

物理实验

从受迫振动到混沌的实验系统设计

程敏熙, 肖凤平, 李志为

(华南师范大学 物理与电信工程学院 广东 广州 510006)

摘要: 研究构建了一个由椭圆轨道方式驱动的弹簧振子混沌运动系统, 它基于弹簧振子受迫振动的形式并符合混沌运动的条件. 椭圆轨道长半轴 $a = 20 \text{ mm}$, 短半轴 $b = 16 \text{ mm}$, 驱动电机是由单片机模块控制的调频直流电机, 角速度 ω 的范围是 $20 \sim 80 \text{ r/min}$, 振子的位移 x 由朗威 DisLab 数字化实验系统测量. 实验结果与理论模拟符合较好.

关键词: 受迫振动; 混沌; 椭圆轨道驱动

中图分类号: O 4-33

文献标志码: A

文章编号: 1000-0712(2014) 11-0034-04

振动系统在连续的周期性外力作用下进行的振动叫受迫振动. 用于观察弹簧振子受迫振动的实验装置通常是由电机驱动一根装有滚轮的连杆作圆周运动, 驱动一个连接弹簧的框体, 在垂直平面方向上产生正弦形式的强迫力, 使弹簧振子做受迫振动^[1]. 作者把实验装置的驱动方式从圆周运动改为椭圆运动, 这一改变让弹簧振子的运动符合产生混沌的条件, 可观察得到弹簧振子的混沌行为.

1 实验原理

一般的受迫振动实验装置结构如图 1. 固定半径的驱动杆带动滚轮作圆周运动, 驱动一个矩形框体 D 在垂直平面上作简谐振动. 框体连接一根悬挂重物的弹簧, 形成一个受迫振动系统^[1]. 经理论分析, 图 1 的弹簧振子运动可得到受迫振动动力学方程的一般形式. 该系统可研究在不同的驱动频率、振幅、初相位等条件下的受迫振动规律. 动力学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (1)$$

笔者为实验装置的驱动部分做了一个椭圆形轨道, 使驱动方式由圆周运动改为椭圆运动. 以椭圆轨道中心 O 为原点建立如图 2(a) 的坐标系 $O-xy$. 由于 m 受重力作用, 弹簧有静伸长 $l = mg/k$, 如

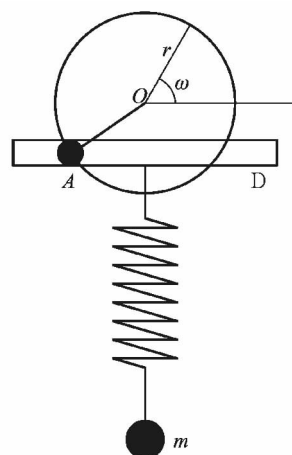


图 1 弹簧振子的受迫振动

图 2(b). 当驱动框体处 A 点 m 振动的位移为 x , 弹簧的伸长量为 $l+x$, 如图 2(c). 弹簧悬挂点将随框体 B 的运行而上下运动, 其位移是 $r \sin \omega t$. 于是弹簧的总形变是 $x+l-r \sin \omega t$, 如图 2(d). 负号的出现是由于框体向下运动时, 弹簧反而缩短. 弹簧的总应力为 $-k(x+l-r \sin \omega t)$. m 又受重力 mg 和阻力 $-\gamma \frac{dx}{dt}$ (γ 为阻尼系数). 所以系统的动力学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x+l-r \sin \omega t) + mg - \gamma \frac{dx}{dt}$$

把上式右边展开并整理, 得

收稿日期: 2014-03-21; 修回日期: 2014-05-22

基金项目: 广东省本科院校教育教学改革项目(2013)资助

作者简介: 程敏熙(1962—), 男, 广东四会人, 华南师范大学物理与电信工程学院副教授, 博士, 主要从事光电技术与系统、物理实验设计与研究工作.

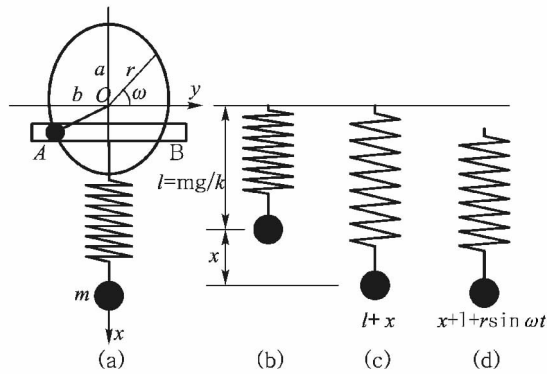


图 2 在椭圆轨道模式驱动下的弹簧振子运动

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = kr \sin \omega t \quad (2)$$

