UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
MODALIDAD A DISTANCIA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES
Y
MATEMÁTICA
CARRERA: LIC. EN ENSEÃANZA DE LA MATEMÁTICA.
ASIGNATURA: ÁLGEBRA LINEAL

Material de Apoyo Unidad I: El Espacio Euclídeo

Introducción

Este capítulo se hará el estudio de los espacios euclídeos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y en general el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Reciben el nombre de Espacios Euclídeos ya que más adelante se verá que son espacios vectoriales y que además se puede definir en ellos un producto escalar.
Los productos escalares permiten definir longitudes, distancias y ángulos entre puntos, vectores, rectas, planos e hiperplanos en general.

1.1. Puntos en el plano y el espacio

Definición 1 El plano $\mathbb{R}^2$ se define como el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo, esto es,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$$

El objeto (x, y) es un par ordenado; x representa la primera componente también llamada abcisa y y representa la segunda componente u ordenada.

De igual manera similar se define el espacio $\mathbb{R}^3$

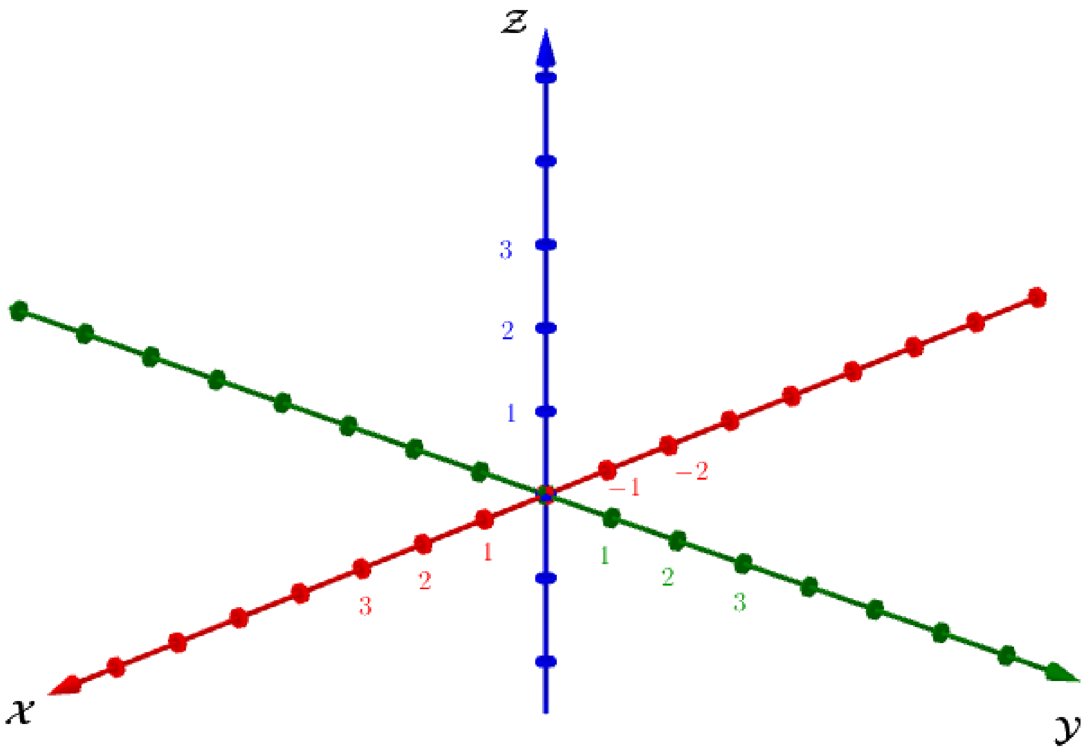
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Geometricamente $\mathbb{R}^3$ es la unión de tres rectas que se cortan en un mismo punto, formando un ángulo de 90°.

1. El punto (x, y, z) es una terna ordenada.

2. El punto común de intersección es llamado origen.

3. Las rectas dividen al espacio en 8 subespacios llamados octantes.



Ubicación de puntos en el espacio.

La terna ordenada (a, b, c) indicará que nos hemos desplazado a en la dirección del eje $\mathcal{X}$, b en la dirección del eje $\mathcal{Y}$ y c en la dirección de $\mathcal{Z}$. Por ejemplo, si queremos ubicar el punto $(1, 2, 3)$, por 1 trazamos una recta paralela al eje $\mathcal{Y}$, luego en la componente en y trazamos una paralela al eje $\mathcal{X}$. Finalmente en dicho punto de intersección, trazamos una recta paralela al eje $\mathcal{Z}$ hasta donde indique la componente en z.

