

Магнитоэлектричество

1) Эл-маг теория света. Свет - эл-маг волна, скорость $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, Понятие, что такое Максвелла и мат ур-я. т.е. можно погружаться.

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{издукция маг поля (вектор)}$$

$$\text{напр-сть} \quad \text{Эл. пол} \text{ rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \leftarrow \text{издукция Эл поля}$$

$$\text{напр-сть маг поля} \quad \text{несткость тока (проводимости)}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad \text{несткость зарядов}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{Формула } \vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{вектор погружения (за. дипольного момента ср. объема б-ва)}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{напомин-ст} \\ (\text{маг. дип. момента ср. объема б-ва}) \end{array}$$

Матер. ур-я:

$$\vec{D}(t, \vec{r}) = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}(t, \vec{r})$$

ϵ, μ -

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \mu_0 \epsilon_0 \vec{H}(t, \vec{r})$$

ϵ, μ

$$[\vec{j}(t, \vec{r}) = \mu_0 \vec{E}(t, \vec{r})]$$

\vec{P}, \vec{j} - материальное вектора

\vec{E}, \vec{B} - полевые вектора, \vec{D}, \vec{H} - материально-полевые вектора

Среда должна иметь след. свойства:

1) линейность

2) $\vec{D} \uparrow \vec{E}$ - пропорциональность (сущ. ср. вд. среды не зависит от направления)

ϵ, μ - скаляр

3) безразмеричность

4) неподвижность

5) локальность

6) беграчность

7) однородность

8) стационарность ($\epsilon, \mu = \text{const}$)

9) отсутствие токов проводимости и свободных зарядов ($\rho = 0, j = 0$)

? 10) переносимость

Волновое ур-е. Принцип суперпозиции.

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{B} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\mu_0 \epsilon_0 \vec{H})$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = [\vec{\nabla}[\vec{\nabla} \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{E}) - (\vec{\nabla} \vec{\nabla}) \vec{E} =$$

$$= \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_0} \Delta \vec{E} \quad \text{- волновое ур-е}$$

E_1, E_2 - решения ур-е $\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ - тоже реш-е

(световое волное взаимодействия); $\vec{E} = \sum_j \vec{E}_j$ - принцип суперпозиции

Волновое ур-е: $\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_0} \Delta \vec{f}, \quad (\vec{f} \in \vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{P}, \vec{J})$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N_A}{A}; \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{C}{M}$$

в вакууме

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} = \nu^2 \Delta \vec{f} \quad \text{- волновое ур-е для звуков в воздухе,}$$

Принцип суперпозиции:

Рез-т нескольких одновр. воздействий представляет собой простую сумму рез-тов, возбуждающих каждому воздействию в отдельности.

Бегущие звуковые волны

Звуковая волна способна передавать энергию в пр-ве

Передача энергии от токка к токке в звуковом волнах связана с тем, что звуки электр. и маг. напряж-стей находятся в одной фазе. Такая волна наз-ась бегущей.

$$\left(n = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon \mu} \right)$$

Плюсовые волны.

Прям. волна - плюсость - поверхность одинаково волнистая в каждой точке которой фаза одинаковая,

$$f(t, \vec{r}) = f(t, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$f(t, z) = f(t \mp z/v)$ - реш-е ур-е плоской волны

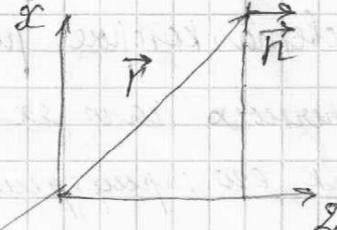
"-" расп-я лежит ОZ; "+" расп-я против ОZ.

Если $f(t \mp z/v) = \text{const}$, то $d(t \mp z/v) = 0 \Rightarrow dt \mp dz/v = 0$

$\Rightarrow v$ - скорость расп-я волны.

$$z = \pm \vec{r} \cdot \vec{v}$$

$$f(t, \vec{r}) = f(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v})$$



Гармоническая волна

$$f(t, z=0) = \cos(\omega t + \varphi_0), \text{ где } \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

ω -крутизна волны, φ_0 - нач. фаза в т. $z=0$.

$$f(t, z) = \cos(\omega t - \frac{\omega}{v}z + \varphi_0), \text{ где } k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T} - \text{волновое число}$$

kz - номер сплазы

$$f(t, \vec{r}) = \cos(\omega t - \underbrace{k \vec{r} + \varphi_0}_{\psi(\vec{r})}), \text{ где } \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{r} = \frac{\omega}{v} \vec{r} - \text{волновой вектор}$$

Реш-е. пред-е

$$\cos \alpha = \operatorname{Re} e^{i\alpha} \quad e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$f(t, \vec{r}) = a \operatorname{Re} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)} = \operatorname{Re} (\underbrace{a e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)}}_{\text{коэф. амплитуды}} e^{i\omega t}) = \operatorname{Re} (\hat{f}(t, \vec{r})) =$$

$$= \frac{\hat{f}(t, \vec{r}) + \hat{f}^*(t, \vec{r})}{2} \quad \hat{f}(t, \vec{r}) = \hat{A} e^{i\omega t}$$

$$\hat{A}(\vec{r})$$

Сферическая волна волновой фронт - сфера.

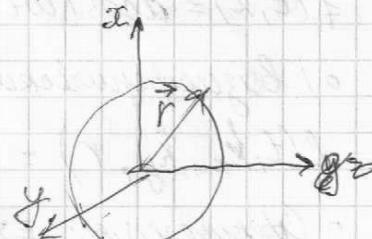
$$f(t, r) = \frac{f(t - \frac{r}{v})}{r} - \text{общее реш-е волнового ур-я в сущ-ве сферической волны}$$

Гармоническая волна

$$f(t, r_0) = \frac{\cos(\omega t - r_0/v + \varphi_0)}{r_0}$$

$$f(t, r) = \frac{\cos(\omega t - r/v + \varphi_0)}{r}$$

$$\text{Реш-е. пред-е: } f(t, r) = \operatorname{Re} \left(\underbrace{\frac{a}{r} e^{i(r/v + \varphi_0)}}_{\text{коэф. амплитуды}} e^{i\omega t} \right) = \operatorname{Re} (\hat{f}(t, r))$$



2) Световые пучки и импульсы

Пучок - престрансивно - модулированный волна, с масштабом модуляции $d \gg l \sim 0,5 \cdot 10^6 \text{ м}$

Импульс света - модулированный во времени волна, с масштабом модуляции $\tau \gg T \sim 2 \cdot 10^{-15} \text{ с}$.

Пучки: В оптическом диапазоне могут формироваться направленные пучки света, которое распределяется преимущественно вдоль одной оси.

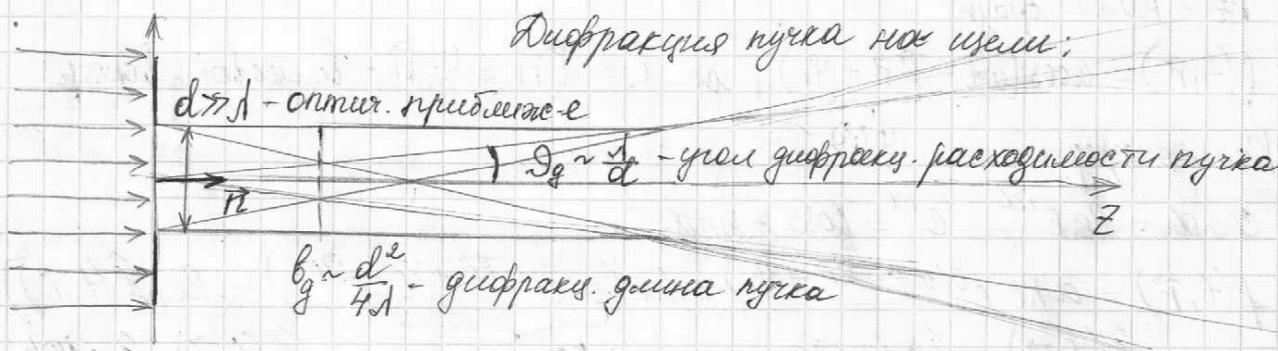
В непрерывных пучках амплитуда резко спадает от центрального пучка к его периферии.

Импульсы: Эта же штука - световое бегущее, которое имеет ограниченное время.

Квазимоющая и квазисферическая гармоническая волна

Границное условие: $f(t, x, y, 0) = a(x, y) \cos(\omega t + \varphi_0)$, $d \gg l \sim 0,5 \cdot 10^6 \text{ м}$.

Гармон. волны:



• Квазимоющая: $z \ll b_g$ (зона лин. оптики)

$$f(t, x, y, z) = a(x, y) \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

• Плоская: $z \ll b_g$, $R = \sqrt{x^2 + y^2} \ll d$

$$f(t, z) = a \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

• Квазисферическая: $z \gg b_g$ (далекая зона дифракции)

$$f(t, k_x, k_y, r) = \frac{a(k_x, k_y)}{r} \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

• Сферическая: $z \gg b_g$, $R \ll \theta_{gr} \sim \frac{dr}{d}$

$$f(t, r) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

• Пиоска с убывающей амплитудой: $Z \gg bg$, $R \ll \sqrt{R\lambda}$

$$f(t, z) = \frac{a}{Z} \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

• Пиоска: $Z \gg bg$, $R \ll \sqrt{\rho\lambda}$, $\Delta Z \ll Z$:

$$f(t, z) = a \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

Квазигармон. волно (импульсное)

всплесковое

Границное условие: $f(t, x, y, 0) = a(t, x, y) \cos(\omega t + \varphi_0(t))$,

$\tau \gg T \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ с}$, τ - длительность импульса

Квазимонокроматическое импульс - импульс, при котором
всплесковое условие: $\frac{I}{\delta I} \gg 1$, I - средняя яркость всплеска

$\frac{I}{\delta I}$ - отношение длины всплеска

$$\frac{I}{\delta I} = \frac{\bar{w}}{\delta w} = \frac{k}{\delta k} \gg 1$$

Энергетика световых пучков и импульсов

$$E(t, x, y, z) = E_0(x, y) \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \quad \text{плотность}$$

$$I(x, y) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon v E^2(x, y), \quad I = \langle S \rangle = \langle \epsilon_0 \epsilon v E^2 \rangle \quad \text{энергия}$$

$$P = \iint_{-\infty}^{+\infty} I(x, y) dx dy = I_{\text{эфф}} \sigma \quad I_{\text{эфф}} = \frac{P}{\tau} \quad \begin{matrix} \text{всплеск} \\ \text{яркость} \\ \text{плотности} \end{matrix}$$

P - мощность пучка; σ - площадь поперечного сечения пучка (импульса)

$$E(t, x, y, z) = E_0 \left(t - \frac{z}{v}, x, y \right) \cos \left(\omega t - kz + \varphi_0 \left(t - \frac{z}{v} \right) \right)$$

$\tau \gg T$

Чтобы засечь импульс $\tau_p > \tau$, τ_p - время разрешения прибора

$$I\left(t - \frac{z}{v}, x, y\right) = E_0^2 \left(t - \frac{z}{v}, x, y \right) \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon v$$

Энергия свободного импульса:

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\iint_{-\infty}^{+\infty} I\left(t - \frac{z}{v}, x, y\right) dx dy \right) dt = I_{\text{эфф}} \sigma \tau = P_{\text{эфф}} \sigma \tau$$

$$I_{\text{эфф}} = \frac{W}{\sigma \tau} \quad P_{\text{эфф}} = \frac{W}{\tau}$$

$$E_{\text{эфф}} = \sqrt{\frac{2 I_{\text{эфф}}}{\epsilon_0 \epsilon v}}$$

3) Волновое ур-е:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(t, \vec{r})}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \vec{E}(t, \vec{r})}{\partial r^2}$$

Общее представление: к воле падающих волн:

$$f(t, \vec{r}) = f(t - \frac{(\vec{n}, \vec{r})}{v}) + f(t + \frac{(\vec{n}, \vec{r})}{v}) + f(t + \frac{(\vec{n}, \vec{r})}{v})$$

Супротивление двух падающих волн, движущихся в противоположных направлениях.

Св-ва падающих волн:

$$1) \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Док-во:

$$\text{rot } \vec{E} = [\vec{\nabla} \vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{1}{v} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & \dot{E}_z \end{vmatrix} = - \frac{1}{v} [\vec{n} \vec{E}] = - \vec{B}$$

$$\left(\frac{\partial E_{xyz}(t - \frac{(\vec{n}, \vec{r})}{v})}{\partial x} = \dot{E}_{xyz}(-\frac{n_x}{v}) \right)$$

$$[\vec{n} \vec{E}] = v \vec{B}$$

Аналогично и для $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

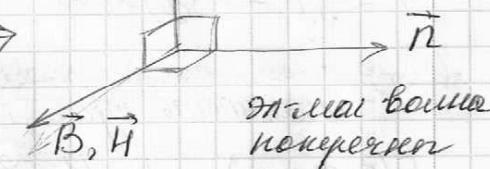
$$1) \vec{D}, \vec{E}$$

$$\boxed{[\vec{n} \vec{E}] = v \vec{B}}$$

$$(\vec{n} \vec{B}) = 0$$

$$\boxed{[\vec{n} \vec{H}] = -v \vec{D}}$$

$$(\vec{n} \vec{D}) = 0$$



$$2) \boxed{E(t, \vec{r}) = v B(t, \vec{r})} \Rightarrow E \text{ и } B \text{ изменяются синхронно (синфазно)}$$

$$\text{М.р. } E = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} B = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} H$$

$$\sqrt{\epsilon_0} E(t, \vec{r}) = \sqrt{\mu_0} H(t, \vec{r})$$

Поперечная схема.

- характеристика поперечных волн, описывающая поведение вектора колеблющихся величин в плоскости, перпендикулярной радиальному направлению.

• Если при распространении волны ориентация неизменяется — линейная поперечная.

(Колебание возникает происходящее в одной плоскости)



- Физический смысл - конец вектора \vec{E} описывает движение в пространстве колебаний
- $E_x = a_x \sin \omega t$
- $E_y = a_y \sin(\omega t + \Delta\varphi)$
- $0 \leq \Delta\varphi \leq 2\pi$
- Δφ - фаза
-
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ - движение по вектором
правильный номер -
 $\sin \varphi > 0$
- $E_x = a_x \sin \omega t$
- $E_y = a_y \cos \omega t$
- $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ против часовой
направления
 $\sin \varphi < 0$
- Круговая -

(4) Поток и плотность энергии.

$$dV = dr \cdot r d\theta \cdot dz$$

Этот объем (плоское!) имеет однородность

$$dW = W v dt dr$$

Объемная плотность энергии

Формула потока энергии:

$$S = \frac{dW}{dt \cdot d\sigma} = Wv$$

$\vec{S} = S \vec{n}$ - вектор Умова

Объемная плотность энергии единиц поверхности:

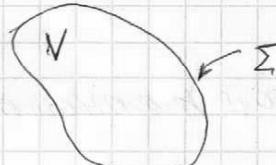
$$W = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2} + \frac{(\vec{H}, \vec{B})}{2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} = \epsilon \epsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2$$

$\vec{S} = EH \vec{n} = [\vec{E}, \vec{H}]$ - вектор Умова - Пойнтинга

T.K. $S = Wv = \epsilon \epsilon_0 E^2 v = \epsilon \epsilon_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu_0}} EH / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = EH$

Интенсивность - плотность потока энергии за единицу разрешимости прибора $I = \langle S \rangle$

Закон изменения энергии единиц поверхности:



$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$(\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E}) - (\vec{E}, \operatorname{rot} \vec{H}) = -(\vec{j}, \vec{E}) - (\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) - (\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

$$\operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] = -q - \frac{\partial W}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{s} = -q - \frac{\partial W}{\partial t}} \text{ - гаусс. форма}$$

Объемная плотность токовой мощности

$$\boxed{-\frac{\partial W}{\partial t} = Q + \oint \vec{s} d\sigma} \quad (\oint \vec{s} d\sigma = \int_V \operatorname{div} s dV)$$

↑ токовая мощность
интегр. форма
закона

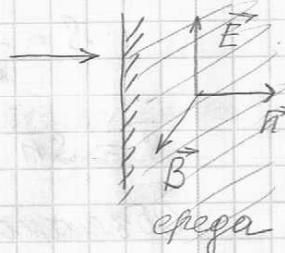
(5) Числос. форма

$$E = pc, p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar w}{c} = \hbar k \Rightarrow \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Давление и плотность числового излучения

Закон Ампера скорость заряда q

$$\begin{aligned} F_q &= q \vec{E} + q [\vec{u} \vec{B}] = [\vec{n} \vec{E}] = v \vec{B} = q \vec{E} + \frac{q}{v} [\vec{u} [\vec{n} \vec{E}]] = \\ &= q \vec{E} + \frac{q}{v} \vec{n} (\vec{u}, \vec{E}) = q \vec{E} + \frac{P_q}{V} \vec{n} - \frac{q}{v} \vec{E} u_n \end{aligned}$$



Среднее по времени:

$$\langle F_q \rangle = q \underbrace{\langle \vec{E} \rangle}_0 + \underbrace{\frac{P_q}{V} \vec{n}}_0 - \frac{q}{v} \underbrace{\langle \vec{E} \rangle \langle u_n \rangle}_0$$

$$\Rightarrow \sum_{q(dV)} \langle F_q \rangle = \frac{\sum_{q(dV)} P_q}{V} \vec{n}; \quad \text{Итогов. норм. по времени: } \sum_{q(dV)} P_q = I d\omega$$

$$\text{для всех зарядов: } d\vec{F} = \sum_{q(dV)} \langle F_q \rangle = \frac{I}{V} d\sigma \vec{n}$$

Давление света; если волна полностью поглощена:

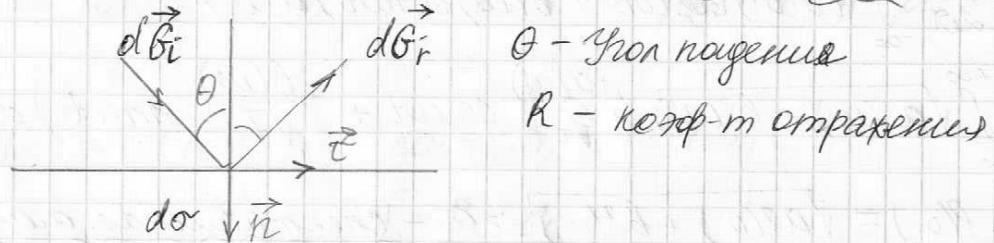
$$P = \frac{dF}{d\sigma} = \frac{I}{V} = \langle w \rangle$$

Числовое давл.:

$$d\vec{F} dt = \vec{g} V dt d\sigma \Rightarrow$$

$$\vec{g} = \frac{1}{V^2} \vec{n} = \frac{\langle w \rangle}{V} \vec{n} \text{ - объемная плотность числового}$$

Зависимость давления на набегающее среды



θ - угол наклона

R - коэф-кт сопротивления

Изменение давления "привнесенное" средой набегающей в единицу времени dt :

$$d\vec{G}_i = \vec{g}_i \cdot do_i v dt = \frac{\langle w_i \rangle}{v} \vec{n}_i do \cos \theta dt$$

Изменение давления "уносимое" средой набегающей в единицу времени dt :

$$d\vec{G}_r = \vec{g}_r \cdot do_r v dt = \frac{\langle w_r \rangle}{v} \vec{n}_r do \cos \theta dt$$

Давление на среду:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \frac{d\vec{G}_i - d\vec{G}_r}{dt} = \frac{\langle w_i \rangle \vec{n}_i do \cos \theta dt - \langle w_r \rangle \vec{n}_r do \cos \theta dt}{dt} = \\ &= (\langle w_i \rangle \vec{n}_i - \langle w_r \rangle \vec{n}_r) \cos \theta = \\ &= \frac{I}{v} (\vec{n}_i - R \vec{n}_r) \cos \theta \end{aligned}$$

Проекции:

$$p_n = \langle w_i \rangle (1+R) \cos^2 \theta = \frac{I}{v} (1+R) \cos^2 \theta$$

$$p_\tau = \langle w_i \rangle (1-R) \cos \theta \sin \theta = \frac{I}{v} (1-R) \cos \theta \sin \theta$$

6) Метод спектрального описание волнистых волн

Любую звуковую волну можно представить как суммацию простых колебаний

Комплексные числа и косинусы

Частота:

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_0^\infty (a(w) \cos wt + b(w) \sin wt) dt$$

коэф-ктов:

$$a(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos wt dt \quad b(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin wt dt$$

$$\begin{cases} a(w) = a(-w) \\ b(-w) = -b(w) \end{cases} \quad \begin{cases} a(w=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \\ b(w=0) = 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha(\omega) \cos \omega t + \beta(\omega) \sin \omega t) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)} \left(\frac{\alpha(\omega)}{\sqrt{\omega}} \cos \omega t + \frac{\beta(\omega)}{\sqrt{\omega}} \sin \omega t \right) d\omega$$

также $f(\omega) = \sqrt{\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)} > 0$ - спектральная амплитуда
 $f(\omega) = f(-\omega)$

$\varphi(\omega)$ - спектральная фаза

$$\cos \varphi(\omega) = \frac{\alpha(\omega)}{f(\omega)}, \quad \sin \varphi(\omega) = \frac{\beta(\omega)}{f(\omega)}; \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)}$$

Конст. спектр. амплитуда $f(i\omega)$:

$$f(i\omega) = \alpha(\omega) - i\beta(\omega) = f(\omega) \cos \varphi(\omega) - i f(\omega) \sin \varphi(\omega) =$$

$$= f(\omega) e^{-i\varphi(\omega)}$$

$$f(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(i\omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] - \text{предное преобр-е Фурье}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega t} e^{-i\omega t} d\omega \Rightarrow \boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) e^{i\omega t} d\omega}$$

обратное преобр-е Фурье

Свойства:

$$1) f^*(i\omega) = (\alpha(\omega) - i\beta(\omega))^* = \alpha(\omega) + i\beta(\omega) = \alpha(-\omega) - i\beta(-\omega) =$$

$$= f(-i\omega) = f^*(i\omega)$$

Кроме, $|f(i\omega)|^2 = f^2(\omega) = \alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)$ - спекр-я интенсивн

2) $f(t)$ - реална, тогда $\beta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = 0$ и

$$f(\omega) = |\alpha(\omega)|, \quad |f(i\omega)|^2 = \alpha^2(\omega)$$

$$\sin \varphi(\omega) = 0, \quad \cos \varphi(\omega) = \frac{\alpha(\omega)}{|\alpha(\omega)|} = \pm 1$$

$$\varphi(-\omega) = \varphi(\omega); \quad \varphi = \begin{cases} 0, & \alpha(\omega) > 0 \\ \pi, & \alpha(\omega) < 0 \end{cases}$$

3) $f(t)$ - неравномерная, тогда $\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = 0$ и
 $f(\omega) = |f(\omega)|$, $|f(i\omega)|^2 = f^2(\omega)$
 $\sin \varphi(\omega) = \frac{f(\omega)}{|f(\omega)|}$, $\cos \varphi(\omega) = \frac{\alpha(\omega)}{|f(\omega)|} = 0$
 $\varphi(-\omega) = \varphi(\omega)$, $\varphi = \begin{cases} +\frac{\pi}{2}, & f(\omega) > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & f(\omega) < 0 \end{cases}$

⑦ Св-ва преобраз. Фурье

- Соотн-е между временем импульса и шириной спектра

Дл-ся импульса Δt - интервал времени, в течение которого импульс (φ -я $f(t)$) существует от нач-я до конц.

Шириной спектра $\Delta\omega$ - интервал частот, в котором спектральная амплитуда $f(\omega)$ или спектральная плотность $|f(i\omega)|^2$ (амплитудной $f(\omega)$ или частотной $|f(i\omega)|^2$ спектр) существенно отлична от нуля.