但是(2)式右边的 r 是变化的, 在坐标系 $O-xy$ 中椭圆的方程是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得

$$y = b^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (3)$$

由 $r^2 = x^2 + y^2$ 得

$$r = \sqrt{x^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{b^2 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2} \quad (4)$$

把式(4)代入式(2)得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = k \sqrt{b^2 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2} \sin \omega t \quad (5)$$

把式(5)的右边移到左边, 各项同时除以 m , 令 $2\beta = \gamma/m$, $\omega_0^2 = k/m$, 整理得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x - \omega_0^2 b \sqrt{1 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}\right)x^2} \sin \omega t = 0 \quad (6)$$

令 $X = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}\right)x^2$ 因为 $|x| \leq a$ 所以 $X = \left|\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}\right)x^2\right| \leq 1$

根据二项展开式的条件, 当 $|x| \leq 1$ 时, 有

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

再整理式(5)得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x - \omega_0^2 b \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}\right)x^2 - \right.$$

$$\left. \frac{1}{8} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}\right)^2 x^4 \right] \sin \omega t = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x - \omega_0^2 b \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}\right)x^2 - \right.$$

$$\left. \frac{1}{8} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}\right)^2 x^4 \right] \sin \omega t = \omega_0^2 b \sin \omega t \quad (7)$$

比较式(1)和式(7), 可见式(7)左边出现了带有 x^2 、 x^4 和 $\sin \omega t$ 的非线性项, 该系统成为了受周期驱动的非线性振子, 根据文献[2-4]对混沌的判定条件, 该系统可观察到随机运动的混沌过程。

2 实验结果

本实验的关键是改进驱动杆. 将滚轮置于驱动杆槽中, 用一根小弹簧让转动滚轮与驱动杆的一端相连. 驱动杆安装于电机的轴上, 因弹簧的牵引使滚轮紧贴椭圆孔边缘. 于是滚轮在小弹簧和椭圆轨道的限制下只能做椭圆运动, 如图2(a). 那么这时驱动框体的上下振动就不符合简谐振动的规律了, 而是符合产生混沌条件的力学系统. 本系统选用的弹簧劲度系数是 $k = 1.71 \text{ N/m}$, 空气阻尼是 $1.79 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, 长半轴 $a = 20 \text{ mm}$, 短半轴 $b = 16 \text{ mm}$, 这些参数在实验中不变. 振子采用朗威 DisLab 数字化实验系统的位移传感器的红外发射部分, 其质量为 $m = 0.050 \text{ kg}$, 接收部分装在振子下方, 用于测量振子的位移 x .

把驱动电机改为由单片机模块控制的调频直流电机, 能准确选择电机的驱动角速度 ω , 本系统驱动电机角速度 ω 的范围是 $20 \sim 80 \text{ r/min}$, 驱动杆初相位 ϕ 可调节, 初相位 ϕ 的变化范围是 $0 \sim 2\pi$.

利用科学计算软件 Mathematic 把弹簧振子的动力学方程(7)输入计算, 输入参数 k 、 γ 、 a 、 b 、 m 等, 角速度 ω 和驱动杆初相位 ϕ 可改变, 位移 x 的变化可模拟出振动图和相图. 实验以相同的条件可测量振子的运动位移 x , 采集到的数据再用 Python 软件绘制成振动图和相图. 理论模拟与实验结果见图3—图6, 可见大圈套小圈的吸引子, 实验和理论的结果比较一致. 实验所得图线不是很平滑, 这主要是由于传感器的采样速率还不够高造成的。

