



## 扭摆振动实验

孙 萍, 熊 俊, 曹慧贤, 李 蓉, 许成伟

(北京师范大学 物理系, 北京 100875)

**摘 要:** 为了丰富“非线性系统实验”课程的教学内容, 开设了扭摆振动实验, 将力学中的非线性现象引入到教学中。在实验内容的设计上, 采取线性振动和非线性振动相结合的方式, 即: 首先研究扭摆的线性振动, 如阻尼振动、受迫振动等, 先对振动问题有基本的理解, 然后再研究扭摆的非线性振动, 分别固定驱动频率、改变励磁电流和固定励磁电流、改变驱动频率, 观察非线性摆的运动情况。

**关键词:** 扭摆; 阻尼振动; 受迫振动; 分岔; 混沌

**中图分类号:** O32

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1005-4642(2006)12-0003-05

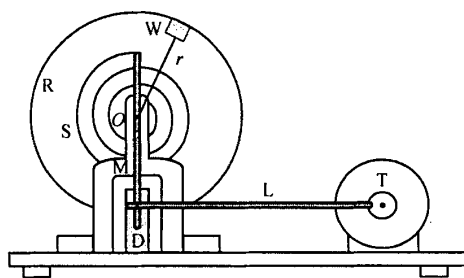
### 1 引 言

北京师范大学的“非线性系统实验”课程, 自 1989 年开设以来已经有十几年的历史了, 已经成为北京师范大学的特色课程, 在全国高校具有一定的影响<sup>[1~3]</sup>。近年来, 我们在不断完善以前的电学和光学系统的同时, 注意扩充非线性系统的领域, “扭摆振动实验”就是为此而增添的新内容, 该实验将非线性系统扩展到了力学领域, 丰富了课程的覆盖面。本文应用德国莱宝 (LEYBOLD) 公司的扭摆, 对阻尼振动、受迫振动以及混沌运动进行了研究。

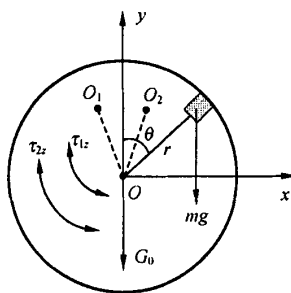
### 2 实验原理

扭摆实验装置如图 1(a) 所示, 图 1(b) 是为建立扭摆的运动方程而建立的坐标系<sup>[4]</sup>。在图 1(a) 中, 均质圆形铜盘 R 绕水平轴 O 转动, 轴穿过其质心。距轴 r 处有一配重 W, 其质量为 m。蜗卷弹簧 S 一端固定在圆盘轴心上, 另一端与摇杆 M 连接, 连接点为卷簧支点。T 是一偏心轮, 装在可调速电机轴上, 电机转动时带动摆杆 L 做周期摆动。与摆杆相连的摇杆牵动卷簧, 卷簧发生形变后对圆盘施加弹性力矩。改变直流电机电压 U, 可以改变摆杆的摆动频率  $\omega$ 。铜盘摆动时穿过电磁铁线圈 D, 若调节加在电磁铁线圈上的励磁电