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t}, \text{ а точнее:}$$

$$\Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{f(t=0)} \quad \Delta\omega = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(i\omega) d\omega}{f(i\omega=0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) d\omega}{\alpha(0)}$$

$$\Delta t \Delta\omega = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt}{f(t=0)} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(i\omega) d\omega}{f(i\omega=0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(i\omega) d\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt} = 2\pi$$

$$\Rightarrow \Delta t \Delta\omega = 2\pi ; \Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

- Симметрия спектров по частоте

$$\Delta t \gg T_0$$

Импульс Δt в виде квадратурного (между шир. во времени) ф-зии: $F(t) = f(t) \cos(\omega_0 t)$

$$F(iw) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos(\omega_0 t)) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \right) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i(w-w_0)t} + e^{-i(w+w_0)t}) dt = \frac{1}{2} [f(i(w-w_0)) + f(i(w+w_0))]$$

$\Delta t \gg T_0$, $\Delta w = \frac{2\pi}{\Delta t} \ll \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$

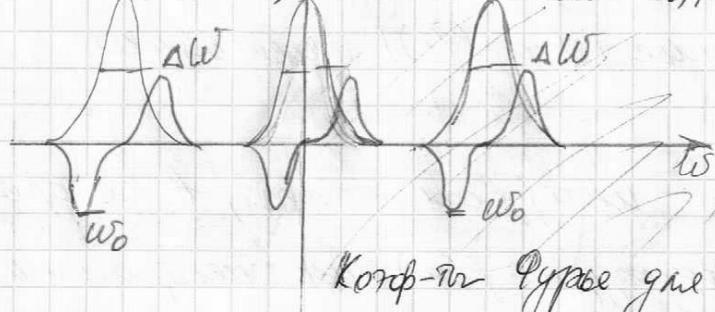
$w \neq 0$:

$$A(w) = \frac{1}{2} [a(w-w_0) + a(w+w_0)] \approx \frac{1}{2} a(w-w_0)$$

$$B(w) = \frac{1}{2} [b(w-w_0) + b(w+w_0)] \approx \frac{1}{2} b(w-w_0)$$

$$F(iw) = A(w) - iB(w) =$$

$$a(w-w_0), b(w-w_0) \uparrow a(w), b(w) \quad a(w-w_0), b(w-w_0)$$



Корр-рнр Фурье для функции $f(t)$

$$F(iw) \approx \frac{1}{2} f(i(w-w_0))$$

Спектр амплитуды;

Спектр интенсивности

$$F(w) \approx \frac{1}{2} f(w-w_0), \quad |F(iw)|^2 \approx \frac{1}{4} |f(i(w-w_0))|^2$$

$$\Phi(w) = \varphi(w-w_0)$$

Спектр. фаза

Принцип преобразования

Гармоническое колебание

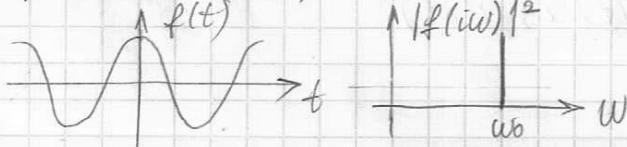
$$f(t) = f_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$f(iw) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}}{2} \right) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \pi f_0 (\delta(w-w_0) + \delta(w+w_0))$$

$$\text{При } w \geq 0 \quad f(iw) = \pi f_0 \delta(w-w_0)$$

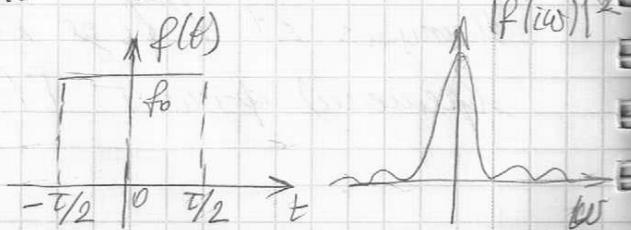


Применяя свойство импульса

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0, & t \notin \end{cases}$$

$$f(iw) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= f_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega t} dt = f_0 T \sin\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)$$



Непрерывные спектры

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(iw)|^2 dw}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(iw) e^{-iwt} dw \right)^* dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(iw) e^{-iwt} dw dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(iw) f(iw) dw = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(iw)|^2 dw = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |f(iw)|^2 dw \end{aligned}$$

Через симметрию и симметрическую непрерывность интегрирования
 $S(w)$ — спектральная функция [если $t \notin [0, \pi]$ то $E(t)=0$]

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi E^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi\pi} \int_0^{+\infty} |E(iw)|^2 dw = \int_0^{+\infty} S(w) dw$$

$$\Rightarrow S(w) = \frac{E(iw)}{\pi^2}; \quad dI = S(w) dw$$

Также \exists непрерывные моменты излучения $T_H \gg T_0$

$$E_H(t) \equiv 0 \text{ при } t \notin [0, T_H]$$

$$I = \lim_{T_H \rightarrow \infty} \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} E_H^2(t) dt = \lim_{T_H \rightarrow \infty} \frac{1}{T_H \pi} \int_0^{T_H} |E(iw)|^2 dw = \lim_{T_H \rightarrow \infty} \int_0^{T_H} S(w) dw$$

$$\Rightarrow S(w) = \lim_{T_H \rightarrow \infty} \frac{|E(iw)|^2}{\pi T_H}$$

8) Интерференция света

- явление перенесения цвета или общей интенсивности энергии при суперпозиции волны

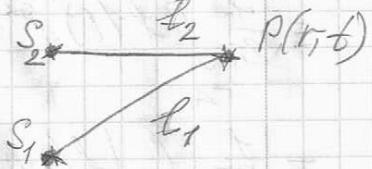
~~Когерентные волны - волны~~

Общие схемы и типы двухволновой интерференции.

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \langle \vec{E}^2(t) \rangle = I_1 + I_2 + 2 \langle \vec{E}_1(t) \vec{E}_2(t) \rangle}$$

↑
Интерф. вклад
($\epsilon_{\text{эл}} = 1$)



Когерентность

Когерентные колебания - колебания, между которыми существует разность фаз.

При концепции двух ког. пучков $\langle \vec{E}_1(t) \vec{E}_2(t) \rangle \neq 0 \Rightarrow I \neq I_1 + I_2$

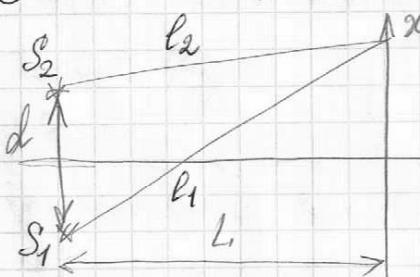
Для некогерентных пучков $\langle \vec{E}_1(t) \vec{E}_2(t) \rangle = 0 \Rightarrow I = I_1 + I_2$

Методы получения ког. пучков:

1) Метод генерации амплитуды (инт. Майкельсона)

2) Метод генерации временного отрыва (схема Юнга, дифракция Брэд, дифракция, дифр. по Френеле)

Интерференционные волны в схеме Юнга



$$E_1 = a_1 \cos(\omega t - k l_1 + \varphi_1) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$I_1 = \langle E_1^2(t) \rangle = \frac{a_1^2}{2} \Rightarrow a_1 = \sqrt{2I_1}$$

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2 \langle a_1 a_2 \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2) \rangle = \\ &= I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\Delta \omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = \\ \Rightarrow I &= I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi \end{aligned}$$

- типы интерференции

$$I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 \quad \Delta \varphi = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

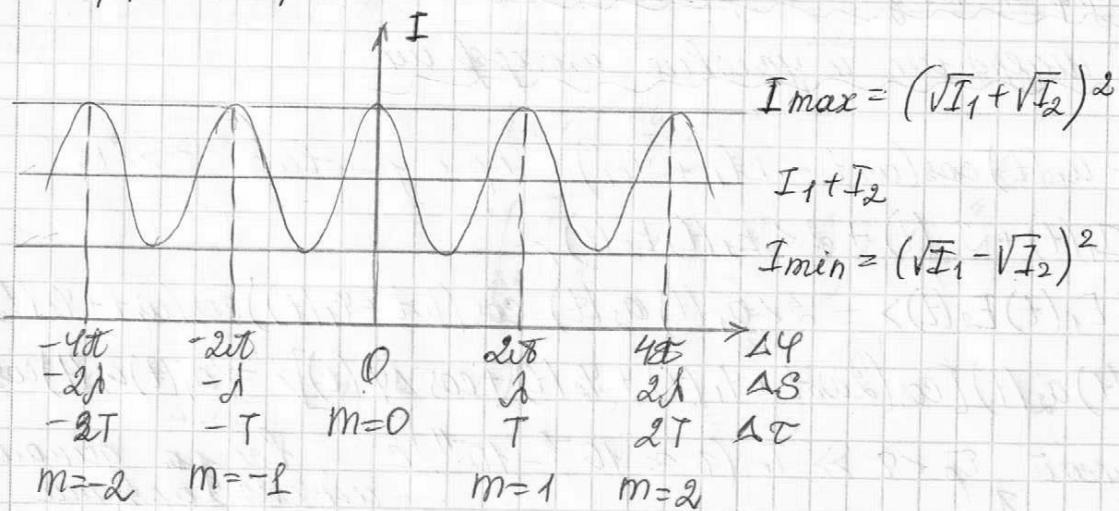
$$I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \quad \Delta \varphi = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -k(l_2 - l_1) + \varphi_{02} - \varphi_{01}, \Delta \delta = l_1 - l_2 - \text{разность хода}$$

$$\Delta \varphi = k \Delta s + \Delta \varphi_0 = w \Delta t + \Delta \varphi_0$$

m - порядок
интерференции

Интерференция света



$$\Delta \varphi_{\max} = m 2\pi$$

$$\Delta \varphi_{\min} = (m + \frac{1}{2}) 2\pi$$

$$\Delta S_{\max} = m \lambda$$

$$\Delta S_{\min} = (m + \frac{1}{2}) \lambda$$

$$\Delta t_{\max} = m T$$

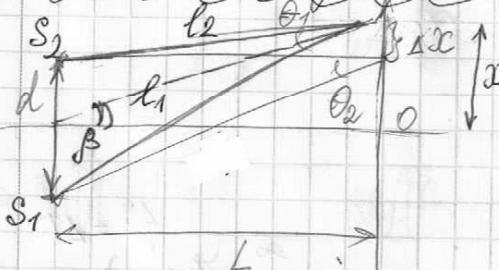
$$\Delta t_{\min} = (m + \frac{1}{2}) T$$

Вынужденное

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} - \text{затемнение волны}$$

Линейное и угловое затмение интерференции волн



$$L \gg d, x \gg \lambda$$

$$\ell_1^2 = L^2 + \left(\frac{d}{2} - x\right)^2$$

$$\ell_2^2 = L^2 + \left(\frac{d}{2} + x\right)^2$$

$$(\ell_1 - \ell_2)(\ell_1 + \ell_2) = 2x d \\ \Delta S \approx 2L$$

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{x d}{L} = x \theta, \text{ где } \theta - \text{угол сдвига волн}$$

$$\lambda = \frac{\Delta x d}{L}; \Delta x = \frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda}{\theta} - \text{линейный параметр сдвига волн}$$

$$\beta = \frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda}{d} - \text{угловая фаза}$$

(9) Интерференционная схема

Преимущества и недостатки интерференции

$$E_1 = a_1(t) \cos(\omega_0 t - kx_1 + \varphi_{01}) \quad \text{при условии } \tau \gg T_0$$

$$I = I_1(t) + I_2(t) + 2 \langle E_1(t) E_2(t) \rangle$$

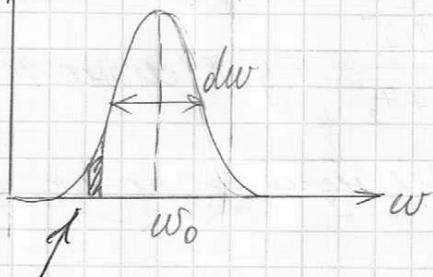
$$\begin{aligned} 2 \langle E_1(t) E_2(t) \rangle &= 2 \langle a_1(t) a_2(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_1(t)) \cos(\omega_0 t + \varphi_2(t)) \rangle = \\ &= \langle a_1(t) a_2(t) [\cos(2\omega_0 t + \varphi_1(t) + \varphi_2(t)) + \cos 2\varphi(t)] \rangle = \langle a_1(t) a_2(t) \cos 2\varphi(t) \rangle \end{aligned}$$

1) случай $\tau_p < \tau \gg T_0$ ($\tau \approx 10^{-8} - 10^{-11}$) с - всегда динамичное
изменение

2) случай $\tau_p > \tau \gg T_0$ - однократное измерение разности фаз -
одинаковые интерференции

Спектральное описание

$$S(w)$$



$$dI(w) = S(w)dw$$

$$dI_{int} = 2dI(w) \left(1 + \cos\left(\frac{w}{c}\Delta S\right) \right)$$

$$I_{int} = 2I_0 + 2 \int_0^{\infty} dI(w) \left(1 + \cos\left(\frac{w}{c}\Delta S\right) \right) = 2I_0 + 2 \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{w}{c}\Delta S\right) S(w) dw$$

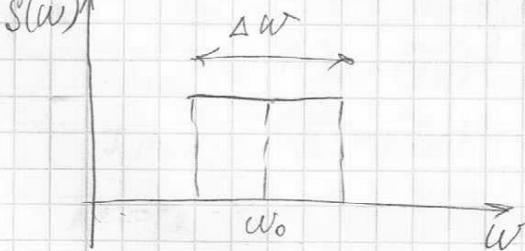
$$\frac{\Delta S}{c} = \Delta t$$

Преимущество метода генерации света в интерференции.

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{1}{I_0} \int_0^{\infty} S(w) \cos(\omega_0 t) dw$$

$$\text{здесь } I_0 = \int_0^{\infty} S(w) dw = \int_{w_1}^{w_2} S(w) dw = S_0 \Delta w - \text{к примеру}$$

$$S(w)$$



$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\omega) \cos(\omega_0 \Delta t) d\omega = \frac{I_0}{\Delta \omega} \frac{\sin(\omega_2 \Delta t) - \sin(\omega_1 \Delta t)}{\Delta t} =$$

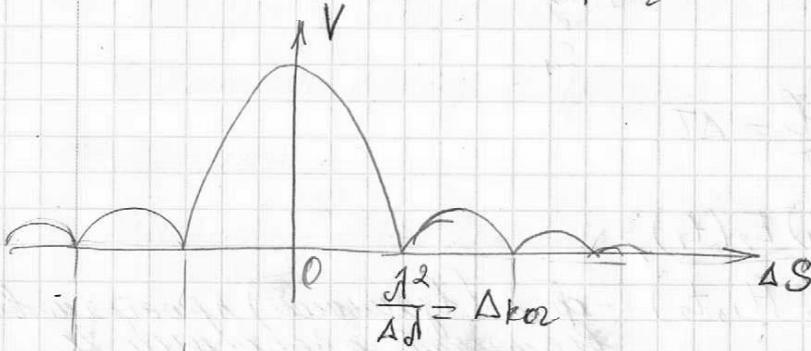
$$= I_0 \frac{2}{\Delta \omega \Delta t} \cos(\omega_0 \Delta t) \sin\left(\frac{\Delta \omega}{2} \Delta t\right)$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \underbrace{\frac{2}{\Delta \omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Delta \omega}{2} \Delta t\right) \cos(\omega_0 \Delta t)}_{\text{ко AS}}$$

$$J(\Delta) = \frac{2}{\Delta \omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Delta \omega}{2} \Delta t\right) = \text{sinc}\left(\frac{\Delta \omega}{2} \Delta t\right) \stackrel{!}{=} J(\Delta)$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{sinc}\left(\frac{\Delta \omega}{2} \Delta t\right) \cos(\omega_0 \Delta t)$$

$$V = |J(\Delta)| \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| \text{sinc}\left(\frac{\Delta \omega}{2} \Delta t\right) \right|$$



$$\frac{J_2}{J_1} = \Delta_{K02}$$

$$\frac{2\pi}{\Delta \omega} = T_{K02}$$

$$\Delta t$$

$$I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

$$I_1 + I_2$$

$$I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

$$\Delta t$$

Диаметр кор-смы — max разброс хода 2x выше, при которой еще наблюдается амперф-ис.

$$M_{\max} = \frac{T_{K02}}{\tau_0} \approx \frac{2\pi}{\Delta \omega} \frac{\omega_0}{\Delta t} = \frac{\omega_0}{\Delta \omega}$$

T_{K02} — max время задержки, при котором угол еще виден.

Временное описание

P_1 и P_2 коорд-ты

Есть непрер. экран с двумя отверстиями - источниками света за экраном - интерфер картина. Отв-е возвращают падающим в том числе могут сблизить. Тогда конец векторов $E_{1,2}$:
 $E_1(P_1, t+\tau)$ и $E_2(P_2, t)$ отличаются только моментами времени \leftarrow временное описание колебаний.

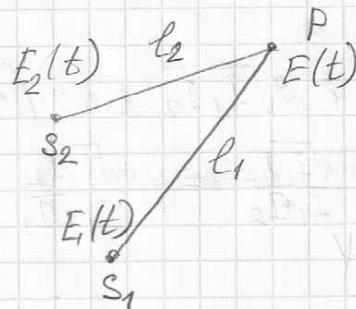
(10) След. (9)

Временное описание

$$E_1(t_p) = E_1\left(t - \frac{l_1}{v}\right)$$

$$E_2(t_2) = E_2\left(t - \frac{l_2}{v}\right)$$

$$t_2 - t_1 = -\frac{l_2}{v} + \frac{l_1}{v} = \frac{\Delta l}{v} = \Delta T$$



$$I = I_1 + I_2 + 2 \underbrace{\langle E_1(t_1) E_2(t_2) \rangle}_{B_{12}(t_1, t_2)}$$

$B_{12}(t_1, t_2)$ - ф-я (время) прохождение
временного колебания из
концов в точках t_1 и t_2 в t_1 и t_2

1) стат. случай

$$I = I_1 + I_2 + 2 \underbrace{\langle E_1(t) E_2(t + \Delta T) \rangle}_{B_{12}(\Delta T)}$$

2) конеч-е порождено одной автокорр-ей 1. приобр-ва

$$I_{1,2} = d_{1,2} I_0 = d_{1,2} \int_0^\infty S(w) dw, \quad E_{1,2} = \sqrt{d_{1,2}} E_0$$

$$B_{12}(\Delta T) = \langle \sqrt{d_{1,2}} E_0(t) \sqrt{d_{1,2}} E_0(t + \Delta T) \rangle = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_0} \langle E_0(t) E_0(t + \Delta T) \rangle$$

$$B(\Delta T) = \langle E_0(t) E_0(t + \Delta T) \rangle$$

ф-я временного автокорреляции колеб-я в одной иной
же 1. приобр-ва, отстоящих друг от друга на время
задержки ΔT

$$I(\Delta T) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{1}{I_0} B(\Delta T)$$

$C\bar{B} - \bar{C}e \quad B(\Delta t)$

1) $B(\Delta t=0) = \langle E_0(t) E_0(t) \rangle = I_0$

2) $B(-\Delta t) = B(\Delta t) = \langle E_0(t) E_0(t-\Delta t) \rangle = \langle E_0(t) E_0(t+\Delta t) \rangle = B(\Delta t)$
→ симметрия

3) $B(\Delta t > \tau_{\text{ко}}) = 0$

4) $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi w \Delta t}{2}\right) \cos(w \Delta t)$

Теорема Бинера - Хурума

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \neq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S(w) \cos(w \Delta t) dw$$

$$\Rightarrow B(\Delta t) = \int_0^\infty S(w) \cos(w \Delta t) dw = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty S(w) \cos(w \Delta t) dw$$

Обратное преобразование

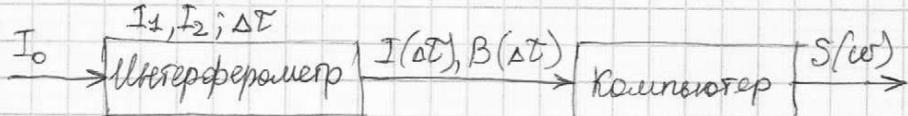
→ Показание:

$$S(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty B(\Delta t) \cos(w \Delta t) d(\Delta t)$$

$$\int B(\Delta t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty S(w) e^{i w \Delta t} dw$$

$$S(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty B(\Delta t) e^{-i w \Delta t} d(\Delta t)$$

Фурье-спектроскопия



$$\Delta t \geq \tau_k \cong \frac{2\pi}{\Delta w}$$

$$\Delta w > \frac{2\pi}{\Delta t}; \Delta w_{\min} \cong \frac{2\pi}{\Delta t_{\max}}$$

Разрешающая способность Фурье-спектрометра:

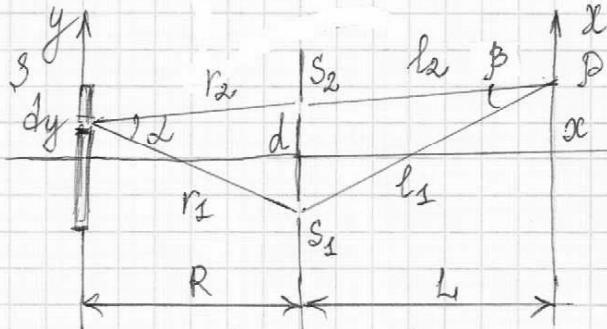
$$R = \frac{w_0}{\Delta w_{\min}} \cong \frac{\Delta w_{\min} < w_0}{\Delta f_{\min}}$$

$$R = \frac{w_0}{\Delta w_{\min}} = \frac{\Delta t}{T_0} \cdot \frac{\Delta t_{\min}}{\Delta t} = \frac{\Delta f_{\max}}{\Delta f_{\min}} \sim \frac{1}{0.5 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^6!$$

Максимальная

(11) Пространственная корреляция

4.1. Ур-е интегрерации



$$L \gg \alpha d; R \gg y, d.$$

$$\Delta r + \Delta l = dy + \beta x$$

$$\Delta \varphi = k \Delta r + k \Delta l = k dy + k \beta x \quad | \underline{w}$$

$$dI = dI_1 + dI_2 + 2\sqrt{dI_1 dI_2} \cos(k dy + k \beta x)$$

$$dI_{1,2} = \frac{I_1,2^2}{S} dy$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \frac{1}{S} \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \cos(k dy + k \beta x) dy = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \frac{1}{k \alpha S} \operatorname{sinc}\left(\frac{kds}{2}\right)$$

$$\cdot \frac{1}{2} \sin\left(\frac{kds}{2}\right) \cos(w_a t)$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$I(\Delta t) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{sinc}\left(\frac{kds}{2}\right) \cos(w_a t)$$

$$V(ds) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{kds}{2}\right) \right| - \text{const}(\Delta t, \Delta l, m, x)$$

$$\frac{kds}{2} < \pi l; \quad \frac{2\pi kds}{\lambda R^2} < \pi \Rightarrow \frac{ds}{R} < 1; \quad \frac{ds}{R} > 1$$

$$\bullet d < \frac{\pi R}{8} = \frac{1}{\Omega} = d_k - \text{ширина (погреш.) корр-ти}$$

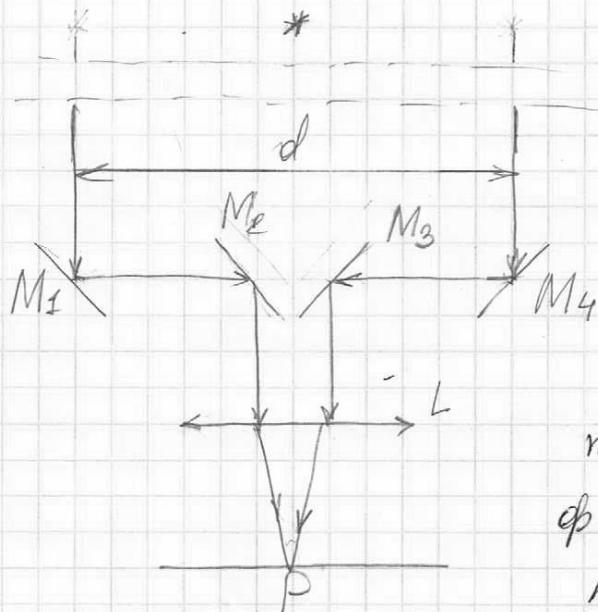
$$\frac{2\pi kds}{\lambda R^2} = \frac{\pi}{\Omega} \Rightarrow ds = \frac{\lambda R^2}{2\pi k} \Omega$$

$$\bullet \Omega < \frac{\lambda}{d} = \Omega_k - \text{граничная корр-ти}$$

$$\bullet S < \frac{dR}{d} = \frac{1}{\Omega} = S_{\max} - \text{максимальный радиус изображения}$$

$$\bullet \alpha < \frac{1}{S} = \alpha_{\max} - \text{максимальный угловой разрешение}$$

Звездной интерференционный картина



Ω - угловое расстояние звезд

В центре картины при max временной корреляции ф-я видимости определяется кросспиксель корреляции.

$$V(d) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{kds}{2}\right) \right| = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{kdl}{2}\right) \right|$$

$$V(d) = 0$$

$$\frac{kd}{2}\Omega = \pi \Rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{kdl} = \frac{\lambda}{dl}$$

Для нахождения углового расстояния между звездами:

$$\Delta r = ds = \frac{d}{R} \Delta S = d\Delta\Omega = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta\Omega = \frac{1}{2d}$$

- (12) ~~8~~ Основное существо звуковоковой интерференции
по интерференции

Характеристика

Универсальность β
и интерференции d

локализующее интерференционного картины

образование интерференционных картин

увеличение размера источника (S, Ω)

увеличение интерференционного спектра ΔS
(или $\Delta\Omega$)

Минимум углового расстояния
фронта звуковоковой интерференции
 $d \neq 0, \beta \neq 0 (d \neq 0)$ | $d \approx 0, \beta \approx 0 (d \approx 0)$

не локализуем

получаем от одного
источника источника

локализуем

от двух
источников

увеличение видимости
 $\Omega \leq \Omega_{\text{крит}} = \frac{1}{d}, S \leq S_{\text{max}}$

увеличение видимости
 $\Delta\Omega \leq \Delta\Omega_{\text{крит}} = \frac{2\pi}{\Delta W}, \Delta S \leq \Delta S_{\text{крит}}$

не уменьшает
видимость

уменьшает
анаморфозу

Метод деления времевого промежутка

• Биберкало Фрауне

В биберкале Фрауне для получения пространственного разделения световых пучков используется явление отражения света. Две линейные изображения \mathcal{Y} и \mathcal{Z} щелевого источника S образуются при отражении источникой световой волны от двух плоских зеркал M_1 и M_2 , расположенных под малыми углами друг к другу, и являются линейными когерентными источниками. Источник берется в виде узкой щели, параллельной ребру, образованному зеркалами.

• Бигризма Фрауне

В бигризме Фрауне для получения пространственного разделения световых пучков используется явление преломления света. Две призмы с малыми преломлениями усиливают сдвиги друг с другом источниками. Угол при вершине составной призмы $\sim 180^\circ$, а углы β при ее основании малы — $\beta \approx 0^\circ$.