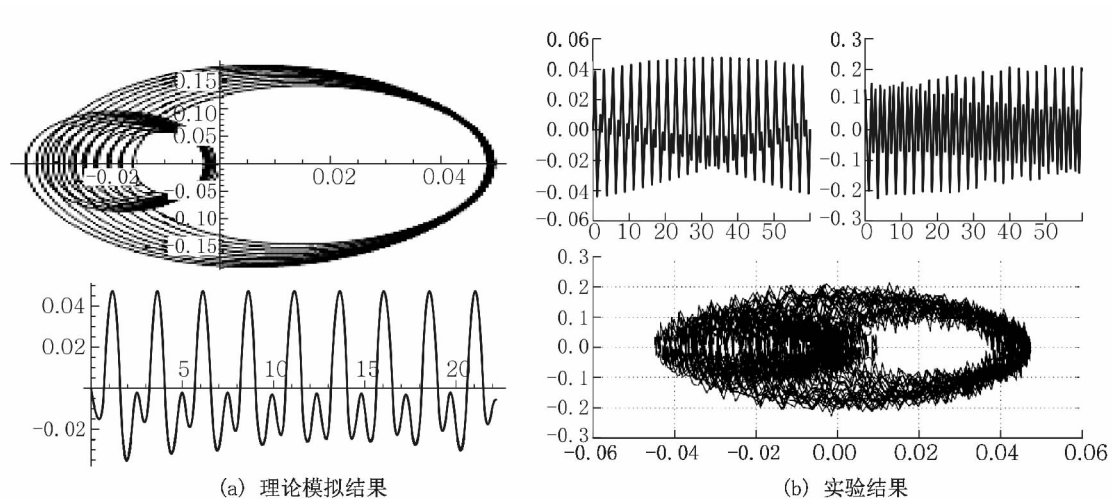
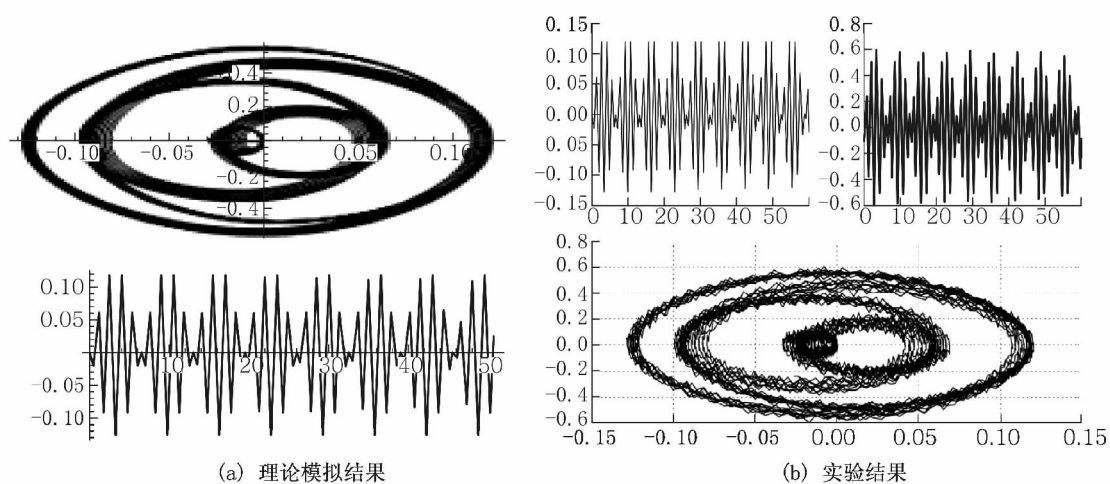
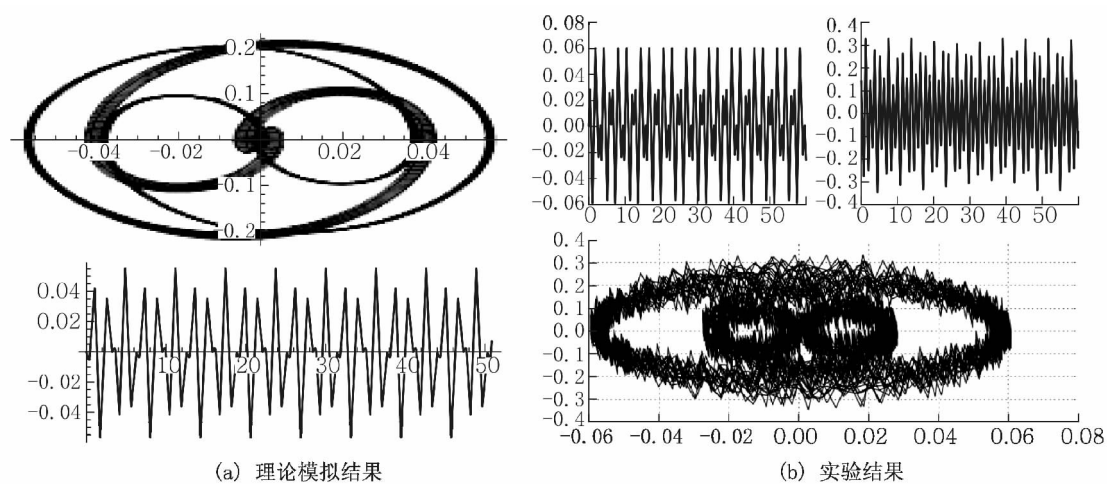
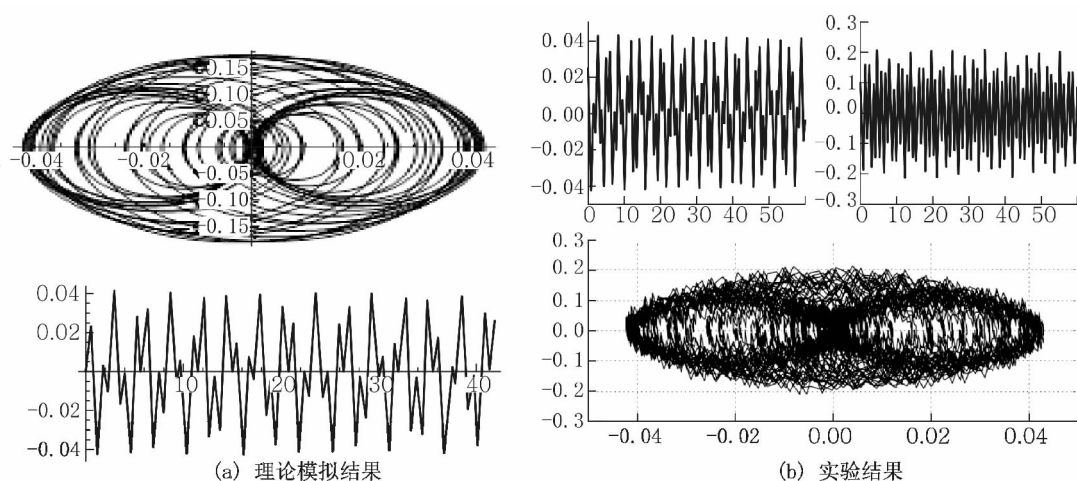