流 I, 可以改变其间的磁场强度, 从而改变圆盘所受的阻力矩。铜盘在卷簧的带动下振动, 故称其为扭摆。下面结合实验装置原理图建立扭摆的运动方程, 说明实验原理。



(a) 扭摆装置示意图



(b) 坐标系

图 1 扭摆装置示意图和坐标系

“第四届全国高等院校物理实验教学研讨会”论文

收稿日期: 2006-05-10; 修改日期: 2006-09-25

资助项目: 世界银行“高等教育发展”项目

作者简介: 孙 萍 (1963-), 女, 吉林长春人, 博士, 北京师范大学物理系高级工程师, 从事信息光学和近代物理实验研究。

## 2.1 扭摆的线性振动

### 2.1.1 扭摆的阻尼振动

在无配重、无周期驱动力、有阻尼的情况下,扭摆可视为有阻尼的谐振子.扭摆在O点的正上方有一平衡位置,当扭摆摆动时,其偏离平衡位置的角位移记作 $\theta$ .此时,扭摆受到对 $z$ 轴(垂直纸面)的力矩有:阻力矩 $\tau_{1z} = -\gamma \frac{d\theta}{dt}$ ,其中 $\gamma$ 为阻尼系数;卷簧的线性恢复力矩 $\tau_{2z} = -k\theta$ ,其中 $k$ 为弹簧的劲度系数.扭摆对 $z$ 轴的转动惯量记作 $J$ .根据转动定理可以列出扭摆的运动方程

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = 0. \quad (1)$$

令 $2\beta = \frac{\gamma}{J}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{J}$ ,其中 $\beta$ 是阻尼常量, $\omega_0$ 是扭摆振动的固有频率,则(1)式变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0. \quad (2)$$

当 $\beta < \omega_0$ 时,扭摆做一般的阻尼振动.此时,方程(2)的解析解为 $\theta(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos \Omega t$ .其中, $A_0$ 是扭摆角位移的初始振幅, $\Omega$ 是扭摆的阻尼振动频率.可见,扭摆振动的振幅随时间衰减,而且,阻尼系数越大,衰减越快.设 $T$ 为扭摆做阻尼振动的周期,若测得初始振幅 $A_0$ 及第 $n$ 个周期振幅 $A_n$ ,并测出 $n$ 个周期所用的时间 $t = nT$ ,则有 $\frac{A_0}{A_n} = e^{\beta nT}$ ,因此,可以导出阻尼常量 $\beta$ 为

$$\beta = \frac{1}{nT} \ln \frac{A_0}{A_n}. \quad (3)$$

### 2.1.2 扭摆的受迫振动

在无配重、有阻尼、有周期驱动力的情况下,扭摆就会做受迫振动.当摇杆做 $\alpha(t) = a_m \cos \omega t$ 形式的周期摆动时,卷簧支点随之做周期转动,则卷簧支点转过的总角度为 $\theta - \alpha(t)$ .在这种情况下扭摆的运动方程为<sup>[5]</sup>

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k(\theta - a_m \cos \omega t) = 0, \quad (4)$$

(4)式可以改写成

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = k a_m \cos \omega t. \quad (5)$$

设 $M_0 = k a_m$ ,则(5)式就是一般的振动方程

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = M_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

将(6)式按照(2)式的整理方法,得到

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = f \cos \omega t, \quad (7)$$

其中, $f = \frac{M_0}{J}$ .在稳态情况下,(7)式的解析解为

$\theta = A \cos(\omega t + \varphi)$ ,其中 $A$ 为角位移振幅,且

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad \text{可见,随着 } \omega \text{ 逐渐增大,}$$

振幅 $A$ 也将随之增大.取 $\frac{dA}{d\omega} = 0$ ,并满足条件

$$\frac{d^2 A}{d\omega^2} < 0, \text{ 当 } \omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \text{ 时,振幅有极大值,}$$

即发生共振现象,称 $\omega_R$ 为共振频率.共振时的振

$$\text{幅为 } A_R = \frac{f}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \text{ 当 } \omega > \omega_R \text{ 或 } \omega < \omega_R \text{ 时,振}$$

幅都将减小.由 $\omega_R$ 和 $A_R$ 的表达式可知,它们随阻尼系数的增加而减小.

