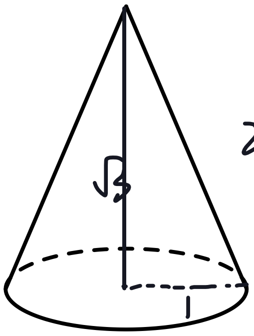
长宁一模

1. 设全集为$\mathbf{R}$，集合$A=\{x|x^2-2x-3\geq 0\}$，则$\overline{A}=$ $(-1,3)$

$(x-3)(x+1)\geq 0$.　　$\overline{A}=(-1,3)$

$x\geq 3$　$x\leq -1$

2. 已知圆锥的底面半径为1，母线长为2，则该圆锥的体积是 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$（结果保留π）.



$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

3. 曲线$y=\ln x$在点$(1,0)$处的切线方程是 $y=x-1$

$f'(x)=\frac{1}{x}$　$f'(1)=1$　　$y-0=1(x-1)\Rightarrow y=x-1$

$f(x)=\ln x$　$f(1)=0$

4. 以$C(3,4)$为圆心，$\sqrt{3}$为半径的圆的标准方程是 $(x-3)^2+(y-4)^2=3$

$(x-3)^2+(y-4)^2=3$

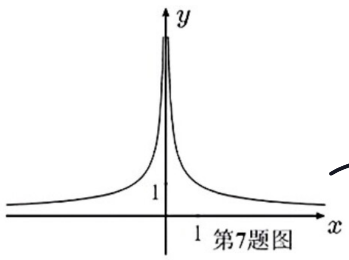
5. 投掷两枚质地均匀的骰子，观察掷得的点数，则掷得的点数之和为7的概率是 $\frac{1}{6}$

$P=\frac{6}{6\times 6}=\frac{1}{6}$

1+6　4+3
2+5　5+2
3+4　6+1

6. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项是 $\underline{\ -20\ }$.

$$C_6^3 \cdot x^3 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^3 = -20$$



第7题图

① $a<0$. ② $y=x^a$ 为偶函数

$a=-1$ ✗ $a=-\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 偶

$a=-\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 奇

7. 已知 $a\in\left\{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 2, 3\right\}$，函数 $y=x^a$ 的大致图像如图所示，则 $a=$ $\underline{\ -\frac{2}{3}\ }$.

8. 已知向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(3,-1)$，则向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影的坐标是 $\underline{\ \left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)\ }$.

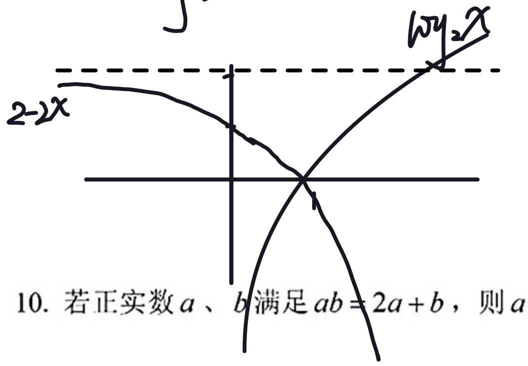
$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$$

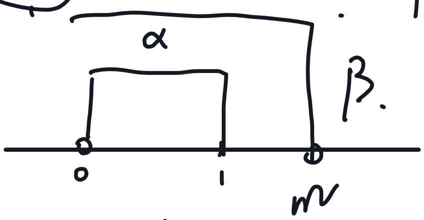
$x \in [0,1]$

$\Updownarrow$

9. 已知α：$2^x + \log_2 x \le 2$，β：$x < m$，若α是β的充分条件，则实数m的取值范围是 $(1, +\infty)$

$\log_2 x \le 2 - 2^x$ $\quad \Rightarrow A \subseteq B \quad \alpha \subseteq \beta$





$m \geq 1$

10. 若正实数a、b满足$ab = 2a + b$，则$a + 2b$的最小值是 9 .

