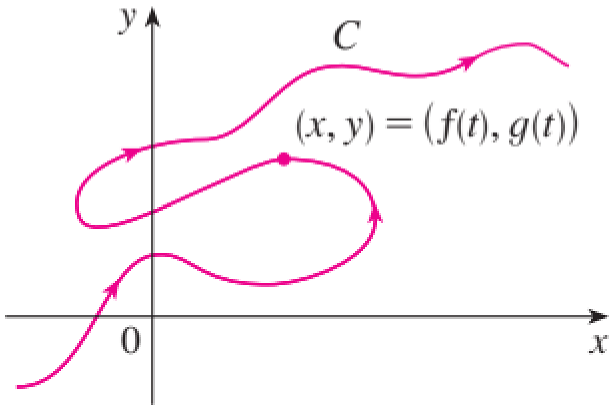
Translating the graph of f
여기서 $c > 0$



Stretching and reflecting the graph of f

$c > 1$일 때, $y = f(cx)$, $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$는 $y = f(x)$의 그래프를 어떻게 변형시키는가?

매개변수방정식으로 정의된 함수



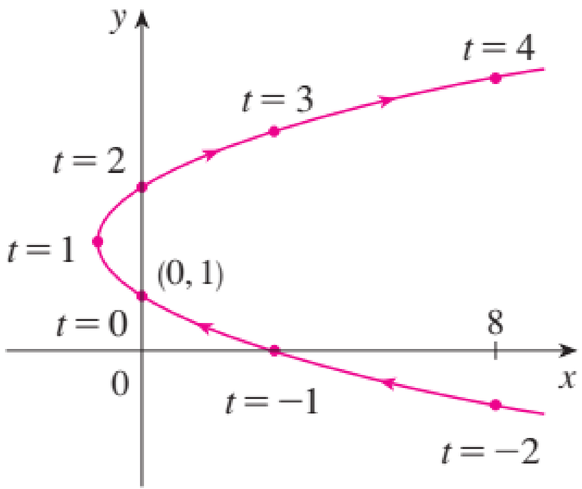
열린구간 I에서 정의된 함수 f가 **매개변수** t의 방정식

$$x = g(t), \quad y = h(t) \quad (t \in J)$$

으로 서술되는 경우가 있다. 여기에서 J는 열린 구간이고 $g(J) \subset I$이다.

예를 들어, 매개변수방정식 $x = t^2 - 2t, \quad y = t + 1$으로 정의된 곡선을 그려보면 다음과 같다.

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5



$$t = y - 1$$

$$x = t^2 - 2t = (y-1)^2 - 2(y-1) = y^2 - 4y + 3$$

Basic arithmetic operations	
“four operations”	`a+b`, `a-b`, `a*b`, `a/b`
power	`a^b` or `a**b`
square root	`sqrt(a)`
n-th root	`a^(1/n)`

Integer operations	
integer division	`a // b`
remainder	`a % b`
quotient and remainder	`divmod(a,b)`
factorial $n!$	`factorial(n)`
binomial coefficient $\binom{n}{k}$	`binomial(n,k)`

Usual functions on real numbers, complex numbers, ...	
integer part	`floor(a)`
absolute value, modulus	`abs(a)`
elementary functions	`sin`, `cos`, ... (see Table 2.2)

TABLE 1.1 – Some usual operations.

```
numerical_approx(20/14, digits=60)
```

Some specials values	
boolean values "true" and "false"	`True`, `False`
imaginary unit i	`I` *or* `i`
infinity ∞	`Infinity` *or* `oo`

Common mathematical constants	
Archimedes' constant π	`pi`
logarithm basis $e = \exp(1)$	`e`
Euler-Mascheroni constant γ	`euler_gamma`
golden ratio $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$	`golden_ratio`
Catalan's constant	`catalan`

TABLE 1.2 – Predefined constants.

Polynomial	$p = zx^2 + x^2 - (x^2 + y^2)(ax - 2by) + zy^2 + y^2$
`p.expand()`	$-ax^3 + 2\,bx^2y - axy^2 + 2\,by^3 + x^2z + y^2z + x^2 + y^2$
`p.expand().collect(x)`	$-ax^3 - axy^2 + 2\,by^3 + (2\,by + z + 1)x^2 + y^2z + y^2$
`p.collect(x).collect(y)`	$2\,bx^2y + 2\,by^3 - (ax - z - 1)x^2 - (ax - z - 1)y^2$
`p.factor()`	$-(ax - 2\,by - z - 1)\left(x^2 + y^2\right)$
`p.factor_list()`	$\left[(ax - 2\,by - z - 1, 1), \left(x^2 + y^2, 1\right), (-1, 1)\right]$