### 2.2 扭摆的非线性振动

在扭摆的圆盘上施加适当的配重,即可构造非线性扭摆.配重 $W$ 加在 $O$ 轴正上方,此时系统在 $O$ 轴正上方处于不稳定平衡,产生了2个新的平衡点 $O_1$ 和 $O_2$ .下面以均质圆盘及其上配重为研究对象,建立动力学方程.与(6)式相比,系统多了配重的重力矩作用,且令 $rmgs \sin \theta = a' \sin \theta$ ,因此,非线性扭摆的运动方程成为

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = M_0 \cos \omega t + rmgs \sin \theta. \quad (8)$$

当摆角很小时, $\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$ ,代入(8)式,并对其

进行无量纲化.设如下无量纲参数<sup>[4~5]</sup>: $x = \frac{\theta}{a}$ ,

$$\bar{t} = \omega_0 t, \delta = \frac{\gamma}{J \omega_0}, \eta = \frac{M_0}{J a \omega_0^2}, \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \text{ 其中, } a^2 =$$

$$\frac{\gamma(a' - k)}{a'}, \omega_0^2 = \frac{a' - k}{J}, \text{ 则得到如下无量纲化的扭}$$

摆的运动方程为

$$\frac{d^2 x}{d\bar{t}^2} + \delta \frac{dx}{d\bar{t}} - x + x^3 = \eta \cos \bar{\omega} \bar{t}. \quad (9)$$

方程中的各个参数与实际的物理量的对应关系为: $x \sim \theta, \bar{t} \sim t, \delta \sim \beta, \eta \sim f, \bar{\omega} \sim \omega$ .不妨作如下置换: $t \sim \bar{t}, \omega \sim \bar{\omega}$ ,将(9)式写成

$$\frac{d^2 x}{d\bar{t}^2} + \delta \frac{dx}{d\bar{t}} - x + x^3 = \eta \cos \omega \bar{t}. \quad (10)$$

(10)式即为著名的达芬(Duffing)方程.设摆在卷簧未发生变形时重力势能为零,则系统的势能为

$$V = \frac{1}{2} k \theta^2 - mgr(1 - \cos \theta). \quad (11)$$

在小角度近似下,将  $\cos \theta$  展开为  $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!}$ , 代入上式得到

$$V \approx \frac{k - mgr}{2} \theta^2 + \frac{mgr}{24} \theta^4. \quad (12)$$

当系统处于平衡态时,势能最小,由  $\frac{dV}{d\theta} = 0$ , 且当  $mgr \geq k$  时,可以求出势能曲线有 3 个平衡位置,

$$\text{即 } \theta_1 = 0, \theta_{2,3} = \pm \sqrt{6 \left( 1 - \frac{k}{mgr} \right)}.$$

此时  $\theta_1 = 0$  位置已变成不稳定平衡位置,而当  $mgr > k$  时出现的 2 个新的平衡位置  $\theta_2$  和  $\theta_3$  为稳定平衡位置. 这时系统具有如图 2 所示的双稳形式的势能曲线,这是构成双吸引子混沌态的重要前提条件.

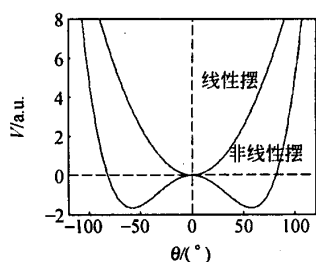


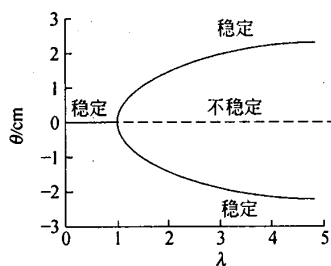
图2 势能曲线

引入参数  $\lambda = \frac{mgr}{k}$ , 将(12)式写成含  $\lambda$  的形式

$$\frac{V}{k} \approx -(\lambda - 1) \frac{\theta^2}{2} + \frac{\lambda}{24} \theta^4. \quad (13)$$

作出  $\lambda$  取不同值时的势能曲线,如图 3 所示. 观察曲线形状可以看出:当  $0 < \lambda \leq 1$  时,在  $\theta_1 = 0$  位置有 1 个稳定的平衡位置;当  $\lambda > 1$  时,曲线有 2

