미적분학(calculus)은 **적분(integral)**을 공부하기 위한 분야라고 해도 될만큼 적분이 중요하다.

적분 이론을 전개하는 데는 몇 가지 방법이 있다. 그 중 가장 엄밀한 방법은, **리만적분(Riemann integral)**을 먼저 소개한 후 이를 바탕으로 적분이론을 전개해 나가는 것이다. ϵ-δ와 실수의 완비성 등 상당한 수학적 지식과 사고력이 있어야 한다.

두 번째 방법은, **구분구적법**을 먼저 소개하고 적분과 넓이를 구분구적법으로 정의한 후 적분 이론을 전개해 나가는 것이다. 이 방법은 적분을 극한으로 정의해야 하기 때문에 여전히 까다로운 이론이 바탕이 된다.

세 번째 방법은, 적분을 아예 **넓이(area)**로 정의하는 것이다. 이 방법의 단점은 넓이가 무엇인지를 정의하지 않고 직관으로 받아들이는 것이다. 하지만 이 방법은 적분의 정의가 단순하고, 적분 이론을 깔끔하게 전개할 수 있게 해주는 장점이 있다.

정적분의 정의 및 성질

닫힌 구간 $[a, b]$에서 정의된 유계함수 $y = f(x)$가 있다. 자연수 n에 대해 닫힌 구간 $[a, b]$의 균등 분할점 x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$를

$$x_i = a + i \triangle x, \quad \triangle x = \frac{b-a}{n}$$

으로 두고, 구간 $[a, b]$를 다음과 같이 소구간의 합집합으로 나타내자.

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

각각의 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 **표본점(sample point)** x_i^*를 아무거나 선택하자. 이때 구간 $[a, b]$의 균등 분할점과 표본점으로부터 얻어진 합

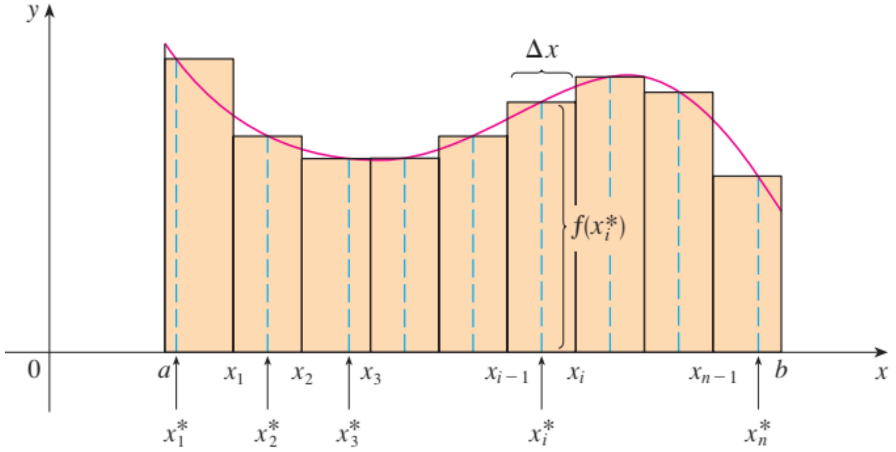
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x$$

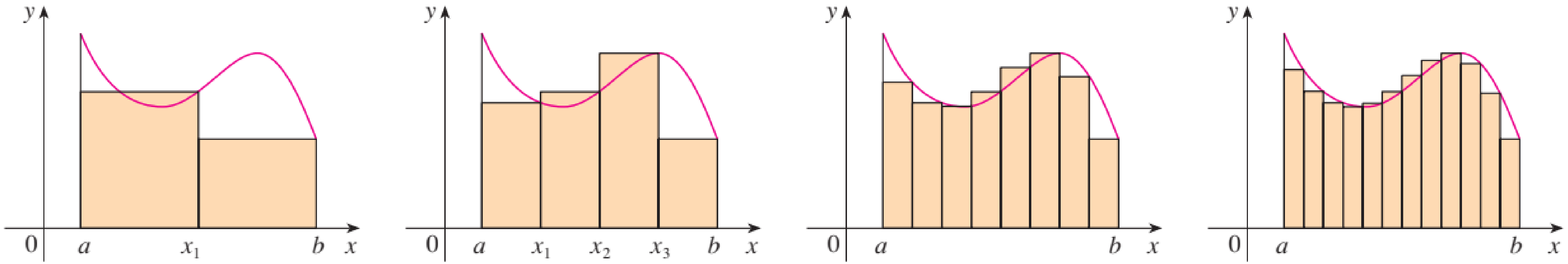
를 $[a, b]$에서 f의 **리만합(Riemann sum)**이라 한다. 자연수 n을 선택하고 표본점 x_i^*를 선택하는 방식에 따라 **다양한 리만합**을 얻을 수 있다.

