$\mathbb{R}^n$의 벡터 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, x_n)$에 대하여 실수

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

을 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$의 **내적(inner product, dot product)**이라 하고 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$로 나타낸다.

$$(1,2,3) \cdot (1,1,1) = (1)(1) + (2)(1) + (3)(1) = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$(1,2,3) \cdot (-3,0,1) = (1)(-3) + (2)(0) + (3)(1) = -3 + 0 + 3 = 0$$

$$(1,2,3) \cdot (-3,-2,1) = (1)(-3) + (2)(-2) + (3)(1) = -3 - 4 + 3 = -4$$

$\mathbb{R}^n$의 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$와 스칼라 $c \in \mathbb{R}$에 대하여 다음이 성립한다.

1. $\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2}$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

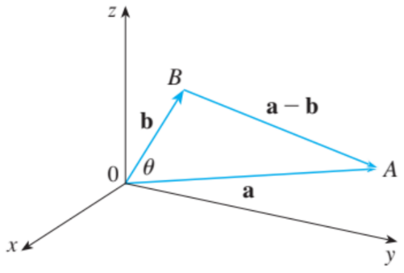
$a = (a \cdot b \cdot c)$

$|a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$|a|^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$a \cdot a = (a \cdot b \cdot c) \cdot (a \cdot b \cdot c)$

$= a^2 + b^2 + c^2$



$$
\begin{aligned}
|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\
&= |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2
\end{aligned}
$$

(코사인 제2법칙) $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$

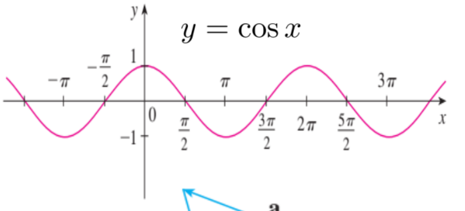
$$= |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \ (0 \le \theta \le \pi)$$

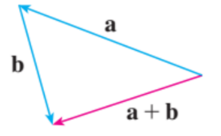
(여기서 θ는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 이루는 **각(angle, 사잇각)**이다.)

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

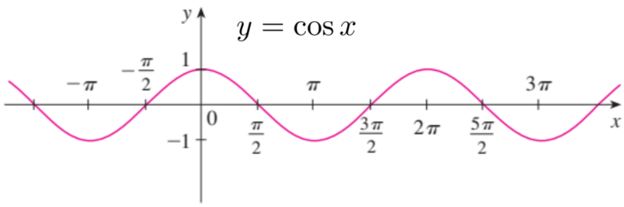
- $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ **(코시-슈바르츠 부등식)**
  (단, 등호는 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 중 하나가 다른 것의 실수배일 때만 성립한다.

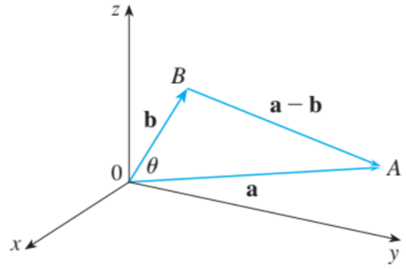


- $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ **(삼각부등식)**
  (단, 등호는 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 중 하나가 다른 것의 음이 아닌 실수배일 때만 성립한다.



$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \ (0 \le \theta \le \pi)$

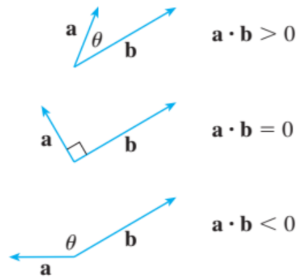




$\theta = 0 \iff \mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$ (같은 방향으로 **평행**) $\iff \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

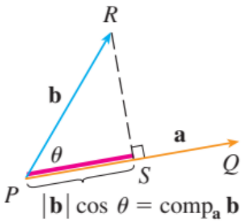
$\theta = \frac{\pi}{2} \iff \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ (**직교**) $\iff \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

$\theta = \pi \iff \mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$ (반대 방향으로 **평행**) $\iff \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

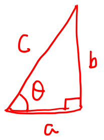


$$(1,2,3)\cdot(1,1,1) = (1)(1) + (2)(1) + (3)(1) = 1+2+3 = 6 > 0$$
$$(1,2,3)\cdot(-3,0,1) = (1)(-3) + (2)(0) + (3)(1) = -3+0+3 = 0$$
$$(1,2,3)\cdot(-3,-2,1) = (1)(-3) + (2)(-2) + (3)(1) = -3-4+3 = -4 < 0$$

"정사영"



scalar projection of **b** onto **a**



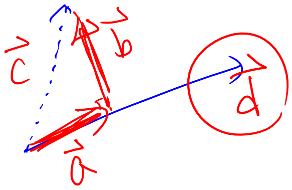
$\sin\theta = \frac{높이}{빗변} = \frac{b}{c}$