La siguiente figura muestra la ubicación de $(-1, 2, 3)$ y $(1, -2, -3)$

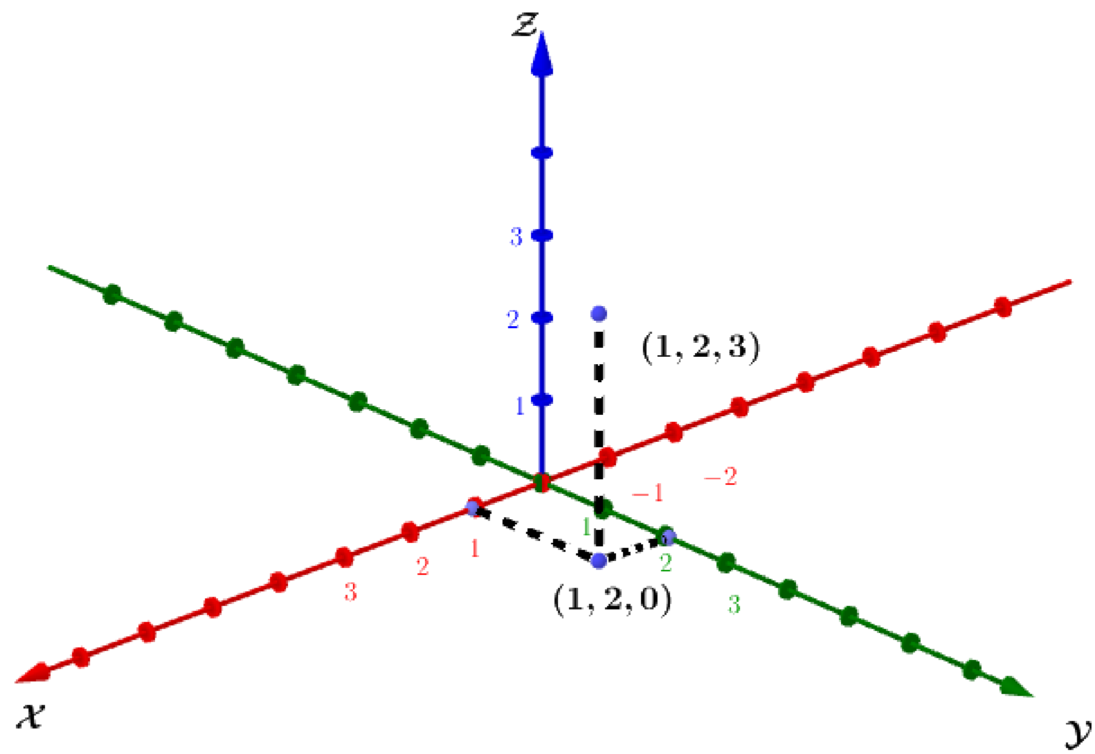
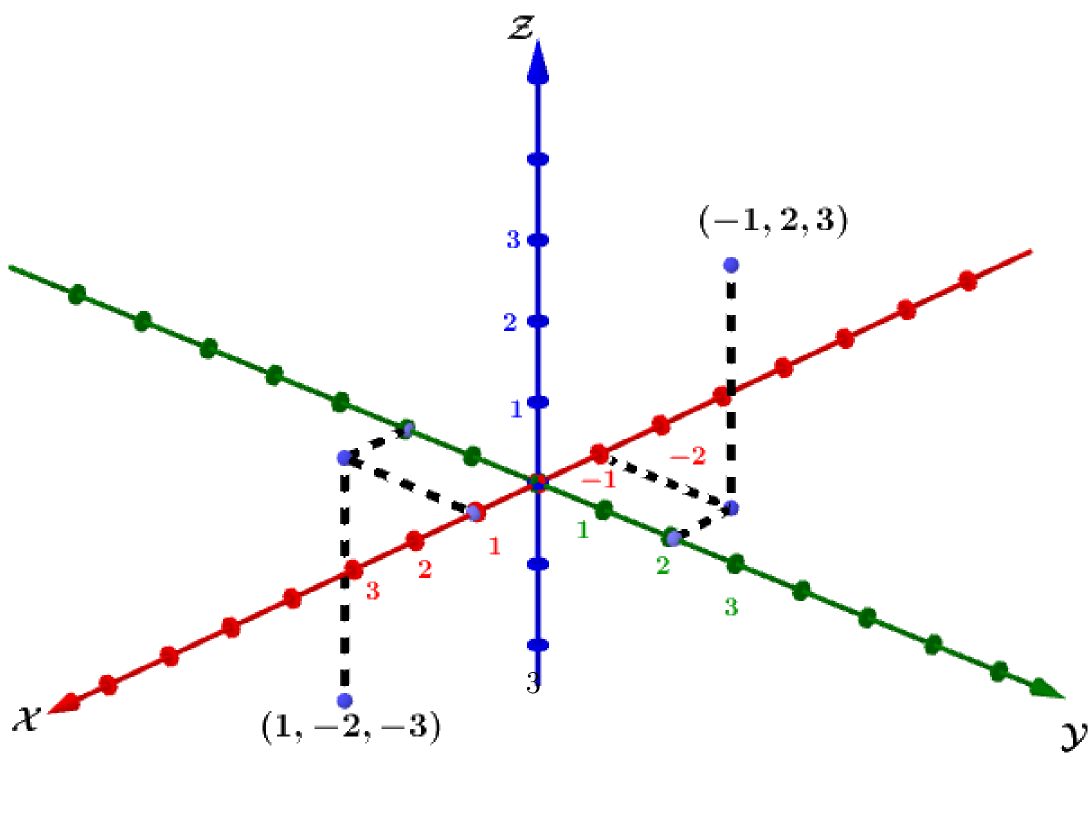


