

□ SVM

- 관측값을 두 개의 클래스로 분류하기 쉬운 방법은 그들 사이에 선형경계를 그리는 것이다.

1. SVM의 기본적인 생각.

- 경계를 각 클래스의 각 관측값에서 최대한 멀리 두는 방법
- 단순한 최적화의 모습
- 선형 경계의 개수를 생각하여 마진 최대화
- 마진이란 경계와 가장 가까운 관측값 사이의 거리.
- 모든 관측 값이 경계의 올바른 범위 내에 있어야한다는 제약이 부과됨.
- 최적의 솔루션은 경계에 가장 가까운 관측 값에 의해서만 결정됨.
- 즉 모든 관측 값을 제대로 분류 할 수 있는 선형 경계가 존재하지 않음.
- SVM의 솔루션이 클래스 간 분리를 가능하게 하는 최적의 방법 중 하나.(마진을 최대화)
- 비선형 분류문제에서도 가능.
- 선형 분리가 가능하도록 변수를 변환하여 새로운 공간으로 이동시킴.
- SVM은 이진 클래스 분류에서만 작동한다.
- 다중 클래스의 분류 문제는 여러 이진 클래스 분류기를 결합하여 해결한다.

□ PCA(차원 축소)

- 시각화에 많이 사용함.
- 이미지 노이즈 감소
- 적은 차원의 공간에 저장
- 주성분 분석
- Eigen Vector는 차원수 만큼 존재한다. ex)100 차원 100개
- 가장 넓게 퍼져있는 Eigen Vector를 선택(Eigen Value가 가장 높은 값)해서 그곳으로 데이터(점)을 모두 옮기면 PCA가 구현된다.

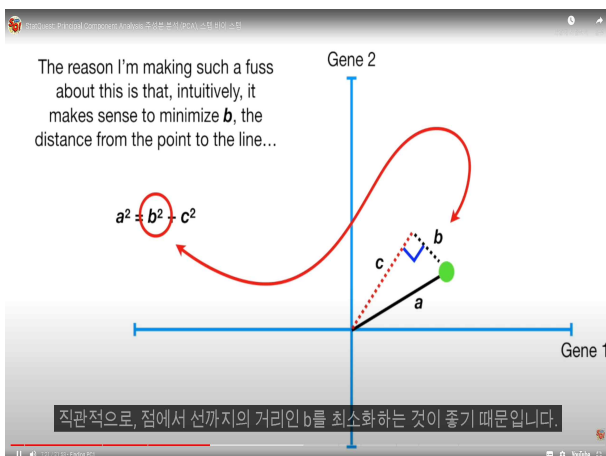
랜덤한 선을 그린다.(선이 데이터에 얼마나 적합한지를 정량화하기 위해 PCA는 데이터를 투영한다.)

선에서 데이터까지의 거리를 측정하고 이 거리를 최소화하는 선을 찾음.

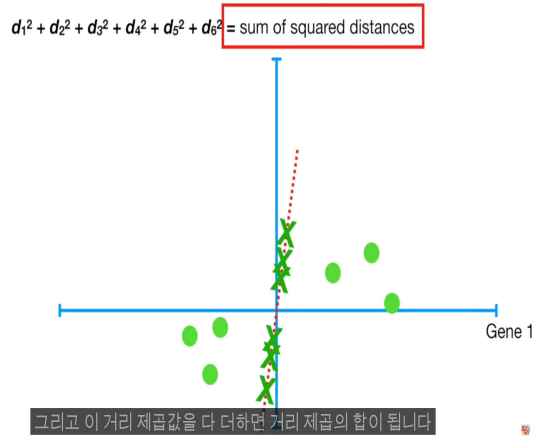
직관적으로 점에서 선까지의 거리인 b 를 최소화하는 것이 좋음.

