2025 浦东一模

1．若对数函数 $y=\log_a x$（$a>0,a\neq 1$）的图像经过点 $(4,2)$，则 a 的值为 2 。

$2=\log_a 4 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=2$

2．直线 $x-y+1=0$ 的倾斜角的大小是 $45°$.

$y=x+1 \Rightarrow k=1=\tan\alpha \Rightarrow \alpha=45°$

$k=\dfrac{A}{-B}=-\dfrac{1}{-1}=1$

3．已知复数 $z_1=3+\mathrm{i}$，$z_2=a+4\mathrm{i}$，$a\in\mathrm{R}$，若 z_1-z_2 为纯虚数，则 $|z_2|=$ 5 .

$z_1-z_2=3+i-a-4i=(3-a)-3i$

$\underset{\Rightarrow\ a=3}{\overset{\|}{0}}$

$z_2=3+4i$

$|z_2|=\sqrt{9+16}=5$

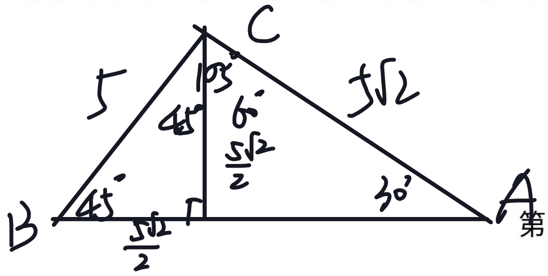
4．在 $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，x^3 项的系数是 20. （用数字作答）.

$\begin{cases} x+y=6 \\ 2x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

$C_6^3\cdot(x^2)^3\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^3$

$=20x^3$

5．在 $\triangle ABC$ 中，$BC=5$，$\angle B=45°$，$\angle C=105°$，则 $AC=$ $5\sqrt{2}$.



余弦/正弦定理也可以、

6．已知实数 a、b 满足 $a+2b=1$，则 3^a+9^b 的最小值为 $\underline{\quad 2\sqrt{3} \quad}$.

$=3^a+3^{2b}=3^a+3^{1-a}=3^a+\dfrac{3}{3^a}$

$(3^a>0$ 恒成立$)$

$\geq 2\sqrt{3}$

$(x-d)+x+(x+d)=3x=0\Rightarrow x=0$

7．若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7+a_8+a_9=0$，$a_7+a_{10}=1$，则 $a_1=\underline{\quad -7 \quad}$.

$-d \quad 0 \quad d \quad -d+2d \Rightarrow d=1$

$a_8=0.=a_1+7d=a_1+7$

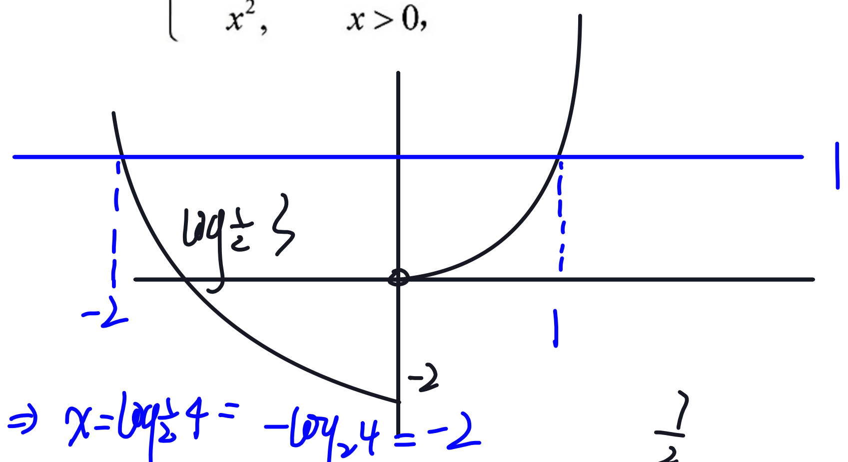
$d=1$

$\Rightarrow a_1=-7$

$a-d \quad a \quad a+d \quad =3a=0$

$0.$

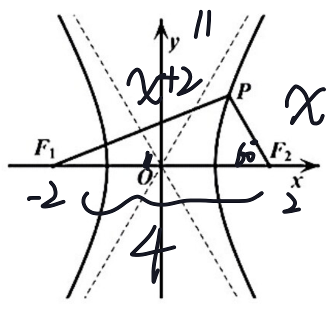
8．已知函数 $y=f(x)$ 的表达式为 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-3, & x\leq 0,\\ x^2, & x>0,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)\leq 1$ 的解为 $\underline{\quad [-2,1] \quad}$.