$\boxed{\cos\theta = \frac{밑변}{빗변} = \frac{a}{c}}$

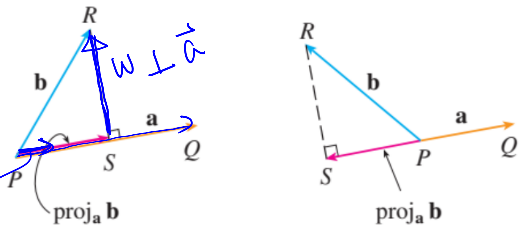
$a = c \cdot \cos\theta$

$\tan\theta = \frac{높이}{밑변} = \frac{b}{a}$

$$\mathrm{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos\theta = \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta}{|\mathbf{a}|} = \boxed{\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}}$$



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



$\vec{a}$ 방향으로 크기가 1인 벡터 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

vector projection of **b** onto **a**

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = (\mathrm{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b})\boxed{\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\right)\mathbf{a}$$

$\mathbf{a}$에 수직인 $\mathbf{b}$의 성분을 $\mathbf{w} = \overrightarrow{SR}$라 하면 $\mathbf{w} = \mathbf{b} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$이다.

[Example 2] SageMath를 사용하여 답하세요.

(1) 두 벡터 $\mathbf{x} = (2, -1, -2, 5),\ \mathbf{y} = (-2, 1, -4, 7)$의 내적을 구하여라.

(2) 두 벡터 $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 1),\ \mathbf{y} = (-1, 0, 0, 1)$는 서로 직교함을 보여라.

(3) 두 벡터 $\mathbf{x} = (2, -3, -1),\ \mathbf{y} = (5, 1, 3)$에 대하여 $\mathbf{x}$ 위로의 $\mathbf{y}$의 정사영(vector projection) $\mathrm{proj}_{\mathbf{x}}\mathbf{y}$와 정사영의 크기(scalar projection) $\mathrm{comp}_{\mathbf{x}}\mathbf{y}$ 및 $\mathbf{x}$에 수직인 $\mathbf{y}$의 벡터성분 $\mathbf{w}$를 구하여라.

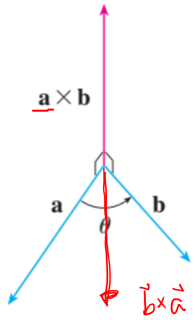
두 벡터 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$의 **외적(cross(outer) product)**은

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1),\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

로 정의한다.



외적 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$에 각각 수직이다.

외적 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$의 방향은 **오른손나사법칙**을 따른다.

벡터 $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$의 방향은 벡터 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$의 방향과 반대가 된다. 실제로, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$이다. 즉, 외적은 교환법칙이 성립하지 않는다.

$$(1, -1, 2) \times (2, 1, -1) = (-1, 5, 3)$$

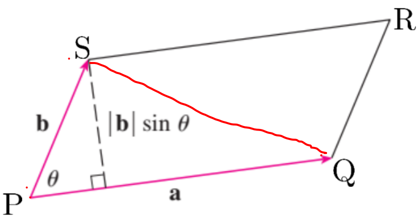
$$(2, 1, -1) \times (1, -1, 2) = (1, -5, -3)$$

벡터 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$의 길이 $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$는 다음과 같이 유도된다. 여기서 θ는 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 사이각이다.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\theta \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1-\cos^2\theta) \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

체크

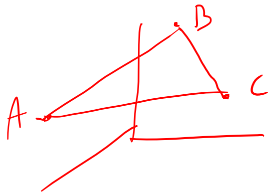
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$



벡터 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$의 길이 $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$는 시점이 일치하는 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$로 만들어지는 **평행사변형 PQRS의 넓이**를 의미한다.

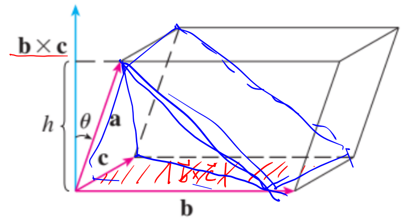
또한 **삼각형 PQS의 넓이**는 $\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$이다.

꼭짓점 $P(1,1,0)$, $Q(1,0,1)$, $R(0,1,1)$로 이루어진 삼각형의 넓이를 구하여라. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



$A(3,2,1)$
$B(-3,1,-2)$
$C(1,1,2)$

시점이 일치하는 세 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$로 만들어지는 **평행육면체의 부피**는



$$|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$$

로 주어진다. 이것은 세 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$의 순서를 바꾸어도 부피는 같다.

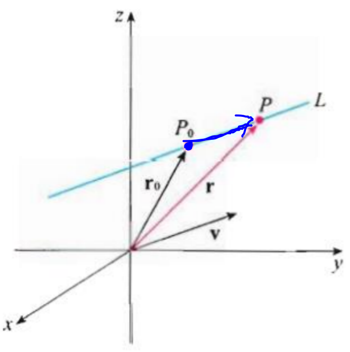
따라서 공간에 주어진 **네 점을 꼭짓점으로 갖는 사면체의 부피**도 구할 수 있다. 평행육면체의 부피에 $\frac{1}{6}$을 곱하면 된다. 또한 **샌드위치의 부피**는 평행육면체의 부피에 $\frac{1}{2}$을 곱하면 된다.

