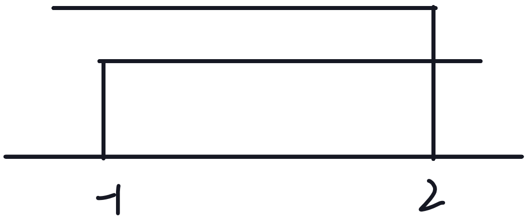
2025 黄浦一模

1．已知集合 $A=\{x\mid x\le 2\}$，$B=\{x\mid x\ge -1\}$，则 $A\cap B=$ $[-1,2]$.



2．若函数 $y=(x+1)(x-a)$ 为偶函数，则实数 a 的值为 1 .

$f(x)=f(-x)$

$1-a=a-1$

$(x+1)(x-a)=(-x+1)(-x-a)=(x-1)(x+a)$

$a=1$

$\cancel{x^2}+(1-a)x-\cancel{a}=\cancel{x^2}+(a-1)x-\cancel{a}$

3．已知复数 $z=1-\mathrm{i}$（i 为虚数单位），则满足 $\bar{z}\cdot w=z$ 的复数 w 为 $-i$.

$(1+i)\cdot w=1-i$

$w=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{1+1}=\dfrac{\cancel{1-1}-2i}{2}=-i$

4．若双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{m}=1$ 经过点 $(4\sqrt{2},3)$，则此双曲线的离心率为 $\dfrac{5}{4}$.

$\dfrac{32}{16}-\dfrac{9}{m}=1$

$a=4\quad b=3\quad c=5$

$\dfrac{9}{m}=1 \Rightarrow m=9$

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{4}$

5．已知向量 $\vec{a}=(0,2)$，$\vec{b}=(\sqrt{3},1)$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{2}$.

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{2}{2\times 2}=\dfrac{1}{2}$

6. 若棱长为 2 的正方体的所有顶点都在同一球面上，则该球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$.

$d=2\sqrt{3} \Rightarrow R=\sqrt{3}$

$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\cdot\pi\times\cancel{3}\sqrt{3}=4\sqrt{3}\pi$

7．某城市 30 天的空气质量指数如下：29，26，27，29，38，29，26，26，40，51，35，44，33，67，80，86，65，53，70，34，36，41，31，38，63，60，56，34，44，31．则这组数据的第 75 百分位数为 56 .

$30\times75\%=22.5\rightarrow$ 第23位（从小到大排序）$\rightarrow$ 对应56

8．在 $\triangle ABC$ 中，三个内角 A,B,C 的对边长分别为 a,b,c，若 $5a^2-5b^2+6bc-5c^2=0$，则 $\sin 2A$ 的值为 $\frac{24}{25}$.

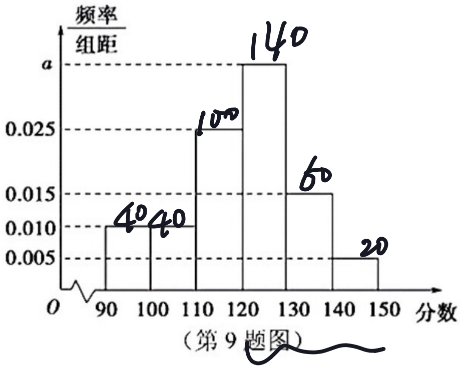
$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{6bc}{5}}{2bc}=\frac{3}{5}$

$\sin A=\frac{4}{5}$

$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{24}{25}$

8．在 $\triangle ABC$ 中，三个内角 A,B,C 的对边长分别为 a,b,c，若 $5a^2-5b^2+6bc-5c^2=0$，则 $\sin 2A$ 的值为 $\frac{24}{25}$.

9．某校共有 400 名学生参加了趣味知识竞赛（满分：150 分），且每位学生的竞赛成绩均不低于 90 分．将这 400 名学生的竞赛成绩分组如下：[90,100)，[100,110)，[110,120)，[120,130)，[130,140)，[140,150]，得到的频率分布直方图如图所示，则这 400 名学生中竞赛成绩不低于 120 分的人数为 220 .



