

# Дискретная математика

## Глава 2. Основы математической логики

А. В. Пастор

19.09.2022

1. Э. Мендельсон, *Введение в математическую логику*. М.: Наука, 1976.

Слайды по дискретной математике будут публиковаться по адресу

<https://logic.pdmi.ras.ru/~pastor/ITMO/2022-23/>

- **Высказыванием** называется утверждение (утвердительное повествовательное предложение), про которое можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.
  - ▶ То есть истинность или ложность логического высказывания не должна зависеть от каких-либо параметров (значений переменных и т. п.).
  - ▶ Например, " $a > b$ " — это уже не высказывание, поскольку его истинность или ложность зависит от значений  $a$  и  $b$ .
  - ▶ В то же время, " $3 > 2$ " — это высказывание (истинное).
  - ▶ "**Все нечетные числа простые**" — это тоже высказывание (ложное).
- Из простых высказываний можно составлять более сложные.
  - ▶ Например, если есть высказывание  $A$ , то можно составить высказывание "**не  $A$** ";
  - ▶ а из высказывания  $A$  и высказывания  $B$  можно составить высказывания
    - " $A$  и  $B$ ",
    - " $A$  или  $B$ " (здесь **или** не **исключающее!**),
    - "если  $A$ , то  $B$ ".
- Запишем это более формально.

## Булевы функции

- Пусть нам даны высказывания  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Мы хотим составить из них новое высказывание. При этом истинность или ложность нового высказывания должна зависеть только от истинности или ложности  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , но не от того, что именно это за высказывания.
- То есть должна быть функциональная зависимость истинности/ложности нового высказывания от истинности/ложности исходных.

### Определение

*Булевой функцией* от  $n$  переменных называется отображение  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ .

- Всего есть  $2^{2^n}$  булевых функций от  $n$  переменных.
- Считается, что ложному высказыванию соответствует значение 0, а истинному — значение 1. Тем самым, любое высказывание, которое можно составить из данных  $n$  высказываний, можно выразить булевой функцией от  $n$  переменных.

## Таблицы истинности

- Булевы функции можно задавать при помощи *таблиц истинности*.
- Таблица истинности — это таблица с  $2^n$  строками (где  $n$  — число переменных), первые  $n$  столбцов которой соответствуют значениям переменных, а  $(n + 1)$ -й столбец содержит значения функции.
- Каждая строка соответствует одной из  $2^n$  возможных комбинаций значений аргументов: соответствующая строка из нулей и единиц записывается в первые  $n$  клеток данной строки, а в  $(n + 1)$ -й клетке записывается значение функции при данных значениях аргументов (оно также может быть равно либо нулю, либо единице).

### Примеры

Приведем таблицы истинности для булевых функций, соответствующих упоминавшимся ранее комбинациям.

1. **Отрицание** (“не  $x$ ”, обозначение:  $\neg x$  или  $\bar{x}$ ).

$x$	$\neg x$
0	1
1	0

## Таблицы истинности: примеры

2. **Конъюнкция** (“ $x$  и  $y$ ”, обозначение:  $x \& y$  или  $x \wedge y$ )

$x$	$y$	$x \& y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. **Дизъюнкция** (“ $x$  или  $y$ ”, обозначение:  $x \vee y$ )

$x$	$y$	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4. **Импликация** (“если  $x$ , то  $y$ ”, обозначение:  $x \supset y$ ,  $x \rightarrow y$  или  $x \Rightarrow y$ )

$x$	$y$	$x \supset y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

## Булевы функции двух аргументов

- Какие еще бывают булевы функции от двух переменных? Всего их 16.

$x$	$y$	0	$x \& y$	$x \& \neg y$	$x$	$\neg x \& y$	$y$	$x \oplus y$	$x \vee y$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$x$	$y$	$x \downarrow y$	$x \equiv y$	$\neg y$	$y \supset x$	$\neg x$	$x \supset y$	$x \mid y$	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- $x \equiv y$  — эквивалентность;
- $x \oplus y$  — сложение по модулю 2;
- $x \downarrow y$  — стрелка Пирса;
- $x \mid y$  — штрих Шеффера.

