

受迫振动非线性特性的教学拓展

丁红胜¹, 王佳曦¹, 张师平¹, 董军军²

(1. 北京科技大学 数理学院应用物理系, 北京 100083; 2. 北京科技大学 自然科学基础实验中心, 北京 100083)

摘要: 受迫振动在大学物理和大学物理实验中均是重点教学内容, 为了使学生更加深入理解受迫振动的非线性特性, 本文基于波耳共振仪所涉及的非线性因素和实验数据, 对受迫振动方程进行非线性修正, 利用数值分析探讨其非线性特性. 通过引入硬弹簧型杜芬方程, 探讨系统由周期性运动进入混沌状态的演化, 将受迫振动中相对稳定的平衡点与奇异吸引子进行类比, 拓展非线性振动教学内容.

关键词: 受迫振动; 杜芬方程; 数值分析; 混沌;

中图分类号: O 322

文献标识码: A

文章编号: 1000-0712 (2021) 02-0012-06

【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.200335

振动是一种普遍存在于客观世界的物质运动形式, 系统在周期性外力的持续作用下的振动即为受迫振动^[1]. 波耳共振仪是高校物理实验教学中研究受迫振动运动规律较为普遍的仪器, 也是学者探讨较多的实验项目^[2-4]. 实验测量中, 仪器的轴承摩擦和弹簧非线性效应的影响是造成实验数据偏离预期的主要因素. 如果在受迫振动的分析中考虑这两种因素的影响, 则非常有助于学生理解实验原理和结果偏差. 本文基于受迫振动常规实验, 延伸探讨其非线性特性, 通过 Matlab 数值分析的方法来研究杜芬方程的混沌特性, 以此提高学生受迫振动的认知, 并加深对其非线性特性的理解.

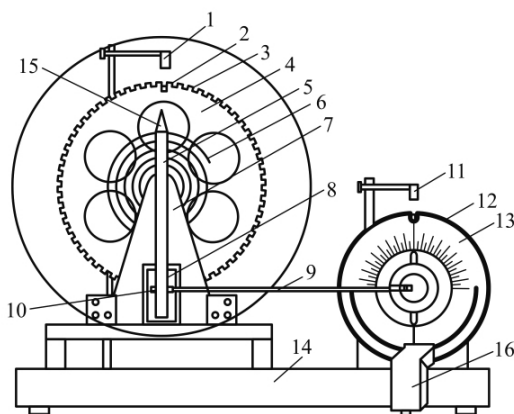
1 受迫振动

1.1 受迫振动方程

波耳共振仪^[5] (如图1所示) 的摆轮可在弹性力矩作用下自由摆动, 若同时加上阻尼力矩和驱动力矩, 摆轮可做受迫振动.

当摆轮受到周期性驱动外力矩 $M = M_0 \cos \omega t$ 的作用, 并在有空气阻尼和电磁阻尼的介质中运动时 (设阻尼力矩为 $-\gamma \frac{d\theta}{dt}$, 其中 γ 为阻尼力矩系数), 其动力学方程为

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -k\theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} + M_0 \cos \omega t \quad (1)$$



1. 光电门 A; 2. 长凹槽; 3. 短凹槽; 4. 铜制摆轮; 5. 摇杆;
6. 蜗卷弹簧; 7. 机架; 8. 阻尼线圈; 9. 连杆; 10. 摇杆调节螺丝;
11. 光电门 B; 12. 角度盘; 13. 有机玻璃转盘; 14. 底座;
15. 弹簧夹持螺丝; 16. 闪光灯

图1 波耳共振仪的结构示意图^[5]

式中, J 为摆轮的转动惯量, $-k\theta$ 为弹性力矩, k 为弹簧的劲度系数, M_0 为驱动力矩的幅值, ω 为驱动力的角频率.

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{J}$, $2\beta = \frac{\gamma}{J}$, $m = \frac{M_0}{J}$, 式(1)变为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = m \cos \omega t \quad (2)$$

当 $m \cos \omega t = 0$ 时, 即在没有周期性外力矩作用时, 式(2)为阻尼振动方程; 当阻尼系数为零, 即无阻尼

收稿日期: 2020-07-28; 修回日期: 2020-09-21

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目 (FRF-BD-20-12A) 资助

作者简介: 丁红胜 (1969—), 男, 湖北麻城人, 北京科技大学应用物理系教授, 博士, 从事大学物理及大学物理实验的教学工作.