Figura 1.1: Ubicación del punto $(1, 2, 3)$.



El espacio $\mathbb{R}^n$

En general podemos definir el espacio $\mathbb{R}^n$ como:

$$\mathbb{R}^n = (x_1, x_2, \cdots, x_n)|x_1, x_2, \cdots x_n \in \mathbb{R}$$

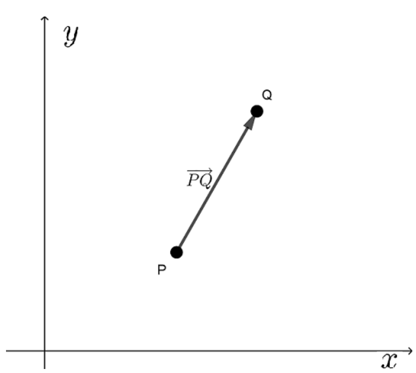
Para $n > 3$ no hay una representación geométrica del espacio $\mathbb{R}^n$, sin embargo se darán todas las definiciones de manera general.

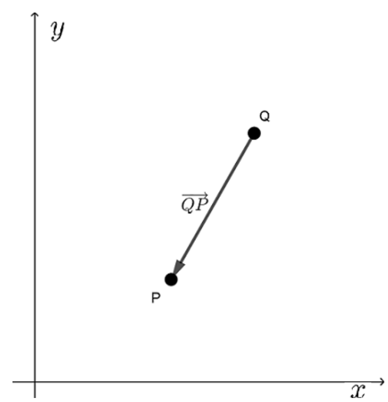
1.2. Segmentos dirígidos y vectores

Segmentos dirígidos y vectores en el plano

Definición 2 Sean P y Q dos puntos en el plano. Llamaremos segmento dirigido de P a Q al segmento rectilíneo que va de P a Q y lo denotaremos por $\overrightarrow{PQ}$. El punto P es llamado punto incial y el punto Q punto final. Todo segmento dirigido tiene su *magnitud* (longitud) y *dirección*.

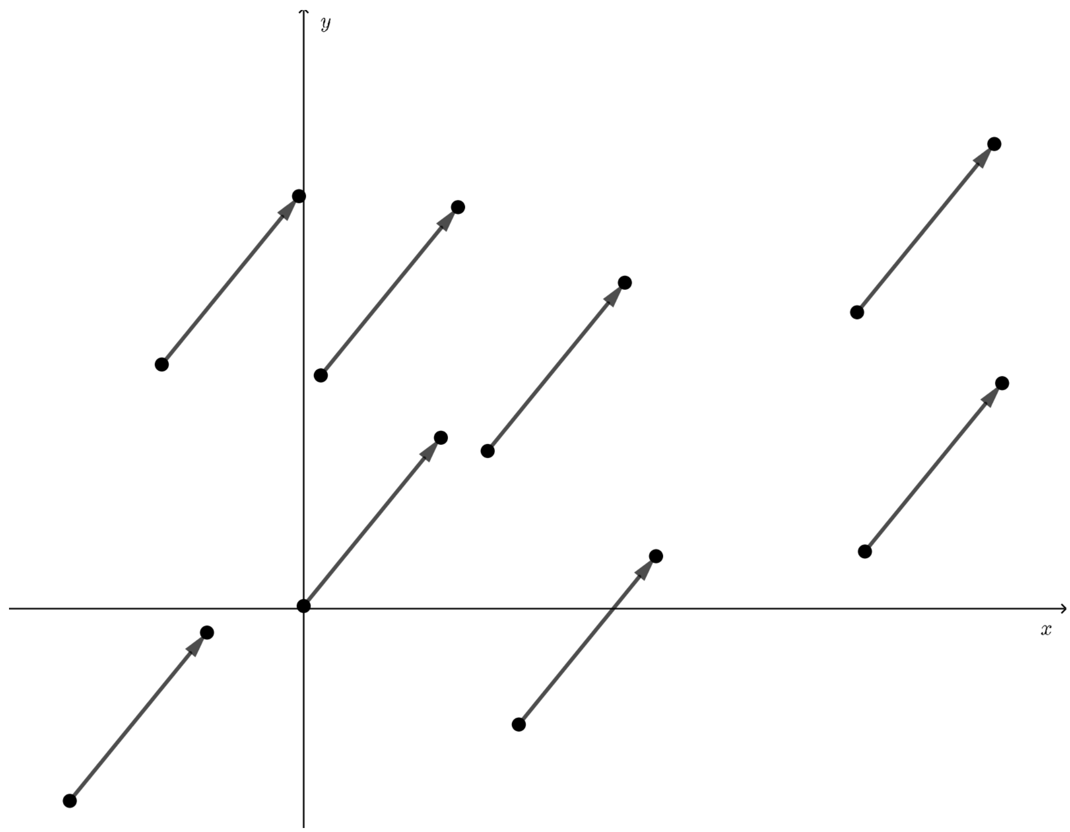
En la figura se muestran los segmentos dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$