## Язык исчисления высказываний

- **Алфавит исчисления высказываний** состоит из следующих символов:
  1. **пропозициональные переменные**: как правило, обозначаются латинскими буквами, возможно, с индексами;
  2. **пропозициональные связки**:  $\neg$ ,  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\supset$ ;
  3. **скобки**:  $($ ,  $)$ .
- **Пропозициональной формулой** называется последовательность символов в указанном выше алфавите, которая строится по следующим принципам:
  1. любая переменная — формула;
  2. если  $A$  — формула, то  $\neg A$  — формула;
  3. если  $A, B$  — формулы, то  $(A \& B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \supset B)$  — формулы.

### Пример

$$((\neg x \vee \neg \neg y) \supset z)$$

### Замечание

Иногда в качестве связок используют и другие знаки логических операций.

Например,  $\equiv$ ,  $\oplus$ ,  $\downarrow$ ,  $|$ .



## Эквивалентность формул

- Каждой пропозициональной формуле соответствует булева функция.
- Однако, это соответствие — не биекция. Например, формулам  $(\neg x \vee y)$  и  $(x \supset y)$  соответствует одна и та же булева функция.

### Определение

- Формулы  $A$  и  $B$  называются **эквивалентными** (или **равнозначными**), если им соответствует одна и та же булева функция.
  - ▶ То есть, если формулы  $A$  и  $B$  принимают одинаковые значения при любых значениях входящих в них переменных.
- Обозначение:  $A \sim B$ .

### Примеры

1.  $\neg\neg x \sim x$ ;
2.  $\neg(x \& y) \sim (\neg x \vee \neg y)$ ;
3.  $\neg(x \vee y) \sim (\neg x \& \neg y)$ ;
4.  $(x \supset y) \sim (\neg x \vee y)$ ;
5.  $\neg(x \supset y) \sim (x \& \neg y)$ ;
6.  $(x \& (y \vee z)) \sim ((x \& y) \vee (x \& z))$ ;
7.  $(x \vee (y \& z)) \sim ((x \vee y) \& (x \vee z))$ .

## Определение

- Формула  $A$  называется **тавтологией** (или **тождественной истиной**), если при любых значениях переменных принимает значение 1 (т. е. если  $A \sim 1$ ).
- Формула  $A$  называется **выполнимой**, если существуют такие значения переменных, при которых  $A$  принимает значение 1.
- Формула  $A$  называется **противоречием** (или **невыполнимой**), если при любых значениях переменных принимает значение 0 (т. е. если  $A \sim 0$ ).

## Примеры

1.  $(x \vee \neg x)$  — тавтология (**закон исключенного третьего**);
2.  $(x \& \neg x)$  — противоречие;
3.  $\neg(x \supset y)$  — выполнимая формула (истинна при  $x = 1, y = 0$ ).

## Замечание

Формулы  $A$  и  $B$  эквивалентны тогда и только тогда, когда формула  $(A \equiv B)$  — тавтология.

## Нормальные формы

- Даны  $n$  пропозициональных переменных  $x_1, \dots, x_n$ .
- *Литералом* называется выражение вида  $x_i$ , либо  $\neg x_i$  (т. е. переменная, либо ее отрицание).
- Выражение вида  $(L_1 \vee \dots \vee L_m)$ , где  $L_1, \dots, L_m$  — литералы, называется *простым дизъюнктом*, а выражение  $(L_1 \& \dots \& L_m)$  — *простым конъюнктом*.

### Определение

- *Конъюнктивная нормальная форма* (КНФ) — это пропозициональная формула вида  $(C_1 \& C_2 \& \dots \& C_k)$ , где  $C_i$  — простые дизъюнкты.
- *Дизъюнктивная нормальная форма* (ДНФ) — это пропозициональная формула вида  $(C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_k)$ , где  $C_i$  — простые конъюнкты.
- Подформулы  $C_i$ , как в случае КНФ, так и в случае ДНФ, называют также *клозами*.

