

不同阻尼系数下杜芬方程的稳定瞬变过程分析

高 建¹, 国忠金², 黄伟凡¹

(1. 宜春学院 数学与计算机科学学院, 江西 宜春 336000;
2. 泰山学院 数学与系统科学系, 山东 泰安 271021)

摘 要: 文中发展提出了一种求解非线性系统周期响应的新方法: 遗传迭代法。并利用其求解了杜芬方程稳
定状态下的上调和近似解, 将此近似解作为其稳定瞬变过程动态方程的初值。研究了在不同阻尼系数下杜芬方程
趋于稳定的瞬变过程。
关键词: 杜芬方程; 遗传—牛顿法; 调和平衡法
中图分类号: 019 **文献代码:** A **文章编号:** 1671—380X (2008) 06—0023—03

An Analysis of Stable Transient Process About Duffing Oscillator at the Different Damping Coefficients
GAO Jian¹, GUO Zhong-jin², HUANG Wei-fan¹
(1. Department of Math & Computer Science College of Yichun Yichun 336000, China;
2. Department of Math & Sys College of Tai Shan Tai An 271021, China)

Abstract: The stable super-harmonic approximate solutions about Duffing oscillator are obtained by using both genetic algorithm and
Newton iteration. And these approximate solutions are as the initial values of stable dynamic system, the stable transient process of the
oscillator is studied at the different damping coefficients.
Key words: Duffing oscillator; Genetic—Newton algorithm; Harmonic balance method

0 引言

在动态方程中, 去获得方程的解析解甚至高阶近似解
将是非常困难的。许多作者^[1-4]已利用调和平衡法分析了
含三次刚性的杜芬振子方程。此方法假定稳定状态下的响
应为简单的截断 Fourier 级数, A·Y·T·Leung^[4]指出了非线性
分析中截断 Fourier 级数所取的项数可定性的改变响应曲
线的性质。但随着项数的增加其计算将变得更加复杂。当
方程的阻尼系数比较小时, Van Dooren^[5]利用 Garlekin 方
法计算了杜芬方程稳定状态下的高阶对称周期解。随着组
尼系数的增大, 上述 Garlekin 方法将失效。在这儿, 首先
利用调和平衡法将稳定状态下的解设为高阶截断 Fourier 级
数并获得非线性代数方程组。象许多求解非线性代数方程
的方法一样, 牛顿迭代法的收敛性与工棕性对其初值是敏
感依赖的。遗传算法首先被应用去给出有效的初值, 并作
用于牛顿迭代法去求解了方程的高阶近似解。然后, 在不
同组尼系数下, 将此近似解作为振幅参数随时间变化的动
态方程的初值去研究了杜芬方程趋于稳定的瞬变过程。

1 调和平衡近似解

对于无阻尼的杜芬方程易获得其解析解。但现实系统
总存在阻尼项, 下将研究方程

$$x'' + \alpha x' + \beta x + \gamma x^3 = q \cos(\omega t) \tag{1}$$

其中, α 为粘性阻尼系数, β 为线性刚性系数, γ 为非
线性刚性系数, q 为外部驱动力的振幅, ω 为驱动频率,
() ' = d () / d t 当 $\alpha \neq 0$ 时, 方程 (1) 没有解析解 (见
文献 [6])。因此, 定性与定量解的性质总是以其近似解的

性质给出。在这儿, 利用调和平衡法去求解方程 (1) 的上
调和近似解, 且稳定状态响应可表达为:

$$x = R + u \cos(\omega t) + v \sin(\omega t) + c \cos(3\omega t) + d \sin(3\omega t) \tag{2}$$