个平衡位置. 由图可见,  $\lambda = 1$  处出现分岔现象,因此称  $\lambda = 1$  为分岔点,在分岔点附近解的性质发生重大变化. 如果继续增加  $\lambda$  的值,又会出现分岔,并且分岔的数目以  $2^n$  增加,这种现象被称为倍周期分岔. 当  $n \rightarrow \infty$  时,系统出现混沌现象. 倍周期分岔过程是一条通向混沌的典型途径. 扭摆动力学方程中的非线性重力矩中的  $x^3$  项是导致混沌运动的主要原因,由于系统自身的非线性导致了系统“内在随机性”. 当角度变大时,方程中还会存在 5 次方项、7 次方项……,具有高阶非线性性质<sup>[6]</sup>. 一个动力学系统呈现出混沌现象,既不是因为系统中存在的随机力或受环境中随机噪声的影响,也不是由于无穷多自由度的相互作用,更不是与量子力学的不确定性有关. 决定论规律的非线性才是混沌运动存在的必要条件<sup>[4]</sup>.

图3 平衡位置随  $\lambda$  的变化

方程(10)不能求出解析解,对其进行数值计算的结果是:系统由周期振荡  $\rightarrow$  倍周期分岔 ( $2^n$  加倍)  $\rightarrow$  混沌  $\rightarrow$  周期窗口  $\rightarrow$  倍周期分岔  $\rightarrow$  混沌  $\rightarrow$  周期窗口  $\rightarrow$  倍周期分岔  $\rightarrow$  ……图 4 给出了一些数值计算结果. 计算时固定周期驱动力的频率不变,取  $\omega = 2$ . 改变阻尼系数  $\delta$ , 当  $\delta$  由大到小变化

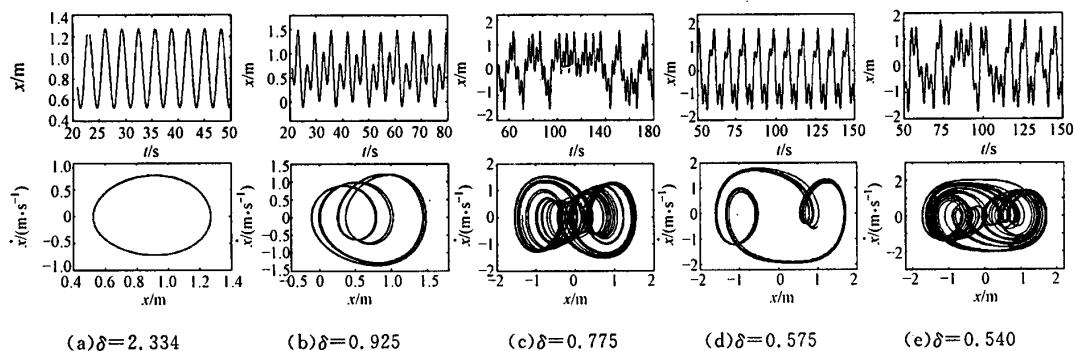


图4 扭摆运动的波形图和相图

时,系统经历了周期振荡→倍周期分岔→混沌→周期窗口→混沌的变化过程. 当固定阻尼系数 $\delta$ , 而将驱动力的频率 $\omega$ 由小到大变化时,也会得到类似图4的结果.

### 3 实验结果及分析

实验装置如图5所示. 电机工作电压从0~24 V可调,励磁电流从0~2 A可调. 将细线缠绕在扭摆的圆形铜盘上,线团绕过滑轮自然下垂. 当扭摆摆动时,细线随之发生位移,光电门感应位移的大小,并将感应信号输入至CASSY Lab模数转换器中,经过模数变换后,数字信号被输入到计算机中,使用CASSY Lab软件实时画出波形图和相图.

