2025 虹口一模

1．已知集合 $A=\{x||x|<2\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $A\cap B=$ $\{1\}$.

2．函数 $y=\ln\frac{x}{x-1}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

3．若 $\tan\alpha=5$，则 $\tan 2\alpha=$ $-\frac{5}{12}$.

4．在 $(x-2)^6$ 的二项展开式中，x^3 项的系数为 -160.

5．设 $a>0$ 且 $a\neq 1$，则函数 $y=2+\log_a x$ 的图像恒过的定点坐标为 $(1,2)$.

6．若某圆锥的底面半径为1，高为1，则该圆锥的侧面积为 $\sqrt{2}\pi$ ．(结果保留 π)

7．已知非零复数 z 满足 $|z-1|=1$，$|\bar{z}-\mathrm{i}|=1$，则 z 的虚部为 -1 .

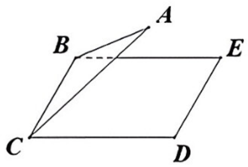
$|(a-1)+bi|=1$

$|a-(b+1)i|=1$

$$\left.\begin{array}{l} a^2-2a+\cancel{1}+b^2=\cancel{1} \\ a^2+b^2+2b+\cancel{1}=\cancel{1} \end{array}\right\} \Rightarrow a=-b$$

$\Rightarrow a^2-2a+a^2=0 \Rightarrow a=1/\cancel{0}.$

$\operatorname{Im} z = b = -a = 1$

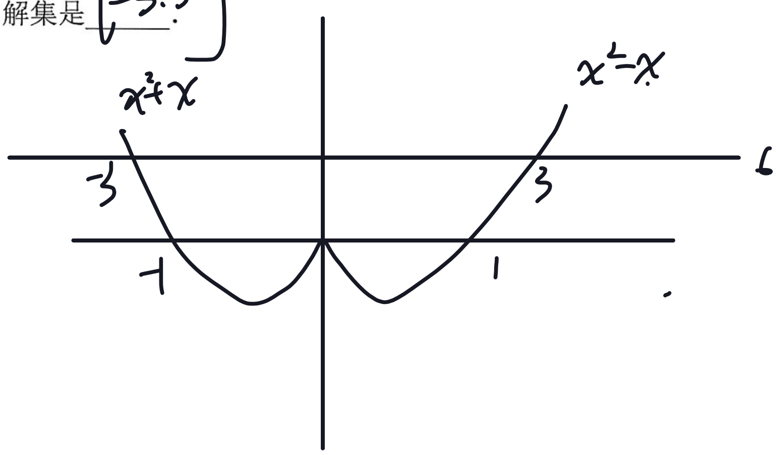


第 9 题图

8．已知 $f(x)=\begin{cases} x^2-x, x\ge 0, \\ f(-x), x<0, \end{cases}$ 则 $f(x)\le 6$ 的解集是 $[-3,3]$.

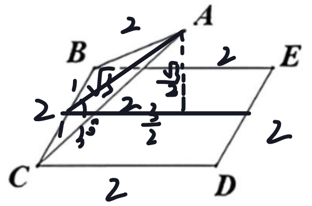
$x<0$，$-x>0$

$f(-x)=x^2+x$

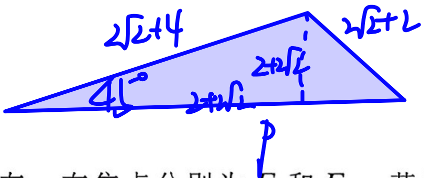


9．如图，已知正三角形 ABC 和正方形 $BCDE$ 的边长均为 2，且二面角 $A-BC-D$ 的大小为 $\frac{\pi}{6}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$ -1.

$(1,-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(2,2,0)=2-3=-1$



第 9 题图



发现利用是直角！

10．双曲线 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2，若以点 F_2 为焦点的抛物线 $C_2: y^2=2px(p>0)$ 与 C_1 在第一象限交于点 P，且 $\angle PF_1F_2=\frac{\pi}{4}$，则 C_1 的离心率为 $\sqrt{2}+1$

