

# 波浪能最大输出功率优化模型

## 摘要

波浪能作为新型清洁能源，以其分布广、能量高等特点具有较高开发前景。本文基于波浪能装置的结构原理，根据物理力学分析，得到浮子与振子运动条件的微分方程，建立波浪能最大输出功率优化模型。

针对问题一，只考虑波浪能装置在海水波浪中做垂荡运动，首先建立笛卡尔三维坐标系，确定浮子与振子的质心位置，结合受力分析图，对初始时刻平衡条件进行分析，再根据牛顿第二定律建立浮子与振子在周期性波浪激励力等附加力的作用下运动时微分方程组，采用四阶-五阶 Runge-Kutta 算法，求解浮子与振子的垂荡位移与速度，绘制垂荡位移和速度的时间变化图。求解得出在不同条件直线阻尼器的阻尼系数下的垂荡位移和速度，结果见正文及文件 result1-1.xlsx 和 result1-2.xlsx。

针对问题二，首先以浮子为研究对象，基于问题一中浮子垂荡受力关系，根据绕射理论对受力表达式进行频域变换，利用浮子位移频域表达式推导得出平均功率复频域表达式，定义频域中浮子固有阻抗及量输出系统阻抗，得到平均功率频域表达式，利用遍历步长法进行求解。得出问题(1)最大输出功率为 299.2631664W，最优阻尼系数为 79999.893N·s/m；问题(2)最大输出功率为 299.2632W，最优阻尼系数为 96632.6N·s/m。

针对问题三，波浪能装置同时进行垂荡和纵摇运动，考虑到扭转弹簧与旋转阻尼器，将装置系统中浮子和振子独立研究，对二者在垂荡和纵摇的情况下进行受力分析。将浮子与振子进行垂荡运动时作用力均分解到 z 轴方向，利用二者垂荡过程中与 xoy 平面之间的夹角进行受力分解，在 z 轴方向列牛顿第二定律方程；在浮子和振子纵摇运动时，利用转动定律，得到纵摇角位移与角速度微分方程组，联立求解得到浮子与振子垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度，结果见正文及文件 result3.xlsx。

针对问题四，在考虑垂荡和纵摇的情况下，基于问题二、三中垂荡时 PTO 系统的最大输出功率，将浮子在波浪中的两种运动形态独立研究，垂荡情况根据第二问平均功率表达式进行表示，求解纵摇时浮子和振子在频域中的输出功率，将两阻尼器微分方程采用龙格-库塔算法进行求解最大输出功率和两阻尼器的最优阻尼系数，最大输出功率为 107.981W，直线阻尼器系数为 79999.859 N·s/m，旋转阻尼器系数为 98414.634N·m·s

**关键词：**输出功率优化 微分方程 Runge-Kutta 算法 频域变换 遍历步长法

## 一、 问题重述

### 1.1 问题背景

近年来我国经济与人民生活水平快速发展,以化石燃料为首的能源危机问题以及全球气候变暖、人类生态环境逐渐恶化等现象已然成为公民所必然面临的严峻挑战。我国拥有相当长的海岸线长度、宽广的海洋领土面积以及十分丰富的海底资源,而波浪能是一种无污染能量强的海洋可再生资源,受到世界各国的广泛研究。波浪能装置结构的能量转换效率是大规模开采利用波浪能的重要因素。波浪能装置是由浮子、振子、中轴和能量输出系统(PTO)构成,是一种将浮子振荡动能最终转换成电能的波能发电装置。

### 1.2 问题提出

问题 1: 当浮子在海水里只做垂荡运动,建立浮子和振子的运动模型。振子沿中轴杆做往复运动。直线阻尼器的阻尼力与浮子和振子的相对速度成正比,比例系数为阻尼系数。初始系统平衡静止于水中,根据附件所给信息分别对下面两种情况计算浮子与振子在波浪激励力 $f \cos \omega t$ 作用下,在时间间隔为 0.2s 时间下计算 40 个波浪周期之内垂荡位移和速度: (1) 直线阻尼器阻尼系数为  $10000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ ; (2) 直线阻尼器的阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比,此时比例系数为 10000,幂指数为 0.5。并给出在 10s、20s、40s、60s、100s 时垂荡的位移和速度。

问题 2: 当浮子在波浪中只做垂荡运动,利用附件所给出的参数值,对两种情况建立直线阻尼器的最优阻尼系数的数学模型,使得能量输出系统 PTO 系统平均输出功率最大: (1) 阻尼系数为常量且阻尼系数分布于区间 $[0, 100000]$ 内; (2) 阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比,比例系数分布于区间 $[0, 100000]$ 内,幂指数分布于区间 $[0, 1]$ 内。计算两种情况下的最大输出功率和相应的最优阻尼系数。

问题 3: 能量传输装置安装旋转阻尼器和扭转弹簧,与直线阻尼器共同做功输出能量。浮子在波浪的作用下进行摇荡运动,振子随着中轴转动,且沿中轴进行滑动。扭转弹簧扭矩与浮子与振子相对角位移成正比,比例系数是扭转弹簧刚度。旋转阻尼器扭矩和浮子与振子相对角速度成正比,比例系数是旋转阻尼器旋转阻尼系数。根据附件 2 运动情况,建立浮子与振子的运动模型。利用附件中提供的参数值,计算时间间隔为 0.2 s 时浮子与振子在波浪激励力与波浪激励力矩 $f \cos \omega t$ ,  $L \cos \omega t$ 作用下的 40 个水波浪周期垂荡位移和速度与纵摇角位移和角速度。并计算出 10s、20s、40s、60s、100s 时浮子与振子的垂荡位移和速度与纵摇角位移和角速度。

问题 4: 浮子在波浪中做垂荡和纵摇运动,利用附件信息建立直线阻尼器和旋转阻尼器最优阻尼系数数学模型,计算最大输出功率和相应最优阻尼系数。

## 二、 问题分析

### 2.1 问题一

针对问题一,由于考虑波浪能装置的浮子在海水波浪的作用下只做垂荡运动,故附件 3 中所给出的相关参数值只考虑垂荡条件的数值,即研究入射波频率、垂

荡附加质量、垂荡兴波阻尼系数、垂荡激励力振幅等参数的影响。由于振子沿中轴在浮子内做往复运动,首先以浮子圆柱面与圆锥面衔接面即中轴底座所在平面中心点为圆心,以中轴底座所在平面为  $xoy$  平面建立三维坐标系,进而分别对浮子和振子的质心进行分析确定,在此基础上对波浪能装置系统进行受力分析,建立浮子与振子的受力模型,进而使用 Axglyph 软件画出每部分的具体受力分析图。之后首先研究在初始静止的条件下浮子与振子的受力情况,进而分析当存在周期性波浪激励力时的浮子与振子以及波浪能装置系统整体的受力情况方程式,进而采用四阶-五阶 Runge-Kutta 算法,求解浮子与振子的受力平衡微分方程,得到波能装置中浮子与振子的位移和速度的运动情况,最后分别绘出浮子与振子的垂荡位移和速度随时间变化的图形,进行比较分析,得到前 40 个周期时间间隔 0.2s 时直线阻尼器的阻尼系数在不同条件变化下的垂荡位移和速度。

## 2.2 问题二

针对问题二,将波能发电系统装置的发电过程总体分为 3 个阶段:装置浮子在波浪激励力的作用下发生垂荡运动,将波浪的动能转化为浮子的垂荡动能;之后浮子经过与中轴底座相连接的弹簧将转化为弹簧的弹性势能,进而弹簧带动振子进行垂荡运动;最后振子通过与直线阻尼器直接相连,将浮子与振子相对速度的大小进行体现,从而得到直线阻尼器的输出功率和能量。题目中求解最大输出功率和最优阻尼系数,首先以浮子作为研究对象,列出其受力微分方程式,进而进行频域变换得出浮子位移频域表达式,利用频域功率计算表达式得到平均功率表达式,为简化浮子在功率吸收时各参数以及结构的作用,将浮子本身的固有阻抗和能量输出系统(PTO)的系统中弹簧刚度、直线阻尼器阻尼系数等参数设为变化阻抗单独表示出,带入求解得出平均功率表达式,进行代数求解。

## 2.3 问题三

针对问题三,波浪作用时,波浪能装置进行摇荡运动,在增加扭转弹簧与旋转阻尼器的情况下,浮子通过转轴、弹簧和阻尼器带动振子进行垂荡和纵摇同时运动。考虑将装置系统中浮子和振子分开研究,分别对二者在垂荡和纵摇的情况下进行受力分析后进行叠加。对浮子与振子进行垂荡运动时,将所有作用力均分解到  $z$  轴方向,利用二者垂荡过程中与初始静止时刻中轴底面所在平面( $xoy$  平面)之间的夹角进行受力分解,在  $z$  轴竖直方向上列出牛顿第三定律方程求解垂荡位移与速度;对于浮子和振子进行纵摇运动时,分别对浮子和振子摇动时与  $x$  轴的夹角进行表示,利用转动定律求解纵摇角位移与角速度。