图3 驱动杆角速度 32 r/min 初相位 0

图4 驱动杆角速度 40 r/min 初相位 $\pi/2$ 图5 驱动杆角速度 36 r/min 初相位 $\pi/2$

图 6 驱动杆角速度 48 r/min, 初相位 $\pi/2$

3 结论

本研究设计的以椭圆轨道模式驱动的弹簧振子系统, 从理论模拟和实验结果都可呈现混沌现象, 实验结果与理论模拟符合较好. 与其他研究成果相比, 该实验系统的创新之处在于利用现有的仪器进行简单改进即可呈现由受迫振动走向混沌的现象和规律. 取下椭圆轨道板也可做受迫振动实验. 系统的 k 、 a 、 b 等也可根据具体情况改变, 从而得到相应的混沌过程.

实验中较理想的驱动速度是 30 ~ 50 r/min. 如果电动机的转速过慢(小于 30 r/min), 电动机驱动框体偏慢, 混沌现象不佳; 如果电动机的转速大于 50 r/min, 则框体运动过于激烈而导致装置运动不稳定, 实验效果也不理想.

参考文献:

- [1] 漆安慎, 杜禅英. 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997: 282-292.
- [2] 郝柏林. 从抛物线谈起——混沌动力学引论[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1993.
- [3] 陈士华, 陆君安. 混沌动力学初步[M]. 武汉: 武汉水力电力学院出版社, 1998.
- [4] 程敏熙, 曾碧芬, 等. 周期性外力驱动的混沌摆[J]. 物理实验, 2009(1): 34-37.
- [5] 陈士华, 陆君安. 混沌动力学初步[M]. 武汉: 武汉水力电力学院出版社, 1998.
- [6] D. 尤金. Mathematica 使用指南[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [7] 郝柏林. 分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他[J]. 物理学进展, 1983(9): 329-412.
- [8] 常树人, 吕可诚. 浅说“混沌”[J]. 大学物理, 1999, 18(9): 39-42; 1999, 18(10): 37-42; 1999, 18(11): 36-38.
- [9] 孙容磊. 求取空气阻力系数的最优化方法[J]. 系统工程与电子技术, 1990(8).
- [10] 龙运佳. 混沌振动研究方法与实践[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.

Designing of a chaotic movement system based on forced oscillation

CHENG Min-xi, XIAO Feng-ping, LI Zhi-wei

(School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510006, China)

Abstract: A chaotic movement system of spring oscillator driven along elliptical orbit is set up. It is based on forced oscillation and coincided with the condition of chaos. Major semi-axis and minor semi-axis of elliptical orbit are $a=20$ mm, $b=16$ mm. Driving motor worked on a mode of frequency modulation which controlled by single-chip microcomputer. The range of angular velocity ω is 20 ~ 80 r/min. The displacement of oscillator is detected by DisLab system. The experiment result is in agreement with theoretical simulation well.

Key words: forced oscillation; chaos; driven along elliptical orbit