（第 9 题图）

$0<\varphi<\pi$

10．若 φ 是一个三角形的内角，且函数 $y=3\sin(2x+\varphi)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}]$ 上是单调函数，则 φ 的取值范围是 $(0,\frac{\pi}{6}]$ 。

$2x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}]$

$2x+\varphi\in[-\frac{\pi}{2}+\varphi,\frac{\pi}{3}+\varphi]\subseteq[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\begin{cases}-\frac{\pi}{2}+\varphi\geq-\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{3}+\varphi\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}$ $\varphi\geq0$ $\varphi\leq\frac{\pi}{6}$

$\Downarrow$

检验端点 取0、

检验是否 $0<\varphi<\pi$

$\varphi\neq0$

$\Downarrow$

$(0,\frac{\pi}{6}]$

√

13．设 $x\in\mathbf{R}$，则“$x^3>8$”是“$|x|>2$”的（ A ）．

X

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

$x=-3$ 　$x^3=-27<8$

14．从 3 名男同学和 2 名女同学中任选 2 名同学参加志愿者服务，则选出的 2 名同学中至少有 1 名女同学的概率是（ B ）．

A．$\frac{7}{20}$　　B．$\frac{7}{10}$　　C．$\frac{3}{10}$　　D．$\frac{3}{5}$

3男　2女

2

$P=\frac{C_2^1\cdot C_3^1+C_2^2\cdot C_3^0}{C_5^2}=\frac{6+1}{10}=\frac{7}{10}$

17. （本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

已知等比数列 $\{a_n\}$ 是严格增数列，其第 3、4、5 项的乘积为 1000，并且这三项分别乘以 4、3、2 后，所得三个数依次成等差数列.

$\frac{x}{q}\ \ x\ \ xq = x^3=1000 \Rightarrow x=10$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

$\frac{10}{q}\ \ 10\ \ 10q \to \frac{40}{q}\ \ 30\ \ 20q$

（2）若对任意的正整数 n，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3(1-2^n)$，向量 (a_n,b_n) 的模为 t_n，求数列 $\{t_n\}$ 的前 n 项和.

$\to \frac{40}{q}+20q=60 \Rightarrow q=2$

$20q^2-60q+40=0 \Rightarrow q=1/2$ (舍)

$\therefore a_3=5\ \ a_4=10\ \ a_5=20,\ a_1=\frac{5}{4}$

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=\frac{5}{4}\times2^{n-1}=5\times2^{n-3}$

$S_n=3(1-2^n)=\frac{-3(1-2^n)}{1-2}$

$b_1=a_1=-3\ \ q=2\ \ b_n=-3\times2^{n-1}$

$t_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\sqrt{25\times4^{n-3}+9\times4^{n-1}}$

$=\sqrt{(25+144)4^{n-3}}=13\times2^{n-3}$

$=\frac{13}{4}\times2^{n-1} \to S_n=\frac{\frac{13}{4}(1-2^n)}{1-2}=\frac{13}{4}(2^n-1)$

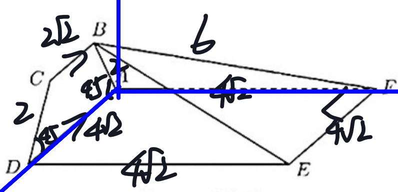
18. （本题满分 14 分）本题共有 2 小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

如图，平面 $ABCD\perp$ 平面 $ADEF$，四边形 $ADEF$ 是正方形，$BC\parallel AD$，$\angle BAD=\angle CDA=45°$，$CD=2$，$AD=4\sqrt{2}$.

建系

（1）证明：$CD\perp$ 平面 ABF；

（2）求二面角 $B-EF-A$ 的正切值.



（第 18 题图）

(1) $\left.\begin{array}{l}CD\perp BA\\ BA\perp AF\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}CD\perp AF\\ CD\perp AB\\ AB\cap AF=A\end{array}\right\} \Rightarrow CD\perp$ 面 ABF.

(2) $\left.\begin{array}{l}AF\perp AD\\ \text{面}\cap\text{面}=AD\\ AF\subset \text{面}AFED\\ \text{面}\perp\text{面}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}AF\perp\text{面}ABCD\\ AB\subset\text{面}ABCD\end{array}\right\} \Rightarrow AF\perp AB \Rightarrow BF=\sqrt{32+4}=6$

$(0,0,1)$ $\vec{BE}=(3\sqrt{2},4\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $\vec{EF}=(-4\sqrt{2},0,0)$

$\begin{cases}3\sqrt{2}x+4\sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0\\ -4\sqrt{2}x=0\end{cases}$ $\vec{n}=(0,1,4)$

$\cos=\frac{4}{1\cdot\sqrt{17}}=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\tan\theta=\frac{1}{4}$　$\Leftarrow$ $\sqrt{17}$　4　1