## 2.4 问题四

针对问题四,要求在只考虑垂荡和纵摇的情况下,确定直线阻尼器和旋转阻尼器的最优阻尼系数使得系统总输出功率最大并求出最大输出功率。基于问题二中计算垂荡时 PTO 系统的最大输出功率,考虑将浮子在波浪中的两种运动形态分开研究,垂荡情况采用第二问平均功率表达式进行表示,重点求解纵摇时浮子和振子在频域中的输出功率,将两阻尼器微分方程进行联立求解最大输出功率和相应的最优阻尼系数。

### 三、 模型假设

1. 海水波浪是无粘且无旋性的且忽略装置中轴、底座、隔层以及 PTO 的质量和各种摩擦；
2. 不考虑浮子运动对周围水体产生的辐射力；
3. 浮子运动频率与波浪频率近似相等；
4. 扭转弹簧与竖直弹簧相互独立工作；
5. 只有纵摇没有垂荡时，浮子与转子均绕着转轴中心点旋转；
6. 波浪激励力与浮子中心轴线方向一致。

### 四、 符号说明

符号	说明
$M$	浮子质量 (kg)
$R$	浮子底半径 (m)
$H_1$	浮子圆柱部分高度 (m)
$H_2$	浮子圆锥部分高度 (m)
$H_3$	振子高度 (m)
$m$	振子质量 (kg)
$r$	振子半径 (m)
$\beta_1$	直线阻尼器的阻尼系数
$\beta_2$	弹簧刚度 (N/m)
$\beta_3$	垂荡兴波阻尼系数
$\beta_4$	纵摇兴波阻尼系数
$F_e(t)$	波浪激励力
$F_{静}(t)$	浮子所受到的静水恢复力
$Z_1$	浮子运动的位移
$Z_2$	振子运动的位移
$V_1$	浮子运动的速度
$V_2$	振子运动的速度
$F_{PTO}$	阻尼器和弹簧原长所合成的力
$f_i(i=1,2,3,4)$	浮子在不同频率下的波浪激励力
$R_f$	浮体本身固有阻抗
$R_c$	可变部分的阻抗(该阻抗取决 PTO 系统)
$\alpha_1$	扭转阻尼器阻尼系数
$\alpha_2$	扭转弹簧刚度 (N · m)
$k$	静水恢复力矩系数 (N · m)
$C$	垂荡附加质量
$L$	纵摇激励力矩振幅

注：其他符号具体说明在正文中给出

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 问题一

#### 5.1.1 模型建立

##### 1. 建立三维坐标系以及确定质心位置

根据附件 1 波浪能装置系统只做垂荡运动时的工作原理示意图可知, 振子总沿中轴上下做往复运动, 考虑以浮子圆柱面与圆锥面二者相连接的面即中轴底座所在平面中心点为圆心, 以中轴底座所在平面为  $xoy$  平面, 以中轴所在直线为  $z$  轴建立三维坐标系如图 1 所示

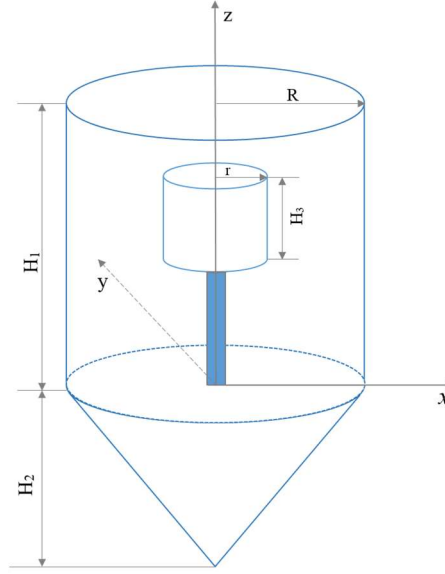


图 1 波浪能装置所建立的三维坐标系

进而分别对浮子与振子的质心进行分析确定。对于振子而言, 质心即位于振子圆柱体的几何中心, 对于浮子而言, 整体由圆柱体和圆锥体共同组成。根据质心计算公式

$$z_0 = \frac{\oint \vec{R}ods}{M} \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{M}{S_{\text{总}}} = \frac{M}{\pi R^2 + 2\pi R H_1 + \pi R \sqrt{H_2^2 + R^2}} \quad (2)$$

其中,  $M$  表示浮子本身的总质量,  $S_{\text{总}}$  为浮子两部分的总外表面积,  $y_0$  表示浮子质心在  $z$  轴上距离坐标原点的距离, 设  $\vec{R}$  为浮子外表面上任意一个面元到质心有向距离, 求解出浮子整体质心位置。

##### 2. 建立波浪能装置受力分析模型

在建立好浮子与振子质点位置的基础上, 对波浪能装置系统中浮子和振子分别进行受力分析, 建立浮子与振子的受力模型。假设忽略装置里中轴、底座、隔层以及 PTO 的质量和各种摩擦, 在此基础上进行受力分析, 浮子受到重力  $Mg$ 、

波浪激励力  $F_e(t)$ 、静水恢复力  $F_{\text{静}}(t)$ ；振子受到重力  $mg$  以及能量输出系统(PTO)产生的力  $F_{\text{PTO}}$ 。受力分析图如图 2 所示

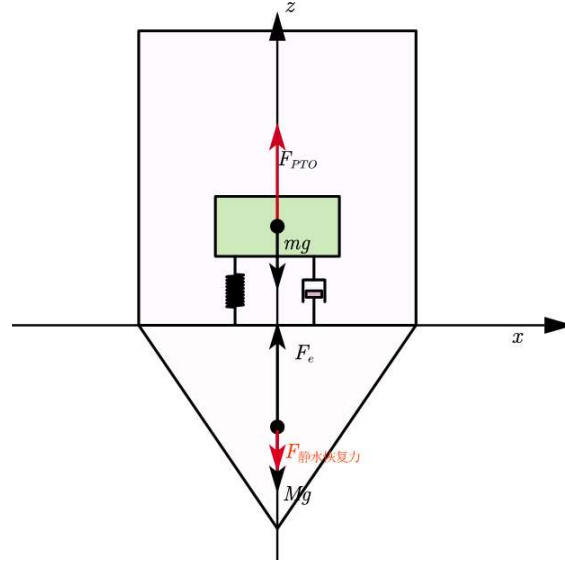


图 2 浮子与振子的受力分析情况

对于波浪能装置静止于水面的情况，此时波能系统受力平衡，得到静止时系统中浮子与振子的相关受力平衡方程式

$$\begin{cases} f_1 \cos(\omega t) - F_{\text{PTO}} = -\rho_{\text{水}} g V_{\text{排}} + Mg \\ \beta_1 \left( \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right) + \beta_2 (z_1 - z_2 + L) = mg \end{cases} \quad (3)$$

其中， $f_1 \cos(\omega t)$  表示在波浪频率为  $1.4005 \text{ s}^{-1}$  时在浮子上所加的波浪激励力  $F_e(t)$ ， $\rho_{\text{水}} g V_{\text{排}}$  表示静水恢复力，用  $\beta_1 \left( \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right)$  表示与浮子和振子相对速度成正比的阻尼力， $\beta_2 (z_1 - z_2 + L)$  表示弹簧产生形变时所具有的弹力。

对(3)式进行求解，分别得到浮子总排水量  $V_{\text{排}_0}$  和静止时水面到中轴底座平面(xoy 平面)的高度距离  $h_0$  的表达式

$$V_{\text{排}_0} = \frac{(M + m)g - f_1}{\rho_{\text{水}} g} \quad (4)$$

$$h_0 = \frac{V_{\text{排}_0} - V_{\text{锥}}}{\pi R^2} \quad (5)$$

对于波浪能装置在海水中进行垂荡运动的情况，此时当  $t=0$  初始时刻，浮子位移  $Z_1$  为 0，振子位移为 PTO 系统弹簧形变量  $Z_2$ ，且浮子与振子二者初始时刻速度  $\frac{dz_1}{dt}$  和  $\frac{dz_2}{dt}$  均为 0，由此可得

$$\begin{cases} Z_1(t=0) = 0, \\ Z_2(t=0) = l - \frac{mg}{\beta_2}, \\ \frac{dz_1}{dt}(t=0) = 0, \\ \frac{dz_2}{dt}(t=0) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

1)当  $t \neq 0$  时，问题一第一问中所给直线阻尼器的阻尼系数为  $10000 \text{ N s/m}$ ，此时对浮子和振子分别进行受力分析。根据牛顿第二定律，分析浮子受力表达式

$$F_e(t) - F_{PTO} - \beta_3 \frac{dz_1}{dt} = F_{\text{静}}(t) + (M + C) \frac{d^2 z_1}{dt^2} \quad (7)$$