$1 = \frac{2}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} + \frac{4}{2b} \geq \frac{(1+2)^2}{a+2b} = \frac{9}{a+2b}$

$a + 2b \geq 9$

13. 已知复数z和$\bar{z}$，则下列说法正确的是…………………………………………（ A ）

A. $z + \bar{z}$一定是实数；

$a+bi+a-bi = 2a$

B. $z - \bar{z}$一定是虚数；

$a+bi-(a-bi) = 2bi$

if $b=0$ 则不为虚数

C. 若$z + \bar{z} = 0$，则z是纯虚数；

$\Downarrow$

$a=0$. b未知

if $b=0$

则为0

不是纯虚数

D. 若$z - \bar{z} = 0$，则z是纯虚数.

$2bi=0$ $b=0$

$z = a+bi = a$

纯实数

14. 已知非零空间向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$，则下列说法正确的是……………………………………………（ D ）

A. 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{a}\perp\vec{c}$，则 $\vec{b}\,//\,\vec{c}$； 异面　B. 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{a}\perp\vec{c}$，则 $\vec{b}\perp\vec{c}$. 平行

C. 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{a}\,//\,\vec{c}$，则 $\vec{b}\,//\,\vec{c}$；　D. 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{a}\,//\,\vec{c}$，则 $\vec{b}\perp\vec{c}$.

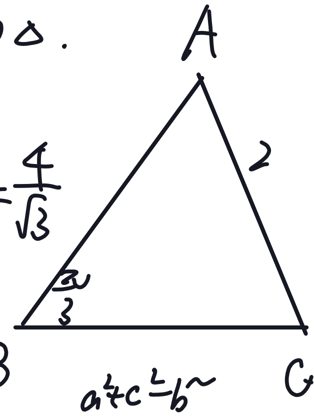
17.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）.

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $b\sin A-\sqrt{3}a\cos B=0$.

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $b=2$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，请判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由.

猜：$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}\Rightarrow \triangle ABC$ 为等边△.



(1) $\sin B\sin A-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$.

$\boxed{\sin A\neq 0}$ 必须要写

$\Rightarrow \sin B=\sqrt{3}\cos B\Rightarrow \tan B=\sqrt{3}$

$\Rightarrow B=\frac{\pi}{3}$

(2) $\frac{b}{\sin B}=2R=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow S_\triangle=\frac{abc}{4R}=\frac{2ac}{\frac{8}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}ac}{4}=\sqrt{3}$

$\Rightarrow ac=4$

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.

$\frac{1}{2}=\frac{a^2+c^2-4}{8}$

$\Rightarrow a^2+c^2=8$

$a=c=2=b$

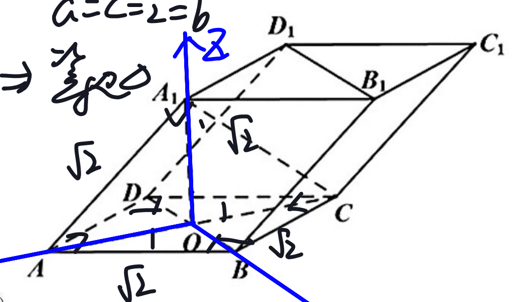
$\Rightarrow$ 等边△

18.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）.

如图所示，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，O 是底面的中心，$A_1O\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=AA_1=\sqrt{2}$.

（1）求证：$A_1C\perp$ 平面 BDD_1B_1；

（2）求直线 OA_1 与平面 AA_1B 所成角的正弦值.



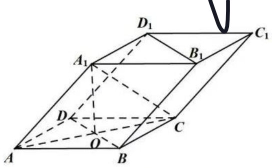
建系.

18.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）.

（1）因为 $ABCD$ 是正方形，所以 $AC\perp BD$，$OA=OC=1$，

因为 $A_1O\perp$ 底面 $ABCD$，所以 OC 是 A_1C 在平面 $ABCD$ 上的投影， ⇒ 三垂线定理

所以 $A_1C\perp BD$ ……………………2 分



由 $AA_1=\sqrt{2}$，$OA=OC=1$，$A_1O\perp$ 底面 $ABCD$，

可得 $A_1O=1$，$A_1C=\sqrt{2}$，

所以 $AA_1^2+A_1C^2=AC^2$，即有

$AA_1\perp A_1C$ ……………………2 分

因为 $AA_1\,//\,BB_1$，所以 $BB_1\perp A_1C$

所以 $A_1C\perp$ 平面 BDD_1B_1. ……………………

$\left.\begin{array}{l}A_1C\perp BD\\ A_1C\perp AA_1\\ AA_1\,//\,BB_1\end{array}\right\}\Rightarrow A_1C\perp BB_1$.

