• 주대각선성분이 모두 1이고 나머지 성분은 모두 0인 n**차 정사각행렬**을 **단위행렬(identity matrix)**이라 하고 I_n으로 나타낸다. A가 $m \times n$ 행렬일 때, 단위행렬 $I_m,\ I_n$에 대하여 다음이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_m A = A = A I_n$$

• A가 n**차 정사각행렬**일 때, A의 **거듭제곱**을 다음과 같이 정의한다.

$$A^0 = I_n,\ A^k = AA\cdots A(k\text{개})$$

또한, $r,\ s$가 음이 아닌 정수일 때, 다음이 성립한다.

$$A^r A^s = A^{r+s},\ (A^r)^s = A^{rs}$$

• 주어진 행렬의 **행과 열을 바꾸어 얻어진 행렬**을 **전치행렬(transpose)**이라 한다. 행렬 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$에 대하여 A의 전치행렬을 A^T로 나타내고 다음과 같이 정의한다.

$$A^T = [a'_{ij}]_{n\times m},\ a'_{ij} = a_{ji}\ (1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$$

(1) $(A^T)^T = A$
(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
(3) $(AB)^T = B^T A^T$
(4) $(kA)^T = kA^T\ (k \in \mathbb{R})$

[Example 7]

(1) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$일 때, $I_2A,\ AI_3$을 구하여라.

(2) $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$일 때, $B^2,\ B^3,\ B^0$을 구하고, $(B^2)^3 = B^6$임을 확인하여라.

(3) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

의 전치행렬을 구하여라.

(4) (3)에서 주어진 행렬 A와 B에 대해서 $(AB)^T = B^T A^T$임을 확인하여라.

• 행렬 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$의 **주대각선 성분들의 합**을 **트레이스(trace)**라 하고 $tr(A)$로 나타낸다.

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

A와 B가 같은 크기의 정사각행렬
(1) $tr(A) = tr(A^T)$
(2) $tr(kA) = k\ tr(A)\ (k \in \mathbb{R})$
(3) $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$
(4) $tr(AB) = tr(BA)$

• n**차 정사각행렬** A에 대하여 다음을 만족하는 행렬 B가 존재하면 A는 **가역행렬(invertible matrix)** 또는 **정칙행렬(nonsingular matrix)**이라고 한다.

$$AB = I_n,\ BA = I_n$$

이때 B를 A의 **역행렬(inverse matrix)**이라고 하며, 이러한 B가 존재하지 않으면 A는 **비가역(noninvertible)** 또는 **비정칙(singular)** 행렬이라고 한다. 일반적으로 A의 역행렬을 A^{-1}로 나타낸다. 가역행렬의 **역행렬은 유일**하다.

[Example 8]

(1) 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$와 $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$는 서로 역행렬임을 확인하여라.

(2) 행렬 $C = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$는 가역인가?

크기가 같은 두 정사각행렬 $A,\ B$가 가역행렬일 때,
(1) A도 가역행렬이고, $(A^{-1})^{-1} = A$
(2) kA도 가역행렬이고, $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}\ (k \in \mathbb{R},\ k \neq 0)$
(3) AB도 가역행렬이고, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
(4) A^n도 가역행렬이고, $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
(5) A^T도 가역행렬이고, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

[Example 9] 두 행렬 $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$와 $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$에 대하여 (1)-(5)번 등식 들을 확인 하여라.

- **미지수의 개수와 방정식의 개수가 같은 선형연립방정식**

$$
(2)\quad
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
\Leftrightarrow
A\mathbf{x} = \mathbf{b}
$$

선형연립방정식 (2)에서 n차 정사각행렬 $A = [a_{ij}]$가 가역행렬이면 다음과 같이 유일한 해를 갖는다.

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Q1. A가 가역행렬임을 어떻게 판단할까?

Q2. A가 가역행렬일 때, 역행렬 A^{-1}은 어떻게 구할까?

• **단위행렬** I_n에 **기본행연산(elementary row operation, ERO)**을 **한 번 적용**해서 얻어진 행렬을 **기본행렬(elementary matrix)**이라 한다.

