Алгебра. Практика. 2021-22

Занятие 1. 06.09.2022.

0. Выполните деление: $\frac{2+1i}{1-2i}$.

1. Решите квадратное уравнение: $x^2 - 4x + 5 = 0$.

2. Найдите модуль и аргумент числа $-\sqrt{3} + i$.

3. Пусть $a = \cos(\frac{5\pi}{7}) + i\sin(\frac{5\pi}{7})$ и $b = \cos(\frac{4\pi}{7}) + i\sin(\frac{4\pi}{7})$.
а) Найдите $(a+b)^4$.
б) А потом все корни, скажем, 3 степени из $(a+b)$.

4. Решите уравнение:
а) $z^5 = \overline{z}$;
б) $z^5 + \overline{z} = 0$.

5. Комплексное число z таково, что $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$ (где α известно). Найдите $z^n + \frac{1}{z^n}$.

6. Пусть $z \in \mathrm{C}$, $z \neq -1$, $|z| = 1$. Докажите, что существует такое вещественное число t, что $z = \frac{1-ti}{1+ti}$.

Занятие 2. 13.09.2022.

1. Пусть $x + iy = (s+it)^n$. Докажите, что $x^2 + y^2 = (s^2 + t^2)^n$.
2. Найдите НОД и его линейное представление с помощью алгоритма Евклида:
а) $(2453, 2007)$;
б) $(2376, 702)$.

3. Последовательность чисел Фибоначчи определяется соотношениями $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ при $n \geq 1$.
а) Найдите (F_n, F_{n+1}).
б) Найдите линейное представление НОД (F_n, F_{n+1}).

4. Докажите, что все натуральные числа, имеющие нечетное число натуральных делителей — это точные квадраты

5. Пусть $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Докажите, что $\varphi(n) \vdots 2$ при $n > 2$.

Занятие 3. 20.09.2022.

1. Решите в целых числах уравнение.
а) $258x - 172y = 112$;
б) $209x - 513y = 76$.
2. Натуральное число n не имеет собственных делителей, больших 1 и не превосходящих $\sqrt{n}$. Докажите, что $n \in \mathbb{P}$.
3. Докажите, что простых чисел вида $4k - 1$ бесконечно много.
4. а) Верно ли, что $2\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов?
б) Опишите все идеалы в кольца $2\mathbb{Z}$.

Занятие 4. 27.09.2022.

1. Найдите вычет обратный 17 по модулю 336.

2. Решите сравнение: Решите сравнение: $91x \equiv 154 \pmod{112}$.

3. Докажите, что $d(n)$ (количество натуральных делителей n) мультипликативна (то есть $d(ab) = d(a)d(b)$ для взаимно простых натуральных a и b).

4. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ пусть $S_j(n) = \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{j} + \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{j+4} + \dots$ (сумма всех биномиальных коэффициентов с номерами, имеющими остаток j от деления на 4).

а) Докажите, что $S_0 - S_2 = \mathrm{Re}((1+\mathrm{i})^\mathrm{n})$.

б) Найдите S_0, S_1, S_2 и S_3.

Занятие 5. 04.10.2022.

1. а) Решите систему сравнений

а) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 7 \\ x \equiv 37 \pmod{41} \\ x \equiv 7 \pmod{85} \end{cases}$.

2. Докажите, что функция Мёбиуса μ мультипликативна.

3. Число $n \in \mathbb{N}$ имеет 15 натуральных делителей. Сколько простых делителей может иметь n?

4. а) Найдите сумму первообразных корней степени p из 1, где $p \in \mathbb{P}$.

б) Найдите сумму первообразных корней степени $p_1 p_2 \ldots p_k$ из 1, где $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$ — разные.