$e=\frac{c}{a}\Rightarrow a=1$

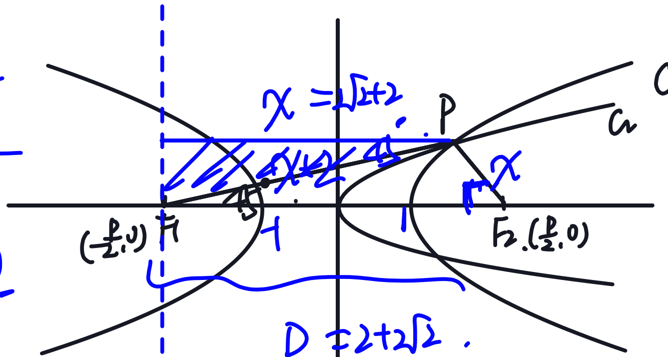
$=\frac{\frac{p}{2}}{1}=\frac{p}{2}=\sqrt{2}+1$

$\sqrt{2}x=x+2$

$x=\frac{2}{\sqrt{2}-1}$

$=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{1}$

$=2\sqrt{2}+2$



$p=2+2\sqrt{2}$

13．已知 $\alpha\in(0,\pi)$，则“$\sin(\pi-\alpha)=\frac{1}{2}$”是“$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$”的（ C ）条件.

A．充要　　　B．充分非必要　　　C．必要非充分　　　D．既非充分又非必要

$\Rightarrow$ AB 互斥.

14．已知事件 A 和事件 B 满足 $A\cap B=\varnothing$，则下列说法正确的是（ B ）.

A．事件 A 和事件 B 独立　　　B．事件 A 和事件 B 互斥

C．事件 A 和事件 B 对立　　　D．事件 $\overline{A}$ 和事件 $\overline{B}$ 互斥

秒.

17.（1）因为函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 2π，所以 $\omega=1$． ………………………………… 2 分

故 $y=f(x)+\cos x=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$． ………………………………………… 4 分

17．（本题满分 14 分，第 1 小

由于 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，

故当 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，取到最大值 $\sqrt{2}$． …………………………………………………………… 6 分

设 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$．

(1) 当函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 2π 时，求 $y=f(x)+\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值；

(2) 若 $\omega=2$，且在 ΔABC 中，角 A、B、C 所对的边长为 a、b、c，锐角 A 满足 $f(A+\frac{\pi}{6})=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$，求 a 的最小值．

（2）当 $\omega=2$，所以 $f(x)=\sin 2x$．

故当 $f(A+\frac{\pi}{6})=0$ 时，$\sin(2A+\frac{\pi}{3})=0$，即 $2A+\frac{\pi}{3}=k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

由于 A 为锐角，解得 $A=\frac{\pi}{3}$． ………………………………………………………… 8 分

因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$，可得 $bc=8$． ………………………………………………… 10 分

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geq 2bc-2bc\cos A=8$． ……………………………… 12 分

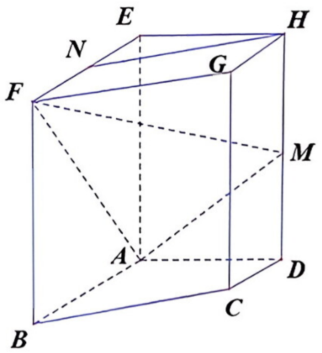
等号当且仅当 $b=c=2\sqrt{2}$ 时成立，此时 a 的最小值为 $2\sqrt{2}$． ……………………………… 14 分

18．（本题满分 14 分，第 **1** 小题 **6** 分，第 **2** 小题 **8** 分）

如图，已知在四棱柱 $ABCD-EFGH$ 中，$EA\perp$ 平面 $ABCD$，N、M 分别是 EF、HD 的中点．

(1) 求证：HN // 平面 AFM；

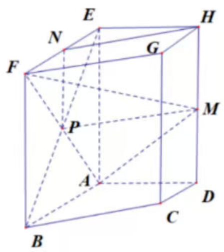
(2) 若底面 $ABCD$ 为梯形，AB // CD，$AB=EA=2$，$AD=DC=1$，异面直线 AB 与 EH 所成角为 $\frac{\pi}{2}$．求直线 AN 与平面 AFM 所成角的正弦值。



第 18 题图

18.（1）连接 BE 交 AF 于点 P，连接 MP．

由于 $ABCD-EFGH$ 是四棱柱且 $EA\perp$ 平面 $ABCD$，故四边形 $AEFB$ 为矩形，所以点 P 为 AF 的中点，即 NP 与 AE 平行，且 $NP=\frac{1}{2}AE$． ……………………………………………………



