2005 徐汇一模

1. 不等式$x^2-4x+3<0$的解集为 $(1,3)$.

$(x-1)(x-3)<0$

2. 已知函数$y=f(x)$，其中$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ -1, & x\le 0\end{cases}$，则$f(1)=$ 0.

$f(1)=\ln 1=0.$

$(a+b)^n \Rightarrow \underline{T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}\cdot b^r}$

3. 在$(1+x)^n$的二项展开式中，若各项系数和为32，则正整数n的值为 5.

$\underline{(1+x)^n}=\underline{C_n^0 1^n x^0+C_n^1 1^{n-1} x^1+\cdots\cdots+C_n^n 1^0 x^n}.$

$\Rightarrow C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n=32$

$\Rightarrow n=\log_2 32=5$

4. 已知向量$\vec{a}=(2,5,1)$，$\vec{b}=(4,m,5)$，若$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，则实数m的值为 -2.

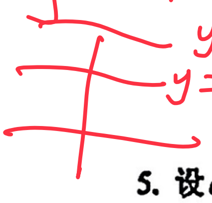
$8+5m+5=3$

$m=-2$

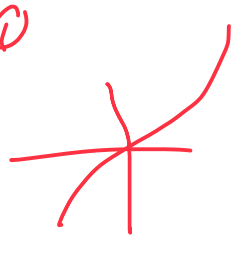
$y=c$ 常值

$y=2$

$y=1$



① $f(-x)=-x^3$



②

$[-1,1]$

5. 设$a,b\in\mathbb{R}$，$f(x)=x^3+3\sin x+b$.若函数$y=f(x)$是定义在$[-a,2a-1]$上的奇函数，

则$a+b=$ 1.

奇 奇 0

$-a=1-2a$

$\Rightarrow a=1$

$\underline{1+0=1}$

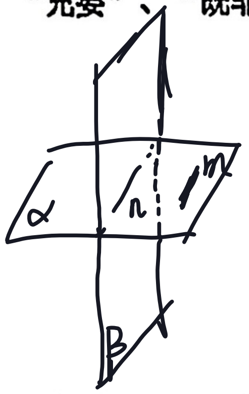
$a=1,\ b=0$

② $f(x)$奇 $f(x)=-f(-x)$

$f(-x)=-f(x)$

$\cancel{(-x)^3+3\sin(-x)+b=-x^3-3\sin x-b} \Rightarrow b=0$

6. 已知m、n为空间中两条不同的直线，α、β为两个不同的平面，若$m\subset\alpha$，$\alpha\cap\beta=n$，则$m // n$是$m // \beta$的___充要___条件.（填：“充分非必要”、“必要非充分”、“充要”、“既非充分又非必要”中的一个）



$\sin(-x)=-\sin x$

“充要”、“既非充分又非必要”中的一个）

7. 某景点对30天内每天的游客人数（单位：万人）进行统计，得到样本的茎叶图（如右图所示），则该样本的第75百分位数是___51___

1	25	2
2	0233	4
3	124489	6
4	5557788 9	8
5	0011479	
6	178	

$30\times 75\% = 30\times 0.75 = 22.5 \to 23$

提出所有数据 阅卷时一看就算对.

8. 已知复数z_1和复数z_2满足$z_1+z_2=3+4i$，$\overline{z_1}-\overline{z_2}=-2+i$（i为虚数单位），则$|z_1^2-z_2^2|=$___$5\sqrt{5}$___

$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$

$z_1+z_2=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i=3+4i \Rightarrow \begin{cases}a+c=3\\ b+d=4\end{cases}$

$\overline{z_1}-\overline{z_2}=a-bi-(c-di)=(a-c)+(d-b)i=-2+i \Rightarrow \begin{cases}a-c=-2\\ d-b=1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ c=\frac{5}{2}\end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases}d=\frac{5}{2}\\ b=\frac{3}{2}\end{cases}$

