

2015 出口一摸

1. 已知集合 $A = \{x \mid |x| < 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B = \underline{\{1\}}$.

2. 函数 $y = \ln \frac{x}{x-1}$ 的定义域是 $\underline{(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)}$.

3. 若 $\tan \alpha = 5$, 则 $\tan 2\alpha = \underline{-\frac{5}{12}}$.

4. 在 $(x-2)^6$ 的二项展开式中, x^3 项的系数为 $\underline{-160}$.

5. 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 则函数 $y = 2 + \log_a x$ 的图像恒过的定点坐标为 $\underline{(1, 2)}$.

6. 若某圆锥的底面半径为1，高为1，则该圆锥的侧面积为 $\sqrt{2}\pi$. (结果保留 π)

7. 已知非零复数 z 满足 $|z-1|=1$, $|\bar{z}-i|=1$, 则 z 的虚部为 -1 .

$$|(a+1)+bi|=1$$

$$|a-(b+1)i|=1$$

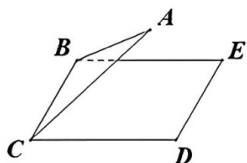
$$a^2+2a+1+b^2=1$$

$$a^2+b^2+2b+1=1$$

$$\Rightarrow a=-b$$

$$\Rightarrow a^2-2a+a^2=0 \Rightarrow a=1/0.$$

$$\operatorname{Im} z = b = -a = -1$$

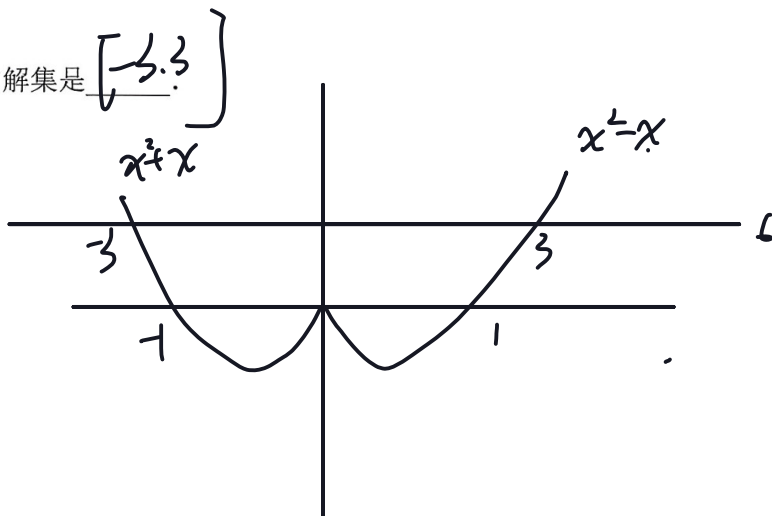


第9题图

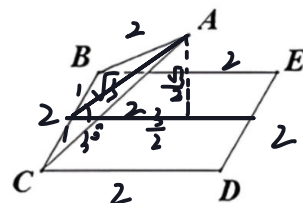
8. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(x) \leq 6$ 的解集是 $[-3, 3]$.

$$x < 0, -x > 0$$

$$f(-x) = x^2 + x$$



9. 如图, 已知正三角形 ABC 和正方形 $BCDE$ 的边长均为 2, 且二面角 $A-BC-D$ 的大小为 $\frac{\pi}{6}$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \underline{\quad}$.



第 9 题图

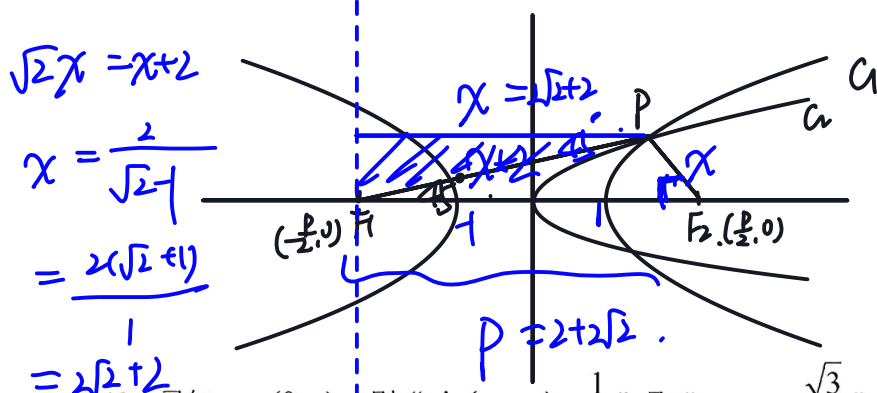
$$(1, -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (2, 2, 0) = 2 - 3 = -1$$

发现就是直角!



10. 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2 , 若以点 F_2 为焦点的抛物线

$C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 与 C_1 在第一象限交于点 P , 且 $\angle PF_1F_2 = \frac{\pi}{4}$, 则 C_1 的离心率为 $\underline{\sqrt{2}+1}$.