其中， $\beta_3 \frac{dz_1}{dt}$  表示浮子在海水中进行垂荡运动时所产生的垂荡兴波阻尼力，根据题中所给关系可知，浮子的静水恢复力表示为

$$F_{\text{静}}(t) = \rho_{\text{水}} g V_{\text{排}} \quad (8)$$

直线阻尼器产生的阻尼力为

$$F_e(t) = f_1 \cos(\omega t)$$

能量输出系统(PTO)中，阻尼器的阻尼力与浮子和振子的相对速度成正比，阻尼器与弹簧所产生的合力<sup>[1]</sup>表达式为

$$F_{PTO} = \beta_1 \left( \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right) + \beta_2 (z_1 - z_2 + L) \quad (9)$$

对于振子，列出合力对振子的牛顿第二定律表达式

$$F_{PTO} - mg = m \frac{d^2 z_2}{dt^2} \quad (10)$$

将上述表达式联立得到目标方程

$$\begin{cases} F_e(t) - F_{PTO} - \beta_3 \frac{dz_1}{dt} = F_{\text{静}}(t) + (M + C) \frac{d^2 z_1}{dt^2} \\ F_{\text{静}}(t) = \rho_{\text{水}} g V_{\text{排}} \\ F_{PTO} = \beta_1 \left( \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right) + \beta_2 (z_1 - z_2 + L) \\ F_e(t) = f_1 \cos(\omega t) \\ F_{PTO} - mg = m \frac{d^2 z_2}{dt^2} \end{cases} \quad (11)$$

求解出浮子和振子前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2s 的垂荡位移和速度。

2)当  $t \neq 0$  时，问题一第二问中直线阻尼器的阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比，比例系数为 10000，幂指数取 0.5 的情况下，其他函数表达式均不变，将能量输出系统(PTO)中直线阻尼器的阻尼力表达式进行定义，得到新 PTO 系统阻尼器和弹簧输出的力的表达式

$$F_{PTO} = \beta_1 \sqrt{\left| \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right|} + \beta_2 (z_1 - z_2 + L) \quad (12)$$

由此，将上述关系式进行联立得到直线阻尼器比例系数为 10000，幂指数取 0.5 的情况下浮子与振子的受力方程组

$$\begin{cases} F_e(t) - F_{PTO} - \beta_3 \frac{dz_1}{dt} = F_{\text{浮}}(t) + (M + C) \frac{d^2 z_1}{dt^2} \\ F_{\text{浮}}(t) = \rho_{\text{水}} g V_{\text{排}} \\ F_{PTO} = \beta_1 \sqrt{\left| \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right|} + \beta_2 (z_1 - z_2 + L) \\ F_e(t) = f_1 \cos(\omega t) \\ F_{PTO} - mg = m \frac{d^2 z_2}{dt^2} \end{cases} \quad (13)$$

对上式进行求解得出出浮子和振子前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2s 的垂荡位移和速度和 10s、20s、40s、60s、100s 时，浮子与振子的垂荡位移和速度。

### 5. 1. 2 模型求解

#### 1. 质心以及静止时刻排水量及高度计算

根据上述表达式可知，由于振子为质量分布均匀的圆柱体，因此质心位于圆柱体几何中心；对于浮子而言，根据质心计算公式求出质心与原点之间距离为

$$z_0 = \frac{\oint \vec{R} \sigma ds}{M} = 1.1958 \quad (14)$$

在此基础上，根据静止时刻受力平衡条件，求解计算出静止时浮子的排水量  $V_{\text{排}_0}$  值为

$$V_{\text{排}_0} = \frac{(M + m)g - f_1}{\rho_{\text{水}} g} = 6.49878 \quad (15)$$

静止初始时刻，水面高度距离 xoy 坐标平面的距离  $h_0$  数值为

$$h_0 = \frac{V_{\text{排}_0} - V_{\text{锥}}}{\pi R^2} = 1.802 \quad (16)$$

利用求解出的初始水面对于中轴底座平面的距离，分析判断浮子圆锥部分在整个垂荡过程中的位置情况，即是否位于水面之下或露出水面。分别假设浮子圆锥部分完全浸在水中和部分露出水面的情况，建立位置判断关系式

$$\begin{cases} Z_1 + 1.802 > 0, V_{\text{排}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H_2 + \pi R^2 (Z_1 + 1.802) \\ Z_1 + 1.802 < 0, V_{\text{排}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \left[ \frac{R(H_2 + Z_1 + 1.802)}{H_2} \right]^2 (H_2 + Z_1 + 1.802) \end{cases} \quad (17)$$



经过计算分析得出，波浪能装置系统中浮子的圆锥部分不会露出水面，即整个圆锥体表面都浸在海水中。

## 2.浮子与振子受力方程求解

在此基础上，利用四阶-五阶 Runge-Kutta 算法<sup>[2]</sup>，用 4 阶方法提供候选解，用 5 阶方法控制误差，采用变步长法对浮子与振子的运动受力方程组的(Nonstiff)非线性常微分方程进行数值求解，得出前 40 个波浪周期时间间隔 0.2s 的情况下的运动情况，分别绘制浮子与振子位移与速度随时间变化的图形。

(1)当第一问直线阻尼器的阻尼系数为 10000 N·s/m 时，浮子与振子随时间变化的波形图如图 3

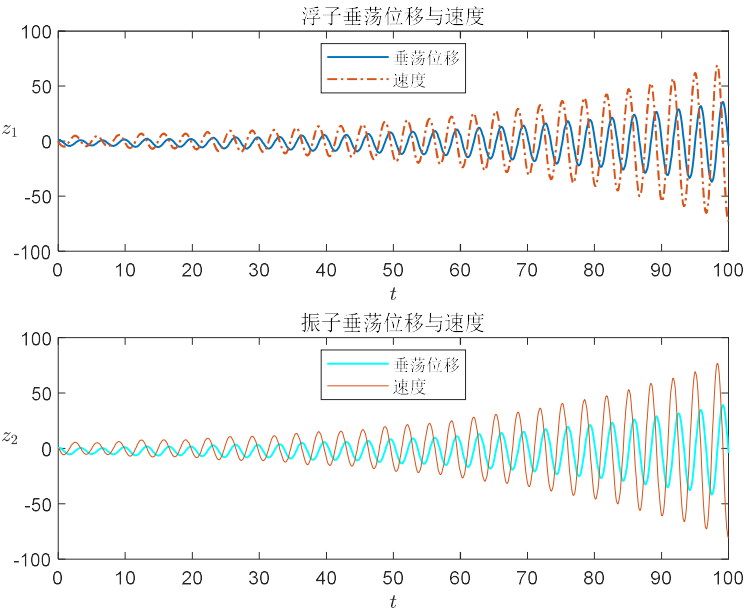


图 3 浮子与振子随时间变化的波形图

由此得出，在忽略中轴、底座、隔层和 PTO 等质量和摩擦因素的情况下，浮子与振子进行规律性波动。计算求解出微分方程组，得到浮子与振子在 10s、20s、40s、60s、100s 时的位移与速度情况如表 1

表 1 问题一第一问不同时间浮子与振子位移与速度

时间(t)	10s	20s	40s	60s	100s
浮子位移(m)	1.425571	1.786001	4.30735	4.838404	-4.29627
浮子速度(m/s)	-1.59044	-2.65556	-7.98167	-19.9726	-72.5075
振子位移(m)	1.675571	2.036001	4.55735	5.088404	-4.04627
振子速度(m/s)	-1.54325	-2.70762	-8.52961	-21.7771	-80.8542

(2)当第二问直线阻尼器的阻尼系数与浮子与振子的相对速度绝对值的幂成正比，比例系数取 10000，幂指数取 0.5 时，计算求解并绘出浮子与振子随时间变化的波形图如图 4

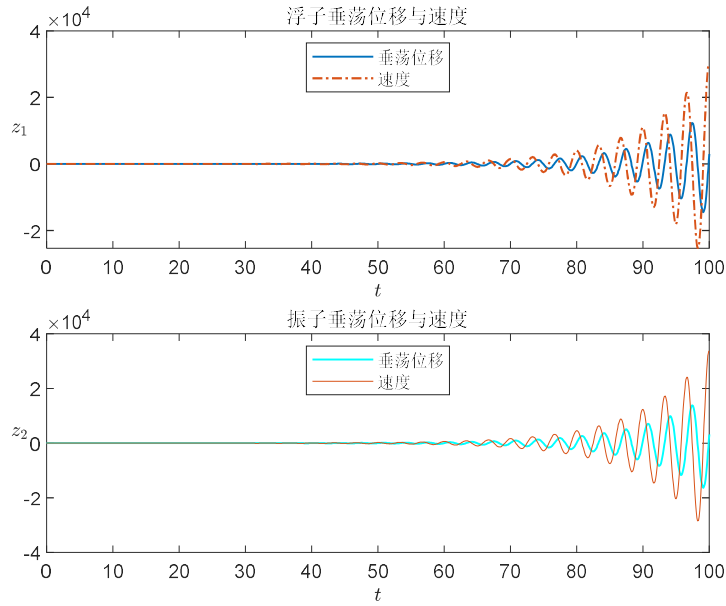


图 4 浮子与振子随时间变化的波形图

同理得出，在忽略相关影响因素的情况下，浮子与振子进行规律性波动。求解微分方程，并得到浮子与振子在 10s、20s、40s、60s、100s 时的位移与速度情况如表 2