Definición 3 Dos segmentos dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son equivalentes si tienen la misma magnitud y dirección.

En la figura se muestran segmentos dirigidos equivalentes



Definición 4 Un vector es el conjunto de todos los segmentos dirigidos de rectas que son equivalentes a un segmento dirigido. Cada uno de esos segmentos dirigidos es llamado representante del vector.

Por lo general tomamos como representante del vector el que tiene como punto inicial en origen del plano.

Definición 5 Un vector $\mathbf{v}$ en el plano xy es un par ordenado (a, b)

- Un punto en el plano es un vector cuyo representante es un segmento de recta dirigido con punto inicial en el origen y punto final $(0, 0)$.

- Si tenemos un vector cuyo punto inicial es $P = (x, y)$ y punto final $Q = (x_1, y_1)$ su representante con punto inical $(0, 0)$ es el vector $\mathbf{v} = (x_1 - x, y_1 - y)$

1.3. El producto escarlar y la norma de un vector

Definición 6 Sean $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. El producto escalar o pronducto punto es una función $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $(u, v) \mapsto u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$

El producto punto nos indica que tomamos dos vectores los operamos pero como resultado obtenemos un número real.
Particularizando la defınción para $\mathbb{R}^2$, si $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$. De igual manera puede escribir la difinición para $n = 3$.

Ejemplo: Para cada pareja de vectores calcular el producto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

1. $\mathbf{u} = (1, 1)$ y $\mathbf{v} = (1, -1) = 1$. Sol. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$
2. $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $\mathbf{v} = (2, -2)$. Sol. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(2) + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-2) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
3. $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$ y $\mathbf{v} = (2, 1, 4)$ entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 = -2$

Propiedades del producto escalar

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0$

b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

c) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} +_{\mathbb{R}^n} \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} +_{\mathbb{R}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

d) $\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v})$

La demostración de estas propiedades es muy sencilla, y se basan en las propiedades conocidas de la suma y producto de números reales.
Se demostrará como ejemplo el literal c). Sean $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} +_{\mathbb{R}^n} \mathbf{w}) &= (u_1, \ldots, u_n) \cdot [(v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n)] \\
&= (u_1, \ldots, u_n) \cdot (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n) \\
&= u_1(v_1 + w_1) + \cdots + u_n(v_n + w_n) \\
&= u_1v_1 + u_1w_1 + \cdots + u_nv_n + u_nw_n \\
&= (u_1v_1 + \cdots + u_nv_n) + (u_1w_1 + \cdots + u_nw_n) \\
&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} +_{\mathbb{R}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}
\end{aligned}$$

La prueba de las demás propiedades se dejan al lector.

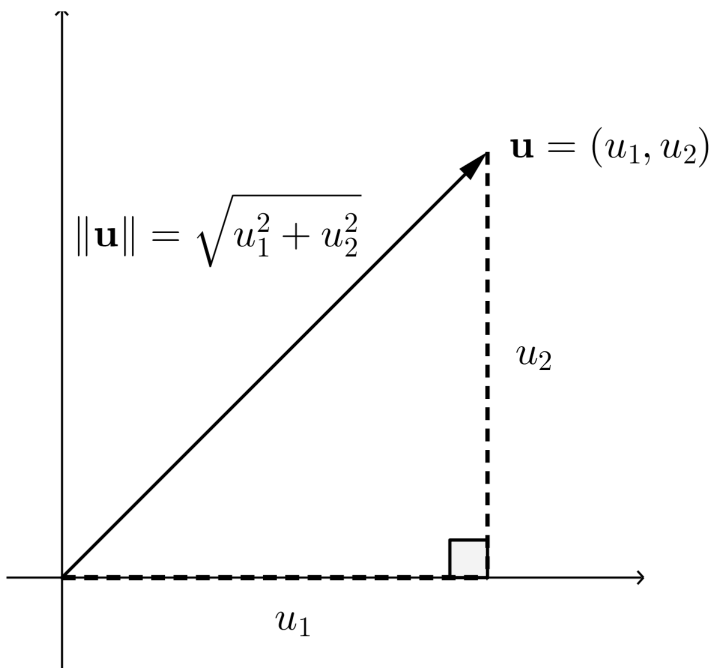
Definición 7 Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ se define la norma (magnitud o longitud) $\mathbf{u}$, que se denotará por $\|\mathbf{u}\|$, como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots u_n^2}$$

