



中国研究生创新实践系列大赛
“华为杯”第二十一届中国研究生
数学建模竞赛

学校 南京林业大学

参赛队号 24102980133

1.朱云杰

队员姓名 2.张涛

3.孙浩

中国研究生创新实践系列大赛
“华为杯”第二十一届中国研究生
数学建模竞赛

题目： 基于数据驱动下磁芯损耗的优化建模

摘要：

随着电子电力技术的发展，对磁性元件也提出了更高的要求。而磁性元件中的磁芯损耗，是实际应用中的关键限制因素，因此对于磁芯损耗的准确建模，对于最小化损耗、节约成本有重要意义。

针对问题一，基于实验数据，通过磁通密度提取特征判断波形类别。首先，本文对数据进行了预处理，检测空数据与异常值。本研究针对数据特点，采用**滑动窗口法**和**四分位距检测**，均未发现异常值。其次，本研究从**统计特征**、**时域特征**、**频域特征**和**几何特征**多角度提取磁通密度的特征，并使用集成了斯皮尔曼相关系数、皮尔逊相关系数、随机森林和决策树的**多模块递进式特征筛选模型**进行筛选特征。最后，本研究使用多种机器学习模型对波形进行分类，使用材料 1 作为训练集，在材料 2、3、4 上验证。在其中，**决策树**和**AdaBoost** 都取得了 100%的准确率。

针对问题二，基于实验数据，修正斯坦麦茨方程，增加**温度 (T) 因子**修正。首先，本研究对数据进行了筛选与数据集的制作，采用 7: 3 划分训练集和测试集。其次，本研究对原斯坦麦茨方程进行了研究，得到其在测试集上 RMSE、MRE、 R^2 分别为 43056.48、39.18% 和 0.9379。接着，本研究从多个角度对原方程进行优化，包括增加**Sigmoid 函数**、增加**T 的多项式**、加入**非线性因子**、使用**T 修正原参数**等。最终优化构建修正方程

$$P_{corrected} = k_0 \left(1 + k_1 T + k_2 T^2 \right) f^{\alpha_0 + \alpha_1 T} \cdot B_m^{\beta_0 + \beta_1 T} / (1 + \gamma_1 T)$$
，使预测磁芯损耗的效果更好，其 RMSE、MRE、 R^2 分别为 8748.34、15.03% 和 0.9975。

针对问题三，分析温度、材料和波形对磁芯损耗的独立及协同影响，并找到使磁芯损耗最小的最优条件。本研究结合频率构建了多元回归函数，采用**岭回归**、**ANOVA 方差检验**对其进行了分析。首先，在独立因素影响中，**波形**对其影响**最显著**，其次是材料，最后是温度。其次，在两两协同影响中，**温度与波形的影响最显著**，温度与材料、波形与材料对损耗的影响不显著。最后，分析确认最小的磁芯损耗条件为**材料 4**、**温度 90℃**、**正弦波**。

针对问题四，构建数据驱动模型，对磁性损耗进行预测。首先，进行数据集的制作，以 8: 2 划分训练集。其次，受问题三的启发，引入**多变量协同变化**，经过多个模型重要性排序，增加**磁通密度峰值和频率**、**材料和磁通密度峰值**、**温度和材料**作为新的融合变量，

接着使用随机搜索对机器学习模型进行**优化超参数**。最后，确定**优化后的梯度提升模型**为最终模型，其 MSE、MRE、R2 分别为 979486838.62、12.34%和 0.993。

针对问题五，在问题四模型基础上，构建一个优化模型，得到最小的磁芯损耗以及最大的传输磁能。首先，本研究构造了**多目标优化的 NSGA-II** 模型。其次，由于分类数据较多，本研究重写了**变异与交叉**函数，使其取值总是在分类范围中，以便结果更精确。然后，本研究通过快速非支配性排序方法得到了 **Pareto** 最优解集。

关键词： 特征筛选、AdaBoost、修正方程、ANOVA 方差检验、多变量协同

目录

一、问题重述	5
1.1 问题背景.....	5
1.2 问题提出.....	5
二、全文技术路线图.....	7
三、基本假设与符号说明.....	8
3.1 基本假设.....	8
3.2 符号说明.....	8
四、问题一的求解：构建励磁波形分类模型.....	9
4.1 问题分析.....	9
4.2 数据预处理.....	10
4.2.1 数据分析.....	10
4.2.2 数据处理.....	10
4.2.3 数据标准化.....	10
4.3 特征筛选.....	11
4.3.1 基于多尺度的特征提取.....	11
4.3.2 基于多模型递进式的特征筛选模型.....	13
4.4 模型建立.....	16
4.4.1 随机森林.....	16
4.4.2 K 近邻.....	17
4.4.3 决策树.....	17
4.4.4 多层感知机.....	17
4.4.5 支持向量机.....	17
4.4.6 梯度提升.....	17
4.4.7 逻辑回归.....	17
4.4.8 AdaBoost.....	18
4.5 分类模型求解.....	19
4.5.1 确立最优分类模型.....	19
4.5.2 模型预测结果统计.....	23
4.5 结论	24
五、问题二的求解：温度适应性斯坦麦茨方程修正.....	25
5.1 问题二分析.....	25
5.2 模型准备.....	26
5.2.1 数据筛选和数据集制作.....	26
5.2.1 基于最小二乘法的方程系数拟合.....	26
5.2.3 评价标准.....	26
5.3 模型建立.....	27
5.3.1 基于原始斯坦麦茨方程计算模型.....	27
5.3.2 基于温度适应性斯坦麦茨方程修正模型.....	28
5.4 模型求解.....	29
5.5 结果分析.....	33
5.6 问题二小结.....	34
六、问题三的求解：三因素磁芯损耗预测模型.....	35

6.1 问题三分析.....	35
6.2 模型建立.....	35
6.3 模型求解.....	37
6.3.1 独立因素模型.....	37
6.3.2 两两协同因素模型.....	37
6.4 结果分析.....	38
6.4.1 独立因素模型.....	38
6.4.2 两两协同因素模型.....	39
6.5 问题四小结.....	40
七、问题四的求解：数据驱动的回归磁芯损耗预测模型.....	41
7.1 问题分析.....	41
7.2 模型准备.....	41
7.2.1 数据准备.....	41
7.2.2 特征融合和选取.....	41
7.3 模型建立.....	43
7.3.1 基于机器学习的磁芯损耗预测模型建立.....	43
7.3.2 基于深度学习的预测模型建立.....	43
7.3.3 融合参数优化的梯度提升预测模型建立.....	43
7.4 模型求解.....	44
7.4.1 基于机器学习的磁芯损耗预测模型求解.....	44
7.4.2 基于深度学习的预测模型求解.....	45
7.4.3 融合参数优化的梯度提升预测模型求解.....	46
7.5 问题四小结.....	47
八、问题五的求解：多目标优化模型构建.....	48
8.1 问题分析.....	48
8.2 模型确立.....	48
8.2.1 遗传算法及改进策略.....	48
8.2.2 基于混合优化的双目标优化模型.....	49
8.3 模型设置.....	54
8.4 模型求解.....	55
8.5 结论.....	55
九、模型评价与改进.....	56
9.1 模型优点.....	56
9.2 模型缺点.....	56
参考文献.....	57

一、问题重述

1.1 问题背景

电能变换技术正以前所未有的速度改变着我们的世界。从通讯网络到数据中心，从新能源发电到电动汽车，电能变换技术无处不在，它如同血液般，将电能输送到社会发展的各个角落。随着国民经济的飞速发展和科技的日新月异，电能变换技术也迎来了新的发展机遇。它不再仅仅局限于简单的电压或频率转换，而是向着更高效、更智能、更绿色的方向不断迈进。

近年来，电能变换技术将与人工智能、大数据等技术深度融合，为各行各业的发展提供了有力支撑。随着电力电子技术的快速发展，包括电感器、磁珠和变压器在内的磁性元件在各种电子设备领域中发挥着至关重要的作用。电感主要用于滤波和储能，而变压器则负责电压变换和电气隔离。磁性元件是电力电子变换器中核心的部件之一，电力电子装置的效率、体积和功率密度不断提升，对磁性元件提出了更高的要求。磁性元件中磁性材料的磁芯损耗是实际应用的关键限制因素，直接影响着装置的整体性能。然而，完全匹配特定装置需求的电感和变压器并不现实，因此，需要对磁性元件进行准确分析和优化设计。

磁性元件中磁性材料的磁芯损耗是实际应用的关键限制因素，实现对磁芯损耗的精确测量和计算是这一切的前提和必要条件。目前，磁性材料的磁芯损耗建模面临许多挑战，涉及多种非线性因素，例如不同的励磁波形、温度、频率和磁通密度等。因此，必须详细研究和分析磁性元件的损耗特性。

目前，传统的磁芯分离模型主要包含两类：损耗分离模型和经验计算模型。损耗分离模型由磁滞损耗、涡流损耗和剩余损耗三部分构成，通过分别计算这些成分的损耗来得到总损耗。磁芯损耗经验计算模型根据实验数据或理论推导得出的经验公式来估算磁芯损耗，是一种简便的方法。斯坦麦茨方程(Steinmetz-equation(SE))是最著名的经验计算模型之一，该模型将磁芯损耗的三个部分视为一个整体，并假设损耗仅取决于磁芯材料、工作频率和磁通密度，从而显著简化了计算公式。

综上所述，磁芯损耗受到温度、材料、频率和磁通密度峰值等因素的影响，但目前缺乏一个普遍适用且精度高的模型来准确评估磁芯损耗。因此，迫切需要开发一个基于数据驱动的高精度模型，能够利用数据挖掘技术，分析特征，以解决磁芯损耗准确评估的难题。

1.2 问题提出

针对 4 种不同磁芯材料所测的数据，根据采集的温度、频率、磁芯损耗、励磁波形和磁通密度相关因素，使用数据挖掘技术建立励磁波形分类模型和基于数据驱动的磁芯损耗预测模型。基于前述研究和提供的附件数据，本文需要研究解决以下问题：

问题 1：构建励磁波形分类模型

针对附件一中四种磁芯元件的磁通密度数据进行数据分析与选择，提取出对应磁芯元件的反映磁通密度分布及波形的形状特征变量。利用特征变量构建分类模型，用以区分出励磁的三种波形，进一步评估其合理性及有效性。最后，应用此模型对附件二的样本进行波形分类。

问题 2：修正斯坦麦茨方程(Steinmetz-equation)

针对斯坦麦茨方程在同种磁芯材料、正弦波形条件下，温度变化所导致的磁芯损耗预测效果存在的差异性问题。在原斯坦麦茨方程基础上，构造一种可适用于不同温度变化的磁芯损耗修正方程，提高磁芯损耗预测效果。并结合附件一材料 1 中正弦波形的数据，分

析对比修正方程与斯坦麦茨方程在磁芯损耗的效果。

问题 3：磁芯损耗影响因素及最优条件分析

针对磁性元件性能的精准提升问题，磁性元件中磁性材料的磁芯损耗是性能提升的关键限制因素。磁芯损耗是磁性元件的设计与优化方面的核心指标。磁芯损耗的主要影响因素分为：温度、励磁波形和磁芯材料。

利用数据分析技术结合附件一的实验数据，研究温度、励磁波形和磁芯材料如何独立及相互影响磁芯损耗。另外，评估这三个因素各自的影响程度，并确定在何种条件下实现磁芯损耗的最小值。

问题 4：构建基于数据驱动的磁芯损耗预测模型

针对传统模型普遍精度不足和适用范围受限的问题。利用数据分析与建模技术，基于附件一中的实验数据，建立磁芯损耗预测模型，并评估该模型的预测精度和泛化能力，以及其对行业的指导意义。并对附件三中的样本磁芯损耗进行预测。

问题 5：磁性元件优化模型

针对磁性元件整体性能的优化问题，采用问题四构建的磁芯损耗预测模型作为目标函数，并加入传输磁能指标，结合附件一中的实验数据，构建优化模型。另外，利用此模型分析在何种条件下（温度、频率、波形、磁通密度峰值及磁芯材料）可以实现磁芯损耗的最小化及传输磁能的最大化。

二、全文技术路线图

本文技术路线如下：

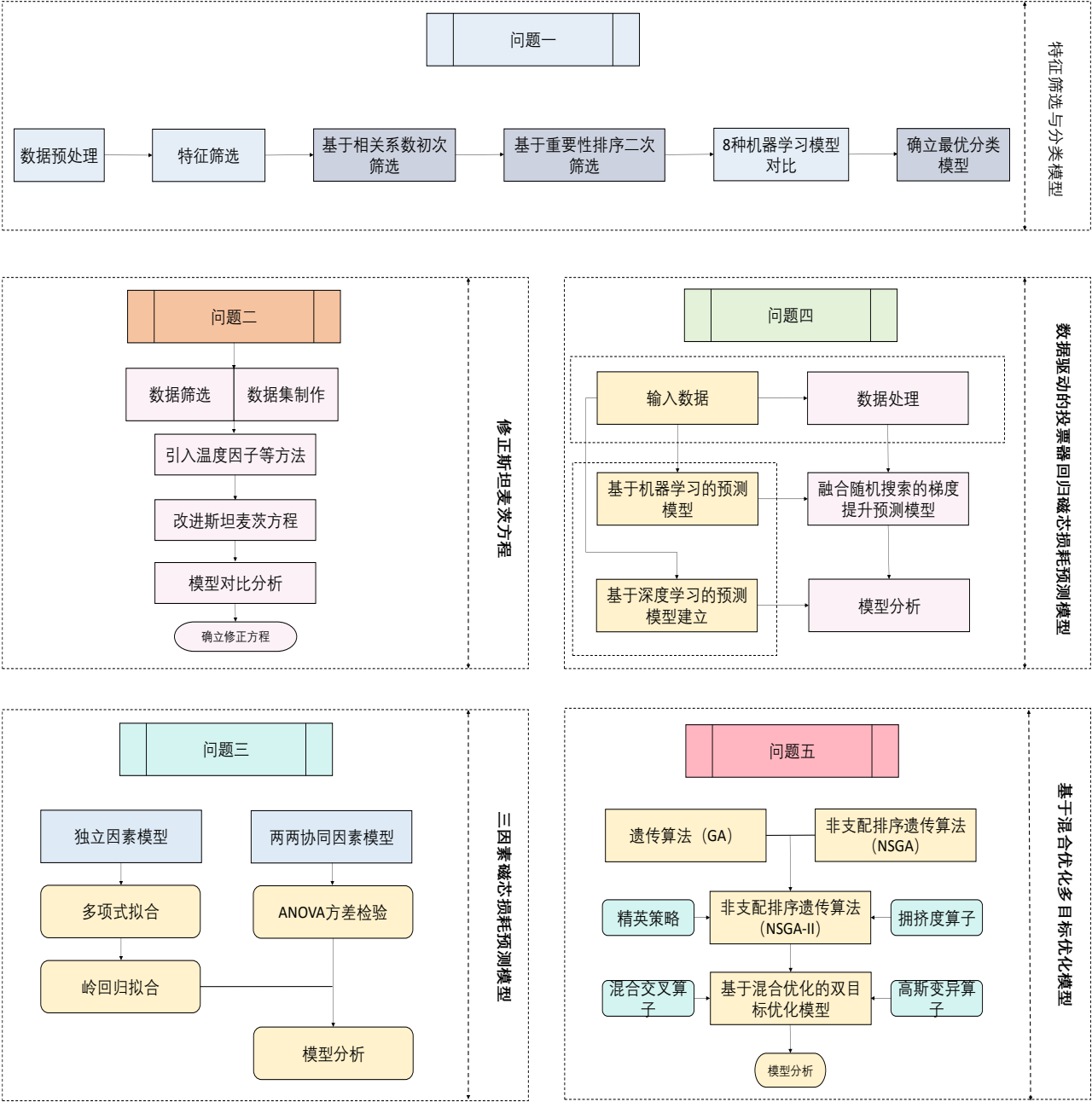


图 2-1 全文技术路线图

三、基本假设与符号说明

3.1 基本假设

假设 1: 假设磁芯损耗与温度、频率、磁通密度峰值等因素之间存在线性或非线性关系。

假设 2: 假设在一定条件下, 磁芯材料的损耗参数 (如斯坦麦茨方程中的系数) 在一定范围内是稳定的。

假设 3: 除题目提供的原始数据外, 不存在其他因素影响。

假设 4: 假设收集到的数据是完整的, 没有缺失值或异常值, 或者可以通过数据预处理步骤来处理这些情况。

假设 5: 假设环境因素 (如湿度) 对磁芯损耗的影响是已知的或可以忽略的
且题中所给出的假设全部成立。

3.2 符号说明

符号	符号说明
x_t	时间序列中的当前数据点
\bar{x}_t	t 移动窗口内的平均值
s_t	同一窗口内的标准差
μ	平均值
σ	标准差
$P(f_i)$	频率 f_i 对应的功率谱密度
V_n	第 n 阶谐波的幅值
V_1	基波幅值
ρ	斯皮尔曼相关系数
d_i	每对等级之间的差异
$h_m(x)$	弱学习器
$f(x_i; \theta)$	模型预测值
R^2	拟合度
f	频率
B_m	磁通密度的峰值
λ	正则化参数
$F^*(X)$	新适应度函数
$F(X)$	原适应度函数
$f_m(i)$	个体 i 在第 m 个目标函数上的值
F_{\max}	种群个体的最大适应度

四、问题一的求解：构建励磁波形分类模型

4.1 问题分析

1) 问题一要求我们根据附件一中的磁通密度数据，对磁通密度分布的特征以及波形形状进行特征提取，选择出对波形分类具有显著影响的特征。在特征变量的基础上，构建分类模型。在特征变量的基础上建立分类模型，验证合理性和有效性。最后，对附件二中的数据进行分类，识别其波形类型，并将结果填入附件四中。

2) 本问题的难点在于：根据附件一中的数据，特征无法确定。在构建分类模型时，多维、小样本数据面临着过拟合的风险，因为许多特征因其固有属性存在高度相关性。为了避免过拟合，需要对特征进行预处理，筛选出重要的、相互独立的特征，从而优化模型性能。对所选取的变量构建分类模型，基于材料一的分类模型在其它材料的波形分类上普适性无法确定。针对耦合变量之间的独立性问题，根据特征关联性原理，构建基于相关系数的特征筛选模型进行初筛。针对模型迁移学习问题，利用 8 种机器学习模型进行对比训练和分析。使用在材料 1 上预训练的模型参数作为材料 2,3,4 的初始参数，并在这些新材料上进行进一步训练，以提高模型在不同数据上的适应能力，找到最优分类模型。

