1. Э/м теория света. Ур-ия Максвелла и материальное ур-ие. Волновое ур-ие. Принцип суперпозиции. Бегущие э/м волны. Скорость света. Плоские и сферические волны. Комплексное представление гармонических волн.

Свет – электромагнитные волны. Оптика – наука, изучающая природу оптического излучения (света), его распространение и взаимодействие с веществом. Сейчас неоспоримо утверждение о том, что оптическое излучение представляет собой э/м волны. Поэтому оптика является частью общего учения об э/м поле.

Уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} & (1) \\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho & (3) \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \end{cases}$$

Материальные уравнения среды:

$$\begin{cases} \vec{D} = \vec{D}(\vec{E}) \\ \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}) \\ \vec{j} = \vec{j}(\vec{E}) \end{cases}$$

Вид этих функций зависит от свойств материальной среды, в которой распространяется волна.

Для вакуума ($\vec{j}=0$, $\rho=0$) материальные уравнения имеют простейший вид: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 H$, где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \Phi/м$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Гн/м$

grad div?

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu_0\, \mathrm{rot}\,\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{H}$$

в вакууме: $\left.\begin{array}{l} (1):\ j=0 \Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ (3):\ \rho = 0 \Rightarrow \varepsilon_0\, \mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Окончательно имеем: $\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}}$ – волновое уравнение

$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$ – скорость э/м волны (скорость света)

Аналогичное волновое уравнение можно получить и для вектора $\vec{H}$: $\boxed{\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{H}}$

Если записать оба векторных волновых уравнения в скалярном виде, то получим шесть одинаковых волновых уравнений вида: $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f$, где под f подразумевается любая из 6 компонент $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ э/м поля. Функция f называется уравнением волны

принцип суперпозиции для световых волн

$$\vec{f}(t, \vec{r}) = \sum_i \vec{f}_i (t, \vec{r})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}(t, \vec{r})}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_\mu} \Delta \vec{f}(t, \vec{r})$$

Бегущая волна - волна, которая при распространении в среде переносит энергию. Также как и в случае упругой деформации, передача энергии от точки к точке в э/м волне связана с тем, что волны электрической и магнитной напряжённостей находятся в одной фазе

Пусть функция f зависит лишь от сферической координаты $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, тогда $f(x, y, z) = f(r, t)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{x}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right).$$ Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf).$$ Пусть $\varphi = rf$, тогда: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$

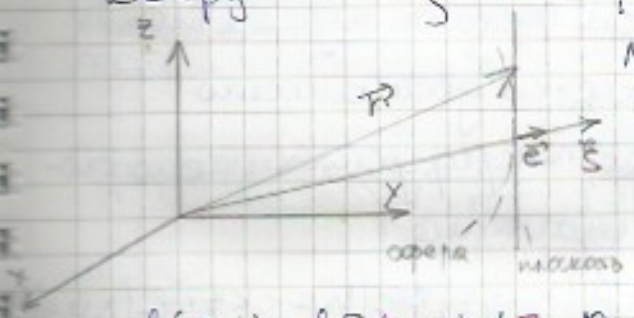
Решение этого волнового уравнения представляет собой суперпозицию волновых возмущений, движущихся

навстречу друг другу: $\psi(r,t) = \varphi_1(t - r/c) + \varphi_2(t + r/c)$, где φ_1, φ_2 – произв ф-ии

Окончательно ур-ие сферической волны примет вид:

$$f(r,t) = \frac{\varphi_1(t - r/c)}{r} + \frac{\varphi_2(t + r/c)}{r}$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой сферическую волну, расходящуюся от начала координат, а второе – сходящуюся к началу координат. Важно отметить, что у расходящейся волны возмущение ослабевает обратно пропорционально пройденному волной расстоянию, а у сходящейся, наоборот, нарастает. На больших расстояниях от начала координат фрагмент сферической волны может быть представлен в виде плоской волны. Если ввести $\vec{e}$, то ф-ия постоянна на плоскости $\vec{r}\cdot\vec{e} = const$ и зависит только от координаты $\xi = \vec{r}\cdot\vec{e}$, отсчитываемой вдоль направления нормали к плоскости.



Поэтому уравнение плоской волны должно зависеть от координаты и времени след. образом:

$f(\vec{r},t) = f[\underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{e})}_{\xi}, t]$. Отсюда: $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$

$\mapsto f(\xi,t) = f_1(t - \xi/c) + f_2(t + \xi/c)$, где f_1 и f_2 – произв ф-ии.

Окончательно уравнение плоской волны примет вид:

$$f(\vec{r},t) = f_1\left(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{e}}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{\vec{r}\cdot\vec{e}}{c}\right)$$

В отличие от сферической волны возмущение в плоской волне не изменяется с пройденным волной расстоянием.

Ур-ие гармонической волны:

$f(x,y,z,t) = A(x,y,z)\cos[\omega t - \varphi(x,y,z)]$

Комплексное представление ур-ия волны:

$$f = \frac{1}{2}\left[Ae^{i(\omega t-\varphi)} + Ae^{-i(\omega t-\varphi)}\right]$$

Если ввести комплексную амплитуду $\hat{A} = Ae^{i\varphi}$, то получим комплексное представление гарм. волны:

$$f = \frac{1}{2}\left[\hat{A}e^{i\omega t} + \hat{A}^{*}e^{-i\omega t}\right]$$

② Световые пучки и импульсы. Модели реальных световых волн. Квазиплоская гармоническая волна. Квазигармоническая волна. Случайно модулированные волны. Энергетика световых пучков и импульсов.

Световые пучки. В оптическом диапазоне могут формироваться направленные пучки света, которые распространяются преимущественно вдоль одной координатной оси. В поперечном же направлении амплитуда быстро спадает от середины пучка к его периферии. Такие пучки создаются достаточно просто с использованием лазеров, генерирующих монохроматическое и направленное излучение

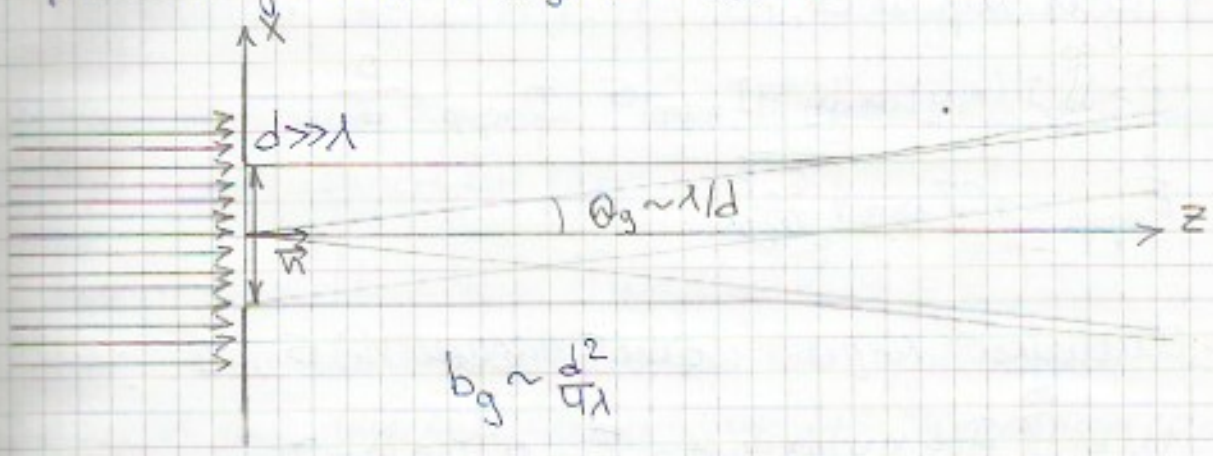
Если вдоль Oz: $f(x,y,z,t) = A(x,y,z)\cos[\omega t - kz + \varphi_0(x,y,z)]$

Световые импульсы. Многие источники света (напр. лазеры) излучают световые вспышки. Эти вспышки длятся ограниченное время τ_0 и представляют собой электромагнитные импульсы.

Если вдоль Oz: $f(x,y,z,t) = A(x,y,z,t-\frac{z}{c})\cos[\omega t - kz + \varphi_0(x,y,z,t-\frac{z}{c})]$

Модели реальных световых волн
Квазиплоская и квазисферическая гармонические волны (пучки)

Граничное условие: $f(t,x,y,0)=a(x,y)\cos(\omega t+\varphi_0)$, $d \gg \lambda \sim 0{,}5\cdot10^{-6}$ м, d – масштаб модуляции,



θ_g – угол дифракц. расходим.

b_g – дифр. длина пучка

Гармонические волны:

Квазиплоская – $z \ll b_g$ (зона геометр. оптики) $\quad f(t,x,y,z)=a(xy)\cos(\omega t-kz+\varphi_0)$

Квазигармонические волны (импульсы)

Граничное условие: $f(t,x,y,0)=a(t,x,y)\cos(\omega t+\varphi_0(t))$

$\tau \gg T \sim 2\cdot10^{-15}$ с

Квазиплоская	$z \ll b_g$	$f(t,x,y,z)=a(t-z/v,x,y)\cos(\omega t-kz+\varphi_0(t-z/v))$
Плоская	$z \ll b_g$, $R=\sqrt{x^2+y^2} \ll d$	$f(t,z)=a(t-z/v)\cdot\cos(\omega t-kz+\varphi_0(t-z/v))$
Квазисферическая	$z \gg b_g$	$f(t,k_x,k_y,r)=\frac{a(t-r/v,k_x,k_y)}{r}\cos(\omega t-kr+\varphi_0(t-r/v))$
Сферическая	$z \gg b_g$, $R \ll \theta_g r \sim \frac{\lambda r}{d}$	$f(t,r)=\frac{a(t-r/v)}{r}\cos(\omega t-kr+\varphi_0(t-r/v))$
Плоская с убыванием	$z \gg b_g$, $R \ll \sqrt{r\lambda}$	$f(t,z)=\frac{a(t-z/v)}{z}\cos(\omega t-kz+\varphi_0(t-z/v))$
Плоская	$z \gg b_g$, $R \ll \sqrt{r\lambda}$, $\Delta z \ll z$	$f(t,z)=a(t-z/v)\cos(\omega t-kz+\varphi_0(t-z/v))$

Случайно модулированные волны

Источник (с линейными размерами $D \sim 10^{-3}-10^{-2}$ м) – совокупность большого числа ($10^{+19}-10^{22}$ см$^{-3}$) одинаковых независимых элементарных ($d \sim 10^{-10}$ м) излучателей ($\tau \sim 10^{-11}-10^{-8}$ с)

• Пучок хар-ся σ, P

$$P = \iint_{-\infty}^{\infty} I(x,y)\,dx\,dy = I_{эфф}\,\sigma \qquad I_{эфф} = \frac{P}{\sigma}$$

$$E_{эфф} = \sqrt{2 I_{эфф} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}}}$$

≈ 377 в СИ

τ – хар время модуляции (длит)

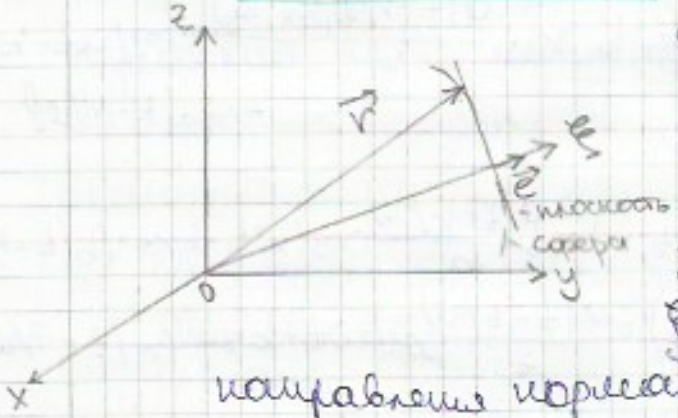
• Импульс х-ся полной энергией W, σ, τ

$$W = \iiint_{-\infty}^{\infty} I(t,x,y)\,dx\,dy\,dt = I_{эф}\,\sigma\,\tau = P_{эф}\,\tau$$

$$P_{эф} = \frac{W}{\tau}\ ; \quad I_{эфф} = \frac{W}{\sigma\tau}$$

③ Волновое ур-ие. ОР в виде плоских волн. Св-ва плоск волн: ориентация и взаимосвязь полевых векторов. Поляризация света. Классификация состояний поляризации. Поляризация естеств. света.