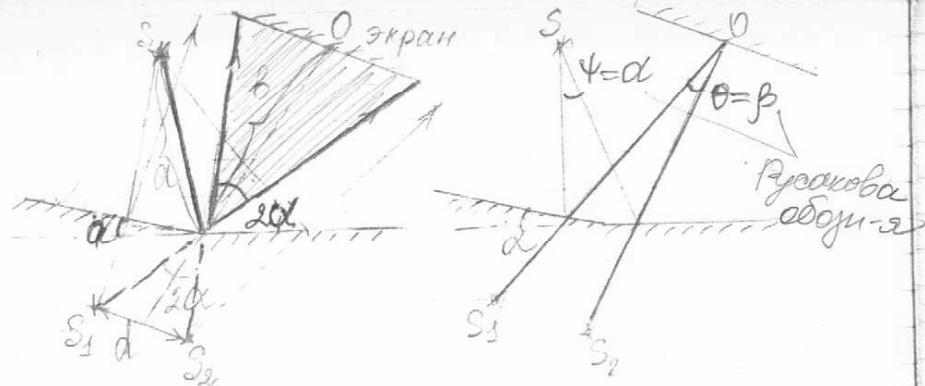
• Бинокль Фрауне

Зонукульное пятно разделяется по диаметру, и половина света разбогатеет (или обогнется). Бордюр закрывается экраном.

• Зеркало Майера

Пучок света от точечного источника S падает на плоское зеркало M под углом, близким к 90° . Одно линейное изображение \mathcal{Y} образуется при отражении от плоскости зеркала M . Интерферирующие пучки от источника S и его изображения \mathcal{Y} .

Бизеркала Френеля



для локализации интерференции (бесконечное)

$$SS_1 \approx 0, \text{ при } d \ll L$$

$$2ad = d, \lambda = a + b$$

$$\Delta S = \frac{xd}{L} = \frac{2xad}{a+b}; \Delta x = \frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda(a+b)}{2ad}$$

Число зон: $\frac{d}{\lambda}$

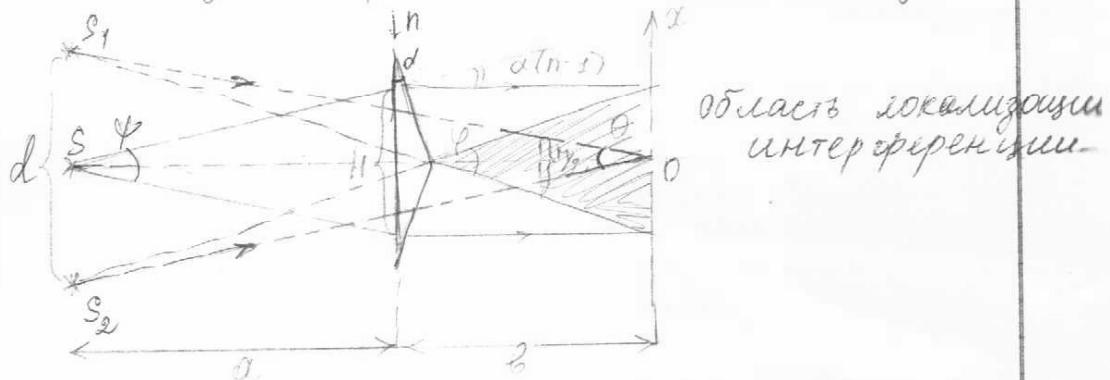
$$\vartheta = \frac{d}{L} = \frac{2ad}{a+b}$$

Апертура:

$$\psi = \frac{b}{a} \Theta = \frac{2bd}{a+b}$$

② Биизогина Френеля

$$n=d, \Theta=\beta$$



$$\varphi = 2d(n-1)$$

$$d = \varphi a = 2d(n-1)a$$

$$\lambda = a + b$$

$$\Delta S = \frac{xd}{L} = \frac{2x\lambda(n-1)a}{a+b}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda(a+b)}{2d(n-1)a}$$

$$\text{Число зон: } \Theta = \frac{d}{L}$$

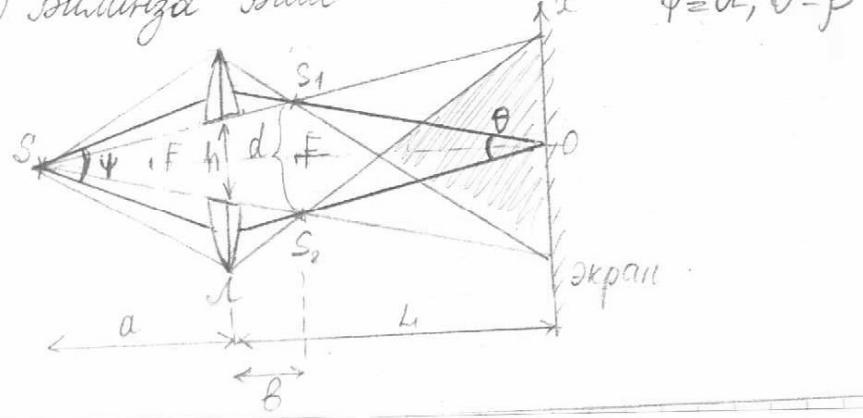
$$\Theta = \frac{2d(n-1)a}{a+b}$$

Апертура:

$$\varphi a = \Theta b \Rightarrow$$

$$\varphi = \Theta \frac{b}{a} = \frac{2d(n-1)b}{a+b}$$

1) Імпульса заліс



$$\text{Уч об-ва з не тонкої лінією: } b = \frac{\alpha F}{\alpha - F}$$

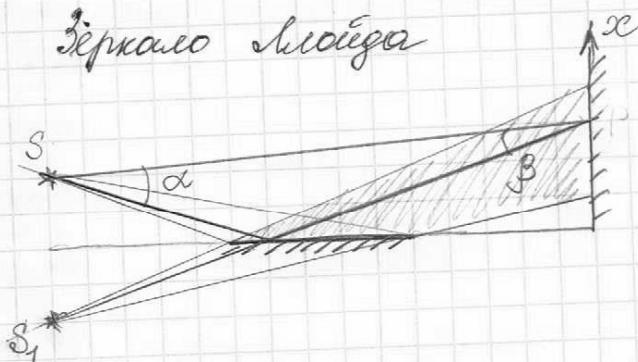
$$\text{Уг подобия: } \frac{d}{h} = \frac{\alpha + b}{\alpha} \Rightarrow d = \frac{h(\alpha + b)}{\alpha} = \frac{h(\alpha + \frac{\alpha F}{\alpha - F})}{\alpha} = \frac{h\alpha}{\alpha - F}$$

$$\Delta S = \frac{x d}{L - b} = \frac{x d}{L - \frac{\alpha F}{\alpha - F}} = \frac{x d (\alpha - F)}{L(\alpha - F) - \alpha F} = \\ = \frac{x h \alpha}{L(\alpha - F) - \alpha F}$$

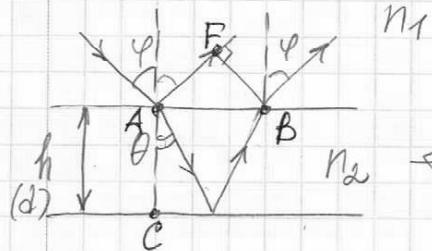
$$\text{Угл склоненісті: } \theta = \frac{d}{L - b} = \frac{h \alpha}{L(\alpha - F) - \alpha F}$$

$$\text{Англ амплітуда: } \psi = \frac{L}{\alpha} \theta = \frac{L h}{L(\alpha - F) - \alpha F}$$

Зеркало з лінією



Метод длины анимитура



n_1

n_2

← Клиновопараллельная пластина

$$kS = \frac{ws}{v} = \frac{n_w}{c} s = k_0 l S - \text{отн. длина пути}$$

$$k\Delta S = k_0 l \Delta S = k_0 \Delta - \text{отн. разница хода}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= n_2(AC + CB) - n_1 AF = 2n_2 \frac{d}{\cos \theta} - n_1 \underbrace{2l \tan \theta \sin \varphi}_{AD} = \\ &= 2n_2 \frac{d}{\cos \theta} \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \sin \theta \sin \varphi\right) = 2n_2 \frac{d}{\cos \theta} \left(1 - \sin^2 \theta\right) = \\ &= 2n_2 d \cos \theta \pm \lambda_0 / 2 \end{aligned}$$

$\Delta = m \lambda_0$ - интерф. минимум

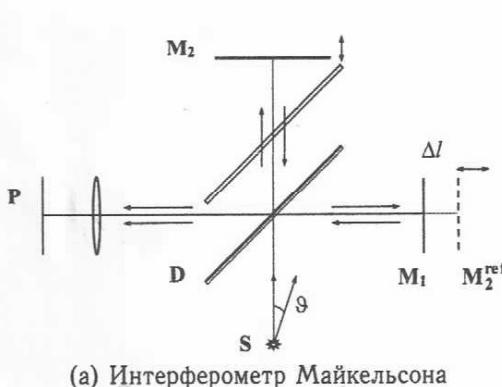
$\Delta = (m + \frac{1}{2}) \lambda_0$ - интерф. максимум

Варианты наблюдения

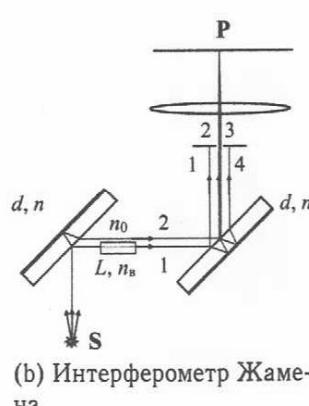
1) экран пачкается далеко (то есть $I \propto \epsilon$ с расстоянием)

2) исп-те собирает изображение и экран пачкается в фок. плоскости

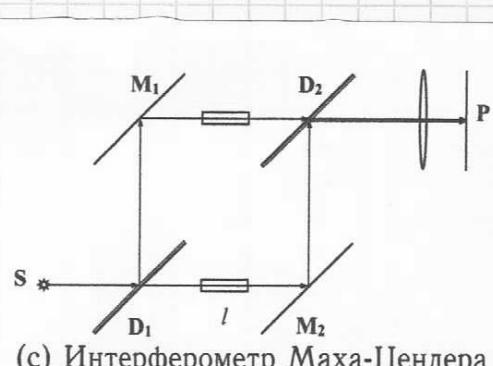
Свет падает под одним и теми же углами φ , но с различными направлениями \Rightarrow помеха равного наклона



(a) Интерферометр Майкельсона



(b) Интерферометр Жамена



(c) Интерферометр Маха-Цендера

а) Чемпионат мира по шахматам

Буде света от источника направляется на светоделимую пластину (полупрозрачное зеркало D, где делится на два пучка света — прошедший и отраженный — принцип однократной интенсивности. Светоделимая пластина представлена собой полупрозрачную стеклянную пластину, покрытую с мыльной стороны тонкой мыльной сердцевиной. Треугольные расстояния, отраженный и прошедший пучки падают на зеркало Mz Mz, отражаются или в обратных направлениях и вновь падают на светоделимую пластину.

8) Интеграция Ивана

В интерференции используются две идентичные плоскопараллельные стеклянные пластинки и источник в виде вертикальной щели. Из отраженных и преломленных лучей изображены на рисунке. Расход лучей 1 и 4 характеризуется наблюдаемые интерференция лучей 2 и 3, обладающих оптической разностью хода $\Delta = n_1 d \cos \theta_1 - n_2 d \cos \theta_2$, где θ_1 и θ_2 - углы преломления лучей в первой и второй пластинах. При расстоянии источника пучка и параллельных пластинках будут наблюдаться полосы равного наклона. Интерференция используется для измерения показателя преломления веществ, которые поглощают на пути одного из лучей.

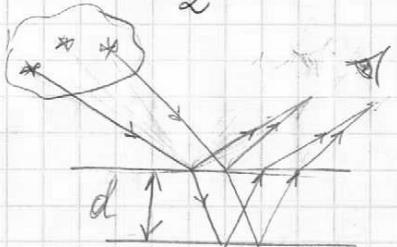
с) Чимерозамент Maxa-Chaegera

Питерографатор состоит из неувидимых оптических линзиков — двух
деликатных пучков (D_1 и D_2) и двух зеркал (M_1 и M_2), в которых пучки света
можно широко развести. Свет от источника S делится на светоизлучающей
плоскопараллельной пластинкой D_1 на два пучка. Отразившись от
плоских зеркал M_1 и M_2 , ониются соединяются на светоизлучающей
плоскопараллельной пластинке D_2 и выходят через линзу на экран в точку F .
Все четыре отражения поверхности обычно устанавливаются параллельно
однуш другу и так, чтобы их центры находились в вершинах параллелограмма.

Интерференция света в естественных условиях в тонких пленках

Свет. свет $d \approx n_{\text{max}} \lambda \approx 5 \text{ мкм}$. Диаметр зеркала: $d_{\text{зр}} \approx 4 \text{ мкм}$. Расстояние от зеркала до экрана $L = 4 \text{ м}$.

$$|\delta\Delta| = |10(2n_2 d \cos\theta)| = |2n_2 d \sin\theta d\theta| = |2n_2 d \sin\theta \frac{d\theta}{L}| \leq \\ \leq 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ м} \leq \frac{\lambda}{2} \approx 25 \cdot 10^{-8} \text{ м} \approx 4$$



Пример:

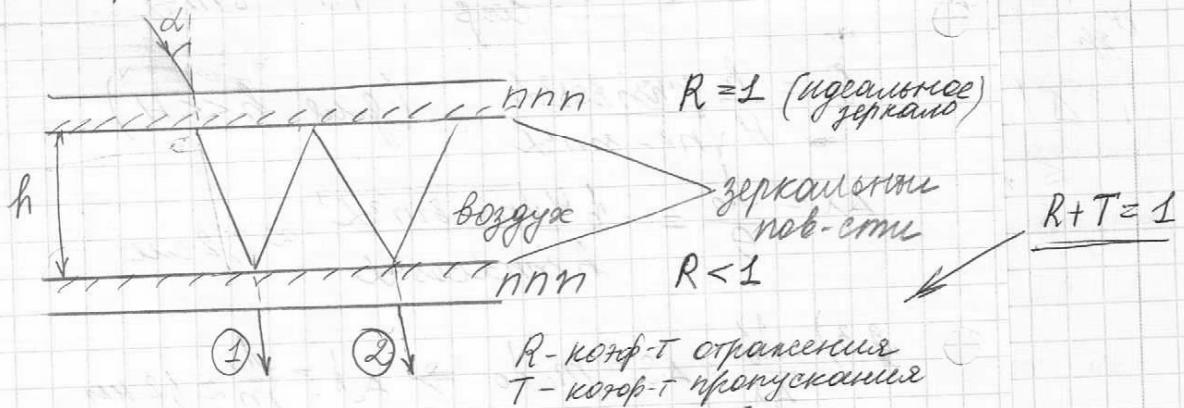
Мыльные пузыри
максимум интерференции
на воде

Максимумы одних групп волн совпадают с минимумами других групп волн \rightarrow обратимое разноцветное (размытое) изображение

(*) Интерференция на границах

(13)

Многоволновая интерференция Интерферометр Фабри-Перо (ИФП)



Если $d \ll l$ и $n_{\text{пп}} \gg 1$, то количество выходящих лучей $N \rightarrow \infty$.

Пусть при каждом отражении амплитуда света уменьшается в r раз:

$$\left| \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{вход}}} \right| = r \quad \left(\frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{вход}}} = r^2 = R \right)$$

\Rightarrow выход. лучи имеют разную амплитуду, каждая следующая меньше предыдущей.

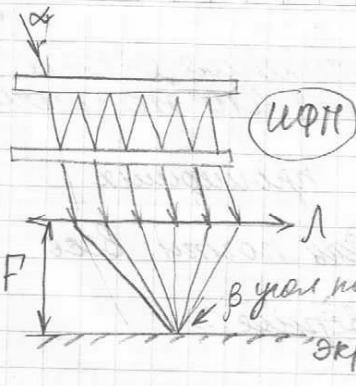
Меньшее сосед. углами: $\Delta \beta = 2h \cos \alpha$

$$\text{т.к. } \Delta \beta = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}, \text{ где } n=1 \text{ (воздух)}$$

Если после ИФП поставить линзу 1 и зеркало в её фокальной плоскости, то все лучи, вышедшие пар-но друг другу, сбераутся в одну точку.

(Внимание)

Типичные $E_{\text{вход}}$ $E_{\text{вход}}$ Источник	Через пластину проходит бесконечное число волн $E_{\text{вход}} = \hat{E}(t) \cdot e^{-i\varphi} T \frac{1}{1 - R e^{-i\varphi}} \leftarrow \varphi = \Delta \varphi$ разность фаз
$I = \frac{1}{2} \langle E_{\text{вход}} E_{\text{вход}}^* \rangle = I \frac{T^2}{T^2 + R^2 - 2R \cos \varphi}$	
$I_{\text{вход}}$ $I_{\text{вход}}$	$I_{\text{вход}} = I_0 \frac{T^2}{(1 - R^2)} + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}$
$I_{\text{вход}}$	$I_{\text{вход}} = I_0 \frac{R (1 - (R + T))^2 + 4(R + T) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$



Чему-то света в этой
момке определяется амплитудой

Формула для пропущенной мощности:

$$I = I_0 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)}$$

$$\text{здесь } \Delta\varphi = kA\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2h \cos\alpha = \frac{4\pi h}{\lambda} \cos\alpha$$

Если $h = \text{const}$, то $\Delta\varphi$ зависит только от α

Картинка будет иметь вид конуса
(конус равного наклона)

$$I_{\max} = I_0 \text{ при } \Delta\varphi = \pi m$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2h \cos\alpha_m = \pi m$$

$$\cos\alpha_m = m \frac{1}{2h} \quad (1)$$

Если $\frac{2h}{\lambda}$ - целое число, то в центре

картины ($\beta = 0$) будет максимум.

$$\text{Его порядок равен } m_{\max} = \frac{2h}{\lambda}.$$

В произвольном случае:

$$m_{\max} = целое \text{ число от } \frac{2h}{\lambda}, \text{ а } \text{шт-сю}$$

в центре картины может быть любой.

$$I_{\min} = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2} \text{ при } \Delta\varphi = \pi(2m+1)$$

$$\text{При } R \rightarrow 1 \quad I_{\min} \approx 0$$

{ Решим формулу для пропущенной мощности.

$$\left\{ \begin{array}{l} I = I_0 \frac{4R \sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)} \end{array} \right.$$

Р-рз видимости:

$$V_{\text{просм}} = \frac{2R}{1+R^2}$$

$$V_{\text{огранич}} = 1$$



Ширина интерференционных полос:

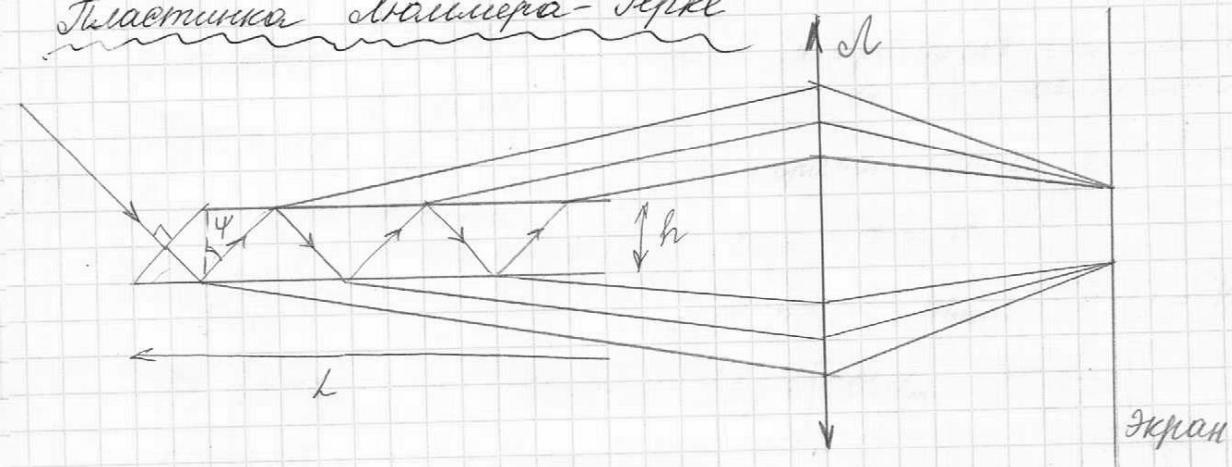
$$\delta_{\text{просм}} = 2 \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

$$\delta_{\text{огранич}} = 2\pi - \delta_{\text{просм}}$$

Режимность интерференционных полос:

$$F_{\text{просм}} = \frac{2\pi}{\delta_{\text{просм}}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \quad F_{\text{огранич}} = \frac{2\pi}{2\pi - \delta_{\text{просм}}} \approx 1$$

Пластиника Ленинера-Герке



В пластинке Ленинера-Герке наблюдаются интерференционные полосы равного наклона. Условие интерференционного максимума n-го порядка имеет вид

$$\sin \cos \varphi = nh,$$

где h - толщина пластины, а φ - угол предошибки. Здесь не учтено изменение фазы при отражении, так как это производят только исчезающее смещение всей интерференционной картины. Число интерферирующих пучков по одному спектру пластины: $N = L / (\sin \varphi)$, где L - длина пластины. Так как свет падает почти под прямым углом, то $N = \frac{L}{2h} \sqrt{n^2 - 1}$

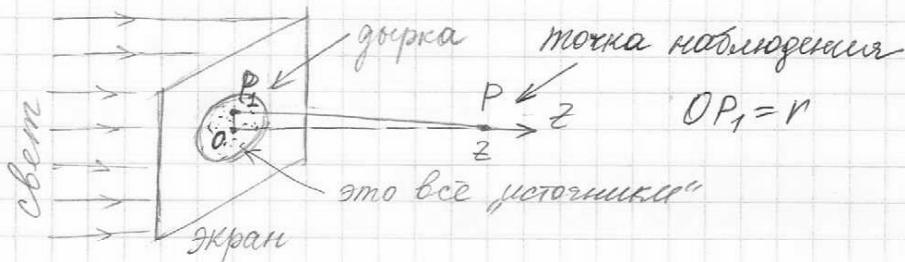
(14) Дифракция света

Дифракция Френеля
(в ближней зоне)

Дифракция - совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резко ограниченной оптической неоднородностью.

Принцип Гюйгенса - Френеля

Каждая точка волнового фронта является источником вторичных сферических колебаний. Волновое возмущение в любой точке можно рассматривать как результат интерференции этих волн.



Плоская волна \Rightarrow все вторичные источники имеют одинаковую амплитуду и фазу

Разность хода волн в т. Р от источников из т. О и т. P₁:

$$\Delta S = P_1 P - OP = \sqrt{z^2 + r^2} - z = z \sqrt{1 + \frac{r^2}{z^2}} - z \approx z \left(1 + \frac{r^2}{2z^2}\right) - z = \frac{r^2}{2z}$$

Принцип суперпозиции $E(P) = E_1(P) + E_2(P) + \dots$

$$E(P) = \int \frac{a_0 d\sigma}{P} e^{i(wt - kp)} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{базовое поле в т. Р} \\ \text{как суперпозиция волн} \end{array}$$

$$E_i(P) = \frac{a_0}{r} \cos(wt - kr + \varphi_0)$$

$$A = \frac{a_0}{r} e^{i w t - i k r} = \frac{A_0 e^{-ikr}}{r}$$

$$\hat{E}_i(P) = \frac{a_0}{r} e^{i(wt - kr + \varphi_0)} = \frac{a_0}{r} e^{i \varphi_0} e^{iwt} = A e^{iwt}$$

$$A_{\Sigma} = A_0 \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \quad (\chi - \text{угол наклона})$$

который наклоняется

$$A(P) = \iint_{\Sigma} A_{\Sigma} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} K(\varphi) d\sigma = \iint_{\Sigma} A_0 \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \frac{e^{-ik\varphi}}{\rho} K(\varphi) d\sigma \quad \Theta$$

Дифракция. интеграл Френеля

$$\Theta \left[\iint_{\Sigma} \frac{A_0}{\rho^2} e^{-ik(\rho + \rho)} K(\varphi) d\sigma \right]$$

Признак обратимости Гильбигольца

$$A_S(P) = A_P(S) \quad (S - \text{источник}, P - \text{точка наблюдения})$$

Признак дополнительности Бабине

$$A(P) = \int_{\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2} = \int_{\Sigma_1} + \int_{\Sigma_2} = A_{\Sigma_1}(P) + A_{\Sigma_2}(P)$$

Σ_1 — — — — — — — —
 Σ_2 — — — — — — — —

два близко расположенных экрана. Отверстие одного совпадает с направлением другого

\int_{Σ} — нет экранов

$\int_{\Sigma_{1,2}}$ — установлены только 1-й или 2-й экран

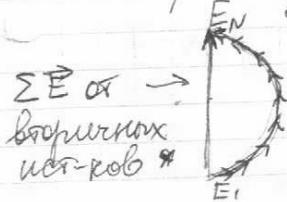
(15) Дифракция на круглом отверстии

Зона Френеля: область волнового фронта такого размера, что разность хода от краев этой области до точки наблюдения равна $\frac{\lambda}{2}$.

Погрешность E_1 — вклад от источника в т. О,

а E_N — от P_1 , такой что $\Delta S_{OP_1} = \frac{\lambda}{2}$, то

векторная диаграмма будет выглядеть:



* От вторичных источников, составляющих 1-ю зону Френеля

Аналогично радиус (радиус) m -ой зоны:

$$\frac{r_m^2}{2z} = m\frac{\lambda}{2} \Rightarrow r_m = \sqrt{m\lambda z} \quad (\text{для сферической волны})$$

Площадь m -ой зоны Френеля

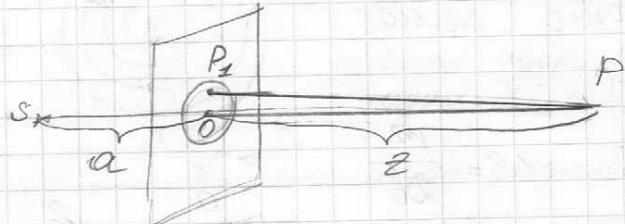
$$S_m = \pi(r_m^2 - r_{m-1}^2) = \pi(m\lambda z - (m-1)\lambda z) = \pi\lambda z = \text{const}$$



Значит, энергия, излучаемая конусом
зоны Френеля!