$z_1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$　$z_2=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i$

$z_1^2=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}i$　$z_2^2=\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+\frac{25}{2}i=\frac{25}{2}i$

$|z_1^2-z_2^2|=|-2+\frac{3}{2}i-\frac{25}{2}i|=|-2-11i|=\sqrt{4+121}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

分离变量法

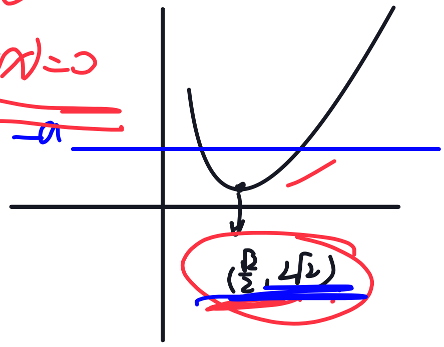
$D: x>0$

$\boxed{2x+\frac{1}{x}} \ge 2\sqrt{2x\cdot\frac{1}{x}}$

$f'(x)=0$ 有2解

9. 设 $a\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2+ax+\ln x$，若函数 $y=f(x)$ 存在两个不同的极值点，则 a 的取值范围为 $(-\infty,-2\sqrt2)$.

$f'(x)=0$



$f'(x)=2x+a+\frac{1}{x}=0$ 有两解.

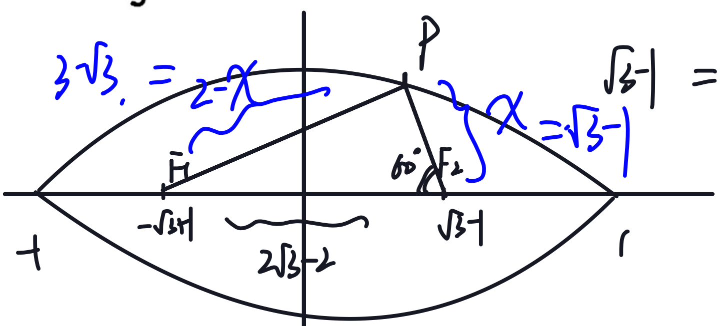
$\Rightarrow$ 分离：$-a=2x+\frac{1}{x}$ 有两解 $\Rightarrow$ 数形结合：

$2x^2=1 \Rightarrow x=\frac{\sqrt2}{2}$ $(\frac{\sqrt2}{2}, 2\sqrt2)$

$\Rightarrow -a>2\sqrt2 \Rightarrow a<-2\sqrt2$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

10. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，P 为椭圆上一点，且 $\angle PF_2F_1=\frac{\pi}{3}$，若此椭圆的离心率为 $\sqrt3-1$，则 $\angle PF_1F_2$ 的大小为 $\frac{\pi}{6}$.



$\sqrt3-1=e=\frac{c}{a} \Rightarrow$ 赋值法令 $a=1$，$c=\sqrt3-1$

定义 $\Rightarrow |PF_1|+|PF_2|=2a=2$

$\quad 2-x \qquad x$

$\Rightarrow$ 余弦定理：$\cos60°=\frac{(2\sqrt3-2)^2+x^2-(2-x)^2}{2\times(2\sqrt3-2)\cdot x}$

$\Rightarrow x=\sqrt3-1$

$\cos\angle PF_1F_2 = \cdots = \frac{\sqrt3}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6}$

13. 下列抛物线中，焦点坐标为 $(0,\frac{1}{8})$ 的是（ C ）

A. $y^2=\frac{1}{2}x$　　B. $y^2=\frac{1}{4}x$　　C. $x^2=\frac{1}{2}y$　　D. $x^2=\frac{1}{4}y$

焦点在y轴正半轴

$x^2=\frac{1}{2}y$

正数

$\frac{1}{2}/4=\frac{1}{8}$

14. 一个不透明的盒子中装有若干个红球和5个黑球，这些球除颜色外均相同．每次将球充分搅匀后，任意摸出1个球记下颜色后再放回盒子．经过重复摸球足够多次试验后发现，摸到黑球的频率稳定在0.1左右，则据此估计盒子中红球的个数约为（ B ）