어떤 상수 $M > 0$이 존재하여
모든 $x \in [a, b]$에 대해

$$|f(x)| \leq M$$

이면 f를 **유계(bounded)**라 한다.





(a) $n=2$ (b) $n=4$ (c) $n=8$ (d) $n=12$

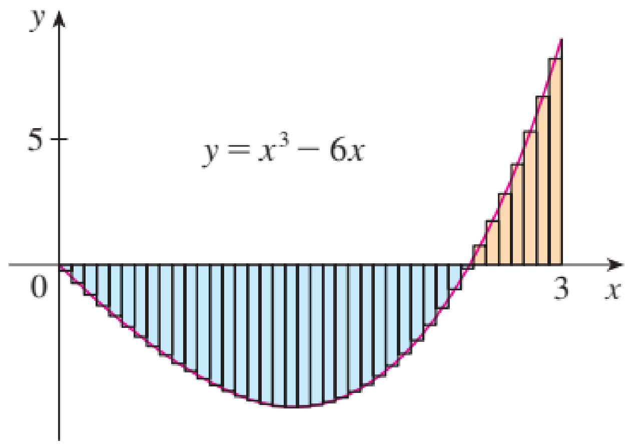
유계함수 f가 $[a, b]$에서 연속이거나, 불연속점의 개수가 유한이면 $n \to \infty$일 때 소구간에서 **표본점을 선택하는 방법에 상관없이** 리만합이 동일한 수로 수렴한다는 사실이 알려져 있다.

정적분(리만적분)

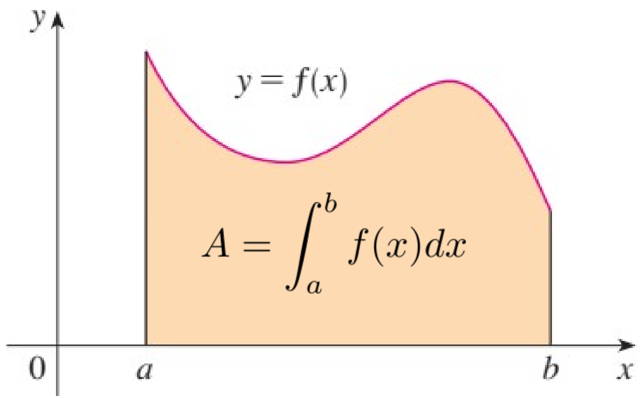
구간 $[a, b]$에서 유계함수 f가 연속이거나, 불연속점의 개수가 유한하다고 하자. 이때 리만합의 극한

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x \quad \left(\triangle x = \frac{b-a}{n}\right)$$

을 구간 $[a, b]$에서 f의 **정적분(definite integral)** 혹은 **리만적분(Riemann integral)**으로 정의한다. 그리고 이 극한이 존재할 때 f는 $[a, b]$에서 **적분가능**하다고 한다.



정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 기하적인 의미는
곡선 $y = f(x)$,
두 직선 $x = a,\ x = b$,
x-축$(y = 0)$
으로 둘러싸인 **영역의 크기**를 의미한다.



구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq 0$일 때 $\int_a^b f(x)dx$는

$y = f(x),\ x = a,\ x = b,\ y = 0(x$축$)$

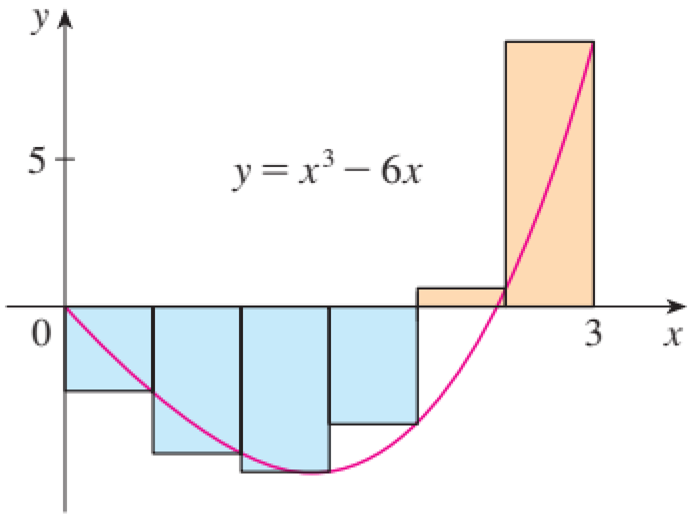
으로 둘러싸인 영역의 **넓이(area)**와 같다.

