Серия 3. Множества и мощности

1. Докажите, что а) множество всех трехэлементных подмножеств $\mathbb{N}$; б) множество всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$ счётно.

2. Докажите, что множество *алгебраических чисел*, то есть чисел, являющихся корнями многочленов с рациональными коэффициентами, счётно.

3. а) На плоскости изображено бесконечное множество попарно не пересекающихся кругов. Докажите, что это множество счетно.

б) Назовем *восьмеркой* фигуру на плоскости, состоящую из двух касающихся внешним образом окружностей. Докажите, что на плоскости можно расположить не более чем счетное множество попарно непересекающихся восьмерок. (Одна восьмерка может располагаться внутри другой, не должны пересекаться только сами окружности).

4. Докажите, что множество всевозможных бесконечных последовательностей нулей и единиц имеет мощность континуума (т.е. равномощно отрезку $[0,1]$).

5. Верно ли, что множество всех функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ имеет мощность континуума?

6. а) Существует ли континуальная цепочка попарно вложенных друг в друга подмножеств счетного множества?

б) Может ли иметь континуальную мощность система подмножеств счетного множества, любые два из которых имеют конечное пересечение?

7. После того, как бесы, коих бесконечно много, проиграли Балде, им стало так стыдно, что они решили заняться физкультурой и записались в спортивные секции. Известно, что в каждую секцию записалось конечное число бесов, и среди любого бесконечного набора бесов найдутся двое, занимающиеся в одной и той же секции. Докажите, что бесов-лентяев, которые ходят в конечное число секций, лишь конечное число.

Серия 3. Множества и мощности

1. Докажите, что а) множество всех трехэлементных подмножеств $\mathbb{N}$; б) множество всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$ счётно.

2. Докажите, что множество *алгебраических чисел*, то есть чисел, являющихся корнями многочленов с рациональными коэффициентами, счётно.

3. а) На плоскости изображено бесконечное множество попарно не пересекающихся кругов. Докажите, что это множество счетно.

б) Назовем *восьмеркой* фигуру на плоскости, состоящую из двух касающихся внешним образом окружностей. Докажите, что на плоскости можно расположить не более чем счетное множество попарно непересекающихся восьмерок. (Одна восьмерка может располагаться внутри другой, не должны пересекаться только сами окружности).

4. Докажите, что множество всевозможных бесконечных последовательностей нулей и единиц имеет мощность континуума (т.е. равномощно отрезку $[0,1]$).

5. Верно ли, что множество всех функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ имеет мощность континуума?

6. а) Существует ли континуальная цепочка попарно вложенных друг в друга подмножеств счетного множества?

б) Может ли иметь континуальную мощность система подмножеств счетного множества, любые два из которых имеют конечное пересечение?

7. После того, как бесы, коих бесконечно много, проиграли Балде, им стало так стыдно, что они решили заняться физкультурой и записались в спортивные секции. Известно, что в каждую секцию записалось конечное число бесов, и среди любого бесконечного набора бесов найдутся двое, занимающиеся в одной и той же секции. Докажите, что бесов-лентяев, которые ходят в конечное число секций, лишь конечное число.