A. 40个　　B. 45个　　C. 50个　　D. 55个

x

$\frac{5}{x+5}=\frac{1}{10} \Rightarrow x=45$

频率＝概率

大数定律

（抛硬币例子）

17.（本题满分14分，第1小题满分6分，第2小题满分8分）

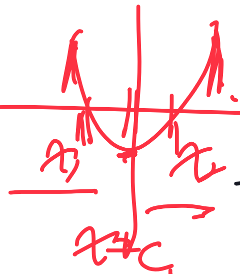
已知 $f(x)=a\sin\omega x+b\cos\omega x(\omega>0)$，若定义在R上的函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 π，且对任意的 $x\in\mathrm{R}$，都有 $f(x)\le f(\frac{\pi}{12})=4$．

$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$

①

（1）求实数 a,b 的值；

（2）设 $x_1,x_2\in(0,\pi)$，当 $x_1\ne x_2$ 时，$f(x_1)=f(x_2)=\cancel{-2}$，求 x_1+x_2 的值．



(1) ① $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi \Rightarrow \omega=2.$

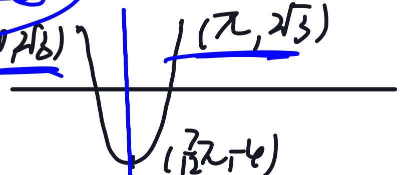
② $\sqrt{a^2+b^2}=4 \Rightarrow a^2+b^2=16$

③ $a\sin\frac{\pi}{6}+b\cos\frac{\pi}{6}=4 \Rightarrow \frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=4 \Rightarrow a+\sqrt{3}b=8$

$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2\sqrt{3} \end{cases}$

(2) $f(x)=2\sin 2x+2\sqrt{3}\cos 2x=4\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

$c\to\frac{1}{2}$　$s\to\frac{\sqrt{3}}{2}$



$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$

$x=\frac{7}{12}\pi.$

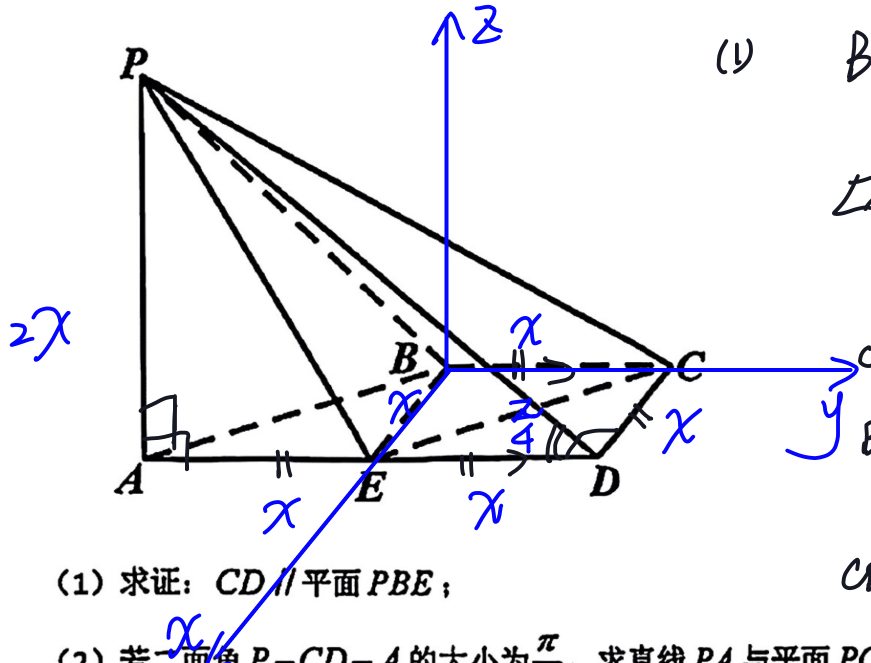
$x_1+x_2=\frac{7}{12}\pi\times 2=\frac{7}{6}\pi$