리만합은 정적분의 **근삿값**이다.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x$$

n이 커질수록 더 좋은 근삿값을 얻을 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x \quad \left(\triangle x = \frac{b-a}{n}\right)$$



(예제 1) 구간 $[0,3]$을 n등분하여 표본점 x_i^*를
(1) 소구간의 왼쪽 점
(2) 소구간의 중간 점
(3) 소구간의 오른쪽 점
으로 잡았을 때, 리만합과 정적분을 각각 구해보자.

$\triangle x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$
(1) $x_i^* = x_{i-1} = 0 + (i-1)\triangle x = \frac{3}{n}(i-1)$
(2) $x_i^* = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = \frac{\frac{3(i-1)}{n}+\frac{3i}{n}}{2} = \frac{3}{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)$
(3) $x_i^* = x_i = \frac{3}{n}i$

(3): 연필로 계산한 결과

$$\begin{aligned}
\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{27}{n^3}i^3 - \frac{18}{n}i\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6.75
\end{aligned}$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a), \quad \text{where } c \text{ is any constant}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{where } c \text{ is any constant}$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

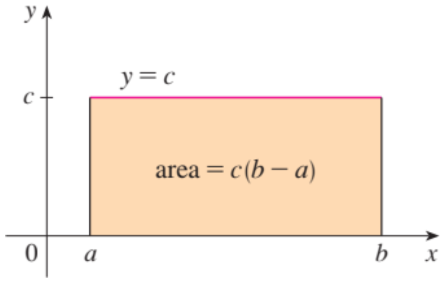
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

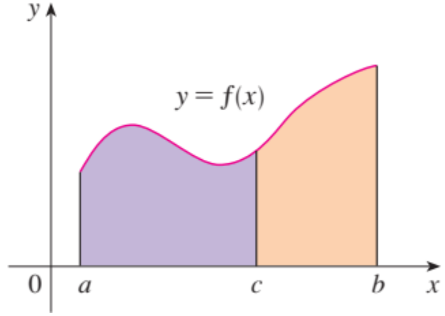
If $f(x) \geqslant 0$ for $a \leqslant x \leqslant b$, then $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

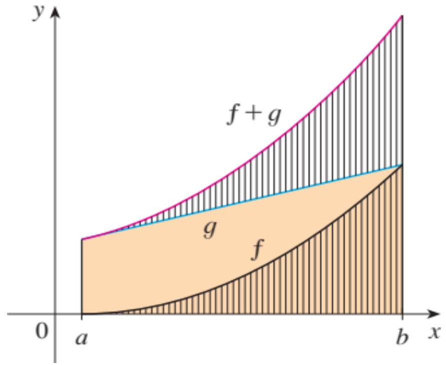
If $f(x) \geqslant g(x)$ for $a \leqslant x \leqslant b$, then $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

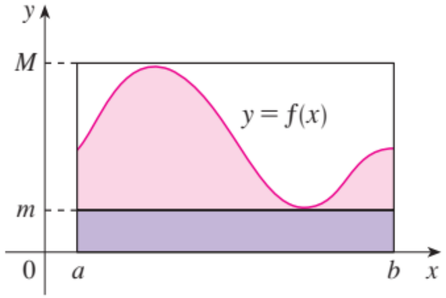
If $m \leqslant f(x) \leqslant M$ for $a \leqslant x \leqslant b$, then