时,式(2)为简谐振动方程, ω_0 即为振动系统的固有频率.

方程(2)的通解为

$$\theta = \theta_1 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \alpha) + \theta_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

通解含有两个部分: $\theta_1 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \alpha)$ 表示阻尼振动,随着时间的演化,振动会逐渐衰减,直至忽略不计; $\theta_2 \cos(\omega t + \varphi)$ 表示简谐振动,驱动力矩持续对摆轮做功,振动系统接收驱动力所传送的能量,使振动系统最终达到一个稳定的状态.

振幅为定值,

$$\theta_2 = \frac{m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (4)$$

系统相位差为

$$\varphi = \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \arctan \frac{\beta T_0^2 T}{\pi(T^2 - T_0^2)} \quad (5)$$

由式(4)和式(5)可看出,稳定振动时,驱动力的幅值 M_0 、阻尼系数 β 、驱动力的频率 ω (或驱动力周期 T)和系统固有频率 ω_0 (或固有周期 T_0)4个参量共同决定系统振幅和相位差的大小,与振动的起始状态无关.

受迫振动的振幅与驱动力频率有关,由极大值条件 $\frac{\partial \theta}{\partial \omega} = 0$ 可知,当驱动力角频率为 $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时,系统发生共振,振幅有极大值,

$$\theta_r = \frac{m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (6)$$

可以看出,阻尼系数越小,驱动力的角频率越接近系统的固有角频率,振动幅值也越大.

1.2 阻尼系数、固有周期、固有频率的测量

实验中通常选择阻尼开关位置为2,将波耳共振仪有机玻璃盘上零度标志线对准 0° ,用手将摆轮转动至 $140^\circ \sim 150^\circ$ 之间,放手后控制箱会自动连续记录摆轮完成阻尼振动10次的振幅 $\theta_0 \sim \theta_9$.数据如表1所示.

表1 阻尼系数测量数据

次数	振幅 $I/(^\circ)$	次数	振幅 $I/(^\circ)$	$\ln(\theta_i/\theta_{i+5})$
θ_0	129	θ_5	65	0.685
θ_1	113	θ_6	58	0.667
θ_2	99	θ_7	50	0.683
θ_3	86	θ_8	44	0.670
θ_4	75	θ_9	39	0.653

由表1可知, $\ln(\theta_i/\theta_{i+5})$ 的平均值为0.672,阻尼系数为 $\beta = \ln(\theta_i/\theta_{i+5})/nT^{[5]}$,其中 T 为阻尼振动的

周期,实验中测得的平均周期为 $\bar{T} = 1.667$ s,因此可得 $\beta = \ln(\theta_i/\theta_{i+5})/n\bar{T}_0 = \frac{0.672}{5 \times 1.667} = 0.081$.

选择“自由振荡”进行测量,将有机玻璃盘上零度标志线保持在 0° ,用手将摆轮转动至 $140^\circ \sim 150^\circ$ 之间,放手后记录每次振动振幅值及其相应周期,并计算相应频率值.数据如表2所示.

表2 振幅、周期、频率关系数据

振幅 $\theta/(^\circ)$	周期 T_0/s	频率 $\omega_0/\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
127	1.657	3.792
114	1.658	3.790
107	1.659	3.787
102	1.663	3.778
97	1.665	3.774
90	1.666	3.771
81	1.668	3.767
69	1.671	3.760
55	1.676	3.749
44	1.679	3.742

由表2可知,系统平均固有周期为 $\bar{T}_0 = 1.666$ s,平均固有频率为 $\bar{\omega}_0 = 3.771 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

2 受迫振动方程非线性修正

2.1 弹簧非线性效应

一般情况下,可以认为弹簧的劲度系数 k 为常数,但是在上述弹簧自由振动的实验中,通常随着振幅的减小,振动系统固有周期会逐渐增大,这意味着振动系统的弹性回复力随着振幅的减小而减弱^[2].因此不妨假设弹簧的劲度系数为振幅的函数 $k = k(\theta)$,则回复力矩为

$$F_k = k(\theta) \theta \quad (7)$$

将 $F_k = k(\theta) \theta$ 进行泰勒展开至一阶项,

$$F_k = k(\theta) \theta = \left[\frac{k(0)}{0!} + \frac{k'(0)}{1!} \right] \theta \quad (8)$$