-4

a　b　c

18. （本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle ADC=\angle PAB=\frac{\pi}{2}$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD$．$E$ 为棱 AD 的中点，异面直线 PA 与 CD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{2}$．



(1) $BC \underline{\parallel} ED$

$\Downarrow$

▱ $BCDE$

$\Downarrow$

$CD \parallel BE$

$BE \subset$ 面 PBE

$\Downarrow$

$CD \parallel$ 面 PBE.

（1）求证：$CD\parallel$ 平面 PBE；

（2）若二面角 $P-CD-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$，求直线 PA 与平面 PCE 所成角的正弦值．

$\Downarrow$ what?

(2)

$\left.\begin{array}{l} CD\perp PA \\ CD\perp AD \\ AD\cap AP=A \end{array}\right\} \Rightarrow CD\perp$ 面 $PAD \Rightarrow \left.\begin{array}{l} CD\perp PD \\ AD\perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow$ 二面角 $P-CD-A=\angle PDA=\frac{\pi}{4}$

$\vec{PA}=(0,0,-2x)$ $\vec{PE}=(0,x,-2x)$ $\vec{EC}=(-x,x,0)$

$\vec{n}=(m,n,p)$

$\begin{cases} x\cdot n-2x\cdot p=0 \\ -x\cdot m+x\cdot n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ p=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\vec{n}=(1,1,\frac{1}{2})$

$\sin\theta=\cos\langle\vec{PA},\vec{n}\rangle=\left|\frac{\vec{PA}\cdot\vec{n}}{|\vec{PA}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{-x}{2x\cdot\frac{3}{2}}\right|=\frac{1}{3}$

19．（本题满分 14 分，第 1 小题满分 8 分，第 2 小题满分 6 分）

某企业招聘员工，指定“英语听说”、“信息技术”、“逻辑推理”作为三门考试课程，有两种考试方案.

方案一：参加三门课程的考试，至少有两门及格为通过；

方案二：在三门课程中，随机选取两门，并参加这两门课程的考试，两门都及格为通过.

假设某应聘者参加三门指定课程考试及格的概率分别是 p_1,p_2,p_3（$p_i\in(0,1),i=1,2,3$），且三门课程考试是否及格相互之间没有影响.

（1）分别求该应聘者选方案一考试通过的概率 T_1 和选方案二考试通过的概率 T_2；

（2）试比较该应聘者在上述两种方案下考试通过的概率的大小，并说明理由.

(1) $T_1=(1-p_1)p_2p_3+(1-p_2)p_1p_3+(1-p_3)p_1p_2+p_1p_2p_3=p_2p_3+p_1p_3+p_1p_2-2p_1p_2p_3$

$T_2=\frac{1}{3}p_1p_2+\frac{1}{3}p_2p_3+\frac{1}{3}p_1p_3=\frac{1}{3}(p_1p_2+p_2p_3+p_1p_3)$

(2) $T_1-T_2=\frac{2}{3}(p_1+p_2+p_3)-3p_1p_2p_3$ ✗ 作差

$\frac{T_1}{T_2}=\frac{p_2p_3+p_1p_3+p_1p_2-2p_1p_2p_3}{\frac{1}{3}(p_1p_2+p_2p_3+p_1p_3)}=3-\frac{6p_1p_2p_3}{(p_1p_2+p_2p_3+p_1p_3)}$

$=3-\frac{6}{\underbrace{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}}_{>3}}\in(1,3)$? >1 ✓ 作比

$\in(0,2)$

$(-2,0)$.

$T_1>T_2$ 应选第一种