수나 수식 등을 다음과 같이 직사각형 모양으로 배열한 것을 **행렬(matrix)**이라 하며, 그 각각의 수나 수식을 행렬의 **성분(entry, element)**이라고 한다.

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 1 & -5 \\ 0 & -0.2 & 16 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-x} & 2x^2 \\ e^{6x} & 4x \end{bmatrix}, \quad [a_1 \quad a_2 \quad a_3], \quad \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

행렬 A에서 $[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}]$ $(1 \le i \le m)$을 A의 i**행(row)**이라 하고,

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad (1 \le j \le n)$$

을 A의 j**열(column)**이라고 한다. 또 m개의 행과 n개의 열을 갖는 행렬 A를 **크기(size)**가 $m \times n$인 행렬이라 하며, 특히 $m = n$이면 n차의 **정사각행렬(square matrix)**이라고 한다.

$A_{(i)}$는 A의 i**번째 행**, $A^{(j)}$는 A의 j**번째 열**로 표기하며, 따라서

$$A = \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{bmatrix} = \left[A^{(1)} | A^{(2)} | \cdots | A^{(n)} \right]$$

로 쓸 수 있다. 행렬 A의 i행, j열의 성분 a_{ij}를 A의 (i, j) 성분이라 하며, n차의 정사각행렬 A의 성분 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$을 **주대각선성분(main diagonal entries)** 이라고 한다. 행렬 A는 (i, j) 성분을 써서 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 또는 $A = [a_{ij}]$와 같이 간단히 나타내기도 한다.

• 두 행렬 $A = [a_{ij}]$와 $B = [b_{ij}]$의 **크기가 같고 성분이 같을 때**, 두 행렬 A와 B는 **같다(equal)**고 하고 $A = B$로 나타낸다.

$$a_{ij} = b_{ij}$$

• 크기가 같은 두 행렬 $A = [a_{ij}]$와 $B = [b_{ij}]$를 **더한(addition)** 행렬 $A + B = [c_{ij}]$의 성분은 두 행렬 A와 B의 **같은 위치에 있는 성분끼리 더하여** 정의한다.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

• 행렬 $A = [a_{ij}]$에 **스칼라** c**를 곱한(scalar multiplication)** 행렬 $cA = [b_{ij}]$의 성분들은 행렬 A의 **모든 성분에** c**를 곱하여** 정의한다.

$$b_{ij} = ca_{ij}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

$$c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$$

$$(c + k)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + k\mathbf{A}$$

$$c(k\mathbf{A}) = (ck)\mathbf{A}$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

여기서 **0**은 **영행렬(zero matrix)**을 나타낸다.

$Mat_{m\times n}(\mathbb{R}) = \{A = [a_{ij}] \mid a_{ij} \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$ **벡터공간(vector space)**

[Example 3] SageMath를 사용하여 답하세요.

세 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

의 일차결합인 행렬 $2A - B + \frac{1}{3}C$을 구하여라.

$A = [a_{ij}]_{m\times r}$가 $m \times r$ 행렬이고 $B = [b_{ij}]_{r\times n}$가 $r \times n$ 행렬이면 **곱(product)** $C = AB = [c_{ij}]_{m\times n}$는 그 성분이 다음과 같이 정해지는 $m \times n$행렬이다. 즉 AB의 i행과 j열의 성분을 구하려면 다음과 같이 행렬 A에서 i행 벡터와 행렬 B에서 j열 벡터의 **내적(inner product)**으로 정의한다.

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &= (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{rj}) \\
&= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} \\
&= \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}
\end{aligned}
$$

$$(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$$

$$
\overset{4\times 3}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}}
\overset{3\times 2}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}}
=
\overset{4\times 2}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{21} &= (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \cdot (b_{11}, b_{21}, b_{31}) \\
&= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \\ 9 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 22 & -2 & 43 & 42 \\ 26 & -16 & 14 & 6 \\ -9 & 4 & -37 & -28 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}
=
$$

행렬 A, B, C는 각 연산이 정의될 수 있는 적당한 크기의 행렬이고, a, b가 스칼라일 때, 다음이 성립한다.

(1) $A+B=B+A$ (덧셈의 교환법칙)

(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (덧셈의 결합법칙)

(3) $A(BC)=(AB)C$ (곱셈의 결합법칙)

(4) $A(B+C)=AB+AC$(분배법칙)

(5) $(B+C)A=BA+CA$ (분배법칙)

(6) $a(B+C)=aB+aC$

(7) $(a+b)C=aC+bC$ (8) $(ab)C=a(bC)$

(9) $a(BC)=(aB)C=B(aC)$

(10) $1A=A$

임의의 행렬 A와 영행렬 O에 대하여

(1) $A+O=O+A=A$

(2) $A-A=O$

(3) $O-A=-A$

(4) $AO=OA=O$

[Example 4] SageMath를 사용하여 답하세요.