	Fraction $\quad r = \frac{x^3+x^2y+3x^2+3xy+2x+2y}{x^3+2x^2+xy+2y}$
`r.simplify_rational()`	$\frac{x^2+(x+1)y+x}{x^2+y}$
`r.factor()`	$\frac{(x+y)(x+1)}{x^2+y}$
`r.factor().expand()`	$\frac{x^2}{x^2+y} + \frac{xy}{x^2+y} + \frac{x}{x^2+y} + \frac{y}{x^2+y}$
	Fraction $\quad r = \frac{(x-1)x}{x^2-7} + \frac{y^2}{x^2-7} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{1}{x+1}$
`r.combine()`	$\frac{(x-1)x+y^2}{x^2-7} + \frac{b+c}{a} + \frac{1}{x+1}$
	Fraction $\quad r = \frac{1}{(x^3+1)y^2}$
`r.partial_fraction(x)`	$\frac{-(x-2)}{3(x^2-x+1)y^2} + \frac{1}{3(x+1)y^2}$

Usual mathematical functions	
Exponential and logarithm	`exp, log`
Logarithm in base a	`log(x, a)`
Trigonometric functions	`sin, cos, tan`
Inverse trigonometric functions	`arcsin, arccos, arctan`
Hyperbolic functions	`sinh, cosh, tanh`
Inverse hyperbolic functions	`arcsinh, arccosh, arctanh`
Integer part, etc.	`floor, ceil, trunc, round`
Square and n-th root	`sqrt, nth_root`
absolute function	abs
Rewriting trigonometric expressions	
Simplification	`simplify_trig`
Linearisation	`reduce_trig`
Anti-linearisation	`expand_trig`

TABLE 2.2 – Usual functions and simplification.

코딩 연습

```
(x^x/x).simplify()
```

```
f = (e^x-1) / (1+e^(x/2)); f.canonicalize_radical()
```

```
f = cos(x)^6 + sin(x)^6 + 3 * sin(x)^2 * cos(x)^2
f.simplify_trig()
```

```
f = cos(x)^6; f.reduce_trig()
```

```
: f = sin(5 * x); f.expand_trig()
```

```
n = var('n'); f = factorial(n+1)/factorial(n)
f.simplify_factorial()
```

```
f = sqrt(abs(x)^2); f.canonicalize_radical()
```

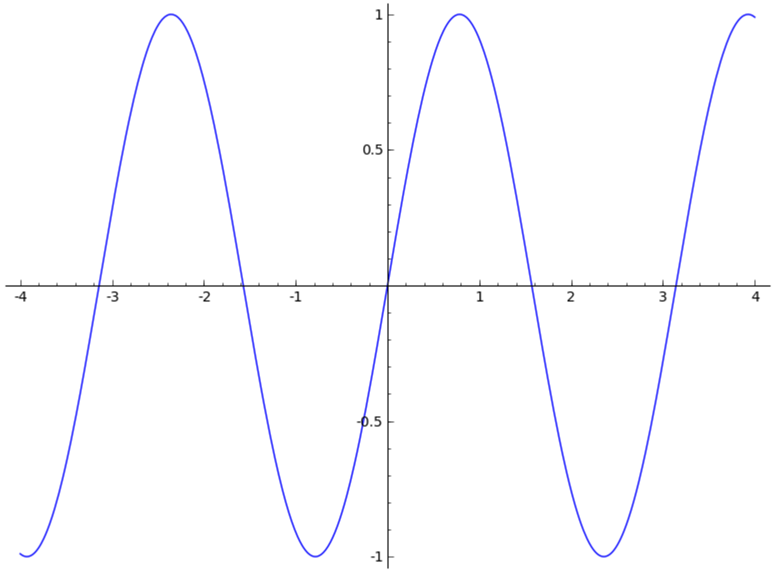
```
f = log(x*y); f.canonicalize_radical()
```

