1 Домашняя работа(Мироев Д.Ш.)

1. Эквивалентны ли следующие факты?

   (a) $f = \Theta(g)$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = \mathcal{O}(1)$

   Из (b) следует (a):

   - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = C(>0)$
   - $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : \left|\frac{f(n)}{g(n)} - C\right| < \varepsilon$
   - $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : -\varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - C < \varepsilon$
   - $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : C - \varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < C + \varepsilon$
   - $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : (C-\varepsilon)g(n) < f(n) < (C+\varepsilon)g(n)$
   - $\exists N, C_1(>0), C_2(>0) \forall n > N\ : (C-\varepsilon)g(n) < f(n) < (C+\varepsilon)g(n)$
   - $f(n) = \Theta(g(n))$

   Но из (a) не следует (b). Пример:

   $f(n) = n \bmod 2$
   $g(n) = 1$

   $n \bmod 2 = \Theta(1)$,
   но $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n \bmod 2}{1}$ не существует.

2. Дайте ответ для двух случаев $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$:

   Рассуждения будут аналогичны для двух случаев.

   (a) Если в определении $\mathcal{O}$ опустить условие про $\mathbb{N}$ (т.е. оставить просто $\forall n$), будет ли полученное определение эквивалентно исходному?
   $\exists N, C(>0)\ \forall n \geqslant N : f(n) \leqslant C \cdot g(n)$
   Рассмотрим $A = \max\{\frac{f(n)}{C\cdot g(n)} \mid n < N\}$
   и $C_1 = C \cdot A$.
   Тогда $\exists C_1(>0)\ \forall n\ : f(n) \leqslant C_1 \cdot g(n)$.
   При $n \geqslant N$ это очевидно. Рассмотрим $n < N$:
   $f(n) = (C \cdot g(n)) \cdot \frac{f(n)}{C\cdot g(n)} \leqslant (C \cdot g(n))A = C_1 \cdot g(n)$
   Ответ: можно.

   (b) Тот же вопрос про o.
   Рассмотрим пример $f(n) = n$ и $g(n) = n^2$.
   $\forall C(>0)\ \exists N\ \forall n(>N) : n < Cn^2$
   $\forall C(>0)\ \exists N\ \forall n(>N) : n - Cn^2 < 0$
   $\forall C(>0)\ \exists N\ \forall n(>N) : n(1 - Cn) < 0$
   $\forall C(>0)\ \exists N\ \forall n(>N) : 1 - Cn < 0$
   $\forall C(>0)\ \exists N\ \forall n(>N) : n > \frac{1}{C}$
   Отсюда $N = \left\lceil \frac{1}{C} \right\rceil$
   Ответ: нельзя.

3. Продолжим отношение "$\preceq$" на функциях до отношения на классах эквивалентности по отношению "$\sim$" эквивалентности введённому на паре. Правда ли, что получится отношение линейного порядка? То есть $\forall x, y : (x \preceq y) \vee (y \preceq x)$.

   В классе мы доказали разумность определения "$\preceq$" для классов эквивалентности по отношению "$\sim$", то есть

   $\forall f, f'(f \sim f')\forall g, g'(g \sim g') : (f \preceq g) \to (f' \preceq g')$.

   Поэтому можно вместо отношения на классах рассмотреть отношение на представителях. Но для функции "$\preceq$" не является отношением линейного порядка:

   $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{если n-чётн.} \\ \text{n}, & \text{если n-нечётн.} \end{cases}$

   $g(n) = \begin{cases} 1, & \text{если n-нечётн.} \\ \text{n}, & \text{если n-чётн.} \end{cases}$

   $f \neq \mathcal{O}(g)$ и $g \neq \mathcal{O}(f)$.

   Значит и для классов "$\preceq$" не является отношением линейного порядка.

4. Покажите, что: $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow f(n) + g(n) = \Theta(f(n))$.

   Доказательство:

   $g(n) = o(f(n)) \Leftrightarrow \forall C(>0)\exists N\forall n(>N) : g(n) < C \cdot f(n)$
   $f(n) + g(n) = \Theta(f(n)) \Leftrightarrow \exists N, C_1(>0), C_2(>0)\forall n(>N) : C_1 f(n) \leqslant f(n) + g(n) \leqslant C_2 f(n)$
   $C_1 = 1, C_2 = 2$