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}}$$ – волновое уравнение



Пусть f – уравнение волны. Если ввесть единичный нормальный вектор $\vec{e}$, то ф-ия f постоянна на плоскости $\vec{r}\cdot\vec{e} = const$ и зависит только от координаты $\xi = \vec{r}\vec{e}$, отсчитываемой вдоль направления нормали к плоскости. Поэтому уравнение плоской волны должно зависеть от координаты и времени следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &f(\vec{r},t) = f[(\vec{r}\vec{e}),t] \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

Решением этого уравнения является суперпозиция двух плоских волн, движущихся навстречу друг другу: $f(\xi,t) = f_1\left(t - \frac{\xi}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{\xi}{c}\right)$

$$\boxed{f(\vec{r},t) = f_1\left(t - \frac{\vec{r}\vec{e}}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{\vec{r}\vec{e}}{c}\right)}$$ – общее решение в виде плоских волн

В плоской волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ зависят от координат и времени следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}\left(t \mp \frac{\vec{r}\vec{e}}{c}\right); \quad \vec{H}(\vec{r},t) = H\left(t \mp \frac{\vec{r}\vec{e}}{c}\right)$$

Установим связь и ориентацию векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.
Выбирая для определённости знак „–", будем тем самым ∆ плоскую э/м волну, распространяющуюся вдоль вектора $\vec{e}$.
Подставим $\vec{E}(\vec{r},t)$ и $\vec{H}(\vec{r},t)$ в первые два уравнения Максвелла. Пусть $t' = t - \frac{\vec{r}\vec{e}}{c}$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\vec{e}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t'} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t'} \\ \operatorname{rot}\vec{H} &= -\frac{1}{c}\vec{e}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t'} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t'} \end{aligned}\right\} \mapsto \left.\begin{aligned} \frac{1}{c}\vec{e}\times\vec{E} &= \mu_0 H \\ -\frac{1}{c}\vec{e}\times\vec{H} &= \varepsilon_0\vec{E} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_0}\,\vec{e}\times\vec{E} &= \sqrt{\mu_0}\,\vec{H} \\ \sqrt{\mu_0}\,\vec{e}\times\vec{H} &= \sqrt{\varepsilon_0}\,\vec{E} \end{aligned}}$$

Отсюда следует несколько важнейших выводов. В плоской бегущей волне:

а) Векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{e}$ взаимно перпендикулярны, поэтому волна является поперечной.

б) Эти векторы образуют правую тройку векторов

в) Величины напряжённостей эл. и магн. полей изменяются во времени синхронно, достигая одновременно максимальных и минимальных значений.

$$\sqrt{\varepsilon_0}\,E = \sqrt{\mu_0}\,H$$

Поляризация волн – характеристика поперечных волн, описывающая поведение вектора колеблющегося величины в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

Классификация состояний поляризации:

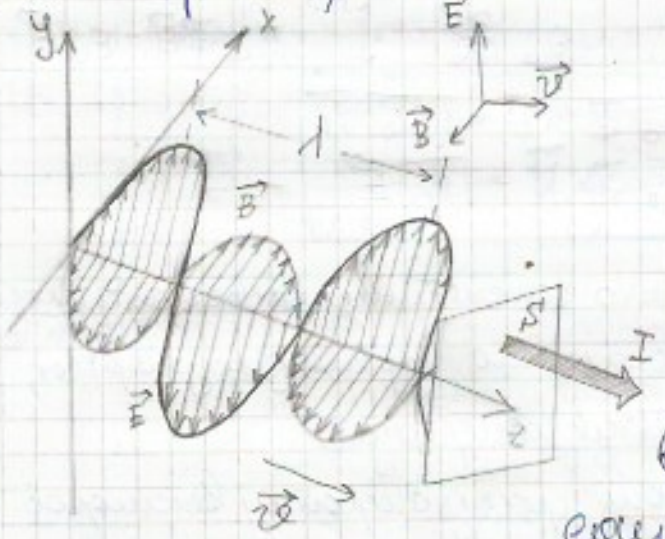
а) линейная поляризация

б) эллиптическая поляризация

в) циркулярная поляризация

Излучение естественных источников представляет собой пример Э/М волн со всевозможными равновероятными ориентациями вектора $\vec{E}$, т.е. с неопределённым состоянием поляризации.

④ Поток и плотность потока энергии Э/М волн. Вектор Умова - Пойнтинга. Интенсивность света. Закон изменения энергии Э/М поля.



Поток энергии Э/М волны - энергия, переносимая волной в единицу времени

Плотность потока энергии Э/М волны - энергия, переносимая волной за единицу времени через площадку единичного сечения, ориентированную перпендикулярно распространяющейся волне. Эта характеристика определяется вектором Умова-Пойнтинга $\vec{S}$:

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]$$

Поток энергии „пульсирует" с течением времени. Поэтому на практике пользуются усреднённой за период величиной плотности потока энергии. Эта величина

называется интенсивностью волны и равна:

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle_T$$

В случае плоской гармонической волны: $S_z = E_x H_y$
(вектор имеет лишь z-компоненту распространения)

т.к. $E_x = A\cos(\omega t - kz)$

$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_x = c\varepsilon_0 E_x$

$S_z = c\varepsilon_0 A^2 \cos^2(\omega t - kz)$

$I = \langle S_z \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S_z dt = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 A^2$

Обозначим w и объёмную плотность энергии э/м поля:

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} + \mu_0 \vec{H}\vec{H})$$

$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ $\qquad$ $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\vec{H}\,\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu_0 \vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ $\qquad$ $\vec{E}\,\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}\vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\underbrace{\vec{E}\,\mathrm{rot}\vec{H} - \vec{H}\,\mathrm{rot}\vec{E}}_{-\mathrm{div}[\vec{E}\times\vec{H}]} = \vec{j}\vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\vec{S} + \varepsilon_0 \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{j}\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\vec{S} + \vec{j}\vec{E} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$ — теорема Пойнтинга или закон сохранения энергии э/м поля.

⑤ Плоские импульсы э/м волны. Давление световых волн на поверхность. Импульс фотона. Световая энергия переносится фотонами, или квантами света.

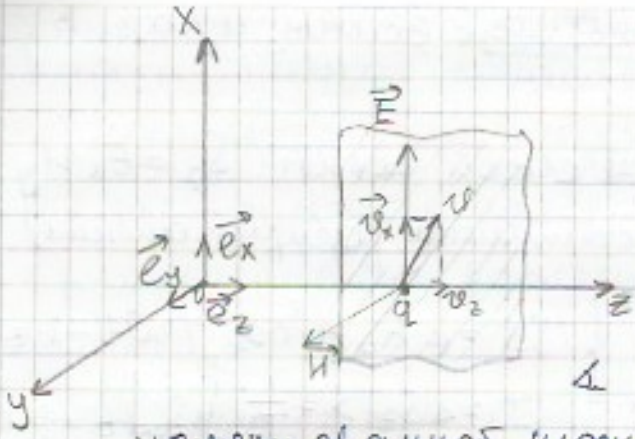
$$\varepsilon = h\nu \qquad h = 6{,}62\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}$$

$I = nc\varepsilon = nch\nu$

$nch\nu = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 A^2$

$A = \sqrt{\frac{2nh\nu}{\varepsilon_0}}$

Плотность импульса э/м волны



Световое давление – результат действия конфигурационных сил со стороны э/м поля на движущиеся заряды в макроскопическом теле.

∠ нормальное падение линейно поляризованной плоской волны на поверхность твердого тела

Этот на частицу с q, $v_x\vec{e}_x$. Магнитное поле „заталкивает" её внутрь тела. $v_z\vec{e}_z$. Через полупериода $\vec{E}$, $\vec{H}$, $v_x\vec{e}_x$ на противоположные, но магнитное поле „заталкивает" по-прежнему частицу вдоль оси Oz внутрь тела. Это и является причиной светового давления.

$$\vec{F}_л = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = qE_x\vec{e}_x + q(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z)\times B_y\vec{e}_y$$

$$\langle\vec{F}_л\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\vec{F}(t)dt = q\underbrace{\langle E_x\rangle}_{0}\vec{e}_x - q\underbrace{\langle v_z B_y\rangle}_{v_z\langle B_y\rangle=0}\vec{e}_x + q\langle v_x B_y\rangle\vec{e}_z$$

$$\langle f\rangle = q\langle v_x B_y\rangle\vec{e}_z$$

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F}\vec{v} = qE_x v_x = cq\,v_x B_y \qquad \left\{E_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}H_y = cB_y\right\}$$

$$\underset{\text{м.з. давления}}{\langle f\rangle} = \frac{1}{c}\underset{\text{м.з. энергии}}{\left\langle\frac{dW}{dt}\right\rangle}\vec{e}_z$$

$p = \frac{I}{c}$ Но давление численно равно среднему импульсу, передаваемому волной единице площади за единицу времени:

$$p = \frac{d}{dt}K \;;\quad K = \frac{1}{c}\int I(t)dt$$

$$p = \frac{I}{c}(1+R)$$

Импульс фотона (сонаправлен с вектором скорости фотона) $\quad K = \frac{1}{c}\int I(t)dt \;;\; I = nch\nu$

$$K = \frac{nch\nu t}{c},\ \boxed{p_ф = \frac{h\nu}{c}}\ (n\,c\,t\text{ – число фотонов})$$

⑥ Метод спектрального описания волновых полей. Преобразование Фурье. Интеграл и коэффициенты Фурье. Комплексная спектральная амплитуда, спектральная плотность, спектры амплитуд и фаз, их свойства.