세 행렬

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&3&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&2&7\\-1&3&-5\\1&2&3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}9&-6\\3&0\\1&3\end{bmatrix}$$

에 대해서, 곱셈이 정의되는 두 행렬의 곱을 구하여라.

선형계 또는 선형연립방정식

A **linear system of m equations in n unknowns** $x_1, \cdots, x_n$ is a set of equations of the form

$$
(1)\quad
\boxed{\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}}
\Leftrightarrow
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
\Leftrightarrow \boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}
$$

$$
\Leftrightarrow \boxed{x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \cdots + x_n A^{(n)} = \mathbf{b}}
$$

여기서 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, $A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ $(1 \leq j \leq n)$

coefficient matrix (계수행렬)　**solution vector (해벡터)**　**A의 j열 벡터**

선형계 또는 **선형연립방정식**

A **linear system of *m* equations in *n* unknowns** $x_1, \cdots, x_n$ is a set of equations of the form

$$(1)\quad \boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

여기서 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

coefficient matrix (계수행렬)　　**solution vector (해벡터)**

$$\widetilde{A} = [A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

(argmented matrix, 확대행렬, 첨가행렬)　　**확대행렬에는 선형연립방정식의 모든 정보가 들어있다.**

만약 **b≠0**일 때, 주어진 선형연립방정식을 **비제차(nonhomogeneous)**라 한다.
만약 **b=0**일 때, 주어진 선형연립방정식을 **제차(homogeneous)**라 한다.

[Example 5] SageMath를 사용하여 답하세요.

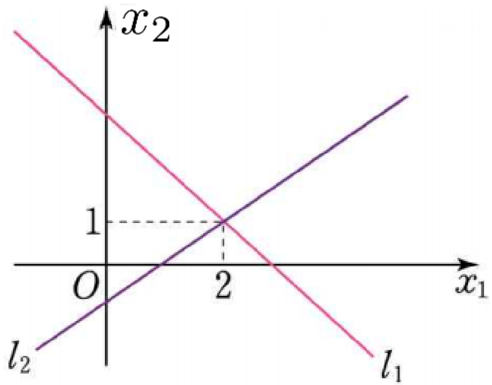
선형연립방정식

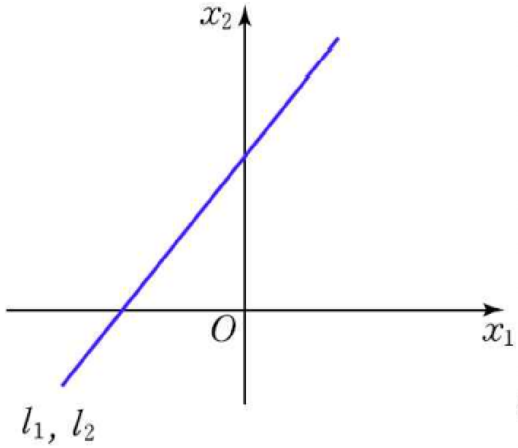
$$\begin{gathered} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \\ -4x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 5 \\ 2x_1 - 9x_3 = 1 \end{gathered}$$

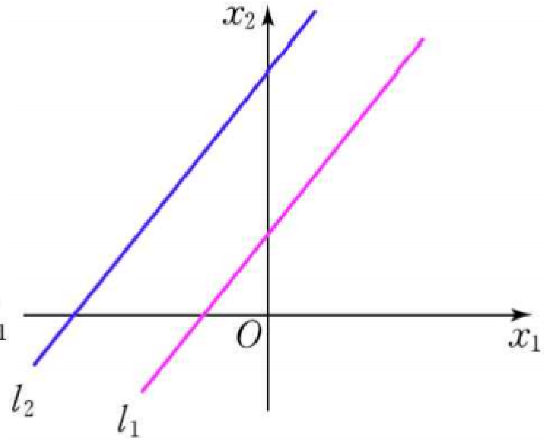
의 **확대행렬(argmented matrix)**을 구하여라.

일반적으로, 주어진 선형연립방정식은 다음 중 하나만(one and only)을 만족한다.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$







- **유일한 해를 갖는다.**
- **무수히 많은 해를 갖는다.**
- **해를 갖지 않는다.**

선형계(선형연립방정식)을 푸는 기초적인 방법은 주어진 연립방정식을 **같은 해집합**을 가지면서 **풀기 쉬운 새로운 연립방정식으로 대치**하는 것이다. 일반적으로 이 새로운 연립방정식은 **다음 세 가지 형태의 연산을 계속 적용**하여 **미지수**를 체계적으로 **소거**함으로써 얻어진다.