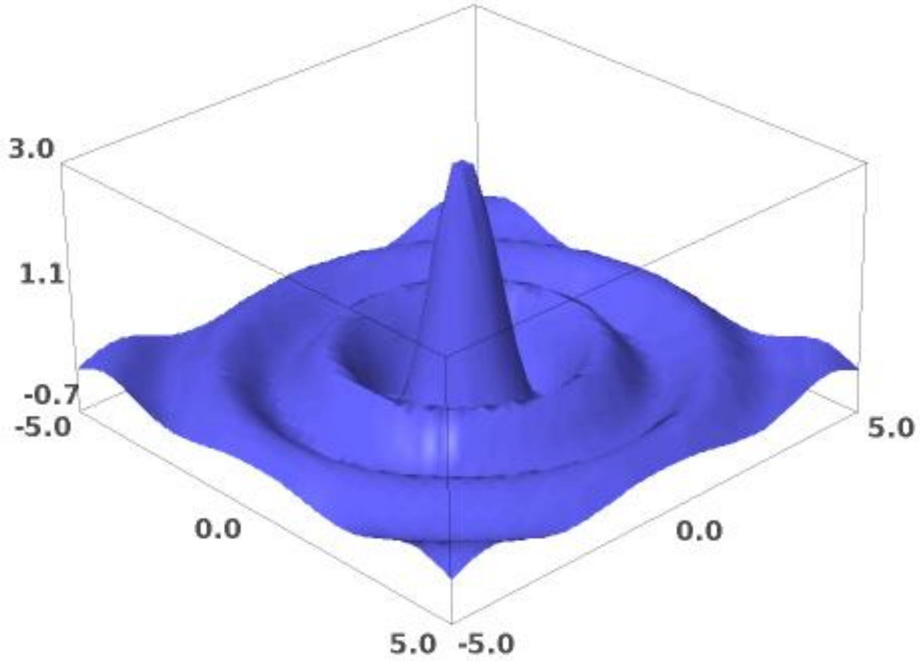
코딩 연습

[**예제 1**] 다음 함수의 그래프를 각각 그려라.

$$y = \sin(2x)\ (-4 \le x \le 4), \qquad z = \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\ (-5 \le x \le 5,\ -5 \le y \le 5)$$

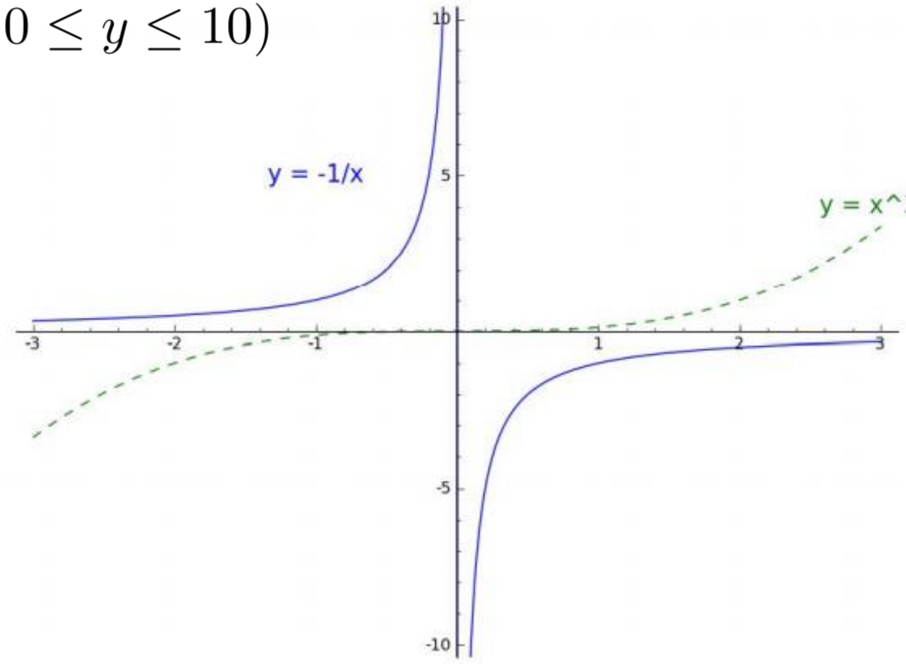
```
plot(sin(2*x), x, -4, 4)

var('x,y')
plot3d(sin(pi*sqrt(x^2 + y^2))/sqrt(x^2+y^2), (x,-5,5),  (y,-5,5))
```