а) Суть метода: разложение реального волнового поля (импульса и пучка света) на совокупность эталонных волн

б) Основа метода: принцип суперпозиции волновых полей и преобразование Фурье.

Любую абсолютно интегрируемую на интервале $-\infty<t<+\infty$ ф-ию $f(t)$ можно представить в виде интеграла Фурье:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t]\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f_0(\omega)\cos(\omega t-\varphi(\omega))\,d\omega$$

Коэффициенты Фурье $a(\omega)$ и $b(\omega)$ находятся как:

$$a(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt;\quad b(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt$$

четная нечетная

Функции $a(\omega)$, $b(\omega)$ и $f_0=\sqrt{a^2+b^2}$ называются спектральными амплитудами (или Фурье-амплитудами). f_0 является чётной ф-ией частоты: $f_0(\omega)=f_0(-\omega)$. Спектральная фаза φ является нечётной ф-ией частоты: $\varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)$, т.к. $a(\omega)=a(-\omega)$, $b(\omega)=-b(-\omega)$. Св-ва чётности $f_0(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ позволяют расширить формально область интегрирования в область отрицательных частот:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f_0(\omega)\cos[\omega t-\varphi(\omega)]\,d\omega$$

Введём комплексную спектральную амплитуду $\hat{f}_0(\omega)=f_0(\omega)e^{-i\varphi(\omega)}$. Тогда последний интеграл запишется в виде: $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_0(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$ – прямое преобразование Фурье

$\hat{f}_0(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$ – обратное преобразование Фурье.

$\hat{f}_0(\omega)=a(\omega)-ib(\omega)$ – комплексная спектральная амплитуда

$|\hat{f}_0(\omega)|^2$ можно экспериментально измерить

⑦ Свойства преобразования Фурье: соотношение между длительностью импульса и шириной спектра, смещение спектра по частоте. Теорема Планшереля. Примеры преобразования Фурье.

1. Суперпозиция импульсов

$$F(t) = \sum_j \alpha_j f_j(t)$$

(Φ_{-0} $F(i\omega)$ як ф-ція $F(t)$ равен тоб же як Φ_{-0} этих ф-ций)

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_j \alpha_j f_j(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_j \alpha_j f_j(i\omega)$$

2. Смещение импульса во времени

$$F(t) = f(t \pm t_0)$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t \pm t_0)}_{\tau} e^{-i\omega t} dt = \left\{ \begin{array}{l} d\tau = dt \\ t = \tau \mp t_0 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} e^{\pm i\omega t_0} d\tau = e^{\pm i\omega t_0} f(i\omega) = f(\omega) e^{-i(\varphi(\omega) \mp \omega t_0)}$$

$$F(\omega) = f(\omega)$$

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega) \mp \omega t_0$$ (изменяется только спектральная фаза)

$$|F(i\omega)|^2 = |f(i\omega)|^2$$

3. Изменение масштаба времени

$$F(t) = f(\alpha t)$$ (сжатие в α раз)

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t) e^{-i\omega t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \alpha t = \tau \\ t = \tau/\alpha \\ dt = d\tau/\alpha \end{array} \right\} = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\frac{\omega}{\alpha}\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\alpha} f\left(i\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$ – спектральная амплитуда

$$|F(i\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2} \left| f\left(\frac{i\omega}{\alpha}\right) \right|^2$$ – спектральная плотность

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega) + \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ \pi, & \alpha < 0 \end{cases}$$

: изменяется обратно пропорц. изменению временного масштаба

4. Соотношение между длительностью импульса и шириной спектра

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t}$$

$\Delta\omega$ – ширина спектра
Δt – длительность импульса существ. отличаются от нуля

Интегральное определение ширины и длительности импульса:

$$\Delta t = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt}{f(t=0)}$$

$$\Delta\omega = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) d\omega}{f(i\omega)_{=0}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) d\omega}{a(i\omega)_{=0}}$$

$$\Delta t \Delta\omega = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{f(t)} dt}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{f(i\omega)} d\omega} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{f(i\omega)} d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{f(t)} dt} = 2\pi$$

обратное Фурье-преобразование

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

5 Смещение спектра по частоте

$$F(t) = f(t)\cos\omega_0 t$$

$$\tau \gg T_0$$

$$\tau \sim \frac{1}{\Delta\omega} \gg T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\Delta\omega \ll \omega_0$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\, e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t} + f(t)e^{-i(\omega+\omega_0)t}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(i(\omega-\omega_0)) + f(i(\omega+\omega_0))\right] \approx \frac{1}{2} f(i(\omega-\omega_0))$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2} f(\omega-\omega_0)$$

$$\Phi(\omega) \approx \varphi(\omega-\omega_0)$$

$$|F(i\omega)|^2 \approx \frac{1}{4}|f(i(\omega-\omega_0))|^2$$

6 Теорема Мишеля Планшереля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(i\omega)|^2 d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega\right)^* dt =$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\, f(t)\, f^*(i\omega)\, e^{-i\omega t}\,dt\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(i\omega) f(i\omega)\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(i\omega)|^2 d\omega$$

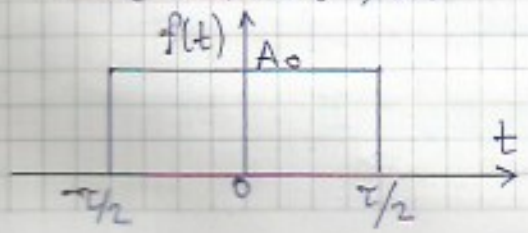
• Примеры преобразования Фурье:

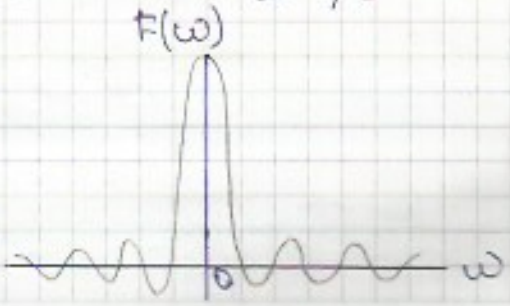
1) Прямоугольный импульс. $f(t) = \begin{cases} A_0, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A_0\, e^{-i\omega t} = \frac{A_0 e^{-i\omega t}}{-i\omega}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} =$$

$$= \frac{A_0\left(e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2}\right)}{-i\omega} = \frac{-A_0\, 2i\sin(\omega\tau/2)}{-i\omega} = \frac{A_0\, 2\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\cdot\frac{\tau}{2} =$$

$$= A_0\,\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$





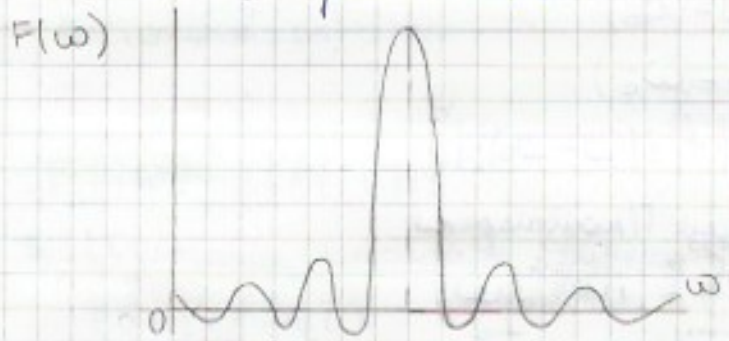
2) Прямоугольный импульс, заполненный высокой частотой ω_0 (волновой цуг)

$$f(t) = \begin{cases} A_0 \cos(\omega_0 t), & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \quad \text{где } \omega_0 \gg \frac{2\pi}{\tau}$$

$$F(\omega) = \frac{A_0 \tau}{2}\left(\operatorname{sinc}\left((\omega-\omega_0)\tau/2\right) + \operatorname{sinc}\left((\omega+\omega_0)\tau/2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(F_{прям}(\omega-\omega_0) + \underbrace{F_{прям}(\omega+\omega_0)}_{\approx 0}\right)$$

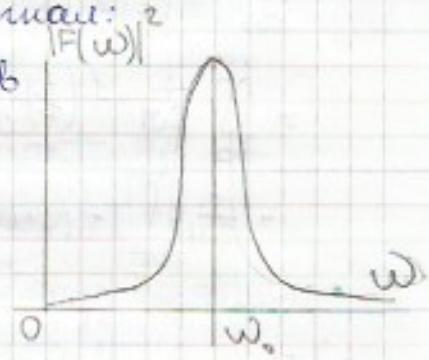
$$F(\omega) \approx \frac{1}{2} F_{прям}(\omega-\omega_0)$$



3) Затухающий (квази)гармонический сигнал:

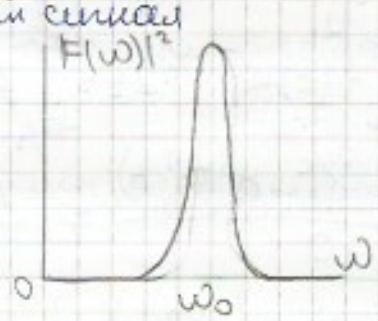
$$f(t) = \begin{cases} A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Лоренцев



4) Гауссов (квази) гармонический сигнал

$$f(t) = A_0 e^{-t^2/\tau^2} \cos(\omega_0 t)$$



8 Спектральная плотность интенсивности: световой импульс, непрерывное стационарное излучение

1 Спектральная плотность интенсивности

$|E(i\omega)|^2 - ?$ $\quad E(t)=0,\ t\in[0;\tau]$

$I = \langle E^2(t)\rangle$, τ - длительность импульса

$$I = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} E^2(t)\,dt = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}|E(i\omega)|^2\,d\omega =$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{|E(i\omega)|^2}{\tau\pi}\,d\omega = \int_0^{\infty} S(\omega)\,d\omega$$

$$\boxed{S(\omega) \overset{def}{=} \frac{|E(i\omega)|^2}{\pi\tau}}$$ - спектральная плотность интенсивности $\qquad \frac{Дж}{м^2}$

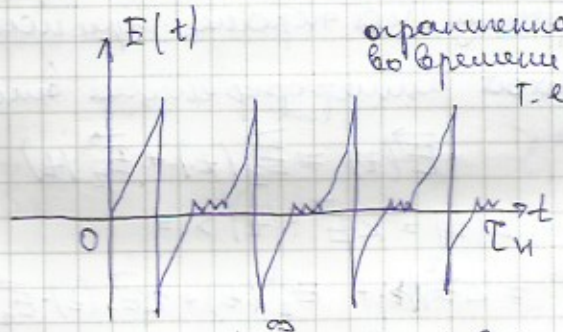
$$I = \int_0^{\infty} S(\omega)\,d\omega$$

$$dI = S(\omega)\,d\omega$$

$[\omega, \omega+d\omega]$

2 Непрерывное стационарное излучение

$\tau_p \gg \tau \qquad \tau \cong 10^{-11} \div 10^{-8}$ с



ограниченная во времени волна, т.е. импульс

$$E_н(t) = \begin{cases} E(t), & t\in[0;\tau_н] \\ 0, & t\in[0;\tau_н] \end{cases}$$

$$S_н = \frac{|E_н(i\omega)|^2}{\pi\tau}$$

$$\int_0^{\tau_н} E^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|E_н(i\omega)|^2\,d\omega$$