技术路线图如下图 4-1 所示。

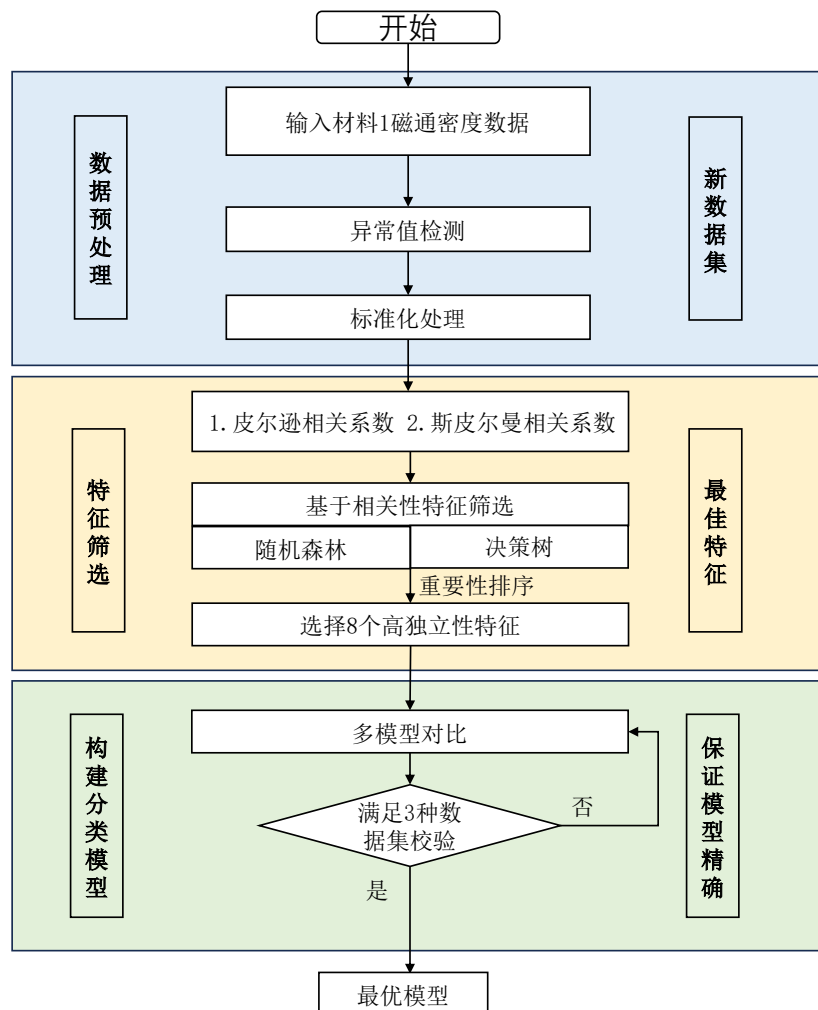


图 4-1 问题一技术路线图

4.2 数据预处理

4.2.1 数据分析

根据所给附件一数据，对原始数据进行可视化分析。可以发现磁通密度数据本质上是一个时间序列。由于采集到的原始磁通密度数据，呈现出较大的波动性和非正态分布特征，部分数据点可能是由测量噪声引起的异常值。为保证数据挖掘的准确性，需要对原始数据进行预处理。

4.2.2 数据处理

1) 缺失值处理

首先，使用 pandas 库对附件一 4 种不同材料种"0（磁通密度 B，T）"进行数据分析，发现数据集中没有缺失值，因此无需进行缺失值的处理。

2) 异常值检测

本文依照过往经验，采用基于移动平均和移动标准差的方法、基于四分位数和四分位距的方法（IQR）和基于 Z-Score 的方法对全部数据进行异常值检测。

1.基于移动平均和移动标准差的方法：

基于移动平均和移动标准差的方法，也称为滑动窗口法。该方法通过在数据集上滑动一个固定大小的窗口 w ，并在每个窗口内计算平均值和标准差来实现。异常值检测公式如下。

$$|x_t - \bar{x}_t| > k \cdot s_t \quad (4-1)$$

x_t 是时间序列中的当前数据点， \bar{x}_t 是时间点 t 的移动窗口内的平均值， s_t 是同一窗口内的标准差。 k 是一个阈值系数，用于确定偏差的程度，通常取值为 2 或 3。

2.基于四分位数和四分位距的方法（IQR）：

基于四分位数和四分位距（IQR）的方法是一种常用的异常值检测方法，尤其适用于非正态分布的数据。

IQR 法利用 Q3 和 Q1 之间的差值来定义异常值。

$$IQR = Q3 - Q1 \quad (4-2)$$

Q1（第一四分位数）是数据中 25% 的值低于这个数，Q3（第三四分位数）是数据中 75% 的值低于这个数。异常值检测 x 公式如下。

$$x \notin [Q1 - 1.5 \times IQR, Q3 + 1.5 \times IQR] \quad (4-3)$$

3.基于 Z-Score 的方法：

Z-score 衡量一个数据点与数据集平均值的距离，以标准差为单位。它可以用来识别那些与数据集其他部分显著不同的数据点，即异常值。通常，Z-Score 绝对值大于 3（或 2）的数据点被认为是异常值。异常检测公式如下。

$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \quad (4-4)$$

x_i 是数据集中的每个值， μ 是平均值， σ 是标准差。

Z-score 检验一般适用于类正态分布数据，而本文数据属于时间序列的连续型数据，因此本研究决定以滑动窗口法的结果为准，即不存在异常值。

4.2.3 数据标准化

Z-score 标准化（也称为标准分数或标准化值）是一种将数据标准化的方法，使得数据的均值为 0，标准差为 1。在训练算法之前对数据进行标准化，以确保所有特征都在相同的尺度上，可以消除不同量纲和量级的影响。标准化公式如下：

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4-5)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \quad (4-6)$$

n 是数据点的数量， μ 是均值， σ 为标准差， $(x_i - \mu)^2$ 表示每个数据点与均值的差的平方，求和后再除以数据点的数量，最后取平方根。

4.3 特征筛选

根据问题一的要求，本文仅限于磁通密度分布特征和波形形状特征来构建波形分类模型。在磁通密度分析和励磁波形分类等任务中，对于复杂的波形分类问题，单一维度的特征难以捕捉到区分不同类别所需的所有复杂模式且无法全面捕捉数据的所有重要信息。为了能全面描述正弦波、三角波和梯形波的不同属性，本文通过在多个尺度上提取特征，使得模型不仅仅依赖于某一特定的尺度，提取能够同时捕捉到这些不同层次的信息从而提高模型对不同尺度变化的适应性和泛化能力。我们提取可以使用的特征为 16 项。参照附件一中材料一的数据，16 项特征不难处理，但可使用的训练样例过少。在高维特征空间中训练深度学习模型面临着独特挑战。模型难以在训练数据上充分拟合，即使使用全部数据进行回归也可能难以获得理想结果。随着特征数量增加，所需数据量呈指数级增长。数据不足会导致模型过度拟合，在训练数据上表现良好但在新数据上泛化能力差。此外，更多特征意味着更高计算复杂度，导致训练和预测时间延长，需要更多计算资源。因此，特征选择至关重要。

4.3.1 基于多尺度的特征提取

不同特征的量纲和数值范围可能差异很大，直接进行特征选择可能会导致误导性的结果。因此，我们将特征分为 5 类，分别为：统计特征、频域特征、时域特征、几何特征和零交叉点。统计特征提供了整体分布信息，时间域特征捕捉了波形的动态变化，频域特征则揭示了信号的频率特性。能量比率特征和波形特征进一步细化了对信号形状和能量分布的理解，帮助有效区分不同波形。同时，零交叉点等特征也有助于分析信号的周期性和频率特性，从而实现更准确的分类。

1) 统计特征

统计特征是一组能够量化描述磁通密度数据集特性的数值。这些特征能够从不同的角度反映数据的统计属性，包括数据的中心趋势、分散程度、对称性、尖峰情况等。我们选取的统计特征如表 4-1 所示。

表 4-1 统计特征

序号	统计特征	属性定义
1	均值	数据的平均值
2	中位数	数据中的中间值
3	方差	数据分布的离散程度
4	偏度	数据分布的对称性
5	峰度	数据分布的尖锐程度

接下来，对统计特征进行求解

1.均值:

$$\text{Mean} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4-7)$$

2.中位数: 取数据中的中间值

3.方差:

$$\text{Variance} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \text{Mean})^2 \quad (4-8)$$

4.偏度:

$$\text{Skewness} = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \text{Mean}}{\text{SD}} \right)^3 \quad (4-9)$$

5.峰度:

$$\begin{aligned} \text{Kurtosis} = & \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \text{Mean}}{\text{SD}} \right)^4 \\ & - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \end{aligned} \quad (4-10)$$

2) 频域特征

频域特征指信号在频谱上的表现, 能反映信号的周期性和变化趋势, 更深入地理解磁通密度的特征。我们选择的频域特征如表 4-2 所示。

表 4-2 频域特征

序号	频域特征	属性定义
1	频谱能量	信号频谱中的总能量
2	带宽	信号包含能量的频率范围
3	频率质心	加权平均的频率值, 权重为频谱幅度
4	总谐波失真	信号中所有谐波与基波的比率

频域特征一般采用傅里叶函数进行特征求解。求解过程如下。

1.频谱能量:

$$\text{SpectrumEnergy} = \sum_{i=1}^N P(f_i) \quad (4-11)$$

$P(f_i)$ 是频率 f_i 对应的功率谱密度。

2.频率质心:

$$\text{CentroidFrequency} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i P(f_i)}{\sum_{i=1}^N P(f_i)} \quad (4-12)$$

3.总谐波失真:

$$\text{THD} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} V_n^2}}{V_1} \quad (4-13)$$

其中 V_n 是第 n 阶谐波的幅值， V_1 是基波幅值。

3) 时域特征

分析磁通密度的分布特征及不同波形的形状特征时，提取出来的时域特征是指直接从信号的时间序列数据中计算得到的一系列描述性统计量。这些特征反映了信号在时间维度上的特性。主要包含峰值，上升时间，下降时间和时间比率等。如表 4-3 所示。

表 4-3 时域特征

序号	时域特征	属性定义
1	峰值	信号的最大幅度
2	上升时间	信号从低到高的变化所需的时间
3	下降时间	信号从高到低的变化所需的时间
4	时间比率	上升时间与下降时间的比率

接下来，对时域特征进行求解

1.峰值:

$$\text{Peak} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4-14)$$

2.时间比率:

$$\text{TimeRatio} = \frac{\text{RiseTime}}{\text{FallTime}} \quad (4-15)$$

4) 几何特征

几何特征通常指的是从磁通密度波形中计算出的一系列描述波形形状的量。这些几何特征可以帮助我们量化波形的特性。几何特征如下：

Shape_Factor(形状因子):通常定义为波峰值与均方根值的比。计算公式如下：

$$\text{ShapeFactor} = \frac{\text{RMS}}{\text{Mean}} \quad (4-16)$$

Area(面积):波形在一个周期内所包围的面积，可以通过数值积分计算得出，反映了波形在周期内的能量。数值积分计算公式如下所示。

$$\text{Area} = \sum_{i=1}^n \frac{f(t_i) + f(t_{i-1})}{2} \Delta t \quad (4-17)$$

$f(t)$ 是波形函数， t_i 是周期内第 i 个采样点的时间， Δt 是相邻采样点的时间间隔， n 是采样点总数。

5) 零交叉点

零交叉点为计算信号从正到负或从负到正的交叉次数。

4.3.2 基于多模型递进式的特征筛选模型

1) 基于相关性的初次筛选

本文依照经验，采用皮尔逊相关系数、斯皮尔曼相关系数对附件一种 4 种材料的 16 项数据相关性分析^[1]。

1、皮尔逊相关系数(Pearson correlation coefficient)

皮尔逊相关系数也称为皮尔逊积矩相关系数，旨在度量两个变量之间线性相关程度的统计量，其范围介于-1 与 1 之间，是一种线性关系强度的统计指标，其公式定义为两个变量的协方差除以它们各自的标准差的乘积：

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (4-18)$$

X_i 和 Y_i 是两个变量的样本值， \bar{X} 与 \bar{Y} 为样本均值， n 为样本数量。
皮尔逊相关性系数如表 4-4 所示。

表 4-4 皮尔逊相关性系数表

皮尔逊相关系数	相关性值	皮尔逊相关系数	相关性值
均值	-0.017502	总谐波失真	0.129099
中位数	-0.711571	峰值	0.442399
方差	-0.011402	上升时间	-0.467695
偏度	0.599436	下降时间	0.467688
峰度	0.442399	时间比率	-0.467685
频谱能量	0.030331	形状因子	0.442399
带宽	-0.026141	面积	0.442399
质心频率	-0.002067	零交叉点	0.204373

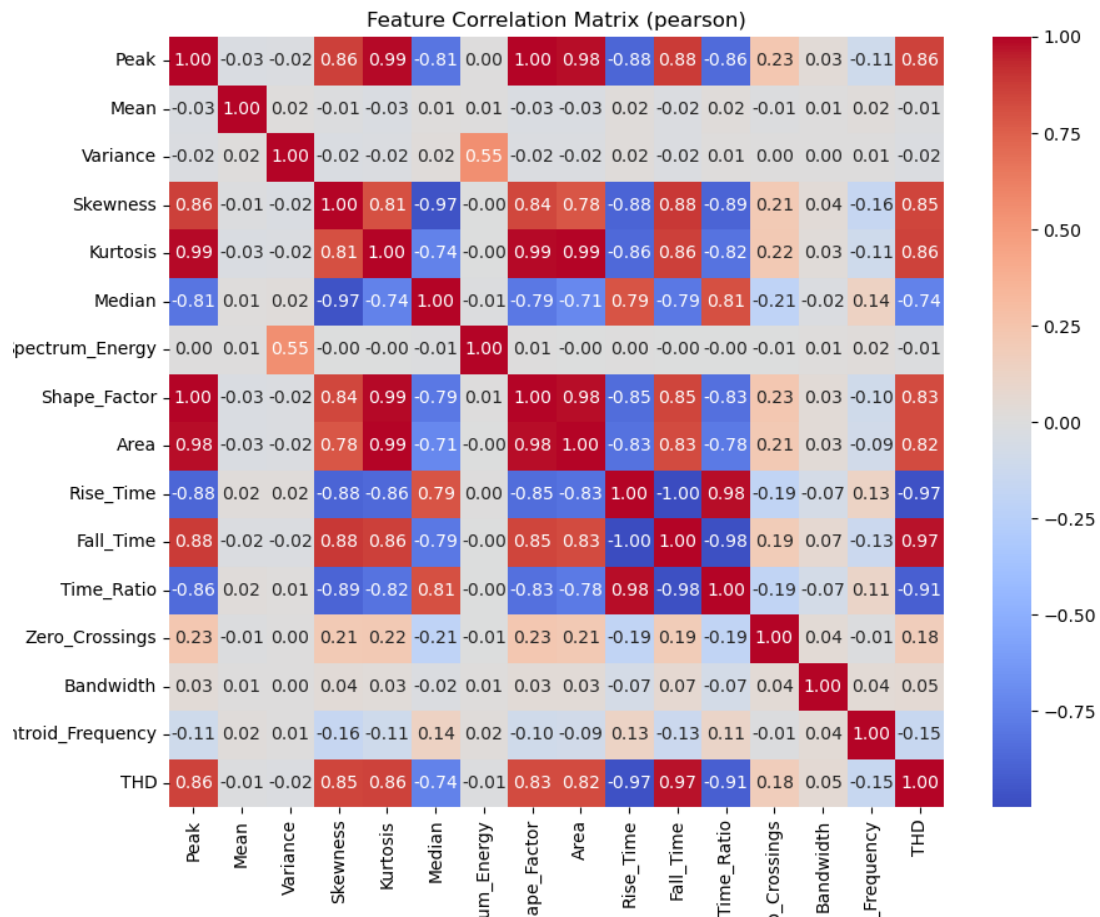


图 4-2 皮尔逊相关性系数图

2、斯皮尔曼(Spearman)相关系数

斯皮尔曼相关系数也称为秩相关系数，是一种非参数统计指标，用于衡量两个变量之间单调关系的强度。它基于数据中变量的排序，而不是原始值本身。公式为：

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma(d_i)^2}{n(n^2 - 1)} \quad (4-19)$$

ρ 是斯皮尔曼相关系数，其取值范围为-1 到 1， d_i 是每对等级之间的差异， n 是观察数或数据点的数量。

斯皮尔曼相关系数表如表 4-5 所示。

表 4-5 斯皮尔曼相关性系数表

斯皮尔曼相关系数	相关性值	斯皮尔曼相关系数	相关性值
均值	0.017502	总谐波失真	0.499822
中位数	-0.711571	峰值	0.442399
方差	-0.011402	上升时间	-0.467695
偏度	0.599436	下降时间	0.467688
峰度	0.442399	时间比率	-0.467685
频谱能量	0.030331	形状因子	0.442399
带宽	-0.026141	面积	0.442399
质心频率	-0.002067	零交叉点	0.204373

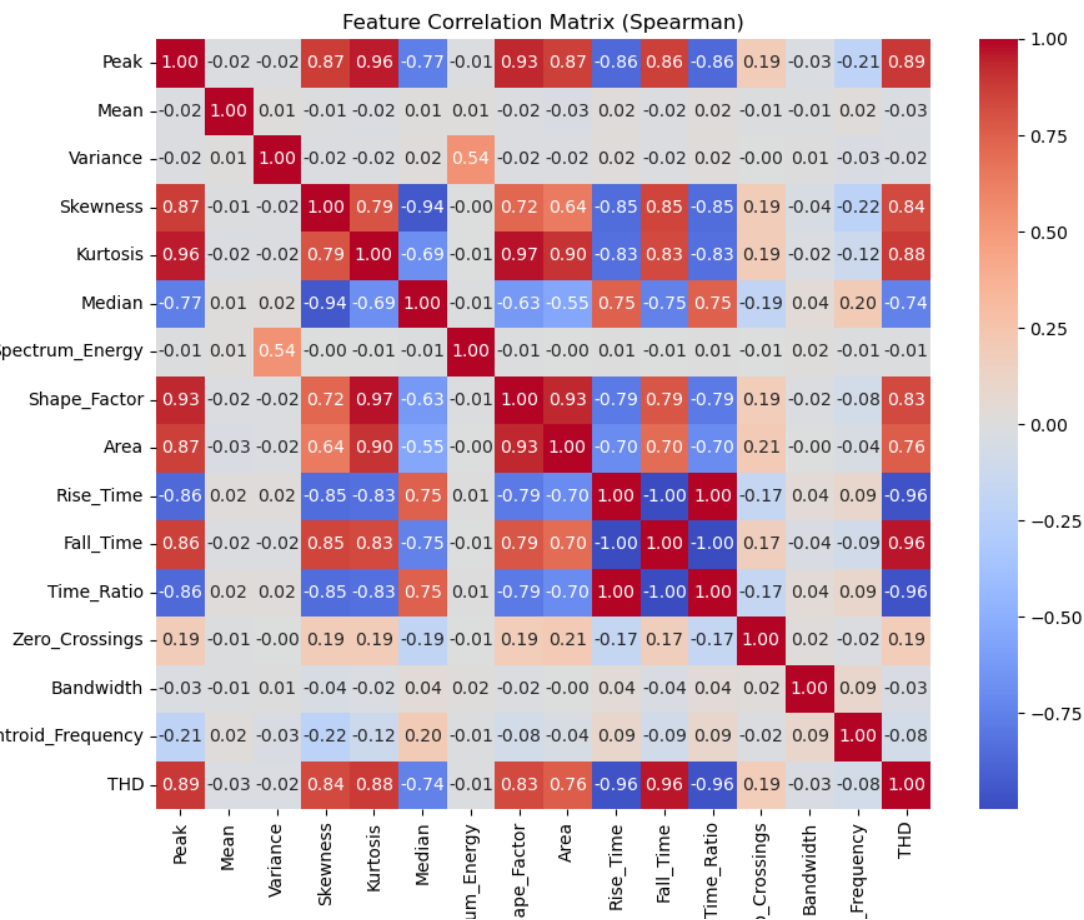


图 4-3 斯皮尔曼相关系数相关性系数图

利用皮尔逊和斯皮尔曼相关系数对数据集中的特征进行相关性分析。皮尔逊相关系数

主要用于评估变量间的线性关系，而斯皮尔曼相关系数则基于秩的方式，更适合于检测非参数和非线性的关系。这两者的结合能够更全面地揭示特征之间的关联性，尤其是在数据不完全符合正态分布或出现异常值时。