Однако, из-за того, что источники излучают
сферическую волну, то её амплитуда
зависит от удаления от центра зоны.
амплитуда будет меньше. Метод зон Френеля
учитывает этот факт качественно. Для
первых зон можно пренебречь изменением
амплитуды волн от вторичных источников.

Сферическая волна
(от вторичного источника)



$$AS = (P_1 P - OP) + (SP_1 - SO) \approx \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{z} \right)$$

Радиус зоны m -ой зоны Френеля:

$$\frac{m\lambda}{2} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{a+z}{az} \right)$$

$$r_m^2 = m\lambda \frac{az}{a+z}$$

Площадь зоны в этом случае

$$S_m = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 = \pi \lambda \underbrace{\frac{az}{a+z}}_{=1} = \text{const}$$

Число Френеля - число открытых зон

Условие перехода от биеневской к геометрической оптике

$$A(P) = \sum (-1)^{m-1} |A_m| = |A_1| - |A_2| + |A_3| - \dots m \rightarrow \infty \Rightarrow A_m \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow A(P) = |A_1| - \frac{|A_1| + |A_3|}{2} + |A_3| - \frac{|A_3 + A_5|}{2} + |A_5| - \dots = \\ = \frac{|A_1|}{2} + \begin{cases} \frac{|A_N|}{2}, & N=2k+1, k \in \mathbb{N} \\ -\frac{|A_N|}{2}, & N=2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\underset{\uparrow}{N \gg 1} \Rightarrow A(P) \approx \frac{|A_1|}{2}$$

Условие нахождения геометр-й оптики

$$I(P) = \frac{1}{4} I_1 = I_0$$

1) Асимптотика и дробовая зональные пластинки

2), возможна либо четные, либо нечетные зоны Френеля

Результатирующая интенсивность возрастает

$$A = \sum_{k=0}^N |A_{2k+1}| = \frac{N}{2} \frac{|A_1| + |A_3|}{2} \quad N \gg 1 \Rightarrow A \approx \frac{N}{2} \frac{|A_1|}{2} = \frac{N}{2} A_0$$

\uparrow
где нечетной
пластинки

$$\Rightarrow I = \left(\frac{N^2}{4} \right) I_0$$

2) меняем фазу венца на π для всех нечетных, либо нечетных зон. Интенсивность возрастает.

$$A_\varphi = N/A_0 \Rightarrow I_\varphi = \left(N^2 \right) I_0$$

Оптимальные зоны пластинка - сопряженные линзы.
меняет фазы при движении от центра к
краю линз. Интенсивность в фокусе линз:

$$I = \left(\frac{\pi^2}{4} N^2 \right) I_0$$

(16) Метод векторных диаграмм.

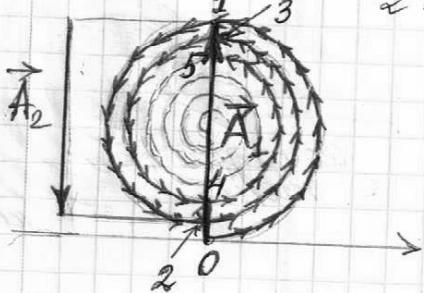
$\hat{A}(P) \leftrightarrow \hat{A}(P)$ — однозначное соотв-е

$$Re \hat{A}(P) = A_x(P)$$

$$Im \hat{A}(P) = A_y(P) \Rightarrow \sum_j \alpha_j A_j(P) = \sum_j \alpha_j \vec{A}_j(P)$$

Спираль Френеля

Элементарные патоны — элементы зон Френеля, для которых расстояние от границ (соседних) до точки наблюдения ступенчато $\frac{\lambda}{2}$) — количество которых, равное $\frac{N}{2\pi}$ ($N \gg 1$)



Дифракция Френеля на круглом отверстии

В зависимости от расстояния до точки наблюдения, отверстие открывает разное кол-во зон Френеля.

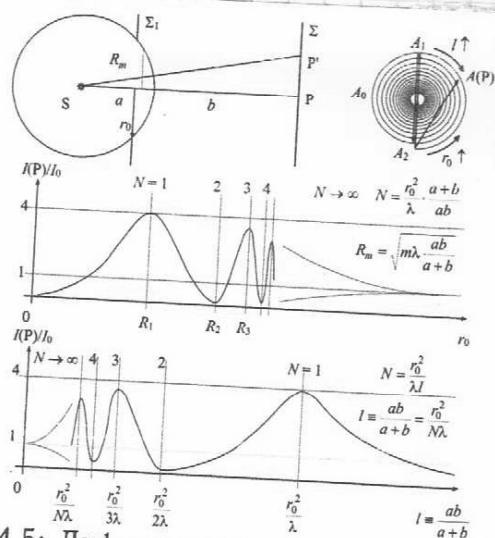
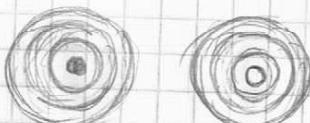


Рис. 4.5: Дифракция на круглом отверстии.

Число зон открыто — интенсивность в центре мин — максимум.

Число зон — светлое пятно.



Дифракция Френеля на круглом диске

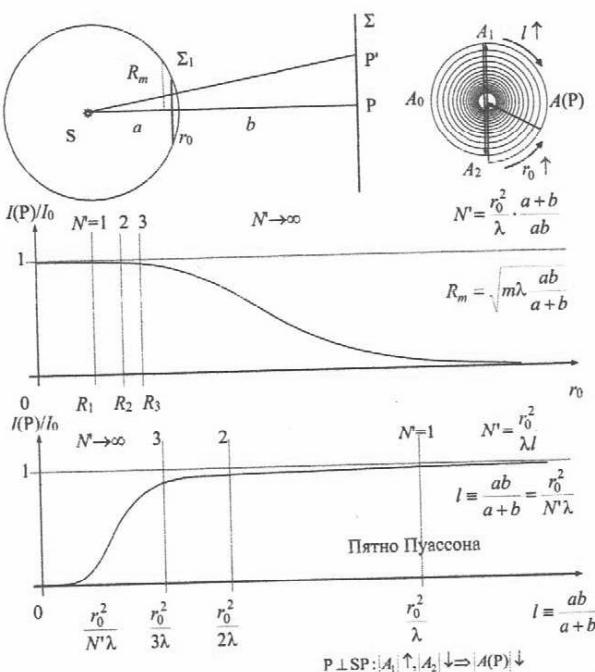


Рис. 4.6: Дифракция на круглом экране. Пятно Пуассона.

В центре будет светлое пятно — пятно Пуассона, т.к. все отверстие заслон (передо мной путь) будут создавать max интенсивность.



(17) Дифракция Френеля на крае полуциркульного экрана

Векторы, характеризующие волны каждой подды, будут иметь одинаковую фазу, но разность фаз для соседних подды не будет одинаковой (как при расчете дифракции на краях отверстий). Она будет близкой к нулю для первой подды, расположенной в центральной части, и разой по мере удаления от центра. В результате векторная диаграмма будет иметь вид спирали — Корнио.

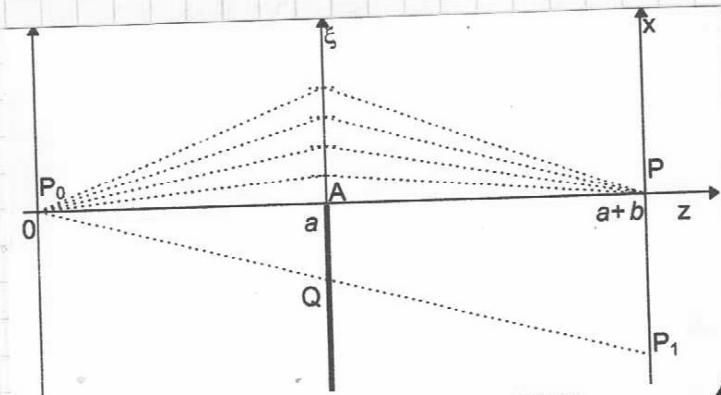


Рис. 7. Схема дифракции на крае экрана.

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$$

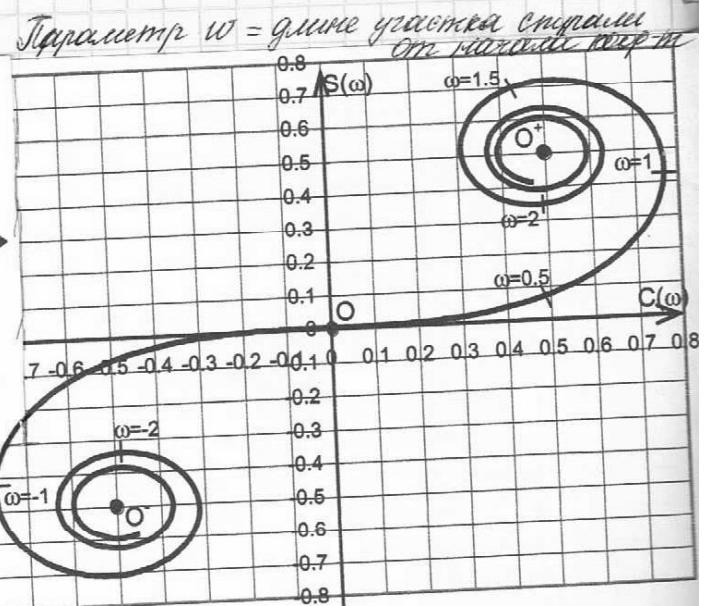


Рис. 8. Спираль Корнио.

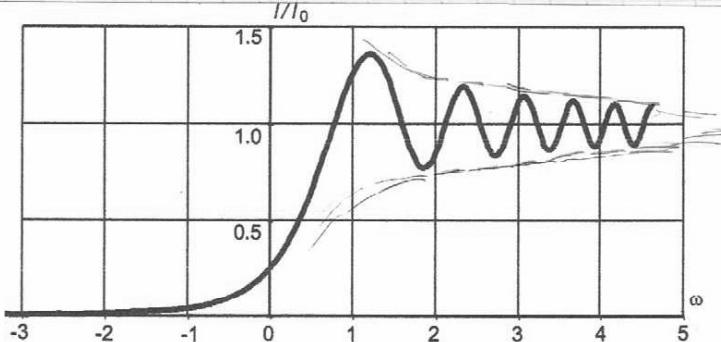
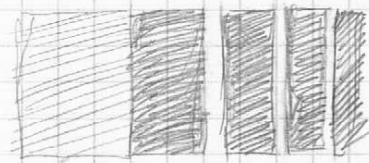


Рис. 9. График зависимости интенсивности в плоскости наблюдения от значения параметра ω при дифракции на крае экрана.



дифракционная картина

Дифракция Френеля на щели

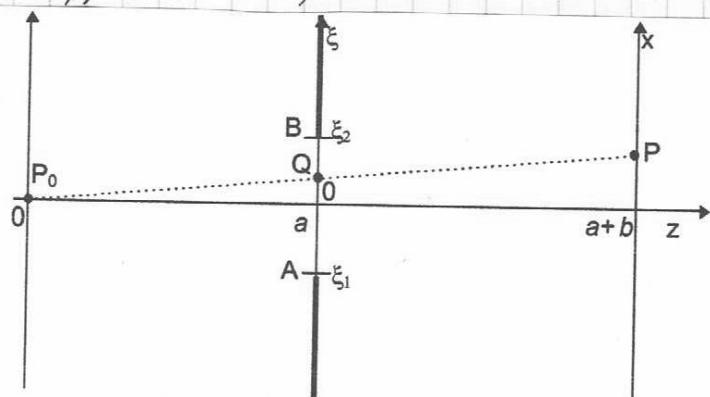


Рис 10. Схема дифракции на щели.

Зоны Штютера –
„полосатые“ зоны, на
которые разбивают
волновой фронт. ~~или~~
~~помимо~~

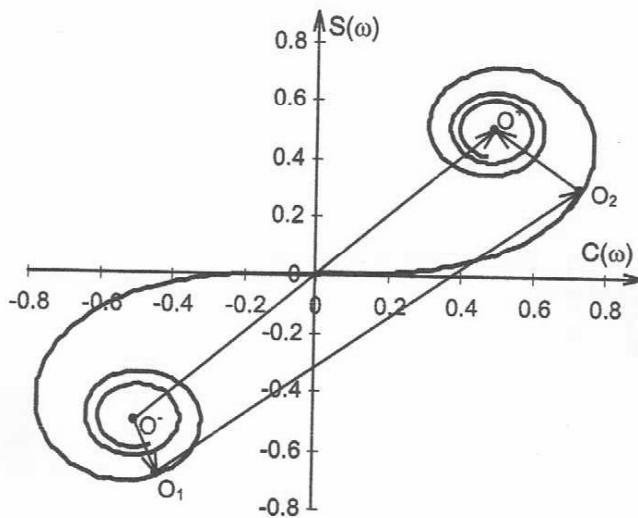


Рис. 11. Расчет зависимости поля в плоскости наблюдения при дифракции на щели с помощью спирали Корни.

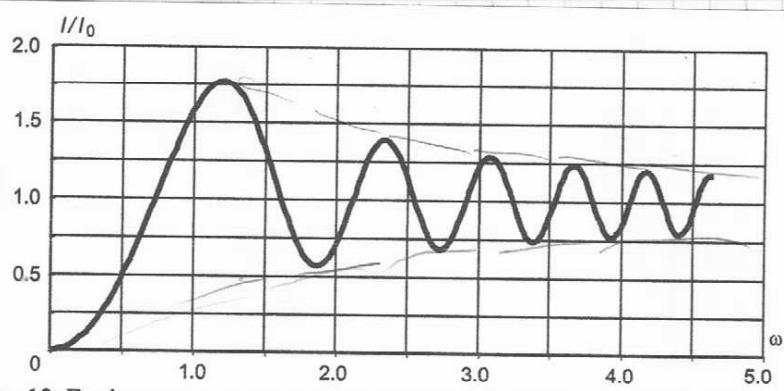
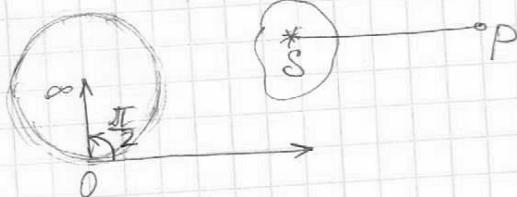


Рис. 12. График зависимости интенсивности в центре картины при дифракции на щели от полуширины щели ω .

- (18) Недостатки полного когерентного принципа Гюйгенса - Френеля
- 1) Результирующая фаза отстает на $\frac{\pi}{2}$ от наблюдаемой
(удобен для определения)
так как принцип определяет амплитуду, но не фазу.
($I \propto$ квадрату амплитуд)



- 2) При вычислении результатов интерференции эллиптических волн приходится предполагать, что амплитуда, обусловленная вс помогающими источниками, зависит от угла наклона φ между нормалью к соответствующему участку вс помогающей поверхности и направлением на точку наблюдения.

3)

Дифракция Кирхгофа

Уравнение Гельмгольца и интерференция тарелок Гельмгольца - Кирхгофа

Решение дано: решение волнового ур-я
для однородной изотропной среды:

$$\frac{\partial^2 \hat{E}(t, \vec{r})}{\partial t^2} = v^2 \Delta \hat{E}(t, \vec{r})$$

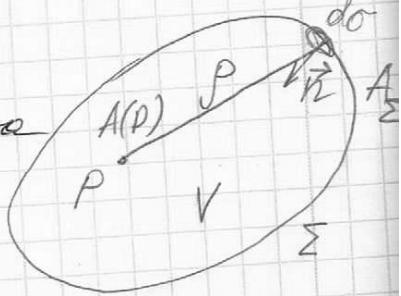
в виде монохром. гармон. волны в конечн. фронте!

$$\hat{E}(t, \vec{r}) = A(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

комплексное амплитуда

Ур-е Гельмгольца:

$$-\omega^2 A(\vec{r}) e^{i\omega t} = v^2 \Delta A(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

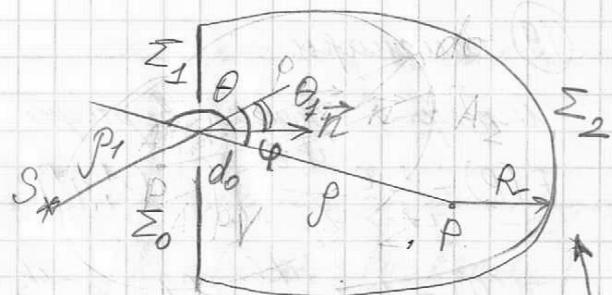


$$(v^2 \Delta + w^2) A(\vec{r}) = 0$$

$$\boxed{(\Delta + k^2) A(\vec{r}) = 0}, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

$d\sigma$ - физ. единица элемента

ρ - расстояние от т. P



$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(A_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikp}}{\rho} \right) \Big|_{\Sigma} - \frac{e^{-ikp}}{\rho} \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma} \right) d\sigma$$

Интерференция волн Френеля - Кирхгофса

Дифракционный интерференция Френеля - Кирхгофса

Будем рассматривать волны, исходящие от точечного источника S сквозь отверстие Σ_0 в неподвижном экране Σ_1 создает световое поле в точке наблюдения P. Точка P лежит вокруг той точки P' движущуюся поверхность $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2$

Предположим, что линейные размеры d_0 отверстия Σ_0 велики по сравнению с длиной волны света ($d_0 \gg \lambda$). Тогда будем применять граничные условия Кирхгофса (приближение Кирхгофса):

- 1) на Σ_0 как в отсутствии экрана $A_{\Sigma_0} = A_0 \frac{e^{-ikp_1}}{p_1} \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma_0} = \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma_0}$
- 2) в области расположения экрана $\Sigma_1 - A_{\Sigma_1} = 0, \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma_1} = 0$
- 3) на поверхности $\Sigma_2 - A_{\Sigma_2} \rightarrow 0, \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma_2} \rightarrow 0$ при бесконечном удалении точек поверхности Σ_2 от точки наблюдения P

Будем справедливо оптическое приближение - расстояние ρ и p

затруднительные длины волны - $\rho, p_1 \gg \delta > \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{R}$

Тогда вычислим производные по нормали $\frac{\partial}{\partial n} = \cos(\hat{n} \hat{p})$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikp}}{\rho} \right) = -ik e^{-ikp} - e^{-ikp} \rho \frac{\partial \rho}{\partial n} \approx -ik \frac{e^{-ikp}}{\rho} \cos \theta$$

$$\frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma_0} = \frac{\partial A}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(A_0 \frac{e^{-ikp_1}}{p_1} \right) \approx -A_0 ik \frac{e^{-ikp_1}}{p_1} \cos \theta_1$$

$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_0} \left(A_0 \frac{e^{-ikp_1}}{p_1} \left(-ik \frac{e^{-ikp}}{\rho} \cos \theta \right) + \frac{e^{-ikp}}{\rho} A_0 ik \frac{e^{-ikp_1}}{p_1} \cos \theta_1 \right)$$

$$= \iint_{\Sigma_0} A_0 \frac{e^{-ikp}}{\rho} \frac{i}{2\pi} (\cos \theta_1 - \cos \theta) d\sigma$$

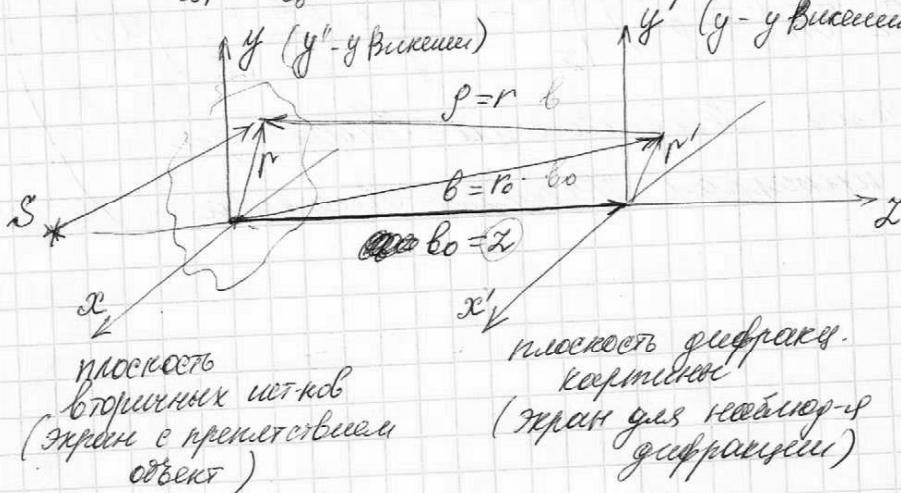
$d\sigma =$

(79) сценарий

Численные способы - приближенные способы:

$$E(P) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{-ikz}}{z} \iint \psi(x^*, y^*) e^{-\frac{ik(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2}{2z}} dx' dy' - \text{Буксир}$$

$$A(P) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{-ikb_0}}{b_0} \iint A_{\Sigma_0} e^{-\frac{ik(r-r')^2}{2b_0}} d\sigma - \text{Русаков}$$



При $\lambda \ll z$ (b_0)

$|r - r'| \ll z$ (b_0)

$$z \sim z_{\text{груп}} = \frac{R_0^2}{\lambda}$$

Видах обозначения:

$$A(P) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{-ikz}}{z} \iint A_{\Sigma_0} e^{-\frac{ik(r-r')^2}{2z}} d\sigma = \dots \iint \dots dx' dy'$$

$b_0 \gg R_0$, $b_0 \approx \ell$, $z \gg R_0$

Численные в пределе способы:

$$E(P) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{-ikr_0}}{R_0} \iint \psi(x^*, y^*) e^{+\frac{ik(xx' + yy')}{R_0}} dx' dy' = \left[\frac{x}{R_0} = \sin \theta x, \frac{y}{R_0} = \sin \theta y \right]$$

$$= \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{-ikr_0}}{R_0} \iint \psi(x^*, y^*) e^{+ik(x' \sin \theta x + y' \sin \theta y)} dx' dy' = \iint e^{ik(x' \sin \theta x + y' \sin \theta y)}$$

$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \iint A_{\Sigma_0} e^{ik \frac{rr'}{b}} d\sigma = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \iint A_{\Sigma_0} e^{i(R, P)} d\sigma$$

Видах обознач:

$$A(P) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{-ikb_0}}{b_0} \iint A_{\Sigma_0} e^{ik \frac{(xx' + yy')}{b_0}} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{-ikb_0}}{b_0} \iint A_{\Sigma_0} e^{i(k_x x + k_y y)} d\sigma = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{-ikb_0}}{b_0} \iint A_{\Sigma_0} e^{i(R, P)} d\sigma$$

20 Дифракция в диффузной зоне как пространственное преобразование Рэлея.

Комплексная пространственная спектральная амплитуда.