энергия, передаваемая волной за время $\tau_н$

при $t_н \to \infty$ $\quad \int_0^{\tau_н} E^2(t)\,dt \to \infty$

$$\lim_{\tau_н\to\infty}\frac{|E_н(i\omega)|^2}{\pi\tau_н} = S(\omega)$$

$$I = \int_0^{\infty} S(\omega)\,d\omega$$

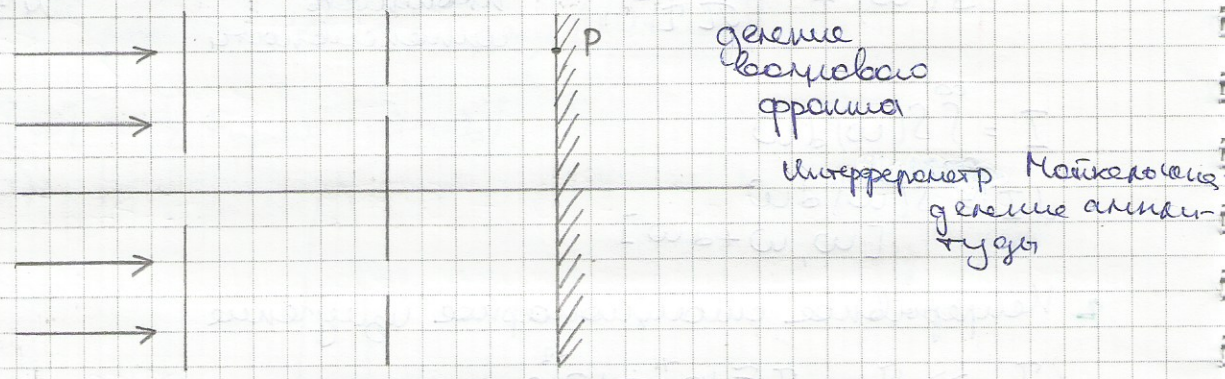
н-нач.

9 Интерференция света. Общая схема и уравнение двухволновой интерференции. Интерференция монохроматических волн: уравнение интерференции, порядок интерференции, ф-ия видимости и угловая ширина инт. полос

1. Интерференция света - пространственное перераспределение энергии излучения, интенсивности при наложении световых пучков.

Когерентные волны - волны, которые интерферируют при наложении

Схема интерференции Юнга

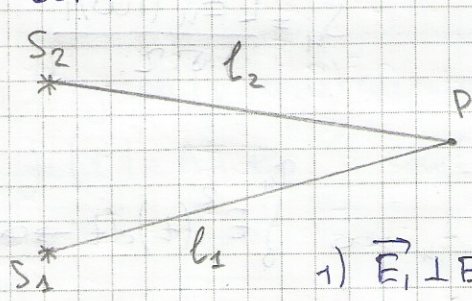


• 1678 г Гюйгенс: любая точка фронта волны является вторичным источником сферических волн, огибающая этих волн даёт положение фронта волны в следующий момент

• 1816 г Френель: вторичные волны когерентны, т.е. дают интерференционную картину (на экране) при наложении.

Волновое поле есть результат интерференции вторичных волн

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_1(t) + \vec{E}_2(t)$$



$$I(t) = \langle \vec{E}^2(t) \rangle =$$

$$= \langle E_1^2(t) + E_2^2(t) + 2\vec{E}_1(t)\cdot\vec{E}_2(t) \rangle =$$

$$= I_1(t) + I_2(t) + 2\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle$$

1) $\vec{E}_1 \perp E_2$ (соответственно ортогональным пл-ти поляризации)

$\rightarrow I(t) = I_1(t) + I_2(t)$ нет интерференции

2) $\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle \neq 0$ - есть интерференция

Основное уравнение двухволновой интерференции

$$\boxed{I(t) = I_1(t) + I_2(t) + 2\langle E_1(t) E_2(t) \rangle}$$

2. Интерференция монохроматических волн

$$E_{1,2}(t) = a_{1,2}\cos(\omega t - k l_{1,2} + \varphi_{0\,1,2}) = a_{1,2}\cos(\omega t + \varphi_{1,2})$$

$$I_{1,2} = \langle E_{1,2}^2(t)\rangle = \langle a_{1,2}^2\cos^2(\omega t + \varphi_{1,2})\rangle = \frac{a_{1,2}^2}{2}$$

$$a_{1,2} = \sqrt{2I_{1,2}}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\langle a_1 \cdot a_2 \cos(\omega t + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi_2)\rangle =$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{2I_1 \cdot 2I_2}\,\frac{\cos(\Delta\varphi)}{2}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k\underbrace{(l_1 - l_2)}_{\substack{\Delta l \\ \text{разность хода}}} + \underbrace{\Delta\varphi_0}_{\varphi_{02}-\varphi_{01}} = \omega\underbrace{\Delta\tau}_{\frac{\Delta l}{v}} + \Delta\varphi_0$$

$$\boxed{I(\Delta\varphi, \Delta l, \Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi)}$$

$I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$

$\Delta\varphi = m \cdot 2\pi$

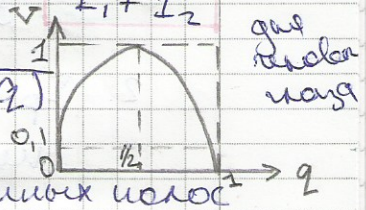
$m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

3. Функция видности $\quad 0 \le V \le 1$

$$\boxed{V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}} = \frac{(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 - (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2}{(\quad)^2 + (\quad)^2} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

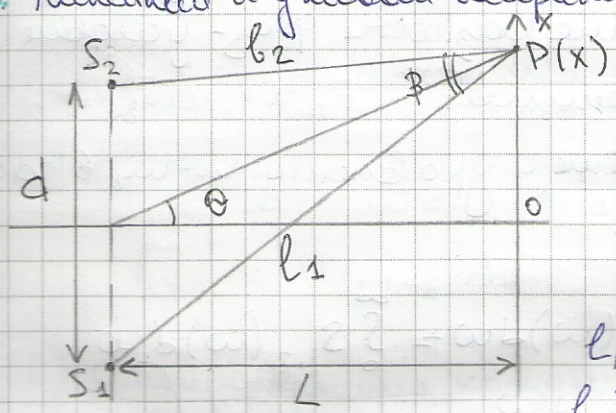
в ближайших точках к точке P

$$q = \frac{I_{1,2}}{I_1 + I_2} \qquad V = 2\sqrt{q(1-q)}$$



для белого света

4. Линейная и угловая ширина интерференционных полос



$L \gg d, x$

β – угол сходимости интерф. волн, лучей.

$$\beta = \frac{d}{L}$$

$$l_1^2 = L^2 + (x + d/2)^2$$

$$l_2^2 = L^2 + (x - d/2)^2$$

$$l_1^2 - l_2^2 = 2xd$$

$$l_1^2 - l_2^2 = (l_1 - l_2)(l_1 + l_2) \cong \Delta l\, 2L$$

$$\Delta l \cancel{2} L \approx \cancel{2} x d$$

$$\Delta l = \underbrace{\frac{xd}{L}}_{\beta} = x\beta$$

$$\Delta l_{max} = m\lambda = \frac{d}{L}x_{max}$$

$$\Delta l = \frac{xd}{L} = x\beta$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{\lambda L}{d}}$$ – линейная ширина интерференционной полосы

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda}{d}}$$ – угловая ширина интерференционной полосы

(10) Интерференция квазимонохроматического света. Условие интерференции. Спектральное описание, уравнение интерференции в частотном представлении. Функция видности, время и длина когерентности, макс порядок инт-ии

1. $E_{1,2}(t) = a_{1,2}(t)\cos(\omega_0 t - k_0 l_{1,2} + \varphi_{0\,1,2}(t))$

$\tau \gg T_0$

$I(t) = I_1(t) + I_2(t) + 2\langle a_1(t) a_2(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_1(t))\cos(\omega_0 t + \varphi_2(t))\rangle =$

$= I_1(t) + I_2(t) + \langle a_1(t) a_2(t)[\cos(2\omega_0 t + \varphi_1(t) + \varphi_2(t)) + \cos(\Delta\varphi(t))]\rangle =$

$= I_1(t) + I_2(t) + \langle a_1(t) a_2(t)\cos(\Delta\varphi(t))\rangle$

Общая форма записи ур-ия интерф-ии для случая квазимонохроматических волн

$\tau \gg T_0$

время модуляции — период

1. $\tau_p \ll \tau$ $\quad \tau \approx 10^{-8} \div 10^{-10}$ с, $\tau_p \sim 10^{-10} \div 10^{-12}$ с

динамическая интерференционная картина

2. $\tau_p \gg \tau$

$\max(\delta(\Delta\varphi(t))) = \max(\delta(\Delta\varphi_0(t))) < \pi$

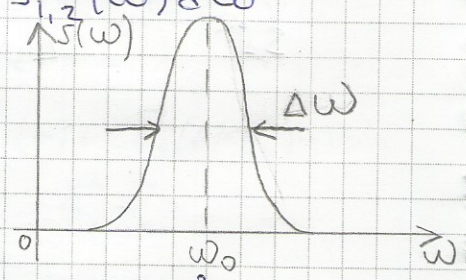
Ограниченное изменение разности фаз - условие наблюдения интерференции.

2. Спектральное описание и уравнение ин-ии в частотном представлении

$I_{1,2} = \alpha_{1,2} I_0 = \alpha_{1,2}\int_0^\infty S(\omega)d\omega = \int_0^\infty S_{1,2}(\omega)d\omega$

$dI_{1,2} = \alpha_{1,2} dI_0 = \alpha_{1,2} S(\omega)d\omega$

$\alpha_{1,2} = \frac{I_{1,2}}{I_0}$



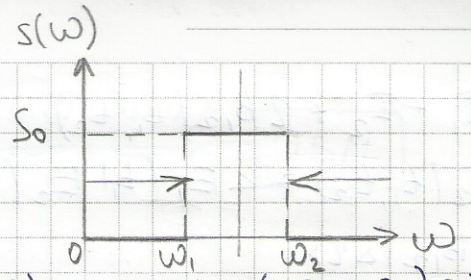
$\int_\omega dI = dI_1 + dI_2 + 2\sqrt{dI_1 dI_2}\cos\Delta\varphi d\omega$

$\left\{\Delta\varphi_0 = 0;\ \Delta\varphi = k\Delta l = \omega\Delta\tau \quad [\omega, d\omega + \omega]\right\}$

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\frac{1}{I_0}\int_0^\infty S(\omega)\cos(\omega\Delta\tau)d\omega}$$

уравнение двухволновой интерференции квазимонохроматического света в частотном представлении.