Norma en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

La definición anterior se deduce utilizando el teorema de pitagoras tanto en el plano como el espacio:

Para $\mathbb{R}^2$:



Propiedades de la norma

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$.
3. $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha|\|\mathbf{u}\|$.
4. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. Esta propiedad se conoce como desigualdad triangular.

Definición 8 Un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es unitario si $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Los vectores $(-1, 0)$ y $(0, 1)$ son vectores unitarios ya que $\|(-1, 0)\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$ y $\|(0, 1)\| = \sqrt{(0)^2 + 1^2} = 1$. En cambio el vector $(1, 1)$ no es unitario ya que $\|(1, 1)\| = \sqrt{2}$.

Observación: Sea $\mathbf{u}$ un vector, entonces el vector de $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}$ es un vector unitario. Demostración:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}\right\| &= \left|\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\right| \|\mathbf{u}\|, \text{ por propiedad 3 de la norma} \\
&= \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\|\mathbf{u}\| \text{ por propiedad 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Sabemos que el vector $\mathbf{u} = (1,1)$ no es unitario, pero por la observación anterior el vector $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sí lo es.

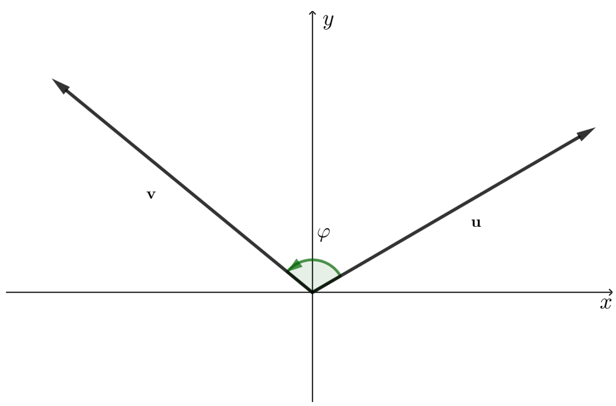
1.4. Ángulos entre vectores

Angulos entre vectores en el plano

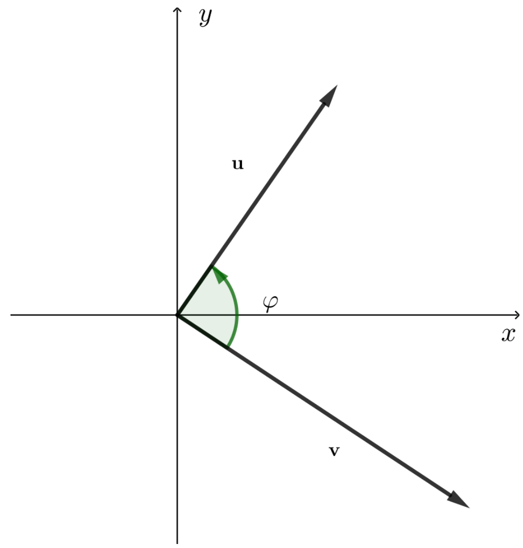
Definición 9 Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores en el plano $\mathbb{R}^2$, pensados como vectores anclados en el origen (con punto inicial el origen del plano). El ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el menor ángulo (perteniente al intervalo $[0,\pi]$) positivo (medido en sentido antihorario) entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

A continuación se ilustra la definición anterior, se muestra el ángulo φ:

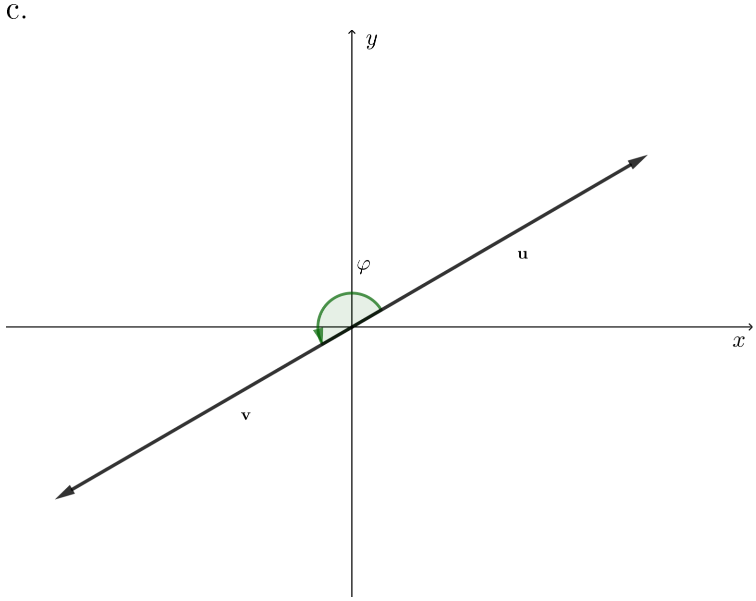
a.



