

# 利用波耳共振仪研究受迫振动

## [实验目的]

1. 加深受迫振动基本规律的理解
2. 学习受迫振动模型基本参数的测量方法
3. 练习用曲线拟合方法处理数据

## [实验仪器]

波耳共振仪、PASCO850通用接口、转动传感器、Capstone软件等

## [实验原理]

有阻尼存在时的受迫振动方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega t$$

稳态解形式

$$x = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

其中  $\varphi = \arctan \frac{2\omega\beta}{\omega^2 - \omega_0^2}$

引入品质因数  $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$

振幅  $A_0 Q / \omega_0^2$

$$A = \frac{A_0 Q / \omega_0^2}{\sqrt{(\bar{\omega}^2 - 1)^2 + \bar{\omega}^2}}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

在  $\bar{\omega} \approx 1$  时发生共振



装置：设摆轮、摇杆角度为  $\varphi$

$$力矩 M = k(\varphi - \theta)$$

设  $B$  为铁心空隙的磁场强度

$$M' = -k'B^2\theta$$

运动学方程：

$$I\ddot{\theta} = M + M'$$

$$\Rightarrow I\ddot{\theta} + k'B^2\dot{\theta} + k\theta = k\varphi$$

当  $\varphi = A \sin \omega t$  时

$$\ddot{\theta} + \frac{k'B^2}{I}\dot{\theta} + \frac{k}{I}\theta = \frac{kA}{I} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \text{振幅 } \theta_0 = \frac{QA}{\sqrt{\omega^4 + Q^2(\omega^2 - 1)^2}}$$

$$\varphi = \arctan \arccot \left[ \frac{Q(\omega - 1)}{\omega} \right]$$

[实验步骤]

1. 衰减法测量振子的固有频率与品质因数

① 不加驱动，阻尼线圈附加电压在  $0 \sim 12V$  取值

② 手动使振子偏离平衡位置，用 Capstone 软件记录并拟合实验数据

③ 根据拟合数据计算  $\omega_0$ ,  $Q$

④ 改并线圈电压，重复以上实验

2. 测量电动机转速与驱动频率  $\omega$  的关系。

设定好 Capstone 中信号发生器，通过数据拟合得驱动角频率  $\omega$ 。

多次测量，拟合  $f = k\omega$

3. 固定阻尼，测量其幅频曲线和相频曲线，在  $\omega = \omega_0$

与  $\omega - \omega_0 \approx \pm \frac{5\omega_0}{Q}$ ,  $\pm \frac{2\omega_0}{Q}$ ,  $\pm \frac{\omega_0}{Q}$ ,  $\pm \frac{\omega_0}{2Q}$  处取测量点





## [数据处理]

1. 测量  $\omega_0$  与  $Q$ 

$$\alpha(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega'^2 + \beta^2}, \quad Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

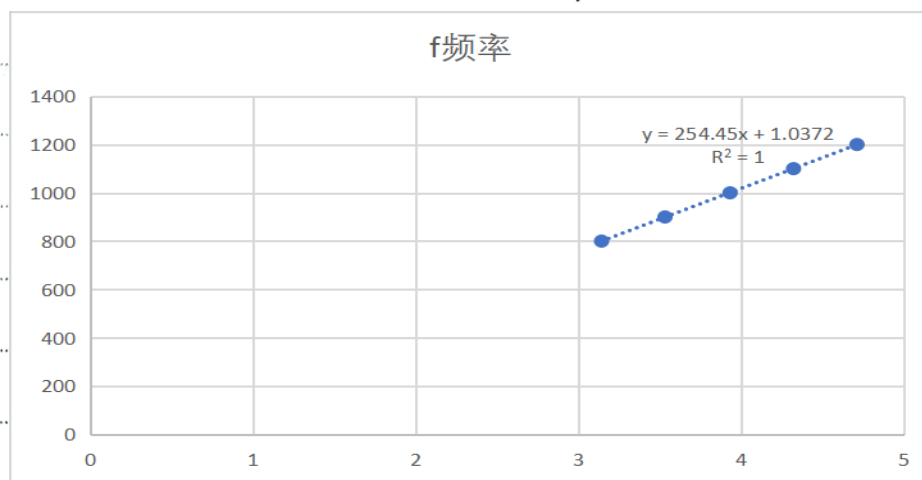
线圈电压 $U(V)$	$\beta(s^{-1})$	$\omega(s^{-1})$	$\omega_0(s^{-1})$	$Q$
0.0	0.00990	4.0300	4.03001	203.54
2.0	0.0420	4.03000	4.03003	141.902
4.0	0.03020	4.03000	4.03011	66.724
6.0	0.05710	4.0300	4.0304	35.293
8.0	0.0846	4.0300	4.0309	23.823
10.0	0.1240	4.0300	4.0319	16.258

$$\bar{\omega}_0 = 4.0306$$

2. 测量  $f$  与  $\omega$  关系

$$\begin{array}{l} f(Hz) \\ \omega(s^{-1}) \end{array} \quad \begin{array}{l} 1000 \\ 800 \end{array}$$