3 Функция видности



$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$

$$I_0 = \int_0^\infty S(\omega)\,d\omega = S_0 \Delta\omega$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_0} S_0 \cos(\omega\Delta\tau)\,d\omega \Rightarrow$$

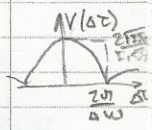
$$\Rightarrow \frac{I_0}{\Delta\omega}\,\frac{\sin(\omega_2\Delta\tau) - \sin(\omega_1\Delta\tau)}{\Delta\tau} = I_0\,\frac{\cos(\omega_0\Delta\tau)\sin\left(\frac{\Delta\omega\Delta\delta}{2}\right)}{\frac{\Delta\omega\Delta\tau}{2}} =$$

$$= I_0\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta\tau}{2}\right)\cos(\omega_0\Delta\tau)$$

ω_0 – несущ. частота

$$\boxed{I(\Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\sin\left(\frac{\Delta\omega\Delta\tau}{2}\right)\cos(\omega_0\Delta\tau)}$$

4. $$V(\Delta\tau) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta\delta}{2}\right)\right|$$



Максимальное время задержки, при котором ещё наблюдается интерференционная картина – время когерентности

$$\tau_k = \max(\Delta\tau) \cong \frac{2\pi}{\Delta\omega} \simeq \tau$$

$$l_k = v \cdot \tau_k = \frac{2\pi v}{\Delta\omega} \cong \tau v = l_{цуг}$$

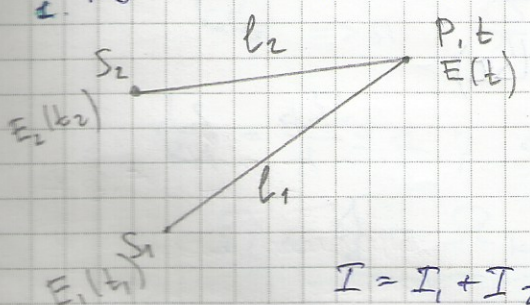
$$M_{max} = \frac{2\pi/\Delta\omega}{2\pi/\omega_0} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \simeq \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$$

$$\tau_k \cong \frac{2\pi}{\Delta\omega}\cdot\frac{\omega_0}{\omega_0} = T_0\,\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = M_{max} T_0$$

$$l_{ког} \simeq M_{max} \cdot \lambda_0$$

(11) Интерференция квазимонохроматического света. Условие интерференции. Временное описание. Функция корреляции и её свойства. Теорема Винера – Хинчина. Понятие о Фурье спектроскопии. Разрешающая способность Фурье-спектрометра.

1.



$$t = t_{1,2} + \frac{l_{1,2}}{v}$$

$$t_{1,2} = t - \frac{l_{1,2}}{v}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{l_1 - l_2}{v} = \frac{\Delta l}{v} = \Delta\tau$$

$$t_2 = t_1 + \Delta\tau$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\langle E_1(t_1)E_2(t_2)\rangle =$$

функция пространственно-временной (взаимной) корреляции колебаний напр-ий поля в S_1 и S_2 t_1 t_2

$= I_1 + I_2 + 2B_{12}(t_1, t_2)$

$B_{12}(t_1, t_2) = \langle E_1(t_1) E_2(t_1 + \Delta\tau) \rangle \overset{\text{стац}}{\Rightarrow} \langle E_1(t) E_2(t+\Delta\tau) \rangle =$

$= B_{12}(\Delta\tau)$

$I_{12} = \alpha_{1,2} I_0$

$E_{1,2}(t) = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}\, E_0(t)$

$B_{12}(\Delta\tau) \Rightarrow \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_0} \langle E_0(t) E_0(t+\Delta\tau) \rangle = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_0} B(\Delta\tau)$

$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \frac{1}{I_0} B(\Delta\tau)$

$$\boxed{I(\Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, \frac{1}{I_0} B(\Delta\tau)}$$

$$B(\Delta\tau) = \int_0^\infty S(\omega) \cos(\omega \Delta\tau)\, d\omega$$

2. Свойства ф-ии автокорреляции:

1) $B(\Delta\tau = 0) = I_0$

2) $B(\Delta\tau > \tau_k) \cong 0$

3) $B(-\Delta\tau) = \langle E_0(\underset{t+\Delta\tau}{t}) E_0(\underbrace{t - \Delta\tau}_{t}) \rangle \overset{\text{стац}}{\Rightarrow} \langle E_0(t+\Delta\tau) E_0(t) \rangle = B(\Delta\tau)$

4) $B(\Delta\tau) \sim \omega_0 \cdot T_0 ; T_k$

осциллирующая — убывающая

3. Теорема Винера-Хинчина

$\frac{1}{\pi}$!

$$B(\Delta\tau) = \int_0^\infty S(\omega) \cos(\omega \Delta\tau)\, d\omega$$

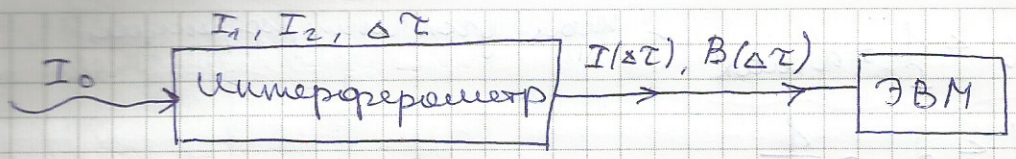
$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\Delta\tau) \cos(\omega \Delta\tau)\, d(\Delta\tau)$$

В комплексной $B(\Delta\tau)$:

$$B(\Delta\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \exp(i\omega\Delta\tau)\, d\omega$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\Delta\tau) \exp(i\omega\Delta\tau)\, d(\Delta\tau)$$

4. Фурье-спектрометр

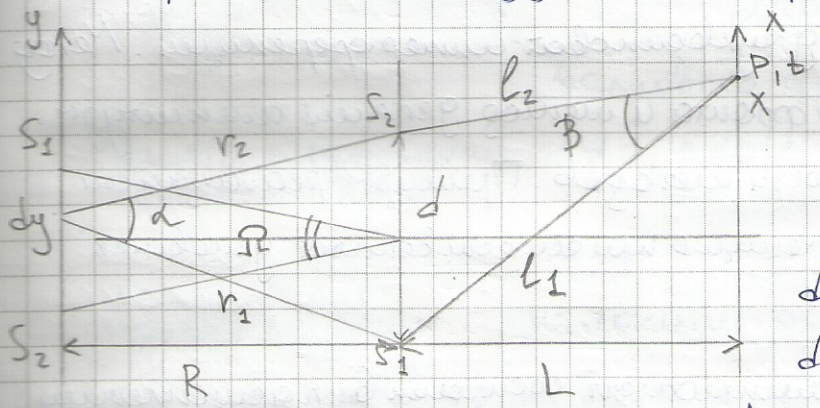


$$\Delta\tau \geq \tau_k \cong \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

$$\Delta\omega \geq \frac{2\pi}{\Delta\tau}, \qquad \Delta\omega_{min} = \frac{2\pi}{\Delta\tau_{max}}$$

$$R = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{min}} = \frac{\omega_0}{2\pi}\Delta\tau_{max} = \frac{\Delta\tau_{max}}{T_0}\cdot\frac{v}{v} = \frac{\Delta l_{max}}{l_0} \cong 2\cdot10^{-6}$$

(12) Пространственная когерентность. Уравнение интерференции. Функция видности, угол и радиус когерентности. Звёздный интерферометр Майкельсона



$R \gg y, d$ $\qquad$ $L \gg x, d$

α - угол интерференции

Ω - угловая апертура

$$\Delta r = r_1 - r_2 = \alpha y$$

$$\Delta l = l_1 - l_2 = \beta x$$

$$k(\Delta r + \Delta l) = (\alpha y + \beta x)k$$

$$dI = dI_1 + dI_2 + 2\sqrt{dI_1 dI_2}\cos\underbrace{(k\alpha y + k\beta x)}_{\Delta\varphi}$$

$$dI_{1,2} = \frac{I_{1,2}}{S}dy$$

$$dI = dI_1 + dI_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\frac{1}{S}\cos(k\alpha y + k\beta x)dy$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\frac{\sin\left(\frac{k\alpha S}{2} + k\beta x\right) - \sin\left(-\frac{k\alpha S}{2} + k\beta x\right)}{k\alpha S} =$$

S-р-ро ист-ов

$$k\beta x = \frac{\omega}{v}\Delta l = \omega\Delta\tau$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\frac{\cos(k\beta x)\sin\left(\frac{k\alpha S}{2}\right)}{\frac{k\alpha S}{2}} =$$

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\alpha S}{2}\right)\cos(\omega\Delta\tau)}$$

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{k\alpha S}{2}\right)\right|$$

$$\frac{k\alpha S}{2} \Rightarrow \pi \qquad \boxed{\frac{\alpha S}{\lambda} = \frac{dS}{R\lambda} = \frac{d\Omega}{\lambda} \leq 1}$$

— условие набл интерф картины

$$\frac{dS}{R\lambda} = \frac{d\Omega}{\lambda} \leq 1; \qquad d \leq \frac{\lambda}{\Omega} = \frac{R\lambda}{S} = d_k$$

— max расстояние между вторичными источниками, при кот ещё наблюдается интерференция — радиус когерентности

$$\Omega \leq \frac{\lambda}{d} = \Omega_k$$ — угол когерентности

— max угловой р-р источника

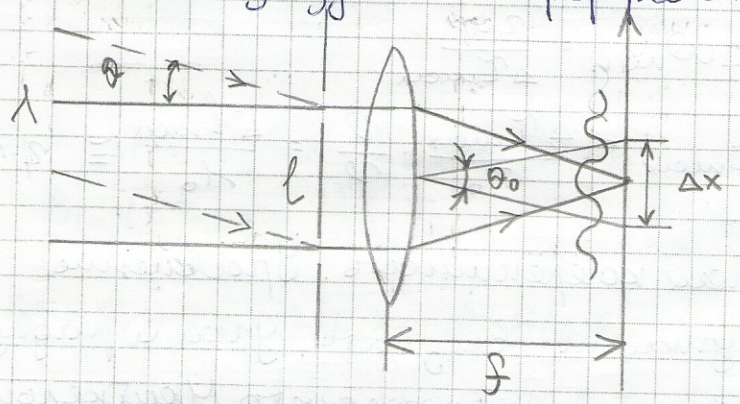
$$S \leq \frac{R\lambda}{d} = \frac{\lambda}{\alpha} = S_{max}$$

max линейный когерентный размер источника

$\alpha \le \frac{\lambda}{S} = \alpha_{max}$ – max угол интерференции

$d \le d_k = \frac{\lambda}{\Omega}$

Принцип: Схема звёздного интерферометра Майкельсона:



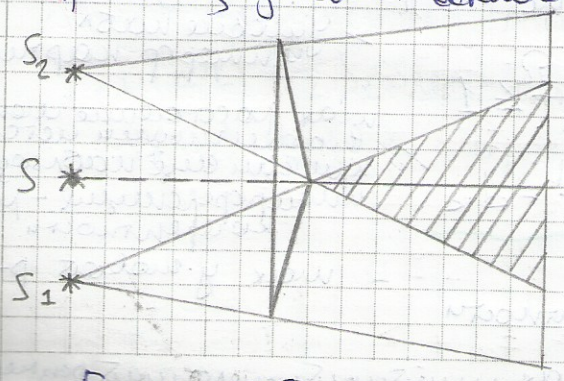
(13) Основные схемы двухволновой интерференции. Метод деления волнового фронта и метод деления амплитуды. Характерные особенности методов. Примеры реализации методов. Интерференция при естественных условиях в тонких плёнках.