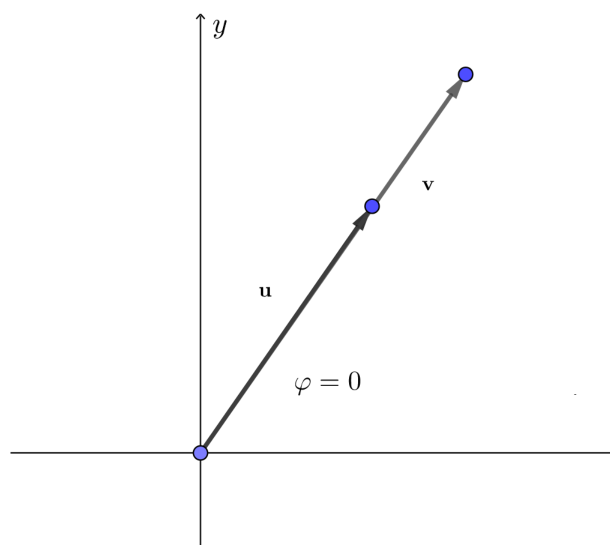
b.



c.



d.



Veamos como calcular el valor del ángulo entre dos vectores **u** y **v**.

Teorema 1 Sean $\mathbf{u}$,$\mathbf{v} \neq 0$ y sea φ el ángulo entre ellos. Entonces

$$cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

1.5. Producto vectorial

El producto vectorial recibe ese nombre ya que se multiplican dos vectores en $\mathbb{R}^3$ y como resultado se obtiene un tercer vector también en $\mathbb{R}^3$, con la particularidad que dicho vector es perpedicular a los primeros dos.

Definición 10 Sean $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$. Se difine el producto vectorial o producto cruz de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

Verifiquemos que el vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es perpendicular tanto $\mathbf{u}$ como $\mathbf{v}$. Recuerde que dos vectores son ortogonales si y sólo si su producto escalar es igual a cero.

Entonces debemos probar que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= 0 \\ \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= (u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k})\cdot[(u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}] \\ &= (u_1, u_2, u_3)\cdot(u_2v_3 - u_3v_2, u_1v_3 - u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3u_2v_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= (v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k})\cdot[(u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}] \\ &= (v_1, v_2, v_3)\cdot(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= v_1(u_2v_3 - u_3v_2) + v_2(u_3v_1 - u_1v_3) + v_3(u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= v_1u_2v_3 - v_1u_3v_2 + v_2u_3v_1 - v_2u_1v_3 + v_3u_1v_2 - v_3u_2v_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

En efecto, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es perpendicular tanto $\mathbf{u}$ como $\mathbf{v}$.

Ejemplo 1 Sean $\mathbf{u} = (1,2,0) = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+0\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = (-2,3,-1) = -2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$. Calcular $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$.
Utilizando la definición:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\times\mathbf{v} &= [(2)(-1)-(0)(3)]\mathbf{i} + [(0)(-2)-(1)(-1)]\mathbf{j} + [(1)(3)-(2)(-2)]\mathbf{k} \\ &= -2\mathbf{i}+\mathbf{j}+7\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{u} &= [(0)(3) - (2)(-1)]\mathbf{i} + [(1)(-1) - (0)(-2)]\mathbf{j} + [(2)(-2) - (1)(3)]\mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + -7\mathbf{k} \end{aligned}$$

Ota forma de definir el producto vectorial es haciendo uso de determinantes. En la unidad 3 se estudiará con detalle el cálculo de determinante.

Teorema 2 Sean $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades: Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

2. $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

3. $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

4. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.

5. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$.

6. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

1.6. Rectas y planos en el espacio

La recta en el espacio.

Par obtener la ecuación de una recta en el espacio necesitamos:

1. Un punto de la recta $P = (a, b, c)$.
2. Un vector que le llamaremos director $\overrightarrow{d}$.
3. Si Q es un punto cualquiera de la recta, el vector director $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{QP} = \langle a-x, b-y, c-x \rangle$.