令 $\frac{k'(0)}{J} = a$,得到

$$\frac{F_k}{J} = \frac{k(\theta) \theta}{J} = \omega_0^2 \theta + a \theta^2 \quad (9)$$

2.2 轴承摩擦效应

轴承摩擦效应普遍存在于定轴转动的运动中,当轴承转动速度较小时轴承静摩擦力较大,而当转速达到一定临界值后,轴承摩擦力将保持稳定^[6].

实验发现,轴承摩擦力随轴承角速度的变化率较缓,因此可采用二次函数的形式来描述轴承摩擦

力矩随角速度的关系

$$F_f = B\dot{\theta}^2 - C\dot{\theta} \quad (10)$$

其中,固定系数 $B>0, C>0$,在此情况下,即表明摩擦力矩随角速度的增加而缓慢降低.

2.3 阻尼振动方程非线性修正

综合弹簧的非线性效应与轴承摩擦效应对振动方程的修正,可以得到修正后的阻尼振动方程为

$$J\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + F_k + F_f = 0 \quad (11)$$

令 $2\beta = \frac{\gamma}{J}, b = \frac{B}{J}, c = \frac{C}{J}$, 则式(11)可写为

$$\ddot{\theta} = -a\theta^2 - \omega_0^2\theta - b\dot{\theta}^2 - (2\beta - c)\dot{\theta} \quad (12)$$

式(12)即为非线性项修正后的阻尼振动方程,是一个待定系数的二阶微分方程.

在此情况下,基于 Matlab 软件,用数值方法计算其数值解,通过多次给定 a, b, c 的数值进行模拟计算,拟合阻尼振动实验所测得的数据.

通过变量代换,将式(12)改写为一阶微分方程组,令 $y_1 = \theta, y_2 = \dot{\theta}$, 得到

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -ay_1^2 - \omega_0^2 y_1 - by_2^2 - (2\beta - c)y_2 \end{cases} \quad (13)$$

基于表1和表2的实验结果,只考虑具体数值,其中 $\omega_0 = 3.771, \omega_0^2 = 14.25, \beta = 0.081$.

利用 Matlab 软件内置的 ode45 函数,根据四阶龙格-库塔法,多次变步长数值积分,可以得到,当待定系数满足 $a = 0.014, b = 0.002, c = 0.005$ 时,数值方法解得的阻尼振动方程与实验数据拟合的最为接近,特别是在振幅为 $90^\circ \sim 140^\circ$ 时,弹簧形变较大,弹簧非线性效应较为明显的区域.

图2中指数曲线为阻尼振动的振幅-时间实测数据的拟合曲线,周期性曲线为非线性微分方程的数值解.

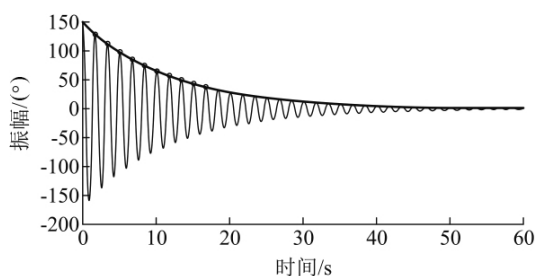


图2 阻尼振动数值积分与拟合曲线

2.4 受迫振动方程非线性修正

在修正后的阻尼振动方程(12)的右边加上一个周期性力矩,即为受迫振动方程,

$$\ddot{\theta} = m\cos \omega t - a\theta^2 - \omega_0^2\theta - b\dot{\theta}^2 - (2\beta - c)\dot{\theta} \quad (14)$$

该方程中 m 为未知参量,需要通过实验仪器进行数据测量加以确定.

选取“阻尼2”档位,打开电机,设定在某一转速,当观察到摆轮的受迫振动周期与电机的周期趋于一致时,即受迫振动达到稳定时,开始测量.读出每次摆轮受迫振动的幅值 θ 和驱动力矩每10次振动周期 $10T$,利用频闪法测量摆轮受迫振动的位移与驱动力之间的相位差 φ ,并记录此时电动机的转速值,结果如表3所示.