1. 두 방정식을 교환한다.
2. 하나의 방정식의 양변에 0이 아닌 상수를 곱한다.
3. 상수가 곱해진 방정식을 다른 방정식에 더한다.

$$\boxed{\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 3z &= 1 \\ x + y + 2z &= 9 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 2y - 4z &= -18 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

선형계(선형연립방정식)을 푸는 기초적인 방법은 주어진 연립방정식을 **같은 해집합**을 가지면서 **풀기 쉬운 새로운 연립방정식으로 대치**하는 것이다. 일반적으로 이 새로운 연립방정식은 **다음 세 가지 형태의 연산을 계속 적용**하여 **미지수**를 체계적으로 **소거**함으로써 얻어진다.

1. 두 방정식을 교환한다.
2. 하나의 방정식의 양변에 0이 아닌 상수를 곱한다.
3. 0이 아닌 상수가 곱해진 방정식을 다른 방정식에 더한다.

$$\boxed{\begin{array}{ccccccl} x & + & y & + & 2z & = 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = 0 \end{array}}$$

$$\begin{array}{ccccccl} 2x & + & 4y & - & 3z & = 1 \\ x & + & y & + & 2z & = 9 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccl} -2x & - & 2y & - & 4z & = -18 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccl} x & + & y & + & 2z & = 9 \\ & & 2y & - & 7z & = -17 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = 0 \end{array}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ $\qquad$ $-2R_1$ $\qquad$ $-2R_1 + R_2$

확대행렬(argmented matrix)의 각 행(수평선)은 주어진 연립방정식의 각 방정식에 대응하므로 이들 세 가지 연산은 확대행렬의 행에 관한 다음 연산에 대응한다.

1. 두 행을 교환한다.
2. 한 행에 0이 아닌 상수를 모두 곱한다.
3. 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하여 다른 행에 더한다.

기본행연산(elementary row operation)

선형연립방정식 **확대행렬**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$-2R_1 + R_2$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 2y & - & 7z & = & -17 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$-3R_1 + R_3$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 2y & - & 7z & = & -17 \\ & & 3y & - & 11z & = & -27 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

$\frac{1}{2}R_2$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & y & - & \frac{7}{2}z & = & -\frac{17}{2} \\ & & 3y & - & 11z & = & -27 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

$-2R_2 + R_3$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & y & - & \frac{7}{2}z & = & -\frac{17}{2} \\ & & & - & \frac{1}{2}z & = & -\frac{3}{2} \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

$-2R_3$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & y & - & \frac{7}{2}z & = & -\frac{17}{2} \\ & & & & z & = & 3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

후진대입법(back substitution)에 의해

$$z = 3$$

$$y = -\frac{17}{2} + \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} + \frac{21}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x = 9 - y - 2z = 9 - 2 - 6 = 1$$

가우스 소거법(Gauss Elimination)

선형연립방정식의 해를 구하여라.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 \\ 20x_1 + 10x_2 &= 80. \end{aligned}}$$

Augmented Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ | Equations

Pivot 1 $\rightarrow$, Eliminate $\rightarrow$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 20 & 10 & 0 & 80 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 \\ 20x_1 + 10x_2 &= 80. \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \\ \text{Row 2 + Row 1} \\ \\ \text{Row 4} - \text{20 Row 1} \end{array} \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 \\ 30x_2 - 20x_3 &= 80. \end{aligned}$$

Pivot 10 $\rightarrow$, Eliminate 30 $\rightarrow$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & \boxed{30} & -20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \\ \text{Pivot 10} \rightarrow \\ \text{Eliminate } 30x_2 \rightarrow \\ \\ \end{array} \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 \\ \boxed{30x_2} - 20x_3 &= 80 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & -95 & -190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \text{Row 3} - \text{3 Row 2} \\ \\ \end{array} \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 \\ -95x_3 &= -190 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Back Substitution. ***Determination of x_3, x_2, x_1 (in this order)*** $\quad x_3 = 2,\ x_2 = 4,\ x_1 = 2$

행렬 A에 기본행연산을 유한번 실시하여 얻어진 행렬를 B라 하면 A와 B는 **행동치 (row equivalent)**라 한다.

