Комбинаторика
Домашнее задание 4:
Рекуррентные соотношения и числа Каталана

Денис Мирзоев

1

1.1 $a_{n+2} = 2a_{n_1} - a_n$

$$a_{n+2} = 2a_{n_1} - a_n$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$D = 4 - 4 = 0$$
$$x_{1,2} = 1$$
$$a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot n \cdot 1^n = c_1 + c_2 n$$
$$\begin{cases} 2 = c_1 \\ 3 = c_1 + c_2 \end{cases}$$
$$c_2 = 1$$

Ответ: $a_n = 2 + n$.

1.2 $a_{n+2} = 2\sqrt{2}a_{n+1} - 4a_n$

$$a_{n+2} = 2\sqrt{2}a_{n+1} - 4a_n$$
$$x^2 = 2\sqrt{2}x + 4 = 0$$
$$D = 8 - 16 = -8$$
$$x_{1,2} = \frac{2\sqrt{2} \pm i2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$$
$$a_n = c_1(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^n + c_2(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^n$$
$$2 = c_1(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^0 + c_2(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^0$$
$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = 2 - c_2 \\ 1 = c_1(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) + c_2(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$1 = (2 - c_2)(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) + c_2(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$$
$$1 = 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) - c_2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) + c_2(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$$
$$1 - 2\sqrt{2} - i2\sqrt{2} = -c_2 2i\sqrt{2}$$
$$c_2 = \frac{1 - 2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}}{2i\sqrt{2}} = i^{-1}(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1) - 1$$
$$c_1 = 3 - i^{-1}(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1)$$

Пусть $t = i^{-1}(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1)$. Тогда

$$c_1 = 3 - t$$

$$c_2 = t - 1$$

Ответ: $a_n = (3 - t)(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^n + (t - 1)(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^n$.

2

$$a_{n+5} = -5a_{n+4} + 81a_{n+1} + 405a_n$$
$$x^5 + 5x^4 - 81x - 405 = 0$$
$$(x - 3)(x + 3)(x + 5)(x^2 + 9) = 0$$
$$\text{корни:}\{3, -3, -5, 3i, -3i\}$$

Ответ: $a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-3)^n + c_3 \cdot (-5)^n + c_4 \cdot (3i)^n + c_5 \cdot (-3i)^n$.

3

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 6 \cdot 3^n$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x_{1,2} = \{2, 3\}$$

Будем искать частное решение вида $cn3^n$.

$$a_n = c_1 2^n + c_2 3^n + cn3^n$$
$$c(n + 2)3^{n+2} = 5c(n + 1)3^{n+1} - 6cn3^n + 6 \cdot 3^n | : 3^n$$
$$c(n + 2)9 = 5c(n + 1)33 - 6cn + 6$$
$$9c(n + 2) - 15c(n + 1) + 6cn - 6 = 0$$
$$c(9n + 18 - 15n - 15 + 6n) = 6$$
$$3c = 6$$
$$c = 2$$

Ответ: $a_n = c_1 2^n + c_2 3^n + 2n3^n$.

4

$$a_0 = 1000$$
$$a_{n+1} = \frac{105}{100}a_n + 500$$
$$a_{n+1} = \frac{21}{20}a_n + 500$$
$$20a_{n+1} = 21a_n + 10000$$
$$20c = 21c + 10000$$
$$c = -10000$$
$$20x - 21 = 0$$
$$x = \frac{21}{20}$$
$$a_n = c_1\left(\frac{21}{20}\right)^n - 10000$$
$$1000 = c_1 - 10000$$
$$c_1 = 11000$$

Ответ: $a_n = 11000\left(\frac{21}{20}\right)^n - 10000$.

5

$$a_{n+1} = a_n + 2n; a_1 = 2$$
$$x^{n+1} = x^n$$
$$x = 1$$

Будем искать частное решение вида $cn(n-1)$.

$$c(n+1)n = cn(n-1) + 2n$$
$$cn(n+1-n+1) = 2n$$
$$2nc = 2n$$
$$c = 1$$
$$a_n = c_1 + n(n-1)$$
$$2 = a_1 = c_1 + 1(1-1) = c_1$$
$$c_1 = 2$$

Ответ: $a_n = 2 + n(n-1)$.