表3 幅频特性与相频特性测量数据

电机 转速 刻度	驱动 力 10 次振 动周 期 10 T/s	振幅 $\theta/(^\circ)$	系统 固有 周期 T_0/s	φ 测 量值 $/(^\circ)$	φ 理 论值 $/(^\circ)$	$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{T_0}{T}$	$\frac{\theta}{\theta_r}$	$\left(\frac{\theta}{\theta_r}\right)^2$
5.63	16.870	92	1.666	88	88.4	0.998	0.979	0.959
5.68	16.864	93	1.666	82	82.42	0.997	0.948	0.899
5.73	16.861	95	1.666	101	105.60	1.007	0.989	0.979
5.78	16.821	96	1.666	93	93.24	1.001	1	1
5.82	16.057	88	1.666	77	79.45	0.994	0.917	0.840
5.90	17.138	60	1.676	44	43.95	0.978	0.625	0.391
6.04	17.272	50	1.676	36	35.79	0.970	0.521	0.271
6.10	17.347	45	1.679	33	33.42	0.967	0.469	0.219
6.20	17.523	37	1.684	28	28.40	0.961	0.385	0.149
5.60	17.760	31	1.681	24	22.20	0.948	0.323	0.104
5.50	16.689	91	1.666	115	113.11	1.009	0.948	0.899
5.38	16.628	83	1.668	126	123.97	1.015	0.865	0.748
5.30	16.561	80	1.668	130	127.21	1.016	0.833	0.694
5.12	16.443	71	1.671	140	137.21	1.022	0.739	0.547
5.00	16.332	61	1.670	148	146.1	1.033	0.635	0.404

从实验可以看出,随着驱动频率越来越接近系统固有频率,振动振幅逐渐增大,当驱动频率与固有频率的比值为1时,振幅达到最大值 $\theta_r = 96$,系统达到速度共振状态.基于实验数据,可知系统固有频率

$\omega_0 = 3.775 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 根据 $\theta_r = \frac{m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$, 其中 $\beta = 0.081$, 可得驱动力系数 $m = 1.02$, 此时驱动频率 $\omega = 3.774 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

至此获得了在一定情况下,受迫振动动力学方程的全部参量: $\omega_0 = 3.775 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \beta = 0.081, m = 1.02, a = 0.014, b = -0.002, c = 0.005$.

通过变量代换,把式(14)转化为一阶微分方程组.令 $y_1 = \theta, y_2 = \dot{\theta}, y_3 = \cos \omega t, y_4 = -\omega \sin \omega t$, 则

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = 1.02y_3 - 0.014y_1^2 - 3.775^2y_1 - \\ 0.002y_2^2 - (2 \times 0.081 - 0.005)y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = y_4 \\ \frac{dy_4}{dt} = -3.774^2y_3 \end{cases} \quad (15)$$

把上述一阶微分方程组输入程序,利用数值积分求解其动力学特性,结果如图3所示。

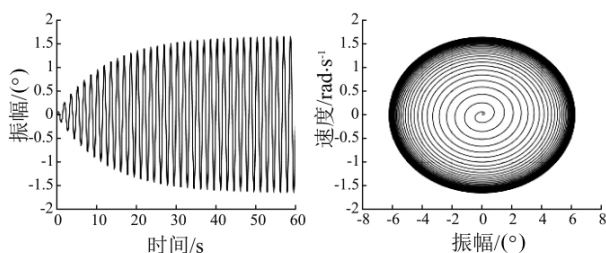


图3 系统时间响应与相平面曲线

图3中左侧为受迫振动系统的时间响应曲线,右侧为系统的相平面曲线.受迫振动系统的时间响应曲线表示了振动振幅随时间变化的特性,可以看出,随着振动时间的增加,振动频率逐渐稳定,振幅逐渐增加直到最大值并且保持稳定。