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&2\\0&-2\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&9\\2&4&-3&1\\3&6&-5&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&9\\0&1&-\frac{7}{2}&-\frac{17}{2}\\0&0&1&3\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\-1&1&-1&0\\0&10&25&90\\20&10&0&80\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&10&25&90\\0&0&-95&-190\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\tilde{A}=[A|\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cccc|c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{array}\right]$$

기본행연산 적용

$$\to\quad[\mathbf{R}|\mathbf{f}]=\left[\begin{array}{ccccc|c}r_{11}&r_{12}&\cdots&&r_{1n}&f_1\\&r_{22}&\cdots&&r_{2n}&f_2\\&&\ddots&&\vdots&\vdots\\&&&r_{rr}\ \cdots&r_{rn}&f_r\\&&&&&f_{r+1}\\&&&&&\vdots\\&&&&&f_m\end{array}\right]$$

$r\le m,\ r_{ii}\neq 0$

파란 삼각형과 파란 사각형의 성분은 모두 0이다.

1. 한 행이 모두 0으로 되어있지 않으면 그 행에서 처음으로 0이 아닌 수는 1이다.(이것을 **선두의 1(leading 1)**이라 한다.

2. 모두가 0으로 된 행이 존재하면 이들은 행렬의 가장 아래 쪽으로 모은다.

3. 모두가 0이 아닌 임의의 두 연속행에 있어서 아래 행의 선두의 1은 위 행의 선두의 1보다도 오른쪽에 존재한다.

$$\begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&1&*&*\\0&0&1&*\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&1&*&*\\0&0&1&*\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&1&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1&*&*&*&*&*&*&*&*\\0&0&0&1&*&*&*&*&*&*\\0&0&0&0&1&*&*&*&*&*\\0&0&0&0&0&1&*&*&*&*\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&*\end{bmatrix}$$

REF(행사다리꼴, row-echelon form), **가우스행렬(Gauss matrix)**

4. 선두의 1을 포함한 각 열의 다른 모든 수는 0이다.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0&0&*\\0&1&0&*\\0&0&1&*\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0&*&*\\0&1&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1&*&0&0&0&*&*&0&*\\0&0&0&1&0&0&*&*&0&*\\0&0&0&0&1&0&*&*&0&*\\0&0&0&0&0&1&*&*&0&*\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&*\end{bmatrix}$$

RREF(기약행사다리꼴, reduced row-echelon form),
기약가우스행렬(reduced Gauss matrix)

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}
\xRightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{}
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}
\xRightarrow[\frac{1}{2}R_1]{}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xRightarrow[-2R_1 + R_3]{}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}
\xRightarrow[-\frac{1}{2}R_2]{}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}
\xRightarrow[-5R_2 + R_3]{}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xRightarrow[2R_3]{}
\underset{\textbf{REF}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}
\Longrightarrow
\underset{\textbf{RREF}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}
$$

RREF에서
선두의 1에 해당하는
변수를 **선두변수**라하고,
선두의 1에 해당하지 않는
변수를 **자유변수**라 한다.

REF와 **후진대입법**을 이용하여 연립방정식을 푸는 것을 **Gauss 소거법**이라 한다.

RREF와 **후진대입법**을 이용하여 연립방정식을 푸는 것을 **Gauss-Jordan 소거법**이라 한다.

[Example 6] SageMath를 사용하여 답하세요.

(1) 다음 행렬 A의 RREF를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 3 & -7 & 11 \end{bmatrix}$$

(2) Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 다음 **비동차연립방정식**의 해를 열벡터로 표현하여라.

$$\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & & +2x_5 & & = 0 \\ 2x_1 & +6x_2 & -5x_3 & -2x_4 & +4x_5 & -3x_6 & = -1 \\ & & 5x_3 & +10x_4 & & +15x_6 & = 5 \\ 2x_1 & +6x_2 & & +8x_4 & +4x_5 & +18x_6 & = 6 \end{array}$$

(3) Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 다음 **동차연립방정식**의 해를 열벡터로 표현하여라.

$$\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & & +2x_5 & & = 0 \\ 2x_1 & +6x_2 & -5x_3 & -2x_4 & +4x_5 & -3x_6 & = 0 \\ & & 5x_3 & +10x_4 & & +15x_6 & = 0 \\ 2x_1 & +6x_2 & & +8x_4 & +4x_5 & +18x_6 & = 0 \end{array}$$

[**과제 3**] SageMath와 Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 다음 비동차연립방정식의 해를 열벡터로 표현하여라.

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
 & & 10y & - & 4z & + & w & = 1 \\
x & + & 4y & - & z & + & w & = 2 \\
3x & + & 2y & + & z & + & 2w & = 5 \\
-2x & - & 8y & + & 2z & - & 2w & = -4 \\
x & - & 6y & + & 3z & & & = 1
\end{array}
$$