表 2 问题一第二问不同时间浮子与振子位移与速度

时间	10s	20s	40s	60s	100s
浮子位移	-0.10042	-0.76798	-0.2488	13.59191	3019.222
浮子速度	3.031739	9.576275	73.13004	544.6238	29936.99
振子位移	0.149578	-0.51798	0.001205	13.84191	3019.472
振子速度	3.596317	10.8763	81.92294	610.288	33588.33

前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2s 下两种情况浮子和振子在波浪激励力作用下的垂荡位移和速度结果分别存放于 result1-1.xlsx 和 result1-2.xlsx 中。

## 5.2 问题二

### 5.2.1 模型建立

问题二中只考虑浮子做垂荡运动，要使 PTO 系统输出功率达到最大，假设波动能装置中浮子吸收的平均功率与 PTO 系统的平均输出功率近似相等，考虑在频域中建立浮子位移表达式并求解平均功率的大小。根据问题一，首先将浮子运动受力分析方程式进项频域变换

$$F_e(t) - F_{PTO} - \beta_3 Z_1 - F_{\text{静}}(t) = (M + C) \frac{d^2 z_1}{dt^2} \quad (18)$$

其中 $-\beta_3 Z_1$ 表示垂荡兴波阻尼力，将浮子位移进行频域变换，得到位移随时间变化的波动表达式

$$Z_1 = Z_{1\max} e^{-j\omega t} \quad (19)$$

其中 $Z_{1\max}$ 表示浮子位移的最大值。

针对浮子的运动情况，对浮子的位移进行傅里叶变换，得到浮子位移的频域表达式

$$\hat{Z}_1 = \frac{f_1}{-\omega^2 (M + C) + \beta_2 + \rho g \pi R^2 + j\omega(\beta_1 + \beta_2)} \quad (20)$$

因此波浪能装置随浮子垂荡所产生的平均吸收功率表达式为

$$P(j\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \beta_1 \left( \frac{dz_1}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{2} \omega^2 \beta_1 |z_1|^2 \quad (21)$$

即 PTO 系统的平均输出功率表示为 $P(j\omega)$ ，将浮子位移表达式 $\hat{Z}_1$ 代入上述结果化简求得平均吸收的功率复频域表达式为

$$\bar{P} = \frac{\beta_1 \omega^2 f_1^2}{2[-\omega^2 (M + C) + j\omega(\beta_3 + \beta_1) + \beta_2 + \rho g \pi R^2]^2} \quad (22)$$

根据浮子在功率吸收时各参数以及结构的作用，将浮子重力、附加质量等浮子本身固有阻抗设为 $R_f$ ，将能量输出系统(PTO)中弹簧刚度、直线阻尼器阻尼系数等参数决定量影响的参量设为变化阻抗 $R_c$ ，分别列出两阻抗的频域表示<sup>[3]</sup>形式为

固有阻抗：

$$R_f = \beta_3 + j\omega(M + C) \quad (23)$$

变化阻抗：

$$R_c = \beta_1 - \frac{j}{\omega}(\beta_2 + \rho g \pi R^2) \quad (24)$$

由此可将 PTO 系统的平均输出功率即浮子吸收的平均功率进一步表示为

$$\bar{P} = \frac{\beta_1 |f|^2}{2|R_f + R_c|^2} \quad (25)$$

在此基础上，将上述三式进行联立带入，消除频域 $j$ 相关参数，求解得出 PTO 系统平均输出最大功率表达式，最终求解当阻尼系数变化时的最大输出功率以及相应的最优阻尼系数。

### 5.2.2 模型求解

1.当问题一直线阻尼器阻尼系数为常量时，根据上述模型推理，代入整理求得 PTO 输出平均功率表达式为

$$\bar{P} = \frac{\beta_1 \omega^2 f_1^2}{2 \left[ \omega^2 (M + C) + \omega^2 (\beta_2 + \beta_1)^2 - \beta_2 - \rho g \pi R^2 \right]^2} \quad (26)$$

易知目标函数与直线阻尼器阻尼系数呈正相关，利用附件 3、附件 4 所给数据，将各参数值进行带入。利用穷举法，即对阻尼系数变化时的平均输出功率进行遍历，绘出最大平均输出功率随直线阻尼器的阻尼系数变化的关系图如图

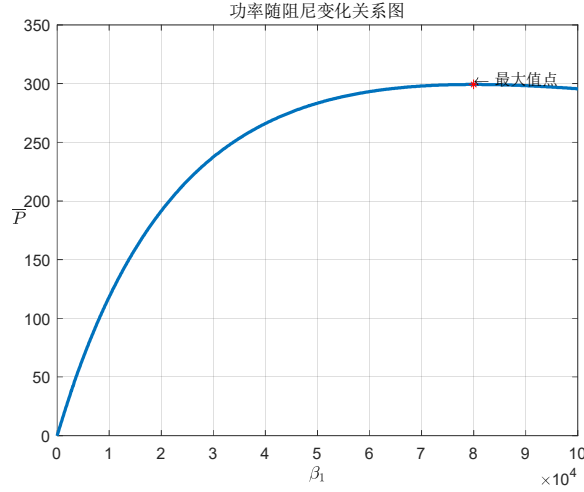


图 5 平均功率随阻尼系数(常量)变化关系图

由图像可知存在某一阻尼器阻尼系数常量使 PTO 系统输出的最大平均功率达到最大，求解得出当直线阻尼器的阻尼系数为常量 79999.893 时，此时 PTO 系统输出的最大功率最大为 299.2631664。

2.当问题二阻尼系数与浮子与振子的相对速度绝对值的幂成正比，比例系数在区间[0,100000]内，，代入整理求得 PTO 输出平均功率表达式<sup>[4]</sup>为

$$\bar{P} = \frac{\beta_1 \omega^2 f_1^2}{2 \left[ \omega^2 (M + C) + \omega^2 (\beta_2 + \beta_1^a)^2 - \beta_2 - \rho g \pi R^2 \right]^2} \quad (27)$$

同理采用穷举法，当阻尼系数与随相对速度绝对值的幂成正比时，对阻尼系数指数变化时的平均输出功率进行遍历，绘出最大平均输出功率随直线阻尼器的阻尼系数变化关系图如图 6

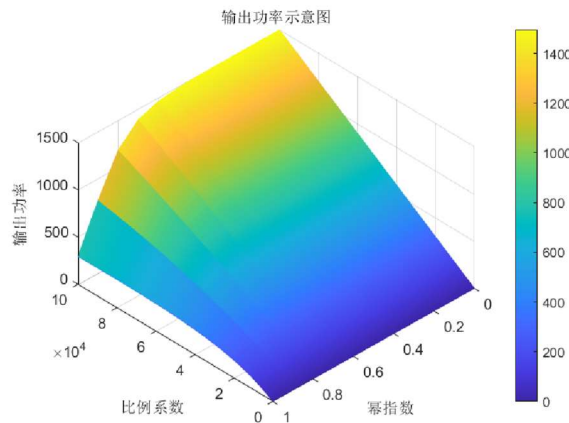


图 6 平均功率随阻尼系数(幂指数关系)变化关系图

求解得出当直线阻尼器的阻尼系数与浮子和振子相对速度绝对值的幂成正比时，系统输出最大功率为 299.2632，此时对应阻尼系数为 96632.6

### 3.对阻尼系数和输出功率的检验

基于上述平均功率表达式，带入其他参数后，对于上述阻尼系数变化的两个问题分别采用 interior-point(内点法)、sqp(序列二次规划算法)、active-set(有效集法)等多个方法进行结果检验，发现数值基本保持不变，证明结果较为合理。

### 4.灵敏度分析

根据所列出平均功率输出表达式，结合影响输出功率的主要参量，研究入射波频率 $\omega$ 和弹簧刚度 $\beta_2$ 两个参数对 PTO 系统输出功率的影响情况如图 7 所示