### Примеры

- Формула  $(x \vee y \vee \neg z) \& (\neg y \vee z) \& (\neg x \vee \neg z)$  — КНФ;
- формула  $(x \& y \& \neg z) \vee (\neg y \& z) \vee (\neg x \& \neg z)$  — ДНФ.

# Совершенные формы

## Определение

Конъюнктивная или дизъюнктивная нормальная форма называется *совершенной* (СКНФ или СДНФ, соответственно), если выполняются следующие условия:

1. каждая переменная присутствует в каждом клозе ровно один раз;
2. все клозы различны (т. е. нет повторяющихся скобок);
3. в каждом клозе литералы упорядочены по возрастанию индексов (или по алфавиту, если переменные — различные латинские буквы);
4. клозы упорядочены лексикографически (мы считаем, что для любой переменной  $x_i$  литерал  $\neg x_i$  младше литерала  $x_i$ ; любые два клоза упорядочиваются по первому несовпадающему литералу).

## Примеры

- Формула  $(\neg x \vee y \vee \neg z) \& (\neg x \vee y \vee z) \& (x \vee \neg y \vee \neg z)$  — СКНФ;
- формула  $(\neg x \& y \& \neg z) \vee (\neg x \& y \& z) \vee (x \& \neg y \& \neg z)$  — СДНФ.

## Представление булевой функции в виде СКНФ и СДНФ

### Теорема

*Каждая булева функция единственным образом представляется как в виде СКНФ, так и в виде СДНФ.*

**Доказательство.** “ $\exists$ ”: Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — булева функция.

- Рассмотрим таблицу истинности функции  $f$ .
- Выберем из этой таблицы те строки, в которых получается значение 1.
- Каждой строке  $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$  можно поставить в соответствие простой конъюнкт  $(L_1 \& \dots \& L_n)$ , где  $L_i = \begin{cases} x_i, & a_i = 1 \\ \neg x_i, & a_i = 0. \end{cases}$ 
  - ▶ Этот конъюнкт принимает значение 1 тогда и только тогда, когда  $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ .
- Дизъюнкция всех конъюнктов, соответствующих выбранным строкам, будет СДНФ, соответствующей функции  $f$ .
- Аналогично, к СДНФ можно привести функцию  $\neg f$ . Тогда, взяв отрицание полученной формулы, найдем СКНФ, соответствующую  $f$ .

## Полные системы булевых функций

“!”: СДНФ, соответствующая функции  $f$ , единственна, поскольку входящие в нее простые конъюнкты однозначно определяются ее таблицей истинности.

- СКНФ, соответствующая функции  $f$ , единственна, поскольку ее отрицание — это СДНФ, соответствующая  $\neg f$ , а она единственна. □

### Определение

Множество  $\mathcal{F}$  булевых функций называется *полной системой*, если любую булеву функцию можно выразить через функции из  $\mathcal{F}$  при помощи операции композиции.

- Другими словами, любая булева функция должна задаваться пропозициональной формулой, в которой связки соответствуют функциям из  $\mathcal{F}$ .

### Следствие

Система  $\{\&, \vee, \neg\}$  — полная.

## Приведение к СКНФ и СДНФ

- Пусть булева функция  $f$  задана некоторой пропозициональной формулой.
- Как видно из доказательства теоремы, ее можно привести к СКНФ и СДНФ, при помощи ее таблицы истинности.
- Однако, часто бывает удобнее привести ее к СКНФ и СДНФ эквивалентными преобразованиями.
- Алгоритм приведения пропозициональной формулы  $F$  к СКНФ и СДНФ включает в себя следующие шаги.

1. **Элиминация связок.** Если в формуле  $F$  используются связки, отличные от  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ , их нужно заменить на эквивалентные им формулы, использующие только  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ .
2. **Протаскивание отрицаний.** Многократно применяем эквивалентности  $\neg\neg A \sim A$ ,  $\neg(A \& B) \sim (\neg A \vee \neg B)$ ,  $\neg(A \vee B) \sim (\neg A \& \neg B)$  (где  $A, B$  — произвольные подформулы) до тех пор, пока в формуле есть отрицания, применяемые к подформулам, отличным от одной переменной. В результате отрицания в формуле будут присутствовать только непосредственно перед переменными.