在特征选择过程中，分析每个特征与目标变量的皮尔逊和斯皮尔曼相关系数。通过比较这些系数的大小，能够识别出与目标变量具有显著相关性的特征。在这一分析中，特别注意那些在两种相关系数方法下都显示出较强相关性的特征，因为这表明了无论关系形式如何，这些特征与目标变量之间都具有强烈的相关性。

特征重要性由相关性系数取绝对值来确定。偏度和峰值这两个特征的相关性较高，分别为 0.599436 和 0.442399。面积和形状因子相关系数均为 0.442399，展现出对称性和形状变化的重要性。上升时间和下降时间分别与目标变量反映了数据变化动态的重要性，表现出较强的负相关（-0.467695）和正相关（0.467688）。时间比率具有较高的负相关性（-0.467685）。中位数是影响目标变量的一个关键因素，显示出强烈的负相关性（-0.711571）总谐波失真显示出较高的相关性（0.499822），强调了在非线性关系评估中的重要性。

2) 基于重要性的二次精筛

在初次筛选的基础上，通过随机森林和决策树两个模型通分别进行特征重要性排序，提高最优特征筛选的准确度^[2]。特征重要性排序如表所示。

表 4-5 特征重要性排序表

随机森林		决策树	
特征	相关性值	特征	相关性值
峰度	0.192740	面积	0.556519
形状因子	0.177691	峰值	0
面积	0.151366	上升时间	0.443481
峰值	0.599436	平均值	0
总谐波失真	0.098436	方差	0
上升时间	0.065508	偏度	0
下降时间	0.064900	峰度	0
中位数	0.048969	中位数	0

特征重要性排序表体现了随机森林和决策树对于特征排序的表现，发现随机森林的效果要远好于决策树。因此，采用随机森林的特征排序结果。

综上，通过基于相关性特征初筛和基于随机森林的特征重要性精筛的特征筛选策略，可以识别出最与励磁波形相关最高的特征，包括峰度、形状因子、面积、峰值、总谐波失真、上升时间、下降时间和中位数在内的 8 个特征，从而确定了最优特征，为构建更加精准和可靠的预测模型奠定坚实基础。

4.4 模型建立

4.4.1 随机森林

随机森林（RandomForest）是一种集成学习算法，它通过构建多棵决策树并将它们的预测结果进行整合来提高预测的准确性和鲁棒性。随机森林中的每棵树都是独立构建的，并且在构建过程中引入随机性，以增强模型的泛化能力。随机森林预测分类公式如下。

$$\hat{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x) \tag{4-20}$$

$f_i(x)$ 表示第 i 棵树的预测函数，N 是树的总数。

4.4.2 K 近邻

K 最近邻 (K-NearestNeighbors, KNN) 算法是一种基于实例的学习方法, 广泛应用于分类和回归任务。其核心理念是: 样本的类别由其最接近的邻居决定^[3]。具体而言: 通过计算待分类样本与训练集中所有样本间的距离 (如欧氏距离), 找到距离其最近的 K 个样本。然后, 根据这些邻居的已知类别, 通过投票机制来确定待预测样本的类别。

$$y = \begin{cases} \text{mode}(y_i) & \text{for classification} \\ \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K y_i & \text{for regression} \end{cases} \quad (4-21)$$

y_i 是最近邻的类别或属性值, K 是邻居的数量。

4.4.3 决策树

决策树是一种广泛应用的机器学习算法, 适用于分类和回归任务。它通过从数据特征中学习一系列简单的决策规则, 以推断目标值。决策树的基本构成单位为节点, 主要包括决策节点 (内部节点) 和叶节点 (外部节点)。每个决策节点对应一个特征的判断, 而每个叶节点则代表最终的目标值。通过这种层次结构, 决策树能够有效地拆分数据并形成预测模型。

4.4.4 多层感知机

多层感知机 (MLP) 是一种前馈型人工神经网络, 由一个输入层、至少一个隐藏层和一个输出层组成。每一层包含多个神经元, 并且各层之间是全连接的^[4]。MLP 能够有效解决单层感知器无法处理的非线性问题, 这得益于其多层结构以及所使用的非线性激活函数。这种特性使得 MLP 在处理复杂数据模式时表现出色。

4.4.5 支持向量机

支持向量机 (SVM) 是一种经典机器学习算法, 广泛应用于小样本数据集的分类任务。其核心思想是通过构建最优分界面, 将两种不同类别的数据点 (如红色和蓝色) 分开, 并确保最近点与分界线之间的距离尽可能远。在高维空间中, 这条分界线称为超平面, 决定分割效果的点称为支持向量。

4.4.6 梯度提升

梯度提升 (GradientBoosting) 是一种集成学习算法, 它通过迭代地训练决策树, 每次训练一个弱学习器来纠正前一个模型的错误, 从而逐步提升模型的性能。公式如下。

$$F(x) = \sum_{m=1}^M \lambda \cdot h_m(x) \quad (4-22)$$

$F(x)$ 是最终的强学习器, M 为样本个数, $h_m(x)$ 是弱学习器。

4.4.7 逻辑回归

逻辑回归是一种常用于分类问题的统计模型, 特别适合二分类任务。它通过应用逻辑函数 (如 Sigmoid 函数) 将线性回归的输出映射到 0 和 1 之间, 从而预测样本属于各类别的概率。公式如下:

$$p(y = 1|x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta^T x}} \quad (4-23)$$

$p(y = 1|x)$ 是给定特征 x 下样本属于类别 1 的概率， θ 是模型参数， x 为给定特征。

4.4.8 AdaBoost

AdaBoost 采用动态权重调整的思想，根据前一轮弱分类器的错误分类情况，调整样本的权重。被错误分类的样本权重会增加，以便在后续的训练中给予这些样本更多的关注。以决策树作为简单的基线弱分类器，迭代训练多个弱分类器，每个分类器的输出会根据其在训练数据上的表现进行加权组合。最终分类结果是所有弱分类器的加权投票或加权平均。算法流程如下。

1.为每个样本分配初始权重，初始权重设置为相等。

$$w_i = \frac{1}{N} \quad (4-24)$$

N 为样本数量。

2.使用当前权重分布的数据集来训练决策树作为基线弱分类器，并计算每个分类器的错误分类权重之和 e 。

3.根据错误率计算分类器的权重 α ，计算公式为：

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-e}{e}\right) \quad (4-25)$$

4.根据分类结果调整样本权重，错误分类的样本权重增加，正确分类的样本权重减少。新的权重计算方式为：

$$w_i = \frac{w_i \exp(-\alpha y_i G_m(x_i))}{Z} \quad (4-26)$$

Z 为规划因子，确定权重和为 1。

5.重复上述步骤，直到达到预定的分类器数量或满足其他停止条件。

6.将所有弱分类器组合成一个强分类器，最终分类结果是各个弱分类器加权投票的结果。

AdaBoost 结构流程图如图 4-4 所示。

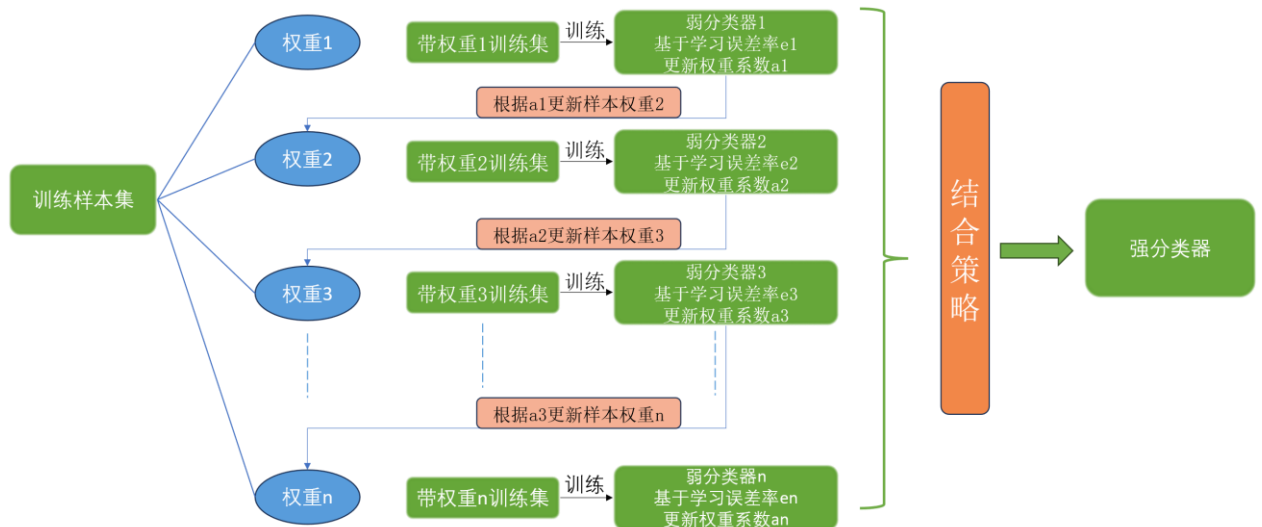


图 4-4 AdaBoost 结构流程图

通过上述方法计算，针对 16 项特征进行特征筛选和相关性排序，得到独立性较高的

10 个特征变量。

为取得尽量好的预测结果,我们选择 K 近邻、决策树、多层感知机、支持向量机(SVM)、梯度提升、逻辑回归、随即森林和基于动态加权的集成学习分类模型进行预测对比, 得出最优的分类模型。

为了简化说明,本文中所有模型均采用 Python 的 scikit-learn 库实现, 并使用默认参数设置。这些模型都是机器学习(深度学习)领域常用的模型。

4.5 分类模型求解

本问根据基于相关性系数的特征筛选模型,将筛选后的特征作为自变量输入到K近邻、决策树、多层感知机、支持向量机(SVM)、梯度提升、逻辑回归、随即森林和基于动态加权的集成学习分类模型中进行预测对比, 得出最优的分类模型^[5]。

为了筛选出最佳模型, 本文采用以下分类算法评价指标来评估各个模型的性能。

本文采用 4 种评价指标来评估结果的优劣: 准确率(Accuracy)、精确率(Precision)、召回率(Recall)和 F1 值(F1)以及混淆矩阵和 ROC 曲线进行可视化分析。以下是这四种指标的计算公式:

$$Accuracy = \frac{TP + TN}{TP + FP + TN + FN} \tag{4-27}$$

$$Precision = \frac{TP}{TP + FP} \tag{4-28}$$

$$Recall = \frac{TP}{TP + FN} \tag{4-29}$$

$$F1 = \frac{2 \times Precision \times Recall}{Precision + Recall} \tag{4-30}$$

为了简化说明,本文中所有模型均采用 Python 的 scikit-learn 库实现, 并使用默认参数设置。这些模型都是机器学习(深度学习)领域常用的模型。

本题首先对附件一材料一数据集进行划分, 按 8: 2 的比例分成训练集和测试集, , 训练我们的模型。

表 4-6 展示了 8 个模型在材料 1 数据的评价指标。所有模型表现良好。

表 4-6 八种机器学习模型在材料 1 上的表现

材料 1		评价指标			
名称	项目	准确率	召回率	F1 值	F1 值
随机森林	训练	1.0	1.0	1.0	1.0
K 近邻	训练	1.0	1.0	1.0	1.0
决策树	训练	1.0	1.0	1.0	1.0
多层感知机	训练	1.0	1.0	1.0	1.0
支持向量机	训练	1.0	1.0	1.0	1.0
梯度提升	训练	1.0	1.0	1.0	1.0
逻辑回归	训练	1.0	1.0	1.0	1.0
AdaBoost	训练	1.0	1.0	1.0	1.0

4.5.1 确立最优分类模型

根据特征筛选, 本文选择了多种相关性分析结果的交集组合作为输入特征。

通过对材料一进行模型训练, 我们发现包括随机森林、K 近邻、决策树、多层感知机、

支持向量机、梯度提升、逻辑回归以及 AdaBoost 分类模型在内的多个模型，都表现出了 100% 的准确率。这一现象表明，我们的特征选择方法非常成功，能够为模型提供足够的信息来区分不同的类别。

在确立最优分类模型的过程中，我们需要综合考虑了模型的泛化能力、稳定性、解释性、计算复杂度以及特征的重要性。因此我们利用多数据集多模型的优点，进行多模态数据集上的模型泛化能力检验。本文利用训练好的模型对材料 2、3 和 4 的数据进行预测，得到预测结果。并计算并记录以下指标：准确率、精确率、召回率和 F1 得分来验证我们模型的合理性。

表 4-7 所示为 8 种机器学习模型准确率、精确率、召回率和 F1 得分的评价情况，可见在材料 2 的分类预测上，大多数模型都表现良好，决策树、支持向量机和 AdaBoost 模型都达到了 100% 的准确率。为了进一步选择最优的分类模型，表 4-8 在材料 3 上做出了进一步验证，发现决策树和 AdaBoost 在所有指标上都达到了 100%。（由于 8 个模型在材料 4 上所有指标均为 100%，本文将不展示材料 4 上的模型表现）

表 4-7 八种机器学习模型在材料 2 上的表现

材料 2		评价指标			
名称	项目	精确率	召回率	F1 值	模型准确率
随机森林	正弦波	0.98	1.00	0.99	0.94
	三角波	0.86	1.00	0.93	
	梯形波	1.00	0.79	0.88	
K 近邻	正弦波	1.00	0.98	0.99	0.99
	三角波	1.00	1.00	1.00	
	梯形波	0.98	1.00	0.99	
决策树	正弦波	1.00	1.00	1.00	1.0
	三角波	1.00	1.00	1.00	
	梯形波	1.00	1.00	1.00	
多层感知机	正弦波	0.91	0.92	0.92	0.88
	三角波	0.86	1.00	0.92	
	梯形波	0.88	0.71	0.78	
支持向量机	正弦波	1.00	1.00	1.00	1.0
	三角波	1.00	1.00	1.00	
	梯形波	1.00	1.00	1.00	
梯度提升	正弦波	0.98	1.00	0.99	0.99
	三角波	1.00	1.00	1.00	
	梯形波	1.00	0.97	0.98	
逻辑回归	正弦波	0.97	0.94	0.96	0.97
	三角波	1.00	1.00	1.00	
	梯形波	0.93	0.97	0.95	
AdaBoost	正弦波	1.00	1.00	1.00	1.0
	三角波	1.00	1.00	1.00	
	梯形波	1.00	1.00	1.00	

表 4-8 八种机器学习模型在材料 3 上的表现

材料 3	评价指标
------	------

名称	项目	精确率	召回率	F1 值	模型准确率
随机森林	正弦波	0.96	1	0.98	0.97
	三角波	0.96	1	0.98	
	梯形波	1.00	0.92	0.96	
K 近邻	正弦波	0.96	0.99	0.98	0.99
	三角波	1	1.00	1.00	
	梯形波	0.99	0.96	0.98	
决策树	正弦波	1.00	1.00	1.00	1.0
	三角波	1.00	1.00	1.00	
	梯形波	1.00	1.00	1.00	
多层感知机	正弦波	0.71	0.95	0.81	0.86
	三角波	1.00	1	1.00	
	梯形波	0.93	0.65	0.76	
支持向量机	正弦波	0.96	1.00	0.98	0.99
	三角波	1	1.00	1.00	
	梯形波	1	0.96	0.98	
梯度提升	正弦波	0.9	1.00	0.98	0.99
	三角波	1.00	1.00	1.00	
	梯形波	1.00	0.96	0.98	
逻辑回归	正弦波	0.90	0.97	0.93	0.96
	三角波	1.00	1.00	1.00	
	梯形波	0.97	0.91	0.94	
AdaBoss	正弦波	1.00	1.00	1.00	1.0
	三角波	1.00	1.00	1.00	
	梯形波	1.00	1.00	1.00	

为了进一步构建最优的分类模型。本文将实际标签与预测标签进行比较，生成混淆矩阵。混淆矩阵则是由 TP、FP、FN、TN 构成，从混淆矩阵中可以清晰地看到错误和正确的分类情况。鉴于所有模型在材料 4 上的所有指标均为 100%，因此我们选取多模型在材料 2 和 3 上的混淆矩阵进行可视化分析。图展示了 8 种模型在材料 2 和 3 上混淆矩阵情况，基于混淆矩阵的分析结果，对角线元素表示正确分类的数量，非对角线元素表示错误分类的数量^[6]。AdaBoost 模型的混淆矩阵对角线元素值最高，非对角线元素值最低，所以 AdaBoost 模型错误率最低。

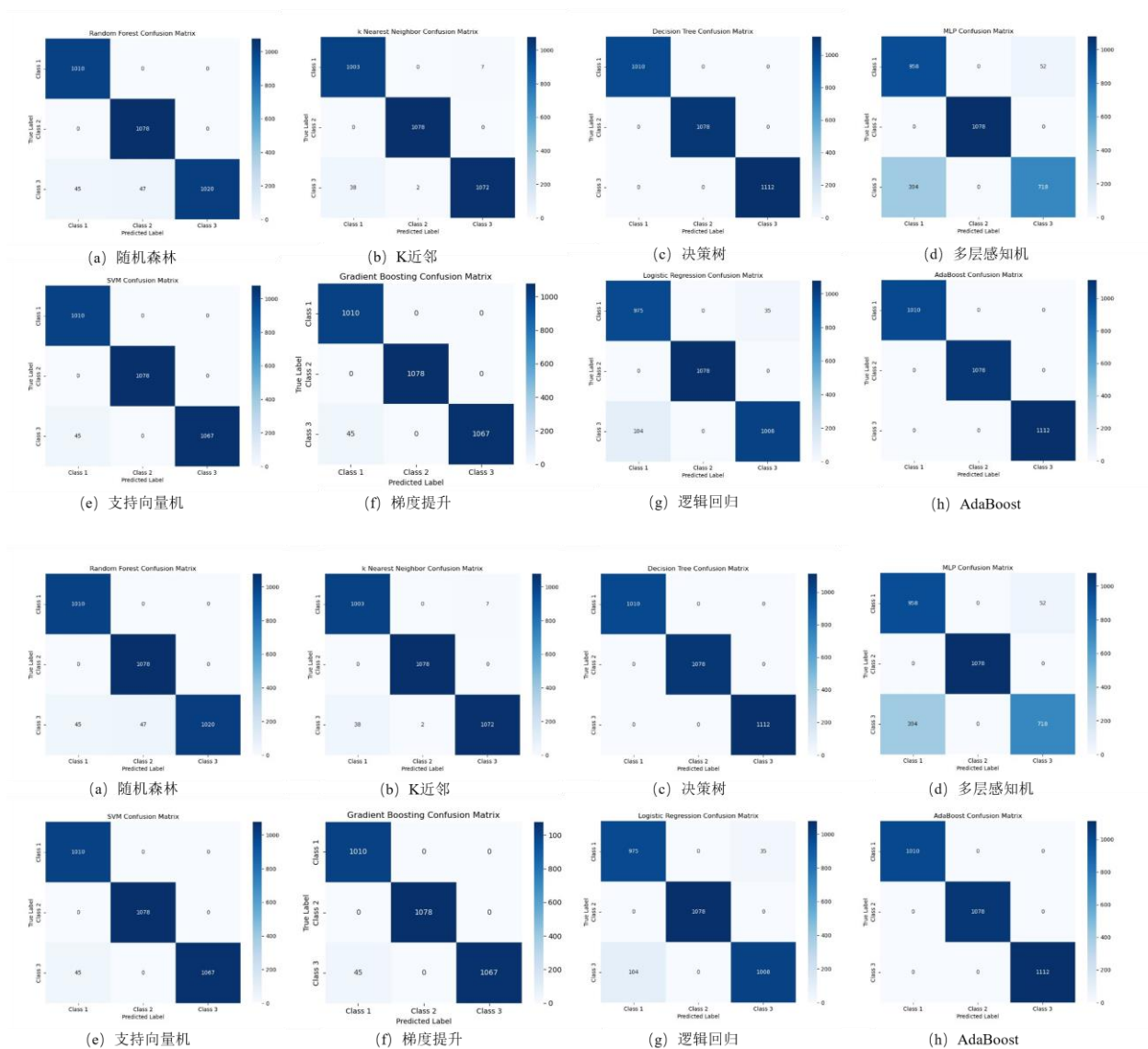


图 4-5 八种模型在材料 2 和 3 上混淆矩阵情况

使用 python 对 8 种模型实现在最优特征下的 ROC 曲线绘制，ROC 曲线用来揭示模型敏感性和特异性的相互对比图。如下图 5-3 所示，可以发现 AdaBoost 模型最接近左上角，模型的性能也最卓越。