코딩 연습

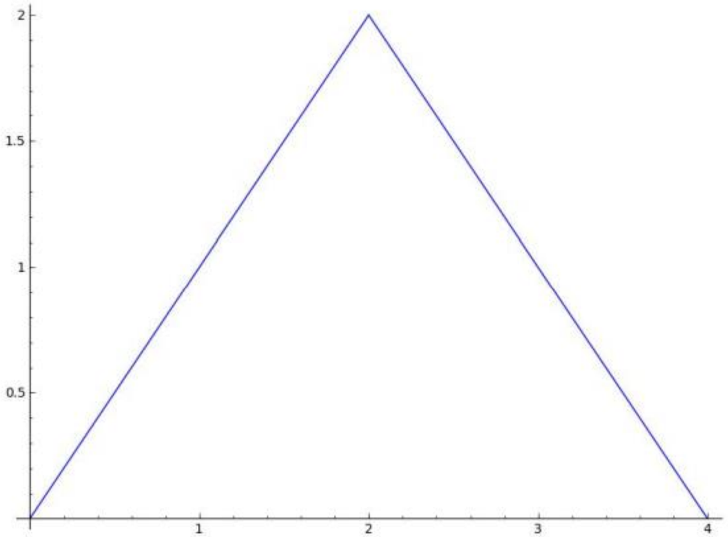
[예제 2] 함수 $y = \frac{x^3}{8}$와 $y = -\frac{1}{x}$의 그래프를 한 평면에 선과 색으로 구별하여 그리고 각각 함수식을 적어라. (단 $-3 \le x \le 3,\ -10 \le y \le 10$)




```
var('x') # Define variable "x"
A = plot(x^3/8, x, -3, 3, linestyle = "--", color = 'green') # graph the first function
B = plot(-1/x, x, -3, 3) # graph the second function
C = text("y = x^3/8 ", (3, 4), color = 'green', fontsize = 15) # add the text on given position
D = text("y = -1/x", (-1, 5), fontsize = 15 ) # and set the font of the text
show(A + B + C + D, ymax = 10, ymin = -10) # display graphs and texts one time
```

코딩 연습

[**예제 3**] 함수 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2 \\ 4 - x, & 2 < x \le 4 \end{cases}$ 의 그래프를 그려라.




```
var('x')
f1(x) = x # graph f1 on (0, 2)
f2(x) = 4 - x # graph f2 on (2, 4)
plot(piecewise([((0, 2), f1), ((2, 4), f2)]), (x, 0, 4))
```

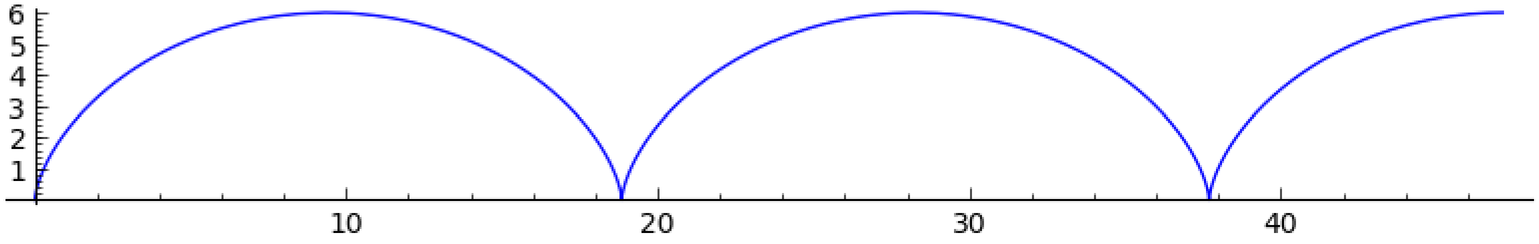
코딩 연습

[예제 4] 매개변수방정식

$$x = 3(t - \sin t), \quad y = 3(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 5\pi)$$

으로 주어진 곡선의 그래프를 그려라.

```
var('t')
x = 3(t-sin(t))
y = 3(1-cos(t))
parametric_plot((x, y), (t, 0, 5*pi))
g.show(aspect_ratio=1)
```



[9주차 과제] 1. $\frac{10!\times(2^{100}+7)+1}{(e+\pi+5)}$의 6자리 근삿값을 구하여라.

2. 함수 $y=(x=1)\cos(x+a)$에 대하여

$$(1)\quad a=-x \qquad (2)\quad x=\frac{\pi}{2},\ a=\frac{\pi}{3} \qquad (3)\quad x=0.5,\ a=2.3$$

일때, y의 값을 각각 구하여라.

3. 함수 $y=2\cos 3x$와 $y=2-\sqrt{x}$의 그래프를 한 평면에 선과 색으로 구별하여 그리고 각각 함수식을 적어라. (단, $-5\leq x\leq 5,\ -3\leq y\leq 3$)

4. 함수 $f(x)=\begin{cases} x+1, & 0\leq x\leq 1 \\ -x+3, & -1\leq x\leq 4 \\ \frac{1}{2}x-3, & 4\leq x\leq 6 \end{cases}$ 의 그래프를 그려라.

5. 매개변수방정식

$$x(t)=\cos t+\frac{1}{2}\cos(7t)+\frac{1}{3}\sin(17t),\quad y(t)=\sin t+\frac{1}{2}\sin(7t)+\frac{1}{3}\cos(17t)$$

으로 주어진 곡선의 그래프를 그려라.