a 의 크기는 바뀌지 않음(원점에서 점까지의 거리)

b 를 최소화하면 c 의 길이는 최대화됨. $a^2 = b^2 + c^2$

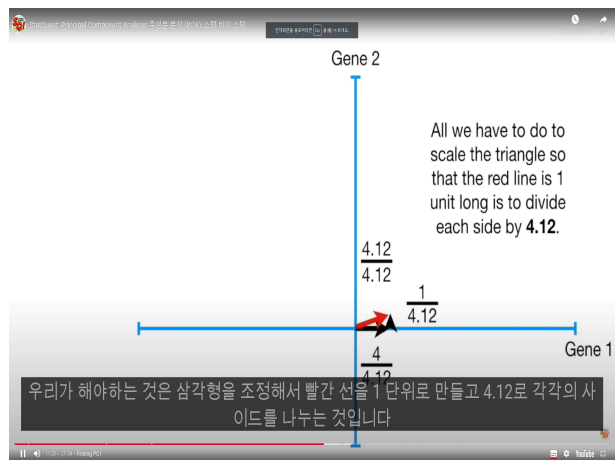


투영된 선에서부터 원점까지의 거리 제곱을 다 더한다.

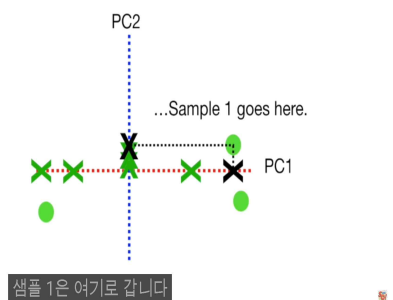


$$a^2 = b^2 + c^2$$

(a,b,c) / a => 1, b/a, c/a 로 만든다.



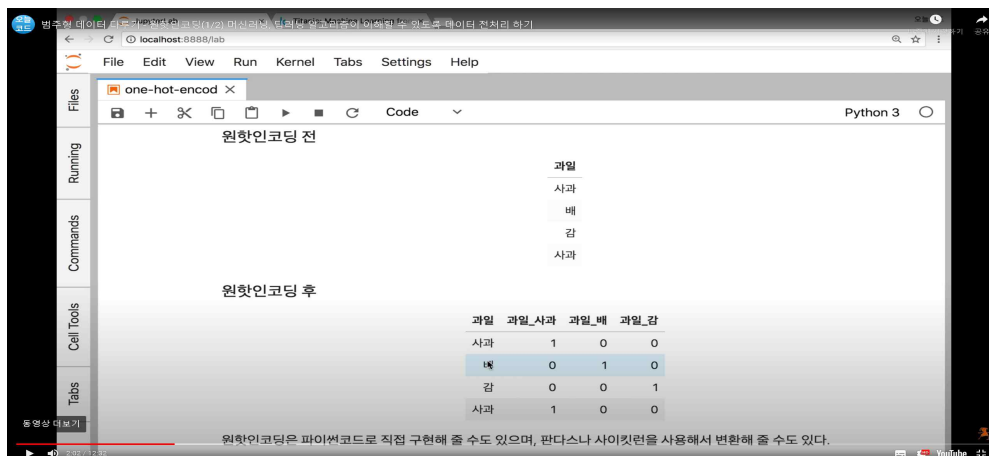
PCA가 특이값 분해를 사용하는 방식.



□ One-Hot Encoding

- 데이터에는 수치형 데이터와 텍스트 데이터나 범주형 데이터가 있다.
- 머신러닝, 딥러닝 알고리즘은 수치 데이터만 이해가 가능함.
- 기계가 이해할 수 있는 형태로 데이터를 변환해 주어야함.
- 범주형 데이터는 원핫 인코딩 형태로 변환.

예시



과일 컬럼에 사과, 배, 감이 들어있다고 하면

각각의 과일인 사과, 배, 감으로 컬럼으로 만들어주고 해당되는 과일에만 1로 표기 나머지 과일은 0으로 표기.