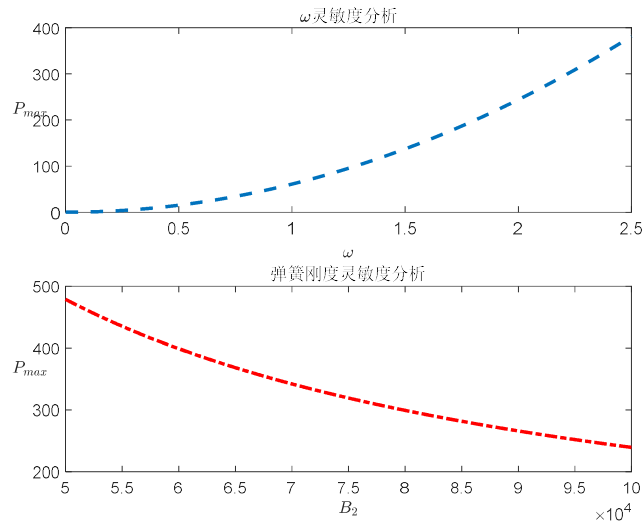


图 7 对输出功率的灵敏度分析

由上图可知，当入射波频率在 $[0,2.5]$ 之间变化时，当入射波频率接近于 0 时，输出功率斜率基本保持不变，其稳定性较好，随着入射波频率的增加，PTO 系统输出功率图像斜率不断增大，稳定性降低，当入射波频率越大时，平均输出功率越大；对于弹簧刚度在 $[50000,100000]$ 范围内变化时，图像斜率逐渐减小，当弹簧刚度在 100000 附近时稳定性较好，随着弹簧刚度的增加，系统平均输出功率减小。

## 5.3 问题三

### 5.3.1 模型建立

针对问题三，基于问题一二在波浪能装置垂荡的基础上增加纵摇情况，将浮子与振子单独进行分析，分别考虑二者在垂荡和纵摇情况，建立浮子与振子的受力分析和运动模型。建立问题分析的流程图如图 8 所示

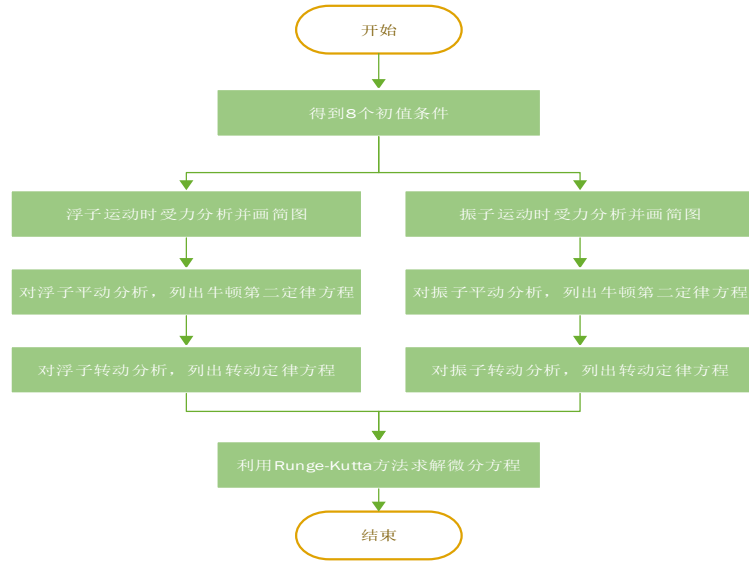


图 8 对于浮子和振子运动情况分析流程

对于初始时刻, 可以得出浮子与振子的位移均为 0, 初始静止时浮子和振子关于 x 轴的角度均为  $\frac{\pi}{2}$ , 且初始时刻的浮子与振子的垂荡位移和速度以及纵摇角位移和角速度均为 0, 即有微分方程组

$$\begin{cases} r_1 = 0, r_2 = 0, (t = 0) \\ \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = \frac{\pi}{2}, (t = 0) \\ \frac{dr_1}{dt} = 0, \frac{dr_2}{dt} = 0, (t = 0) \\ \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \frac{d\theta_2}{dt} = 0, (t = 0) \end{cases} \quad (28)$$

#### 1. 对于浮子进行研究

根据问题一中所列关系得知, 静止时刻浮子平衡条件与第一问情况相同。

(1) 当浮子进行垂荡运动时, 基于问题一所建立浮子受力方程式, 由于浮子运动时在水中位置是时刻变化的, 假设某时刻浮子摆动情况如图 9 所示, 对此时刻浮子受力情况进行分析

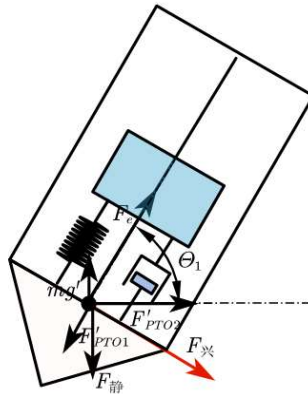


图 9 某时刻浮子受力分析图

此时刻下，浮子受到竖直能量输出系统( $F_{PTO1}$ )和水平能量输出系统( $F_{PTO2}$ )共同作用，将浮子受到的所有外力均分解到和水平方向，由此列出浮子在此时刻竖直方向的牛顿第二定律受力方程

$$F_e(t) - F_{PTO} - F_{\text{兴}} - F_{\text{静}} = (M + C) \frac{d^2 r_1}{dt^2} \sin \theta_1 \quad (29)$$

其中， $F_e(t)$ 表示浮子竖直方向受到的波浪激励力，假设该力合力方向与浮子几何体所在的中心轴线始终保持一致，将此力分解到竖直方向

$$F_e(t) = f_3 \cos \omega t \sin \theta_1 \quad (30)$$

对于浮子受到的 PTO 系统的合外力，分别来自于

$$F_{PTO1} = \beta_1 \left[ \frac{dr_1}{dt} \sin \theta_1 - \frac{dr_2}{dt} \sin \theta_2 \right] + \beta_2 (r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2 + l) \quad (31)$$

由附录术语得知兴波阻尼力与摇荡运动方向相反，其表达式为

$$F_{\text{兴}} = \beta_3 \frac{dr_1}{dt} \sin \theta_1 \quad (32)$$

水中静水恢复力大小等于浮力大小，其表达式为

$$F_{\text{静}} = \rho g \frac{\pi R^2 H_2}{3} + \pi R^2 (r_1 \sin \theta_1 + 1.8) \quad (33)$$

得到微分方程组为

$$\begin{cases} F_e(t) - F_{PTO} - F_{\text{兴}} - F_{\text{静}} = (M + C) \frac{d^2 r_1}{dt^2} \sin \theta_1 \\ F_e(t) = f_3 \cos \omega t \sin \theta_1 \\ F_{PTO} = \beta_1 \left[ \frac{dr_1}{dt} \sin \theta_1 - \frac{dr_2}{dt} \sin \theta_2 \right] + \beta_2 (r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2 + l) \\ F_{\text{兴}} = \beta_3 \frac{dr_1}{dt} \sin \theta_1 \\ F_{\text{静}} = \rho g \frac{\pi R^2 H_2}{3} + \pi R^2 (r_1 \sin \theta_1 + 1.8) \end{cases} \quad (34)$$

(2)当浮子进行纵摇运动时，浮子受到纵摇相关外力的作用，采用转动惯量，利用转动惯量和力矩表达式，构建转动定律方程，求解纵摇角位移与角速度。其中， $J_1$ 为浮子的转动惯量， $J_m$ 为附加转动惯量。

$$M_{\text{激}} - M_{\text{兴}} - M_{\text{静}} - M_{\text{PTO转}} = (J_1 + J_m) \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \quad (35)$$

其中，纵摇激励力矩表达式为

$$M_{\text{激}} = L_3 \cos \omega t \quad (36)$$

浮子在海水中做纵摇运动时，由于波浪产生兴波阻尼力矩。其大小与纵摇运动的角速度成正比且方向相反，其纵摇兴波阻尼系数为  $\beta_4$

$$M_{\text{兴}} = -\beta_4 \frac{d\theta_1}{dt} \quad (37)$$

进行纵摇运动中轴与底座连接处的扭转弹簧和旋转阻尼器产生转动惯量为

$$M_{\text{PTO2转}} = \alpha_1 \left( \frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} \right) + \alpha_2 (\theta_1 - \theta_2) \quad (38)$$

其中  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别表示扭转阻尼器阻尼系数扭转弹簧刚度。由于浮子整体受到水波面提供的静水恢复力，产生静水恢复力力矩  $M_{\text{静}} = k\theta_1$

得到浮子纵摇转动时的微分方程组

$$\begin{cases} M_{\text{激}} + M_{\text{兴}} - M_{\text{静}} - M_{\text{PTO转}} = (J_1 + J_m) \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \\ M_{\text{兴}} = -\beta_4 \frac{d\theta_1}{dt} \\ M_{\text{激}} = L_3 \cos \omega t \\ M_{\text{静}} = k\theta_1 \\ M_{\text{PTO2转}} = \alpha_1 \left( \frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} \right) + \alpha_2 (\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (39)$$

## 2.对振子进行研究

基于问题一所研究的静止时刻受力模型，静止时振子的平衡条件同第一问。

(1)当振子进行垂荡平动时，基于问题一所建立浮子受力方程式，结合上述对浮子运动情况分析，同理可以得出对于振子垂荡运动的微分方程组。对于振子垂荡时受力分析图如 10 所示

