답지 테스트 파일

$f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$이므로

$x=0$ 또는 $x=-4$일 때 $f'(x)=0$이다.

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k+5$	$\searrow$	k	$\nearrow$	$k+7$

따라서 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $k+7$을 갖고, $x=0$일 때 최솟값 k를 갖는다.

즉, $k+7=8$에서 $k=1$이므로

따라서 구하는 최솟값은 1이다.

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1 또는 2이어야 한다. …… TIP

$f'(x)=12x^3-12(a-2)x^2+12(a+1)x-48$

$=12\{x^3-(a-2)x^2+(a+1)x-4\}$

$=12(x-1)\{x^2-(a-3)x+4\}$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x^2-(a-3)x+4=0$

이때 서로 다른 실근의 개수가 1 또는 2이려면

이차방정식 $x^2-(a-3)x+4=0$이 중근 또는 허근을 갖거나 $x=1$을 실근으로 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2-(a-3)x+4=0$이 중근 또는 허근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a-3)^2-16\le 0$에서

$a^2-6a-7\le 0$, $(a+1)(a-7)\le 0$

$\therefore -1\le a\le 7$

(ii) 방정식 $x^2-(a-3)x+4=0$이 $x=1$을 실근으로 갖는 경우

$1-(a-3)+4=0$에서 $a=8$

(i), (ii)에 의하여 $-1\le a\le 7$ 또는 $a=8$

따라서 정수 a는 $-1, 0, 1, \cdots, 8$로 10개이다.

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하려면 방정식 $f(x)=0$이 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

방정식 $f(x)=0$에서 $2x^3-3(a-1)x^2-6ax=0$, 즉

$x\{2x^2-3(a-1)x-6a\}=0$이 중근 또는 삼중근을 갖는 경우는 다음과 같다.

(i) 방정식 $2x^2-3(a-1)x-6a=0$의 한 근이 $x=0$인 경우

$-6a=0$에서 $a=0$

(ii) 방정식 $2x^2-3(a-1)x-6a=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=9(a-1)^2+48a=0$에서

$3a^2+10a+3=0$, $(3a+1)(a+3)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{3}$ 또는 $a=-3$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 a의 값의 합은

$0+(-3)+\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{10}{3}$

다른 풀이

다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하려면

$f(k)=0$이고 $f'(k)=0$인 실수 k가 존재하면 된다.

$f'(x)=6x^2-6(a-1)x-6a=6(x-a)(x+1)$이므로

$x=a$ 또는 $x=-1$일 때 $f'(x)=0$이다.

즉, $f(a)=0$ 또는 $f(-1)=0$이면 된다.

$f(a)=2a^3-3(a-1)a^2-6a^2=-a^3-3a^2=-a^2(a+3)=0$에서

$a=0$ 또는 $a=-3$

$f(-1)=-2-3(a-1)+6a=3a+1=0$에서

$a=-\frac{1}{3}$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$0+(-3)+\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{10}{3}$