Wachstum 2.4

Freitag, 5. Mai 2017 14:03

<u>Aufgabe 2.4</u>

a)

Gross O bedeuted, dass f(n) nicht schneller wächst als g(n):
Nun addiert man zwei Funktionen, die zusammen *nicht schneller wachsen* als die Funktion h(n).
Dann wird eine dieser Funktion erst recht nicht schneller wachsen als g(n), da ja ein negatives Wachstum *nach Definition* ausgeschloßen ist.

b)

Selbe Begründung wie a). Wenn schon bei der a) die Aussage für ein UND gezeigt wurde, gilt es erst recht für ein ODER.

c)

Beweis durch **Gegenbeispiel**:
f(n): x
(wächst langsamer als x^2)
g(n): x^2 * -1^x
(liegt mal drunter mal drüber, hier stimmt also Aussage nicht)
h(n): x^2
f(n) - g(n) => wächst nicht schneller als h(n), da sich "x rauskürzt"
und deshalb x^2 dominiert, linke Seite der Implikation stimmt

d)

42 < (log2n)^7 < 0.1n < (nlog2n)^2 < n^15 < n^3^3n < 1,1^1,1n

e)

Satz:

Für alle $n \in N\ mit\ \ n > 0 gilt:$ $\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j} \leq 3 - \frac{2n}{2^n}$

BEWEIS:

Induktionsanfang:

Für n = 1:

$$- \sum_{j=0}^{1} \frac{j}{2^j} = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leq 2 = 3 - \frac{2}{2} = 3 - \frac{2 \cdot 1}{2^1}$$

Indukitonsvorraussetzung: $\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j} \leq 3 - \frac{2n}{2^n}$

Angenommen, es gilt für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N} \geq 1$.

Induktionsschritt: n -> n + 1

$$\sum_{j=0}^{n+1} \frac{j}{2^j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \overset{I.V}{\leq} \left(3 - \frac{2n}{2^n}\right) + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 3 - \frac{2n}{2^n} - \frac{n+1}{2^n \cdot 2}$$

$$= 3 - \frac{4n}{2^n \cdot 2} - \frac{n+1}{2^n \cdot 2} = 3 - \frac{4n - n - 1}{2^n \cdot 2} =$$

$$3 - \frac{3n-1}{2^n \cdot 2} \leq 3 - \frac{2n+2}{2^n \cdot 2} = 3 - \frac{2(n+1)}{2^n \cdot 2} = 3 - \frac{2(n+1)}{2^{(n+1)}} \qquad q.e.d$$

3n-1 ist für n >= 1 immer >= als 2n + 2
=> somit wird von der 3 immer ein größerer Wert abgezogen
=> $3 - \frac{3n-1}{2^n \cdot 2}\ ist\ kleiner\ gleich\ 3 - \frac{2n+2}{2^n \cdot 2}$

f)

Man betrachte die Funktionen für n -> ∞

lim (n -> ∞): 3 - 2n/2^n = 3 - 0
=> Die Funktionen sind nach oben mit <= 3 beschränkt
lim (n -> ∞): $\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j} = 0$
=> Die Funktioen sind von unten mit >= 0 beschränkt

=> "Sandwich-Theorem":
die Funktion wächst also nicht schneller als O(1)