В приближении Рэлея: $k_x = k \sin \theta_x; k_y = k \sin \theta_y$

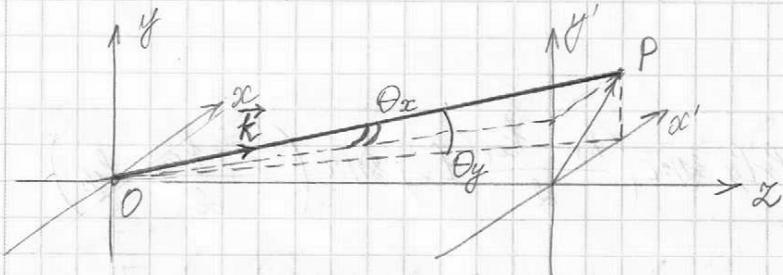
$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} A_{\Sigma}(ik_x, ik_y)$$

$$I(P) = \frac{1}{2} |A(P)|^2 = \frac{1}{2\lambda^2 b^2} |A_{\Sigma}(ik_x, ik_y)|^2$$

Пространственное частоты:

$$k_x = k \sin \theta_x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x'}{b}, \quad k_y = k \sin \theta_y = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y'}{b}$$

где θ_x, θ_y - угловые точки наблюдения



Комплексная пространственная спектральная амплитуда

$$A_{\Sigma}(ik_x, ik_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma} e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy \text{ до } (R, \vec{r})$$

Комплексная амплитуда светового поля на поверхности Σ - обратное пространственное преобразование Рэлея комплексной спектральной амплитуды $A_{\Sigma}(ik_x, ik_y)$:

$$A_{\Sigma}(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} A(ik_x, ik_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

Учебный спектр и его численность

$$I(P) = \frac{1}{2} |A(P)|^2 = \underbrace{\frac{1}{2\lambda^2 b^2} |A_{\Sigma}(ik_x + ik_y)|^2}_{\text{пространственная спектральная мощность}}$$

или учебный спектр излучения, заданного комплекской амплитудой $A_{\Sigma}(x, y)$ светового волнистого поля на поверхности Σ

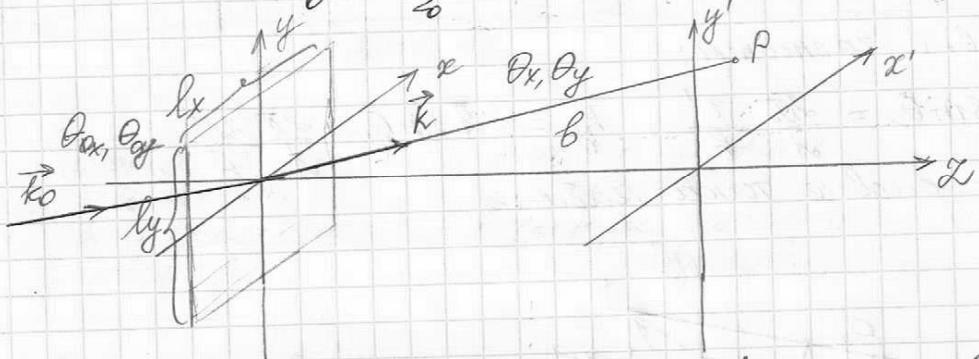
$$\Delta k_{x,y} \cdot l_{x,y} \approx \Delta t \Rightarrow \Delta k_{x,y} = \frac{\Delta t}{l_{x,y}}$$

↑
поперечные изменения
размеров пучка
излучения
ультрафиолетового спектра

(21) Дифракция на одномерных пересечениях структурных

Дифракция на промежуточном отверстии

$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma} A_0 e^{-i(k_0 \vec{r})} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} d\sigma$$



$$A_{\Sigma_0} = A_0 e^{-i(k_0 \vec{r})}$$

поперечный
изменение
размеров

$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 l_x l_y \operatorname{sinc}\left(\frac{k_x - k_{0x}}{2} l_x\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k_y - k_{0y}}{2} l_y\right)$$

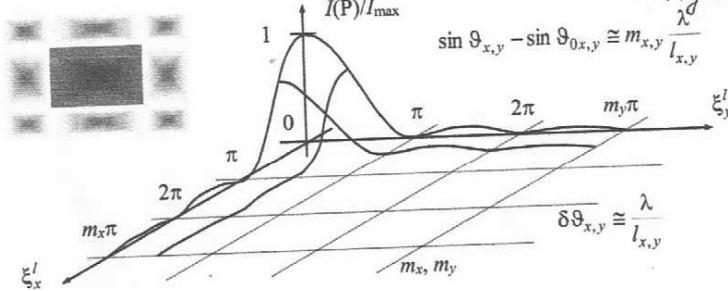
$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma} A_0 e^{-i(k_0 \vec{r})} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} d\sigma = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikb}}{b} A_0 \iint e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0) \vec{r}} d\sigma =$$

$$= \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \int_{-l_{x/2}}^{l_{x/2}} e^{-i(k_x - k_{0x})x} dx \int_{-l_{y/2}}^{l_{y/2}} e^{(k_y - k_{0y})y} dy =$$

$$= \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 l_x \operatorname{sinc}\left(\frac{k_x - k_{0x}}{2} l_x\right) \cdot l_y \operatorname{sinc}\left(\frac{k_y - k_{0y}}{2} l_y\right)$$

$$I(P) = \frac{1}{2} |A(P)|^2 = I_0 \left(\frac{l_x l_y}{\lambda b}\right)^2 \operatorname{sinc}^2 \xi_x^l \operatorname{sinc}^2 \xi_y^l, \xi_{x,y}^l = \frac{k_{x,y} - k_{0x,y}}{2} l_{x,y}$$

$$\max I: \text{при } \xi_{x,y}^l = \frac{k_{x,y} - k_{0x,y}}{2} l_{x,y} = m_{x,y} \pi$$



$m_{x,y} = 1, 2, 3, \dots$ - порядок дифракции
коэффициент $\xi_{x,y}^l$

$$\delta \theta_{x,y} \cong \frac{\lambda}{l_{x,y}}$$

Дифракция на круглом отверстии

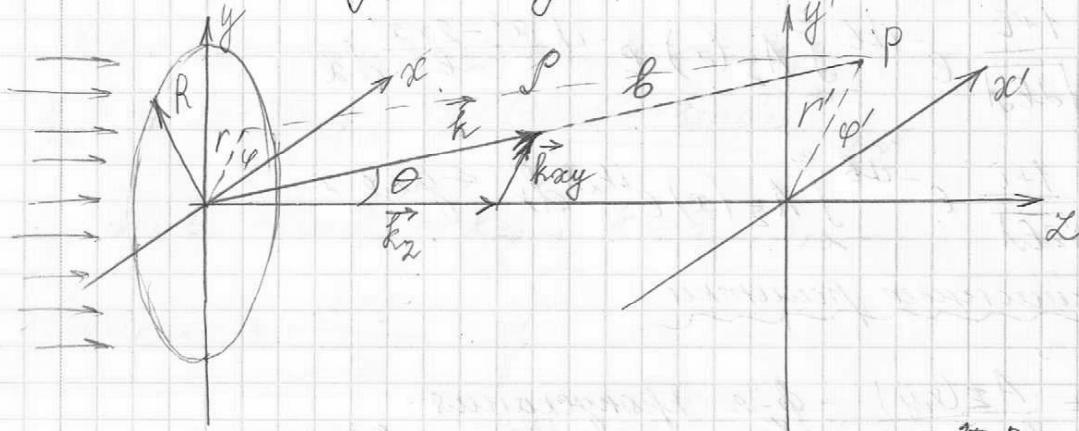
Плоская монохроматическая волна падает нормально поверхности Σ

$$A_{\Sigma 0} = A_0 e^{-ik\vec{r}_0 \cdot \vec{r}} = A_0$$

В поперечных координах

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi; x' = r' \cos \varphi', y' = r' \sin \varphi'$$

$$(\vec{k} \vec{r}) = (\vec{k}_z + \vec{k}_{xy}, \vec{r}) = k_{xy} r \cos(\varphi - \varphi')$$



$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma 0} e^{ik\vec{r} \cdot \vec{r}} d\sigma = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \iint_{\Sigma_0} e^{ik_{xy} r \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi d\varphi' =$$

$$= \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \frac{2\pi R}{k} J_1(k_{xy} R) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \pi R^2 \frac{2J_1(\xi)}{\xi} = A(\xi)$$

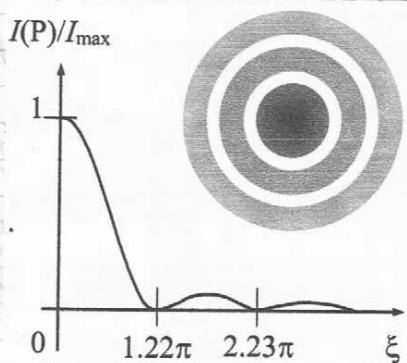
$J_1(\xi)$ — коэффициент дифракции

$$\xi \equiv k_{xy} R = k R \sin \theta = \frac{2\pi R \sin \theta}{\lambda}$$

$$I(\xi) = \frac{1}{2} |A(\xi)|^2 = I_0 \left(\frac{\pi R^2}{\lambda b} \right) \left(\frac{2J_1(\xi)}{\xi} \right)^2$$

$$\xi_{\min} = k R \sin \theta_{\min} \approx 1,22 \frac{\lambda}{R}$$

$$\theta_g = \theta_{\min} \approx 0,61 \frac{\lambda}{R} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$



Дифракционные интерференции для одномерной структуры

$$A_{\Sigma}(x, y) = A_{\Sigma}(x) \quad \text{и} \quad (\vec{r} \vec{r}') = (\vec{r} \vec{r}') \quad \text{и} \quad b \gg r, \text{ то}$$

$$\rho = \sqrt{b^2 + r^2 - 2rb} = \sqrt{b^2 + r^2 - 2(\vec{r}, \vec{r}')} \approx b + \frac{r^2 - 2(\vec{r}, \vec{r}')}{2b}$$

Другой интеграл:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} A_{\Sigma} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma \approx \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma} A_{\Sigma} e^{-ik \frac{r^2 - 2(\vec{r}, \vec{r}')}{2b}} dx dy \approx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikb}}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(x) e^{-ik \frac{x^2 - 2xx'}{2b}} e^{-ik \frac{y^2 - 2yy'}{2b}} dx dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik \frac{y^2 - 2yy'}{2b}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik \frac{(y-y')^2}{2b}} e^{ik \frac{y'^2}{2b}} dy =$$

$$= e^{ik \frac{y'^2}{2b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik \frac{(y-y')^2}{2b}} dy = e^{ik \frac{y'^2}{2b}} \sqrt{\frac{2\pi b}{ik}} \approx \sqrt{\frac{2\pi b t}{ik}}$$

$$A(P) = \frac{1+i}{\sqrt{2\pi b t}} e^{-ikb} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(x) e^{-ik \frac{x^2 - 2xx'}{2b}} dx$$

$$A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\pi b t}} e^{-ikb} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(x) e^{ik_x x} dx \leftarrow \text{где } x$$

Дифракционное решетка

$$t(x, y) = \frac{A_{\Sigma}(x, y)}{A_{\Sigma}(x, y)} - \phi\text{-е проникание}$$

(коэффициенты взаимодействия)

0-е грдп. решетки:

$$t(x + n_x dx, y + n_y dy) = t(x, y)$$

Иное грдп. решеток:

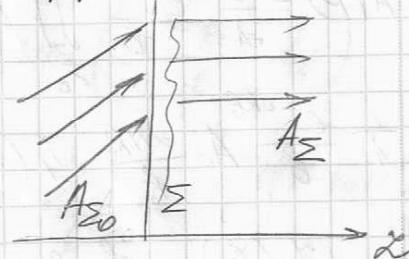
1) отражательное

2) проникательное

3) амплитудное $|t(x, y)| \neq 1, \Phi(x, y) = 0$

4) фазовое $|t(x, y)| = 1, \Phi(x, y) \neq 0$

5) амплитудно-фазовое $|t(x, y)| \neq 1, \Phi(x, y) \neq 0$



Аддитивное преломление решетка



$$\Phi\text{-ое проникание } t(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq d \\ 0 & d < x < d \end{cases}$$

Рез-м дифракции на огне иллюзии:

$$A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\pi b t}} e^{-ikb} A_0 \int_0^d t(x) e^{i(k_x - k_{ex}) x} dx =$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 e^{\frac{i(kx-k_{ox})l}{2}} \cdot l \operatorname{sinc}\left(\frac{kx-k_{ox}l}{2}\right)$$

$$I_1(k_x) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kx-k_{ox}l}{2}\right) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \operatorname{sinc}^2 \xi_x^l, \quad \xi_x^l = \frac{kx-k_{ox}l}{2}$$

Рез-м дифракции на боре фокусе:

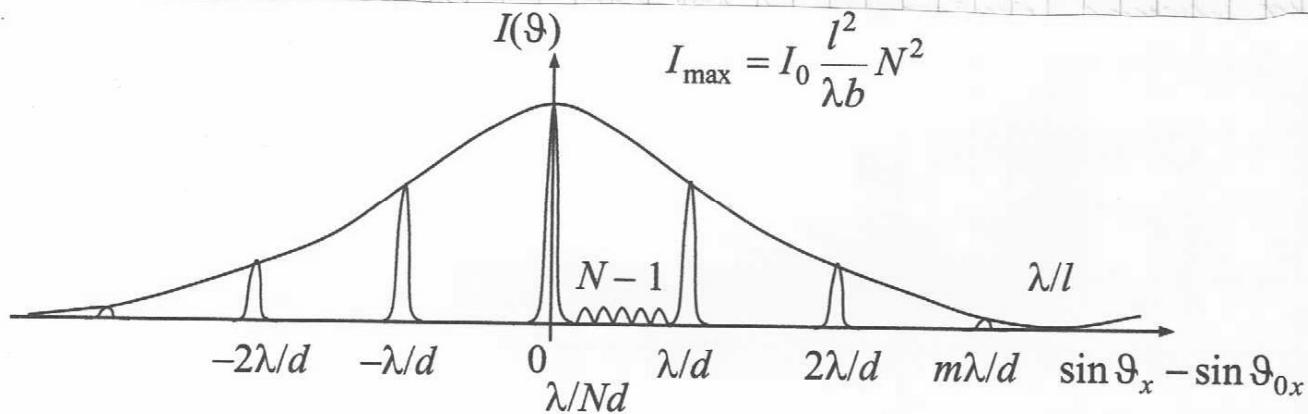
$$I(k_x) = I_1(k_x) H(N, \xi_x^l) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \operatorname{sinc}^2 \xi_x^l \frac{\sin^2(N \xi_x^l)}{\sin^2 \xi_x^l}$$

Числ-е наимен. волнок максимумов:

$$\xi_x^l = \frac{kx-k_{ox}l}{2} = \frac{\pi l (\sin \theta_x - \sin \theta_{ox})}{\lambda} = k \pi$$

$$\sin \theta_x - \sin \theta_{ox} = k \frac{\pi}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$m_{\max} = \frac{\lambda/l}{\lambda/d} = \frac{d}{l}$$



Дифракция на изогнутой криволинейной поверхности

Дифракция на изогнутой криволинейной поверхности с изменением фазы (тонкое зеркало):

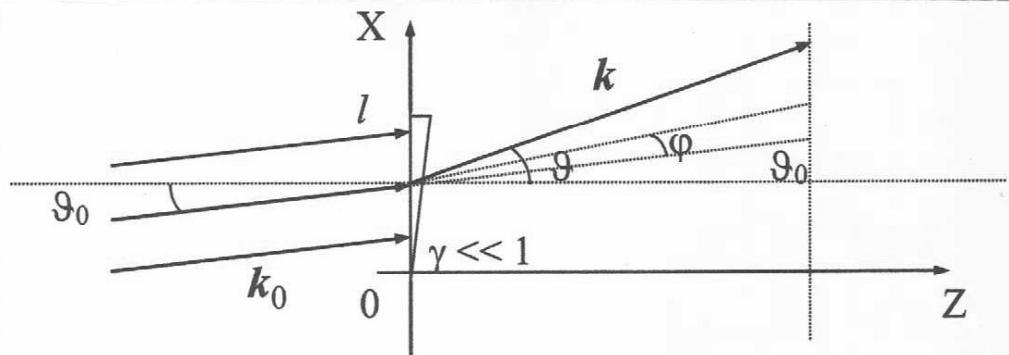
$$U(x) = e^{-i\Phi(x)}$$

$$\Phi(x) \approx \frac{k(n-1)\gamma x}{\cos \theta_{ox}}$$

$$\Phi(x) \approx k\varphi x, \text{ где } \varphi = \frac{(n-1)\gamma}{\cos \theta_{ox}}$$

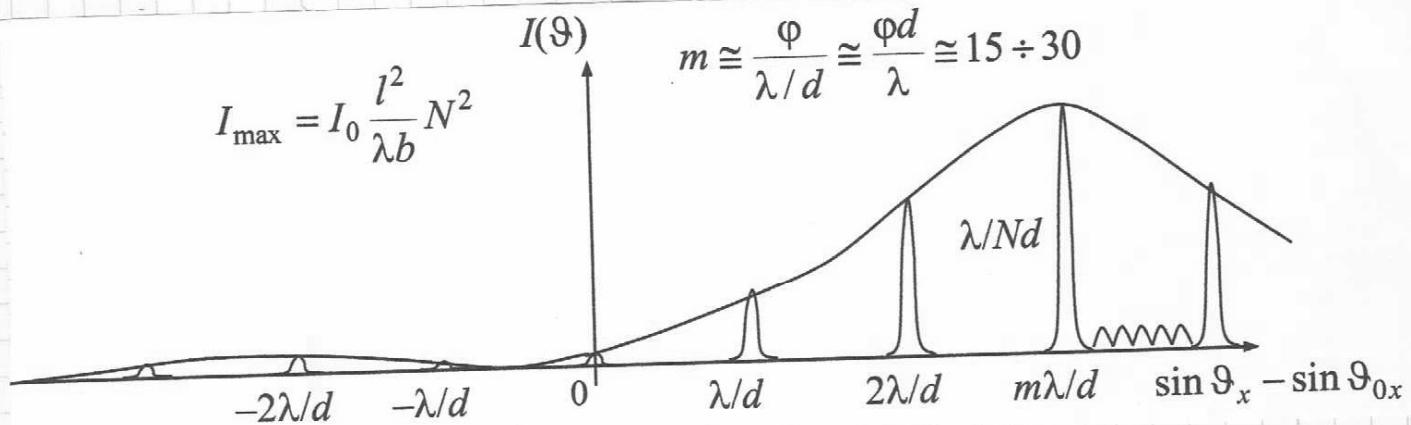
Регуляризация дифракции на изогнутой поверхности:

$$A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 \int_0^\infty e^{-ik\varphi x} e^{i(kx-k_{ox})x} dx =$$



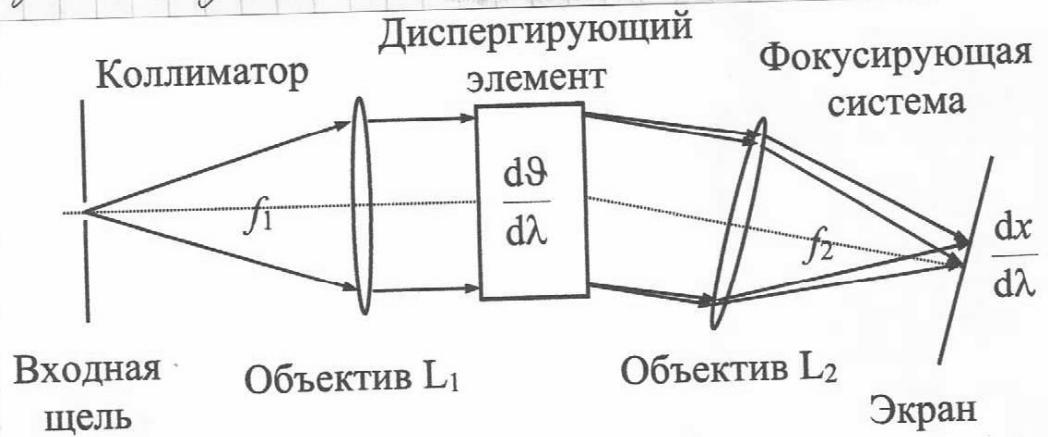
$$= \frac{I_0 e^{i k b}}{\sqrt{2 \lambda B}} e^{-i k b} A_0 e^{i \frac{k_x - k_{ox} - k\varphi}{\lambda} l} \cdot l \operatorname{sinc} \left(\frac{k_x - k_{ox} - k\varphi l}{\lambda} \right) =$$

$$I_1(\theta) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{k_x - k_{ox} - k\varphi l}{\lambda} \right) = I_0 \frac{l^2}{\lambda B} \operatorname{sinc}^2 \left(k \frac{\sin \theta_x - \sin \theta_{ox} - \varphi l}{\lambda} \right)$$



Влияние щели — призмы, направление на ширина max не меняется, сдвигая $I_1(\theta)$ сдвиг на φ — воротночность работает с более высокими порядками.

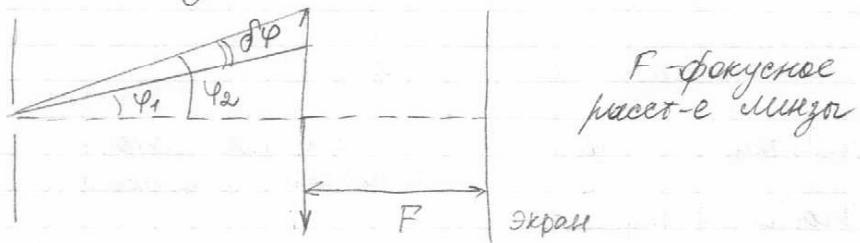
(22) Спектральное прибор с простр. разложением спектра
Спектральный прибор — прибор оптического для пространств разложения светового пучка на спектральную систему состоящую (в частотном спектре) с различной угловой дисперсией



Характеристики спектральных приборов

① Дисперсия

Числовая дисперсия: $D\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$



$\delta\varphi$ - разность углов (соответствующих максимумам)

различие в длинах волн ($\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$)

Линейная дисперсия: $D = F \cdot D\varphi$

② Разрешающая способность

$$R = \frac{1}{\Delta\lambda}$$

$\Delta\lambda$ соответствует критерию Рэлея:

две близкие спектральные линии λ_1 и λ_2 считаются разрешенными, если главный максимум для одной из линий совпадает с ближайшим к нему минимумом другой линии.



③ Область дисперсии (область свободной дисперсии) - диапазон длин волн $\Delta\lambda$, для которого не происходит перекрытие максимумов соседних полосков.

Дифракц. решётка: \leftarrow общий рабочий в первых порядке

1) Угловая дисперсия

$$\partial\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}$$

Плавной max: $d\sin\varphi = m\lambda$

$$(d\sin\varphi)' = (m\lambda)' \Rightarrow d\cos\varphi d\varphi = m\lambda'$$

$$\Rightarrow d\varphi = \frac{m}{d\cos\varphi} \quad (\text{зависит от порядка})$$

2) Разрешающая способность

В соотв-ии с кристаллическим Рэлея

$$\max \lambda_1: d\sin\varphi = m\lambda_1$$

$$\min \lambda_2: d\sin\varphi = m\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{N}$$

$$m\lambda_1 = m\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{N}$$

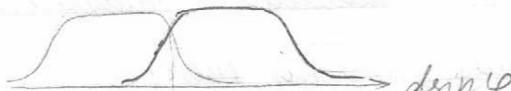
$$m(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{N}$$

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_p} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = mN; R_{\max} = Nm_{\max} = N\frac{d}{\ell} = \frac{L}{\ell}$$

3) Область дисперсии

$d\sin\varphi = m(\lambda + \Delta\lambda)$ - правостр. край m -го max

$d\sin\varphi = (m+1)\lambda$ - левостр. край $(m+1)$ -го max

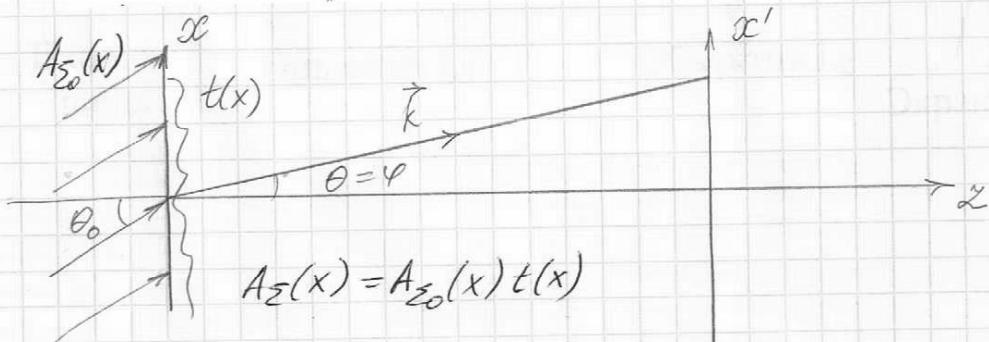


$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

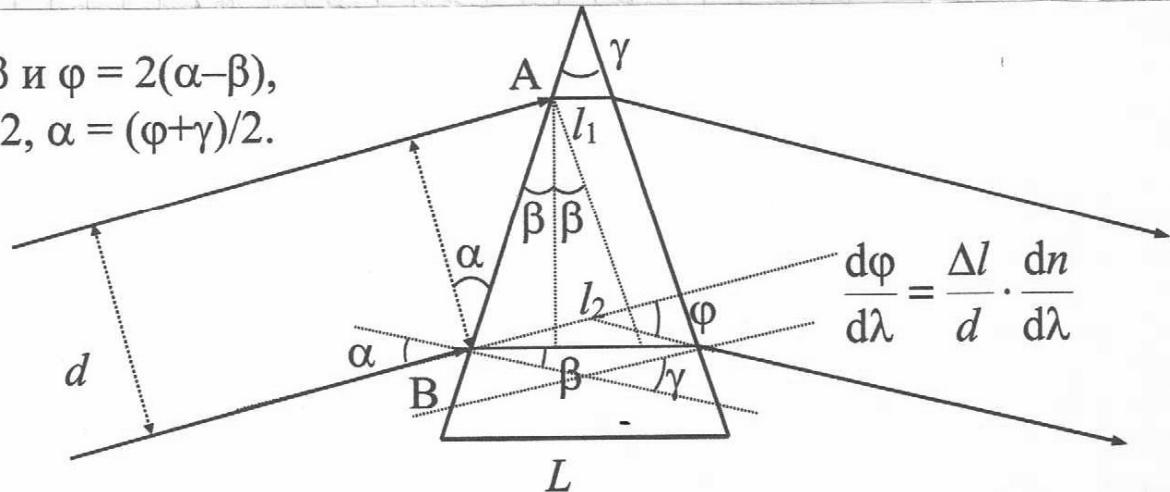
При малых порядках m - Δλ becomes

Предел разрешения:
 $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm} \quad m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + \frac{1}{N})\lambda$



Призма

$$\gamma = 2\beta \text{ и } \varphi = 2(\alpha - \beta), \\ \beta = \gamma/2, \alpha = (\varphi + \gamma)/2.$$



Закон Снеллиуса:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin(\frac{\varphi + \gamma}{2})}{\sin \frac{\gamma}{2}} = n$$

$$\frac{\cos(\frac{\varphi + \gamma}{2})}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \beta} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dn}{dt}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2 \sin \beta}{\cos \alpha} \frac{dn}{dt} = \frac{l_2 - l_1}{AB} \cdot \frac{AB}{d} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dl}{d} \frac{d\varphi}{dt}$$

Амплитуда φ -и:

$$I(\theta) = I_0 \frac{d^2}{AB} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{k \sin(\theta - \varphi)}{2} d \right)$$

Условие главного max:

$$\frac{k \sin(\theta - \varphi)}{2} d = 0 \Rightarrow \theta = \varphi, \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Условие бокового min:

$$\frac{k \sin(\theta - \varphi)}{2} d = \pi \Rightarrow \theta \approx \varphi + \frac{\pi}{d}$$

Сдвиг от max: $\delta\theta = \frac{\pi}{d}$

Область свободной дисперсии: $\Delta l \sim \infty$

Условия дисперсии: $D\varphi = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Delta l}{d} \frac{dn}{dt}$

Строгое выражение: $\sigma l = \frac{\delta\varphi}{D\varphi} = \frac{\Delta l}{\Delta l \frac{dn}{dt}} = \frac{1}{\Delta l \frac{|dn|}{dt}}$

(23) Основы дифракционной теории формирования изображений Аббе.