由于 HM 与 AE 平行，且 $HM=\frac{1}{2}AE$，故 NP 与 HM 平行且相等，

故四边形 $NPMH$ 为平行四边形，所以 HN 与 MP 平行． …………………

因为 HN 不在平面 AFM 上，MP 在平面 AFM 上， ………………………………… 6 分

所以 HN // 平面 AFM．

（2）由于异面直线 AB 与 EH 所成角为 $\frac{\pi}{2}$ 且 AD 与 EH 平行，$\angle BAD$ 为 AB 与 EH 所成角（或其补角），所以 $\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，即 $AB\perp AD$． ……………………………………………………… 8 分

以点 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AE}$ 为 x、y、z 轴正方向，建立空间直角坐标系，则

$\overrightarrow{AN}=(1,0,2)$，$\overrightarrow{AF}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{AM}=(0,1,1)$． …………………………………………………… 10 分

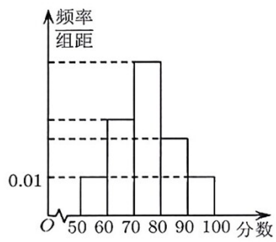
设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 AFM 的一个法向量，

则 $\begin{cases}2x+2z=0\\ y+z=0\end{cases}$，取 $z=-1$，可得 $\vec{n}=(1,1,-1)$． ……………………………………………… 12 分

设直线 AN 与平面 AFM 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AN}|}=\frac{\sqrt{15}}{15}$，

19．（本题满分 14 分，第 **1** 小题 **4** 分，第 **2** 小题 **4** 分，第 **2** 小题 **6** 分）

2024 年法国奥运会落下帷幕．某平台为了解观众对本次奥运会的满意度，随机调查了本市 1000 名观众，得到他们对本届奥运会的满意度评分（满分 100 分），平台将评分分为$[50,60)$、$[60,70)$、$[70,80)$、$[80,90)$、$[90,100]$共 5 层，绘制成频率分布直方图（如图 1 所示）．并在这些评分中以分层抽样的方式从这 5 层中再抽取了共 20 名观众的评分，绘制成茎叶图，但由于某种原因茎叶图受到了污损，可见部分信息如图 2 所示．



第 19 题图 1

第 19 题图 2

(1) 求图 2 中这 20 名观众的满意度评分的第 35 百分位数；

(2) 若从图 2 中的 20 名观众中再任选取 3 人做深度采访，求其中至少有 1 名观众的评分大于等于 90 分的概率；

(3) 已知这 1000 名观众的评分位于$[50,80)$上的均值为 67，方差为 64.7，位于$[50,100]$上的均值为 73，方差为 134.6，求这 1000 名观众的评分位于$[80,100]$上的均值与方差．

19．（1）$i=20\times0.35=7$，……2 分

所以第 35 百分位数为第 7 位和第 8 位数的平均数，故为 68．……4 分

（2）这 20 名观众有 2 名的评分大于等于 90 分，18 名的评分小于 90 分．……6 分

所以至少有 1 人的评分大于等于 90 分的概率为$1-\dfrac{C_{18}^3}{C_{20}^3}=\dfrac{27}{95}$．……8 分

（3）由于分层抽样，故可得$[50,80)$上的频率为$\dfrac{7}{10}$，$[80,100]$上的频率为$\dfrac{3}{10}$．

故评分位于$[50,80)$上的频数为700，位于$[80,100]$上的频数为300．……10 分

所以设这 1000 名观众的评分位于$[50,80)$上的均值为$\overline{x_1}=67$，方差为$s_1^2=64.7$，每个评分设为x_i，$i=1,2,\ldots,700$；位于$[50,100]$上的均值为$\overline{x}=73$，方差为$s^2=134.6$，位于$[80,100]$上的均值为$\overline{x_2}$与方差s_2^2，每个评分设为x_i'，$i=1,2,\ldots,300$．

所以$\overline{x}=\dfrac{\overline{x_1}\times700+\overline{x_2}\times300}{1000}$，解得$\overline{x_2}=87$．……12 分

$$1000s^2=\sum_{i=1}^{700}(x_i-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{300}(x_i'-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{700}[(x_i-\overline{x_1})+(\overline{x_1}-\overline{x})]^2+\sum_{i=1}^{300}[(x_i'-\overline{x_2})+(\overline{x_2}-\overline{x})]^2,$$

即$1000s^2=700s_1^2+700(\overline{x_1}-\overline{x})^2+300s_2^2+300(\overline{x_2}-\overline{x})^2$，解得$s_2^2=17.7$．……14 分

所以位于$[80,100]$上的均值为87，方差为17.7．