Метод деления амплитуды состоит в расщеплении световой волны на полупрозрачной пластине на две когерентные волны

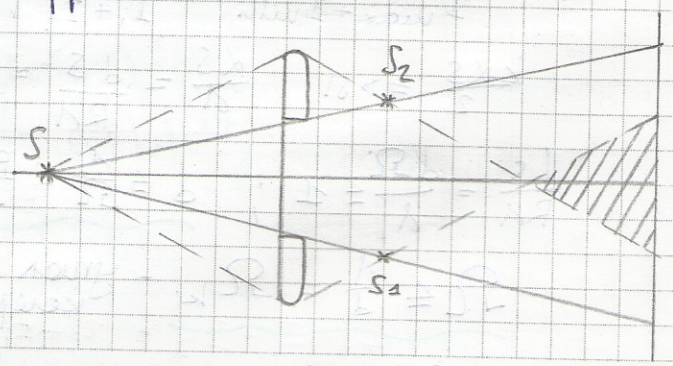
В методе деления волнового фронта две интерферирующие волны получаются как два участка одного фронта волны.

Примеры:

а) Метод деления волнового фронта:

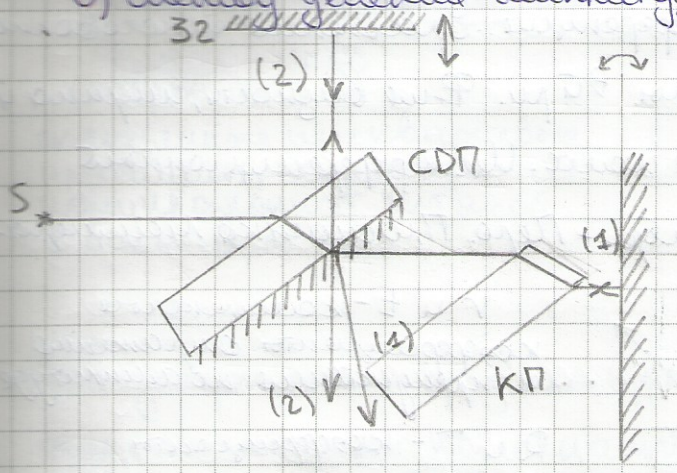


Бипризма Френеля

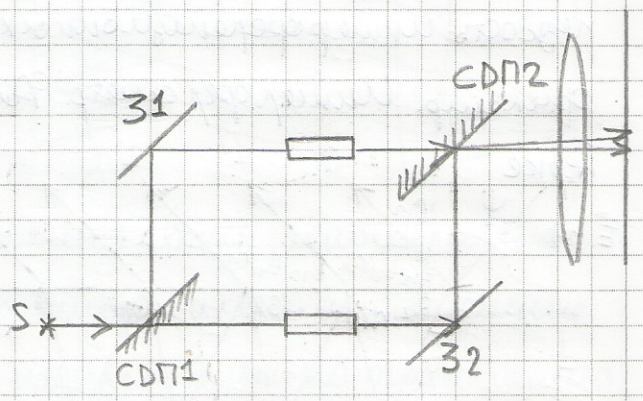


Бипризма Бийе

б) Метод деления амплитуды:



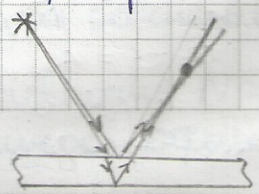
Интерферометр Майкельсона



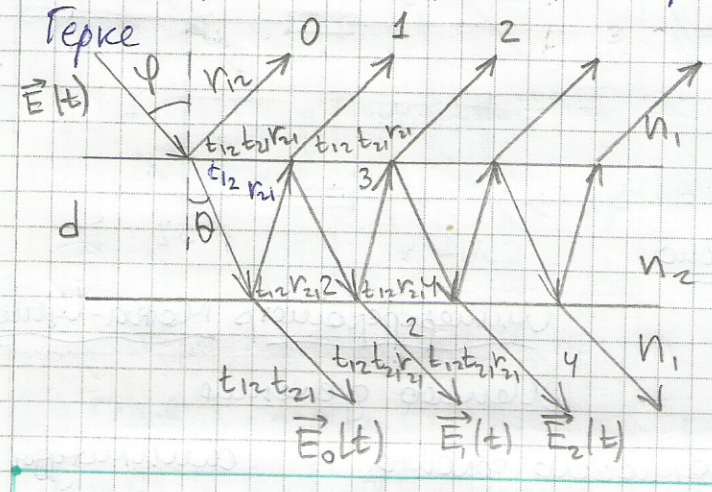
Интерферометр Маха-Цендера

N	Характеристика	Метод деления	
		волнового фронта	амплитуды
1	Углы интерференции α и сходимости β	$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ $(d \neq 0)$	$\alpha \approx 0, \beta \approx 0$ $(d \approx 0)$
2	Локализация интерф картины	не локализована	локализована
3	Образование интерф картины	лучами от одной точки источника	лучами от всех точек источника
4	Интенсивность интерф картины	мала	велика
5	Увеличение размера источника	ухудшает видимость $\Omega \leq \Omega_k = \frac{1}{d}$; $S \leq S_{max} = \frac{1}{\alpha}$	не ухудшает видимость
6	Увеличение ширины спектра $\Delta\omega$ или $\Delta\tau$ (Δl, м)	ухудшает видимость $\Delta\tau \leq \tau_k \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega}$; $\Delta l \leq l_k = \tau_k v$	ухудшает видимость $\Delta\tau \leq \tau_k \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ $\Delta l \leq l_k = \tau_k v$

В природе часто можно наблюдать радужное окрашивание тонких плёнок. Это явление обусловлено интерференцией света в тонких прозрачных плёнках, которая возникает в результате наложения когерентных волн, отражающихся от верхней и нижней поверхностей.



(14) Многолучевая интерференция. Уравнения многолучевой интерференции — формулы Эйри. Ф-ия видности, ширина и резкость интерференционных полос. Интерференционный фильтр. Интерферометр Фабри-Перо. Пластинка Ломмера-Герке



r и t — комплексные коэффициенты отражения и пропускания по амплитуде

R и T — коэффициенты отражения и пропускания по интенсивности:

$t_{12}t_{21} = T_{12} = T_{21} \equiv T$

$|r_{12}|^2 = |r_{21}|^2 = R_{12} = R_{21} \equiv R$

$$I_{пр} = I\frac{T^2}{(1-R)^2+4R\sin^2\frac{\Phi}{2}}$$

$$I_{отр} = IR\frac{(1-(R+T))^2+4(R+T)\sin^2\frac{\Phi}{2}}{(1-R)^2+4R\sin^2\frac{\Phi}{2}}$$

— формулы Эйри (уравнения многолучевой интерференции — зависимости интенсивности прошедшей $I_{пр}$ и отражённой $I_{отр}$ волн от разности фаз Φ между двумя соседними вышедшими лучами)

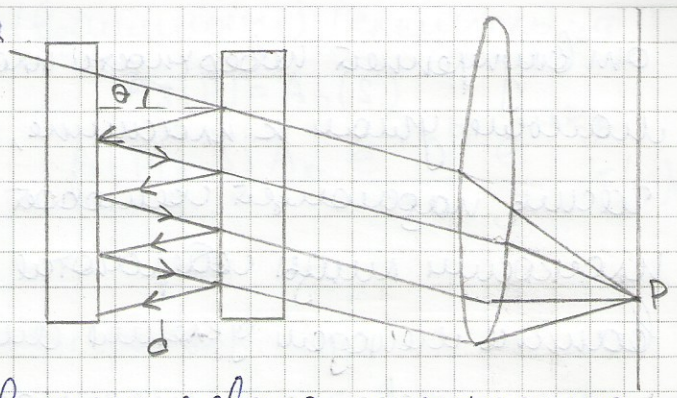
- Ф-ия видности: $V_{пр}(R) = \frac{2R}{1+R^2}$, $V_{отр} = 1$
- Ширина интерф. полос: $\delta_{пр}(R) = 2\frac{1-R}{\sqrt{R}}$, $\delta_{отр}(R) = 2\pi - \delta_{пр}(R)$
- Резкость интерф. полос: $F_{пр}(R) = \frac{2\pi}{\delta_{пр}(R)} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$

$$F_{отр} = \frac{2\pi}{2\pi - \delta_{пр}(R)} \sim 1$$

Интерференционный (дихроичный) фильтр — отражает одну и пропускает другую часть спектра падающего излучения благодаря явлению многолучевой интерференции в тонких диэлектрических плёнках.

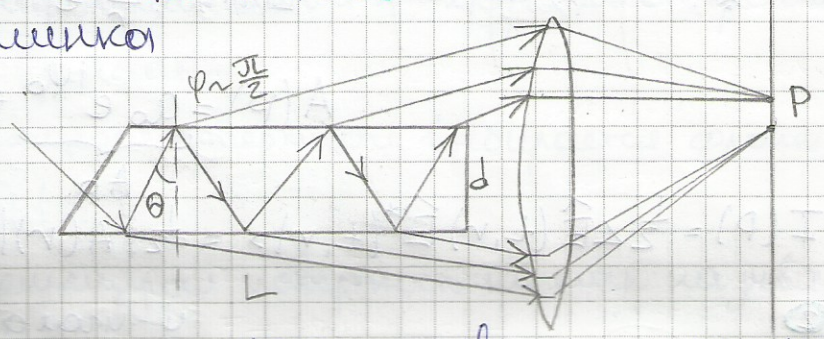
Схема интерферометра Фабри-Перо:

стеклянные или кварцевые пластины, покрытые полупрозрачной пленкой с большим R



Для устранения вредного влияния света, многократно отраженного от поверхностей внутри пластины, внешние поверхности делают несколько наклонными по отношению к внутренним рабочим поверхностям. Пластинки могут передвигаться в перпендикулярном направлении друг относительно друга. Интерф картина полос равного наклона – концентрические кольца, наблюдаемые с помощью собирающей линзы.

