Cours 3: preuves en logique du premier ordre en Coq

David Delahaye

Polytech' Montpellier
David.Delahaye@lirmm.fr

AIGLE M1

Outil d'aide à la preuve Coq

Caractéristiques

- Développement par l'équipe Inria πr^2 ;
- Preuve de programmes fonctionnels ;
- Théorie des types (calcul des constructions inductives) ;
- Isomorphisme de Curry-Howard (objets preuves).

Implantation

- Premières versions milieu des années 80 ;
- Implantation actuelle en OCaml ;
- Preuve interactive (peu d'automatisation) ;
- En ligne de commande ou avec l'interface graphique CoqIDE.

Pour les séances de TP

- Installer Coq : `https://coq.inria.fr/`.

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Implication :

```
Coq < Parameter A : Prop.
A is assumed

Coq < Goal A -> A.
1 subgoal

  ============================
   A -> A
```

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Implication :

```
Coq < intro.
1 subgoal

  H : A
  ============================
   A
```

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Implication :

```
Coq < assumption.
No more subgoals.

Coq < Save my_thm.
intro.
assumption.
my_thm is defined
```

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Application (modus ponens) :

```
Coq < Parameters A B : Prop.
A is assumed
B is assumed

Coq < Goal (A -> B) -> A -> B.
1 subgoal

  ============================
   (A -> B) -> A -> B
```

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Application (modus ponens) :

```
Coq < intros.
1 subgoal

  H : A -> B
  H0 : A
  ============================
   B

Coq < apply (H H0).
No more subgoals.
```

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Connecteurs $\wedge$ et $\vee$:

```
Coq < Parameters A B : Prop.
A is assumed
B is assumed

Coq < Goal A /\ B -> A.
1 subgoal

  ============================
   A /\ B -> A
```

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Connecteurs $\wedge$ et $\vee$:

```
Coq < intro.
1 subgoal

  H : A /\ B
  ============================
   A
```

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Connecteurs $\wedge$ et $\vee$:

```
Coq < elim H.
1 subgoal

  H : A /\ B
  ============================
   A -> B -> A
```

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Connecteurs $\wedge$ et $\vee$:

```
Coq < intros.
1 subgoal

  H : A /\ B
  H0 : A
  H1 : B
  ============================
   A

Coq < assumption.
No more subgoals.
```

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Connecteurs $\wedge$ et $\vee$:

```
Coq < Parameters A B : Prop.
A is assumed
B is assumed

Coq < Goal A -> A \/ B.
1 subgoal

  ============================
   A -> A \/ B
```

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Connecteurs $\wedge$ et $\vee$:

```
Coq < intro.
1 subgoal

  H : A
  ============================
   A \/ B
```

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Connecteurs $\wedge$ et $\vee$:

```
Coq < left.
1 subgoal

  H : A
  ============================
   A

Coq < assumption.
No more subgoals.
```

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Connecteurs $\neg$:

```
Coq < Parameters A B : Prop.
A is assumed
B is assumed

Coq < Goal A -> ~A -> False.
1 subgoal

  ============================
   A -> ~ A -> False
```

Logique propositionnelle

Exemples de preuves

- Connecteurs $\neg$:

```
Coq < intros.
1 subgoal

  H : A
  H0 : ~ A
  ============================
   False

Coq < apply (H0 H).
No more subgoals.
```

Exercices

Propositions à démontrer

1. $A \to B \to A$
2. $(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$
3. $A \wedge B \to B$
4. $B \to A \vee B$
5. $(A \vee B) \to (A \to C) \to (B \to C) \to C$
6. $A \to \perp \to \neg A$
7. $\perp \to A$
8. $(A \Leftrightarrow B) \to A \to B$
9. $(A \Leftrightarrow B) \to B \to A$
10. $(A \to B) \to (B \to A) \to (A \Leftrightarrow B)$

Logique du premier ordre

Exemples de preuves

- Quantificateur ∀ :

```
Coq < Parameter E : Set.
E is assumed

Coq < Parameter P : E -> Prop.
P is assumed

Coq < Goal forall x : E, (P x) -> (P x).
1 subgoal

  ============================
   forall x : E, P x -> P x
```