6

a_n - число путей длины n.
b_n - число путей длины n заканчивающихся на L.
$b_n = a_{n-1}$
c_n - число путей длины n заканчивающихся на U.
$c_n = a_{n-1}$
d_n - число путей длины n заканчивающихся на R.
$d_n = a_n - b_n - c_n = a_n - a_{n-1} - a_{n-1} = a_n - 2a_{n-1}$
$a_n = 2b_{n-1} + 3(c_{n-1} + d_{n-1}) =$
$= 2a_{n-1} + 3(a_{n-2} + (a_{n-1} - 2a_{n-2})) =$
$= 3a_{n-1} - a_{n-2}$

Выведем явную формулу.
$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$
$x^2 - 3x + 1 = 0$
$x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
$a_n = c_1(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n$
$a_0 = 1 \quad a_1 = 3$
$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2 \\ 3 = c_1\frac{3+\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{2-\sqrt{5}}{2} \qquad |\cdot 2 \end{cases}$$
$6 = (1 - c_2)(3 + \sqrt{5}) + c_2(3 - \sqrt{5})$
$6 = 3 + \sqrt{5} - c_2(3 + \sqrt{5}) + c_2(3 - \sqrt{5})$
$c_2(3 + \sqrt{5} - 3 + \sqrt{5}) = -3 + \sqrt{5}$
$c_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$
$c_1 = \frac{2\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$
Ответ: $a_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n$

7

Рассмотрим правильную скобочную последовательность длины $2n$. Будем идти по ней слева направо. Встретив открывающую скобку сделаем шаг $(1, 0)$, встретив закрывающую сделаем шаг $(0, 1)$. Так как последовательность правильная, то в итоге мы прийдём в (n, n) и не пересечём $y = x$.

Понятно, что сделав обратную замену отразков на скобки, мы получим исходную последовательность.

Мы установили биекцию между множеством правильных скобочных последовательностей длины $2n$ и количеством путей из $(0, 0)$ в (n, n) ограниченных указаными правилам. Число первых описывается числами Каталана, а значит и вторых.

8

Построим рекуррентное выражение для числа a_n расстановок скобок в выражениях такого вида.

Первая скобка может заключать от 1 до n множителей(если бы она могла заключать $n+1$ членов, то число расстановок скобок было бы неограничено). Если первая скобка заключает k множителей, то число вариантов расстановки скобок внутри неё равно a_{k-1}. Число же вариантов расстановки скобок для оставшихся множителей равно a_{n-k}. То есть общее число расстановок скобок равно

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}a_{n-k}$$

Заменим индекс суммирования на $i = k - 1$.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i}$$

Заметим, что это равно числу Каталана C_n. Кроме того $a_1 = 1 = C_1$.

9

Обозначим a_n - число путей Моцкина длины n.

Путь Моцкина длины 1 есть только один: $(1, 0)$.

Путей Моцкина длины 2 есть два: $(1, 0)(1, 0)$; $(1, 1)(1, -1)$.

Найдём количество путей Моцкина длины n. Рассмотрим первый шаг. Можно пойти вправо, вариантов пройти оставшийся путь будет a_{n-1}, а можно пойти наверх. В последнем случае нам рано или поздно придётся сделать шаг вниз. Обозначим за k число шагов до возврата на ось абсцисс. Число вариантов пройти путь после шага наверх тогда можно посчитать как $a_k a_{n-2-k}$, где a_k это число вариантов сделать k шагов без спусков вниз, а a_{n-2-k} - число вариантов сделать оставшиеся $n-2-k$ шагов. Тогда общее количество путей Моцкина можно выразить как

$$a_n = a_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k a_{n-2-k} \qquad a_0 = 1 \qquad a_1 = 1$$

10

Для первого шага есть два варианта: вправо и вправо вверх. Если сделали шаг вправо, то есть S_{n-1} способов пройти остаток пути. Если сделали шаг вправо вверх, то рано или поздно нам нужно будет сделать шаг вверх, чтобы вернуться на диагональ. Пусть до возврата на диагональ король сделает $i+1$ шагов($+1$ это шаг вверх). Число способов сделать i шагов до возврата на диагональ: S_i. Число способов сделать оставшиеся до (n, n) шаги: S_{n-1-i}.

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} S_i S_{n-1-i} \qquad S_0 = 1 \qquad S_1 = 2$$