Схема пластинки Ломмера-Герке: стеклянная или кварцевая пластинка

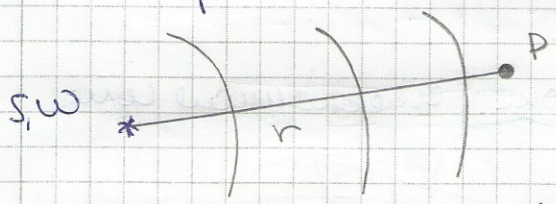


Чтобы добиться нормального падения света и уменьшить таким образом потери энергии на отражение, один конец пластинки либо срезается, либо снабжается добавочной треугольной призмочкой. Лучи света от источника направляются на срезанный конец пластинки так, чтобы на границу раздела луч падал под углом чуть меньшим угла полного внутреннего отражения – $\theta \le \theta_0 = \arcsin\frac{n_1}{n_2}$. Такое падение луча обеспечивает $R \sim 1$ и примерно одинаковую интенсивность $N \approx 10 \div 15$ лучей, выходящих из пластинки. При каждом отражении

от внутренней поверхности пластинки из системы под малым углом к пластинке, выходит очень малая часть падающей световой волны. В фокальной плоскости линзы собираются параллельные лучи, образованные методом деления амплитуды и испущенные разными светящимися точками источника под определённым углом (полосы равного наклона)

(15) Дифракция света. Принцип Гюйгенса-Френеля и дифракционный интеграл Френеля. Теорема обратимости Гельмгольца. Принцип дополнительности Babine

① Дифракция света - любые отклонения от законов геометрической оптики законов распространения света.



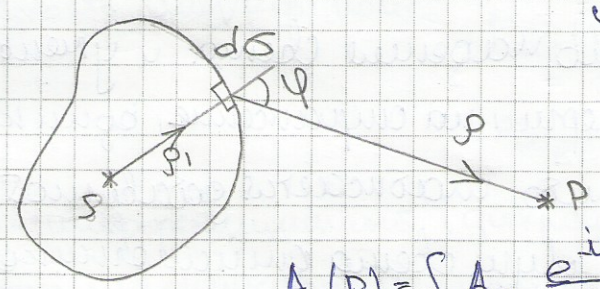
$$E(P) = a_0 \frac{1}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

$$\hat{E}(P) = \frac{a_0}{r} e^{i\varphi_0} e^{-ikr} e^{i\omega t} = A(P) e^{i\omega t}$$

$$A(P) = \underbrace{a_0 e^{i\varphi_0}}_{A_0} \frac{e^{-ikr}}{r} = A_0 \frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$I(P) = \frac{1}{2} \langle \hat{E}(t,r) \hat{E}^*(t,r) \rangle = \frac{1}{2} |A(r)|^2 = \frac{a_0^2}{2r^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{r}\right)^2$$

②



φ - угол дифракции
угол, который составляет исходный луч света и дифрагированный луч света

$$A_\Sigma = A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}$$

$$A(P) = \int_\Sigma A_\Sigma \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} k(\varphi)\, d\sigma = \int_\Sigma A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} k(\varphi)\, d\sigma$$

зависит от угла дифракции

угловой коэффициент

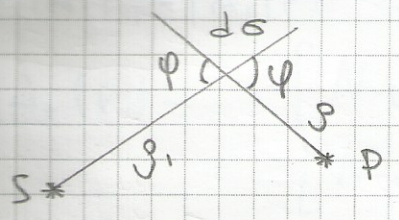
$$\boxed{A(P) = \int_\Sigma A_0 e^{-ik\rho_1} e^{-ik\rho} \frac{k(\varphi)}{\rho_1 \rho} d\sigma}$$

- дифракционный интеграл Френеля

$$\begin{cases} k(\varphi = 0) = k_{max} \\ \varphi \uparrow \Rightarrow k(\varphi) \downarrow \\ k(\varphi \geq \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

- коэффициент наклона

③ • Теорема обратимости (взаимности) Гельмгольца



$$A_S(P) = A_P(S)$$

$$A(P) = \iint_{\Sigma} A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} K(\varphi)\, d\sigma$$

④ • Принцип дополнительности Babinet

Рассмотрим два дополнительных друг к другу экрана (прозрачные части одного совпадают с непрозрачными другого)

$$\boxed{A_0(P) = A_{\Sigma_1}(P) + A_{\Sigma_2}(P)}$$

⑯ Метод зон Френеля. Радиус и площадь зон Френеля. Число Френеля. Условие перехода от волновой к геометрической оптике. Дифракция света на круглом отверстии.

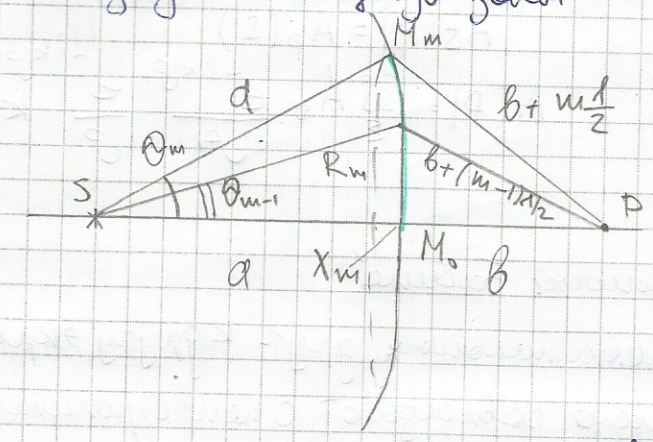
Метод зон Френеля.

1. В качестве светящейся поверхности выбирается фронт волны. $A_{\Sigma_0} - const(\Sigma_0)$
2. Разбиваем всю светящуюся поверхность на так называемые „зоны Френеля", для которых расстояние от границы зоны до точки наблюдения есть величина постоянная, а разность расстояний от границ соседних зон до точки наблюдения $\frac{\lambda}{2}$
3. $K(\varphi = 0) = K_{max}$

   $K(\varphi \geq \frac{\pi}{2}) = 0$ — неверное предположение Френеля

Складываем возмущения от каждой зоны.

• Радиус и площадь зоны



$$R_m^2 = a^2-(a-x_m)^2 = \left(b_m + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b+x_m)^2$$

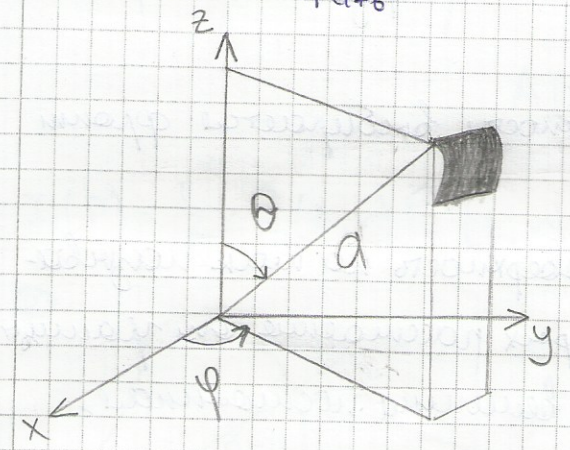
$$2ax_m = bm\lambda + \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2 - 2bx_m$$

$$bm\lambda \gg \frac{m^2\lambda^2}{4}; \quad m \ll \frac{4b}{\lambda}$$

$$x_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}$$

$$R_m^2 = 2ax_m - x_m^2 \cong 2ax_m = m\lambda\frac{ab}{a+b}$$

$$R_m = \sqrt{m\lambda\frac{ab}{a+b}} \xrightarrow{a\to\infty} \sqrt{m\lambda b}$$



$$d\sigma = a^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta$$

$$\sigma_m = \int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m}\int_0^{2\pi} d\sigma = a^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= 2\pi a^2(\cos\theta_{m-1} - \cos\theta_m) =$$

$$= 2\pi a\left((a-x_{m-1}) - (a-x_m)\right) = \frac{2\pi ab\lambda}{2(a+b)} =$$

$$= const(m)$$

• Число Френеля

N – число открытых (действующих) зон Френеля

r_0 – радиус отверстия

$$r_0 = R_N = \sqrt{N\lambda\frac{ab}{a+b}} \qquad N = \frac{r_0^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$|A(P)| = |A_1(P)| - |A_2(P)| + |A_3(P)| - \dots$$

вклады от i-х зон Френеля

$$\to |A(P)| = |A_1(P)| - \frac{|A_1(P)| + |A_3(P)|}{2} + |A_3(P)| - \frac{|A_3(P)| + |A_5(P)|}{2} +$$

$$+ |A_5(P)| - \ldots = \begin{cases} N\text{-чёт}: \ \frac{|A_1(P)|}{2} - \frac{|A_{N+1}(P)|}{2} \\ N\text{-нечёт}: \ \frac{|A_1(P)|}{2} + \frac{|A_N(P)|}{2} \end{cases}$$

при $N \gg 1$

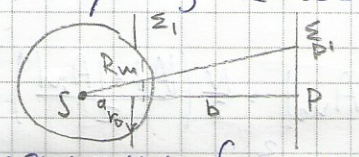
A_0 - нет экрана

$$|A(P)| = |A_0(P)| = \frac{|A_1(P)|}{2}$$

$$I_0(P) = \frac{I_{\Sigma}(P)}{4}$$

$$N = \frac{r_0^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Условие $N \gg 1$ - условие перехода к геометрической оптике



(17) Метод векторных диаграмм. Спираль Френеля. Амплитудная и фазовая зонные пластинки. Фокусы зонной пластинки. Линза как оптимальная зонная пластинка

1. Метод векторных диаграмм.