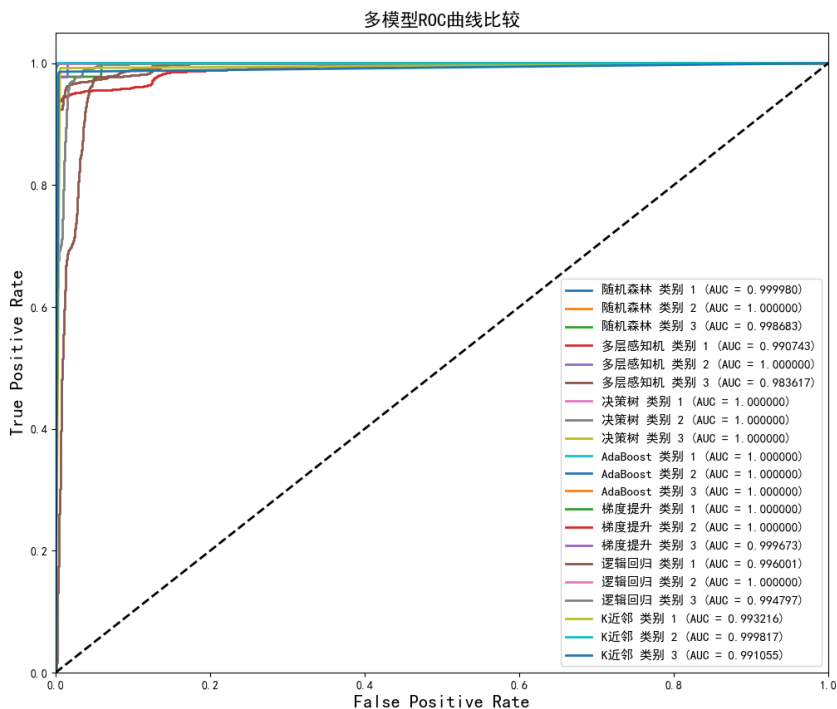


图 4-6 多模型 ROC 曲线比较

综上所述,尽管随机森林和AdaBoost模型分类效果准确度4个评价指标都达到了100%,但在引入混淆矩阵和 ROC 曲线进行深入挖掘后,发现 AdaBoost 模型性能最好,与前文对先验知识的分析更为契合,因此采用基于动态加权的集成学习分类模型 (AdaBoost) 作为本文的最优分类模型。

4.5.2 模型预测结果统计

附件二中有 80 个数据,根据材料 1-4 等额划分,采用我们的基于动态权重的集成学习分类模型 (AdaBoost) 进行波形分类。结果如表 4-9 和 4-10 所示。

表 4-9 波形统计

波形	统计数量 (个)
正弦波	20
三角波	44
梯形波	16

表 4-10 预测分类

序号	预测分类
1	三角波
5	三角波
15	正弦波
25	三角波
35	梯形波
45	梯形波

55	三角波
65	三角波
75	三角波
80	正弦波

4.5 结论

本问在构建最优波形分类模型的过程中，采用了数据预处理、特征提取、相关性分析和多种机器学习模型的方法，解决了如何根据磁性元件的磁通密度数据准确区分正弦波、三角波和梯形波的问题。在特征筛选部分，针对相关性系数构建筛选模型来对特征进行初次筛选，在此基础上引入投票机制汇总结果，进行投票筛选，完成二次精筛选，选择最优特征。在后文模型训练时，发现所筛选特征非常成功。本文将 8 个模型在最优特征的基础上进行训练和测试，在不同的材料上进行验证，通过 4 个评价指标以及可视化分析，发现 AdaBoost 能很好的解决解决了磁性元件励磁波形分类的问题，并确保模型的准确性和泛化能力。

五、问题二的求解：温度适应性斯坦麦茨方程修正

5.1 问题二分析

在探索传统的磁芯损耗模型时，斯坦麦茨方程（Steinmetz-equation，简称 SE）作为一个被广泛采用的经验模型，主要用于计算正弦波励磁下的磁芯损耗。尽管如此，SE 方程在预测不同温度条件下的磁芯损耗时，其准确性受到了一定的限制。为了克服这一局限，本任务旨在开发一个修正版的斯坦麦茨方程，使其能够适应温度变化，从而提升磁芯损耗预测的精度。

在深入分析 SE 方程时，我们注意到该模型主要依赖于频率和磁通密度，而忽略了温度对材料磁性能的影响。众所周知，温度的变化会显著影响材料的磁性能，包括饱和磁感应和损耗特性。因此，在修正方程中引入温度因子，将有助于更准确地反映这些影响。

为了验证修正方程的有效性，我们将使用附件一中的材料 1 数据，特别是正弦波形下的磁芯损耗数据进行对比分析。通过计算原始斯坦麦茨方程和修正方程的磁芯损耗，并比较两者的预测结果，我们可以分析误差并评估修正方程的性能。这一过程将揭示修正方程在不同温度条件下的预测优势，从而为磁性元件的设计和 optimization 提供更为可靠的理论支持。

该问题技术路线如图 5-1 所示。

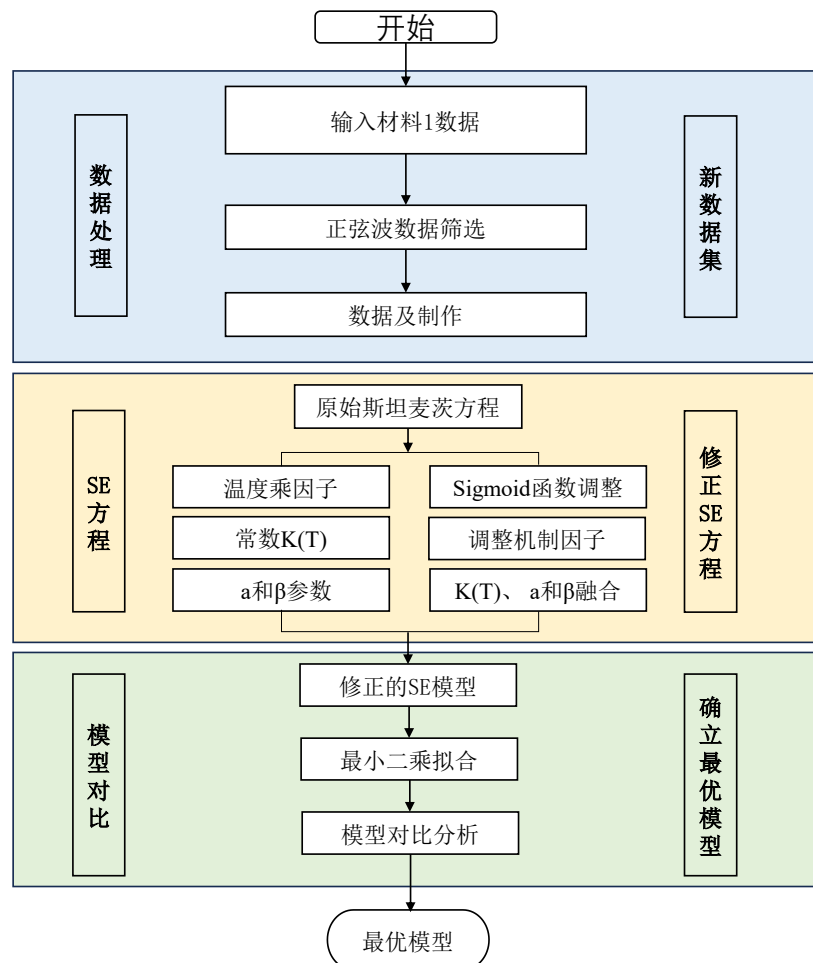


图 5-1 问题二技术路线图

5.2 模型准备

5.2.1 数据筛选和数据集制作

(1) 数据筛选

本文按照题目要求直接使用 excel 筛选工具对附件一材料 1 中的正弦波数据操作，保证数据集中所有数据在同一种磁芯材料、正弦波形下，对于不同温度变化，磁芯损耗预测效果存在的差异性。

(2) 数据集制作

train_test_split 是 scikit-learn（简称 sklearn）库中的一个非常有用的函数，它用于将数据集划分为训练集和测试集。

a) 选择特征变量：频率（f）、磁通密度（Bm）和温度（T）。

b) 数据集划分：本文使用 train_test_split 函数将数据集随机划分为训练集和测试集。训练集用于模型训练，测试集用于模型验证。在 train_test_split 中设置 test_size=0.3 和 random_state=42，确保 30% 的数据用作测试集，70% 的数据用作训练集，同时确保每次运行代码时数据划分的一致性，其余参数保持默认。

5.2.1 基于最小二乘法的方程系数拟合

最小二乘法（LeastSquaresMethod）是一种数学优化技术，它通过最小化误差的平方和来寻找数据的最佳函数匹配^[7]。

损失函数采用残差平方和：

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i; \theta))^2 \quad (5-1)$$

其中， y_i 是观测值， $f(x_i; \theta)$ 是模型预测值， θ 是模型参数。

5.2.3 评价标准

(1) 平均绝对误差（MAE）

平均绝对误差，又叫平均绝对离差，是所有单个观测值与算术平均值的偏差的绝对值的平均。MAE 可以避免误差相互抵消的问题，因而可以准确反映实际预测误差的大小，具体表示如下所示：

$$MAE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |y_i - \hat{y}_i| \quad (5-2)$$

其范围为 $[0, +\infty)$ ，当预测值 y_i 与真实值 \hat{y}_i 完全吻合时等于 0，即完美模型；误差越大，该值越大。MAE 反映的就是真实误差。

(2) 均方根误差（RMSE）

均方根误差，亦称为标准误差，表示如下所示：

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (5-3)$$

其中， y_i 为真实值， \hat{y}_i 为预测值 RMSE 其实是放大了较大误差之间的差距，根号里面类似于线性回归的损失函数，我们把损失函数放在测试集上求得损失值，开根号是为了更

好的描述数据。

(3) 拟合度 (R^2)

拟合度是指回归曲线对观测值的拟合程度，度量拟合优度的统计量是可决系数 $2R$ 。可决系数，亦称测定系数、确定系数、决定系数、可决指数^[8]。

对于 m 个样本 $(\vec{x}_1, y_1), (\vec{x}_2, y_2), \dots, (\vec{x}_m, y_m)$ ，某模型的估计值为 $(\vec{x}_1, \hat{y}_1), (\vec{x}_2, \hat{y}_2), \dots, (\vec{x}_m, \hat{y}_m)$ 计算样本的总平方和 $TSS, TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ ，残差平方和 $RSS, RSS = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2$ 。

定义 $R^2 = 1 - RSS / TSS$ ，如下式所示：

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (Y_{actual} - Y_{predict})^2}{\sum (Y_{actual} - Y_{mean})^2} \quad (5-4)$$

其中，分子使我们训练出来的模型预测的所有误差，分母表示期望样本误差。 R^2 越大，拟合效果越好。 R^2 的最优值为 1，若预测模型为随机值， R^2 有可能为负值；若预测值恒为样本期望， R^2 为 0。

(4) 平均相对误差 (MRE)

平均相对误差是一种衡量预测模型预测精度的指标，它通过计算预测值与实际值之间相对误差的平均值来评估模型的性能。MRE 提供了一个关于模型在相对尺度上误差大小的度量，尤其适用于那些数据点的绝对误差大小差异较大的情况。公式如下所示：

$$MRE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \quad (5-5)$$

其中 n 是样本数量， y_i 是第 i 个实际值， \hat{y}_i 是第 i 个预测值。

5.3 模型建立

5.3.1 基于原始斯坦麦茨方程计算模型

经验计算模型提供了一种简便的方法来估算磁芯损耗，这些模型通常基于实验数据或理论推导形成的经验公式。在这些模型中，斯坦麦茨方程 (Steinmetz Equation, 简称 SE) 因其简洁性而在磁芯损耗估计领域享有盛誉，允许进行高效率的损耗计算评估。然而，由于其固有的局限性，SE 方程主要适用于正弦波形条件下的分析。当涉及到不同类型的磁芯材料或在温度变化的环境下，SE 方程可能无法提供准确的预测，从而在实际工程应用中引入了额外的困难和复杂性。幸运的是，已有研究者对 SE 方程进行了创新性的改进和修正，以期提高其在更广泛条件下的适用性和准确性^[9]。

滞后损耗密度可以表示为：

$$P = k_1 \cdot f^{\alpha_1} \cdot B_m^{\beta_1} \quad (5-6)$$

其中： P 为磁芯损耗； f 是频率； B_m 是磁通密度的峰值； k_1 、 α_1 、 β_1 是根据实验数据拟合的系数，一般 $1 < \alpha_1 < 3$ ， $2 < \beta_1 < 3$ 。

5.3.2 基于温度适应性斯坦麦茨方程修正模型

温度是影响磁芯损耗的重要因素之一。在磁性材料中，温度的变化会显著影响其磁导率和损耗特性。随着温度的升高，材料的磁导率通常会降低，这导致磁芯在相同工作条件下的损耗增加。具体来说，斯坦麦茨方程可以用来描述磁芯损耗，但该方程未考虑温度的影响，为了更准确地描述温度对磁芯损耗的影响，我们可以引入温度修正项^[10]，考虑到温度影响效应，本文构造如下 6 种修正方程：

(1) 参照斯坦麦茨方程，考虑到温度是影响磁性材料内部微观磁化过程的关键因素，直接将温度因子作为乘因子纳入斯坦麦茨方程。修正方程 1 如下式所示：

$$P_{corrected} = k_1 \cdot f^{\alpha_1} \cdot B_m^{\beta_1} \cdot T^{\gamma_1} \quad (5-7)$$

(2) 使用 Sigmoid 函数调整 SE 方程，主要是考虑到温度的非线性的实际影响，能够更加平滑处理温度对于磁芯损耗的影响。修正方程 2 如下式所示：

$$P_{corrected} = k_1 \cdot f^{\alpha_1} \cdot B_m^{\beta_1} \cdot \sigma(T) \quad (5-8)$$

其中： $\sigma(T)$ 是一个 Sigmoid 函数，描述了温度对损耗影响的非线性效应。Sigmoid 函数 $\sigma(x)$ 定义为：

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)} \quad (5-9)$$

(3) 将常数 $k(T)$ 定义为关于温度 T 的函数，既考虑到线性又考虑到非线性。修正方程 3 如下所示：

$$P_{corrected} = k(T) \cdot f^{\alpha_1} \cdot B_m^{\beta_1} \quad (5-10)$$

其中 $k(T) = k_0 (1 + k_1 T + k_2 T^2)$ 。

(4) 磁性材料的损耗特性通常对温度非常敏感，引入一个温度相关的调整机制因子 $\frac{1}{1 + \gamma_1 T}$ ，使得在高温或低温下磁芯的损耗特性能够得到适当的调整，同时可以考虑温度的非线性。修正方程 4 如下所示：

$$P_{corrected} = K(T) f^{\alpha_1} \cdot B_m^{\beta_1} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_1 T} \quad (5-11)$$

其中 $k(T) = k_0(1 + k_1 T + k_2 T^2)$ 。

(5) 磁性材料的损耗不仅与材料常数有关，还与频率和磁通密度的指数关系有关，因此对 α 和 β 两个参数定义为关于温度 T 的函数。修正方程 5 如下所示：

$$P_{corrected} = k(T) f^{\alpha(T)} \cdot B_m^{\beta(T)} \quad (5-12)$$

其中 $k(T) = k_0(1 + k_1 T + k_2 T^2)$ ， $\alpha(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T$ ， $\beta(T) = \beta_0 + \beta_1 T$ 。

(6) 通过 $k(T)$, $\alpha(T)$, 和 $\beta(T)$ 的引入，模型考虑了温度对磁芯损耗各个因素的影响，提供了一个更全面的描述。修正方程 6 如下所示：

$$P_{corrected} = k(T) f^{\alpha(T)} \cdot B_m^{\beta(T)} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_1 T} \quad (5-13)$$

其中 $k(T) = k_0(1 + k_1 T + k_2 T^2)$ ， $\alpha(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T$ ， $\beta(T) = \beta_0 + \beta_1 T$ 。

5.4 模型求解

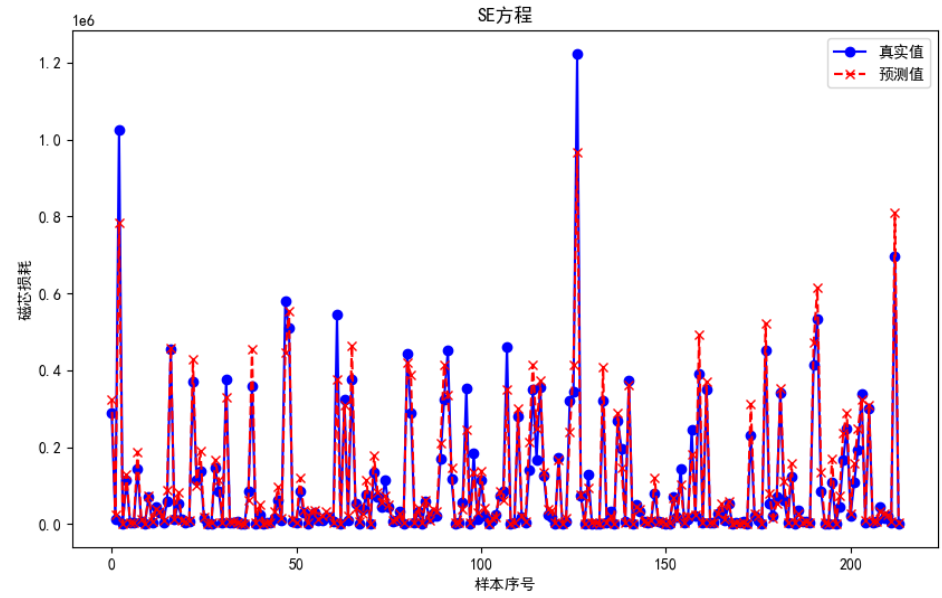
本题针对在原斯坦麦茨方程基础上，增加温度这个因素，以适应不同温度变化，构造一种可适用于不同温度变化的磁芯损耗修正方程，并比较构造的修正方程与斯坦麦茨方程哪个效果更好。本文主要使用最小二乘法进行拟合方程系数，将附件一材料 1 中正弦波数据进行训练和测试。为评估模型性能，使用 MAE、RMSE、MSE、R2、MRE 作为模型的评价指标的评价指标，并通过可视化手段展示模型的预测情况。最终，通过分析修正前后模型的优劣，确定预测磁芯损耗效果最佳的模型^[11]。