3. **Раскрытие скобок.** Для приведения к СКНФ и к СДНФ скобки нужно раскрывать по-разному.

- Для получения СКНФ нужно использовать эквивалентность  $(A \vee (B \& C)) \sim ((B \& C) \vee A) \sim ((A \vee B) \& (A \vee C))$  (где  $A, B, C$  — произвольные подформулы). Такие замены производятся до тех пор, пока в формуле есть дизъюнкции, применяемые к подформулам, включающим операцию конъюнкции.
- Для получения СДНФ нужно действовать аналогично, но используя эквивалентность  $(A \& (B \vee C)) \sim ((B \vee C) \& A) \sim ((A \& B) \vee (A \& C))$ .

По итогам этого шага получится КНФ или ДНФ соответственно, но она может не быть совершенной.

4. **Удаление повторяющихся переменных.**

- Если в каком-либо клозе есть несколько одинаковых литералов, оставляем только один из них.
- Если же в клозе есть разноименные литералы от одной переменной (например,  $x$  и  $\neg x$ ), то нужно удалить весь клоз.



## Приведение к СКНФ и СДНФ

### 5. Расщепление переменных.

Если клов  $C$  не содержит переменной  $z$ , заменяем его на

- $(C \vee z) \& (C \vee \neg z)$  (в случае СКНФ);
- $(C \& z) \vee (C \& \neg z)$  (в случае СДНФ).

### 6. Удаление повторяющихся кловов. Если клов $C$ встречается несколько раз, оставляем лишь один его экземпляр.

### 7. Сортировка. В каждом клове упорядочиваем литералы по алфавиту (или по номерам индексов); клозы упорядочиваем лексикографически.

## Аксиомы и правила вывода

- Как доказать, что пропозициональная формула является тавтологией?
- Можно написать ее таблицу истинности. Или привести ее к СДНФ.
- Но есть и другой способ: можно вывести данную формулу из аксиом. То есть доказать ее в рамках некоторой *формальной аксиоматической теории*.
- Каждая формальная теория должна включать в себя множество формул, называемых *аксиомами* и конечное множество *правил вывода* (отношений между формулами, позволяющих из некоторых формул выводить другие).

### Примеры правил вывода

1. *Modus ponens* (MP)  $\frac{A, (A \supset B)}{B}$  это означает, что  
из формул  $A$  и  $(A \supset B)$  мы можем вывести формулу  $B$ .

2. *Правило резолюции*  $\frac{(x \vee A), (\neg x \vee B)}{(A \vee B)},$

где  $x$  — переменная и  $A, B$  — формулы (возможно, пустые).

Формула  $(A \vee B)$  называется *резольвентой*.

## Пример формальной аксиоматической теории

Формальная аксиоматическая теория  $\mathcal{L}$  включает в себя три схемы аксиом и одно правило вывода.

Схемы аксиом:

$A_1: (A \supset (B \supset A));$

$A_2: ((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)));$

$A_3: ((\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)).$

*Аксиомой* считается любая формула, получаемая из формул  $A_1$ – $A_3$  подстановкой вместо  $A$ ,  $B$  и  $C$  любых формул. Подстановка, заменяющая все вхождения переменной  $A$  на формулу  $F$ , обозначается так:  $[F/A]$ .

Правило вывода: Modus ponens (MP)

Определение

- Формула  $B$  *выводима* в теории  $\mathcal{L}$  из формул  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , если существует последовательность формул  $A_1, A_2, \dots, A_n, F_1, \dots, F_k, B$ , в которой каждая формула, начиная с  $F_1$ , либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул при помощи правила MP.
- Обозначение:  $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash_{\mathcal{L}} B$ .

## Вывод в формальной аксиоматической теории $\mathcal{L}$

### Определение

- Последовательность  $A_1, A_2, \dots, A_n, F_1, \dots, F_k, B$  называется **выводом** формулы  $B$  из формул  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .
- Запись  $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash_{\mathcal{L}} B$  называется **секвенцией**.
- Если список формул  $A_1, A_2, \dots, A_n$  пуст, то говорят, что формула  $B$  **выводима** в теории  $\mathcal{L}$  (обозначение:  $\vdash_{\mathcal{L}} B$ ).