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$







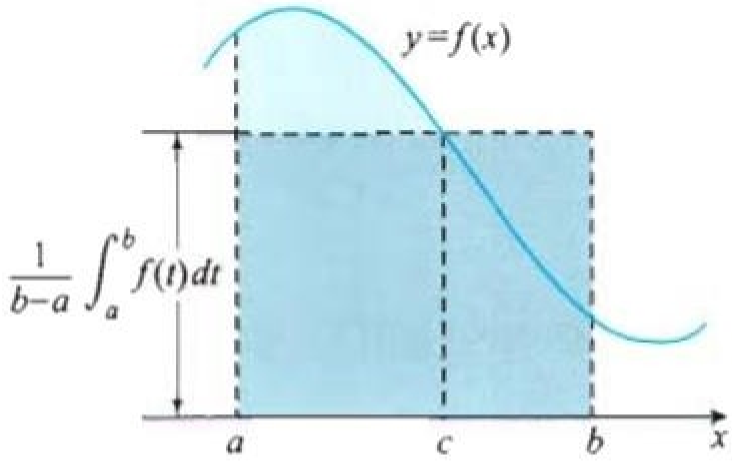


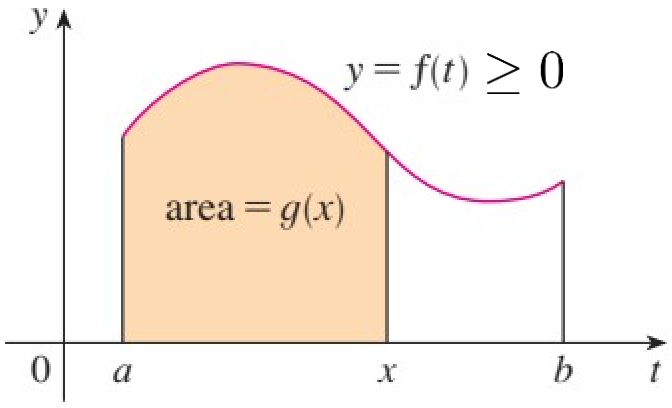
적분의 평균값 정리

구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 f에 대해서

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c)$$

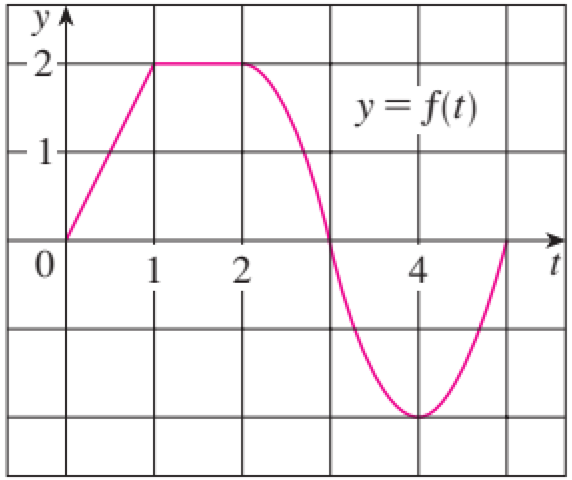
를 만족하는 점 $c \in [a,b]$가 존재한다.

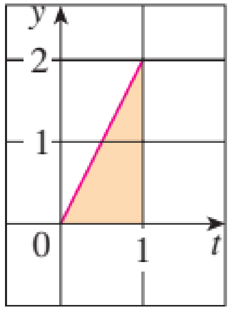




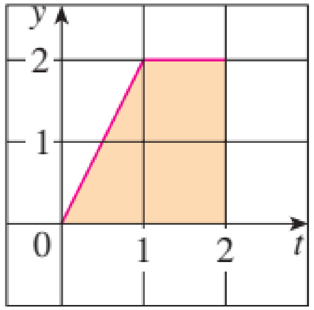
$$\boxed{g(x) = \int_a^x f(t)\, dt}$$

is a **function of** x.

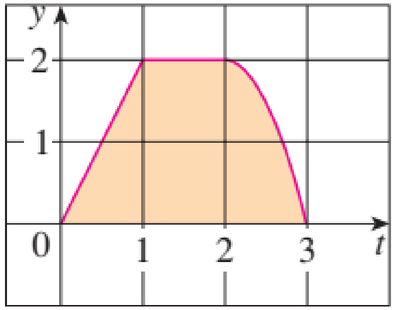




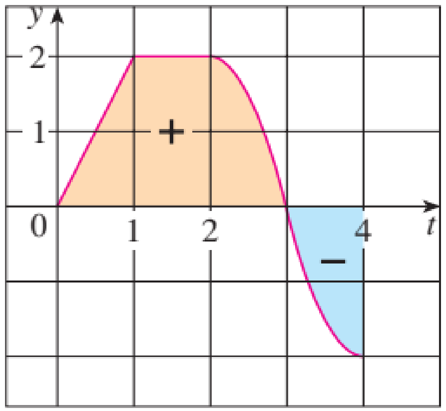
$g(1) = 1$



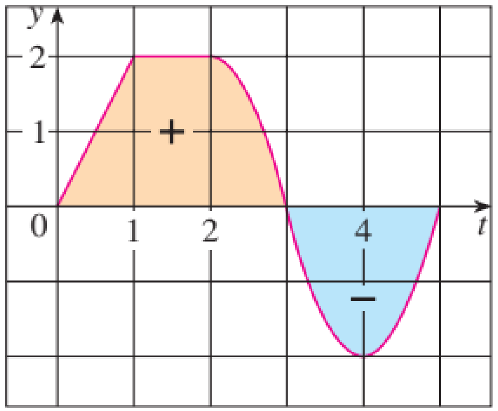
$g(2) = 3$



$g(3) \approx 4.3$



$g(4) \approx 3$



$g(5) \approx 1.7$

미적분학의 기본정리(The Fundamental Theorem of Calculus)
유계함수 f가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속함수이면