□ 코드

1. 전처리

```
import pandas as pd
import numpy as np
```

```
train = pd.read_csv('titanic/train.csv')
test = pd.read_csv('titanic/test.csv')
```

```
print(train.shape) # (891, 12)
print(test.shape) # (418, 11)
```

```
# 데이터 타입 확인
train.dtypes
```

```
test.dtypes
```

```
train.columns # 컬럼 정보 확인
```

```
# 컬럼 정보 :
Index(['PassengerId', 'Survived', 'Pclass', 'Name', 'Sex', 'Age', 'SibSp',
      'Parch', 'Ticket', 'Fare', 'Cabin', 'Embarked'],
      dtype='object')
```

```
train.describe() # 컬럼 상태 확인
```

```
train # 데이터 프레임 정보 확인
```

```
# 오브젝트 타입의 데이터만 따로 추출해 본다.
# 이 데이터 중에 카테고리 형태의 데이터가 무엇인지 보고 인코딩 해준다.
# 원핫인코딩 뿐만 아니라 자연어처리(NLP)에서 배웠던 TF, TF-IDF의 인코딩도 해줄 수 있음.
obj_df = train.select_dtypes(include=['object']).copy()
obj_df.head()
```

```
# 처리전과 비교해 보기위해 데이터를 복사
train_c_df = train.copy()
test_c_df = train.copy()
```

2. 성별

```
train['Sex'].value_counts() # 성별 확인 (남자 몇 명, 여자 몇 명인지)
```

```
# 남자는 0 여자는 1로 변환. (원 핫 인코딩)
```

```
train.loc[train["Sex"] == "male", "Sex"] = 0
```

```
train.loc[train["Sex"] == "female", "Sex"] = 1
```

```
test.loc[test["Sex"] == "male", "Sex"] = 0
```

```
test.loc[test["Sex"] == "female", "Sex"] = 1
```

3. 사이킷런의 LabelEncoder로 원핫인코딩해준다

```
# 카테고리 데이터를 인코딩 해준다.
```

```
from sklearn.preprocessing import LabelEncoder
```

```
# 성별을 0과 1로 인코딩
```

```
def gender_to_int(data):
```

```
    le = LabelEncoder()
```

```
    le.fit(["male", "female"]) # male 1, female 0
```

```
    data["Sex"] = le.transform(data["Sex"])
```

```
    return data
```

```
train_c_df = gender_to_int(train_c_df)
```

```
test_c_df = gender_to_int(test_c_df)
```

```
train_c_df.head()
```

4. 승선위치

```
train['Embarked'].value_counts()

train_c_df["Embarked_C"] = train_c_df["Embarked"] == "C"
train_c_df["Embarked_S"] = train_c_df["Embarked"] == "S"
train_c_df["Embarked_Q"] = train_c_df["Embarked"] == "Q"

print(train.shape)
print(train_c_df.shape)
train_c_df[["Embarked", "Embarked_C", "Embarked_S", "Embarked_Q"]].head(10)
```

5. 판다스의 get_dummies로 원핫 인코딩

```
def dummy_data(data, columns):
    for column in columns:
        data = pd.concat([data, pd.get_dummies(data[column], prefix = column)], axis = 1)
        data = data.drop(column, axis=1)
    return data
```

```
dummy_columns = ["Sex", "Pclass", "Embarked"]
train_dummy = dummy_data(train, dummy_columns)
test_dummy = dummy_data(test, dummy_columns)
```

```
print('원핫인코딩 전 shape')
print(train.shape)
print(test.shape)
```

```
print('get_dummies로 원핫인코딩 후 shape')
print(train_dummy.shape)
print(test_dummy.shape)
```

```
train_dummy.head()
```

