Комбинаторика
Домашняя работа 3

Мирзоев Денис

1

Выберем первую цифру: 5 нечётных и 4 чётных варианта(нельзя ноль). Все остальные это пять цифр той же чётности, что и первая(по пять вариантов в любом случае).

Ответ: $(5+4) \cdot 5^5$

2

Каждый студент может выбрать любое подмножество спецкурсов кроме пустого: $2^4 - 1$. Студенты выбирают независимо.

Ответ: $(2^4 - 1)^8$.

3

Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Слагаемое, которое делится на 3 не влияет на делимость суммы, поэтому можно найти количество четырёхзначных чисел, делящихся на 3. Всего четырёхзначных чисел: 10^4, делится на 3 каждое третье.

Ответ: $\frac{10^4-1}{3}$.

4

Всего булевых функций от n аргументов: 2^{2^n}

Не зависят от одной переменной: $\binom{n}{1} \cdot 2^{2^{n-1}}$. Выбираем одну переменную из n. Перенумеруем переменные так, чтобы она была первой. Значения функции в нижней половине таблицы должны повторять значения функции в верхней. То есть функция определяется верхней половиной значений из таблицы. В таблице 2^n строк. Половина это $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

Не звисят от двух переменных: $\binom{n}{2} \cdot 2^{2^{n-2}}$. Выбираем две переменные из n. Перенумеруем переменные так, чтобы эти две были первыми. Значения функции в нижней половине таблицы должны повторять значения функции в верхней. Значения функции в каждой второй четверти должны повторять значения предыдущей. То есть функция определяется верхней четвертью значений из таблицы. в таблице 2^n строк. Четверть это $\frac{2^n}{4} = 2^{2^n-2}$.

Не зависят от i переменных: $\binom{n}{i} \cdot 2^{2^{n-i}}$.

Зависят от всех переменных: “все”−“не зависят от одной”−“не зависят от двух”−...−“не зависят от всех”, то есть

$$2^{2^{n-1}} - \sum_{i=1}^{n-1} 2^{2^{n-i}}$$

$$= 2^{2^{n-1}} - \sum_{i=1}^{n-1} 2^{2^i}$$

5

Выберем грибы для первой связки. Способов это сделать: $\binom{60}{15}$. Осталось 45 грибов, поэтому для второй связки вариантов $\binom{45}{15}$. Для третьей свзки выбираем уже из 30-ти. Вариантов собрать вторую связку $\binom{30}{15}$. Оставшиеся 15 пойдут в четвёртую связку. Порядок выбора связок важен, поэтому нужно ещё разделить на число перестановок.

Ответ: $\frac{\binom{60}{15}\binom{45}{15}\binom{30}{15}}{4!}$.

6

$S(n,3) = \frac{3^n - 3(2^n - 2) - 3}{6}$

Слева записано число неупорядоченых разбиений n-множества на 3 блока.

Это число можно вычислить через упорядоченные разбиения. Упорядоченных разбиений n-множества на m блоков в $m!$ раз больше, чем неупорядоченных, поэтому под дробью 6, то есть 3!.

Сверху записано число упорядоченных разбиений. Первое слагаемое это число упорядоченных разделений n-множества на 3 блока, то есть все разбиения n-множества на 3 блока, плюс разделения, в которых присутствуют пустые блоки. Пустых блоков может быть два или один.

Второе слагаемое это количество упорядоченных разбиений из n-множества на 3 блока с одним пустым блоком. Пустой блок выбирается тремя способами(множитель 3), остальные два дужно заполнить n элементами. Осталось выбрать разбиение n-множества на 2 блока. Делаем это по похожей схеме: из общего количества разделений вычитаем количество содержащих пустые блоки. Таких разделений 2^n из них 2 имеют пустой блок(минус 2).

Последнее слагаемое это количество разделений содержащих два пустых блока. Их три: кладём все объекты в один блок.

7

$n = 2$: $0 = S(2,0) = \frac{2(2-1)(2-2)(3\cdot 2-5)}{24} = 0$

Допустим при числах $\leq n$ формула верна. Докажем, что она верна и при $n+1$.

$$\begin{aligned}
S(n+1, n-1) &= S(n, n-2) + (n-1)\cdot S(n, n-1) && (1)\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24} + (n-1)\cdot S(n, n-1) && (2)\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24} + (n-1)\cdot \binom{n}{2} && (3)\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24} + \frac{n(n-1)^2}{2} && (4)\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5) + 12n(n-1)^2}{24} && (5)\\
&= \frac{n(n-1)((n-2)(3n-5) + 12(n-1))}{24} && (6)\\
& && (7)
\end{aligned}$$

$$= \frac{n(n-1)(3n^2 - 11n + 10 + 12n - 12))}{24} \tag{8}$$

$$= \frac{n(n-1)(3n^2 + n - 2)}{24} \tag{9}$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)(3n-2)}{24} \tag{10}$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)(3(n+1)-5)}{24} \tag{11}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)-1)((n+1)-2)(3(n+1)-5)}{24} \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

8

k^n — число неупорядоченных разделений из n по k.

Его можно посчитать как сумму по числу непустых блоков: от 0 до n. Посчитаем число неупорядоченных разделений, содержащих i непустых блоков. Выберем неупорядоченное разбиение из n по i $S(n,i)$ способами. Дадим каждому блоку порядковый номер в разделении $(k)_i$ способами, первому один из k, второму один из $k-1$ и так далее. Блоки, соответствующие неиспользованных номерам будут пустыми. То есть мы посчитали число неупорядоченных разделений, содержащих i непустых блоков: $(k)_i \cdot S(n,i)$.

9

Посчитаем число число разбиений n-множества. Их можно разделить на два вида: содержащие одноэлементные блоки и несодержащие. Первые посчитаны в первом слагаемом. Установим биекцию между вторыми и разбиениями $n+1$-множества без одноэлементных блоков, которые посчитаны во втором слагаемом.

Возьмём разбиение n-множества, содержащее хотя бы один одноэлементный блок. Сольём их в один и добавим в новый блок элемент, которого нет в исходном множестве. Получили разбиение $(n+1)$-множества без одноэлементных блоков. Операция обратима: имея разбиение $(n+1)$-множества без одноэлементных блоков, с зафиксированным элементом, можно удалить его из множества, а все элементы, содержащиеся в том же блоке раскидать по новым одноэлементным блокам. Тем самым мы получим исходное разбиение n-множества с теми же одноэлементными блоками.

10

Установим биекцию между разбиениями $(n-1)$-множества и разбиениями n-множества, несодержащими последовательно идущих чисел в одном блоке.

Возьмём разбиение $(n-1)$-множества. Добавим во множество $x_1, \dots, x_{n-1}$ число x_0. Сопоставим ему разбиение n-множества, несодержащее последовательно идущих чисел в одном блоке. x_0 положим в отдельный блок. Если x_i и x_{i+1} находятся в одном блоке, перенесём x_{i+1} в блок к x_0. Заметим, что даже в случае $i = 1$ x_0 и x_{i+1} имеют не последовательные номера. Будем выполнять эту операцию, пока есть блоки, содержащие последовательные элементы. В итоге получим разбиение n-множества, несодержащее последовательно идущих элементов в одном блоке. Выполним операцию в обратном порядке. Рассмотрим блок, содержащий элемент x_0. Удалим его из множества, а все элементы x_i из этого блока перенесём в блоки к элементам x_{i-1}. Получили исходное разбиение.