$(\frac{1}{2})^x-3=1$

$(\frac{1}{2})^x=4\Rightarrow x=\log_{\frac{1}{2}}4=-\log_2 4=-2$

9．已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，双曲线上的点 P 在第一象限，且 PF_2 与双曲线的一条渐近线平行，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\underline{\quad \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad}$.



$a=1 \quad b=\sqrt{3} \quad c=2 \quad y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\sqrt{3}x$

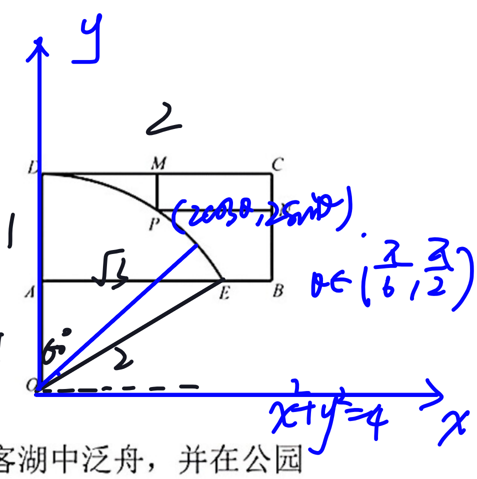
$\Rightarrow S$ 海伦公式.

$\cos 60^\circ=\dfrac{16+x^2-(x+2)^2}{2\times 4\times x}\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

多变量 → 单变量

10．某地要建造一个市民休闲公园长方形 $ABCD$，如图，边 $AB=2km$，边 $AD=1km$，其中区域 ADE 开挖成一个人工湖，其他区域为绿化风景区．经测算，人工湖在公园内的边界是一段圆弧，且 A、D 位于圆心 O 的正北方向，E 位于圆心 O 的北偏东 60° 方向．拟定在圆弧 P 处修建一座渔人码头，供游客湖中泛舟，并在公园的边 DC、CB 开设两个门 M、N，修建步行道 PM、PN 通往渔人码头，且 $PM\perp CD$、$PN\perp CB$，则步行道 PM、PN 长度之和的最小值是 ___1.172___ km．（精确到 0.001）



$|MP|+|NP| = 2-2\sin\theta + 2-2\cos\theta = 4-2\sqrt{2}\boxed{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$ max

$\in(\frac{5}{12}\pi, \frac{3}{4}\pi)$

$\geq 4-2\sqrt{2}$

$\theta=\frac{\pi}{4}$

① 建系 ② 参数方程/多变量→单变量

-2　1

13．若实数 a、b 满足 $a^2>b^2$，下列不等式中恒成立的是（ C ）

A．$a>b$　　　　B．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　$-\frac{1}{2}<-1$

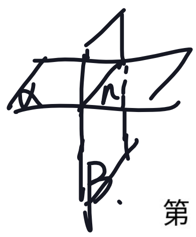
C．$a^2+b^2>2ab$　　　　D．$a>|b|$

$a\neq b$　　　　$-2>1$

14．设 m、n 为两条直线，α、β 为两个平面，且 $\alpha\cap\beta=n$．下述四个命题中为假命题的是（ B ）

A．若 $m\perp\alpha$，则 $m\perp n$　　　　B．若 $m//\alpha$，则 $m//n$

C．若 $m//\alpha$ 且 $m//\beta$，则 $m//n$　　　　D．若 $m//n$，则 $m//\alpha$ 或 $m//\beta$



$\omega=4$

17. （本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

已知函数 $y=f(x)$ 的表达式为 $f(x)=\sin\omega x,\omega>0$.　　$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=4$

$x\in[-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}]$, $k\in Z$.

（1）若函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，求 ω 的值及 $y=f(x)$ 的单调增区间；

（2）若 $\omega=2$，设函数 $y=g(x)$ 的表达式为 $g(x)=f\left(x\right)+\sqrt{3}\cos 2x$，求当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$y=g(x)$ 的值域.

$f(x)=\sin 4x$

$\uparrow\ 4x\in[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$

$\Rightarrow x\in[-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}]$

$[-\sqrt{3},2]$

17. （1）由 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，得 $\omega=4$，………3 分

由 $4x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi-\frac{\pi}{2}\right]$，得单调增区间为 $\left[\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right](k\in z)$；………6 分

（2）$g(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，………9 分

由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，得 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，于是 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，………12 分

从而 $g\left(x\right)\in\left[-\sqrt{3},2\right]$，即 $y=g(x)$ 的值域为 $\left[-\sqrt{3},2\right]$. ………14 分

$f(x)=\sin 2x$.