○ 인코딩된 데이터를 그대로 사용하게 된다면 사용하지 않는 컬럼을 drop 해주는 방법으로 피처를 생성

```
def drop_not_concerned(data, columns):
    return data.drop(columns, axis=1)

not_concerned_columns = ["PassengerId", "Name", "Ticket", "Cabin"]
X_train = drop_not_concerned(train_dummy, not_concerned_columns)
X_train = X_train.drop('Survived', axis=1)
X_test = drop_not_concerned(test_dummy, not_concerned_columns)
```

□ KNN

1. 기본적인 생각

- 샘플을 분류하는 가장 쉽고 효과적인 방법이 무엇일까?
- 가장 가까운 샘플을 찾고, 그 샘플과 같은 클러스터로 분류
- 인접한 데이터에 대해 매우 민감하고, 또 실제 카테고리는 이렇게 깨끗하게 분리되지 않음.
- 만약 가장 인접한 샘플이 이상값이라면, 새로운 샘플은 잘못 분류 될 가능성이 높아짐.
- 이런 문제를 해결하는 가장 쉬운 방법은 더 많은 샘플을 관찰하여 다수를 이루는 클러스터로 분류

□ K-Means-Clustering

- 관측 값을 지정된 몇개의 그룹으로 나누는 방법.
- K개 그룹의 중심 위치를 결정.
- 각 관측 값에 대해 어떤 중심에 가장 가까운지 여부에 따라 그룹을 할당함.
- 처음에는 중심 위치를 무작위로 설정, 관측 값들은 가장 가까운 중심의 그룹에 할당.
- 각 그룹의 중심 위치는 그룹에 속한 관측 값들을 평균하여 업데이트됨.
- 그룹을 결정하는데 사용되는 것은 중심위치입니다.
- K-Means는 임의의 중심위치를 사용
- 최적의 클러스터링은 그룹의 중심을 기준으로 조밀한 결과를 나타낼 때.
- 각 관측에서 해당 그룹의 중심까지의 총 거리가 클러스터링 품질의 척도입니다.
- 여러 시작 위치를 시도할 수 있는 옵션을 실행하여 총 거리가 가장 짧은 결과가 채택됩니다.

□ ICA(독립성분분석)

1. 필요 개념

- 중심극한정리

독립 확률 변수 n 개의 평균의 분포는 n 이 적당히 크다면 정규분포에 가까워진다는 정리이다.
충분히 많은 수의 iid랜덤변수의 표본평균이 정규 분포를 따른다.

- 최대 우도법(MLE)

모수적인 데이터 밀도 추정방법

파라미터로 구성된 어떤 확률밀도함수 P 에서 관측된 표본 데이터 집합을

$x=(x_1, x_2, \dots, x(n))$ 이라 할 때, 이 표본들에서 파라미터를 추정하는 방법.

- 경사 하강법

함수의 기울기(경사)를 구하고 경사의 절댓값이 낮은쪽으로 계속 이동시켜 극값에 이를 때까지 반복시키는 것이다.
모든 차원과 모든 공간에서 적용 가능.

ICA 모델과 목적

$x_1(t)$, $x_2(t)$ 라고 하고, 두 사람의 음성 신호를 $s_1(t), s_2(t)$ 라고 하면 다음과 같은 관계로 모델링 할 수 있다.

...

$$x_1(t) = a_{11}s_1(t) + a_{12}s_2(t)$$

$$x_2(t) = a_{21}s_1(t) + a_{22}s_2(t)$$

$$x = As$$

...

- 이 때 우리가 원하는 것은 녹음 음원으로부터 원래 source의 음원을 분리해내는 일.

$$s = A^{-1}x = Wx \quad \# A^{-1} \text{을 찾는 행위} \Rightarrow \text{ICA}$$

□ 중심극한정리와 독립성분분석

1. 독립성분분석은 중심극한정리를 거꾸로 생각하는 것.

2. 중심극한정리

- 서로 독립적인 랜덤 변수들의 선형조합 \Rightarrow 가우스 분포를 따른다.

- 선형 조합에 들어가는 독립 변수들이 많을 수록 더 가우스 분포에 가까워진다.