方法 2：（建系）

以 O 为原点，射线 OA、OB、OA_1 为 x 轴、y 轴、z 轴的正半轴，建立空间直角坐标系.

可得 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$A_1(0,0,1)$

则 $\overrightarrow{OA_1}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AA_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$ ……………………2 分

从而可知平面 AA_1B 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,1,1)$ ……………………2 分

所以直线 OA_1 与平面 AA_1B 所成角 θ 的正弦值

$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA_1}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{OA_1}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ……………………4 分

19．（本题满分 14 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题第①问满分 4 分，第 2 小题第②问满分 6 分）．

2024 年第七届中国国际进口博览会（简称进博会）于 11 月 5 日至 10 日在上海国家会展中心举行．为了解进博会参会者的年龄结构，某机构随机抽取了年龄在 15-75 岁之间的 200 名参会者进行调查，并按年龄绘制了频率分布直方图，分组区间为 $[15,25)$，$[25,35)$，$[35,45)$，$[45,55)$，$[55,65)$，$[65,75]$．把年龄落在区间 $[15,35)$ 内的人称为“青年人”，把年龄落在区间 $[35,65)$ 内的人称为“中年人”，把年龄落在 $[65,75]$ 内的人称为“老年人”．

$p(A\cap B)=\frac{2\times3+C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{45}\Rightarrow$ 不独立．

（1）求所抽取的“青年人”的人数；

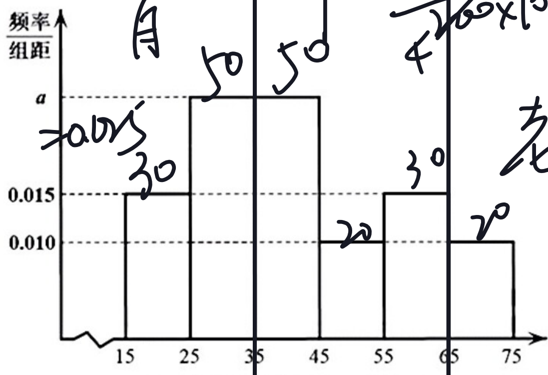
（2）以分层抽样的方式从“青年人”“中年人”“老年人”中抽取 10 名参会者做进一步访谈，发现其中女性共 4 人，这 4 人中有 3 人是“中年人”．再用抽签法从所抽取的 10 名参会者中任选 2 人．

①简述如何采用抽签法任选 2 人；

②设事件 A：2 人均为“中年人”，事件 B：2 人中至少有 1 人为男性，判断事件 A 与事件 B 是否独立，并说明理由．

$p(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$

$p(B)=\frac{6\times4+C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{24+15}{45}=\frac{13}{15}$



200名参会者的频率分布直方图

80　100　20．

3女　2男

4 : 5 : 1

4女　6男．

其他3中．其他2中

19．本题满分 14 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题第①问满分 4 分，第 2 小题第②问满分 6 分）．

（1）$(2a+0.01\times2+0.015\times2)\times10=1$

解得：$a=0.025$ ……………………………………2 分

$200\times0.4=80$　　80

所以所抽取的“青年人”人数为 80……………………………………2 分

（2）先将 10 名参会者进行编号：1、2、……10，并将 10 个号码写在完全相同的纸片上，放入某容器中充分混合均匀，再取出 2 张，2 张纸片上所对应的参会者就是要选取的人。

……………………………………4 分

（知道要编码 2 分，充分混合均匀随机抽 2 张或者依次抽两张 2 分）

（3）“青年人”“中年人”“老年人”的人数之比为 $0.04:0.05:0.01=4:5:1$

所以 10 人中“中年人”共有 5 人，

2 人均为“中年人”的概率 $P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9}$，

2 人中至少有 1 人为男性的概率 $P(B)=1-\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{13}{15}$ ……………………………………2 分

2 人均为“中年人”且至少有 1 人为男性的概率 $P(A\cap B)=\frac{C_2^2+C_2^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{45}$ …………2 分

因为 $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$，所以事件 A 与事件 B 不独立．……………………………………2 分