Первый тип: линза в своей фокальной плоскости осуществляет пространственный Фурье-анализ светового поля светодиодного объекта

Второй тип: в процессе свободной дифракции осуществляется пространственный Фурье-синтез изображения

$$A(k_x, k_y) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ik\theta}}{\theta} \iint_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ik\theta}}{\theta} A_\Sigma(ik_x, ik_y)$$

$$I(k_x, k_y) = |A(k_x, k_y)|^2 = \frac{1}{\lambda^2 \theta^2} |A_\Sigma(ik_x, ik_y)|^2$$

$$A_\Sigma(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(ik_x, ik_y) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y$$

Пространственное фурье-излучение изображение — излучение изображения объекта посредством линзификации пространственных спектральных компонент светового поля объекта.

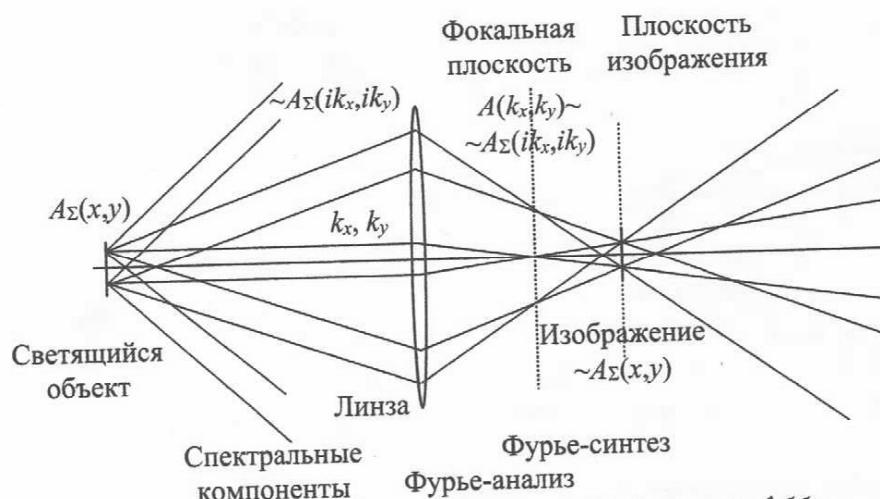


Рис. 4.12: Схема формирования изображения по Аббе

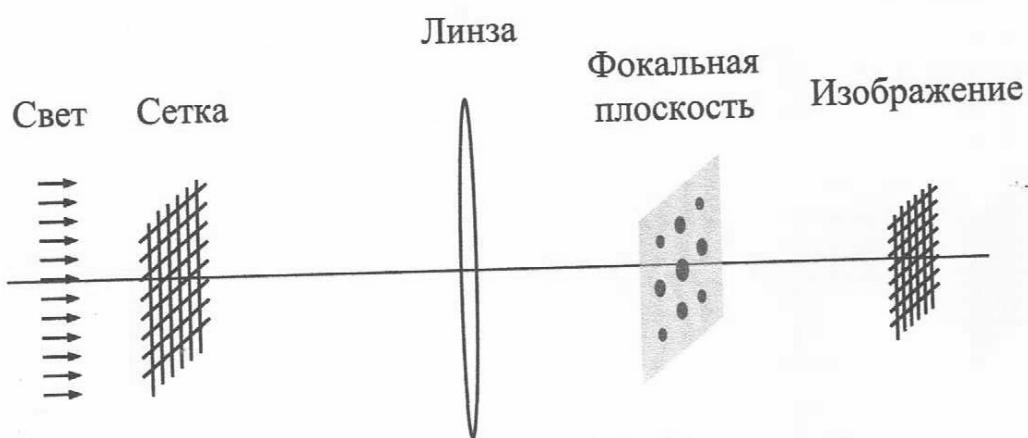


Рис. 4.13: Схема опыта Аббе-Портера

Расстояние между пемами определяется периодом дж.у сечки
(чем больше период, тем больше расстояние) - $\frac{\lambda}{d_{x,y}} f$

Размеры пема определяются разницами дж.у обеих частей сечки (чем больше разница, тем меньше пемма) - $\frac{\lambda}{d_{x,y}} f$
Здесь f - фокусное расстояние линзы.

- Если в фокальной плоскости падают узкие щели, то в плоскости изображения набирают систему пам, формирующую перспективно-щели.

(изограничный экран с отверстием перенесенного d)

- Если наложить присовую диаграмму в центре фокальной плоскости, то изменяя ее диаметр, можно видеть что для каждого фокусного расстояния изображение.
- Если в центре фокальной плоскости наложить маленький изограничный экран, закрывающий центральное пятно Фурье-спектра, то получим изображение сечки с обращенным контрастом.
- Если в центре изограничного экрана в фокальной плоскости оставить малое отверстие, то получим практически равномерно засвеченный экран.

Специальные методы наблюдения фазовых объектов

Фазовые объекты - практически не воспроизводящие свет

$$|t(x,y)| \approx 1 \text{ и слабо меняющее его фазу } \Phi(x,y) \ll 1$$

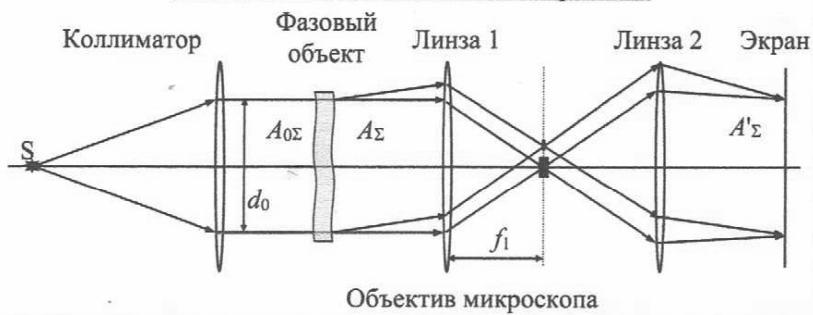
$$t(x,y) = |t(x,y)| e^{-i\Phi(x,y)} \approx 1 - i\Phi(x,y)$$

$$A_{\Sigma_0}(x,y) \approx A_{\Sigma_0} - \text{const}(x,y)$$

$$A_{\Sigma}(x,y) \approx A_{\Sigma_0} (1 - i\Phi(x,y)) = A_{\Sigma_0} - iA_{\Sigma_0}\Phi(x,y)$$

$$I_{\Sigma}(x,y) = \frac{1}{2} |A_{\Sigma}|^2 = I_{\Sigma_0} |t(x,y)|^2 \approx I_{\Sigma_0} (1 + \Phi^2(x,y)) \approx I_{\Sigma_0}$$

Схема наблюдения объекта в микроскопе



Метод тёмного поля Крупин Гиря.

В заднем фокусе объектива микроскопа - непрозрачной диске, закрывающей кружок Гиря радиуса $r_g = \Theta_g f_p \approx 1,22 \lambda / 60 \cdot f_1$:

$$A'_\Sigma(x, y) \approx A_\Sigma - i A_{\Sigma_0} \Phi(x, y) - A_{\Sigma_0} \approx -i A_{\Sigma_0} \Phi(x, y)$$

$$I'_\Sigma(x, y) \approx I_{\Sigma_0} \Phi^2(x, y)$$

Метод фазового контраста

Фазовый рельеф преобразуется в амплитудный рельеф с помощью фазовой пластинки, перекрывающей кружок Гиря.

$$\text{Полупериод пластины } d = \frac{(2k+1)\lambda}{4(n-1)}$$

Изменение фазы:

$$\Delta \varphi = k_0(n-1)d = \frac{2\pi t}{\lambda_0}(n-1)d = (2k+1)\frac{\pi t}{2}$$

$$e^{-i\Delta\varphi} = e^{-i(2k+1)\frac{\pi t}{2}} = -i(-1)^k$$

$$A'_\Sigma(x, y) \approx -i(-1)^k A_{\Sigma_0} - i A_{\Sigma_0} \Phi(x, y) = -i A_{\Sigma_0} ((-1)^k + \Phi(x, y))$$

$$I'_\Sigma(x, y) \approx I_{\Sigma_0} ((1+2(-1)^k) \Phi(x, y))$$

При $k=2l+1$ - тёмное, при $k=2l$ - светлое фазовое контраст.

24) Даль дифракции в приборах, формирующих изображение.

Гранич разрешения и разрешающая способность оптического прибора. Конечная апертура линзы улавливает конечную полосу пространственных частот спектра изображение объекта.

Изображение светящейся точки в сопряженной плоскости является дифракционной картины, состоящей из концентрических колец, окружающих центральный светильный кружочек (пятно) - кружок Физи. Изображение объекта - наложение таких кружков и дифракционных колец.

Разрешающая способность оптических приборов ограничивается дифракцией Фраунгофера на их входной апертуре.

Граница углового (линейного) разрешения оптического прибора $\theta_0(\theta_L)$ - минимальное угловое (линейное) расстояние между двумя светящимися точками объекта, которые разрешает прибор.

Разрешающая способность (сила) оптического прибора R - величина, обратная пределу разрешения: $R = 1/\theta_0$

Телескоп

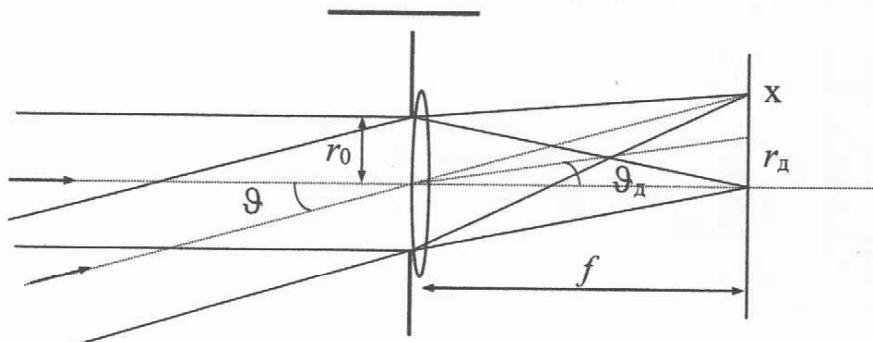


Рис. 4.14: Телескоп

Зоны плюсовые - $\alpha > r_0^2/l$, пространственные когерентные - $\Omega \leq l/\lambda\alpha$. В соответствии с критерием Рэлея:

$$\delta\theta = \theta_0 = 0,61 \frac{l}{r_0}, R_0 = \frac{r_0}{0,61\lambda}$$

Микроскоп. Уравнение синусов Аббе.

Некогерентное освещение объекта - идея как для телескопа.

$$l' \geq r'_g = \theta' b = 0,61 \frac{\lambda}{20} b \approx 0,61 \frac{\lambda_0}{n' \sin \varphi'}$$

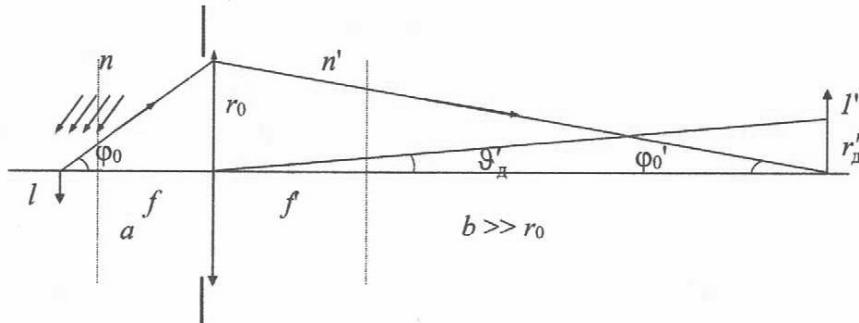


Рис. 4.15: Микроскоп

С учетом уравнения синусов Аббе и $b \gg r_0 (\varphi_0 \ll 1)$:

$$n \sin \varphi_0 = n' \sin \varphi' \geq 0,61 \lambda_0, \quad l \geq 0,61 \frac{\lambda_0}{n \sin \varphi_0} = \delta l$$

$$\delta l = 0,61 \frac{\lambda_0}{n \sin \varphi_0} = 0,61 \frac{\lambda}{\sin \varphi}, \quad R = \frac{l}{\delta l} = \frac{n \sin \varphi_0}{0,61 \lambda_0}$$

Угловая апертура φ_0 лучей, формирующих изображение, должна быть как можно больше.

(25) Запись и восстановление светового поля - голограммы.

Схемы голограммической записи и восстановления. Основная идея - фокусируется не само объектное световое поле δo , исходящее от светящегося объекта, а картина интерференции этого поля с когерентной опорной волной δ_{op} . Картина интерференции объектной и опорной волн, записанная на фотореактивную пленку, называется голограммой. Амплитуда светового поля в плоскости фотореактивной пленки - $A(x, y) = \delta_{ob}(x, y) + \delta_{op}$, а распределение интенсивности:

$$I(x, y) = \frac{1}{2} |A(x, y)|^2 = \frac{1}{2} |A_{ob} + A_{op}|^2 = I_{ob} + I_{op} + \frac{1}{2} A_{ob}^* A_{op} + \frac{1}{2} A_{ob} A_{op}^*$$

Это распределение фиксируется на фотореактивной пленке.

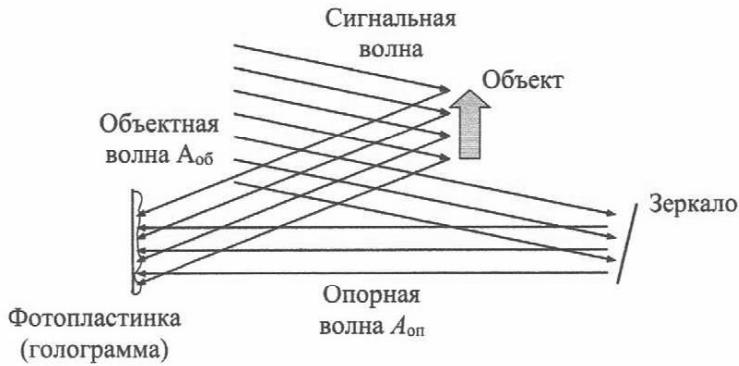


Рис. 4.16: Схема записи светового поля

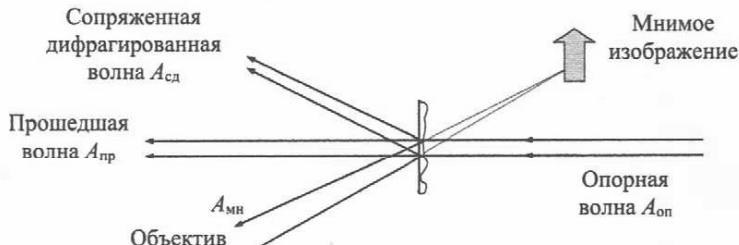


Рис. 4.17: Схема восстановления светового поля

Для восстановления светового поля голографму освещают опорной волной A_0 . В результате дифракции опорной волны на голографии возникает несколько световых волн, одна из которых в точности повторяет поле предметной волны.

Классификация голографии.

Свойства голографии существенно зависят от:

- геометрической конфигурации и физических свойств светочувствительной среды, в которой осуществляется запись
- взаимного расположения голографии, объекта и источника опорной волны
- физической природы (световой, радио-, акустической) волнового поля, записываемого на голографии.

В зависимости от геометрической конфигурации светочувствительной среды, в которой зарегистрирована интерференционная картина, различают двумерные и трёхмерные голографии.

Двумерная голограмма относится к тому случаю, когда молицца фотоматериала в это же время пространственного периода λ регистрируемой интерференционной картины от суперпозиции объектной Φ_{ob} и опорной Φ_{op} волн.

Трехмерная голограмма, у которой молицца в это же время, представляет собой наиболее общий случай голограммической записи.

(26) Дисперсия света. Поларизуемость молекул и вектора национализации. Равенство Массоми - Клаудея.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} = \sum N_j \vec{p}_j = N \vec{P}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 k \vec{E}(t, r)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (1+k) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

Для таких сред: $\vec{P} = \epsilon_0 \beta \vec{E}'$, где β - молекулярная поляризуемость, \vec{E}' - поле, в котором находится данный атом

$$\vec{E}' = \underbrace{\vec{E}_0}_{\vec{E}} + \underbrace{\vec{E}_{ex}}_{\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}} + \underbrace{\vec{E}_{in}}_{\text{поле, созданное телами вблизи полса}} + \underbrace{\vec{E}_{dip}}_{\text{внешнее поле}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

\vec{E}_0 - внешнее эл. поле
 \vec{E}_{ex} - созданное зарядами на поверхности
 \vec{E}_{in} - созданное зарядами вблизи полса

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E} = N \vec{P} = N \epsilon_0 \beta \vec{E}' = N \epsilon_0 \beta \left(\vec{E} + \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}}{3\epsilon_0} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\epsilon - 1) = N \beta \left(1 + \frac{\epsilon - 1}{3} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{N \beta}{3}}$$

формула Клаудея - Массоми

Классическая электронная теория дисперсии.

Классическая частота.

Электрон в ариале рассматривается, как гармонический затухающий осциллятор.

$m\ddot{\vec{x}} = -k\vec{x} - \gamma\dot{\vec{x}} + q\vec{E}'(t)$, где $\vec{x}(E')$ — движение электрона опиываемого ядрами атома под действием локального поля \vec{E}' :

$-k\vec{x}$ — квазиупругая сила, которая не называется электрической покинутым атомом;

$-\gamma\dot{\vec{x}}$ — сила трения, введенная для учета потери энергии и изменения скорости электрона

$$m\ddot{\vec{x}} = -k\vec{x} + q\vec{E}' \quad \text{частота собственных колебаний} \\ \ddot{\vec{x}} + 2\delta\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} = \frac{q}{m}\vec{E}' \quad \delta = \frac{\gamma}{2m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{электрона в атоме}$$

$$\vec{E}'(t, r) = \text{const}(x) = A_0(r)e^{i\omega t} \quad \text{коэффициент затухания}$$

$\lambda > r$ — размер атома

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{i\omega t} \quad - \text{Решение ур-я}$$

$$-\omega^2\vec{x}(t) + 2i\delta\omega\vec{x}(t) + \omega_0^2\vec{x}(t) = \frac{q}{m}\vec{E}'(t)$$

$$\vec{x}(t) = \frac{q}{m} \frac{\vec{E}'(t)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) \uparrow \vec{E}'(t)$$

$$\vec{x} = \vec{x}(\omega, \omega_0, \delta), \vec{x} \in \mathbb{C}$$

$$\vec{p} = q\vec{x} = \frac{q^2}{m} \frac{\vec{E}'}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

$$\frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 1} = \frac{\hat{\epsilon} - 1}{\hat{\epsilon} + 2} = \frac{\omega_n^2}{3} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}} \quad - \text{предельная частота}$$

для конденсированных сред: $N = 10^{28} \text{ м}^{-3}$, $\omega_n = 5,6 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{с}}$

для разреженных газов: $N = 10^{25} \text{ м}^{-3}$, $\omega_n = 1,8 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{с}}$

27 Дисперсия и полоценение света. Комплексный показатель преломления. Закон Бугера.

Полоценение света - процесс поглощения энергии погоражения света вследствие его взаимодействия с веществом

$$\hat{\epsilon} = \epsilon - i\epsilon' - \text{комплексное динамическое промедление}$$

$$\hat{n} = n - in' - \text{комплексный показатель преломления}$$

$$\hat{k} = k - ik' = ko\hat{n} = ko(n-in') - \text{комплексное волновое число}$$

Множество $\hat{\epsilon}, \hat{n}, \hat{k}$ означает наше полоценение света в среде.

Физическая характеристика волны вдоль Oz:

$$\vec{E}(t, z) = \vec{A}(z)e^{iwt} = \vec{A}_0 e^{-ikz} e^{iwt} = \vec{A}_0 e^{-ikz} e^{-k'z} e^{iwt} = \vec{A}_0 e^{-k'z}$$

$$= \vec{A}_0 e^{-k'z} e^{i(wt-kz)}$$

$$I(z) = \frac{1}{2} \langle |\vec{E}(t, z)|^2 \rangle = I_0 e^{-2k'z} = I_0 e^{-dz}, d = 2k' = 2 \frac{w}{c} n'$$

$$I(z) = I_0 e^{-dz}$$

- Закон Бугера
максимальной конфигурации полоценения

Зависимость показателя преломления и конфигурации полоценения от частоты

Разреженные газы: $\hat{\epsilon}' = \vec{E}', \hat{\epsilon} \approx 1 \Rightarrow \hat{n} \approx 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\hat{\epsilon} - 1}{\hat{\epsilon} - 2} = \frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 2} \approx \frac{\hat{n} - 1}{3} \approx \frac{N\beta}{3} = \frac{w_n^2}{3} \cdot \frac{1}{w_0^2 + w^2 + 2i\delta w}$$

$$\hat{n} \approx 1 + \frac{w_n^2}{2} \frac{w_0^2 - w^2 + 2i\delta w}{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\delta^2 w^2}$$

$$n(w) = 1 + \frac{w_n}{2} \frac{w_0^2 - w^2}{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\delta^2 w^2}$$

$$\alpha(w) = 2 \frac{w}{c} n', n' = w_n^2 \frac{\delta w}{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\delta^2 w^2}$$

$$\alpha(w) = \frac{w_n^2}{c} \frac{2\delta w^2}{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\delta^2 w^2}$$

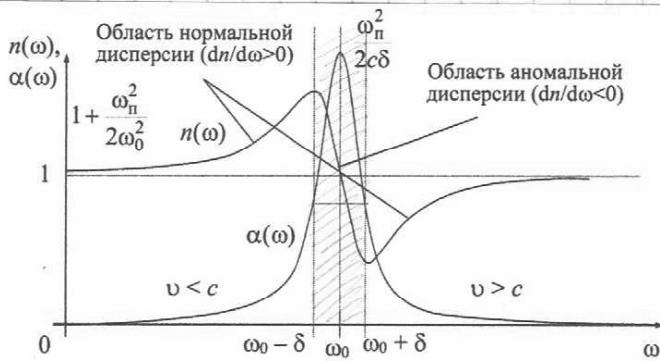


Рис. 5.2: Зависимости показателя преломления n и коэффициента поглощения α от частоты ω падающего света

Если $\frac{dn(\omega)}{d\omega} > 0$ (и растёт при увеличении ω), то

дисперсия нормальная

Если $\frac{dn(\omega)}{d\omega} < 0$ (и убывает при увеличении ω), то

дисперсия аномальная.

(28) Распространение светового импульса в дисперсионной среде. Радиальная и продольная скорости. Формула Рэлля.

Линейная прогрессивная среда с дисперсией порядка $k(\omega) \approx k_0 + k'_0(\omega - \omega_0)$. (Радио-спектр импульса на выходе.)

$$\begin{aligned} E(t, z) &= \frac{1}{2\pi\theta} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') e^{-i(k_0 + k'_0(\omega - \omega_0))z} e^{i\omega(t - t')} d\omega dt = \\ &= e^{-i(k_0 - k'_0\omega_0)z} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') \left(\frac{1}{2\pi\theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t - k'_0z + t')} d\omega \right) dt' = \\ &= e^{-i(k_0 - k'_0\omega_0)z} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') \delta(t' - (t - k'_0z)) dt' = e^{-(k_0 - k'_0\omega_0)z} E_0(t - k'_0z); \end{aligned}$$

$$I(t, z) = \frac{1}{2} \langle |E(t, z)|^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |E_0(t - k'_0z)|^2 \rangle = I_0(t - k'_0z)$$

В среде с дисперсией 1-го порядка узкополосный световой импульс с неизменной частотой ω_0 распространяется без изменения формы с постоянной групповой скоростью по:

$$d(t - k'_0z) = dt - k'_0dz = 0, \quad \omega_0 = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{k'_0} = \frac{dw}{dk} \Big|_{\omega_0} = \text{const}$$

Разовая скорость - скорость распространения фронта
(перехода радиевой фазы)

$$wt - kx = \text{const} \Rightarrow wdt - kdx = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w}{k} = v_\phi \equiv v$$

В вакууме $v_\phi = c$, в воле $v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$

Если среди диспергирующих, то $v = v(\omega)$)

Групповая скорость - скорость распространения волнового пакета квазиоднородной света ($\Delta\omega \ll \omega_0$)

$$u = \frac{dw}{dk}$$

Если дисперсия нет $\Rightarrow u = v$

Если $w(k) = v(k) = v(\lambda) = v(\lambda)$, то

$$u = \frac{dw}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\Rightarrow u = v + \frac{2\pi}{\lambda} \left(-\frac{dv}{\lambda^2} d\lambda \right)$$

$$u = v - \frac{1}{\lambda} \frac{dv}{d\lambda} \quad \text{- формула Рэлея}$$

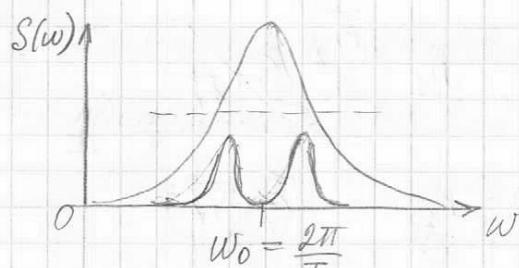
Дисперсионное расщепление волновых пакетов.