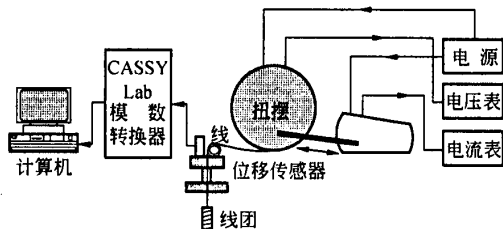


图5 扭摆实验装置示意图

#### 3.1 线性振动实验

##### 3.1.1 测量扭摆的固有频率 $\omega_0$ 和剩余阻尼系数 $\beta$

在无阻尼、无线团、无配重情况下,将扭摆转至初始振幅 $A_0=8$  div的位置,再放开手,此时用秒表开始计时. 记录运动 $n=10$ 个周期的时间 $t=18$  s,及第10个周期的振幅 $A_n=3$  div,则振动周期 $T=1.8$  s,振动角频率 $\omega=3.52$  rad/s. 再根据式(3)计算出剩余阻尼系数 $\beta_0=0.054$  Hz. 由于此时扭摆仅残存剩余机械阻尼,故认为此时状态为准无阻尼状态,近似将此时扭摆的振动频率认为是固有频率 $\omega_0$ .

##### 3.1.2 测量有阻尼时扭摆的阻尼常量 $\beta'$

选择3个不同的励磁电流: $I_1=50$  mA,  $I_2=150$  mA,  $I_3=300$  mA. 按照上述实验方法测量3个电流所对应的阻尼常量,得到 $\beta'_1=0.21$  Hz,  $\beta'_2=0.46$  Hz,  $\beta'_3=1.13$  Hz. 由实验结果可知,励磁电流产生阻尼力矩,电流越大,阻尼越大,因此,可以用励磁电流的大小表征阻尼的大小.

##### 3.1.3 测量共振曲线

在无配重、有阻尼、有驱动力的情况下,选取4个不同的励磁电流,即 $I_1=0$ ,  $I_2=100$  mA,  $I_3=500$  mA,  $I_4=1000$  mA,从小到大改变直流机电电压 $U$ ,记下平衡时扭摆振幅 $A$ . 按照实验室给出的 $U$ 与驱动频率 $\omega$ 的关系式 $\omega=0.445U-0.172$ ,将 $U$ 换算成 $\omega$ ,作 $A-\omega$ 共振曲线. 实验结果如图6所示. 得到4个电流对应的共振频率分别为 $\omega_1=3.66$  Hz,  $\omega_2=3.56$  Hz,  $\omega_3=3.53$  Hz,  $\omega_4=3.46$  Hz. 可见,共振频率和共振振幅随阻尼系数的增加而减小,这与理论相符.

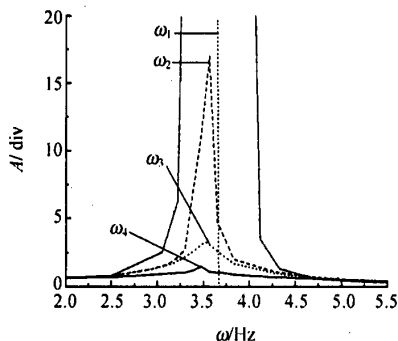


图6 共振曲线

#### 3.2 非线性振动实验

在圆形铜盘上施加配重,由于线团有自重,使得平衡位置偏离正上方. 因此,需要一大一小2个砝码来调节左右两侧的平衡位置.

首先固定电流 $I=50$  mA,由小到大改变电压,即驱动频率,观察扭摆的运动情况. 由图7可见扭摆的振动状态经历了周期振荡→倍周期分岔→阵发混沌→混沌→周期窗口→周期振荡. 然后,保持平衡位置不变,固定驱动频率,即电压 $U=4.52$  V,由小到大改变励磁电流,观察扭摆的振动状态. 由图8可见扭摆经历了周期振荡→倍周期分岔→混沌→周期振荡. 实验中发现,系统运动状态对频率参量较敏感,通过改变频率,可以观察到周期振荡、倍周期分岔、阵发混沌、混沌、周期窗口等典型的非线性运动形式. 而对电流参量相对来说不敏感,改变电流时,系统状态会从周期振荡很快过渡到混沌态,或从混沌态直接过渡到周期振荡,难以观察到周期窗口.