3. 독립성분분석

- 선형조합을 통해 더 가우스 분포에 가까운 분포를 따르는 결과물들을 어떻게 조합하면 원래의 독립적인 source를 얻을 수 있을까?

\Rightarrow ICA에서는 source들이 서로 독립적이라는 가정을 최대한 만족할 수 있도록 하는 $W = A^{-1}$ 을 찾는 것이 목적.

랜덤변수에 선형변환을 적용했을 때의 density function의 변화

- 랜덤 변수에 선형 변환을 적용 했을 때 변환 적용 전, 후 변수의 확률밀도간의 관계를 생각해보자.

- 확률밀도 함수의 전체 면적은 1이 되어야 하므로, 어떤 행렬로 랜덤 변수를 선형변환 해주면 그 확률밀도 함수는 행렬식을 이용해 보정 해야 함.

... 수식

$$s: [0,1]$$

$$p_s(s) = 1 \{0 \leq s \leq 1\}$$

$$x: [0,2]$$

$$p_x(x) = (0.5)1 \{0 \leq x \leq 2\} \quad |W| = |A^{-1}|$$

$$x \text{의 확률밀도 함수: } p_x(x) = p_s(Wx) |W|$$

...

□ 신호처리 (FFT and STFT)

Signal Representation by Harmonic Sinusoids

□ FFT(Fast Fourier Transform)

FFT with Sampling Frequency

적은 계산량으로 이산 푸리에 변환값을 계산하는 알고리즘.

$x[n] = 2\cos(2\pi \cdot 60t) \Rightarrow f = 60$ $60t \Rightarrow$ frequency(주기)

```
```python
```

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
%matplotlib inline
```

```
from scipy.fftpack import fft, fftshift
```

```
from scipy.signal import spectrogram
```

```
Fs = 2**10 # Sampling frequency
```

```
T = 1/Fs # Sampling period (or sampling interval)
```

```
N = 5000 # Total data points (signal length)
```

```
t = np.arange(0, N) * T # Time vector (time range)
```

```
k = np.arange(0, N) # vector from 0 to N-1
```

```
f = (Fs/N) * k # frequency range
```

```
x = 2*np.cos(2*np.pi*60*t) + np.random.randn(N) # 신호 + 랜덤 노이즈
```

```
...
```

```
```python
```

```
# original fft
```

```
xt = fft(x)/N
```

```
xtshift = fftshift(xt)
```

```
kr = np.hstack([np.arange(0, N/2), np.arange(-N/2, 0)])
```

```
fr = (Fs/N)*kr
```

```
fs = fftshift(fr)
```

```
# single-sides fft
```

```
xt = fft(x)/N
```

```
xtss = xt[0:int(N/2)+1]
```

```
xtss[1:-1] = 2*xtss[1:-1]
```

```
fss = f[0:int(N/2)+1]
```

```
...
```



```

python
x1 = np.cos(2*np.pi*50*t)
x2 = np.cos(2*np.pi*100*t)

x = np.zeros(t.shape)
x[0:int(N/2)] = x1[0:int(N/2)]
x[int(N/2):-1] = x2[int(N/2):-1]