Logique du premier ordre

Exemples de preuves

- Quantificateur ∀ :

```
Coq < intros.
1 subgoal

  x : E
  H : P x
  ============================
   P x

Coq < assumption.
No more subgoals.
```

Logique du premier ordre

Exemples de preuves

- Quantificateur $\forall$:

```
Coq < Parameter E : Set.
E is assumed

Coq < Parameter a : E.
a is assumed

Coq < Parameter P : E -> Prop.
P is assumed

Coq < Goal (forall x : E, (P x)) -> (P a).
1 subgoal

  ============================
   (forall x : E, P x) -> P a
```

Logique du premier ordre

Exemples de preuves

- Quantificateur $\forall$:

```
Coq < intro.
1 subgoal

  H : forall x : E, P x
  ============================
   P a

Coq < apply H.
No more subgoals.
```

Logique du premier ordre

Exemples de preuves

- Quantificateur $\exists$:

```
Coq < Parameter E : Set.
E is assumed

Coq < Parameter a : E.
a is assumed

Coq < Parameter P : E -> Prop.
P is assumed

Coq < Goal (P a) -> exists x : E, (P x).
1 subgoal

  ============================
   P a -> exists x : E, P x
```

Logique du premier ordre

Exemples de preuves

- Quantificateur $\exists$:

```
Coq < intro.
1 subgoal

  H : P a
  ============================
   exists x : E, P x
```

Logique du premier ordre

Exemples de preuves

- Quantificateur ∃ :

```
Coq < exists a.
1 subgoal

  H : P a
  ============================
   P a

Coq < assumption.
No more subgoals.
```

Logique du premier ordre

Exemples de preuves

- Quantificateur $\exists$:

```
Coq < Parameter E : Set.
E is assumed

Coq < Parameter a : E.
a is assumed

Coq < Parameter P : E -> Prop.
P is assumed

Coq < Goal (exists x : E, ~(P x)) ->
           ~(forall x : E, (P x)).
1 subgoal

  ============================
   (exists x : E, ~ P x) -> ~ (forall x : E, P x)
```

Logique du premier ordre

Exemples de preuves

- Quantificateur $\exists$:

```
Coq < intros.
1 subgoal

  H : exists x : E, ~ P x
  ============================
   ~ (forall x : E, P x)

Coq < red.
1 subgoal

  H : exists x : E, ~ P x
  ============================
   (forall x : E, P x) -> False
```

Logique du premier ordre

Exemples de preuves

- Quantificateur $\exists$:

```
Coq < intro.
1 subgoal

  H : exists x : E, ~ P x
  H0 : forall x : E, P x
  ============================
   False
```

Logique du premier ordre

Exemples de preuves

- Quantificateur $\exists$:

```
Coq < elim H.
1 subgoal

  H : exists x : E, ~ P x
  H0 : forall x : E, P x
  ============================
   forall x : E, ~ P x -> False
```

Logique du premier ordre

Exemples de preuves

- Quantificateur $\exists$:

```
Coq < intros.
1 subgoal

  H : exists x : E, ~ P x
  H0 : forall x : E, P x
  x : E
  H1 : ~ P x
  ============================
   False
```

Logique du premier ordre

Exemples de preuves

- Quantificateur $\exists$:

```
Coq < apply H1.
1 subgoal

  H : exists x : E, ~ P x
  H0 : forall x : E, P x
  x : E
  H1 : ~ P x
  ============================
   P x

Coq < apply H0.
No more subgoals.
```

Exercices

Propositions à démontrer

1. $\forall x.P(x) \rightarrow \exists y.P(y) \vee Q(y)$
2. $(\exists x.P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$
3. $(\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x)) \rightarrow \forall x.P(x) \wedge Q(x)$
4. $(\forall x.P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x))$
5. $(\forall x.\neg P(x)) \rightarrow \neg(\exists x.P(x))$
6. $\neg(\forall x.P(x)) \rightarrow \exists x.\neg P(x)$