네 점 $O(0,0,0)$, $P(3,2,-1)$, $Q(-2,5,1)$, $R(2,1,5)$을 꼭짓점들로 가지는 사면체의 부피를 구하여라. 18

$$\left|\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR})\right| = 108$$

$$\frac{108}{6} = 18$$

점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$을 지나고 벡터 $\mathbf{v} = (a, b, c)$에 평행한 직선 L의 방정식을 구해 보자.



그림과 같이 직선 L 위의 점 $P(x, y, z)$를 잡자.

$$\overrightarrow{P_0P} // \mathbf{v}$$

$$\vec{r} - \vec{r_0} = \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v} \ (t \in \mathbb{R})$$

점 P_0와 P의 위치벡터를 각각 $\mathbf{r}_0$와 $\mathbf{r}$이라 하면

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$ **벡터방정식(vector equation)**

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

t: 매개변수

$$L : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$ **매개변수방정식(parametric equations)**

$$\frac{2x-4}{3} = \frac{6y-1}{5} = \frac{z+1}{7}$$

$$\frac{1x-2}{\frac{3}{2}} = \frac{1y-\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1z+1}{7}$$

* $$\frac{1x - x_0}{a} = \frac{1y - y_0}{b} = \frac{1z - z_0}{c} (= t) \ (abc \neq 0)$$

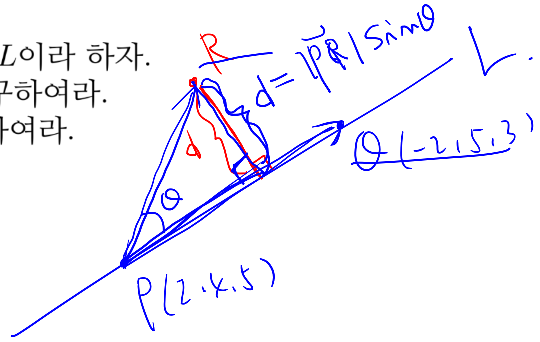
대칭방정식(symmetric equation)

$(2, \frac{1}{6}, -1)$

$(\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, 7) = \vec{v}$ 방향벡터

두 점 $P(2,4,5)$와 $Q(-2,5,3)$을 지나는 직선을 L이라 하자.
(1) 직선 L의 매개변수방정식과 대칭방정식을 구하여라.
(2) 점 $R(1,1,1)$에서 직선 L 사이의 거리를 구하여라.

과제



지나는 점 $P(2,4,5)$

평행인 벡터 $\vec{PQ} = (-2-2,\ 5-4,\ 3-5)$
$= (-4,\ 1,\ -2)$

$$\begin{cases} x = 2 + (-4)t \\ y = 4 + (1)t \\ z = 5 + (-2)t \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{-2}$$

거서 약분

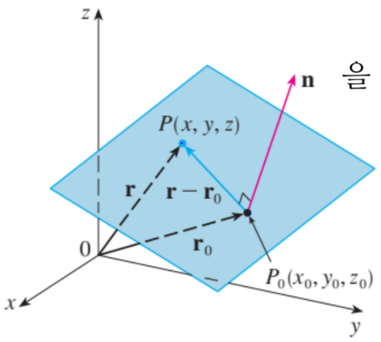
$$d = |\vec{PR}| \sin\theta = \frac{\boxed{|\vec{PQ}||\vec{PR}|\sin\theta}}{|\vec{PQ}|}$$

$$= \frac{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|}{|\vec{PQ}|}$$

$3x-2y+5z=4$
$\mathbb{R}^3$ 에서 평면

공간에서 한 평면 M은 그 평면 위의 한 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$과 M에 수직인 법선벡터 $\mathbf{n} = (a, b, c)$에 의해 결정된다. 평면 M상의 임의의 점 $P(x, y, z)$에 대하여 두 벡터 $\mathbf{n}$과 $\overrightarrow{P_0P}$는 수직(즉, $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$)이다. $\mathbf{r}$과 $\mathbf{r}_0$을 각각 점 P와 P_0의 위치벡터라 하면, $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$이다. 따라서 평면 M의 **벡터방정식(vector equation)**

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$



을 얻게 된다.

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\boxed{ax + by + cz = d}, \quad (d = ax_0 + by_0 + cz_0)$$

스칼라방정식(scalar equation)

(1) 세 점 $A(0, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.
$3x + 2y + 6z = 6$

(2) 점 $S(1, 1, 3)$에서 평면 $3x + 2y + 6z = 6$까지의 거리를 구하여라. $\boxed{\frac{17}{7}}$

과제