(2) $g(x)=f(x)+\sqrt{3}\cos 2x$

$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

$x\in[0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow 2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{3},\frac{4}{3}\pi]\Rightarrow\sin(2x+\frac{\pi}{3})\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$

$\Rightarrow[-\sqrt{3},2]$

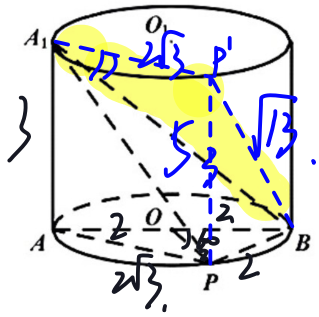
18. （本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

如图，已知 AB 为圆柱 OO_1 底面圆 O 的直径，$OA=2$，母线 AA_1 长为 3，点 P 为底面圆 O 的圆周上一点.

$V_{A-PBA_1}=V_{A_1-APB}=\frac{1}{3}\times3\times\frac{1}{2}\times4\times2=4$

（1）若 $\angle BOP=90°$，求三棱锥 $A-PBA_1$ 的体积；

（2）若 $\angle BOP=60°$，求异面直线 A_1B 与 AP 所成的角的余弦值.



18. （1）解：三棱锥 $A-PBA_1$ 的体积等于三棱锥 A_1-PBA 的体积，………2 分

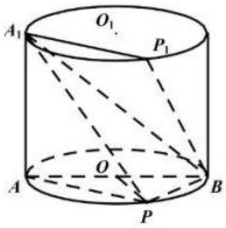
三角形 PBA 面积为 $S_{\Delta PBA}=\frac{1}{2}\times4\times2=4$，………2 分

三棱锥 A_1-PBA 的体积 $V_{A_1-PBA}=\frac{1}{3}S_{\Delta PBA}\times3=4$ ………2 分

所以，三棱锥 $A-PBA_1$ 的体积为 4；

（2）作 $A_1P_1//AP$，连 BP_1，

则 $\angle P_1A_1B$ 是异面直线 A_1B 与 AP 所成的角，………3 分



$A_1P_1=AP=2\sqrt{3}$，　$A_1B=\sqrt{A_1A^2+AB^2}=5$，

$P_1B=\sqrt{P_1P^2+PB^2}=\sqrt{13}$，

则 $\cos\angle P_1A_1B=\frac{12+25-13}{2\times5\times2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$，………4 分

所以异面直线 A_1B 与 AP 所成的角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. ………1 分

$\cos\theta=\frac{25+12-13}{2\times5\times2\sqrt{3}}$

$=\frac{6}{5\sqrt{3}}$

$=\frac{6}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{5}$

19．（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分．

申辉中学为期两周的高一、高二年级校园篮球赛告一段落．高一小 A、高二小 B 分别荣获了高一年级和高二年级比赛的年级 MVP（最有价值球员）．以下是他们在各自 8 场比赛的二分球和三分球出手次数及其命中率．

	二分球出手	二分球命中率	三分球出手	三分球命中率
小 A	100 次	80%	100 次	40%
小 B	190 次	70%	10 次	30%

现以两人的总投篮命中率（二分球＋三分球）较高者评为校 MVP（总投篮命中率＝总命中次数÷总出手次数）不准确： $A=\frac{80+40}{200}=60\%$ $B=\frac{133+3}{200}=68\%$.

（1）小 C 认为，目测小 A 的二分球命中率和三分球命中率均高于小 B，此次必定能评为校 MVP，试通过计算判断小 C 的想法是否准确？ B为MVP. 想法不准确

（2）小 D 是游戏爱好者，设置了一款由游戏人物小 a、小 b 轮流投篮对战游戏．游戏规则如下：①游戏中小 a 的命中率始终为 0.4，小 b 的命中率始终为 0.3．②游戏中投篮总次数最多为 $k(3\le k\le 20,k\in \mathrm{Z})$ 次，且同一个游戏人物不允许连续投篮．③游戏中若投篮命中，则游戏结束，投中者获得胜利；若直至第 k 次投篮都没有命中，则规定第二次投篮者获胜．若每次游戏对战前必须设置“第一次投篮人物”和“k”的值，请解答以下两个问题．

（ⅰ）若小 a 第一次投篮，请证明小 a 获胜概率大；

（ⅱ）若小 b 第一次投篮，试问谁的获胜概率大？并说明理由．

19．（1）小 A 总命中率为 $\frac{100\times 80\%+100\times 40\%}{100+100}=60\%$ ………2 分

小 B 总命中率为 $\frac{190\times 70\%+10\times 30\%}{190+10}=68\%$ ………4 分

$60\%<68\%$ ………5 分

综上，小 C 想法错误，小 B 为校 MVP ………6 分

（2）(ⅰ)证明：若“第一次投篮人物”为小 a，$k(3\le k\le 20,k\in \mathrm{Z})$，

小 a 获胜的概率为 P_a，小 b 的获胜的概率为 $1-P_a$

$P_a\ge 0.4+0.7\cdot 0.6\cdot 0.4=0.568>0.5>1-P_a$

可得“小 a 第一次投篮，小 a 获胜概率大”………9 分

(ⅱ)若“第一次投篮人物”为小 b，$k(3\le k\le 20,k\in \mathrm{Z})$，

小 b 获胜的概率为 P_b，小 a 的获胜的概率为 $1-P_b$

$P_b=0.3+0.3(0.7\cdot 0.6)+\cdots+0.3(0.7\cdot 0.6)^m$

$=\frac{0.3\left[1-0.42^{m+1}\right]}{0.58}=\frac{15}{29}\left(1-0.42^{m+1}\right)$ ………12 分