本文首先通过实验数据拟合出模型的参数，使用最小二乘法优化拟合的方程参数，具体方程参数如表 5-1 所示。

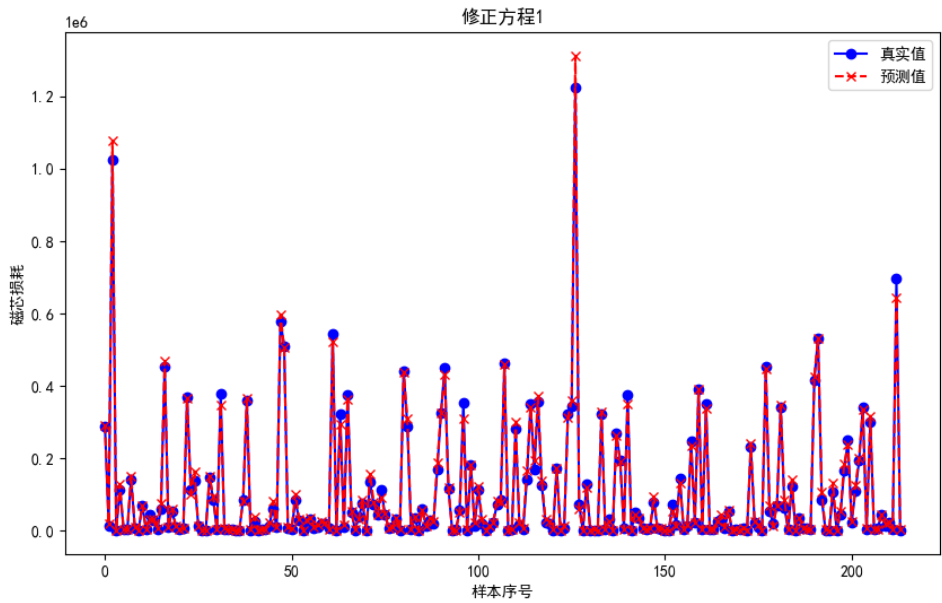
表 5-1 不同方程拟合的系数

构建不同方程	k_0	k_1	k_2	α_0	α_1	β_0	β_1	γ_1
原始 SE 方程	×	1.61	×	×	1.42	×	2.43	×
修正方程 1	×	1.61	×	×	1.42	×	2.43	
修正方程 2	×	2.16	×	×	1.39	×	2.41	×
修正方程 3	1.52	-0.01	7.45	×	1.48	×	2.47	×
修正方程 4	1.68	-0.01	6.52	×	1.48	×	2.47	0.01
修正方程 5	1.99	-0.015	8.09	1.43	0.0008	2.32	0.003	×
修正方程 6	72.0	-0.02	8.71	1.27	0.004	2.20	0.005	0.50

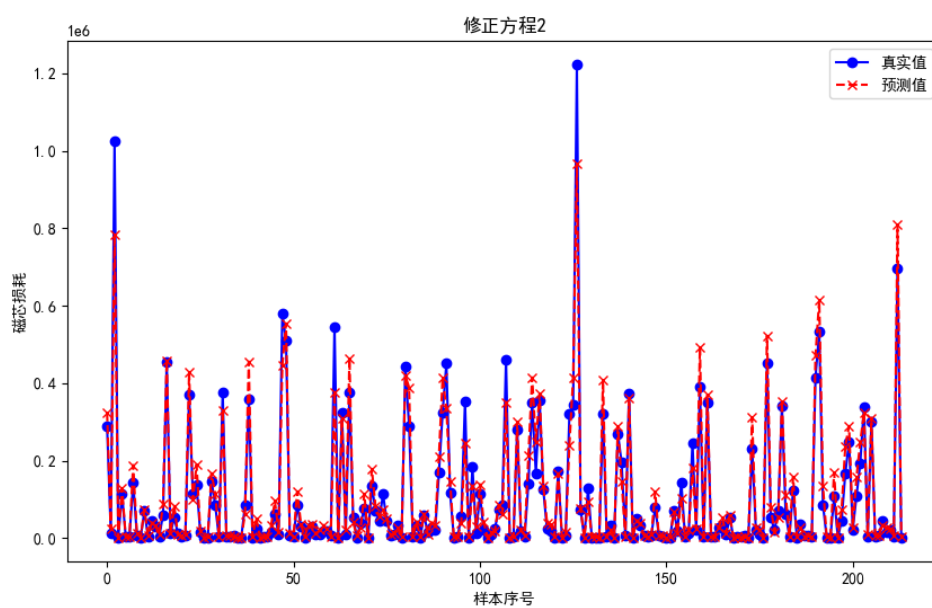
不同构建的方程测试集磁芯损耗的实际值和预测值的对比图如下图 5-1 所示：



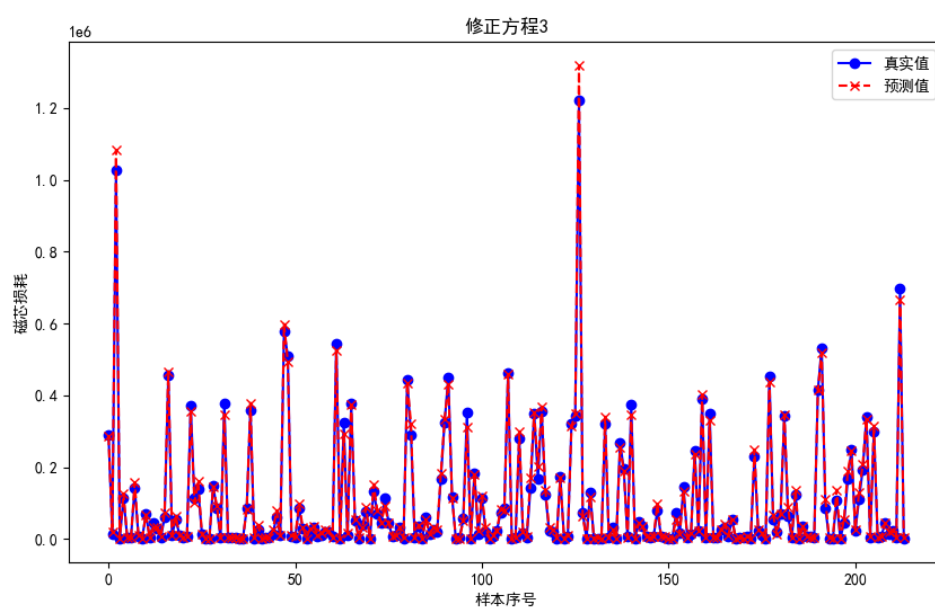
(a) 原始 SE 方程



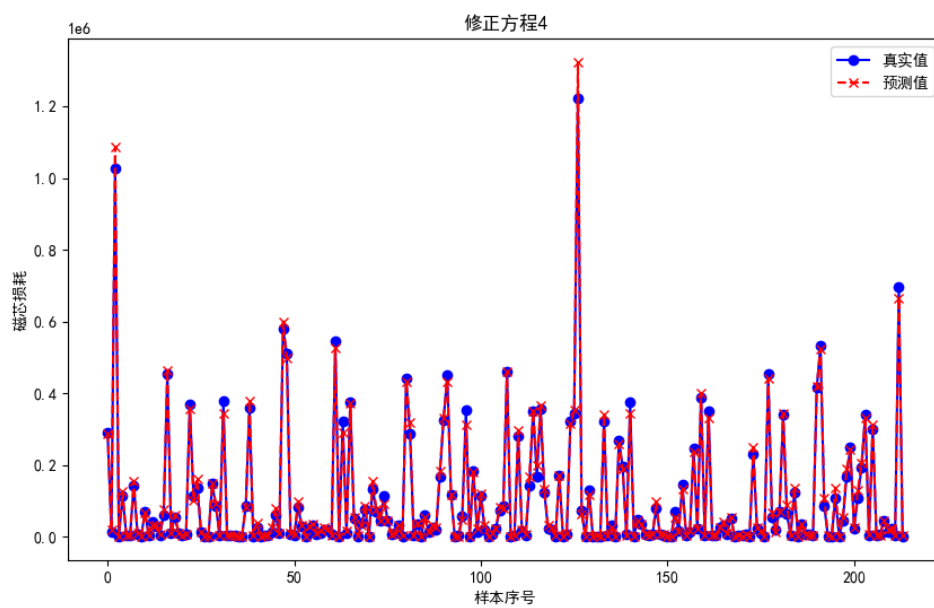
(b) 修正方程 1



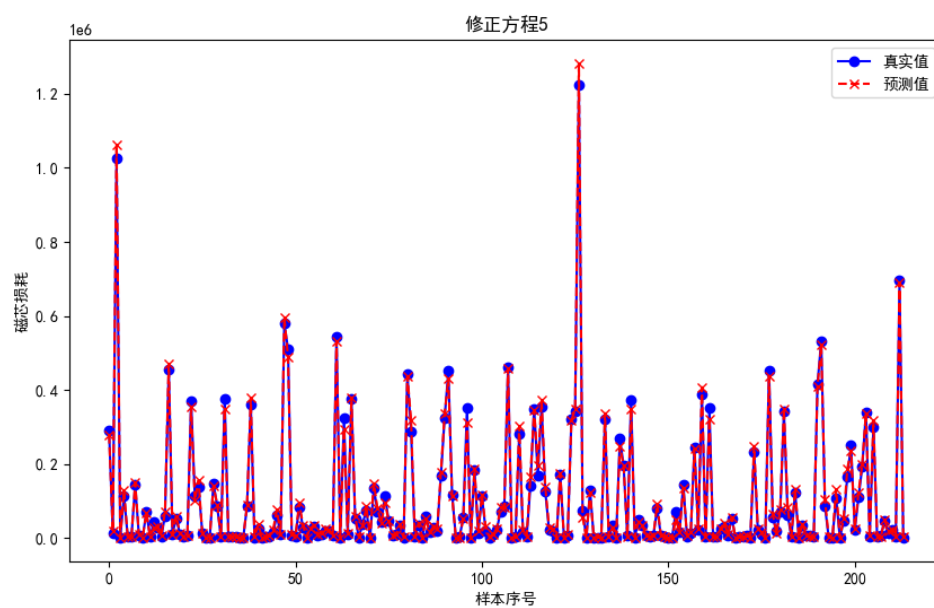
(c) 修正方程 2



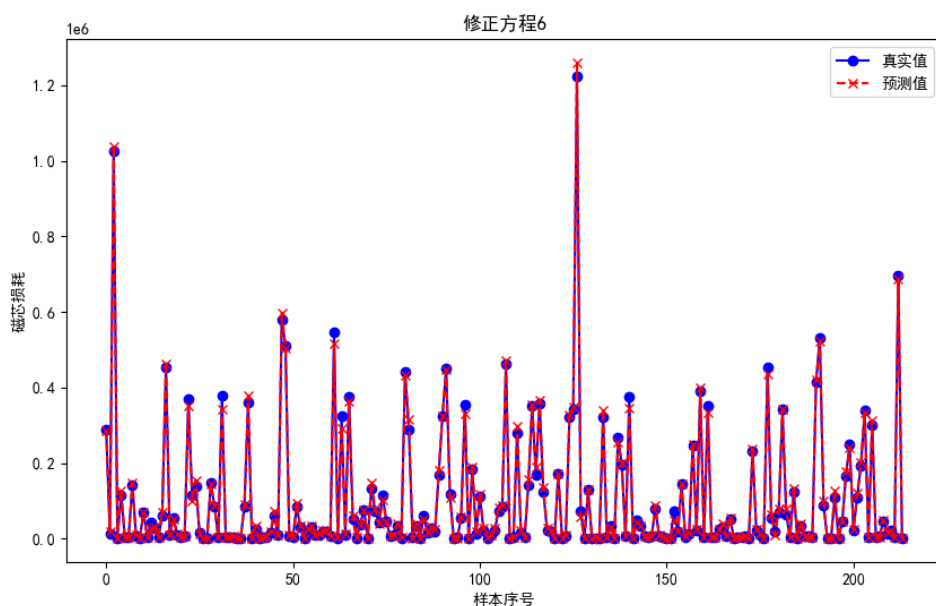
(d) 修正方程 3



(e) 修正方程 4



(f) 修正方程 5



(g) 修正方程 6

图 5-1 测试集数据上真实值和预测值对比图

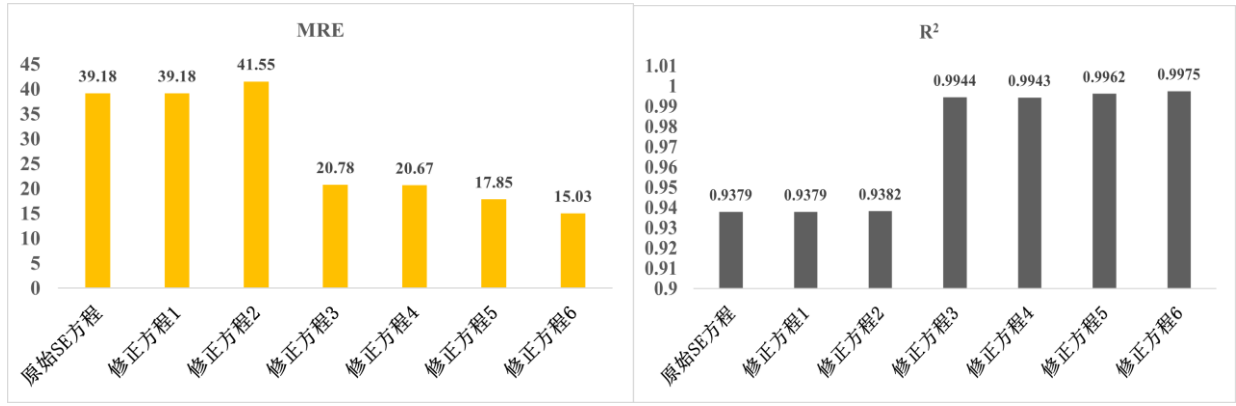
5.5 结果分析

根据上述评价标准中的评价指标对原始 SE 和构建修正模型的 RMSE、MAE、MRE 以及拟合度 R^2 进行计算，得到结果如下表 5-2 所示，再根据四种模型的评价指标绘制出统计图进行清晰可观的对比分析，绘制的模型对比图如下图 5-2 所示。

表 5-2 原始 SE 和构建修正方程结果分析

方程	RMSE	MAE	MRE	R^2
原始 SE 方程	43056.48	22626.31	39.18	0.9379
修正方程 1	43056.49	22626.32	39.18	0.9379
修正方程 2	43106.97	22341.74	41.55	0.9382
修正方程 3	12961.56	7262.01	20.78	0.9944
修正方程 4	13028.52	7151.14	20.67	0.9943
修正方程 5	10712.01	6498.47	17.85	0.9962
修正方程 6	8748.34	5387.75	15.03	0.9975





(c) MRE

(d) R²

图 5-2 不同方程的指标评价可视化

四种评价指标中 RMSE、MAE 和 MRE 值越小模型预测值越接近实际值；拟合度的 R² 越大，模型对数据集拟合度越好。在对比分析原始 SE 方程与本文构建的方程时，我们注意到修正方程 6 在测试集上的表现尤为出色。具体来说，修正方程 6 的预测模型在测试集上展现出较低的均方根误差（RMSE）、平均绝对误差（MAE）以及平均相对误差（MRE）值，这些指标的低值表明模型的预测精度较高。同时，修正方程 6 的拟合优度（R²）值是最高的，这意味着模型能够更好地解释数据中的变异性，与实际数据的吻合度更高。

此外，修正方程 6 的这些优势不仅体现在数值上，还意味着在实际应用中，该模型能够提供更为可靠的磁芯损耗预测。

5.6 问题二小结

通过对比原始 SE 方程和构建修正方程，可以得出：本文提出的修正方程 6 预测磁芯损耗的效果最好，所以采用该修正方程作为第二问修正方程。完整形式如下：

$$P_{corrected} = k_0 \left(1 + k_1 T + k_2 T^2 \right) f^{\alpha_0 + \alpha_1 T} \cdot B_m^{\beta_0 + \beta_1 T} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_1 T} \quad (5-14)$$

构建的修正方程 6 在预测磁芯损耗方面展现出了卓越的性能，其预测结果的准确性和可靠性得到了充分的验证。这一成果不仅为磁芯损耗的理论研究提供了新的视角，也为相关工程实践提供了有力的工具。未来的研究可以进一步探索修正方程 6 在不同条件下的适用性，以及如何将其与其他模型或算法结合，以实现更全面的磁芯损耗预测和分析。

六、问题三的求解：三因素磁芯损耗预测模型

6.1 问题三分析

根据题目要求，磁芯损耗的高低受到多种因素的影响，但在这些因素中，温度、励磁波形和磁芯材料是最为关键的三个。这三个因素不仅单独作用于磁芯损耗，它们之间还可能存在相互作用，共同影响损耗的表现。要深入理解这些因素如何独立以及共同影响磁芯损耗，我们需要进行细致的数据分析。通过分析实验数据，我们可以量化每个因素单独对磁芯损耗的影响，同时探索这些因素如何两两之间相互作用，以及它们的协同作用对磁芯损耗的具体影响。此外，通过评估这些因素的相对重要性，我们可以确定哪些因素对磁芯损耗的影响更为显著。

本文最终目标是找出在哪些条件下，即特定的温度范围、励磁波形类型和磁芯材料选择下，磁芯损耗能够达到最低。这不仅需要我们识别出各个因素的最优组合，还需要我们理解这些因素如何在不同的工作条件下相互作用，以达到最佳的性能表现。

具体流程图如图 6-1 所示。

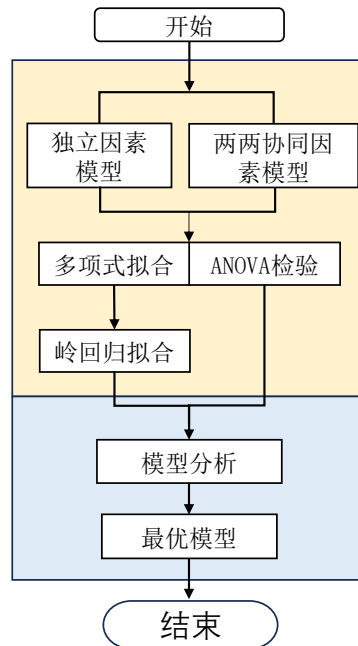


图 6-1 问题三技术路线图

6.2 模型建立

(1) 多项式拟合基本原理

多项式拟合的目标是找到一个多项式函数 $P(x)$ ，使得该函数尽可能地接近所有数据点 (x_i, y_i) 。多项式函数通常表示为：

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \quad (6-1)$$

其中， $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 是多项式的系数， n 是多项式的最高系数。

首先对温度(T)、励磁波形(W)和磁芯材料(M)三个因素进行分析,对于励磁波形和磁芯材料没有具体数值,不便进行多项式拟合,本文使用映射的方法将正弦波、三角波和梯形波映射成 1、2、3,材料 1、材料 2、材料 3、材料 4 映射成 1、2、4、8。如表 6-1 所示。

