Серия 2. Множества, отображения и отношения

1. Пусть M — множество всех трехэлементных подмножеств натурального ряда. Рассмотрим отображение $f : M \to \mathbb{N}$, которое каждому трехэлементному множеству ставит в соответствие его второй по величине элемент. Является ли это отображение а) инъекцией б) сюръекцией?

2. Дано множество X, $|X| = n$. а) Сколько существует бинарных отношений на множестве X? Сколько среди них б) рефлексивных; в) симметричных; г) антисимметричных?

3. На какое наименьшее число групп можно разбить все пары элементов данного n-элементного множества так, чтобы любые две пары из одной группы имели общий элемент?

4. Пусть M — количество всевозможных способов расставить слонов на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга. (Количество слонов может быть любым натуральным числом, даже 1.) Докажите, что $M + 1$ — квадрат некоторого натурального числа.

5. Дано натуральное число n, и множество $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Найдите наименьшее значение величины $|S \triangle A| + |S \triangle B| + |S \triangle C|$, где A и B — непустые конечные множества натуральных чисел и $C = A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

6. В школе действует несколько кружков. Среди них есть кружок по топологии, который никто не посещает, и кружок по обществознанию, на который ходят все 2020 учеников школы. Списочные составы любых двух кружков различны. Кроме того, для любых двух кружков A и B

1) найдётся кружок C, который посещают в точности те ученики, которые посещают как A, так и B;

2) найдётся кружок D, который посещают в точности те ученики, которые посещают хотя бы один из кружков A или B.

Докажите, что какой-то ученик посещает не менее половины всех кружков.

7. У конечного множества A выбрано несколько подмножеств. Каждое подмножество состоит хотя бы из двух элементов, а любые два пересекающихся подмножества имеют хотя бы два общих элемента. Докажите, что элементы множества A можно покрасить в два цвета так, чтобы каждое из выбранных подмножеств содержало элементы обоих цветов.

Серия 2. Множества, отображения и отношения

1. Пусть M — множество всех трехэлементных подмножеств натурального ряда. Рассмотрим отображение $f : M \to \mathbb{N}$, которое каждому трехэлементному множеству ставит в соответствие его второй по величине элемент. Является ли это отображение а) инъекцией б) сюръекцией?

2. Дано множество X, $|X| = n$. а) Сколько существует бинарных отношений на множестве X? Сколько среди них б) рефлексивных; в) симметричных; г) антисимметричных?

3. На какое наименьшее число групп можно разбить все пары элементов данного n-элементного множества так, чтобы любые две пары из одной группы имели общий элемент?

4. Пусть M — количество всевозможных способов расставить слонов на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга. (Количество слонов может быть любым натуральным числом, даже 1.) Докажите, что $M + 1$ — квадрат некоторого натурального числа.

5. Дано натуральное число n, и множество $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Найдите наименьшее значение величины $|S \triangle A| + |S \triangle B| + |S \triangle C|$, где A и B — непустые конечные множества натуральных чисел и $C = A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

6. В школе действует несколько кружков. Среди них есть кружок по топологии, который никто не посещает, и кружок по обществознанию, на который ходят все 2020 учеников школы. Списочные составы любых двух кружков различны. Кроме того, для любых двух кружков A и B

1) найдётся кружок C, который посещают в точности те ученики, которые посещают как A, так и B;

2) найдётся кружок D, который посещают в точности те ученики, которые посещают хотя бы один из кружков A или B.

Докажите, что какой-то ученик посещает не менее половины всех кружков.

7. У конечного множества A выбрано несколько подмножеств. Каждое подмножество состоит хотя бы из двух элементов, а любые два пересекающихся подмножества имеют хотя бы два общих элемента. Докажите, что элементы множества A можно покрасить в два цвета так, чтобы каждое из выбранных подмножеств содержало элементы обоих цветов.