$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 1$$

$$= \frac{p}{1} = \frac{p}{2} = \sqrt{2} + 1$$

13. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 则 “ $\sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}$ ” 是 “ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ” 的 (C) 条件.

- A. 充要 B. 充分非必要 C. 必要非充分 D. 既非充分又非必要

$$[\textcircled{A} \textcircled{B}] \Rightarrow AB \text{ 互斥.}$$

14. 已知事件 A 和事件 B 满足 $A \cap B = \emptyset$, 则下列说法正确的是 (B).

- A. 事件 A 和事件 B 独立 ~~✗~~
 B. 事件 A 和事件 B 互斥 ☒
 C. 事件 A 和事件 B 对立 ~~✗~~
 D. 事件 \bar{A} 和事件 \bar{B} 互斥 ~~✗~~

和.

17. (1) 因为函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 2π , 所以 $\omega = 1$ 2 分

故 $y = f(x) + \cos x = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 4 分

由于 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$,

17. (本题满分 14 分, 第 1 小)

设 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$. 故当 $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, 取到最大值 $\sqrt{2}$ 6 分

(1) 当函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 2π 时, 求 $y = f(x) + \cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值;

(2) 若 $\omega = 2$, 且在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边长为 a 、 b 、 c , 锐角 A 满足 $f(A + \frac{\pi}{6}) = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$, 求 a 的最小值.

(2) 当 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = \sin 2x$.

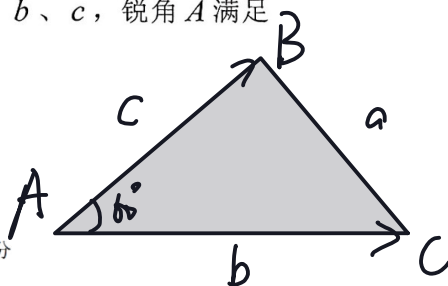
故当 $f(A + \frac{\pi}{6}) = 0$ 时, $\sin(2A + \frac{\pi}{3}) = 0$, 即 $2A + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

由于 A 为锐角, 解得 $A = \frac{\pi}{3}$ 8 分

因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$, 可得 $bc = 8$ 10 分

所以 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \geq 2bc - 2bc \cos A = 8$ 12 分

等号当且仅当 $b = c = 2\sqrt{2}$ 时成立, 此时 a 的最小值为 $2\sqrt{2}$ 14 分



$bc \cdot \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow bc = 8$

18. (本题满分 14 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 8 分)

如图, 已知在四棱柱 $ABCD - EFGH$ 中, $EA \perp$ 平面 $ABCD$, N 、 M 分别是 EF 、 HD 的中点.

(1) 求证: $HN \parallel$ 平面 AFM ;

(2) 若底面 $ABCD$ 为梯形, $AB \parallel CD$, $AB = EA = 2$,

$AD = DC = 1$, 异面直线 AB 与 EH 所成角为 $\frac{\pi}{2}$. 求直线 AN 与平

面 AFM 所成角的正弦值.

18. (1) 连接 BE 交 AF 于点 P , 连接 MP .

由于 $ABCD - EFGH$ 是四棱柱且 $EA \perp$ 平面 $ABCD$, 故四边形 $AEFB$ 为矩形, 所以点 P 为 AF 的中点, 即 NP 与 AE 平行, 且 $NP = \frac{1}{2} AE$ 6 分

由于 HM 与 AE 平行, 且 $HM = \frac{1}{2} AE$, 故 NP 与 HM 平行且相等,

故四边形 $NPMH$ 为平行四边形, 所以 HN 与 MP 平行.

因为 HN 不在平面 AFM 上, MP 在平面 AFM 上, 6 分

所以 $HN \parallel$ 平面 AFM .

(2) 由于异面直线 AB 与 EH 所成角为 $\frac{\pi}{2}$ 且 AD 与 EH 平行, $\angle BAD$ 为 AB 与 EH 所成角 (或其补

角), 所以 $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$, 即 $AB \perp AD$ 8 分

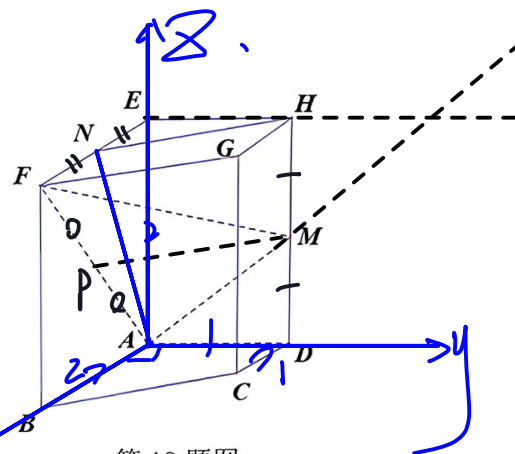
以点 A 为原点, 分别以 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{AD} 、 \overrightarrow{AE} 为 x 、 y 、 z 轴正方向, 建立空间直角坐标系, 则