将 (2) 代入 (1) 并忽略其高阶项, 则可获得关于系数的
5 次代数方程组:

$$\begin{aligned} &-\frac{3}{4} \gamma u^2 v - u \omega^2 - \frac{3}{2} \gamma u v d - \frac{3}{2} \gamma u c^2 - \frac{3}{2} \gamma u d^2 - 3 \gamma R^2 u - \frac{3}{4} \\ &\gamma u^3 - \frac{3}{4} \gamma u^2 c + \frac{3}{4} \gamma v^2 c + \beta u + \alpha \omega v = q \\ &-\frac{3}{4} \gamma u^2 v - v \omega^2 + \frac{3}{2} \gamma u v c - \frac{3}{2} \gamma v d^2 - \frac{3}{2} \gamma v c^2 - 3 \gamma R^2 v - \frac{3}{4} \gamma v^3 \\ &-\frac{3}{4} \gamma u^2 d + \frac{3}{4} \gamma v^2 d + \beta v + \alpha \omega u = 0 \\ &-9 \omega^2 + \beta c - \frac{3}{2} \gamma u^2 c - \frac{3}{2} \gamma v^2 c - 3 \gamma R^2 c + 3 \alpha d \omega + \frac{3}{4} \gamma u v^2 - \frac{1}{4} \\ &\gamma u^3 - \frac{3}{4} \gamma c^3 - \frac{3}{4} \gamma c d^2 = 0 \\ &-9 d \omega^2 + \beta d - \frac{3}{2} \gamma u^2 d - \frac{3}{2} \gamma v^2 d - 3 \gamma R^2 d + 3 \alpha \omega + \frac{3}{4} \gamma u^2 v - \\ &\frac{1}{4} \gamma v^3 - \frac{3}{4} \gamma c^2 d - \frac{3}{4} \gamma d^3 = 0 \\ &\beta R - \gamma R^3 - \frac{3}{2} \gamma R (u^2 + v^2 + c^2 + d^2) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

对于非线性代数方程组 (3) 直接去求解将是非常困难。
一般, 可应用牛顿迭代法去求解非线性代数方程组, 然而, 牛
顿迭代不总是收敛的, 除非其初值恰好选在解的收敛临域
内。许多文章中, 他们假定方程有小的阻尼系数 α , 并将初
值设在无阻尼时解析解的临域内。而本文的目的是求解不

①收稿日期: 2008—10—11
基金项目: 泰山学院科研资助立项项目, 项目编号: Y06—02—03。
作者简介: 高建 (1982—), 男, 山东济宁人, 硕士, 研究方向: 概率论与数理统计。

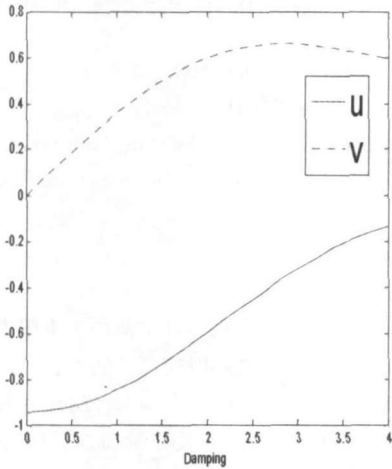
同阻尼系数下的稳定状态响应及其分析其稳定瞬变过程。因此,上述方法将失效。下面,我们引进遗传算法去搜索其最优解并作为牛顿迭代的初值。

遗传算法是一种通用搜索算法,它基于自然选择机制和自然遗传规律来模拟自然界的进化过程,从而演化出解决问题的最优方法。其优势在于具有较好的全局搜索性能,很强的鲁棒性,并易于并行化。因此,对一般非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

可通过完成平方或取绝对值将非线性代数方程组化为一主函数的最优化问题。

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min [f_1^2(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2^2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots$$



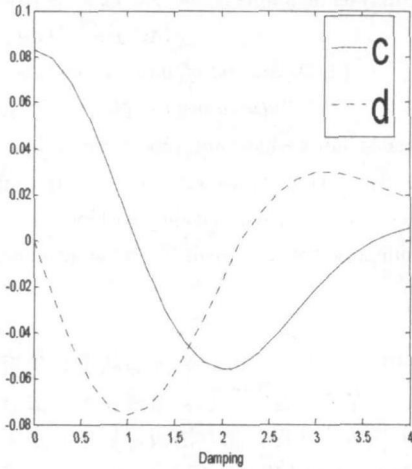
(a)

$$+ f_n^2(x_1, x_2, \dots, x_n)] \text{ 或 } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min [|f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)| + |f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)| + \dots + |f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)|]$$

然后利用遗传算法去最小化主函数并搜索其近似值,最后将此近似值作为牛顿迭代的初值。算法进程为:

杜芬方程 (1)	Fourier展开与调和平衡法	5次代数方程组 (3)
最小化主函数	遗传算法	牛顿迭代
最优问题	满意解	近似解

对 $\omega=0.8, \beta=1, \gamma=-4, q=2, 0 \leq \alpha \leq 4$, 通过此方法可获得其稳定状态解。图 (1) 显示了稳定状态下方程的振幅阻尼曲线



(b)

图 1 近似解 (2) 的振幅阻尼曲线, $\omega=0.8, \beta=1, \gamma=-4, q=2$

由图 1 (a), (b) 可看出主调和项随着阻尼系数的增大, 其对应振幅值增大。(其中 $R \approx 0$)

2 瞬变过程分析

对于上调和近似解 (2), 下面将振幅参数改为随时间变化的时间振幅参数, 即: $x(t) = R(t) + u(t) \cos(\omega t) + v(t) \sin(\omega t) + c(t) \cos(3\omega t) + d(t) \sin(3\omega t)$ (4)

将 (4) 代入 (1), 则可获得关于时间振幅参数的非线性微分方程组

$$\begin{aligned} u'' + 2\omega v' + \alpha u' - \frac{3}{4}\gamma u v^2 - u\omega^2 - \frac{3}{2}\gamma u v d - \frac{3}{2}\gamma u c^2 - \frac{3}{2}\gamma u d^2 \\ - 3\gamma R^2 u - \frac{3}{4}\gamma u^3 - \frac{3}{4}\gamma u^2 c + \frac{3}{4}\gamma v^2 c + \beta u + \alpha\omega v = q \\ v'' - 2\omega u' + \alpha v' - \frac{3}{4}\gamma u^2 v - v\omega^2 + \frac{3}{2}\gamma u v c - \frac{3}{2}\gamma v d^2 - \frac{3}{2}\gamma v c^2 \\ - 3\gamma R^2 v - \frac{3}{4}\gamma v^3 - \frac{3}{4}\gamma u^2 d + \frac{3}{4}\gamma v^2 d + \beta v + \alpha\omega u = 0 \\ c'' + 6\omega d' + \alpha c' - 9\omega^2 c + \beta c - \frac{3}{2}\gamma u^2 c - \frac{3}{2}\gamma v^2 c - 3\gamma R^2 c + 3\alpha d\omega \\ + \frac{3}{4}\gamma u v^2 - \frac{1}{4}\gamma u^3 - \frac{3}{4}\gamma c^3 - \frac{3}{4}\gamma \alpha d^2 = 0 \\ d'' + 6\omega c' + \alpha d' - 9\omega^2 d + \beta d - \frac{3}{2}\gamma u^2 d - \frac{3}{2}\gamma v^2 d - 3\gamma R^2 d + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\alpha\omega c + \frac{3}{4}\gamma u^2 v - \frac{1}{4}\gamma v^3 - \frac{3}{4}\gamma c^2 d - \frac{3}{4}\gamma d^3 = 0 \\ R'' + \alpha R' + \beta R + \gamma R^3 - \frac{3}{2}\gamma R(u^2 + v^2 + c^2 + d^2) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

对 (5) 的求解, 需要 10 个初值条件 $R(0), u(0), v(0), c(0), d(0), R'(0), u'(0), v'(0), c'(0), d'(0)$ 。下将近似解 (3) 的值作为其初值 $R(0), u(0), v(0), c(0), d(0)$, 其余 5 个初值选为 0 临域内的任意值。并利用这些初值去积分非线性微分方程组 (5), 可获得关于时间的振幅参数曲线。

对 $\alpha=0.03, \alpha=0.3, \alpha=3$, 考虑其响应曲线瞬变过程。当阻尼参数变化时, 时间振幅参数在稳定值附近将出现一些波动, 随着时间的变化, 所有近似解 (4) 的时间振幅参数都将趋于稳定值。当阻尼系数比较大时 ($\alpha=0.03$), 时间振幅参数在短的时间内将趋于其稳定值。而当阻尼系数比较小时 ($\alpha=3$), 时间振幅参数在非常长的时间内才能趋于其稳定值。即: 随着阻尼系数的增大, 时间振幅参数趋于稳定的时间缩短。也就是说, 当阻尼系数比较大时, 前面调和平衡分析中假定的上调和近似解才变得更加精确。图 2, 3, 4 显示了时间振幅参数曲线。其中, $\omega=0.8, \beta=1, \gamma=-4, q=2$