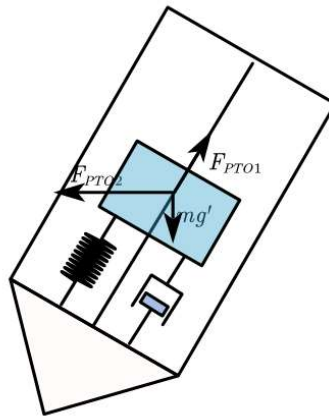


图 10 某时刻振子受力分析图



结合问题一二中对于振子的牛顿第二定律方程式,将振子受到的外力均分解到竖直方向上,得出表达式

$$\begin{cases} F_{PTO1} - mg = m \frac{d^2 r_2}{dt^2} \sin \theta_2 \\ F_{PTO1} = \beta_1 \left[ \frac{dr_1}{dt} \sin \theta_1 - \frac{dr_2}{dt} \sin \theta_2 \right] + \beta_2 [r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2 + l] \end{cases} \quad (40)$$

其中  $F_{PTO1}$  代表振子做垂荡运动时弹簧和直线阻尼器的阻尼力。

(2)当振子做纵摇转动时,对振子在质点上列转动定理

$$M_2 = J_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} \quad (41)$$

根据转动惯量定义式以及合外力矩表达式,构建纵摇时刻合外力矩方程组

$$\begin{cases} M_2 = J_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} \\ J_2 = \int r^2 dm = m \left( \frac{r^2}{2} + \frac{1}{3} H_3^2 \right) \\ M_2 = M_{PTO转} = \alpha_1 \left( \frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} \right) + \alpha_2 (\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (42)$$

将式(33)、(38)、(39)、(41)四个微分方程组和 8 个浮子与振子的初始条件进行联立,代入求解总微分方程,得到直线阻尼器和旋转阻尼器阻尼系数分别为 10000 N·s/m 和 1000 N·m·s 时,浮子与振子在前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2s 时的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度。

### 5.3.2 模型求解

基于问题一中龙格-库塔算法,计算求解微分方程组数值解,得到浮子与振子在 10s、20s、40s、60s、100s 时垂荡与纵摇的位移、速度、角位移、角速度情况如表

表 3 浮子与振子垂荡与纵摇运动情况

	10s	20s	40s	60s	100s
浮子角位移	1.3412	-0.2641	0.1651	-0.4001	1.9525
浮子角速度	-1.4363	-0.1346	-0.331946826	-0.1121	0.3431
振子角位移	2.4576	-0.7478	3.55	-0.0701	-0.870996984
振子角速度	-1.98	-0.3667	-0.310354115	-0.0667	0.1793
浮子位移	1.4191	-0.2795	0.174813843	-0.4244	2.5736
浮子速度	-1.53	-0.0152	-0.452158285	-0.1197	0.3616
振子位移	4.9675	-0.8404	0.40868489	-0.0866	-0.7536
振子速度	-2.7587	-0.7585	-0.035414347	-0.0742	1.9681

## 5.4 问题四

### 5.4.1 模型建立

针对问题四,要求浮子在进行垂荡和纵摇的情况下时确定直线阻尼器和旋转阻尼器的最优系数,使得平均输出功率最大。首先,仍将浮子在波浪中的运动分解分析,分别研究做垂荡平动和纵摇转动时的浮子系统的阻抗变化以及 PTO 系统的输出功率。基于问题二所建立并化简表达式,在浮子进行垂荡运动时,仍将浮子和 PTO 系统的各个参量转化为固有阻抗和变化阻抗进行研究。进行频域变换后整理得到位移的频域表达式,转化为最大平均功率表达式为

$$\bar{P}_1 = \frac{\beta_1 \omega^2 f_1^2}{2 \left[ \omega^2 (M + C) - \beta_2 - \rho g \pi R^2 \right]^2 + \omega^2 (\beta_1 + \beta_2)^2} \quad (43)$$

当波浪激励力幅值以及波浪频率发生变化时分别代入相关参数进行求解。

对于浮子进行纵摇转动时,首先根据浮子纵摇时对扭转弹簧的转动定理表达式,进行傅里叶变换得到频域表达式,进而整理得到在频域中浮子角位移<sup>[5]</sup>的关系式

$$\hat{\theta}_1 = \frac{M_{\text{总}} \cos(\omega t + \sigma - \omega_0)}{M_{\text{静}} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_{\text{纵}}^2}\right)^2 + \left(2\alpha_1 \frac{\omega_0}{\omega_{\text{纵}}}\right)^2}} \quad (44)$$

根据角位移和角速度在复频域内的积分变换关系,利用输出功率在周期内的积分得到平均输出功率表达式

$$\bar{P}_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_1 \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 dt \quad (45)$$

进而将角位移频域表达式代入上式得到浮子纵摇时扭转弹簧和旋转阻尼器所发出的功率

$$\bar{P}_2 = \frac{\omega^2 (L_3 - k)^2 \alpha_1}{2 \left[ \alpha_2^2 + (\omega \beta_4 + \omega^2 - \omega \alpha_1)^2 \right]} \quad (46)$$

最后将垂荡与纵摇过程中 PTO 系统输出的总功率进行叠加,即

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$$

求解此时 PTO 系统输出的最大功率和相应的直线阻尼器和旋转阻尼器的常量系数值。

### 5.4.2 模型求解

根据上述所求垂荡和纵摇时直线阻尼器和旋转阻尼器输出的总平均功率表示式,将数据代入进行拟合,使用遍历法得到直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数变化时总平均功率输出图形如图 11 所示

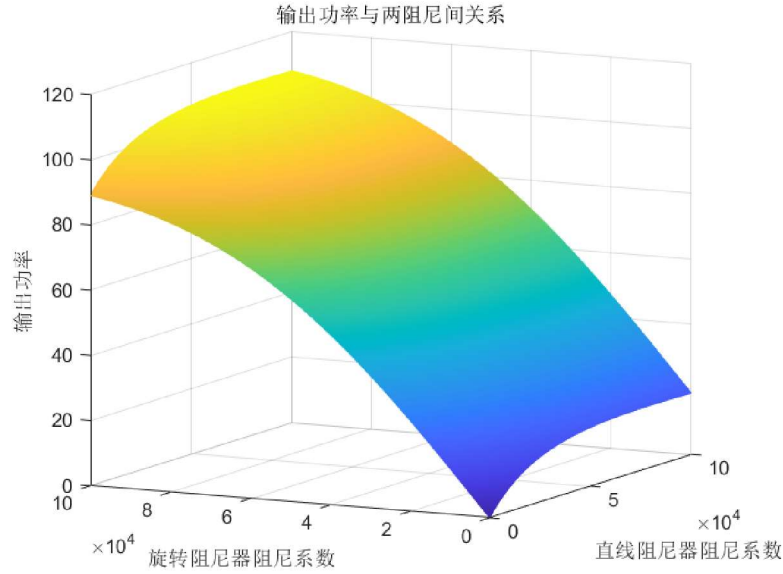


图 11 输出功率与两个阻尼系数的关系

在直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数在[0,100000]范围内取得，代入整理的直线阻尼器 PTO 输出最大平均功率  $\bar{P}_1$  为

$$\bar{P}_1 = \frac{\beta_1 \omega^2 f_1^2}{2 \left[ \omega^2 (M + C) - \beta_2 - \rho g \pi R^2 \right]^2 + \omega^2 (\beta_1 + \beta_2)^2} = 18.986$$

此时直线阻尼器对应的阻尼系数为 79999.859

将浮子纵摇时旋转阻尼器与浮子之间产生的角位移等参量代入，求解旋转阻尼器 PTO 输出最大平均功率  $\bar{P}_2$  为

$$\bar{P}_2 = \frac{\omega^2 (L_3 - k)^2 \alpha_1}{2 \left[ \alpha_2^2 + (\omega \beta_4 + \omega^2 - \omega \alpha_1)^2 \right]} = 88.995$$

此时旋转阻尼器对应的阻尼系数为 100000

综上，在直线阻尼器和旋转阻尼器阻尼系数均为常量的条件下，浮子在进行垂荡和纵摇运动 PTO 系统所能输出的最大平均功率为

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 \\ &= 18.986 + 88.995 \\ &= 107.981 \end{aligned}$$

此时直线阻尼系数为 79999.859，旋转阻尼系数为 98414.634

## 六、 模型的评价与推广

### 6.1 模型的优点

1. 求解浮子与振子垂荡位移和速度和纵摇角位移与角速度微分方程组时，

采用四阶-五阶 Runge-Kutta 算法, 计算精度高, 计算过程中便于改变步长, 所得数据具有直观性, 便于寻找规律。

2. 对于考虑波浪能装置同时做垂荡和纵摇运动时, 对装置中浮子与振子独立进行分析, 并进一步研究装置中直线阻尼器与旋转阻尼器, 使分析具有层次性。

3. 与旋转阻尼器在垂荡和纵摇时的单独作用情况, 使模型简化易于求解。

4. 分析 PTO 系统在不同阻尼系数条件下所能输出最大功率时, 对平均输出功率与摇荡频率以及弹簧刚度等参量的关系进行灵敏度分析, 易从各不确定性因素中找出最敏感的因素。

## 6.2 模型的缺点

1. 求解浮子同时进垂荡和纵摇运动时, 没有考虑浮子运动对周围水体产生的辐射力的影响, 与实际情况存在一定偏差。

2. 由于计算 PTO 系统最大平均输出功率时涉及较多微分方程组, 模型规模较大使得求解较为复杂。

## 6.3 模型的改进与推广

1. 在综合分析力学因素时, 可进一步将波动能装置浮子与波浪等运动频率、浮体实际在水中受到的作用力进行进一步完善, 结合实际受力情况进行求解。

2. 本文主要考虑垂荡和纵摇两个自由度条件下的研究, 可推广至六自由度耦合情况下的实际问题情况, 使求解结论更加具有普遍性。

## 参考文献

- [1]彭建军.振荡浮子式波浪能发电装置水动力性能研究[D].山东大学,2014.
- [2]张平文,李铁军.数值分析[M].北京:北京大学出版社, 2007.
- [3]马哲.振荡浮子式波浪发电装置的水动力学特性研究[D].中国海洋大学,2013.
- [4]张增宝.振荡浮子式波浪能发电系统捕能功率预测与多目标优化[D].山东大学,2020.
- [5]史宏达,李向南,赵晨羽,黄波峰,陶霁,张雨晴.偏心摆式波能发电装置的设计与水动力性能研究[J].太阳能学报,2020,41(04):296-301.