z = 1/2*(x1 + x2)

```

STFT (Short-Time Fourier Transformation)

FFT는 시간의 흐름에 따라 신호의 주파수가 변했을 때, 어느 시간대에 주파수가 변하는지 모르게 됨. 이러한 한계를 극복하기 위해서, STFT는 시간의 길이를 나눠서 푸리에 변환을 하게 됨.

웨이블릿

급격한 변화가 있는 신호 및 이미지를 정확하게 분석하려면 시간과 주파수에 대해 국한되어 있는 새로운 함수클래스를 사용해야함.

웨이블릿은 유한기간 동안 존재.

웨이블릿은 모양과 크기가 다름.

- 웨이블릿의 종류

Morlet, Daubechies, Coiflets, Biorthogonal, Mexican Hat, Symlets

1. 웨이블릿 변환 개념에서 중요한 것

웨이블릿은 비례 비율이 일정한 스케일과 주파수 사이에 상호 관계가 있음.

이 비례 상수를 웨이블릿의 중심 주파수(Center Frequency)라고 함.

- 스케일링(Scaling)

방정식을 사용하여 표현할 수 있는 시간에 따라 신호를 늘리거나 줄이는 과정.

예시로 사인파의 10Hz를 2만큼 스케일링하면 원래 주파수가 절반 또는 한 옥타브 감소함. 10Hz => 5Hz

- 이동(Shifting)

신호 길이에 따라 웨이블릿의 시작을 지연시키거나 진행하는것.

2. 웨이블릿 분석의 두 가지 주요 변환

- 연속 웨이블릿 변환

- 이산 웨이블릿 변환

3. 이산 웨이블릿 변환(Discrete wavelet transform)

- 주요 응용 분야

신호 및 이미지의 노이즈 제거 및 압축

- 적은 계수로 자연 발생 신호와 이미지를 표현하는데 적합

- 서로 다른 해상도에서 점차 좁은 서브밴드에서 신호를 분석하는데 도움을 줌.

4. 순서

- 근사와 세부 계수를 얻는다.(다단계 웨이블릿 분해를 수행)

- 세부 계수를 분석하고 적절한 임계 값을 선별.

- 세부 계수를 임계값으로 구분하고 신호를 재구성.

▣ 임계값 방식

- 범용 임계값 계산 공식(The universal threshold)

$\sqrt{2 \cdot \log(\text{length}(X))} * \text{median}(\text{abs}(D)) / 0.6745$

1. Soft Thersholding

- 임계 값보다 작은 크기의 계수는 0으로 설정
- 임계 값보다 큰 계수에서 임계 값을 빼서 계수의 크기가 줄어듦.

2. Hard Thersholding

- 임계 값보다 작은 크기의 계수는 0으로 설정
- 임계 값보다 큰 계수는 변경되지 않음.

▣ 연속 웨이블릿 변환(Continuous wavelet transform)

- 주요 웨이블릿 분석

1. Morse Wavelets
2. Analytical Morlet
3. Bump Wavelet

- 주요 응용 분야

시간 주파수 분석 및 시간적으로 국부화된 주파수 성분의 필터링

- 웨이블릿의 스케일과 등가 주파수는 반비례함.

- 신호의 진동 동작을

- spectrogram() : 신호와 샘플링 주파수를 전달.

사용 예시 : spectrogram(kobe, 128, [], [], Fs, 'yaxis')

- cwt() : 웨이블릿 계수와 등가 주파수를 출력으로 반환

사용 예시 : cwt(kobe, Fs, 'NumOctaves', No, 'VoicesPerOctave', Nv);

▣ AI 신호처리

▣ 인공신경망의 구조

1. Input Layer

- 데이터를 넣어주는 과정

2. Hidden Layer

- 데이터의 특성을 학습하는 과정.

3. Output Layer

- 분류나 회귀문제의 정답을 알려줌.

▣ 대표적인 인공 신경망

1. CNN

- Convolution 연산을 통해 결과 도출.
- 현재출력이 현재 입력만 영향.
- 일차원의 신호를 이차원으로 변환해서 데이터를 인풋값으로 넣음.

2. LSTM

- RNN의 일종
- 현재출력이 이전의 입력까지 고려함.
- 가지고 있는 데이터의 시간에 따라 변화하는 특성들을 인풋값으로 넣음

▣ Deep Learning Workflow

1. Create And Access Datasets

- 좋은데이터가 좋은 결과를 만든다.
- 연구목적
모델 개발에 압도적으로 많은 시간 소요가들어감.

- 실제 산업
데이터개발에 많은 시간 소요가 들어감.

