Induktion

Sonntag, 30. April 2017 11:55

Aufgabe 1.4a):

Satz:

Für alle $n \in \mathbb{N} \geq 1\ gilt$: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

BEWEIS:

Induktionsanfang:

Für $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = (2-1) = 1 = 1^2 = n^2$

Indukitonsvorraussetzung:

Angenommen, es gilt $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N} \geq 1$.

Induktionsschritt:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)\sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2n+1) \overset{\text{IV.}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \qquad q.e.d.$$

Aufgabe 1.4b):

Satz:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0\ gilt$: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

BEWEIS:

Induktionsanfang:

Für n = 1: $F_2F_0 - F_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$

Indukitonsvorraussetzung:

Angenommen, es gilt $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N} \geq 1$.

Induktionsschritt:

$Da\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$:

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_n(F_{n+1} + F_n)) - ((F_{n+1}(F_n + F_{n-1})) = -F_n + F_{n-1} + F_{n+1}F_n + F_n^2$$

$$= -F_{n-1}F_{n+1} + F_n^2 = -1(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2) \overset{\text{IV.}}{=} -1(-1^n) = (-1)^{n+1}\ q.e.d$$