### Пример

Выведем в теории  $\mathcal{L}$  формулу  $(A \supset A)$ .

- |  |                               |
|--|-------------------------------|
| 1. $((A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)))$ | $A_2; [(A \supset A)/B, A/C]$ |
| 2. $(A \supset ((A \supset A) \supset A))$   | $A_1; [(A \supset A)/B]$      |
| 3. $((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$   | MP 2, 1                       |
| 4. $(A \supset (A \supset A))$   | $A_1; [A/B]$                  |
| 5. $(A \supset A)$   | MP 4, 3                       |

## • Алфавит

1. предметные константы:  $a_1, a_2, a_3, \dots$ ;
2. предметные переменные:  $x_1, x_2, x_3, \dots$ ;
3. функциональные символы:  $f_1^{m_1}, f_2^{m_2}, f_3^{m_3}, \dots$ ;
  - в качестве верхнего индекса указывается натуральное число, называемое *местностью* или *арностью* функционального символа;
  - т. е.  $f_i^m$  —  *$m$ -местный функциональный символ*, ему будет соответствовать функция от  $m$  аргументов;
  - предметную константу можно рассматривать как 0-местный функциональный символ;
4. предикатные символы:  $P_1^{n_1}, P_2^{n_2}, P_3^{n_3}, \dots$ ;
  - в качестве верхнего индекса указывается натуральное число, называемое *местностью* или *арностью* предикатного символа;
  - т. е.  $P_i^n$  —  *$n$ -местный предикатный символ*, ему будет соответствовать  $n$ -местное отношение;
5. связки:  $\neg, \&, \vee, \supset$ ;
6. кванторы:  $\forall, \exists$ ;
7. скобки:  $(, )$ .

## Замечание

- В принципе, обозначения для предметных констант, переменных, функциональных и предикатных символов могут быть и другими. Но они должны быть заранее определены.
- Список всех используемых предметных констант, функциональных и предикатных символов (с указанием их местности) называется *сигнатурой*.

## Термы

- *Термом* называется последовательность символов в указанном выше алфавите, которая строится по следующим принципам:
  1. любая предметная константа и любая предметная переменная — терм;
  2. если  $f_i^m$  —  $m$ -местный функциональный символ и  $t_1, \dots, t_m$  — термы, то  $f_i^m(t_1, \dots, t_m)$  — терм;
  3. выражение является термом только в том случае, если это следует из правил 1 и 2.

## Язык исчисления предикатов: формулы

- *Элементарной формулой* называется выражение вида  $P_j^n(t_1, \dots, t_n)$ , где  $P_j^n$  —  $n$ -местный предикатный символ и  $t_1, \dots, t_n$  — термы.
  - ▶ элементарные формулы также называют *атомарными формулами* или просто *атомами*.
- *Формулой* исчисления предикатов называется последовательность символов в указанном выше алфавите, которая строится по следующим принципам:
  1. любая элементарная формула — формула;
  2. если  $A$  — формула, то  $\neg A$  — формула;
  3. если  $A, B$  — формулы, то  $(A \& B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \supset B)$  — формулы;
  4. если  $A$  — формула и  $x$  — предметная переменная, то  $\forall x A$  и  $\exists x A$  — формулы;
  5. выражение является формулой только в том случае, если это следует из правил 1-4.
- В формулах вида  $\forall x A$  и  $\exists x A$  выражение  $A$  называется *областью действия* квантора  $\forall x$  или  $\exists x$ , соответственно.

## Свободные и связанные вхождения переменных

- Вхождение переменной  $x$  в формулу  $F$  называется **связанным**, если  $x$  является переменной входящего в эту формулу квантора  $\forall x$  или  $\exists x$ , либо находится в области действия входящего в эту формулу квантора  $\forall x$  или  $\exists x$ .
- В противном случае, вхождение переменной  $x$  в данную формулу называется **свободным**.
- Одна и та же переменная может иметь свободные и связанные вхождения в одну и ту же формулу.