## 附录

附录清单：

附录一：支撑材料文件列表

附录二：问题一求解

附录三：问题二求解

附录四：问题三求解

附录五：问题四求解

附录六：灵敏度分析

附录一：支撑材料文件列表

序号	支撑材料名称
1	result1-1
2	result1-2
3	result3
4	正文绘制图片
5	源代码

附录二：问题一第一问求解

```
% 本程序用于求解第一题第一问
clc;clear;close all
%常数 给定
B3=656.3616;
B2=80000;
B1=10000;%直线阻尼系数
M=4866;%浮子质量
C=1335.535;
f1=6250;
omega=1.4005;
m=2433;
g=10;
R=1;
ro=1025;
H=0.8;
L=0.5;
zhixin_fh=1.1958;
zhixin_zh=0.25;
% 定义微分方程组
dX=@(t,x)[x(2);
    (f1*cos(omega*t)-B1*(x(2)-x(4))-B2*(x(1)-x(3)+L)...
    -ro*g*(pi*R^2/3*H+pi*R^2*(x(1)+1.8)))/(M+C);
    x(4);
    (B1*(x(2)-x(4))+B2*(x(1)-x(3)+L)-m*g)/m];
```

```

sol=ode45(dX,[0,200],[0 0 0.202 0]); %求解 11
[t1,x1]=ode45(dX,[0,100],[0 0 0.202 0]);
% 留存数据
LUNWEN11=deval(sol,[10 20 40 60 100]);
LUNWEN11(1,:)=LUNWEN11(1,;)+zhixin_fh;
LUNWEN11(3,:)=LUNWEN11(1,;)+zhixin_zh;
xlswrite('LUNWEN11.xlsx',LUNWEN11);
result11=deval(sol,[0:0.2:179.4555]);
result11(1,:)=result11(1,;)+zhixin_fh;
result11(3,:)=result11(3,;)+zhixin_zh;
xlswrite('result11.xlsx',result11);
%% 绘制图表
close all
subplot(2,1,1)
plot(t1,x1(:,1)+zhixin_fh,LineStyle="-",LineWidth=1);
hold on
plot(t1,x1(:,2),"LineStyle","-.",LineWidth=1)
legend('垂荡位移','速度',Location='north')
xlabel('$t$',Interpreter,'latex')
ylabel('$z_{1}$','$',Interpreter,'latex',Rotation=0)
title('浮子垂荡位移与速度')
subplot(2,1,2)
plot(t1,x1(:,3)+zhixin_zh,LineWidth=1,Color='c');
hold on
plot(t1,x1(:,4))
legend('垂荡位移','速度',Location='north')
xlabel('$t$',Interpreter,'latex')
ylabel('$z_{2}$','$',Interpreter,'latex',Rotation=0)
title('振子垂荡位移与速度')
%% 本程序用于求解第一题第二问
% 运动方程求解
clc;clear;close all
%常数 给定
B3=656.3616;
B2=80000;
B1=10000;%直线阻尼系数
M=4866;%浮子质量
C=1335.535;
f1=6250;
omga=1.4005;
m=2433;
g=10;
R=1;
ro=1025;

```

```

H=0.8;
L=0.5;
zhixin_fh=1.1958;
zhixin_zh=0.25;
% 定义微分方程组
dX=@(t,x)[x(2);
    (f1*cos(omga*t)-B1*(x(2)-x(4))-B2*(x(1)-x(3)+L)+B3*x(2)...
    -ro*g*(pi*R^2/3*H+pi*R^2*(x(1)+1.8)))/(M+C);
    x(4);
    (B1*abs((x(2)-x(4)))^(0.5)+B2*(x(1)-x(3)+L)+m*g)/m];
sol=ode45(dX,[0,200],[0 0 0.202 0]); %求解 11
[t1,x1]=ode45(dX,[0,100],[0 0 0.202 0]);
% 留存数据
LUNWEN12=deval(sol,[10 20 40 60 100]);
LUNWEN12(1,:)=LUNWEN12(1,:)+zhixin_fh;
LUNWEN12(3,:)=LUNWEN12(1,:)+zhixin_zh;
xlswrite('LUNWEN12.xlsx',LUNWEN12);
result12=deval(sol,[0:0.2:179.4555]);
result12(1,:)=result12(1,:)+zhixin_fh;
result12(3,:)=result12(3,:)+zhixin_zh;
xlswrite('result12.xlsx',result12);
%% 绘制图表
close all
subplot(2,1,1)
plot(t1,x1(:,1)+zhixin_fh,LineStyle="-",LineWidth=1);
hold on
plot(t1,x1(:,2),"LineStyle","-",LineWidth=1)
legend('垂荡位移','速度',Location='north')
xlabel('$t$',Interpreter,'latex')
ylabel('$z_{1}$','$',Interpreter,'latex',Rotation=0)
title('浮子垂荡位移与速度')
subplot(2,1,2)
plot(t1,x1(:,3)+zhixin_zh,LineWidth=1,Color='c');
hold on
plot(t1,x1(:,4))
legend('垂荡位移','速度',Location='north')
xlabel('$t$',Interpreter,'latex')
ylabel('$z_{2}$','$',Interpreter,'latex',Rotation=0)
title('振子垂荡位移与速度')

```

### 附录三：问题二第一问求解

```

%% 本程序用于求解 第二题第一小问
%常量
clc;clear;close all

```

```

B3=167.8395;%第二问的垂荡兴波阻尼系数
B2=80000;
M=4866;%浮子质量
C=1165.992;
f1=6250;
omega=2.2143;
m=2433;
g=10;
R=1;
ro=1025;
H=0.8;
L=0.5;
ff=@(x)(0.5*x*omega^2*f1^2./((x+B2).^2+(omega^2*(M+C)-B2-ro*g*pi*R^2)/omega^2));
x=0:0.001:100000;
ff1=ff(x);
max(ff1)
%% 绘制遍历解的图像
plot(x(1:1000:end),ff1(1:1000:end),'-',LineWidth=2)
grid on
axis([-inf inf 0 350])
xlabel('$\beta_1$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$\overline{P}$', 'Interpreter', 'latex', Rotation=0)
pp=max(ff1);
p=x(ff1==max(ff1));
hold on
plot(p(1),pp,'r*',MarkerSize=5)
text(p(1),pp+5,'\leftarrow 最大值点');
title('功率随阻尼变化关系图')
%% 优化问题
% 定义目标函数
prob=optimproblem;
prob.ObjectiveSense='max';
x=optimvar('x',LowerBound=0,UpperBound=100000);
prob.Objective=0.5*x*omega^2*f1^2./((x+B2).^2+(omega^2*(M+C)-B2-ro*g*pi*R^2)/omega^2);
X0.x=rand();
opt1=optimoptions("fmincon","Algorithm","interior-point");
opt2=optimoptions("fmincon","Algorithm","trust-region-reflective");
opt3=optimoptions("fmincon","Algorithm","sqp");
opt4=optimoptions("fmincon","Algorithm","active-set");
opt5=optimoptions("fmincon","Algorithm","sqp-legacy");

[sol,fval]=solve(prob,X0,Options=opt1);
%[sol1,fval1]=solve(prob,X0,Options=opt2);

```



```

[sol2,fval2]=solve(prob,X0,Options=opt3);
[sol3,fval3]=solve(prob,X0,Options=opt4);
[sol4,fval4]=solve(prob,X0,Options=opt5);
% 得到不同方法的解
answer=[p(1),sol.x,sol2.x,sol3.x,sol4.x;pp,fval,fval2,fval3,fval4];
xlswrite('第二问一小问各种方法的最优值',answer)
%% 本程序用于求解 第二题第二小问
%常量
clc;clear;close all
B3=167.8395;%第二问的垂荡兴波阻尼系数
B2=80000;
M=4866;%浮子质量
C=1165.992;
f1=6250;
omega=2.2143;
m=2433;
g=10;
R=1;
ro=1025;
H=0.8;
L=0.5;
afa=(0:0.01:1)';
ff=@(x)0.5*x.^(afa)*omega^2*f1^2./((x.^(afa)+B2).^2+(omega^2*(M+C)-B2-
ro*g*pi*R^2)/omega^2);
x=0:0.01:100000;
Mp=ff(x);
MMax=max(max(Mp));
[hang,lie]=find(MMax==Mp);
%% 绘图
clc;clear;close all
B3=167.8395;%第二问的垂荡兴波阻尼系数
B2=80000;
M=4866;%浮子质量
C=1165.992;
f1=6250;
omega=2.2143;
m=2433;
g=10;
R=1;
ro=1025;
H=0.8;
L=0.5;
afa=(0:0.1:1)';
ff=@(x)0.5*x*omega^2*f1^2./((x.^afa+B2).^2+(omega^2*(M+C)-B2-ro*g*pi*R^2)...