19．（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分．

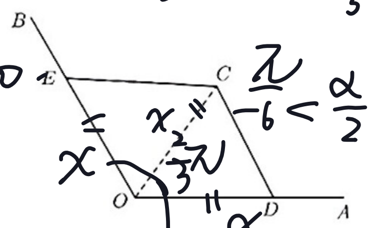
某公园的一个角形区域 AOB 如图所示，其中 $\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$．现拟用长度为 100 米的隔离档板（折线 DCE）与部分围墙（折线 DOE）围成一个花卉育苗区 $ODCE$，要求满足 $OD=OC=OE$．

（1）设 $\angle DOC=\frac{\pi}{3}+\alpha\left(-\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$，试用 α 表示 OD；

（2）为使花卉育苗区的面积最大，应如何设计？请说明理由．

$0<\frac{\pi}{3}+\alpha<\frac{2}{3}\pi$

$-\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}$



（第 19 题图）

(1) $2\cdot x\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+2\cdot x\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=100$　$-\frac{\pi}{6}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{6}$

$2x=\frac{100}{\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}}$　$\cancel{\frac{\pi}{3}}+\alpha$.

$x=\frac{50}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

(2) $S=\frac{1}{2}x^2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\frac{1}{2}x^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

$=\frac{1}{2}x^2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\cancel{\frac{1}{2}\sin\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\cancel{\frac{1}{2}\sin\alpha}\right]$

$=\frac{1}{2}x^2\sqrt{3}\cos\alpha$.

代入

$=\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2500}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)$

令 $\cos\frac{\alpha}{2}=t$

$t\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

$t^2\in\left(\frac{3}{4},1\right]$

$=1250\sqrt{3}\,\frac{2t^2-1}{t^2}$

$=1250\sqrt{3}\left(2-\frac{1}{t^2}\right)$　t^2取1.

min

当 $\frac{\alpha}{2}=0\Rightarrow\alpha=0$时取等

$\Rightarrow$ OC为角平分线.

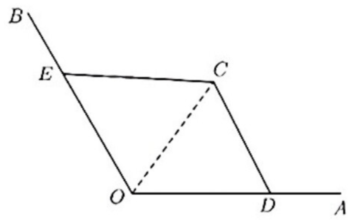
$\leq 1250\sqrt{3}$.

19．（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分．

某公园的一个角形区域 AOB 如图所示，其中 $\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$．现拟用长度为 100 米的隔离档板（折线 DCE）与部分围墙（折线 DOE）围成一个花卉育苗区 $ODCE$，要求满足 $OD=OC=OE$．

（1）设 $\angle DOC=\dfrac{\pi}{3}+\alpha(-\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{3})$，试用 α 表示 OD；

（2）为使花卉育苗区的面积最大，应如何设计？请说明理由．



（第 19 题图）

19.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分.

解：(1) 由 $\angle DOC=\dfrac{\pi}{3}+\alpha(-\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{3})$，$\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$，可知 $\angle COE=\dfrac{\pi}{3}-\alpha$，

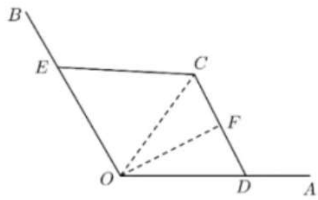
作 $OF\perp CD$，垂足为 F，由 $OD=OC$，可知 $CF=DF$ 且 $\angle DOF=\dfrac{1}{2}\angle DOC=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}$，

在直角 $\triangle DOF$ 中，$DF=OD\sin(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2})$，故 $CD=2OD\sin(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2})$，

同理可得 $EC=2OC\sin(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2})=2OD\sin(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2})$，　　　　……………4 分

所以 $2OD\sin(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2})+2OD\sin(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2})=100$，

可得 $OD=\dfrac{50}{\sin(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2})+\sin(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2})}=\dfrac{50}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$（米）．……6 分



（2）设花卉育苗区的面积为 S 平方米，则

$S=\dfrac{1}{2}OD^2\sin(\dfrac{\pi}{3}+\alpha)+\dfrac{1}{2}OD^2\sin(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)$

$=\dfrac{1}{2}\dfrac{50^2}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}[\sin(\dfrac{\pi}{3}+\alpha)+\sin(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)]$．　　　　………9 分

$S=\dfrac{1}{2}\dfrac{50^2}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{3}\cos\alpha=\dfrac{50^2\sqrt{3}\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=2500\sqrt{3}[1-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}]$．　　　　……………12 分

当且仅当 $\cos\alpha=1$ 且 $-\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，即 $\alpha=0$ 时，S 取最大值，此时 $OD=50$ 米.

故使 $\angle DOC=\dfrac{\pi}{3}$，且 $OD=50$ 米，可使花卉育苗区的面积最大.　　　　………………14 分