### Пример

В формуле  $(f(x) = 0 \supset \exists x (g(x, y) = 0))$  первое вхождение переменной  $x$  свободно, второе и третье — связаны. Единственное вхождение переменной  $y$  свободно.

- Переменная  $x$  называется **свободной переменной** формулы  $F$ , если в  $F$  есть свободное вхождение переменной  $x$ . Аналогично,  $x$  называется **связанной переменной** формулы  $F$ , если в  $F$  есть связанное вхождение переменной  $x$ .
- Переменная может быть одновременно свободной и связанной в одной и той же формуле.



## Свободные и связанные переменные

- Если в формуле нет свободных переменных, она называется **замкнутой**.
- Если свободные вхождения переменных в формуле есть, то можно подставить вместо них какие-либо термы и получить новую формулу.
  - ▶ Пусть  $F$  — формула,  $x_1, \dots, x_n$  — переменные и  $t_1, \dots, t_n$  — термы. Тогда через  $F(t_1, \dots, t_n)$  обозначается **результат подстановки термов  $t_1, \dots, t_n$  в  $F$**  вместо всех свободных вхождений переменных  $x_1, \dots, x_n$ .
  - ▶ Также результат подстановки терма  $t$  вместо всех свободных вхождений переменной  $x$  в формулу  $F$  обозначают  $[F]_t^x$ .
- Терм  $t$  называется **свободным для переменной  $x$**  в формуле  $F$ , если никакое свободное вхождение  $x$  в  $F$  не находится в области действия никакого квантора  $\forall y$  или  $\exists y$ , где  $y$  — переменная, входящая в  $t$ .

### Пример

Терм  $x + y$  свободен для переменной  $x$ , но не свободен для переменной  $y$  в формуле  $(f(x) = 0 \supset \exists x (g(x, y) = 0))$ .

## Интерпретации

- Выбираем множество  $D$  — *область интерпретации*.
- Каждой предметной константе  $a_i$  ставим в соответствие элемент  $\alpha_i \in D$ .
- Каждому  $n$ -местному функциональному символу  $f_i^n$  ставим в соответствие  $n$ -местную операцию на  $D$  (т. е. отображение  $f_i: D^n \rightarrow D$ ).
- Каждому  $n$ -местному предикатному символу  $P_i^n$  ставим в соответствие  $n$ -местное отношение на  $D$  (т. е. подмножество  $P_i \subset D^n$ ).
- После этого, каждой замкнутой формуле будет соответствовать некоторое высказывание (оно истинно или ложно).
- Каждой незамкнутой формуле будет соответствовать отношение на множестве  $D$  ( $k$ -местное отношение, где  $k$  — число свободных переменных).

## Примеры

1. Формула  $\exists c (a = b \cdot c)$  при  $D = \mathbb{N}$  задает отношение делимости.
  - Но при  $D = \mathbb{Q}_+$  получаем универсальное отношение (все пары чисел).
2. Формула  $\forall a \exists b (a = b \cdot b)$  при  $D = \mathbb{R}$  задает ложное высказывание.  
А при  $D = \mathbb{C}$  — истинное.

## Выполнимость и общезначимость

- Формула  $F$  называется *истинной в данной интерпретации*, если соответствующее ей отношение выполняется для всех наборов значений переменных.
  - ▶ Это эквивалентно тому, что *замыкание* формулы  $F$  (т. е. формула  $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k F$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_k$  — свободные переменные формулы  $F$ ) в данной интерпретации задает истинное высказывание.
- Формула  $F$  называется *(логически) общезначимой*, если она истинна в любой интерпретации.
- Формула  $F$  называется *выполнимой в данной интерпретации*, если соответствующее ей отношение выполняется хотя бы для одного набора значений переменных.
  - ▶ То есть формула  $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_k F$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_k$  — свободные переменные формулы  $F$ , в данной интерпретации задает истинное высказывание.
- Формула  $F$  называется *выполнимой*, если она выполнима в какой-либо интерпретации.