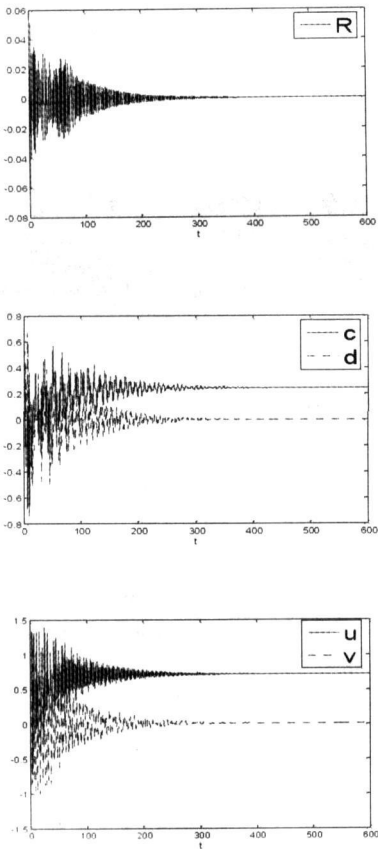


图 2 时间振幅参数瞬变过程曲线, 其中 $\alpha = 0.03$

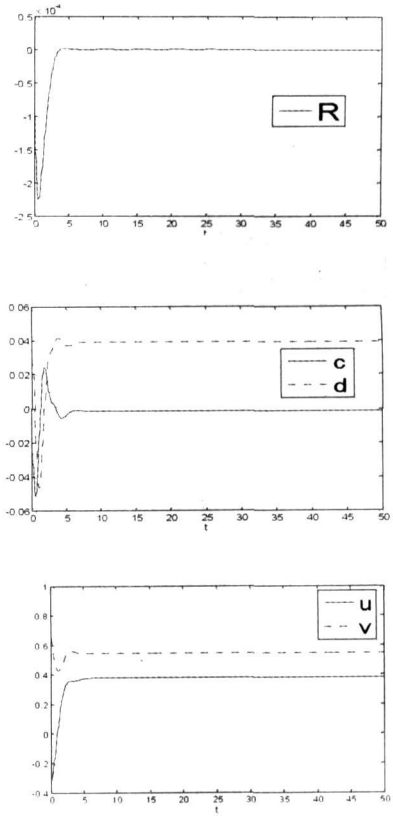


图 4 时间振幅参数瞬变过程曲线, 其中 $\alpha = 3$

3 结论

本文提出了一种求解非线性系统周期响应的新方法: 遗传迭代法。利用其求得非线性杜芬方程稳定状态下的高阶近似解, 通过把这些近似解作为随时间变化的振幅参数微分方程的初值, 分析了不同阻尼系数下调和平衡近似解趋于稳定的时间曲线, 然后得到随着阻尼系数的增大, 调和平衡近似解的稳定响应将变得更加精确。

参考文献:

[1] A HaSSAN· On the periodic and chaotic response of Duffing's oscillator[M]·Ph· D· Thesis Washington State University·1989

[2] R·E· M ickens· Comments on the method of harmonic balance [J]· Journal of sound and Vibration 1984, 94 (3); 456—460

[3] J·G·MARGALLO and J·D BEJARNO· A generalization of the method of harmonic balance [J]· Journal of sound and vibration 1987, 116(2); 591—595

[4] A·Y·T·LEUNG· Letters to the editor: Rigorous studies of a Duffing oscillator [J]· Journal of sound and vibration 1991, 149(1); 147—149

[5] R Van Dooren· On the transition from regular to chaotic behavior in the Duffing oscillator [J]· Journal of sound and vibration 1988, 123(2); 327—339

[6] Meinke P· H· Study of phase—synchronization and trajectory to sub—harmonic vibration [J]·Engineering Springer—Verlag·1992, 41(5); 375—412

图 3 时间振幅参数瞬变过程曲线, 其中 $\alpha = 0.3$