受迫振动系统的相平面曲线图表示了速度随振幅变化的关系.可以看出随着时间的增加,速度与振幅也会趋近一个稳定状态。

如果改变其中的一个参量,例如将与弹簧非线性效应相关的参数 a 从0.014调整为10,采用同样的方法对系统进行数值分析,得到的结果如图4所示.原本稳定的受迫振动系统在振动后期开始出现一定的随机运动,即混沌现象。

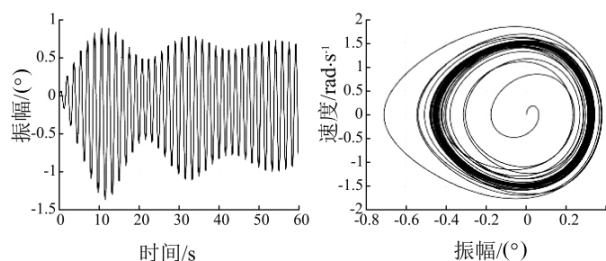


图4 系统时间响应与相平面曲线

基于波耳共振仪的受迫振动,由于其振动方程中涉及的非线性项偏多,不利于定性和定量分析受

迫振动系统中的混沌现象,因此可以选择典型的非线性受迫振动方程——杜芬方程进行探讨。

3 受迫振动方程的混沌

3.1 杜芬方程

振动问题中的很多数学模型都可以通过转化为杜芬方程来进行研究和分析,杜芬方程是研究和分析某些非线性动力学系统的基础。

杜芬方程^[7]的标准形式为

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + g(x) = f(x, t) \quad (16)$$

其中, $\delta > 0$, $g(x)$ 是含 x^3 项的函数, $f(x, t)$ 是周期性函数。

标准化后的杜芬方程称之为杜芬系统.杜芬系统是一类从简单受迫振动的物理模型中归纳出的非线性振动系统模型,形式简洁,具有代表性,其应用范围十分广泛.许多动力学过程都与杜芬系统的模型极其相似,比如化学键的断裂、建筑结构的震颤和轮船的横摇运动、电路周期振荡、电路信号检测、电路系统模拟分析和电路的故障检测等等。

3.2 硬弹簧型杜芬方程

杜芬方程一般可以分成四种基本类型,可以选择其中的硬弹簧型杜芬方程^[8]进行探讨,

$$\ddot{x} + c\dot{x} + ax + \beta x^3 = f \cos(\omega t) \quad (17)$$

将式(17)转化成一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f \cos(\omega t) - cx_2 - ax_1 - \beta x_1^3 \end{cases} \quad (18)$$

其中 ω, f, a, β, c 为可变参量。

给定不同的初始条件,利用数值计算的方法来分析硬弹簧型杜芬系统的受迫振动。

方程组(18)中可变参量较多,本文将重点探讨强迫力系数 f 的改变带来的系统状态演化,可以假设 $a = 1, \beta = 1, c = 0.01, \omega = 1$ 保持不变,且初值为 $x = 0, \dot{x} = 0$ 也保持不变,取 $f = 0.001$,然后进行一定幅度增加,直到出现混沌状态,然后利用数值积分求解受迫振动方程。