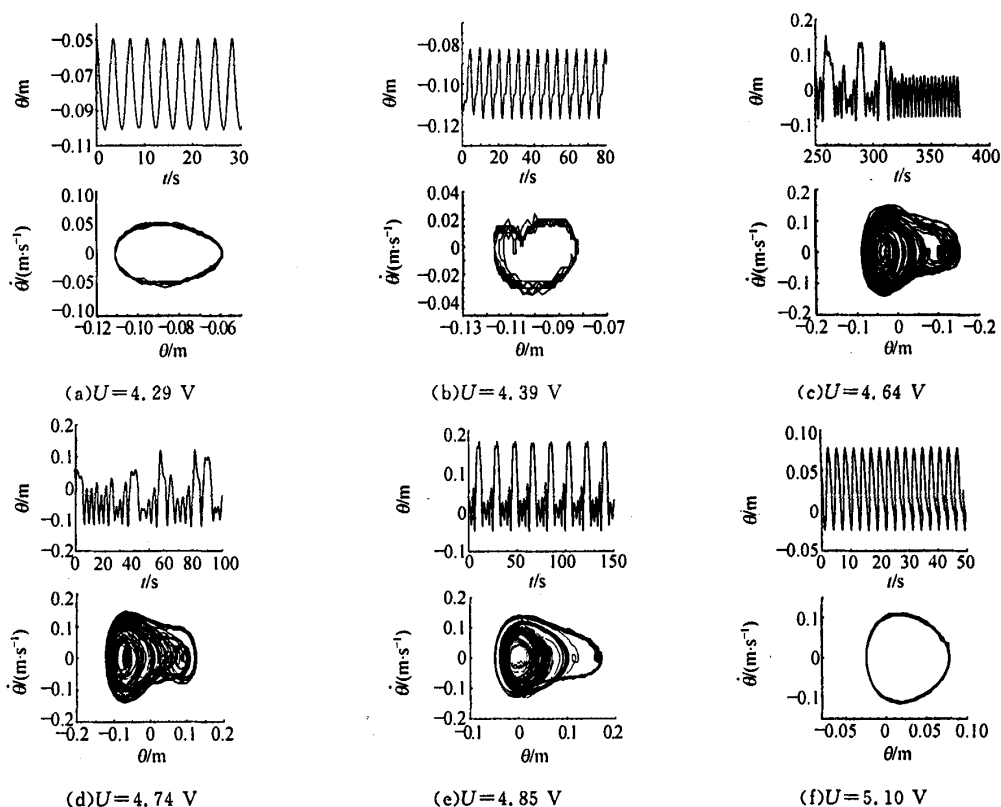


图 7 固定励磁电流改变电压时扭摆的振动情况

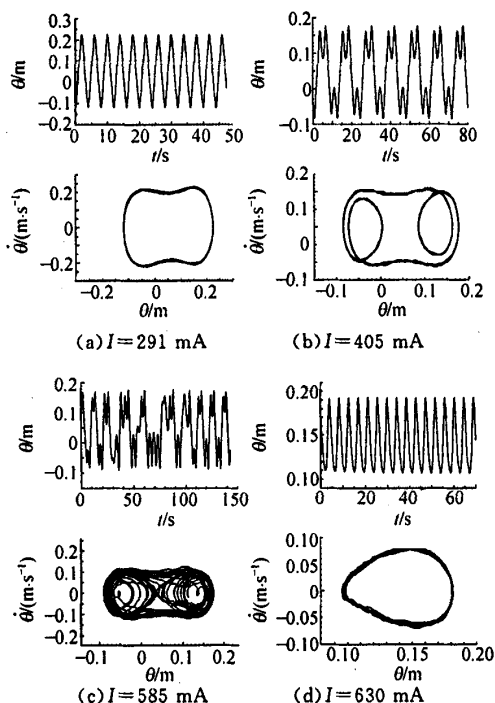


图 8 固定电压改变励磁电流时扭摆的振动情况

#### 4 结 论

扭摆振动实验涵盖了传统的振动实验的一些基本内容,如自由振动、阻尼振动、受迫振动等,通过实验可以使学生对振动这种运动形式有基本的了解。特别是,通过施加配重构造非线性扭摆,研究非线性扭摆的运动规律,这是该实验的一个重要内容。实践表明,在扭摆振动实验中将线性与非线性运动结合起来,可以收到良好的教学效果,不仅使学生中对传统物理学的实验方法有了新的认识,而且加强了学生用现代的实验方法研究现代物理的思想意识。

#### 参考文献:

- [1] 丰海,孙萍,张顺鹏,等. 随机共振实验[J]. 物理实验,2000,20(10):5~6.
- [2] 陈纪华,孙萍,温孝东,等. 非线性 RLC 电路的分频与混沌实验计算机辅助教学[J]. 物理实验,2000,20(12):16~17.

(下转第 19 页)

## 参考文献:

- [1] 吴平,洪生亮,陈允恭,等. 物理实验的开放教学改革实践[J]. 物理实验,1999,19(3):23~25.
- [2] 陈小凤,孔祥翔,周立新. 东南大学物理实验开放教学简介[J]. 物理实验,2002,22(4):22~25.
- [3] 周岚,朱蜀梅,王伟. 物理实验开放式教学初探[J]. 物理实验,2002,22(2):25~28.
- [4] 孙丹,程鹏. 实验教学综合管理信息系统的开发与应用[J]. 实验技术与管理,2003,20(3):83~85.
- [5] 江林. 高校计算中心建设与管理的探索与实践[J]. 实验技术与管理,2003,20(5):108~110.
- [6] 荀旭,张明高,刘石丹,等. 基于网络的基础实验预约管理系统[J]. 实验室研究与探索,2002,21(3):90~91.
- [7] 浦其荣,霍剑青,轩植华. 开放型物理实验的研究和探索[J]. 物理实验,2005,25(2):31~34.
- [8] 韦须祥,韩乾,洪霞,等. 高校实验室开放面临的问题及对策研究[J]. 实验技术与管理,2005,22(8):120~123.

## Network management system for opening experimental teaching based on experiment class management model

TANG Jun-jie, WANG Ai-jun

(Department of Mathematics and Physics, China University of Petroleum, Beijing 102200, China)

