DOI：10.13291/j.cnki.djdxac.2009.05.027
第30卷 第5期 大连交通大学学报 Vol.30 No.5
2009年10月 JOURNAL OF DALIAN JIAOTONG UNIVERSITY Oct.2009

文章编号：1673-9590(2009)05-0067-03

杜芬方程的仿真分析及混沌控制

李卫东，王秀岩
(大连交通大学 电气信息学院，辽宁 大连 116028)*

摘 要：为实现对系统的有效控制，针对杜芬方程在特定参数设置下所出现的混沌现象及其特性，提出了基于参数微扰和变量反馈的控制方法，这种方法能对混沌系统进行有效的控制，通过调节反馈系数 k_i 就能得到新的运动轨迹.理论分析和系统仿真结果均表明该控制方法的可行性，得出了混沌特性被抑制或最终得到周期解的效果.

关键词：混沌；混沌控制；杜芬方程

中图分类号：TP271.8；TP13 **文献标识码**：A

0 引言

混沌是由确定性非线性系统运动产生的对于初值极为敏感而具有随机性和长期预测不可能性的往复非周期性运动.混沌控制是近年来非线性动力学中引人注目的研究热点之一，其目的是把系统从混沌运动转化到性能较佳的低周期运动.自从 Ott Grebogi和 Yorke提出 OGY方法以来，混沌控制的理论与实验都步入到了一个蓬勃发展的时期.国内外研究者把传统控制的理论和混沌运动的特点应用于混沌控制，提出了各种控制混沌的方法[1-5].随着研究的不断深人，实施控制的有效性、代价大小和难易程度，成为人们日益重视和追求的目标.本文采用周期参数微扰方法和变量反馈法用于混沌杜芬方程的控制，可以令系统的混沌特性得到良好的改善，也可使系统进入到周期轨道.

1 杜芬方程的混沌现象

杜芬方程的一般形式是：

$$\ddot{x}+p_1\dot{x}+p_2x+p_3x^3=q\cos(\omega t) \qquad (1)$$

其中，p_1 是阻尼系数；$q\cos(\omega t)$ 是系统外力项；ω 是外力项频率；p_1、p_3、q 通常大于 0；p_2 小于 0(取 $p_2=-1$).

为了便于对该系统的分析，同时达到降阶的目的，将系统描述如下：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-p_2x_1-p_1x_2-p_3x_1^3+q\cos(\omega t)\end{cases} \qquad (2)$$

现系统参数如下取值：$p_1=0.154$，$p_2=-1$，$p_3=4$，$\omega=1.1$，$q=0.034$，初始值取 $x_1(0)=0$，$x_2(0)=\varepsilon$，ε 为计算机可识别的一个极小的常数，取 $\varepsilon=10^{-10}$，此时系统处于周期振荡状态，如图 1 所示.

当 $p_1=0.154$，$p_2=-1$，$p_3=4$，$\omega=1.1$，$q=0.088$ 时，系统由周期振荡进入混沌状态，如图 2、3所示.

因此，对于系统外力 $q\cos(\omega t)$，在频率 ω 不变的情况下，外力系数 q 的改变明显的影响了整个系统的特性，当 $q=0.088$ 时是一种临界状态，此时系统由周期振荡状态彻底进入到混沌状态.

* 收稿日期：2008-08-22
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60870009)；辽宁省教育厅高等学校科研计划资助项目(2008098，2009A114)
作者简介：李卫东(1963－)，男，教授，博士，主要从事非线性系统分析与控制的研究
E-mail:wangxiuyan－816@163.com.

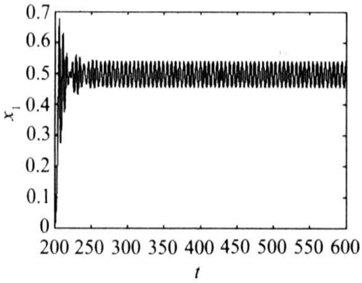

图 1　q=0.034时的周期振荡状态

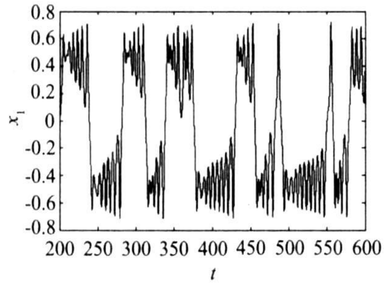

图 2　q=0.088时的根轨迹

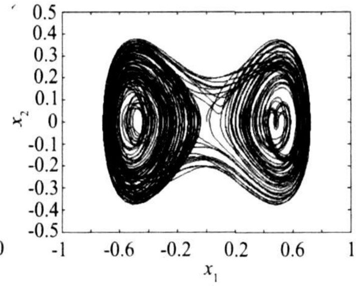

图 3　q=0.088时的混沌相轨迹

2　杜芬方程的混沌控制

2.1　参数微扰法

对于系统在 $q=0.088$时的混沌状态，考虑应该如何压缩或抑制其混沌特性，甚至使其回到所期望的周期振荡状态[6].之前有许多方法如自适应控制法、外力反馈控制法、延时反馈法等，是属于对系统参数随时间的连续微扰控制方法，此外还有一些对参数采取多种形式的微扰法[7]，对于杜芬方程来说，可以采用参数共振微扰法.