当振动时间为300 s时,结果如图5所示,从上至下依次是不同 f 取值下的系统时间响应图、系统相平面轨迹图、系统功率密度谱。

由图5可以看出,随着系统参量 f 的变化,系统逐渐由周期性运动进入混沌状态。

3.3 杜芬方程的混沌

从图5的相平面轨迹图可以看出,系统从只有

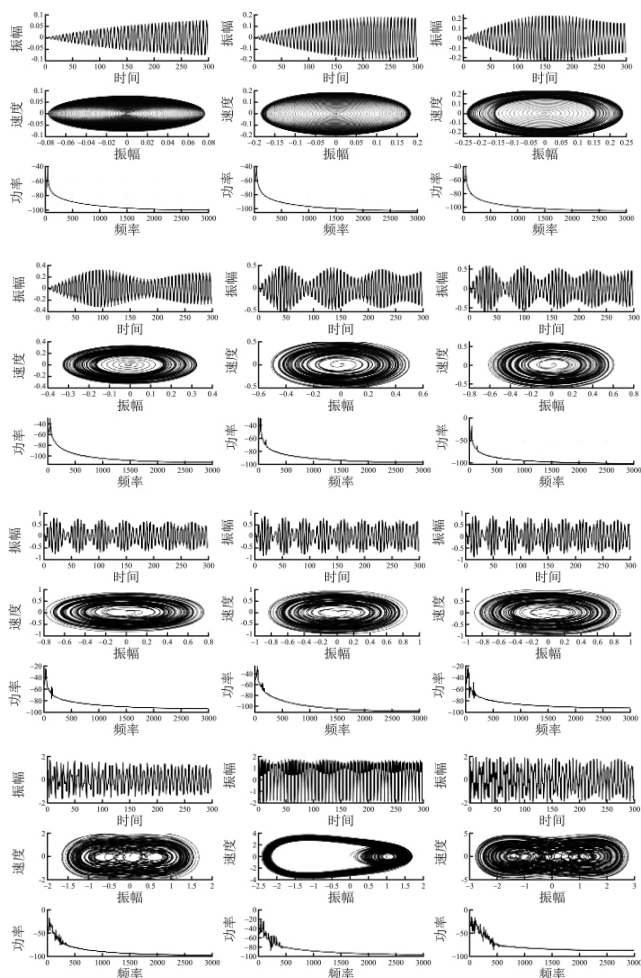


图5 系统时间响应、相平面轨迹、功率密度谱随 f 值的演化

一个相对稳定的平衡位置(原点),逐渐变为具有两个相对平衡的位置(焦点),这体现了无序混沌状态中存在一定程度上的有序特性.相平面轨迹图中相对平衡位置发生改变的同时,相轨迹也从圆形逐渐转化为类似于莫比乌斯环的椭圆形状.进一步推测,系统会拥有两个相对平衡的焦点,相轨迹围绕这两个焦点运动,而且可将这两个焦点类比为三维非线性系统中奇异吸引子^[9],如图6所示.

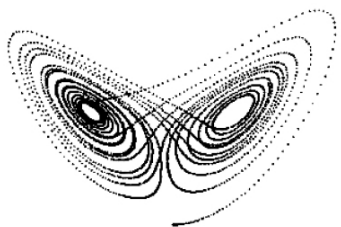


图6 奇异吸引子

奇异吸引子是混沌系统中独有的一种吸引子,也被称之为混沌吸引子,它代表着混沌状态中的一

种定态.具体表现在系统从任一初始状态开始,最终都会被奇异吸引子吸引到相空间中的某一特定区域.奇异吸引子与一般吸引子有所区别,当混沌状态的轨迹线进入奇异吸引子之后,轨迹线并不会像一般吸引子一样,吸引轨迹线继续围绕其运动,最终形成一个相对封闭的图形,而是会让两条接近的轨迹线发生指数分离.从系统外部看,奇异吸引子是在聚集轨迹线;从系统内部看,是轨迹线发散的过程.奇异吸引子常常成对出现,两个奇异吸引子同时对轨迹线的作用,共同构筑了混沌系统一定程度上的有序性.

由于杜芬方程是在一维空间的受迫振动,无法描绘出其在三维相空间的轨迹线,因此选用时间 t 、速度 \dot{x} 、振幅 x ,作为相空间的三个维度,观察其轨迹线的特性,数值计算所绘轨迹如图7所示.

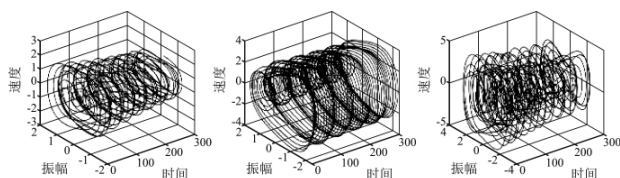


图7 从左至右分别为 $f=1$, $f=3$, $f=5$ 时的相空间轨迹线

从图7可以看出,杜芬方程中的两个焦点在含有时间项的坐标下,展开成了两条轴线,体现了其时间平移不变性,参量 f 的变化引起相空间轨迹明显改变,表明混沌系统对参量具有很强的敏感性,但在速度-振幅的相平面轨迹图中,两个焦点是稳定的,不随时间发生变化,这与奇异吸引子的性质非常类似.