SageMath 명령어:

elementary_matrix(n, row1=i, row2=j) : i행과 j행을 바꾼다.

elementary_matrix(n, row1=i, scale=m) : i행에 m을 곱한다.

elementary_matrix(n, row1=i, row2=j, scale=m) : j행에 m을 곱하여 i행에 더한다.

(Sage의 index는 0부터 시작한다.)

예를 들어,

E1=elementary_matrix(4, row1=1, row2=3) : 4차 단위행렬에서 2행과 4행을 바꾼 행렬

E2=elementary_matrix(4, row1=2, scale=-7) : 4차 단위행렬에서 3행에 -7을 곱한 행렬

E3=elementary_matrix(n, row1=0, row2=3, scale=5) : 4차 단위행렬에서 4행에 5을 곱하여 1행에 더한 행렬

(Sage의 index는 0부터 시작한다.)

[**기본행렬의 성질**] 정사각행렬의 **왼쪽에 기본행렬을 곱한 결과**는 기본행렬에 대응하는 기본행연산을 주어진 행렬에 시행한 결과와 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

[**Example 10**] SageMath로 코딩하여 결과를 확인하여라.

기본행렬의 역행렬은 기본행렬이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\text{이므로 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\text{이므로 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\text{이므로 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix}$$

[**Example 11**] SageMath로 코딩하여 결과를 확인하여라.

• 임의의 n차 정사각행렬 A에 대하여 다음은 동치이다.

(1) A는 가역(invertible)행렬이다.

(2) A는 I_n과 행동치(row equivalent)이다. (즉, $\mathrm{RREF}(A) = I_n$)

(3) A는 기본행렬(elementary matrix)들의 곱으로 쓸 수 있다.

(4) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$은 자명한 해(trivial solution) $\mathbf{0}$을 가진다.

(5) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$는 모든 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$에 대해 유일한 해를 갖는다.

• Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 주어진 정사각행렬이 가역행렬인지의 여부와 역행렬을 구할 수 있다.

[**단계 1**] 주어진 행렬 A에 단위행렬 I_n을 첨가하여 $n \times 2n$ 행렬 $[A|I_n]$을 만든다.

[**단계 2**] 단계 1에서 만든 행렬 $[A|I_n]$의 RREF를 구한다.

[**단계 3**] 단계 2에서 얻어진 RREF를 $[C|D]$라고 하면 다음이 성립한다.
(1) $C = I_n$이면 $D = A^{-1}$이다.
(2) $C \neq I_n$이면 A는 비가역이고 A^{-1}은 존재하지 않는다.

[Example 12] SageMath를 이용하여 역행렬이 존재하면 역행렬을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

[Example 13] SageMath를 이용하여 다음 선형연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & & & + & 8x_3 & = & -1 \end{array}$$

- 2×2 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$가 **가역행렬일 필요충분조건**은 $ad - bc \neq 0$이고, 이 경우

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

이다. 실제로 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$와 $\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$를 곱하면 단위행렬이 됨을 쉽게 확인 할 수 있다.

- 2×2 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$에 대해서

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

을 A의 **행렬식(determinant)**이라고 한다.

- n차 정사각행렬 A가 **가역행렬일 필요충분조건**은 $det(A) = |A| \neq 0$이다.

[Example 13] SageMath를 이용하여 행렬식을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

[과제 4] SageMath와 Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 다음 비동차연립방정식을 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$로 나타냈을 때, 다음 질문에 답하여라.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & & & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & = 1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & & & + & 7x_4 & + & 2x_5 & = 2 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 8x_5 & = 5 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & & & & & + & 3x_5 & = -4 \\ -8x_1 & + & 9x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & + & 4x_5 & = 1 \end{array}$$

(1) A의 행렬식 $det(A)$를 구하여라.

(2) $[A|I_5]$의 RREF를 구하여라.

(3) A의 역행렬 A^{-1}을 구하여라.

(4) 선형연립방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$의 해 $\mathbf{x}$를 구하여라.