```MatLab

Datastore() : 대용량의 데이터셋을 가져 와서 처리를 쉽게 함.

사용 예시

```
a = audioDatastore(pwd, 'IncludeSubfolders', true...
, "LabelSource", "foldernames")
```
```

- 데이터를 강화함으로써 대용량의 데이터를 만듦으로써 더 견고한 모델 생성 가능.

2. PREPROCESS AND TRANSFORM DATA

3. DEVELOP PREDICTIVE MODELS

- Design
- Train
- Optimize

4. ACCELRATE AND DEPLOY

□ 신호처리 - 푸리에 트랜스폼.

- sparse domain => frequency domain

- Discrete fourier transform

- 사용처

각각의 통신사들(SK, KT, LG) 자신들이 활용하는 대역폭으로 전달받은 영상 신호를 전송시킨후에 inverse system을 이용해원본으로 복원한다.

원본신호 => SK, KT, LG 대역폭으로 변조 신호 전달.(Forward transform 원본신호 => 변조 신호)

=> 각 통신사마다 다른 대역폭으로 신호 변조

=> 받은 신호를 사용자들의 단말기로 전달

=> 신호를 받은 단말기는 다시 신호를 변조(inverse transform 변조신호 => 복조신호)

1. 1D Fourier transform

```
```MatLab
```

```
N= 100;
```

```
xn = zeros(N,1);
```

```
xn(1) = 1;
```

```
xk = fft(xn);
```

```
figure(1)
```

```
subplot(131): stem(xn):title('spatial domain')
```

```
subplot(132): stem(real(xk):title('fourier domain: real')
```

```
subplot(133): stem(image(xk):title('fourier domain: imaginary')
```

```
```
```

□ 컨볼루션 연산과 푸리에 트랜스폼의 관계

```
```MatLab
```

```
1D Convolution
```

```
Ny = 64;
```

```
Nx = 1;
```

```
My = 64;
```

```
Mx = 1;
```

```
f = zeros(Ny, Nx);
```

```
g = zeros(My, Mx);
```

```
f((1:Ny/4) + Ny*3/8, :) = 1;
```

```
g((1:Mx/4) + Mx*3/8, :) = 1;
```

```
pad_pre = [floor((My-1)/2), floor((Mx -1)/2)];
```

```
pad_post = [floor(My/2), floor(Mx/2)];
```

```
f_pad = padarray(f, pad_pre, 'pre');
```

```
f_pad = padarray(f_pad, pad_post, 'post');
```

```
```
```

▣ Separability와 Dimension Embedding, MobileNet에 어떻게 적용되는가?

1. Separability : the Concept of MobilenetV1

```MatLab

## Full-rank matrix

N = 4; # matrix 개수

mat = zeros(N,N);

for i =1:N

mat(i, i) = N - (i - 1);

end

figure(1);

imagesc(mat); axis image off; title('Ground Truth');

## SVD

[U, S, V] = svd(mat);

figure(2);

subplot(141); imagesc(mat); axis image off; title('Ground Truth');

subplot(142); stem(diag(S)); title('Singular value');

subplot(143); imagesc(mat); axis image off; title('U matrix of SVD');

subplot(144); imagesc(mat); axis image off; title('V matrix of SVD');

## Rank1 matrix

BSS1 = U(:, 1) \* V(:, 1)';

BSS2 = U(:, 2) \* V(:, 2)';

BSS1 = U(:, 3) \* V(:, 3)';

BSS2 = U(:, 4) \* V(:, 4)';

COEF1 = S(1,1);

COEF2 = S(2,2);

COEF3 = S(3,3);

COEF4 = S(4,4);

## Convolution operator

## Gaussian kernel

# Input image matrix size

Ny = 255;

Nx = 301;

# gaussian kernel size

My = 10;

Mx = 13;

# 2D gaussian scaling factor

a = 1;