4 结论

基于波耳共振仪受迫振动实验,探讨其中的非线性影响因素,对阻尼振动方程进行修正,考虑轴承摩擦和弹簧非线性效应,结合Matlab数值计算结果与波耳共振仪实测数据,确定波耳共振仪系统的非线性项参数,分析其非线性效应.通过引入非线性理论思想和数值分析的计算方法,有助于学生准确认知实验现象,加深对实验原理的理解.

为了丰富实验教学内容,引入弹簧型杜芬方程,分析其非线性特性,利用数值计算方法探讨受迫振动模型进入混沌状态的条件及其运动特性.受迫振动是否会进入混沌状态,可以根据系统响应时间曲线(振幅-时间)、系统相平面曲线(速度-振幅)和功率密度谱曲线(功率-频率)综合判断.如果受迫

振动做周期运动,其响应时间曲线会呈现规则的周期性,其相轨迹图具有极限环的特性,其功率图谱峰值呈现离散的状态;如果系统进入混沌状态,其时间曲线会具有无规则的、类似于噪声的特性,其相平面曲线在有限区域内是无周期性的,随着振动时间的延长,其轨迹线会逐渐铺满整个区域,功率图谱含有多个峰值;如果系统的响应时间曲线和相平面曲线在上述两种情况之间,则功率图谱呈现离散状态,系统做的是拟周期运动,如果改变它的系统参量或者初始条件,则有可能转变为周期运动或混沌运动。一般情况下,受迫振动受非线性效应影响越大,最终进入混沌状态的可能性越高。

参考文献:

- [1] 杜全忠,王鹏,王旭明,等.受迫振动的阻尼特性研究[J].实验室研究与探索,2015,34(11):14-17.
- [2] 董霖,王涵,朱洪波,等.波尔共振试验“异常现象”的研究[J].大学物理,2010,29(2):57-60.
- [3] 朱鹤年.波尔共振仪受迫振动方程[J].大学物理,2006,25(11):47-48.
- [4] 姜向前,骆素华,赵海发.波尔共振实验中基于旋转矢量的相位差分析[J].大学物理,2017,36(8):36-37.
- [5] 吴平.大学物理实验教程[M].2版.北京:机械工业出版社,2015.
- [6] 史彤阳,孔维姝,胡林,等.不同流量沙漏摆的振动规律[J].物理实验,2015,35(10):37-40.
- [7] 王海波.Duffing方程非线性振动特性的计算分析(硕士学位论文)[D].西安:西安建筑科技大学大学,2009.
- [8] 黄园媛,王银河.不同杜芬方程形状同步控制及其在保密通信中的应用[J].长沙理工大学学报,2015,12(3):104-109.
- [9] 吴广明.混沌振动的系统参数研究及其仿真计算[D].昆明:昆明理工大学,2009.

Teaching development of the nonlinear characteristics of forced vibration

DING Hong-sheng¹, WANG Jia-xi¹, ZHANG Shi-ping¹, DONG Jun-jun²

(1. Department of Physics, School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;

2. Basic Experimental Center for Natural Science, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: Forced vibration is an important teaching content in both college physics and college physics experiments. In order to make students understand the nonlinear characteristics of the forced vibration more deeply, the nonlinear correction of the forced vibration equation is carried out based on the nonlinear factors and experimental data involved in the Pohl resonator, and the nonlinear characteristics are discussed by numerical analysis. By introducing the Duffing equation of hard spring type, the evolution of the system from periodic motion to chaotic state is discussed. The relatively stable equilibrium point in forced vibration is compared with the singular attractor to expand the teaching content of nonlinear vibration.

Key words: forced vibration; Duffing equation; numerical analysis; chaos

(上接11页)

The contribution for general relativity and black hole theory by R. Penrose

ZHAO Zheng

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: This paper presents the important contribution for general relativity and black hole theory given by R. Penrose who was awarded the 2020 Nobel Prize in physics. That includes the famous singularity theorem, Penrose diagram, Penrose process and the cosmic censorship hypothesis. The friendship and co-operation between R. Penrose and S.W. Hawking are introduced. The discovery of a supermassive compact object at the center of our galaxy by R. Genzel and A. Ghez who were also awarded the 2020 Nobel Prize in physics, is briefly introduced.

Key words: black hole; singularity theorem; Penrose diagram; Penrose process; cosmic censorship hypothesis