$f(Hz)$	800	900	1000	1100	1200
$\omega(s^{-1})$	3.1400	3.5300	3.93000	4.32000	4.7100



$$f = 254.45\omega + 1.0372, \quad R^2 = 1$$



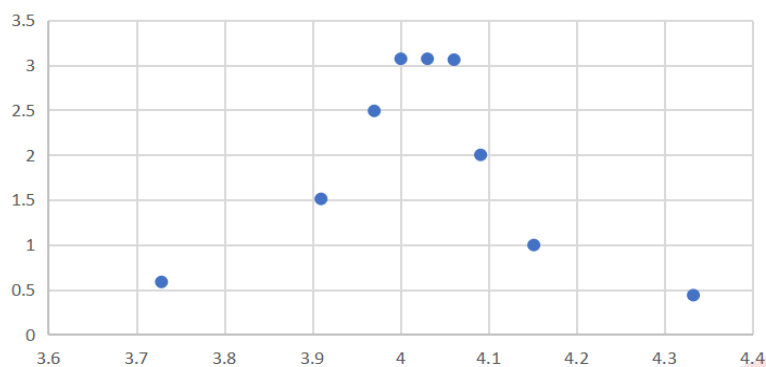
### 3. 测量幅频曲线与相频曲线

0 电压  $U = 4.0V$ ,  $Q = 66.724$

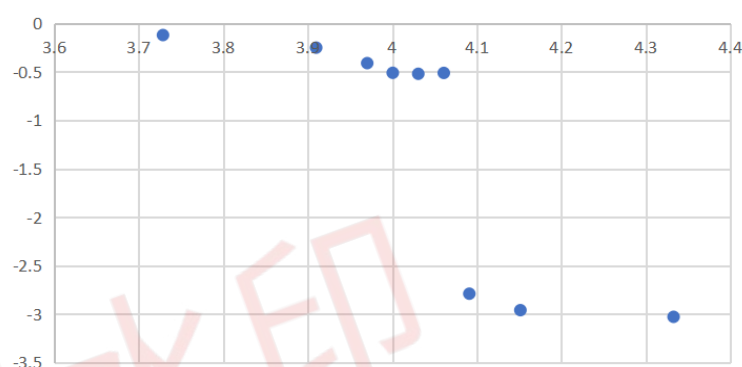
各测点取  $|\omega - \omega_0| = 0, \frac{\omega_0}{2Q}, \frac{\omega_0}{Q}, \frac{2\omega_0}{Q}, \frac{5\omega_0}{Q}$

$\omega$	3.7285	3.9097	3.9702	4.0004	4.0306	4.0608	4.0910	4.1514	4.3326
$f$	957.06	1003.52	1019.01	1026.76	1034.50	1042.25	1049.99	1065.48	1111.95
$A$	0.585	1.51	2.49	3.07	3.07	3.06	2.00	0.996	0.438
$\varphi$	-0.12	-0.25	-0.41	-0.51	-0.52	-0.511	-2.0791	-2.961	-3.03

4 振幅



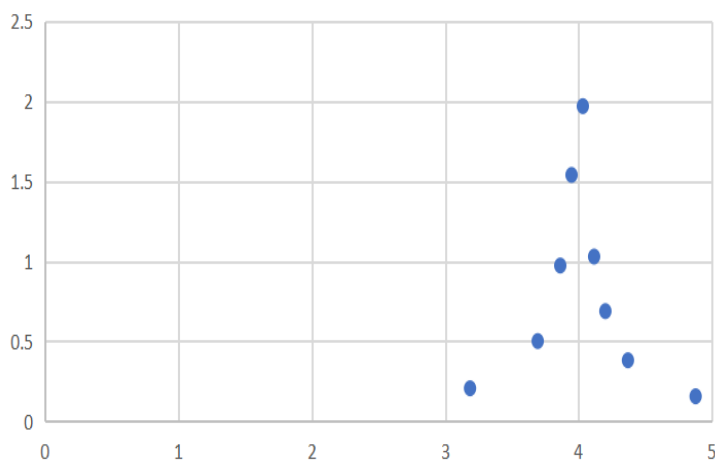
4 相位



电压  $U = 8.0V$ ,  $Q = 23.823$

$\omega$	3.1846	3.6922	3.8674	3.9460	4.0306	4.1152	4.1197	4.3689	4.8765
$f$	817.60	947.74	991.12	1012.812	1034.502	1059.193	1077.883	1121.264	1251.407
$A$	0.207	0.502	0.974	1.54	1.97	1.03	0.689	0.382	0.157
$\varphi$	-0.12	-0.28	-0.5044	-0.864	-1.7196	-2.57	-2.75	-2.89	-3.01

8 振幅



8 相位