表 6-1 励磁波形(W)和磁芯材料(M)的映射数值

初始	映射
正弦波	1
三角波	2
梯形波	3
材料 1	1
材料 2	2
材料 3	4
材料 4	8

本文根据附件的数据,认为频率(f)也是影响磁芯损耗的直接因素。因此,本文使用多项式回归进行拟合参数来表达磁芯损耗值,独立影响磁芯损耗具体公式如下:

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 f + \alpha_2 T + \alpha_3 W + \alpha_4 M \quad (6-2)$$

其中 α_0 、 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 为方程系数。

两两之间协同影响磁芯损耗具体公式如下:

$$P = \beta_0 + \beta_1 f + \beta_2 T + \beta_3 W + \beta_4 M + \beta_5 T \cdot W + \beta_6 W \cdot M + \beta_7 M \cdot T \quad (6-3)$$

其中, β_0 、 β_1 、 β_2 、 β_3 、 β_4 、 β_5 、 β_6 、 β_7 为方程系数, $T \cdot W$ 反映温度和波形的协同关系, $W \cdot M$ 反映波形和材料的协同关系, $M \cdot T$ 反映材料和温度的协同关系。

(2) 岭回归拟合

基本原理:岭回归通过在最小二乘损失函数中添加一个正则项,来减少模型复杂度,从而避免过拟合。这种方法特别适用于特征数量多于样本数量的情况^[12]。

岭回归的目标函数是最小化以下公式:

$$\min \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij})^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \quad (6-4)$$

其中: y_i 是第 i 个样本的目标值, x_{ij} 是第 i 个特征在第 j 个特征上的值, β_j 是第 j 个特征的系数, λ 是正则化参数,控制正则项的权重, n 是样本数量, p 是特征数量。

(3) 多元 ANOVA 方差检验

多元 ANOVA (也称为多因素 ANOVA 或多因素方差分析), 是一种用于分析两个或多个分类自变量对一个连续因变量的影响的统计方法。当研究涉及多个独立变量时, 多元 ANOVA 可以帮助研究者了解这些变量及其交互作用对结果的影响。

a) F 统计量

用于测试组间方差与组内方差的比率。高 F 值表明组间差异较大，可能表明至少一个组的均值与其他组不同。

b) P 值

表示在零假设（所有组均值相等）为真的情况下，观察到当前或更极端的 F 统计量的概率。如果 P 值小于显著性水平（通常为 0.05 或 0.01），则拒绝零假设，认为至少有一个组的均值与其他组存在显著差异。

c) df 自由度

组内自由度和组间自由度。自由度用于计算 F 统计量和确定 P 值。

6.3 模型求解

6.3.1 独立因素模型

本文对温度(T)、励磁波形(W)和磁芯材料(M)三个因素进行岭回归拟合参数，具体值如表 6-2 所示。

表 6-2 独立因素模型系数

回归系数项	估计值
α_0	126709.62
T	-1092.16
W	89685.89
M	-10784.55

残差分析如图 6-2 所示。

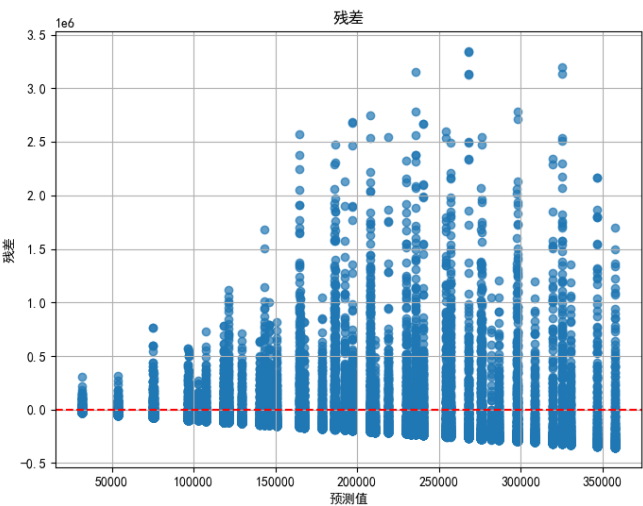


图 6-2 独立因素模型残差分析

残差图将模型的拟合值与实际值之间的差值（即残差）绘制成散点图,并且呈现出随机分布，没有明显的趋势或模式，则表明模型拟合效果较好。

6.3.2 两两协同因素模型

本文对 $T \cdot W$ 反映温度和波形的协同关系、 $W \cdot M$ 反映波形和材料的协同关系和 $M \cdot T$ 反映材料和温度的协同关系进行拟合求解系数结果为表 6-3 所示。

表 6-3 两两协同因素模型系数拟合

回归系数项	估计值
-------	-----

β_0	7.44e+04
T	-41.98
W	1.25e+05
M	-1.76e+04
T:W	-677.85
T:M	71.98
W:M	1392.19

两两协同因素协同作用如图 6-3 所示。

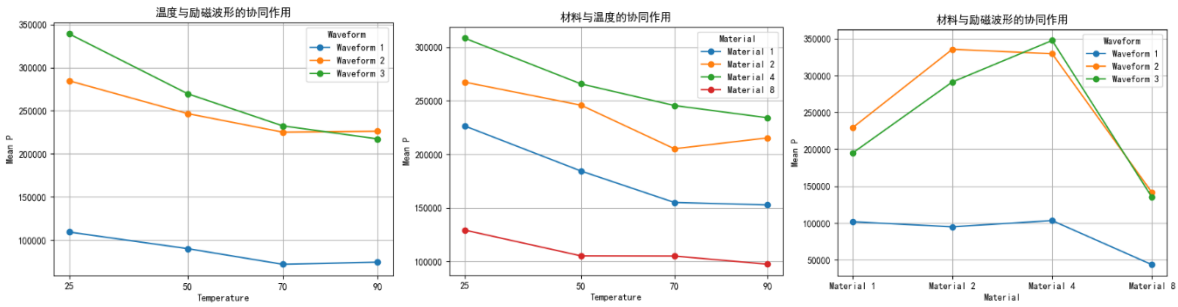


图 6-3 两两协同因素协同作用

两两协同因素模型残差如图 6-4 所示。

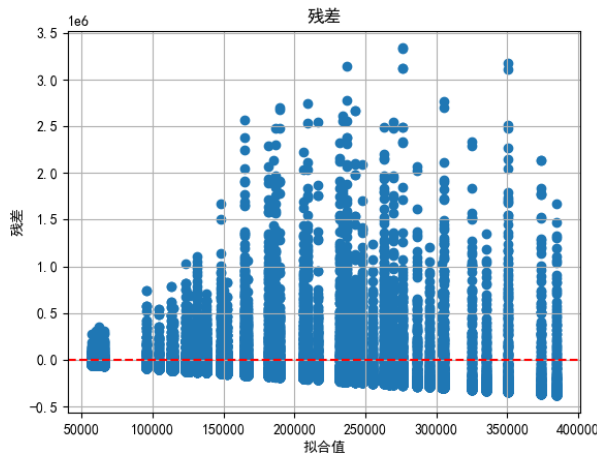


图 6-4 两两协同因素模型残差

残差图呈现出随机分布，没有明显的趋势或模式，则表明模型拟合效果较好。

6.4 结果分析

6.4.1 独立因素模型

独立因素模型评价如表 6-4 所示。

表 6-4 独立因素评价

影响因素	df	F 值	P 值
T	1	64.18	1.24E-15
W	1	439.27	7.10E-96
M	1	73.25	1.28E-17

得出以下结论：

(1) T (温度)：

F 值:64.18，表示温度对磁芯损耗的影响程度非常显著。

P 值:1.24e-15, 远小于显著性水平 0.05, 说明温度对磁芯损耗有负面影响。

(2) W (励磁波形):

F 值:439.27, 表示励磁波形对磁芯损耗的影响非常显著。

P 值:7.10e-96, 远小于 0.05, 说明励磁波形对磁芯损耗有显著正面影响。

(3) M (材料):

F 值:73.25, 说明材料对磁芯损耗也有显著影响。

P 值:1.28e-17, 远小于 0.05, 表明材料对磁芯损耗的影响显著。

6.4.2 两两协同因素模型

本文对 $T \cdot W$ 反映温度和波形的协同关系、 $W \cdot M$ 反映波形和材料的协同关系和 $M \cdot T$ 反映材料和温度的协同关系进行拟合求解结果为表 6-5 所示。

表 6-5 独立因素评价

影响因素	系数	stderr	t	P> t	[0.025	0.975]
T	-41.98	419.49	-0.1	0.92	-864.24	780.28
W	124700	12500	9.978	0	100000	149000
M	-17560	4579.94	-3.83	0	-26500	-8582.52
T:W	-677.85	177.25	-3.82	0	-1025.29	-330.42
T:M	71.98	52.10	1.38	0.17	-30.15	174.10
W:M	1392.19	1769.88	0.79	0.43	-2077.05	4861.44

上述表格分析如下:

- T:T 变量的系数为-41.98, 着当 T 变量增加一个单位时, 预测结果平均减少 41.9827 个单位。但是, T 变量的 p 值为 0.92, 大于 0.05, T 变量对预测结果的影响不显著。也就是说, 在当前数据中, T 变量变化对预测结果的影响太小, 无法确定它是否真的有影响。
- W:W 变量的系数为 124700, 着当 W 变量增加一个单位时, 预测结果平均增加 124700 个单位。W 变量的 p 值为 0.000, 远小于 0.05, W 变量对预测结果的影响显著。W 变量的增加确实会导致预测结果显著增加。
- M:M 变量的系数为-17560, 当 M 变量增加一个单位时, 预测结果平均减少 17560 个单位。M 变量的 p 值为 0.000, 远小于 0.05, M 变量对预测结果的影响显著。也就是说, M 变量的增加确实会导致预测结果显著减少。
- T:W:T 和 W 的协同项系数为-677.85, 当 T 和 W 同时增加一个单位时, 预测结果平均减少 677.85 个单位。交互项系数的 p 值为 0.000, 远小于 0.05, T 和 W 的交互项对预测结果的影响显著。T 和 W 同时变化时, 其影响比单独变化时更显著。
- T:M:T 和 M 的协同项系数为 71.97, 当 T 和 M 同时增加一个单位时, 预测结果平均增加 71.98 个单位。交互项系数的 p 值为 0.17, 大于 0.05, T 和 M 的交互项对预测结果的影响不显著。T 和 M 同时变化时, 其影响不显著。
- W:M:W 和 M 的协同项系数为 1392.19, 当 W 和 M 同时增加一个单位时, 预测结果平均增加 1392.19 个单位。交互项系数的 p 值为 0.43, 大于 0.05, W 和 M 的交互项对预测结果的影响不显著。W 和 M 同时变化时, 其影响不显著。

结论: 基于模型预测, 最小的 P 值对应的 M、T、W 分别为:8,90,1,P 值为:56815.92

表 6-6 两两协同因素评价 (PR(>F): 1.235169e-15, 非常小的 P 值, 表明 T 对因变量的影响极其显著。)

影响因子	df	F 值	PR(>F)
------	----	-----	--------

T	1	64.41	1.10E-15
W	1	439.02	8.03E-96
M	1	72.57	1.79E-17
T:W	1	14.63	1.32E-04
T:M	1	1.91	1.67E-01
W:M	1	0.62	4.32E-01

由表 6-6 得出结论:

- (1) T:W:F=14.63, $P=1.32\text{e-}04$, 温度与励磁波形的协同作用对 P 有显著影响。
- (2) T:M:F=1.91, $P=1.67\text{e-}01$, 温度与磁芯材料的协同作用对 P 的影响不显著。
- (3) W:M:F=0.62, $P=4.32\text{e-}01$, 励磁波形与磁芯材料的协同作用对 P 的影响不显著。

6.5 问题四小结

独立影响: 温度对磁芯损耗有负面影响, 励磁波形对磁芯损耗有显著正面影响。材料对磁芯损耗的影响显著。

协同作用: 温度与励磁波形的协同作用对 P 有显著影响, 温度与磁芯材料的协同作用对 P 的影响不显著, 励磁波形与磁芯材料的协同作用对 P 的影响不显著。

基于模型预测, 最小的磁芯损耗值对应的材料 M、温度 T、波形 W 分别为:材料 4、90°C、正弦波,磁芯损耗 P 值为:56815.93。

七、问题四的求解：数据驱动的回归磁芯损耗预测模型

7.1 问题分析

根据问题四的要求，目前存在众多传统模型面临精度不足或适用范围受限的挑战，本文旨在开发出一个能够跨越不同材料类型与工况条件的磁芯损耗预测模型。本研究需要对附件一中的实验数据，通过数据分析与建模技术，构建磁芯损耗预测模型。观察数据，寻找可能影响磁芯损耗的因素。

具体思路流程图如 7-1 所示。

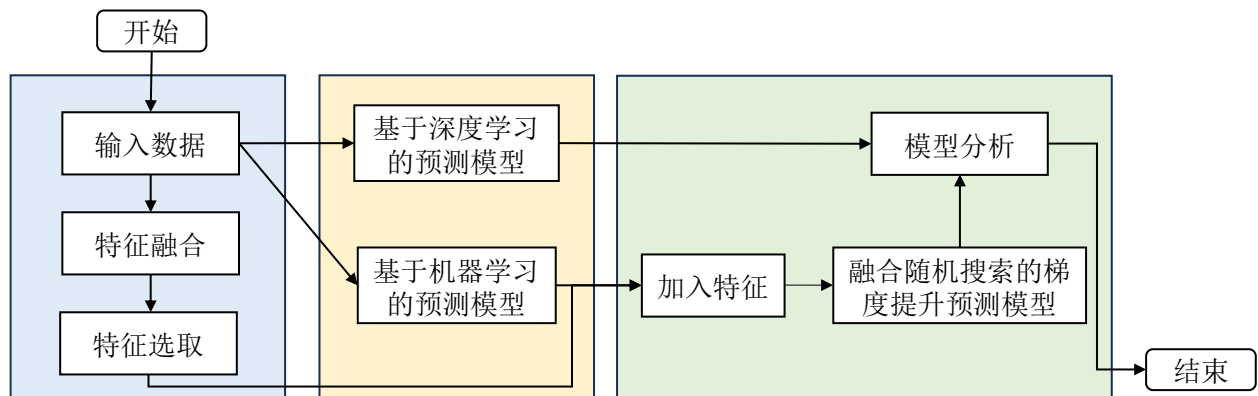


图 7-1 问题四技术路线图

7.2 模型准备

7.2.1 数据准备

(1) 获取磁通密度最大值(B_m)

根据问题二的分析求解，本问题把磁通密度的最大值也作为磁芯损耗的一个重要因素，我们把附件一中的四个材料的磁通密度都计算出来放到一列，方便后续的模型建立。

(2) 特征映射

在数据处理和机器学习领域，映射（Mapping）是一种将一个集合中的元素与另一个集合中的元素相关联的过程。这种关系通常是一对一的，但也可能有一对多或多对一的情况。映射在数据处理中通常用于将非数值数据（如文本或类别数据）转换为数值形式，以便可以用于数学计算和机器学习算法。

励磁波形映射：将文本描述的励磁波形（“正弦波”、“三角波”、“梯形波”）转换为数值（1、2、3）。**材料映射：**将不同的材料名称（如“材料 1”、“材料 2”、“材料 3”、“材料 4”）采用独热编码转换为不同的数值（1、2、4、8）。有助于标准化数据，使其适合于后续的分析 and 建模。

7.2.2 特征融合和选取

(1) 特征融合

已知磁芯损耗跟温度、频率、励磁波形、磁通密度和材料有关。本题受到问题三解答的启发，加入了部分特征融合。本体首先将所有特征之间两两相乘，组合得到了 10 个新的特征，分别为： B_m_f 、 W_B_m 、 T_B_m 、 M_B_m 、 W_f 、 T_M 、 T_W 、 T_f 、 M_f 、 W_M (B_m : 磁通密度峰值； T : 温度； M : 材料； W : 励磁波形； f : 频率)。随后，本研究使用斯皮尔

曼相关系数、皮尔逊相关系数、梯度提升和随机森林分析特征与磁芯损耗之间的相关系数，综合筛选，决定增加 Bm_f、M_Bm 和 T_f 作为补充的参数输入到本题模型之中。

我们这种特征融合方法假设特征之间的相互作用是线性的，通过简单的乘法进行捕捉。同时我们使用网格优化特征融合，用给定的超参数范围内系统地遍历多种超参数组合，通过交叉验证来评估每一组超参数的性能，从而找到最优的超参数设置。

(2) 特征选取

在添加特征之后，采用皮尔逊相关系数、斯皮尔曼相关系数、随机森林和梯度提升树四种模型对 15 个特征（温度、频率、励磁波形、磁通密度峰值和材料 5 个;特征融合 10 个）进行特征重要性排序。如表 7-1 所示为四种方法的重要排序结果。综合筛选，决定增加 Bm_f、M_Bm 和 T_f 作为补充的参数输入到本题模型之中。

表 7-1 四种模型特征重要排序

皮尔逊相关系数		斯皮尔曼相关系数	
Feature	Importance	Feature	Importance
Bm_f	0.886453	Bm_f	0.951017
Bm	0.689269	Bm	0.81066
W_Bm	0.663626	W_Bm	0.780352
T_Bm	0.522367	T_Bm	0.662408
M_Bm	0.452345	M_Bm	0.583331
T	0.184645	T	0.220626
T_f	0.163306	T_f	0.204145
T_M	0.09196	T_M	0.106199
f	0.083971	f	0.099883
M	0.083285	T_M	0.088572
T_W	0.069207	T	0.069255
T	0.062765	M	0.064557
T_f	0.033647	W_M	0.053003
M_f	0.020258	T_f	0.037864
W_M	0.013287	M_f	0.006127
随机森林		梯度提升树	
Feature	Importance	Feature	Importance
Bm_f	0.836596	Bm_f	0.835346
Bm	0.101863	Bm	0.106567
T_f	0.024357	M_Bm	0.022118
M_Bm	0.017134	T_f	0.020207
W_Bm	0.004839	T	0.004332
T_Bm	0.004259	T_Bm	0.002897
M_f	0.002499	M_f	0.002077
f	0.002222	W_Bm	0.001871
T_f	0.001363	T_M	0.001481
W_M	0.00133	T_W	0.000826
T_W	0.001196	f	0.000823
T	0.00085	W_f	0.000684
T_M	0.000813	W	0.000434

W	0.000367	W_M	0.000312
M	0.000312	M	2.48E-05

7.3 模型建立

7.3.1 基于机器学习的磁芯损耗预测模型建立

本题首先尝试了使用机器学习拟合模型。本题选用了随机森林、决策树、支持向量机、多层感知机、AdaBoost、梯度提升、逻辑回归和 K 近邻作为本题的模型验证性能^[13]。在题目一中已对各模型做过介绍，因此本题对于各模型不再做介绍。

为了评估各模型的效果，本题选用了 MRE、MSE、MRE、MAE 以及 R^2 来作为评价指标。采用 `sklearn.model_selection` 库中的 `train_test_split` 方法对数据已 8:2 的比例划分训练集和验证集，`random_state` 设置为 42。

7.3.2 基于深度学习的预测模型建立

本题接下来尝试了使用深度学习的网络对数据进行分析，本题选用了 BP 神经网络、图神经网络以及 TabNet 来进行测试，同样选用 MRE、MSE、MRE、MAE 以及 R^2 来作为评价指标。