Дисперсионные ямы светового спектрса

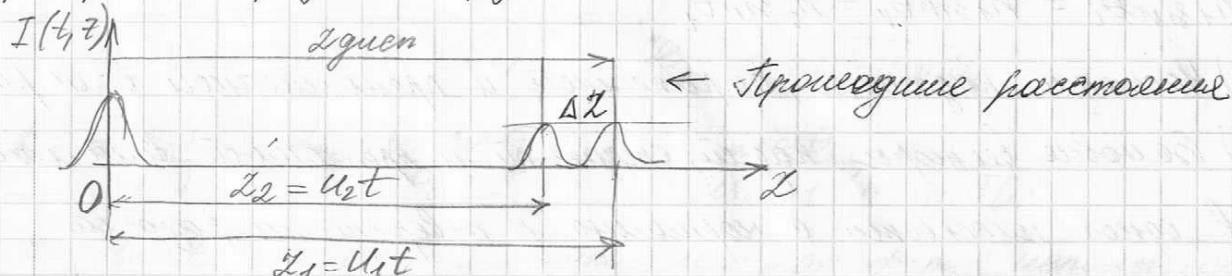
В оптических програмах среди с дисперсией 2^{nd} и более порядков групповая скорость $u(w)$ зависит от частоты w и присутствует дисперсия групповых скоростей:

$$k(w) = k_0 + k'(w - w_0) + \frac{1}{2} k''(w - w_0)^2 + \dots$$

$$u(w) = \frac{dw}{dk} = \frac{1}{dk/dw} = \frac{1}{k_0' + k_0''(w - w_0) + \dots}$$



Два узкополосных пакета с частотами w_1 и w_2 на краях частотного интервала светового импульса будут расходиться с различной групповыми скоростями v_1 и v_2



$$\Delta t = \frac{\Delta w}{v_2} = \frac{w_1 - w_2}{v_2} t = \frac{w_1 - w_2}{v_2 v_1} z_1 = \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) z_1 = \\ = (k_2' - k_1') z_1 \approx k_0 \Delta w z_1 \approx \frac{\Delta t k_0}{t} z_1$$

Дисперсионная длина импульса в данной среде ($\Delta t = \tau$)

$Z_{\text{дисп}} = \frac{\tau^2}{\Delta t k_0}$ расчет ведет распределение светового импульса в диапазоне времени, на котором его длительность τ в 2 раза

Чем короче импульс, тем быстрее он распространяется.

Наличие дисп. зоны свет. импульса $Z \gg Z_{\text{дисп}}$

Импульс «забывает» свою форму.

(29) Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Законы отражения и преломления света

1) отражение

2) преломление

3) полное внутреннее отражение

Плоская монохроматическая падающая световая волна: $\vec{E} = \vec{A}_0 e^{i(wt - k_r r)}$, $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$, $\vec{E}_2 = \vec{E}_t$

Границное условие: $\vec{E}_{1r} = \vec{E}_{2r}$

$$\vec{A}_{ir} e^{i(wt + k_r r)} + \vec{A}_{rr} e^{i(wt + k_r r)} = \vec{A}_{tr} e^{i(wt - k_r r)}$$

Вывод законов через
уравнение Максвелла
(наличие всех принципов Ферми
и Планка и непрерывности Гамильтонова)

В любой момент t : $w_i = w_r = w_t$

Все векторы \wedge границе раздела:

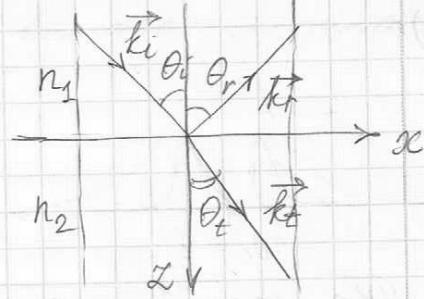
$$\vec{k}_r = (\vec{k}_n + \vec{k}_t) \cdot \vec{r}_t = \vec{k}_t \cdot \vec{r}_t$$

$$\vec{k}_{it} = \vec{k}_{rt} = \vec{k}_{tt}$$

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t$$

$$k_0 n_1 \sin \theta_i = k_0 n_1 \sin \theta_r = k_0 n_2 \sin \theta_t \quad | : k_0$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_r = n_2 \sin \theta_t$$



- 1) Частоты падающей, отраженной и преломленной волн равны.
- 2) Волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн лежат в одной плоскости с нормалю к поверхности раздела глыб сред в торке падения.
- 3) Угол падения равен углу отражения $\theta_i = \theta_r$
- 4) Закон Снеллиуса: $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1} = n$

Формулы Френеля

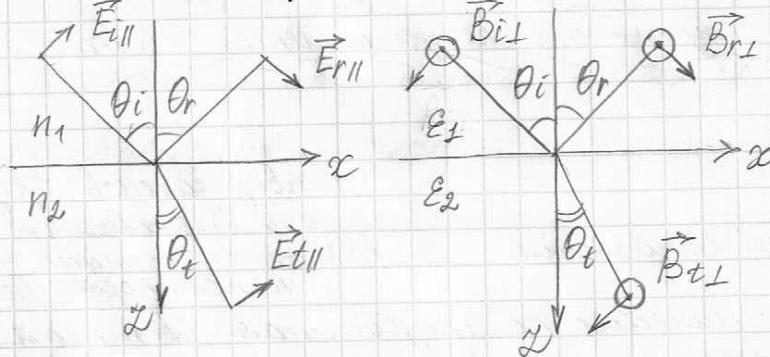
Границное условие: $\vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n}; \vec{B}_{2n} = \vec{B}_{1n}; \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t}; \vec{H}_{2t} = \vec{H}_{1t}$

Свойства плоских волн: $[\vec{n} \vec{E}] = v \vec{B}; [\vec{n} \vec{H}] = -v \vec{D}; \sqrt{\epsilon \mu} E = \text{Крупн}$

Матричные ур-я: $\vec{D}_{1,2} = \epsilon_{1,2} \vec{E}_{1,2}; \vec{B}_{1,2} = \mu_{1,2} \vec{H}_{1,2}$

Падающая волна - суперпозиция из плоских волн с

взаимно перпендикулярными параметрами (|| и \perp плоскости падения)



Коэффициенты отражения (r_{II} , r_I) и пропускания (t_{II} , t_I) (по амплитуде):

$$r_{II} = \frac{A_{rII}}{A_{iII}} = -\frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)} = -\frac{n^2 \cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{n^2 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$t_{II} = \frac{A_{tII}}{A_{iII}} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} = \frac{2 \cos \theta_i}{n^2 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$r_I = \frac{A_{rI}}{A_{iI}} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$t_I = \frac{A_{tI}}{A_{iI}} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

Рис. схема: видимо амплитудных коэффициентов отражения и пропускания.

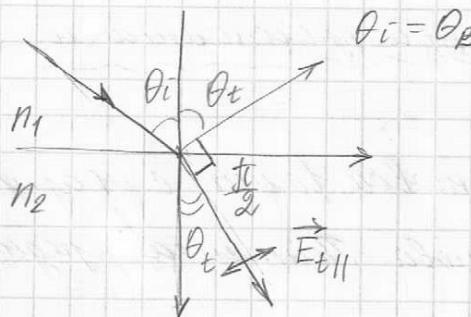
Угол Брюстера

Угол Брюстера — значение поглощенной

(\perp косинус падения) отраженной волны $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$

или при угле падения, равном углу Брюстера:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{\sin \theta_B}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_B)} = \operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \theta_B = \arctg \frac{n_2}{n_1} = \arctg n$$



Степень полимеризации:

$$P = \frac{I_L - I_{II}}{I_L + I_{II}}, \quad 0 \leq P \leq 1$$

для прогрессивных сред (n_1, n_2 — вещественные):

- 1) На поверхности раздела 2х сред, пока есть промедленная волна ($n < 1$: при $\theta_i < \theta_0$), фазы падающей и промедленной волн совпадают.
- 2) На поверхности раздела 2х сред разность фаз $\Delta\varphi$ между падающей и отраженной волной зависит от полимеризации падающей волны и показателя преломления.

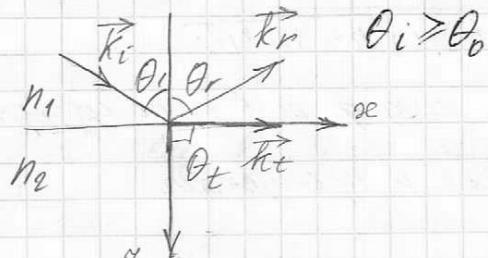
(30) Извещение поглощего внутреннего отражения

При $n_2 < n_1$ ($n < 1$) существует угол поглощего внутреннего отражения θ_0 - наименьший угол падения, при котором нет преломления волны во второй среде:

$$\sin \theta_0 = \frac{n_2}{n_1} = n, \quad \theta_0 = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin n$$

В этом случае волна поглощается вдоль поверхности раздела с минимумом, затухающей вдоль второй среды:

$$\vec{E}_t = \vec{A}_t e^{i(wt - k_t \vec{r})} = \vec{A}_t e^{i(wt - k_t \sin \theta_t x - k_t \cos \theta_t z)}$$



При $\theta_i \geq \theta_0 \sin \theta_i \geq n$:

$$\cos \theta_t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \pm \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i} = \pm i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}$$

$$E_t = A_t e^{-k_t \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2} z} e^{i(wt - k_t \sin \theta_t x)} = A_t e^{-z/\lambda z} e^{i(wt - k_t \sin \theta_t x)}$$

Гибкость проникновения в среду будто θ_0 :

$$\Delta z = \frac{n}{k_t \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} = \frac{n \omega t}{2 \pi t \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}$$

Энергетические соотношения при преломлении и отражении света

Плотность потока энергии световой волны с указанием направления поток-вектор Умова-Пойнгера, усредненный по времени разрешения прибора:

$$\langle \vec{S} \rangle = I \vec{n} = \epsilon_0 \epsilon v \langle |E|^2 \rangle \vec{n} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 M}} \frac{1}{2} \langle |\vec{E}|^2 \rangle \vec{n} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 M}} \frac{1}{2} |A|^2 \vec{n}$$

Котофф-т отражения (по энергии) R - модуль относительной плотности потоков энергии вдоль нормали к поверхности раздела сред отраженной и поглощенной волн:

$$R = \left| \frac{I_r \cos(\pi - \theta_r)}{I_i \cos \theta_i} \right| = \frac{I_r \cos \theta_r}{I_i \cos \theta_i} = \frac{|A_r|^2}{|A_i|^2} = |r|^2, \quad R_{II} = |r_{II}|^2, \quad R_1 = |r_1|^2$$

Когерентным пропусканиям (по Жерми) Т - модуль относительной плотности потоков Жерми вдоль нормали к поверхности раздела сред пропущенной и падающей волн:

$$T = \frac{|I_t \cos \theta_t|}{|I_i \cos \theta_i|} = \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i} = \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} \frac{|A_t|^2 \cos \theta_t}{|A_i|^2 \cos \theta_i} = \frac{n_2}{n_1} |t|^2 \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

$$T_{\parallel} = \frac{n_2}{n_1} |t_{\parallel}|^2 \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}; \quad T_{\perp} = \frac{n_2}{n_1} |t_{\perp}|^2 \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

Из формулы Френеля $\Rightarrow R + T = 1$ закон сохранения Жерми

(31) Разпространение света в анизотропных средах

Невинтиметрические оси.

Анизотропная среда - среда, в которой величины ее свойств зависят от направления.

Диагекстрические оси.

$$D_i = \epsilon_0 \sum_j K_{ij} E_j \quad (\text{где } i, j = x, y, z) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$\sum_j K_{ij}$ - тензор диагекстр. свойствами

$$\Rightarrow D_i = \epsilon_0 E_i + \epsilon_0 \sum_j K_{ij} E_j = \epsilon_0 \sum_j (\delta_{ij} + K_{ij}) E_j = \epsilon_0 \sum_j E_{ij} E_j$$

- симметричный тензор для любой среды ($E_{ij} = E_{ji}$)

Пользуясь для любой среды можно найти собственные оси тензора, в которых он диагонализуется.

Невинтиметрические оси - система координат, в которой тензор $\{E_{ij}\}$ принимает диагональный вид.

$$\{E_{ij}\} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{pmatrix} = E_I \quad \text{"нормалей"}$$

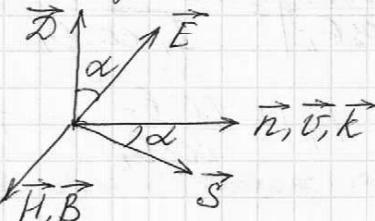
$$D_I = \epsilon_0 E_I E_I, \quad \text{где } I = x, y, z$$

$N_I = \sqrt{E_I}$ - главный показатель преломления

Линейные зоны в анизотропной среде
Структура световой волны, нормаль и ось, фазовая и
лучевая скорости

d - угол анизотропии

$$w_e = \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} = \frac{\vec{E} [\vec{n} \vec{n}]}{2v} = \frac{\vec{n} \vec{s}}{2v}$$



$$w_n = \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} = \frac{\vec{H} [\vec{n} \vec{E}]}{2v} = \frac{\vec{n} \vec{s}}{2v}$$

$$\Rightarrow w = w_e + w_n = \frac{\vec{n} \vec{s}}{v}, \quad v \text{- фазовая скорость}$$

$$s = \frac{vd\cos\alpha}{dt\cos\alpha} \Rightarrow \vec{v}_s = \frac{\vec{s}}{w} \text{ - лучевая скорость}$$

$$v = \frac{\vec{n} \vec{s}}{w} = \vec{n} \vec{v}_s = v_s \cos\alpha \quad \text{- фазовая скорость}$$

\Rightarrow фазовая скорость меньше лучевой

(32) Главные скорости. Уравнение Френеля для фазовых

(34) скоростей. Св-ва волн распространяются в заданным направлением нормали.

$$\begin{cases} [\vec{n} \vec{E}] = v \vec{B} \\ [\vec{n} \vec{H}] = v \vec{B} \end{cases} \Rightarrow \frac{[\vec{n} [\vec{n} \vec{E}]]}{\mu_0 v} = -v \vec{D}$$

$$\Rightarrow \mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n} (\vec{n} \vec{E}) - \vec{E} (\vec{n} \vec{n}) = 0$$

$$\boxed{\mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n} (\vec{n} \vec{E}) - \vec{E} = 0} \quad D_I = \epsilon_0 \epsilon_I E_I$$

$$\mu_0 v^2 D_I + \vec{n}_I (\vec{n} \vec{E}) = E_I, \quad \mu_0 v_I^2 \epsilon_0 \epsilon_I = 1$$

$$v_I = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_I}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_I}} = \frac{c}{n_I} \quad \text{- главные фазовые скорости}$$

Проекции на главные оси: $\mu_0 v^2 D_I + \vec{n}_I (\vec{n} \vec{E}) - E_I = 0$

$$(\mu_0 v^2 \epsilon_0 \epsilon_I - 1) E_I + n_I (\vec{n} \vec{E}) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_I n_I E_I + \sum_I \frac{n_I^2 (\vec{n} \vec{E})}{\frac{v^2}{v_I^2} - 1} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_I \frac{n_I^2 \frac{v^2}{v_I^2}}{\frac{v^2}{v_I^2} - 1} = 0}$$

- ур-е Френеля
для фазовых скоростей

$$\mu_0 V^2 D^2 - \sum_I E_I D_I = 0 \Rightarrow V^2 = \sum_I \frac{D_I^2}{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_I D^2} = \sum_I V_I^2 \left(\frac{D_I}{D} \right)^2$$

т.е. $\left(\frac{D_I}{D} \right)^2$ - направленические коэффициенты

т.е. направление вектора ЭДС определяется фазовую скорость.

$$\begin{cases} \mu_0 V'^2 \vec{D}' + \vec{n}(\vec{n} \vec{E}') = \vec{E}' = 0 \\ \mu_0 V''^2 \vec{D}'' + \vec{n}(\vec{n} \vec{E}'') = \vec{E}'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_0 \vec{D} \vec{D}'' (V'^2 - V''^2) - \vec{E} \vec{D}'' + \vec{E} \vec{D}' = 0$$

$$\Rightarrow \mu_0 \vec{D}' \vec{D}'' (V'^2 - V''^2) = 0$$

Если $V' \neq V''$, то $\vec{D}' \vec{D}'' = 0 \Rightarrow \vec{D}' \perp \vec{D}''$

$$\begin{cases} \vec{n} \rightarrow \vec{s} \\ \vec{E} \rightarrow \vec{D} \\ \mu_0 V^2 \rightarrow \frac{1}{\mu_0 V_S^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\mu_0 V_S^2} \vec{E} - \vec{s} (\vec{s} \vec{D}) - \vec{D} = 0$$

- ур-е Френеля для
лучевой скорости

(33) Численное значение

(35)

Свойства волн, распространяющихся в заданном направлении

1) Фазовая $\vec{V} = V \vec{n}$ и лучевая $\vec{V}_S = V_S \vec{s}$ скорости распространения в общем случае не равны по модулю ($V = V_S \cos \alpha$) и не совпадают по направлению ($\vec{n} \vec{s} = \cos \alpha$)

2) Модуль фазовой и лучевой скоростей распространения зависит от ориентации векторов электрического поля волны относительно главных дипольных осей кристалла - $V \left(\frac{\vec{D}}{D} \right)$, $V_S \left(\frac{\vec{E}}{E} \right)$.

3) В данном направлении \vec{n} могут распространяться только две линейно поляризованные волны в общем случае с разными по модулю фазовыми скоростями v' , v'' , векторов электрической индукции которых взаимно перпендикулярны $\vec{D}' \perp \vec{D}''$.

4) В заданном направлении луча \vec{s} могут расположиться только две линейно поляризованные волны в общем случае с различием по следующим лучевым скоростям - v_s' , v_s'' , вектором направления же волн которых взаимно перпендикулярных $\vec{E}' \perp \vec{E}''$

(33) Эллипсоид лучевых скоростей. Ортотропная ось.

$$(35) \frac{1}{v_s^2} = \sum_I \frac{1}{v_I^2} \left(\frac{E_I}{E} \right)^2, \quad \sum_I \frac{v_s^2}{v_I^2} \left(\frac{E_I}{E} \right)^2 = 1$$

Задана: $x_I = v_s \frac{E_I}{E}$, $R = v_s \frac{\vec{E}}{E}$ в направлении $E \cdot R = |R| = v_s$

\Rightarrow Ур-е поверхности:

$$\left(\frac{x}{v_x} \right)^2 + \left(\frac{y}{v_y} \right)^2 + \left(\frac{z}{v_z} \right)^2 = 1$$

Эллипсоид лучевых скоростей (Эллипсоид Френеля) - эллипсоид главные оси которого совпадают с главными диполетрическими осями x, y, z кристалла, а главные поверхности равны главным скоростям v_x, v_y, v_z .

В сечении лучевого эллипсоида, перпендикулярическому \vec{s} , образуется эллипс, вдоль главных осей которого направления напр-стей \vec{E}' и \vec{E}'' двух волн, перенесших энергию вдоль \vec{s} , а его главные поверхности равны модулем соответствующих лучевых скоростей v_s', v_s'' этих волн.

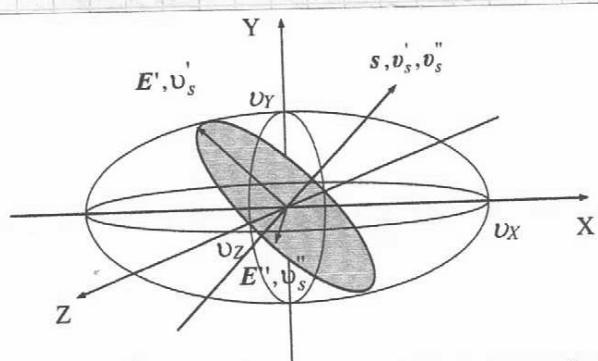


Рис. 5.4: Эллипсоид лучевых скоростей

Оптическая ось - направление в кристалле (среде),
перпендикулярное плоскости кругового сечения эллипсоида лучевых
скоростей.

Всем лучам вдоль оптической оси соответствует одна и та же
лучевая скорость, а векторы направленности электрического поля E
могут колебаться в любом направлении, перпендикулярном лучу.

Классификация анизотропных сред.

- Двухосный кристалл - $v_x \neq v_y \neq v_z$ ($\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$, $n_x \neq n_y \neq n_z$). Кристалл имеет две оптические оси, лежащие в
главной плоскости, образованной главными диэлектрическими осами,
для которых главные скорости (диэлектрические проницаемости,
показатели преломления) имеют максимальное и минимальное
значения.
- Одноосный кристалл - $v_x = v_y \neq v_z$ ($\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$, $n_x = n_y = n_z$). Эллипсоид лучевых скоростей - эллипсоид вращения вокруг оси,
для которой главная скорость отлична от остальных (N). При этом
имеется только одна оптическая ось, совпадающая с осью вращения.
- Центроидный кристалл - $v_x = v_y = v_z$ ($\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$, $n_x = n_y = n_z$). Эллипсоид лучевых скоростей - сфера. Все направления
эквивалентны и кристалл оптически изотропен.

Лучевая поверхность и ее сечение.

Ур-е Френеля для лучевых скоростей:

$$\sum_I \frac{s_I^2 v_I^2}{v_I^2 - v_S^2} = 0$$

Запись:

$$x_I = v_S s_I; \quad \vec{R} = v_S \vec{s}, \quad R = |\vec{R}| = v_S$$

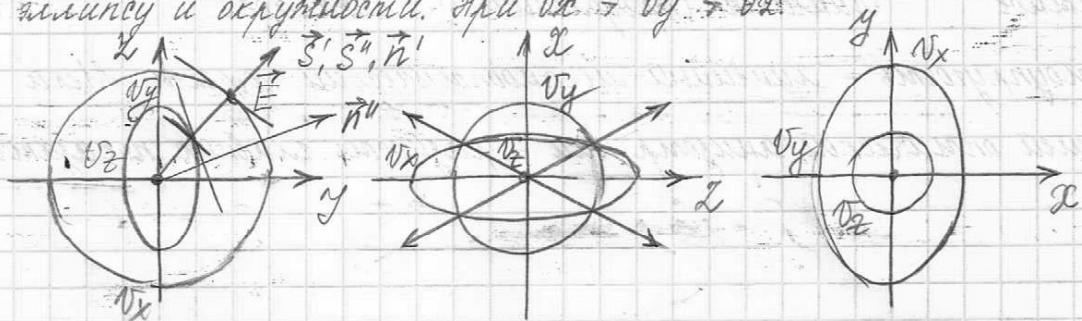
\Rightarrow Уравнение лучевой поверхности:

$$\sum_I \frac{x_I^2 v_I^2}{v_I^2 - R^2} = 0$$

Лучевая (волновая) поверхность - поверхность, до которой дойдет световое возбуждение из данной точки среды за фиксированный интервал времени.

Это двукратно отложенная самопрессекающаяся поверхность. В общем случае в каждом направлении из начала координат лучевая поверхность встречается два раза.

Главные координатные плоскости пересекают лучевую поверхность по эллипсу и окружности. При $\vec{v}_x > \vec{v}_y > \vec{v}_z$:



Строим волны для каждой точки лучевой поверхности (волны с заданным лучом) - плоскость, касательная к лучевой поверхности в этой точке.

(36) Оптические свойства односиных кристаллов.

Главная плоскость, обыкновенный и необыкновенный лучи.

Ориентированные и полонимичные кристаллы.

Односиный кристалл (среда) - кристалл (среда), для которого две главные скорости распространения волн равны.

$$V_0 \equiv V_x = V_y \neq V_z \equiv V_e \quad (\epsilon_0 \equiv \epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z \equiv \epsilon_e, n_0 \equiv n_x = n_y \neq n_z \equiv n_e)$$

Для односиного кристалла:

- одна оптическая ось, совпадающая с осью вращения - главной диэлектрической осью, для которой диэлектрическая проницаемость отлична от остальных
- элипсоид лучевых скоростей - элипсоид вращения
- лучевая поверхность - совокупность сферы и элипсоида вращения, вписанной друг в друга

Главная плоскость (главное сечение) - плоскость, образованная лучом и оптической осью - (β , 00).

Обыкновенный (ordinary) луч - луч, направлением электрического поля которого направлена перпендикулярно главной плоскости - $E_0 \perp (\beta, 00)$ (а значит и оптической оси). Ему соответствует лучевая поверхность в виде сферы. Частота и лучевая скорость равны ν_0 $V_x = V_y$ и не зависят от направления.

Необыкновенный (extraordinary) луч - луч, вектор напр-сти эл. поля которого лежит в главной плоскости $E_0 \parallel (\beta, 00)$. Ему соответствует лучевая поверхность в виде элипсоида вращения. Частота и лучевая скорости не равны ($\nu \neq \nu_0$ ($\nu < \nu_0$)) и зависят от угла между лучом и оптической осью, меняясь при этом от $\nu_0 \equiv V_x = V_y$ до $\nu_e \equiv V_e$.

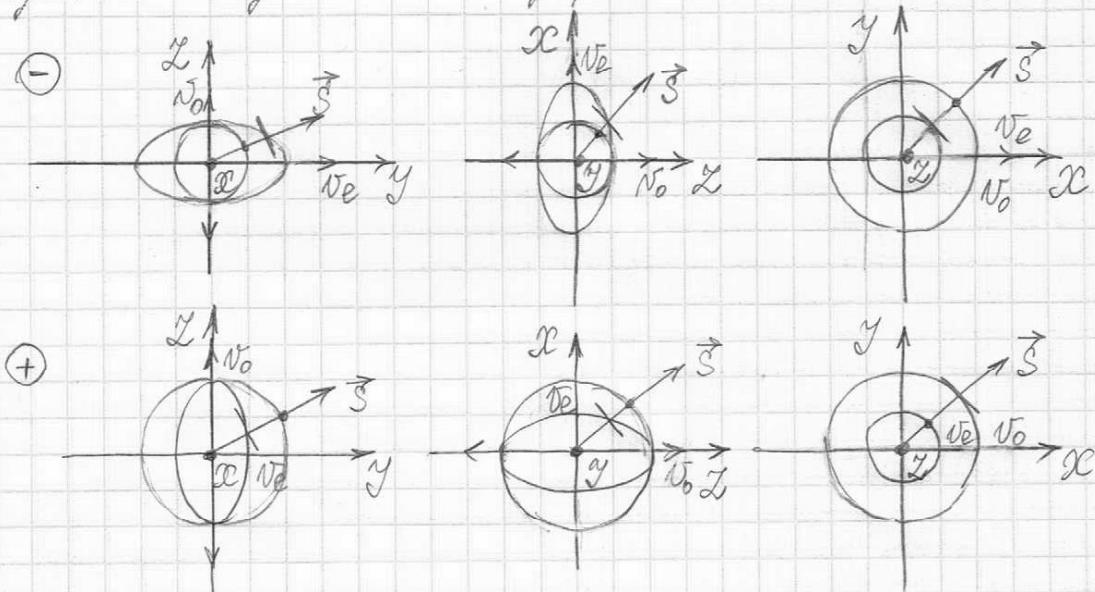
В односиной оптической среде.