**Abstract:** Aiming at the problems in opening experimental teaching, a network management system based on experiment class management model is developed. In this paper, its background, basic structure, main function and its characteristics are introduced.

**Key words:** physics experiment; opening teaching; network management system

(上接第7页)

- [3] 李蓉,原如领,汪华英,等. 以科研带教学,建设“非线性系统实验”课程[J]. 物理实验,2000,22(2):26~28.
- [4] 漆安慎,杜禅英. 力学[M]. 北京:高等教育出版社,1997. 288~292.
- [5] 朱鹤年. 波耳共振仪受迫振动的运动方程[J]. 大学物理,2006,25(11):40.
- [6] 杜禅英,邢彬彬. 含  $\sin \varphi$  项受迫振子的实验观测[J]. 北京师范大学学报(自然科学版),1994,30(1):81~85.

## Torsional pendulum experiment

SUN Ping, XIONG Jun, CAO Hui-xian, LI Rong, XU Cheng-wei

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

**Abstract:** The torsional pendulum experiment is set up in order to extend the curricula of experiments of nonlinear system. Thus, the nonlinear phenomena of dynamics are introduced to the teaching. The teaching method is adopted to combine the linear vibration and the nonlinear vibration. At first, the linear vibrations, such as damped vibration and forced vibration, are investigated so as to understand the basic rules of vibration. Then, the nonlinear vibrations including fixed forced frequency and fixed excitation current are investigated to understand the new rules of nonlinear vibrations.

**Key words:** torsional pendulum; damped vibration; forced vibration; bifurcation; chaos