BP 神经网络由三个部分组成，分别为输入层、隐藏层和输出层，每个部分包含多个神经元，类似于人类的脑神经。它通过前向传播和反向传播来进行训练和学习。前向传播中通过处理输入数据得到预测结果；方向传播则根据预测结果与真实值之间的误差，调整网络中神经元的权重，以最小化误差。BP 神经网络被广泛应用于分类、回归、识别等任务中。

图神经网络（Graph Neural Network, GNN）是一种应用于处理图结构数据的神经网络模型，它能同时考虑节点特征于图的拓扑关系。它不仅适用于分类任务，也可以有效应用于回归任务，在回归任务中，它可以通过学习节点以及相邻节点的特征来预测连续值，使它在处理复杂数据关系时具有显著的优越性。

TabNet 是一种用于表格特征的深度学习模型。它可以有效处理和学习结构化数据，综合了决策树的优点，能够自动选择重要特征，并在特征选择过程中兼顾解释性和效率。它在多种表格数据上都有着出色的表现。

7.3.3 融合参数优化的梯度提升预测模型建立

超参数在机器学习中有重要作用，它们在模型训练之前需要提前设定，直接影响模型性能和泛化能力。合适的超参数可以提高模型的准确性、稳定性和鲁棒性。因此，选择恰当的超参数是成功机器学习的关键步骤。

网格优化是一种常用的超参数调节方法，优秀的超参数调节方法，可以显著提升模型的性能。网格优化通过系统性的搜索超参数空间，以期待找到最佳的参数组合，从而提高模型的准确性和稳定性。但是网格优化需要耗费大量的时间，如何平衡时间与性能的关系也是一个值得考虑的问题。

本题综合考虑时间与性能之后，选择使用 `sklearn.model_selection` 中的 `RandomizedSearchCV` 实现随机参数调优。相对比网格搜索（`GridSearchCV`），它有如下几个优点：

1. 效率更高：随即搜索通过随机选择超参数组合，相对比网格搜索使用穷举法遍历整片空间，他的效率更高，可以在较短时间找到较好的参数设置。
2. 更广泛的搜索空间：相对比网格搜索，随即搜索覆盖率更加广泛的参数空间，增加了寻找到最佳参数的可能性。

3. 适应性强：对于高维的参数空间，随即搜索往往能够更有效地处理，因为随着维度的增加，网格搜索的时间复杂度迅速上升。
综上所述，因此本问题选择了随机搜索来优化超参数。

7.4 模型求解

7.4.1 基于机器学习的磁芯损耗预测模型求解

基于机器学习的模型拟合效果如下表所示，为了展示添加特征融合数据之后的效果，表 7-2 展示了添加这三个特征融合前后的性能指标对比，并对对比结果更优的指标进行了加粗显示。

表 7-2 基于机器学习的模型拟合效果对比

模型	参数	原始特征	融合特征
随机森林	MRE	13.28%	12.75%
	MSE	1972146778.11	1783040271.08
	MAE	18481.95	17779.63
	R ²	0.985	0.987
决策树	MRE	16.95%	14.49%
	MSE	3522925031.44	3055725252.04
	MAE	23494.51	21257.53
	R ²	0.973	0.977
多层感知机	MRE	1179.99%	728.09%
	MSE	138759367135.06	28596275762.48
	MAE	210428.12	112989.21
	R ²	-0.031	0.787
支持向量机	MRE	427.75%	428.16%
	MSE	156077462302.69	156084268975.47
	MAE	177894.67	177903.19
	R ²	-0.160	-0.160
AdaBoost	MRE	1005.07%	1740.15%
	MSE	43682480359.84	26319566305.72
	MAE	173460.80	149177.62
	R ²	0.675	0.804
梯度提升	MRE	147.10%	50.50%
	MSE	4440599155.00	2346265862.82
	MAE	35126.52	24822.55
	R ²	0.967	0.983
逻辑回归	MRE	1410.79%	1070.66%
	MSE	51412047501.08	22693730474.13
	MAE	140332.94	103906.26
	R ²	0.618	0.831
K 近邻	MRE	331.87%	28.48%
	MSE	63894646501.29	8214525051.54
	MAE	110887.12	38440.25
	R ²	0.525	0.939



图 7-2 拟合效果对比

由图 7-2 和表 7-2 所见，本题对比了多种模型在不同参数下的性能指标，通过对比不引入融合特征和引入融合特征的表现，可以得出以下结论：

1. 随机森林和决策树模型在多个指标上都取得了最优的结果，尤其是在融合特征的情况下，说明它们拟合出来的模型可以更好地解释数据。
2. 多层感知机、K 近邻和梯度提升虽然在原始特征上表现不佳，但在特征融合之后均出现了大幅降低(以 MRE 为例,从 1179.99%, 331.87%、147.10%降低至 728.09%、28.48%、50.50%)，体现了特征融合对于性能的显著提升。
3. 支持向量机在特征融合前后表现均不佳，显示此模型对于增加的特征变化的敏感度较低。
4. AdaBoost 虽然在 MRE 指标上出现了退步，但是在其余指标，即 MSE, MAR 以及 R² 上都有了显著提升。

综上所述，特征融合对于多个模型的性能提升有显著影响，尤其是在提高 R² 值和降低误差方面。而各模型之间存在的巨大差异，显示在使用中应该根据本模型的目标谨慎选择模型与特征组合。

7.4.2 基于深度学习的预测模型求解

三个深度学习模型拟合效果如下表 7-3 所示：

表 7-3 基于深度学习的预测模型求解

模型	参数	结果
BP 神经网络	MRE	1155.13%
	MSE	138743222077.63
	MAE	209018.49
	R²	-0.031
图神经网络	MRE	1169.06%

TabNet	MSE	138732817895.91
	MAE	209753.36
	R ²	-0.031
	MRE	470.40%
	MSE	122499731216.47
	MAE	155290.16
	R ²	0.089

由表格所见，本题对比了多种模型在不同参数下的性能指标，可以得到以下结论：

1. 在 MRE 方面，BP 神经网络与图神经网络的相对误差较高，分别为 1155.13% 和 1169.06%，而 TabNet 则较低，为 470.40%，显示该模型在此任务表现较好。
2. 在其余多个指标上，三个模型的均表现不佳，误差较高，说明三个模型对于该处理任务表现都较差。

对比机器学习的模型，深度学习整体表现不佳，因此本题选用深度学习模型作为基础模型，在此基础上进行优化。

7.4.3 融合参数优化的梯度提升预测模型求解

在下表 7-4 展示了网格随机参数调优的结果，由于在 6.4.1 部分模型加入特征融合数据表现依旧不佳，所以本轮仅选择了随机森林、决策树、梯度提升树和 K 近邻继续进行参数优化^[14]，为了体现调优效果，本题增加了为进行调优的指标作为对比，表现更优的指标同样加粗显示。

表 7-4 融合参数优化的梯度提升预测模型求解

模型	参数	融合特征	参数调优
随机森林	MRE	12.75%	12.69%
	MSE	1783040271.08	1780673097.73
	MAE	17779.63	17719.89
	R ²	0.987	0.987
决策树	MRE	14.49%	17.45%
	MSE	3055725252.04	2993472887.41
	MAE	21257.53	22480.32
	R ²	0.977	0.977
梯度提升	MRE	50.50%	12.34%
	MSE	2346265862.82	979486838.62
	MAE	24822.55	12562.36
	R ²	0.983	0.993
K 近邻	MRE	28.48%	26.68%
	MSE	8214525051.54	6610158725.27
	MAE	38440.25	35746.42
	R ²	0.939	0.951

分析上述表格，本题可以得出以下结论：

1. 经过随机搜索参数优化，随机森林的性能有了小幅上升；决策树部分指标表现更优秀，但整体并没有大幅改变；而梯度提升和 K 近邻各项指标均有大幅上升，说明参数调优对于这两个模型起到了很好的优化作用。

2. 整体来看，随机森林和梯度提升两个模型效果最为显著，而 K 近邻虽然优化后效果显著，但是效果相比其他模型依然不佳；而对于决策树而言，参数调优似乎并没有对它有显著影响。
 3. 综合来说，梯度提升在多项指标上均表现出色，其 R^2 值和 MRE 最佳，而随机森林有着最优的 MRE，证明其有较强的模型解释能力，对抗过拟合方面表现良好。
- 因此，本研究选择了优化后的梯度提升作为最终的拟合模型，因为该模型具有最优的 MSE，是所有模型中唯一一个千万级别 MSE，并且该模型具有最优的 MAE 和 R^2 ，这两项指标也远超其他模型。
- 对于附件三（测试集）中部分结果如下表 7-5 所示：16、76、98、126、168、230、271、338、348、379。

表 7-5 部分结果展现

序号	预测磁芯损耗
16	1351.54
76	1746889.24
98	11816.62
126	1805.25
168	105748.33
230	69451.83
271	2023909.07
338	14867.40
348	996866.93
379	1883.93

7.5 问题四小结

本章分析了数据驱动的磁芯损耗预测模型的建立过程，要求本研究打破传统模型在磁芯损耗预测中的局限性，构造一个跨越不同材料和工况的预测模型。首先本题将磁通密度峰值作为一个重要特征加入模型，对分类数据做了映射处理，便于后续的计算和建模。受问题三的启发，本题研究了不同变量之间相互作用，将原始特征两两组合，生成新的融合特征，并对其进行筛选，将显著性特征输入模型，增强模型的性能。

在模型建立方面，本题研究了包括机器学习深度学习在内的多种模型，并选取其中一部分进行优化，在加入融合特征和随机参数调优之后，最终确定了参数优化的梯度提升模型，因其在 MSE、MAE 和 R^2 等关键指标上均表现最佳，显示出其稳定的预测能力。

八、问题五的求解：多目标优化模型构建

8.1 问题分析

问题五要求在问题四构建磁芯损耗模型的基础上，构建一个优化模型，以构建的磁芯损耗模型为目标函数，同时加入传输磁能这一指标作为目标变量，传输磁能将通过频率与磁通密度峰值的乘积来进行量化。通过附件一中的实验数据，深入分析各种因素（包括温度、频率、波形、磁通密度峰值及磁芯材料）在优化过程中所起的作用，以确定最优条件。实现磁芯损耗的最小化和传输磁能的最大化。温度、频率、波形、磁通密度峰值及磁芯材料构成了混合型数据，这种数据类型的存在使得构建优化模型更为复杂，需采用合适的方法来处理。需要确保混合型数据有效处理，进而形成的优化模型，找到最优解。

具体思路流程图如图 8-1 所示。

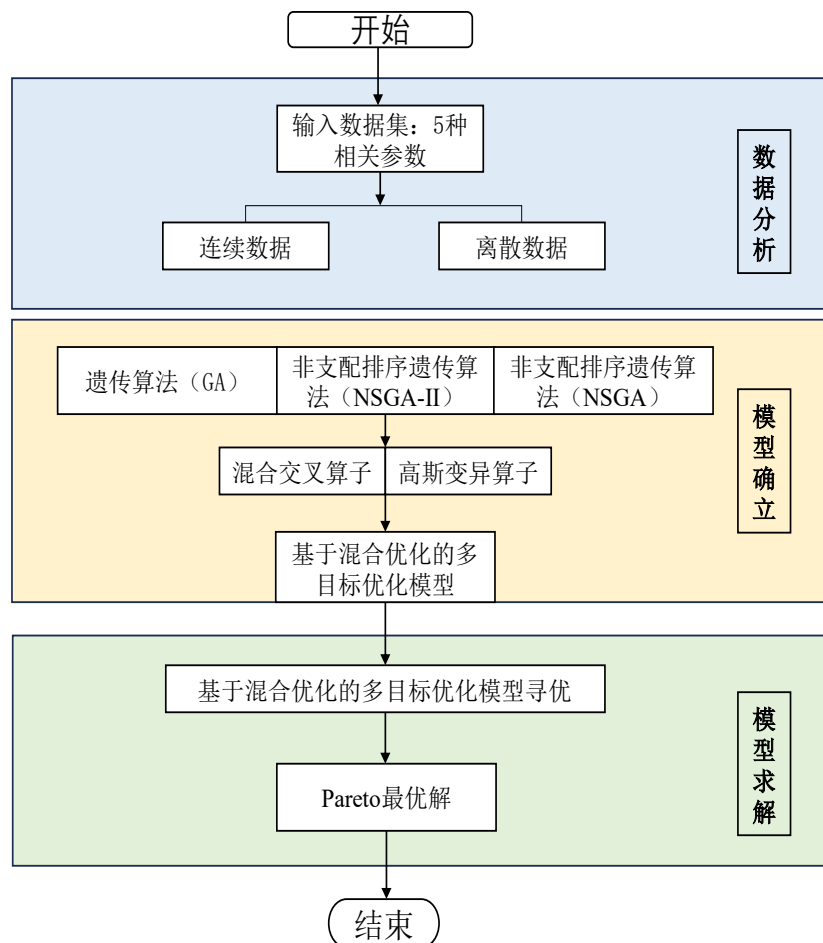


图 8-1 问题三技术路线图

8.2 模型确立

8.2.1 遗传算法及改进策略

1) 遗传算法原理

遗传算法(Genetic Algorithm,GA)是一种优化搜索算法，通过模拟自然界中生物遗传体

系下染色体的交叉、变异及个体选择等过程中的进化过程来求解问题。该算法从随机生成的初始种群开始，通过不断的迭代过程，运用交叉、变异和选择等方法，生成新的后代个体。在这一过程中，整个种群逐步进化，并逐渐移动更优解的区域。最终，算法发掘出在当前环境中表现最佳的个体，这些优秀个体的信息将被传递至下一代，为寻找全局最优解奠定基础。

在实际应用中，遗传算法的表现受到多种因素的影响。这些因素包括选择的交叉算子、变异算子、遗传编码方式、适应度函数、用户设置的不同参数以及具体的适应度依赖选择操作流程等。这些元素共同决定了遗传算法的有效性和优化结果。

2)非支配排序遗传算法（NSGA）

多目标遗传算法是一种用于解决多目标优化问题的遗传算法。多目标优化问题涉及同时优化两个或多个相互冲突的目标，其中一个目标的改善往往会导致另一个目标的下降。多目标遗传算法的主要目标是找到一组解，这组解在不同目标函数之间提供了最佳的权衡，这些解被统称为 Pareto 最优解集。非支配排序遗传算法（NSGA）是著名的多目标遗传算法之一，其核心思想是通过适应度共享机制来维护种群的多样性，随后利用非支配排序的方式筛选和保留优秀个体，以确保它们能够进入下一代^[15]。

3)非支配排序遗传算法（NSGA-II）

非支配排序遗传算法（NSGA-II）是在非支配排序遗传算法（NSGA）的基础上引入密度评估、拥挤度算子和精英策略的改进的一种全局优化算法。

降低了算法的计算复杂度,使得优化问题的全局最优解集能均匀的扩展到整个解集域上,保证了种群的多样性。相对于传统的多目标求解方法，非支配排序遗传算法（NSGA-II）不受初始值、目标权重等影响，此外基于快速无支配性排序算法强大的全局搜索能力能高效地求出全局最优解。

非支配排序遗传算法（NSGA-II）中，种群中的每个解都会与其他解进行比较，以判断它们是否占据优势地位。通过这种比较，可以识别出第一层非支配前沿，即所有未被任何其他解支配的解。这些解暂时被选出后，算法会继续寻找下一层非支配前沿，直到所有解都被评估。

NSGA-II 的算法流程步骤如表 8-1 所示。

表 8-1 NSGA-II 的算法步骤表

步骤	具体内容
Step1	对初始化种群进行初始化，初始化步骤包括个体的编码方式和初始值
Step2	采用非支配排序得出结果，将结果进行交叉、变异、选择操作生成第一代子群
Step3	通过目标函数进行计算每个个体适应度值
Step4	利用快速非支配排序算法，按照非支配等级将每个个体进行排序
Step5	计算每个个体的拥挤度程度，保证种群多样性
Step6	选择非支配等级靠前且拥挤度较低的个体，并对上一代采用精英策略
Step7	重复 Step3-Step6，条件满足，流程结束。

为了保持种群中优秀解的多样性，NSGA-II 采用了一种机制来维持种群的多样性，而不是依赖于用户设定的参数。通过计算解的密度评估指标和拥挤度，算法能够在选择过程中偏好那些在目标空间中分布较为稀疏的解，从而有效地保持种群的多样性。

8.2.2 基于混合优化的双目标优化模型

1、初始种群（Populatio）

在经过试验论证，针对双目标最优解问题，初试种群的优劣程度对求解速度影响不大，

但遗传算法解决的基本是局部最优解，为获得全局最优解本文初始种群的选取是完全随机。本文将种群定义为 P 。

种群内的相似度计算，统计个体 X , Y 之间的编码同一位置处相同的作品的个数之和公式：

$$C(X, Y) = \sum_{i=1}^n k_i \quad (8-1)$$

个体 X , Y 相似度计算公式：

$$R(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{n} \quad (8-2)$$

其中 n 是染色体长度，当 XY 同一位置对应的作品的编号相同时， $k=1$ ，否则 $k=0$ 。

种群 P 内部相似度计算公式：

$$S(P) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m C(P_i, P_j) / (n \times m \times (m-1)/2) \quad (8-3)$$

m 代表种群 P 中个体总数， $P_i P_j$ 代表种群中的不同个体。种群内相似度越高，代表种群内多样性越低。

2、适应度函数 (FitnessFunction)

适应度函数的选择至关重要，因为遗传算法需要依靠选择来引导算法的途径，同时适应度函数也是多目标优化方案的核心变量之一，而在选择过程中是看被选个体适应度值作为标志性指标，因此适应度函数的选择会直接影响到遗传算法的计算复杂度和收敛速度，导致是否能够寻找到最优解。

本文定义了一个多目标适应度函数，其中权重设置为 $(-1.0, 1.0)$ ，表示一个预测损耗目标是最小化，而另一个传输磁能目标是最大化。

为了追求算法初期种群的多样性以及提高个体的适应度，我们选择了基于指标变换的线性动态适应度函数，这样既提高了适应度又有助于遗传算法的收敛，适应度函数如下式：

$$F^*(X) = e^{-aF(X)} \quad (8-4)$$

$$a = \sqrt[5]{t} / (F_{\text{avg}} + \varepsilon), s = 1 + \lg T$$

在上式中 $F^*(X)$ 为经过指数变换后得到的新适应度函数， $F(X)$ 为原适应度函数。若问题本身是求最小化 (Minimize)，则直接取目标函数，若是最大化 (Maximize) 问题，则先将问题化成求最小值问题。

3、快速非支配性排序方法 (QuickNon-dominatedSorting)

多目标优化问题设计的核心在于获取 Pareto 最优解集。快速非支配排序通过对个体的非劣解水平进行分层，将种群进行分类，从而有效指引搜索向 Pareto 最优解集的方向发展，并且将计算复杂度显著降低至 $O(MN^2)$ 。这一过程是一个迭代的适应度分级机制：首先识别出种群中的第一非支配解集，称之为第一非支配层 F ，然后将该层中的所有个体赋予相同的非支配等级。具体操作如表 8-2 所示。