考虑到混沌系统受参数变化的影响剧烈，以及杜芬方程中 x_1^3的倍增特性，本文提出把参数 p_3变为 $p_3(1+c\cos\Omega t)$，其中 c是参数微扰幅度，Ω是微扰频率，当微扰频率 Ω与外力项频率 ω发生共振时，原系统的混沌状态被抑制，也可得到周期态，则系统(2)变为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-p_2x_1-p_1x_2-\\ \qquad p_3(1+c\cos\Omega t)x_1^3+q\cos(\omega t)\end{cases}\tag{3}$$

不妨令 $\Omega=\omega=1.1$，$c=0.015$，则新系统的混沌特性明显改善，如图 4、5所示.

图 4表明当 $c=0.015$时，系统呈现出由混沌过渡到周期态的中间过程，当 $c=0.03$时，系统彻底进入周期振荡状态，如图 6所示.

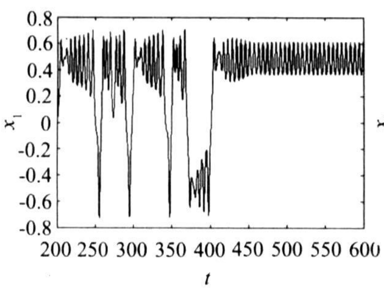

图 4　c=0.015时系统改善后的根轨迹

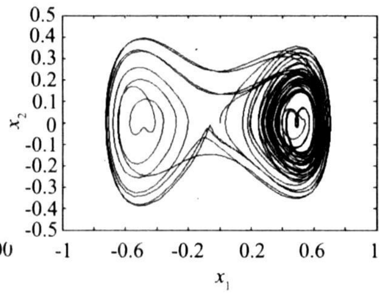

图 5　c=0.015时系统改善后的相轨迹

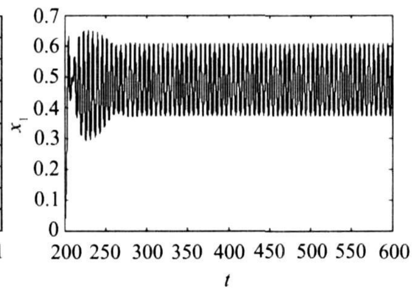

图 6　c=0.03时系统的根轨迹

另外，也可以用 Lyapunov指数 λ来解释这个过程，即当该系统的 Lyapunov指数 λ至少一个为正时，系统处于混沌状态；而系统的 Lyapunov指数 λ变为 0时，则混沌现象消失；当系统的 Lyapunov指数 λ变为负值时，系统进入到周期态.

2.2　变量反馈法

通过引入适当的反馈变量，系统也可达到抑制混沌的目的，例如在系统(2)中的第一个方程中引入反馈项 $-kx_1$，则新系统变为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2-kx_1\\ \dot{x}_2=-p_2x_1-p_1x_2-p_3x_1^3+q\cos(\omega t)\end{cases}\tag{4}$$

当其他参数不变，k取 0.06时，系统由混沌状态进入到周期态，如图 7所示.

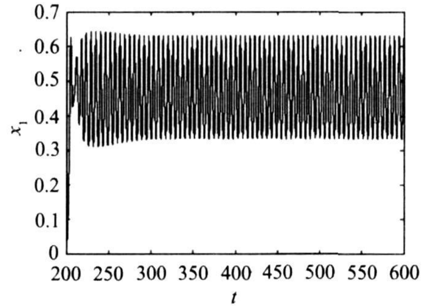

图 7　k=0.06时系统的根轨迹

因此，直接利用引入一个反馈变量 $-kx_1$，通过调节反馈系数 k就能达到是系统的混沌特性被抑制甚至控制到周期态的目的.

3 结语

由上述分析得知,对于杜芬方程这样的非线性系统[8],其混沌现象可以通过对系统参数进行共振微扰控制,只要有足够大的微扰幅度 c以及满足和外力项频率 ω形成共振的微扰频率 Ω,系统就能达到所期望的特性.此外,采用变量反馈法也能简单明了的仅仅通过调节反馈系数 k,就能得到新的运动轨迹,这两种方法同样也适用于其他混沌系统[9],也能得到明显的控制效果.

参考文献:

[1]赵光宙,齐冬莲.混沌控制理论及其应用[J].电工技术学报,2001,16(5):77-82.

[2]BASIOS V,BOUNTIS T,NCOLIS G.Controlling the onset of homoclinic chaos due to parametric noise[J].Physics Letters A,1999,251:250-258.

[3]姚明海.混沌控制的研究进展和展望[J].浙江工业大学学报,2001,29(4):332-336.

[4]刘曾荣.混沌的微扰判据[M].上海:上海科技教育出版社,1994.

[5]刘晓君,李险峰.时滞反馈法控制一个自治混沌系统[J].河北师范大学学报(自然科版),2008,32(2):181-186.

[6]蔡朝洪,徐振源,须文波.利用凹槽滤波器引导混沌系统到周期解[J].物理学报,2001,50(10):1846-1850.

[7]方锦清.驾驭混沌与发展高新技术[M].北京:原子能出版社,2002.

[8]刘延柱,陈立群.非线性动力学[M].上海:上海交通大学出版社,2000.

[9]胡岗,萧开华,郑志刚.混沌控制[M].上海:上海科技教育出版社,2000.

Simulation and Chaotic Control of Duffing—Equation

LI Wei-dong, WANG Xiu-yan

(School of Electronic & Information Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China)

Abstract: In order to realize the system control, a control method is proposed based on parameter perturbation and variable feedback control with the special parameters set and the emergence of chaos and its characteristics of the Duffing-equation. This feedback control is effective for the system to receive a new trajectory through changing paramenter k. Both the theoretical analysis and the simulation results prove the feasibility of the control method with the results of inhibited chao characteristics or cycle achievement.

Key words: chaos; chaotic control; duffing—equation