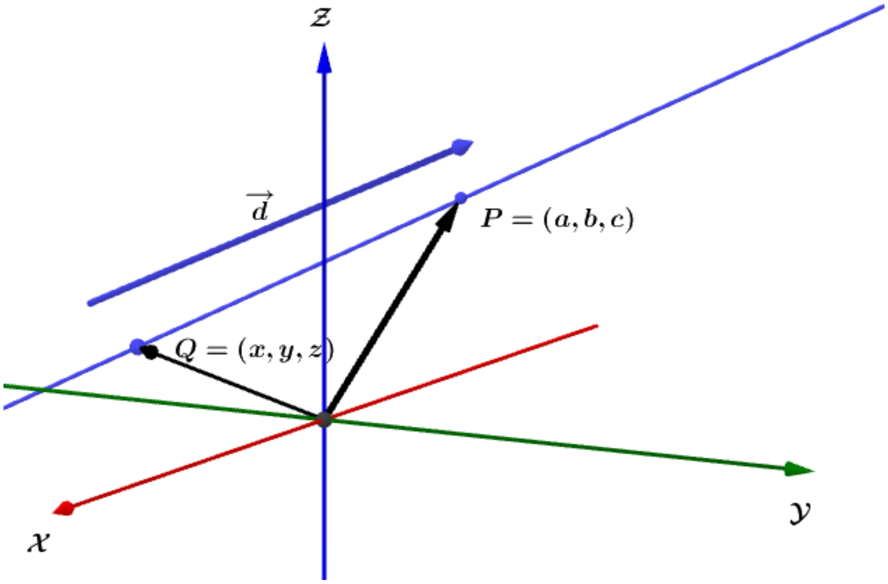


Figura 1.2: Ecuación de la recta.

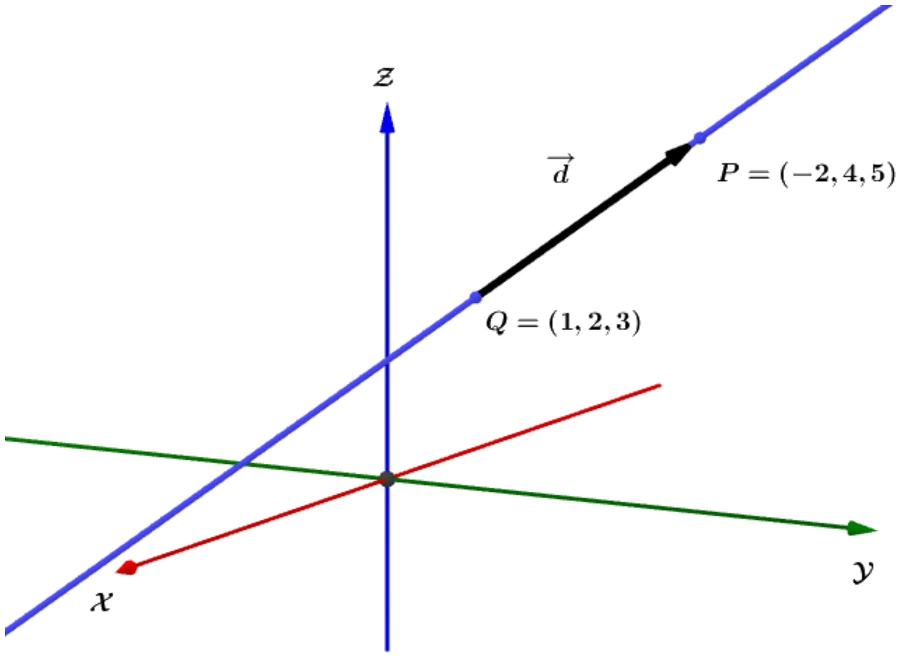
En general, todos los puntos de la recta, tienen la forma

$$L(t) = P + t\overrightarrow{d}, t \in \mathbb{R}.$$

Es decir, el punto más un multiplo del vector director.

Ejemplo 2 Encuentre la ecuación de la recta que pasar por los puntos $P = (1, 2, 3)$ y $Q = (-2, 4, 5)$.

1. Ubicamos los puntos.
2. Encontramos el vector director.
3. Escribimos $L(t) = P + t\overrightarrow{d}$.
4. $\overrightarrow{d} = \langle -2 - 1, 4 - 2, 5 - 3 \rangle = \langle -3, 2, 2 \rangle$.
5. Finalmente $L(t) = (1, 2, 3) + t(-3, 2, 2)$.