# gaussian kernel sigma parameter

sgmy = 3;

sgmx = 3;

```

gaussian kenel center position
y0 = 0;
x0 = 0;

2D Gaussian kernel
ly = linspace(-(My-1)/2, (My - 1)/2, My);
lx = linspace(-(Mx-1)/2, (Mx - 1)/2, Mx);

[mx, my] = meshgrid(lx, ly);

W = a * exp(-((mx - x0).^2/(2*sgmx^2) + (my-y0).^2/(2*sgmy^2)))
W = W / norm(W);

1D Gaussian kernel

Wy = a * exp(-((ly - y0).^2 / (2*sgmy^2)));
Wx = a * exp(-((lx - x0).^2 / (x*sgmx^2)));

Wy = Wy/norm(Wy);
Wx = Wx/norm(Wx);

Wxy = Wy * Wx;

2D Convolution vs. separable 1D convolution

x = imresize(phantom(max(Ny, Nx)), [Ny, Nx]);

x_conv2d = conv2(x, W, 'same');

x_conv1dy = conv2(x, Wy, 'same');
x_conv1dxy = conv2(x_conv1dy, Wx, 'same');

2D Fourier transform vs. 1D Separable Fourier transform
x_ft2d = fftshift(fft2(fftshift(x)));
x_if2d = real(fftshift(ifft2(ifftshift(x_ft2d))));

x_ft1dy = fft(ifftshift(x), [], 1);
x_ft1dxy = fftshift(fft(x_ft1dy, [], 2));

x_if1dy = ifft(ifftshift(x_ft1dxy), [], 1);
x_if1dxy = real(fftshift(ifft(x_if1dy, [], 2)));

```

## □ 콘볼루션과 푸리에 트랜스폼, 매트릭스 곱으로 표현

```
``MatLab
%% 1D Fourier transform
Ny = 128;
Nx = 1;

x = rand(Ny, Nx);

%% 1D operator
x_ft1d = fftshift(fft(ifftshift(x)));
x_if1d = real(fftshift(ifft(ifftshift(x_ft1d))));

%% 1D matrix multiplication
ny = linspace(0, Ny - 1, Ny);
ky = linspace(0, Ny - 1, Ny);

kyny = ky(:) * ny(:)';

ft1d_mtx = exp(-1j * 2 * pi * kyny/Ny);
ift1d_mtx = 1/N * exp(1j * 2 * pi * kyny/Ny);
ifft1d_mtx = 1/N * ft1d_mtx;

x_ft1d_mtx = fftshift(ft1d_mtx * ifftshift(x));
x_if1d_mtx = fftshift(ift1d_mtx * ifftshift(x_ft1d_mtx));

%% 2D Fourier transform
Ny = 128;
Nx = 108;

x = imresize(phantom(max(Ny, Nx)), [Ny, Nx], 'nearest');
``
```

## ▣ 함수의 tranpose

```MatLab

% matrix version

% $\langle A * x, y \rangle = \langle x, A^T * y \rangle$

% operator & function version

% $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^T(y) \rangle$

%% Transpose of matrix

% A in $N * M$

% x in $M * K$

% y in $N * K$

N = 100;

M = 80;

K = 30;

A = randn(N, M);

x = randn(M, K);

y = randn(N, K);

AT = A';

% lhs = $\langle A*x, y \rangle$

Ax = A * x;

lhs = Ax(:)' * y(:);

% rhs = $\langle x, A^T*y \rangle$

ATy = AT * y

rhs = x(:)' * ATy(:);

Transpose of Fourier transform function

Ny = 100;

Nx = 100;

A = @(x) fft2(x);

x = randn(Ny, Nx);

y = randn(Ny, Nx);

AT = @(y) Ny * Nx * ifft2(y);

% lhs = $\langle A(x), y \rangle$

Ax = A(x);

lhs = Ax(:)' * y(:);

% rhs = $\langle x, A^T(y) \rangle$

ATy = AT(y);

rhs = x(:)' * ATy(:);

```