其中，$m=\begin{cases}\frac{k-2}{2},k\in\{4,6,8,10,12,14,16,18,20\},\\ \frac{k-1}{2},k\in\{3,5,7,9,11,13,15,17,19\}\end{cases}$，

易证 $P_b=f(m)=\frac{15}{29}\left(1-0.42^{m+1}\right)$ 随着 m 的增大而增大，

$f(2)<0.5<f(3)$ 所以当 $m\ge 3$ 也就是 $7\le k\le 20$ 时 $P_b>0.5>1-P_b$

综上：若小 b 第一次投篮，$k\in\{3,4,5,6\}$ 时小 a 获胜概率大；

$k\in\{k|7\le k\le 20,k\in \mathrm{Z}\}$ 时小 b 获胜概率大．………14 分

(i). $k=3$ $p(a)=0.4+0.6\times 0.7\times 0.4$

$k=4$ $p(a)=0.4+0.6\times 0.7\times 0.4$

$k=5$ $p(a)=0.4+0.6\times 0.7\times 0.4+0.6\times 0.7\times 0.6\times 0.7\times 0.4$

$k=6$ $p(a)=0.4+0.6\times 0.7\times 0.4+0.6\times 0.7\times 0.6\times 0.7\times 0.4$

$k=7$ $p(a)=0.4+\underbrace{0.6\times 0.7}_{1次}\times 0.4+\underbrace{0.6\times 0.7\times 0.6\times 0.7}_{2次}\times 0.4$
$+\underbrace{0.6\times 0.7\times 0.6\times 0.7\times 0.6\times 0.7}_{3次}\times 0.4$

$\frac{k-1}{2}=3$,

$k=k\Rightarrow p(a)=0.4+0.4\times(0.42^1+\cdots+0.42^{\frac{k-1}{2}})$
(k为奇)
$=0.4(0.42^0+\cdots+0.42^{\frac{k-1}{2}})$

$$= 0.4 \times \frac{1 \times (1-0.42^{\frac{k+1}{2}})}{1-0.42} \qquad \frac{\frac{k-1}{2}-0}{1}+1 = \frac{k+1}{2}$$

$$= \frac{20}{29}\left(1-0.42^{\frac{k+1}{2}}\right), \ k \geq 3$$

$$> 1-0.42^{2}$$

$> 0.568.$ $\Rightarrow$ $p(a)$大.

$p(a) = 0.4$ $p(b) = 0.3$

(ii) 若b先投篮，同理.

$k=3$ $p(b) = 0.3 + 0.7 \times 0.6 \times 0.3$

$k=4$ $p(b) = 0.3 + 0.7 \times 0.6 \times 0.3$

$k=5$ $p(b) = 0.3 + 0.7 \times 0.6 \times 0.3 + 0.7 \times 0.6 \times 0.7 \times 0.6 \times 0.3$.

$\Rightarrow$ $k \in [3, 20]$

当k为奇 $p(b) = 0.3 \times (0.42^{0} + \cdots 0.42^{\frac{k-1}{2}})$ $\qquad \frac{\frac{k-1}{2}-0}{1}+1 = \frac{k+1}{2}$

$$= 0.3 \times \frac{1 \times (1-0.42^{\frac{k+1}{2}})}{1-0.42}$$

$$= \frac{15}{29}\left(1-0.42^{\frac{k+1}{2}}\right)$$

当k为偶 $p(b) = 0.3 \times (0.42^{0} + \cdots + 0.42^{\frac{k-2}{2}})$ $\qquad \frac{\frac{k-2}{2}-0}{1}+1 = \frac{k}{2}$

$$= 0.3 \times \frac{1 \times (1-0.42^{\frac{k}{2}})}{1-0.42}$$

$$= \frac{15}{29}\left(1-0.42^{\frac{k}{2}}\right)$$

$\Rightarrow$ $k = \{3.4.5.6\}$ b输 a赢.

$k = \{7 \sim 20\}$ b赢 a输

$k=$	3	4	5	6	7	8	9	10	
$p(b)=$	0.426	0.426	0.4759	0.4759	0.5011	0.5011	0.5104	0.5104	...