- для обыкновенного луча лучевая и фазовая скорости совпадают по величине и направлению и не зависят от напряжения - $\alpha_0 = 0$, $\vec{n}_0 \cdot \vec{s}_0 = 0$.

- для необыкновенного луча они не совпадают и зависят от напряжения - $\alpha_0 \neq 0$, $\vec{n}_0 \cdot \vec{s}_0 \neq 0$.

Оптических кристаллах - если $v_0 \equiv v_x = v_y < v_z \equiv v_r$, эллипсоид вращения вращает волны вдоль оси вращения Z ; лучевая сфера вписана в сплюснутый вдоль оси Z лучевой эллипсоид вращения.

Биодиэлектрических кристаллах - если $v_0 \equiv v_r = v_y > v_x \equiv v_r$, эллипсоид вращения сплюснут вдоль оси X ; лучевая сфера охватывает вытянутый вдоль оси X лучевой эллипсоид вращения.



Двойное лучепреломление и поляризация света. Метод построения Гаусса.

Двойное лучепреломление - явление возникающее при падении на поверхность анизотропной среды плоской произвольно поляризованной волны двух преломленных лучей и вспомогательного первого поляризованных плоских волн.

Метод построения Гаусса. Основные положения:

... когда они токи, до которых доходят воздушные, становятся источником вторичных волн, иссущих светодное возмущение (возникает лучевая поверхность)

2) огибающая вторичных волн (касательная поверхность к лучевой поверхности) определяет фронт волны в последующий момент времени

Геометрическая Гаусса дает направление нормали и луча:

- перпендикуляр к огибающей лучевой поверхности из источника видуличной волны дает направление нормали
- прямая, соединяющая источник вторичной волны с точкой касания огибающей с лучевой поверхностью, дает направление луча

37

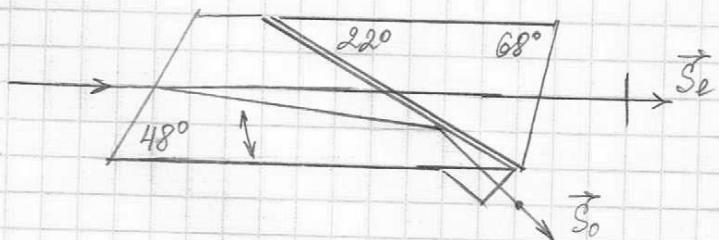
Поляризационные приборы. Получение и анализ поляризованного света. Явление дихроизма. Полероид и поляризационные призмы.

Полероид - дихорическая пластина, при прохождении сквозь один из лучей в результате поглощения сильно ослабляется, а другой выходит полностью поляризованным. В основе - явление дихроизма - зависимость поглощения света от направления поляризации.

Полеризатор - полероид, используемый для получения поляризованного света.

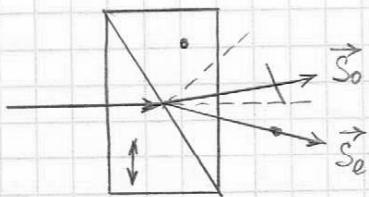
Аналитатор - полероид, используемый для анализа поляризованного света.

Поляризационная призма - комбинация кристаллов, оставляющая один поляризованный луч на выходе.



Призма Николя
(две призмы из исландского шпата)

Двухполяризаторная призма - комбинация кристаллов, оставляющая оба поляризованных луча на выходе.



Призма Воллестона
(два кристалла из исландского шпата)

Компенсатор - пластина, вдоль которой непрерывно меняется разность фаз выходящих лучей. $\Delta = (n_{e\text{d}1} + n_{o\text{d}2}) - (n_{o\text{d}1} + n_{e\text{d}2}) = (n_e - n_o)(d_1 - d_2)$; $\Delta \Psi = k_0 \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_e - n_o)(d_1 - d_2)$

Оптические пластиинки - пластиинки из оптически анидипотропных кристаллов, вносящие заданную разность фаз для неоднокровного лучей.

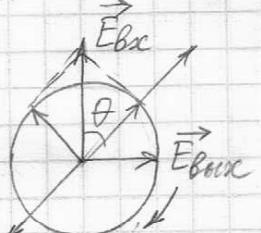
$$\Delta = (n_e - n_o)d; \Delta \Psi = k_0 \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_e - n_o)d$$

Пластиинка в четверть волны:

$$\Delta = (n_e - n_o)d = \frac{\lambda_0}{4}$$

$$\Delta \Psi = k_0 \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_e - n_o)d = \frac{\pi}{2}$$

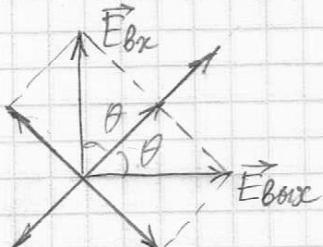
Линейное поперечное \Rightarrow циркулярное $\Rightarrow \theta = 45^\circ$
(Физическая - $\theta \neq 45^\circ$)



Пластиинка в полволны:

$$\Delta = (n_e - n_o)d = \frac{\lambda_0}{2}$$

$$\Delta \Psi = k_0 \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_e - n_o)d = \pi$$



38 Наведенные анидипотропные оптические свойства.

Механо-(электро-, магнито-) оптические эффекты - изменение оптических параметров под внешними механическими (м., маг.) воздействиями.

Оптические эффекты, вызванные внешним воздействием

Воздействие \rightarrow тип эффекта \rightarrow Эффект

Механическое \rightarrow Линейный (поперечный) \rightarrow Фотоупругость

Электрическое \rightarrow Линейный (поперечный) \rightarrow Боккальса

Электрическое \rightarrow Квадратичный (поперечный) \rightarrow Керра

Магнитное \rightarrow Квадратичный (поперечный) \rightarrow Коулом-Люмона

Магнитное \rightarrow Расщепление (прод. и попереч.) \rightarrow Зеемана

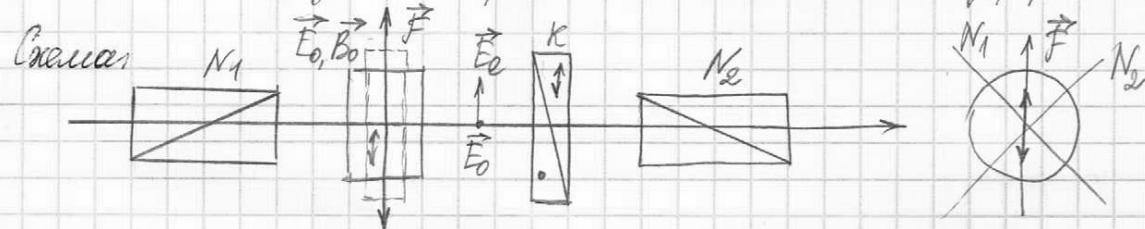
Магнитное \rightarrow Линейный (продольный) \rightarrow Чардис

Фотоупругость - линейный механооптический эффект. Мера

воздействия оптической анизотропии - разность главных показателей

преломления для необыкновенной п.п. ($E_0 \parallel F$) и необыкновенной п.п. ($E \perp F$)

Бол. Механизм - направленная механическая деформация тела.



Белый свет \Rightarrow окрашивание из-за зависимости наблюдаемой разности фаз $\Delta\phi$ от частоты и распределение напряжения внутри образца.

Эффект Боккальса - линейный электрооптический эффект. Схема опыта для обнаружения эффекта Боккальса (также, как и эффекта Керра) аналогична схеме наблюдения фотоупругости. Отличие - образец (твердое тело, пиджас или газ) помещается между обкладками плоского конденсатора. Механизм - гармонизированное смещение связанных зарядов в кристалле. Линейный оптический эффект набл.-ся только в кристаллах, не обладающих центром симметрии.

Эффект Керра - квадратичный электрооптический эффект в

центрально симметрического среда (изменение характеристик при преобразовании инверсии - смене направления E_0 на обратное).

Механизм - поляризация и ориентация анизотропных молекул.

Явление Комптона-Мутонса - квадратичный магнитооптический эффект в поперечном магнитном поле. Механизм - ориентация анизотропных молекул, обладающих же (аналогично механизму) поведение поларизованных молекул в эффекте Жерара.

+ 41

(40) Рассеяние света.

Рассеяние света - возмущение световых полей на оптических пространственных неоднородностях среды.

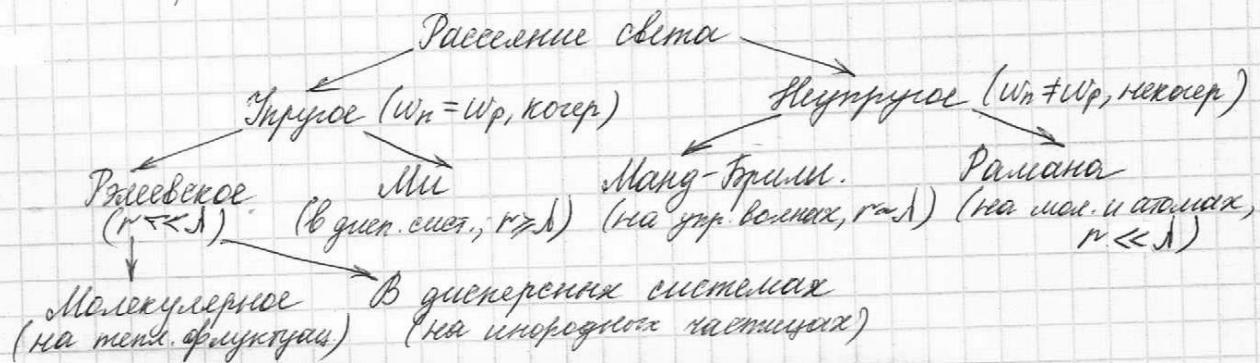
Оптические неоднородности - включение искривленных частиц и изменяющие оптические свойства среды (тепл. флукутуации ρ , c , E^{μ} , p_i)

Процесс рассеяния света состоит в заимствовании молекулой или частицей энергии у распространяющейся в среде волны и последующем излучении всей или части этой энергии.

Упругое рассеяние - частота рассеянного света ω_r равна частоте падающего света ω_p ; сохраняются фазовые соотношения между падающей и рассеянной волнами - когерентное рассеяние.

Неупругое рассеяние - частота рассеянного света ω_r не равна частоте падающего света ω_p ; фазовый сбой - некогерентное рассеяние.

Стоково рассеяние - $\omega_r < \omega_p$. Анимистическое рассеяние - $\omega_r > \omega_p$.



Рассеяние - упругое количественное рассеяние света на оптических неоднородностях, размеры которых $\ll \lambda$.

Виды рассеяния:

1). Малокулочное рассеяние - рассеяние света на мелких статистически независимых флюктуации оптических свойств макроскопически однородной среды, не содержащей примесей

2). Рассеяние в дисперсных системах - на иодородных частицах ($\ll \lambda$), содержащихся в макроскопически однородной (дисперской) среде

3). Рассеяние Мю - упругое рассеяние в дисперсных системах на частицах с $r \approx \lambda$.

4). Рассеяние Мандельштама-Бриллюана - неупругое рассеяние на измененных плотностями чистой макроскопически однородной конденсированной среды, в которой распространяются упругие волны

5). Комбинационное рассеяние (Фанана) - неупругое рассеяние света молекулами и атомами.

Индикаторы рассеяния, сечение и коэффициенты рассеяния.

Индикаторы рассеяния - пространственные диаграммы зависимости интенсивности $I(r, \Omega)$ рассеянного света от полевого угла Ω (направления) рассеяния на данном расстоянии r от светорассеивателя.

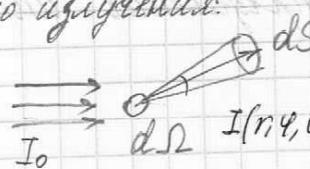
Дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$ - отношение полного перши и излучение dI , рассеянного в малый полевый угол $d\Omega$, к интенсивности падающего излучения I_0 :

$$d\sigma(\Omega) = \frac{dI(\Omega)}{I_0} = \frac{I(r, \Omega) dS}{I_0} = \frac{I(r, \Omega) r^2 d\Omega}{I_0}, [d\sigma] = \mu^2$$

Полное сечение рассеяния σ - отношение полного полюса першии

рассеянного света к интенсивности падающего излучения:

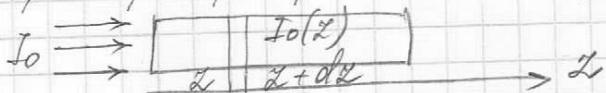
$$\sigma = \frac{I}{I_0} = \int_0^{\pi} \frac{I(r, \Omega) r^2 d\Omega}{I_0} = \int_S d\Omega$$



Коэффициент рассеяния - отношение плотности потока энергии излучения, рассеянного данным методом, к падающему на него потоку энергии излучения с поперечным сечением площадью S :

$$k_s = \frac{I}{I_0(S)} = \frac{I}{I_0 S} = \frac{\sigma}{S}, [k_s] = 1$$

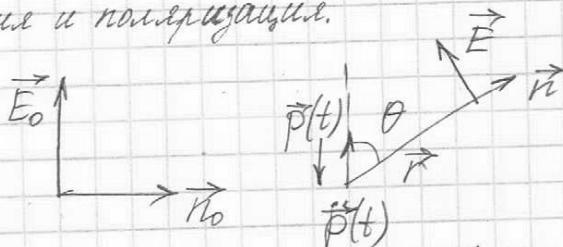
Ослабление интенсивности света. В результате рассеяния плотность потока энергии распространяющейся в среде света уменьшается.



Изменение плотности потока излучения при рассеянии света склон dx пропорционально плотности падающего потока и толщине склона:

$$I_0(z+dx) - I_0(z) = dI_0 = -dS I_0(z) dx, I_0(z) = I_0(0) e^{-dsz}$$

Излучение линейчатого рассеяния. Закон Гаусса, индикаторика рассеяния и поле радиации.



$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos \omega t, \vec{p} = q\vec{t}, \ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2 \vec{p}(t)$$

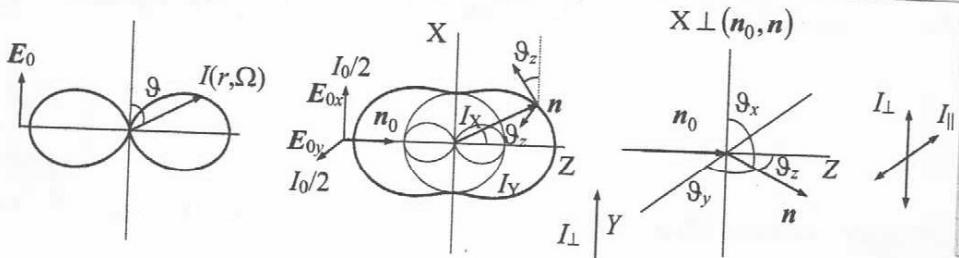
$$\vec{H}(t, \vec{r}) = -\frac{1}{4\pi c} [\vec{n} \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})]$$

$$\text{rot } \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow [\vec{n} \vec{H}] = -c \vec{D} = -c \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} [\vec{n} [\vec{n} \vec{p}(t - \frac{r}{c})]]$$

Числовое распределение интенсивности рассеянного излучения (индикаторика рассеяния) в. после падающей линейно поляризованный

$$I(r, \theta) = \langle E^2 \rangle = \frac{w^4}{(4\pi E_0 c^2 r)^2} \tilde{P}^2 \sin^2 \theta$$



Падающий свет не поляризован (с сопоставимой неоднородностью):

$$I(\vec{n}) = I_x(\theta_x) + I_y(\theta_y) \approx \frac{\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y}{2} = \frac{1 + \cos^2 \theta_z}{2} = I(\theta_z)$$

Здесь I_x и I_y - интенсивности рассеянного света, который образован линейно поляризованными вдоль осей X и Y некоррелированными компонентами падающего света. Неполяризованный свет, рассеянный под углом к первичному пучку, становится частично поляризованным.

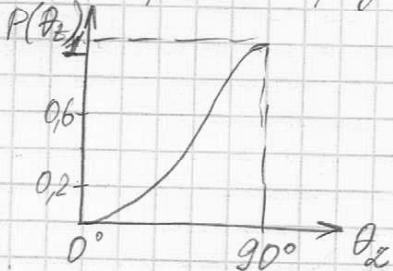
Степень поляризации:

$$P \equiv \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{I_{\perp} + I_{\parallel}}$$

где I_{\perp} и I_{\parallel} - интенсивности рассеянного света, который поляризован вдоль и поперек плоскости (\vec{n}_0, \vec{n})

также $OZ \perp (\vec{n}_0, \vec{n})$, то $\theta_x = \frac{\pi}{2}, \theta_y = \frac{\pi}{2} - \theta_z$

$$P = \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} = \frac{\sin^2 \theta_x - \sin^2 \theta_y}{\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y} = \frac{\sin^2 \theta_z}{1 + \cos^2 \theta_z} = P(\theta_z)$$



Молекулярное рассеяние света

Молекулярное рассеяние - релаксационное (упругое, при $\omega < \omega_0$) рассеяние света на мелковолновых статистически независимых флукутирующих оптических свойствах макроскопически однородной среды, не содержащей примесей.

Статистическая теория рассеяния.

Основные положения:

- размеры оптических неоднородностей малы по сравнению с длиной волны света

- положение краёв областей неоднородности не зависит от положения других областей

- взаимодействие областей неоднородности можно пренебречь

Основная причина статистических (тепловых) флуктуаций оптических свойств - флуктуации плотности среды.

Формула Зиннелмана и Гелье.

Формула Зиннелмана для рассеяния света в газах и жидкостях

запись:

$$I = I_0 \frac{w^2}{(4\pi c^2 r)^2} \left(\rho \frac{\partial E}{\partial p} \right)_T V \beta_T k T \sin^2 \theta$$

Формула Гелье для рассеяния света в случае разреженных газов:

$$I = I_0 \frac{w^2}{(4\pi c^2 r)^2} 4(n-1)^2 \frac{V}{N} \sin^2 \theta$$

Особенности молекулярного рассеяния:

1. Частота интенсивности рассеянного света - как у молекуларного рассеяния:

- линейно поляризованное излучение - $I(\Omega) \sim \sin^2 \theta$

- естественная поляризация - $I(\Omega) \sim \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}$

2. Поларизация рассеянного света:

- от изотропных молекул - как у молекуларного рассеяния:

$$\text{степень поляризации } P(\theta_2) = \frac{I_I - I_{II}}{I_I + I_{II}} = \frac{\sin^2 \theta_2}{1 + \cos^2 \theta_2}$$

- от анизотропных молекул - деполяризация света при

$$\text{коэффициент деполяризации } \gamma = \frac{I_{II}}{I_I} \quad (\theta_2 = \frac{\pi}{2})$$

3. Закон Гелье - $\Phi \sim w^2 / d^2$ - как у молекуларного рассеяния

4. Кривизна опалесценции - это - e возрастание интенсивности рассеянного излучения близи кривизненной молекулы из-за возрастания флуктуаций и соответственно возрастание изотермического сплешения.

б. Селективное по частоте рассеяние - интенсивность рассеянного излучения возрастает близи собственных частот линейчатого рассеяния $\omega \approx \omega_0$, поскольку $I \propto (n-1)^2$.

(39) Излучение атома. Классическая осцилляторная модель атома.

Будет в атоме есть всего один оптический электрон.
По определению электрического dipольного момента:

$p(t) = q\vec{r}(t)$, где q - заряд электрона, $\vec{r}(t)$ - положение электрона относительно ядра

$m\ddot{\vec{r}}(t) \approx 1836$

Электрон в атоме - замукивающий гармонический осциллятор, колебания которого описываются классическим уравнением движения:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - k\vec{r}$$

Уравнение движения электрона:

$$\ddot{\vec{r}} + 2\delta\dot{\vec{r}} + k\vec{r} = 0$$

где $\delta = \frac{k}{2m}$ - коэффициент радиационного замукивания, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - собственная частота колебаний электрона в атоме без замукивания.

Такое $\delta < \omega_0$ назовем движением:

$$\vec{r}(t) = \vec{x}_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - частота замукивания, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - период замукивания
Средняя мощность потреб:

$$\langle P \rangle_T = \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle_T = \frac{d\langle W \rangle_T}{dt} = -2\delta\omega_0 e^{-2\delta t} = -\delta m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t}$$

При таком движении расходится сумма электронов по всем направлениям:

$$\begin{aligned} J &= \oint_{\Sigma} I(t, \theta) d\sigma = \iint_0^{2\pi} E_0 C \frac{\omega^2}{(4\pi E_0 C^2 r)} \overline{P^2(t)} \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= E_0 C \frac{\omega^2}{(4\pi E_0 C^2)^2} \overline{P^2(t)} \frac{8}{3}\pi \frac{\omega^4}{6\pi E_0 C^3} \overline{P^2(t)} \approx \frac{\omega_0^4}{6\pi E_0 C^3} \frac{1}{2} q^2 x_0^2 \ell^{-2\delta t} \\ &\Rightarrow \delta = \frac{1}{12\pi E_0} \frac{q^2 \omega_0^2}{mc^3} \end{aligned}$$

Время радиационного затухания (время излучения):

$\tau = \frac{1}{\delta}$ - время, через которое амплитуда колебаний осциллятора уменьшается в e раз:

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{12 \pi \epsilon_0 m c^3}{q^2 w_0^2}$$

Симметричная форма и ширина линии излучения.

В соответствии с законом движения осциллятора его механический дипольный момент меняется со временем по закону:

$$\vec{p}(t) = q\vec{x}(t) = \vec{p}_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

В то же время напряженность электрического поля, излучаемой им электромагнитной волны определяется второй производной дипольного момента по времени:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [\vec{n} [\vec{n} \vec{p}'(t - \frac{r}{c})]]$$

$$\delta \sim 10^8 \text{ c}^{-1} \ll \omega_0 \sim 10^{15} \text{ c}^{-1}$$

$$\Rightarrow \vec{p}'(t) \approx -i\omega_0 \vec{p}_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \vec{E}(t) \approx \vec{E}_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\text{В проекции: } E(t) \approx E_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Ширина линии на половине высоты:

$$\Delta \omega = 2\delta = \frac{2}{\tau} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 m c^3} \frac{q^2 \omega_0^2}{}$$

Спектральная интенсивность для напряжения пол. колебаний излучения (спектр спектр):

$$|E(\omega)|^2 = \left(\frac{E_0}{\Delta \omega} \right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta \omega / 2} \right)^2}$$

Лоренцева форма линии образуется при "естественных" условиях излучения, когда единственным фактором, влияющим на излучение осциллятора, является радиационное затухание. Тогда эта форма называется естественной формой линии излучения, а ширина линии излучения $\Delta \omega$ — естественной шириной линии излучения.

142 Излучение ассоциации статистически независимых осцилляторов.

Ударное уширение.

В газе при комнатной температуре и нормальном давлении среднее время между столкновениями атомов $20 \sim 10^{-11}$ с. Оценка времени замедления естественного излучения атомного осциллятора дает $\tau \sim 10^{-8}$ с. Для выбранных условий за время излучения атом пропадает $\sim 10^3$ соударений. После каждого столкновения радиоиспускаемой волны меняется случайным образом. Весь процесс излучения разбивается на отдельные акты излучения со средней продолжительностью 20. Так как ширина линии излучения обратно пропорциональна времени излучения, то из-за соударений ширина линии в рассматриваемых условиях будет примерно в 10^3 раз больше естественной ширины линии излучения.

Доплеровское уширение.

$$\Delta W_L = \frac{2}{\tau_0} = \frac{8\sqrt{\pi d^3 p}}{\sqrt{mk_B T}}$$

Доплеровское уширение.

Будь излучающий осциллятор участвует в тепловом движении. Тогда в соответствии с теорией Доплера излучающая им частота не равна частоте излучения покоящегося атома.

Доплеровское уширение.

$$\Delta W_G = W_0 \sqrt{\frac{8k_B T \ln 2}{mc^2}} \sim \sqrt{T}$$

Разделение об однородном и неоднородном уширении.

1. Однородный ансамбль осцилляторов - ансамбль, в котором осцилляторы имеют одинаковые частоты колебаний.

Однородное уширение спектральная линия - спектральная линия однородного ансамбля осцилляторов, равная суммированию спектральных линий отдельных осцилляторов.

Однородная ширина $\Delta\omega$ характеризует спектр колебаний ансамбля осцилляторов с одинаковыми собственными частотами.

Границы - однократность квантовых состояний атомов или молекул, однородность изотропного или химического состава среды.

Этот тип уширения присущ спектрам отдельных осцилляторов.

Формы спектральных линий отдельных осцилляторов и всего однородного ансамбля осцилляторов совпадают.

Примеры - естественное (радиационное) и ударное уширение.

2. Неоднородный ансамбль осцилляторов - ансамбль, в котором осцилляторы имеют разные собственные частоты колебаний.

Неоднородное уширение спектральная линия - спектральные линии неоднородного ансамбля осцилляторов, равные суммой двух спектральных линий отдельных осцилляторов.

Неоднородная ширина $\Delta\omega^*$ характеризует спектр колебаний ансамбля осцилляторов с различными собственными частотами (ширина полосы резонансных частот).

Границы - различные квантовые состояния атомов или молекул, неоднородность изотропного или химического состава среды, хаотическое тепловое движение.

Этот тип уширения присущ только спектру ансамбля осцилляторов, но не спектрам отдельных осцилляторов.

Примеры - доплеровское, изотопическое, вращательное уширение.