$$(1) \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$(2) \quad \int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

여기서 F는 f의 역도함수(antiderivative)이다. 즉 $F' = f$.

(정의) 어떤 구간에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 이 구간의 모든 x에 관하여

$$F'(x) = f(x)$$

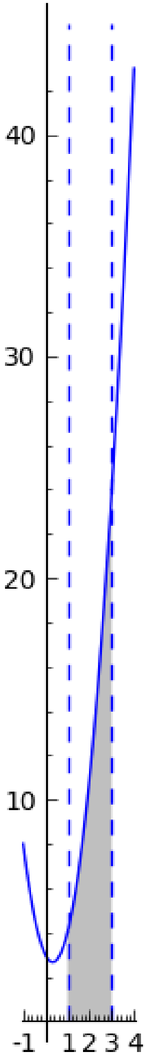
를 만족하는 함수 $F(x)$가 존재할 때 $F(x)$를 $f(x)$의 **원시함수** 또는 **부정적분(indefinite integral)**이라고 한다. $f(x)$가 주어졌을 때 그 부정적분 $F(x)$를 구하는 것을 $f(x)$를 **적분한다(integrate)**고 한다. $f(x)$의 부정적분을 $\int f(x)dx$로 나타내고 $\int$를 적분기호, $f(x)$를 피적분함수, dx를 적분변수라 한다. $F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분이면

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C\text{는 임의의 상수})$$

이다. 여기서 C를 적분상수라 한다. 이때, **미적분학의 기본정리(the fundamental theorem of calculus)**로부터 정적분은 다음과 같이 계산한다.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

```
var('x,t');
f(x)=3*x^2-2*x+3
p1=plot(f(x),(x,-1,1))+plot(f(x),(x,1,3), fill="axis")+plot(f(x),(x,3,4))
p2=parametric_plot((1,t),(t,0,45),linestyle='--')
p3=parametric_plot((3,t),(t,0,45),linestyle='--')
show(p1+p2+p3)
print(integral(f(x),x,1,3))
```

