1 Мирзоев Денис

1. Рассмотрим отдельно n-разрядные числа, где n от 2 до 6. Количество n-разрядных чисел, удовлетворяющих условию, равно 9^n. Объяснение: первый разряд не может быть нулём, значит есть девять вариантов, следующий разряд может быть любым кроме предыдущего, то есть опять девять вариантов, и так n раз. Любое одноразрядное число удовлетворяет условию. Их десять.
   Ответ: $\sum_{n=2}^{6} 9^n + 10 = 597871$

2. Выложим книги в ряд. Количество способов раскрасить их в три цвета так, что есть хотя бы одна книга каждого цвета, в этом случае равно количеству способов расставить две перегородки между ними, не располагая более одной перегородки между соседними книгами.
   Ответ: $\binom{12-1}{2} = \binom{11}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$

3. Достаточно выбирать две клетки не лажащие на одной линии. Они будут задавать все четыре угла этого прямоугольника. Первую ячейку выбираем любую. Есть $7 \times 7 = 49$ вариантов. Вторая ячейка не должна лежать в том же столбце или строке. Значит для второй ячейки на $7 + 7 - 1$ вариантов меньше(-1, потому что первую ячейку исключили два раза). Порядок выбора ячеек не важен, поэтому произведение нужно будет разделить на два.
   Ответ: $(49 \cdot (49 - 13))/2 = (49 \cdot 36)/2 = 882$

4. - $\left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right)$ - число способов разложить k шаров по $n + 1$ ящику.
     Рассмотрим случай, когда в ящик с номером n + 1 попало i шаров. Таких случаев столько же, сколько и способов разложить k - i шаров по оставшимся n ящикам, то есть $\left(\!\!\binom{n}{k-i}\!\!\right)$. В таком случае число способов разложить k шаров по $n+1$ ящику можно иначе посчитать как сумму $\sum_{i=0}^{k} \left(\!\!\binom{n}{k-i}\!\!\right)$
   -

5. $k = a_1 + \ldots + a_n$
   $s = s_1 + \ldots + s_n$
   $s \leq k$
   $a_i \geq s_i$

   Кажется, что эта задача близка задаче о числе способов разложить k шаров по n ящикам. Однако ограничение $a_i \geq s_i$ не позволяет провести полную аналогию. Модифицируем задачу, для проведения аналогии.

   $k - s = (a_1 - s_1) + \ldots (a_n - s_n)$
   $k - s = a'_1 + \ldots + a'_n$

   Количество разложений числа $k - s$ равно искомому количеству разложений и равно числу способов разложить $k - s$ шаров по n ящикам. Ответ: $\left(\!\!\binom{n}{k-s}\!\!\right)$.

6. Количество способов выбрать одного офицера из трёх: $\binom{3}{1}$.
   Количество способов выбрать двух сержантов из шести: $\binom{6}{2}$.
   Количество способов выбрать двадцать рядовых из шестидесяти: $\binom{60}{20}$.
   Применяем правило суммы.
   Ответ: $\binom{3}{1} + \binom{6}{2} + \binom{60}{20}$

7. - Количество бинарных строк длины n, содержащих k единиц?
     Оно равно количеству способов выбрать k мест из n, то есть $\binom{n}{k}$.
   - Количество бинарных строк длины n, содержащих k единиц, так что единицы не стоят рядом?
     Задача эквивалентна расстановке k перегородок между $n - k$ нулями. Перегородки не стоят рядом. Их количество равно количеству способов выбрать k мест между нулями из $n - k$, то есть $\binom{n-k}{k}$.

8. Количество k-разрядных чисел из 8 и 9 меньших миллиона: 2^k.
   Нам подойдут числа не более 6-разрядов, т.к. с увеличением числа разрядов числа увеличиваются и наименьшее 7-миразрядное число 8888888 уже больше миллиона.
   Ответ: $\sum_{k=1}^{6} 2^k$.

9. Заполним сначала две одинаковые буквы слова, а потом остальные. Выбрать позиции для двух одинаковых букв можно $\binom{6}{2}$ способами. Выбрать букву для этих позиций можно шестью способами. В слове осталось заполнить четыре буквы. Количество способов сделать это равно 6^4.
   Ответ: $\binom{6}{2} \cdot 6 \cdot 6^4$

10. Будем рассматривать кости исключительно в такой ориентации: левая половина содержит не меньше точек, чем правая. Можно расположить их таким образом:

```
(0 0)
(1 0) (1 1)
(2 0) (2 1) (2 2)
(3 0) (3 1) (3 2) (3 3)
(4 0) (4 1) (4 2) (4 3) (4 4)
```

   Количество костей с левой половиной содержащей i точек равно $i+1$. Общее количество костей тогда можно посчитать как сумму

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1) = \frac{1+(n+1)}{2} \cdot (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = N$$

   Тогда пар костей будет $\frac{N(N-1)}{2}$.

   Рассмотрим теперь количество пар костей из обобщённого домино, которые можно приложить друг к другу. Если число точек слева и справа различно, то количество костей, которые можно приставить равно $2n$, в противном случае(дупель) оно равно n. Тогда общее число пар подходящих друг к другу костей можно посчитать как $\frac{n^2+(N-n)\cdot 2n}{2}$. Первое слагаемое — количество пар включающих дупели(их n штук), второе количество пар не включающих дупели(таких костей $N-n$ штук). Делим на два, потому что посчитали все пары два раза.