$\overrightarrow{AN} = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{AF} = (2, 0, 2)$, $\overrightarrow{AM} = (0, 1, 1)$ 10 分

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 AFM 的一个法向量,

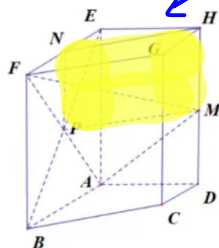
则 $\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$, 取 $z = -1$, 可得 $\vec{n} = (1, 1, -1)$ 12 分

设直线 AN 与平面 AFM 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AN}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{AN}|} = \frac{\sqrt{15}}{15}$,



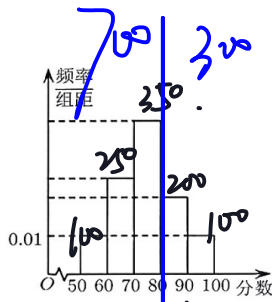
第 18 题图

$PM \parallel FG, FG \parallel MN$



19. (本题满分 14 分, 第 1 小题 4 分, 第 2 小题 4 分, 第 2 小题 6 分)

2024 年法国奥运会落下帷幕. 某平台为了了解观众对本次奥运会的满意度, 随机调查了本市 1000 名观众, 得到他们对本届奥运会的满意度评分 (满分 100 分), 平台将评分分为 $[50, 60)$ 、 $[60, 70)$ 、 $[70, 80)$ 、 $[80, 90)$ 、 $[90, 100]$ 共 5 层, 绘制成频率分布直方图 (如图 1 所示). 并在这些评分中以分层抽样的方式从这 5 层中再抽取了共 20 名观众的评分, 绘制成茎叶图, 但由于某种原因茎叶图受到了污损, 可见部分信息如图 2 所示.



第 19 题图 1

5	1	4			7		
6	1	2	3	3	5		
7	1	3	4	4	4	5	8
8	8						
9							

被污损

第 19 题图 2

(1) 求图 2 中这 20 名观众的满意度评分的第 35 百分位数;

(2) 若从图 2 中的 20 名观众中再任选取 3 人做深度采访, 求其中至少有 1 名观众的评分

方差公式 = $\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = s^2$

↑
平均数
↑
方差 (带平方)

$$P = 1 - \frac{C_{18}^3}{C_{20}^3} = \frac{27}{95}$$

$$\frac{x_1^2 + \dots + x_{700}^2}{700} - 67^2 = 64.7$$

$$\frac{x_1^2 + \dots + x_{700}^2}{700} - 7^2 = 134.6$$

$$\frac{x_{700}^2 + \dots + x_{1000}^2}{300} - (\bar{x})^2 = 87$$

大于等于 90 分的概率;

(3) 已知这 1000 名观众的评分位于 $[50, 80)$ 上的均值为 67, 方差为 64.7, 位于 $[50, 100]$ 上

的均值为 73, 方差为 134.6, 求这 1000 名观众的评分位于 $[80, 100]$ 上的均值与方差.

$$\frac{65+71}{2} = 68$$

(1) $i = 20 \times 0.35 = 7$, 2 分

所以第 35 百分位数为第 7 位和第 8 位数的平均数, 故为 68. 4 分

(2) 这 20 名观众有 2 名的评分大于等于 90 分, 18 名的评分小于 90 分. 6 分

所以至少有 1 人的评分大于等于 90 分的概率为 $1 - \frac{C_{18}^3}{C_{20}^3} = \frac{27}{95}$ 8 分

(3) 由于分层抽样, 故可得 $[50, 80)$ 上的频率为 $\frac{7}{10}$, $[80, 100]$ 上的频率为 $\frac{3}{10}$.

故评分位于 $[50, 80)$ 上的频数为 700, 位于 $[80, 100]$ 上的频数为 300. 10 分

所以设这 1000 名观众的评分位于 $[50, 80)$ 上的均值为 $\bar{x}_1 = 67$, 方差为 $s_1^2 = 64.7$, 每个评分设为 x_i , $i = 1, 2, \dots, 700$; 位于 $[50, 100]$ 上的均值为 $\bar{x} = 73$, 方差为 $s^2 = 134.6$, 位于 $[80, 100]$ 上的均值为 \bar{x}_2 与方差 s_2^2 , 每个评分设为 x'_i , $i = 1, 2, \dots, 300$.

所以 $\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 \times 700 + \bar{x}_2 \times 300}{1000}$, 解得 $\bar{x}_2 = 87$ 12 分

$$1000s^2 = \sum_{i=1}^{700} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{300} (x'_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{700} [(x_i - \bar{x}_1) + (\bar{x}_1 - \bar{x})]^2 + \sum_{i=1}^{300} [(x'_i - \bar{x}_2) + (\bar{x}_2 - \bar{x})]^2,$$

即 $1000s^2 = 700s_1^2 + 700(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + 300s_2^2 + 300(\bar{x}_2 - \bar{x})^2$, 解得 $s_2^2 = 17.7$ 14 分

所以位于 $[80, 100]$ 上的均值为 87, 方差为 17.7.