表 8-2 快速非支配性排序过程具体步骤

步骤	快速非支配性排序过程
Step1	比较种群中每一对个体 i 和 j ，如果个体 i 支配个体 j ，则将 j 加入 $S(i)$

- Step2 找出所有 $n(i)$ 为 0 的个体，这些个体构成第一 Pareto 前沿 F1。
- Step3 从种群中移除 F1 中的个体，对每个在 F1 中的个体 i ，更新其支配的个体的 n 值（即 $n(k)=n(k)-1$ ，对于所有 k 在 $S(i)$ 中）。
- Step4 重复步骤 3 和 4，直到所有个体都被分配到某个 Pareto 前沿。

个体 i 和 j ，支配关系可以表示为：

$$\forall m \in \{1, 2, \dots, M\}, f_m(i) \leq f_m(j) \text{ and } \exists m \in \{1, 2, \dots, M\}, f_m(i) < f_m(j) \quad (8-5)$$

其中， $f_m(i)$ 是个体 i 在第 m 个目标函数上的值。

4、拥挤度比较计算子（Congestion Comparison Operator）

在算法各阶段，拥挤度比较算子通过评估个体相似性，引导选择过程向均匀分布的帕累托前沿发展。在非支配排序遗传算法中，每个解具有非支配等级和密度值两个关键属性。非支配等级反映解在帕累托前沿的层次，层次越低表示非支配性越强，而密度值则通过相关方法计算。密度评估的核心思想是通过分析特定解周围各个目标点的平均距离，可以推测该解在整体种群中的密度。在进行密度评估时，首先需计算解两侧沿每个目标方向的平均距离。之后，种群会根据目标函数值进行升序排序。对于相近的值，最大或最小的函数值将被设定为无穷大。接下来，通过计算相邻解之间的绝对归一化差，得到中间解的距离值。最后，将各个目标对应的距离值进行汇总，从而计算出该解在整体种群中的密度指标。

密度评估算法原理如下表 8-3 所示。

表 8-3 密度估计算法

算法 1 密度评估
1: $l = I $
2: /*I 中所有解集数量*/
3: foreach i , set $I[i]_{distance} = 0$
4: foreach $objectivem$
5: $I = sort(I, m)$
6: /*对每一个目标值进行排序*/
7: $I[1]_{distance} = I[l]_{distance} = \infty$
8: /*所有边缘点赋值无穷大*/
9: for $i = 2$ to $(l-1)$
10: $I[i]_{distance} = (I[i+1].m - I[i-1].m) / (f_m^{ncx} - f_m^{nin})$

拥挤度比较的基本规则是：在比较不同非支配等级的解时，优先选择位于较低层级（接近原点）的解；若在同一帕累托层，则优先保留拥挤度较低的解。因此，算法在选择解时更偏向于低层级方案，并优先考虑拥挤度小的个体。拥挤度仅适用于同一非支配层，通过计算目标函数的集合密度来定量分析个体优劣。

5、精英策略（Elite Strategy）

精英策略的核心思想是将当前一代中的优秀个体直接复制到下一代，而不进行交叉或变异，从而尽可能保留这些优质解。应用精英策略时，在进行交叉、变异和选择以产生后

代之前，首先将前 n 个最优秀的个体复制到下一代中。复制后的这些精英个体仍然有资格参与后续的选择过程，并可作为新个体的父代。精英选择方法如下：

①假设在第 t 代中， $a(t)$ 代表群体中的精英个体。新一代群体被记为 $A(t+1)$ 。如果在 $A(t+1)$ 中不存在比 $a(t)$ 表现更优的个体，将 $a(t)$ 直接添加到 $A(t+1)$ 中生成 $A(t+1)$ 的第 $n+1$ 个个体， n 表示群体的当前大小。

②当新一代群体中新添加了精英个体，需要删除新一代群体中适应度低的个体来确保种群规模是一个定值。

6、选择算子 (Selection)

选择操作基于对不同个体适应度的评估，体现了“适者生存”的原则：适应度较高的个体相较于适应度较低的个体更有可能被保留到下一代。因此，在进行多目标优化时，采取最优保留策略对染色体进行优胜劣汰：在当前种群中，适应度最高的个体不会参与交叉和变异操作，而是优先保留，通过优秀个体替换适应度最低的个体。具体操作如表 8-4 所示。

表 8-4 选择过程具体步骤

步骤	选择过程
Step1	找出当前群体中适应度最高和最低的个体；
Step2	若当前群体中最佳个体的适应度比总的迄今为止的最好个体适应度还要高，那么将此个体定义为新的迄今为止的最好个体；
Step3	用迄今为止最好的个体替换掉当前群体中最差的个体。

7、混合交叉算子 (Blended-Crossover)

交叉算子是遗传算法中的关键操作，通过在父代个体之间交换基因来生成新个体，旨在结合优秀特征，提高适应度。常见类型包括单点交叉、双点交叉和均匀交叉。针对本文存在离散数据。原始方法并不适合，容易导致最终解超出边界外。本文在进入控制交叉强度参数 α 的基础上，同时引入随机因子 γ 探索解空间的不同区域，保持种群的多样性，对每个属性进行加权平均处理。 γ 计算公式如下。

$$\gamma = (1.0 + 2.0 \times \alpha) \times \text{random}() - \alpha \quad (8-6)$$

属性值的线性插值计算公式如下，通过加权平均的方式混合两个父代个体的属性值，生成新的子代个体的属性值。

$$f_1[i] = (1.0 - \gamma) \times F_1[i] + \gamma \times F_2[i] \quad (8-7)$$

$$f_2[i] = \gamma \times F_1[i] + (1.0 - \gamma) \times F_2[i] \quad (8-8)$$

f_1 和 f_2 为两个父代个体， F_1 和 F_2 为新的子代个体

针对最终结果，对于离散参数，通过从合法值范围内随机选择新值来确保新个体的属性值合法。对于连续参数，通过限制其在最小值和最大值之间来确保其在合法范围内。混合交叉流程步骤如表 8-5 所示。

表 8-5 混合交叉过程具体步骤

步骤	交叉过程
Step1	接受两个父代个体 F_1 和 F_2 ，以及控制交叉强度的参数 α 。
Step2	为两个父代个体创建新的子代个体 F_1 和 F_2 。

Step3	计算随机因子 γ ，用于控制两个父代个体属性值的混合比例 使用线性插值公式计算新个体的属性值
Step4	离散参数随机选择合法值，连续参数限制在范围之内。
Step5	返回两个新的子代个体 f_1 和 f_2 。

交叉概率采用自适应的交叉概率，公式如下式：

$$P_{COV} = \begin{cases} \frac{F_{max} - F_{y_{12}}(max)}{F_{max} - F_{avg}} & F_{y_{12}}(max) > F_{avg} \\ \omega_1 & F_{y_{12}}(max) \leq F_{avg} \end{cases} \quad (8-9)$$

其中 F_{max} 是种群个体的最大适应度， $F_{12}(max)$ 是将要进行交叉操作的两个父代个体 F_1 ， F_2 中适应度比较大的那个， F_{avg} 是种群平均适应度， $\omega_1=0.6$ 。

8、基于高斯变异改进变异算子（Gaussian-Mutation）

变异操作旨在确保种群中个体的多样性。通常情况下，变异概率设置较小，但这一操作仍然有助于增强算法的局部搜索能力。变异操作与交叉操作类似，都是在一定概率基础上进行的，在变异前都需要进行是否需要变异的判断。本文由于存在离散和连续的参数，原始的变异算子可能无法有效地处理混合参数类型。例如，位翻转突变适用于二进制或离散参数，但不适用于连续参数。本文基于高斯变异方法改进变异算子，加入变异强度参数 b 来控制变异率，增加随机性。对于连续参数添加一个正态分布的随机扰动，并确保新值在定义的范围内。对于一个连续参数 x ，本文采用高斯变异算子 M_g 将其变化为：

$$M_g(x) := \min(\max(x + N(\mu, \sigma), x_{min}), x_{max}) \quad (8-10)$$

$N(\mu, \sigma)$ 表示均值为 μ 、标准差为 σ 的正态分布， x_{min} 和 x_{max} 分别表示该参数的最小值和最大值。

高斯变异算子流程步骤如下 8-6 所示。

表 8-6 高斯变异算子流程

步骤	变异过程
Step1	接受一个个体和变异概率 b
Step2	为父代个体创建一个新的子代个体 f_1
Step3	使用随机数生成器生成一个随机数，如果该数小于 b ，则对该属性进行变异。
Step4	离散参数随机选新值，连续参数加正态扰动并限制范围。
Step5	返回新的子代个体 f_1 。

变异概率采用自适应的变异概率，公式下式所示：

$$P_{mut} = \begin{cases} \frac{F_{max} - F(X)}{F_{max} - F_{avg}} & F(X) > F_{avg} \\ \omega_2 & F(X) \leq F_{avg} \end{cases} \quad (8-11)$$

其中 F_{max} 是种群个体的最大适应度， $F(X)$ 是将要进行变异操作的父代个体 F 的适应度， F_{avg} 是种群平均适应度， $\omega_2=0.5$ 。

9、解码（Decoding）

解码是将个体的基因型转换为表现型，以便进行适应度评估和寻找最优解。具体的解码方法依赖于所使用的编码方式。例如，在二进制编码中，解码是将二进制字符串转换为相应的实数或整数表示；在实数编码中，解码则是将个体的实数表示直接映射到问题的解

空间；而在整数编码中，解码将个体的整数表示转化为对应的实际数值。通过正确执行解码过程，我们能够准确评估每个个体的适应度，从而在遗传算法中有效地寻找最优解。

10、算法终止判断

若算法迭代次数达到最大进化代数 NG（NumberofMaxGeneration），或者当交叉率达到 100%，则算法停止。

根据上面从初始种群生成、适应度、选择、交叉变异算子，到最后解码算法停止的实现流程图 8-2 所示。

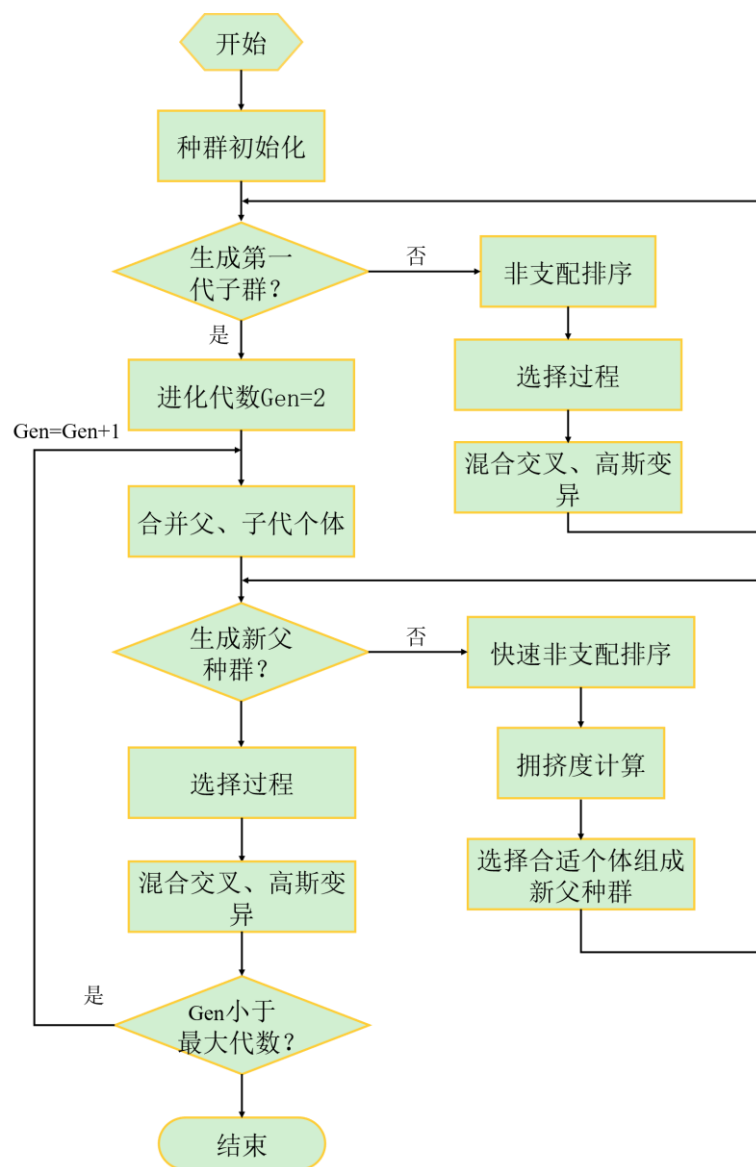


图 8-2 迭代算法

8.3 模型设置

1) 染色体编码

本问共需要优化 5 个变量，，因此染色体长度设定为 5。

2) 构建初始化种群

确定种群大小为 M，种群初始化为 5 行 M 列。

3) 选择操作

选择操作旨在从父代种群中基于适应度值，以一定概率筛选出优质个体，构建新的种群。个体被选中的概率与其适应度成正比，适应度越高，选择的机会也越大。本文采用了高效的轮盘赌选择算法，以优化这一过程。

4) 遗传参数确定，具体参数如表 8-7 所示。

表 8-7 遗传参数

参数	赋值
种群规模	500
迭代次数	1000
每代保留个体数	100
每代产生的子代数	200
交叉概率	0.7
变异概率	0.05
控制交叉强度参数	0.5
变异强度	0.1

8.4 模型求解

本文要求根据建立的优化模型，分析在什么条件下（温度、频率、波形、磁通密度峰值及磁芯材料），能达到最小的磁芯损耗以及具有最大的传输磁能。因此将 5 个变量带入模型中进行求解，所有的变量均在取值范围之内。在此参数下，分析 Pareto 最优解集，找到在给定条件下实现最小磁芯损耗与最大传输磁能的最佳设计方案。当存在多个目标时，由于目标之间存在冲突无法比较,所以很难找到一个解使得所有的目标函数同时最优,也就是说，某个解可能对于某个目标函数是最好的，但对于其他的目标函数却不是最好的,甚至是最差的。因此，对于多目标优化问题,通常存在一个解集。

表 8-8 Pareto 最优解集部分展示

温度	材料	波形	频率	磁通峰值	预测损耗	传输磁能
70	4	正弦波	79530	0.024	735.18	1941.57
90	1	正弦波	224200	0.0096	971.04	2160.87
70	1	正弦波	316450	0.0394	46613.59	12461.52
...						
90	3	梯形波	398100	0.1526	1469726.29	60743.94
50	1	正弦波	499970	0.1655	1585333.91	82745.00
90	1	三角波	501180	0.1937	2667612.20	97101.62

如果继续增加迭代次数，Pareto 最优解集中的解的个数会逐渐减少。若更关注预测损耗，那么一个可能的解为 70，材料 4，正弦波，79530，0.024。此时预测损耗为 735.18，传输磁能为 1941.57。若更关注传输磁能，则一个可能的解是 90，材料 1，三角波，501180，0.1937。此时预测损耗为 2667612.20，传输磁能为 97101.62。

8.5 结论

基于高斯优化的双目标优化模型通过混合交叉算计和高斯变异算子，找到了在给定条件下实现最小磁芯损耗与最大传输磁能的最佳设计方案，即 Pareto 最优解集。遗传算法（GA）、非支配排序遗传算法（NSGA）与非支配排序遗传算法（NSGA-II）都能找到最优解，但是在混合型数据问题上无法给予帮助。因此通过改进的交叉算子和变异算子，提高了对混合型数据的处理能力，并在一定程度上寻找最优解的可靠性。

九、模型评价与改进

9.1 模型优点

对于问题一，在特征过程，通过基于相关性系数的特征筛选和投票机制，进行初筛和二次精筛来确定最优特征，成功提高了与波形分类显著相关的特征的提取准确度。8 种不同机器学习模型在不同材料上的对比表现，增强了模型的分类性能和普适性程度。

对于问题二，构建了新的修正方程，使预测磁芯损耗的效果更好。

对于问题三，充分讨论了温度、材料和波形对磁芯损耗的独立及协同影响，为确定最小磁芯损耗提供重要理论基础。

对于问题四，构建了数据驱动模型，提出创新融合特征，找到了优化后的梯度提升模型。

对于问题五，通过对于基于混合优化的双目标优化模型，通过改进交叉算子和变异算子，解决混合数据处理的复杂性和准确性，从而更加趋近于 Pareto 最优解。

9.2 模型缺点

过度依赖相关性系数可能导致忽视那些与目标变量关系复杂或非线性的特征其次。此外，筛选出的特征可能在不同的数据集或环境下泛化能力有限，影响模型的稳定性。这种方法可能过于简化了特征与目标变量之间的关系，未能充分捕捉特征之间的潜在交互作用，

改进的算子有助于更好地逼近 Pareto 最优解，但也可能导致算法在某些情况下对特定数据集过度拟合，从而影响模型的泛化能力。

参考文献

- [1] G. Bertotti. General properties of power losses in soft ferromagnetic materials. IEEE Transactions On Magnetism, 1988: 621-630.
- [2] C. P. Steinmetz. On the law of hysteresis. AIEE Transactions, vol. 9, 1892: 3-64.
- [3] Rudy Severns. HF core loss for non-sinusoidal waveforms. Proc. HFPC'91, 1991: 140-148.
- [4] Venkatachalam K, Sullivan C R, Abdallah T, et al. Accurate prediction of ferrite core loss with nonsinusoidal waveforms using only Steinmetz parameters[C]// IEEE Workshop on Computers in Power Electronics. Mayaguez, Puerto Rico, USA, 2002: 36-41.
- [5]叶建盈, 陈为, 汪晶慧. PWM 波及直流偏磁励磁下磁芯损耗模型研究[J]. 中国电机工程学报. 2015, 35(10): 2601-2606.
- [6]赵磊, 刘成成, 汪友华. 谐波激励下软磁复合材料磁芯损耗的有限元计算[J]. 兵器材料科学与工程, 2023, 46(03): 13-21.
- [7]常辉, 胡修林. 基于改进的 NSGA-II 的卫星星座构型分层优化策略[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2013, 47(01): 40-46.
- [8]Zhang D, Cai Y, Zhang Y, et al. Designing homogeneous and dense-packing magnetic composites with low core loss through ultrasonic compression[J]. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 2024, 610172525-172525.
- [9]Luo Z, Wu W, Jin Q, et al. Structural evolution mechanism and magnetic properties of soft magnetic composites transformed from FeSiAl/Co₃O₄ composites[J]. Journal of Alloys and Compounds, 2024, 1004175819-175819.
- [10]荣雅君, 王莉丽, 王珺. 用波形特征识别变压器励磁涌流的新算法[J]. 电工技术杂志, 2003(12): 47-49.
- [11]沈春城, 严柏平, 黄大卓, 等. 基于波形复杂特性的励磁涌流快速识别算法研究[J]. 电气工程学报, 2024, 19(01): 243-253.
- [12]汪晶慧, 卢志诚, 陈为. 高低频复合励磁磁心损耗量化的研究[J]. 中国电机工程学报, 2024, 44(10): 4091-4103.
- [13]Kumar R, Kumar A, Parida S. Enhancing robustness of DC microgrid protection against weather intermittency and DER outage using optimal adaboost technique[J]. Computers and Electrical Engineering, 2024, 120(PA): 109683-109683.
- [14]Sy N T. Optimized gradient boosting models and reliability analysis for rock stiffness [formula omitted][J]. Journal of Applied Geophysics, 2024, 230105519-105519.
- [15]王梦琪, 郑征, 梅其良, 等. 基于非支配排序遗传算法 NSGA-III 的多目标屏蔽智能优化研究[J/OL]. 原子能科学技术: 1-7[2024-09-25].