```

```

        /omega^2);
x1=0:100:100000;
MP=ff(x1);
[Afa,xxx]=meshgrid(afa',x1);
mesh(xxx,Afa,MP')
xlabel('比例系数')
ylabel('幂指数')
zlabel('输出功率')

colorbar%加色棒

view([-134 49])
title('输出功率示意图')

```

#### 附录四：问题三求解

```

%% 本程序主要用于求解第三问
% 常数
B3=683.4558;%垂荡兴波阻尼系数
B4=654.3383;% 纵摇兴波阻尼系数
B2=80000;
B1=10000;%直线阻尼系数
M=4866;%浮子质量
C1=7001.914;%纵摇附加转动惯量
f1=3640;%垂荡激励力振幅
f2=1690;%纵摇激励力振幅
omega=1.7152;
m=2433;
g=10;
R=1;
ro=1025;
H=0.8;
L=0.5;
zhixin_fh=1.1958;
zhixin_zh=0.25;

%% 定义常数
alpha_1=1000;%旋转阻尼器阻尼系数
alpha_2=250000;%扭转弹簧刚度
beta_1=10000;%直线阻尼器阻尼系数
beta_2=80000;%弹簧刚度
beta_3=683.4558;%垂荡兴波阻尼系数
beta_4=654.3383;%纵摇兴波阻尼系数
ro=1025;%海水密度

```

```

r_n=0.5;%振子半径
R=1;%浮子半径
C=1028.876;% 垂荡附加质量
H_1=9;
H_2=0.8;%圆锥部分高度
H_3=0.5;%振子高度
l=0.5;%弹簧原长
L_3=1690;%波浪激励力矩振幅
m=2433;%振子质量
M=4866;%浮子质量
f_3=3640;%波浪激励力振幅
omega=1.7152;%入射波频率
g=10;
k=8890.7;%静水恢复力矩系数 (N·m)
M1=0.8453547*M;
M2=0.154653*M;
J1=M1*R^2+(H_1^2*M1)/3+0.6*M2*(R^2+H_2)^(1.5)-(H_2^2*M2);%浮子转动惯量
J2=m*(r_n^2*0.5+H_3^2/3);%振子转动惯量
%% 定义微分方程组
DX=@(t,x)[x(5);
    (L_3*cos(omega*t)-beta_4*x(5)-k*x(1)-alpha_2*(x(1)-x(2))-alpha_1*(x(5)-x(6)))/(J1+C1);
    x(6);
    (alpha_1*(x(5)-x(6))+alpha_2*(x(1)-x(2)))/J2;
    x(7);
    (f_3*cos(omega*t).*cos(x(1))-beta_1*(x(7).*cos(x(1))-x(8).*cos(x(2)))...
    -beta_2*(x(3).*cos(x(1))-x(4).*cos(x(2)))-l+...
    beta_3*(x(7).*cos(x(1))-
(ro*g*pi*R^2*H_2/3+pi*R^2*(x(1).*cos(x(1))+1.8)))/((M+C).*(abs(cos(x(1)))+eps));
    x(8);
    (beta_1*(x(7).*cos(x(1))-x(8).*cos(x(2)))-beta_2*(x(3).*cos(x(1))-x(4).*cos(x(2))+l)-
m*g)/(m.*(abs(sin(x(2)))+eps));
    ];
sol=ode45(DX,[0,200],[0 0 0 0 0 0.202 0],odeset('RelTol',1e-1)); %求解 11
LUNWEN3=deval(sol,[10 20 40 60 100]);
result3=deval(sol,[0:0.2:179.4555]);
plot(0:0.2:179.4555,result3)

```

#### 附录五：第四题求解

```

%% 本程序用于求解 第四题第一小问
%常量
clc;clear;close all
B3=528.5018;%第四问的垂荡兴波阻尼系数
B2=80000;
M=4866;%浮子质量

```

```

C=1091.099;%附加质量
f1=1760;%垂荡激励力振幅
omega=1.9806;
w=1.9806;
m=2433;
g=10;
R=1;
ro=1025;
H=0.8;
L=0.5;
k=8890.7;%静水恢复力矩系数 (N·m)
L_3=2140;%波浪激励力矩振幅
%alpha_1=1000;%旋转阻尼器阻尼系数
alpha_2=250000;%扭转弹簧刚度
beta_4=1655.909;%纵摇兴波阻尼系数
ff=@(x)(0.5*x*omega^2*f1^2./((x+B2).^2+(omega^2*(M+C)-B2-ro*g*pi*R^2)/omega^2));
x=0:0.001:100000;
fff1=ff(x);
format long
x(find(max(fff1)==fff1))
ff1=@(alpha_1)w^2*(L_3-k)^2*alpha_1./(2*(alpha_2^2+(w*beta_4+w.^2-w*alpha_1).^2));
m=0:0.001:100000;
fff2=ff1(m);
m(find(max(fff2)==fff2))
plot(fff2)
hold on
plot(fff1)
%%
clc;clear
%常量
clc;clear;close all
B3=528.5018;%第四问的垂荡兴波阻尼系数
B2=80000;
M=4866;%浮子质量
C=1091.099;%附加质量
f1=1760;%垂荡激励力振幅
omega=1.9806;
w=1.9806;
m=2433;
g=10;
R=1;
ro=1025;
H=0.8;
L=0.5;

```

```

k=8890.7;%静水恢复力矩系数 (N·m)
L_3=2140;%波浪激励力矩振幅
%alpha_1=1000;%旋转阻尼器阻尼系数
alpha_2=250000;%扭转弹簧刚度
beta_4=1655.909;%纵摇兴波阻尼系数
ff3=@(x,alpha_1)(0.5*x*omega^2*f1^2./((x+B2).^2+(omega^2*(M+C)-B2-
ro*g*pi*R^2)/omega^2))...
    +w^2*(L_3-k)^2*alpha_1./(2*(alpha_2^2+(w*beta_4+w.^2-w*alpha_1).^2));
m=0:100:100000;
x=0:100:100000;
[X,Y]=meshgrid(x,m);
fff3=ff3(X,Y);
mesh(X,Y,fff3)
title('输出功率与两阻尼间关系')
xlabel('直线阻尼器阻尼系数')
ylabel('旋转阻尼器阻尼系数')
zlabel('输出功率')
view([-63.2 10.3])

```

#### 附录六：问题二灵敏度分析

```

%% 本程序用于第二题第一小问 灵敏度分析
%常量
clc;clear;close all
B3=167.8395;%第二问的垂荡兴波阻尼系数
B2=80000;
M=4866;%浮子质量
C=1165.992;
f1=6250;
%omega=2.2143;
m=2433;
g=10;
R=1;
ro=1025;
H=0.8;
L=0.5;
x=79996.0690;
% 对 omega 灵敏度分析
ff=@(omega)(0.5*x*omega.^2*f1^2./((x+B2).^2+(omega.^2*(M+C)-B2-ro*g*pi*R^2)./omega.^2));
omega=0:0.001:2.5;
ff1=ff(omega);
subplot(2,1,1)
plot(omega,ff1,LineStyle="--",LineWidth=2)
xlabel('\omega')
ylabel('$P_{\max}$','Interpreter','latex',Rotation=0)

```

```

title('\omega 灵敏度分析')
% 对弹簧刚度 灵敏度分析
omega=2.2143;
ff=@(x)(0.5*x*omega.^2*f1^2./((x+x).^2+(omega.^2*(M+C)-x-ro*g*pi*R^2)./omega.^2));
B2=50000:1:100000;
ff2=ff(B2);
subplot(2,1,2)
plot(B2,ff2,LineStyle="-.",LineWidth=2,Color='r')
xlabel('$C$', 'Interpreter','latex')
ylabel('$P_{\max}$ ', 'Interpreter','latex',Rotation=0)
title('弹簧刚度灵敏度分析')
%max(ff1)

```