Planos en el espacio

Un plano en el espacio queda completamente determinado por 3 puntos, digamos P, Q y R, tal como indica la siguiente figura

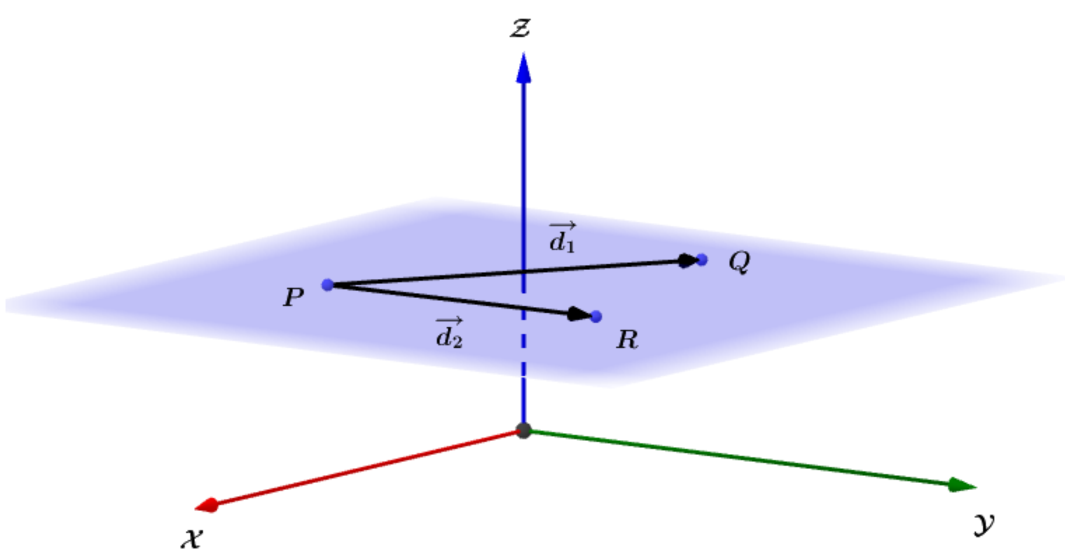


Figura 1.3: Plano por los puntos P, Q y R.

La forma de los puntos es $\mathcal{P}(s,t) = P + s\overrightarrow{d_1} + t\overrightarrow{d_2}$, donde s y t son parámetros reales.

Si $\overrightarrow{d_1}$ y $\overrightarrow{d_2}$ son dos vectores no nulos que tienen un punto común P, entonces el vector $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}$ es un vector normal al plano. La ecuación del plano que pasa por $P = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ y tiene como vector normal a $\overrightarrow{n} = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ es

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle \cdot \langle n_1, n_2, n_3 \rangle = 0.$$

Ejemplo 3 Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P = (1, 0, 0), Q = (0, 2, 0)$ y $R = (0, 0, 3)$.
Solución:

1. Encontramos los vectores directores $\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{PQ} = \langle -1, 2, 0 \rangle$ y $\overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{PR} = \langle -1, 0, 3 \rangle$.

2. Encontramos el vector normal:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \langle 6, 3, 2 \rangle.$$

3. Finalmente, la ecuación del plano está dada por

$$\begin{aligned} \langle x - 1, y - 0, z - 0 \rangle \cdot \langle 6, 3, 2 \rangle &= 0 \\ 6(x - 1) + 3y + 2z &= 0 \\ 6x + 3y + 2z &= 6 \\ x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} &= 1. \end{aligned}$$

El plano que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$ se muestra en la siguiente figura.

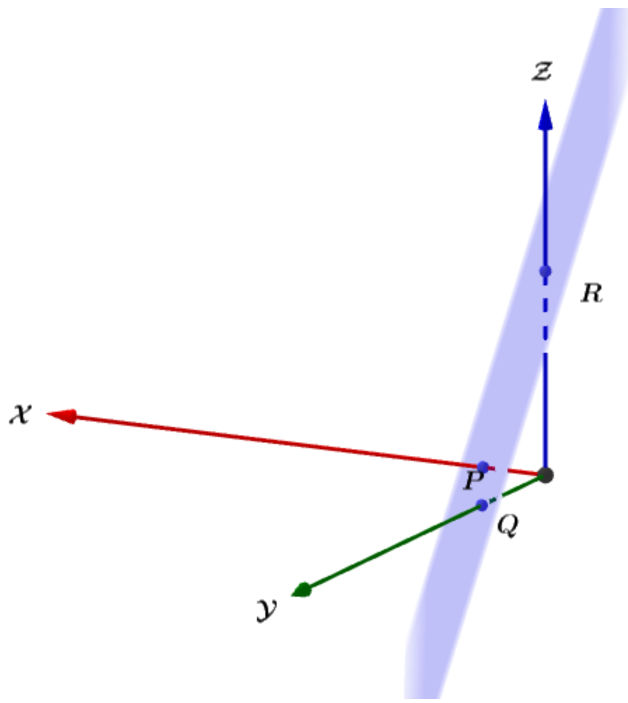


Figura 1.4: Plano por los puntos P, Q y R.