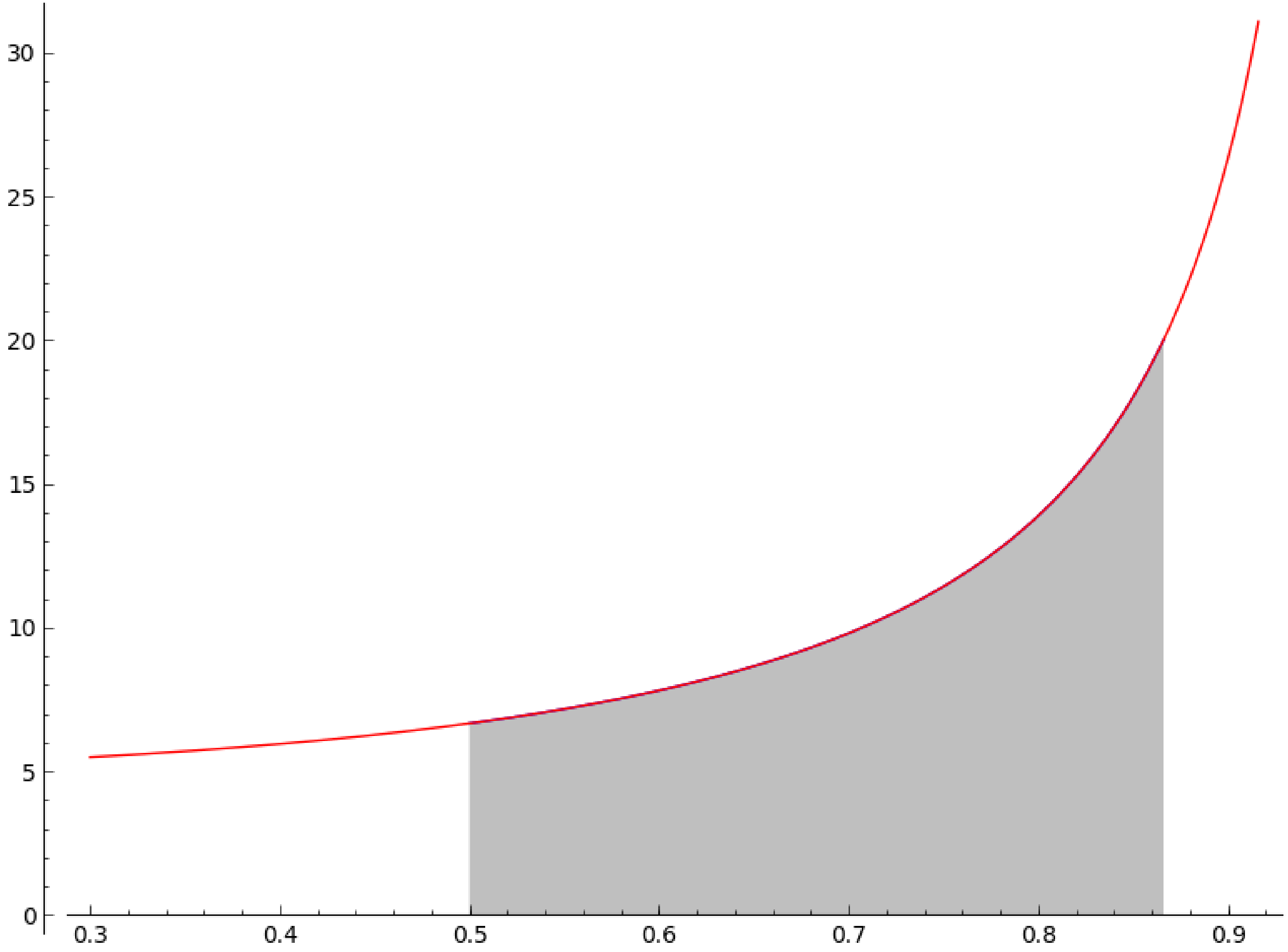


24

(예제 2)

적분 $\int_1^3 (3x^2 - 2x + 3)dx$ 를 구하여라.

```
f(x) = 5/(1 - x^2)
P1 = plot(f(x), 0.5, sqrt(3)/2, fill = "axis")
P2 = plot(f(x), 0.3, sqrt(3)/2 + 0.05, color = 'red')
show(P1 + P2)
print(integral(f(x), x, 1/2, sqrt(3)/2).simplify_full())
print((integral(f(x), x, 1/2, sqrt(3)/2).simplify_full()).n(digits=5))
```




```
-5/2*log(2) - 5/2*log(3/2) + 5/2*log(1/2*sqrt(3) + 1) -
5/2*log(-1/2*sqrt(3) + 1)
3.8382
```

(예제 3)

적분 $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{5}{1-x^2}dx$ 의 근삿값을

유효숫자 5자리로 구하여라.

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

```
f=sin(x)^2
f.integral(x,0,pi)
```

1/2*pi

```
integral(sin(x)^2,x,0,pi)
```

1/2*pi

수치적분

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

```
f=sin(x)/x
integral(f,x);integral_numerical(sin(x)/x, 0, 1)
```

-1/2*I*Ei(I*x) + 1/2*I*Ei(-I*x)
(0.9460830703671829, 1.0503632079297086e-14)

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

```
g = integrate(exp(-x**2), x, 0, infinity)
g, g.n()
```

(1/2*sqrt(pi), 0.886226925452758)

```
approx = integral_numerical(exp(-x**2), 0, infinity)
approx
```

(0.886226925452757, 1.7147744320162414e-08)

```
approx[0]-g.n()
```

-8.88178419700125e-16

[과제 1] $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$에 대하여 구간 $[0, \pi]$을 $n = 6$등분하여 x_i^*를 소구간의 중간점으로 잡았을 때, 리만합을 구하여라.

[과제 2] 다음 적분에 대해, 구하는 영역을 표시하고 그 영역의 넓이의 근삿값을 유효숫자 8자리로 구하여라.

$$\int_e^{3e} \ln x dx$$

[과제 3] 다음 부정적분과 정적분을 구하여라. (그림은 그리지 마세요.)

(1) $\int \sin x dx,$ $\qquad \int_0^{\pi/2} \sin x dx$

(2) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ $\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

(3) $\int e^{-x^2} dx$ $\qquad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ $\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$