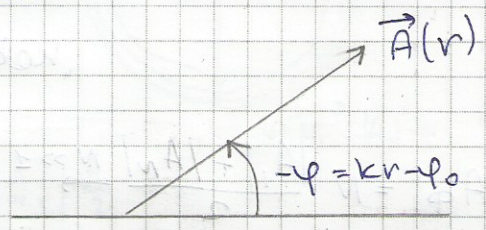
$$\hat{A}(P) \Rightarrow \vec{A}(P)$$

$$|\vec{A}(P)| = |\hat{A}(P)|$$

$$A(r) = |A(r)| e^{i\varphi(r)}$$

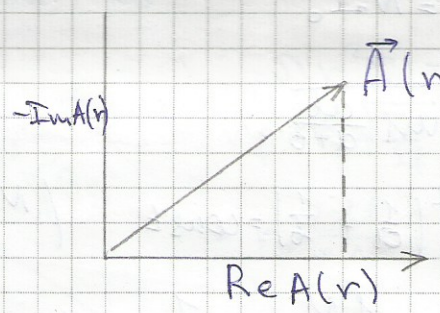
$$\varphi(r) = -kr + \varphi_0$$

набег фазы



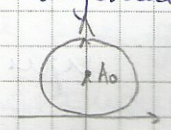
$$\{A_j(r)\} \to \{\vec{A}_s(r)\}$$

$$\sum_j \alpha_j A_j(r) = \sum_j \alpha_j \vec{A}_j(r)$$

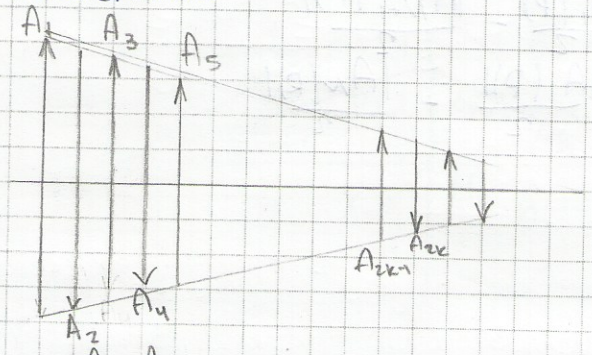


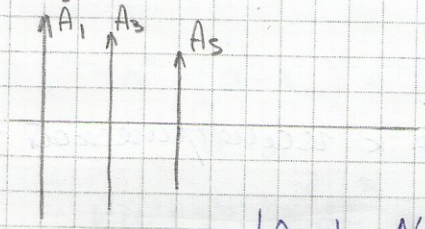
2. Спираль Френеля

Элементарные зоны - элементы зон Френеля, для которых расстояния от границ (соседних) до точки наблюдения есть величина постоянная и $\ll 1/2$



3. Амплитудная и фазовая зонные пластинки. Фокусы зонных пластинки



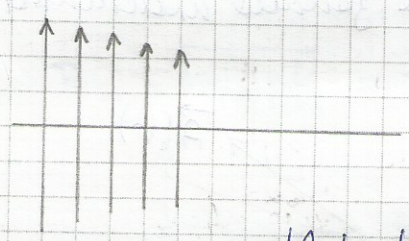


1. Сорре:
закрыты все чётные (или нечётные) зоны

амплитудная зонная пластинка

$$|A_{нг}| = \frac{N}{2}\left(\frac{|A_1|+|A_N|}{2}\right) \xrightarrow{N\gg 1} |A_{нг}| \simeq \frac{N}{2}\cdot\frac{|A_1|}{2} = \frac{N}{2}|A_0|$$

$$I_{нг} = \frac{N^2}{4} I_0$$



2. Вуд:
все чётные или нечётные зоны „повёрнуты" (изменение фазы на π)

фазовая зонная пластинка

$$|A_ф| = N\frac{|A_1|+|A_N|}{2} \xrightarrow{N\gg 1} |A_ф| = N|A_0|$$

$$I_ф = N^2 I_0$$

$$R_m = \sqrt{m\lambda\frac{ab}{a+b}}$$

$$N = \frac{r_0^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = const$$

($N = const$ условие подобия дифракции)

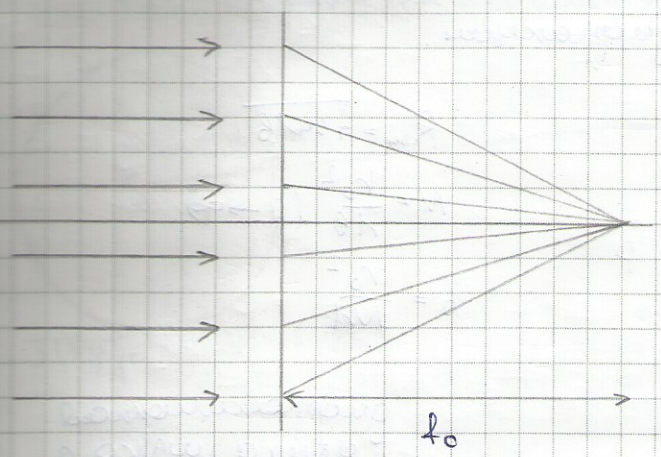
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{\lambda N}{r_0^2} = \frac{1}{r_0^2/N\lambda}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$\rightarrow f_0 = \frac{r_0^2}{N\lambda}$$

фокус зонной пластинки

при $a\to\infty$ $f_0 \to b$



$$f_k = \frac{f_0}{2k+1}$$

$$\downarrow$$

$$A_{f_k} = \frac{A_{f_0}}{2k+1}$$

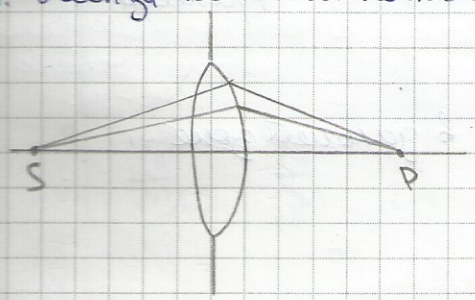
$$\downarrow \; I_{f_k} = \frac{I_{f_0}}{(2k+1)^2}$$

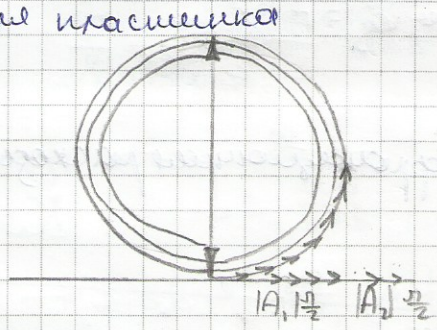
Зонная пластинка действует как линза, у которой бесконечно много фокусов

$$I_{f_0} = N^2 I_0, \quad I_{f_k} = \frac{N^2}{(2k+1)^2} I_0$$

$$f_0 = \frac{r_0^2}{N\lambda} \approx \frac{36 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}} = 9\,м$$

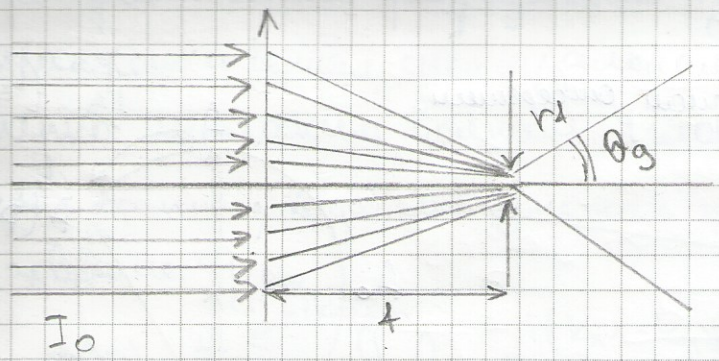
4. Линза как оптическая зонная пластинка





$$|A_1| = N|A_0|\frac{\pi}{2}$$

$$I_f = \left(\frac{N\pi}{2}\right)^2 I_0$$



$$\pi r_0^2 I_0 = \pi r_f^2 I_f$$

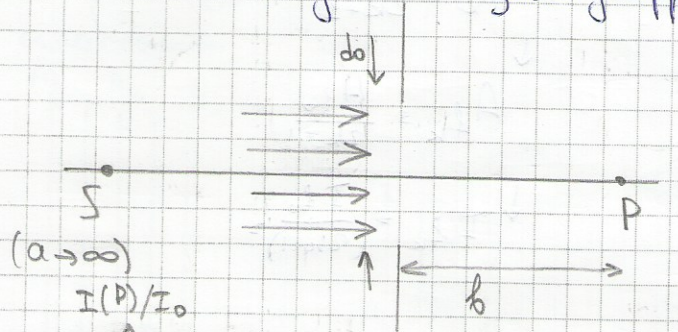
$$r_f = r_0\sqrt{\frac{I_0}{I_f}} = r_0\frac{2}{\pi N} =$$

$$= r_0\frac{2\lambda f}{\pi r_0^2} = \frac{4f}{\pi d_0}\lambda \approx \lambda$$

$$\theta_g \simeq \frac{r_0}{f} = \frac{2\lambda}{\pi r_f} = \frac{4\lambda}{\pi d_f} \approx \frac{\lambda}{d_f}$$

(18) Дифракция света. Ближняя и дальняя зоны дифракции, дифракционная длина пучка. Дифракционная расходимость пучка в дальней зоне. Дифракция на круглом отверстии и круглом экране. Пятно Пуассона.

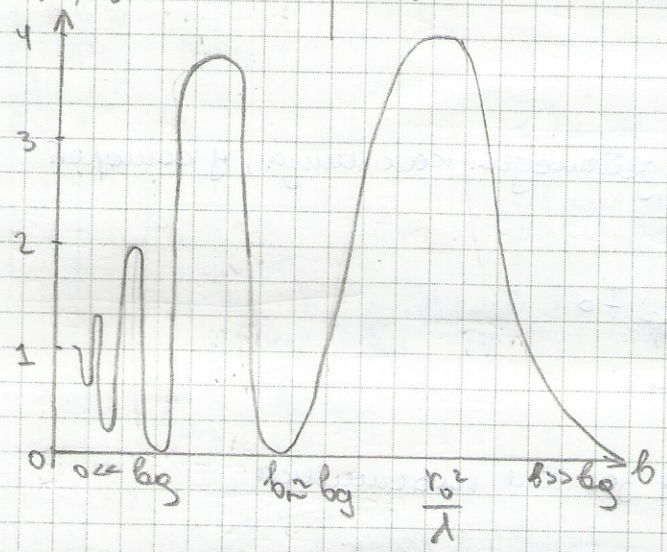
1. Ближняя и дальняя зона дифракции.



$R_m = \sqrt{m\lambda b}$

$N = \frac{r_0^2}{\lambda b}$ $(a\to\infty)$

$b = \frac{r_0^2}{N\lambda}$



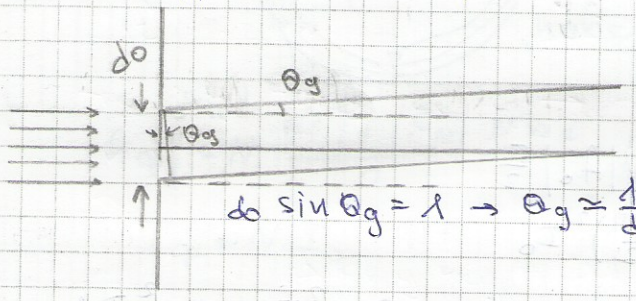
дифракционная длина пучка $b_g = \frac{r_0^2}{\lambda}$

$b \gg b_g$ дальняя зона (дифракция Фраунгофера)

$0 \leq b \ll b_g$ ближняя зона (зона геометрической оптики)

$b \approx b_g$ область дифракции Френеля

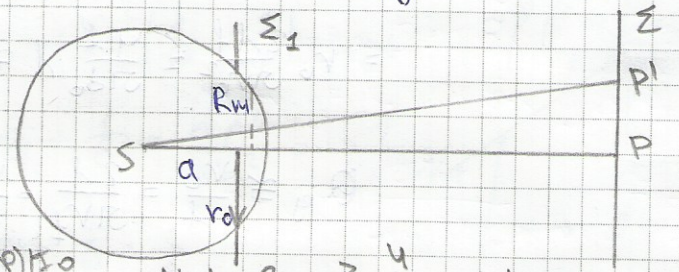
2. Дифракционная расходимость в дальней зоне.

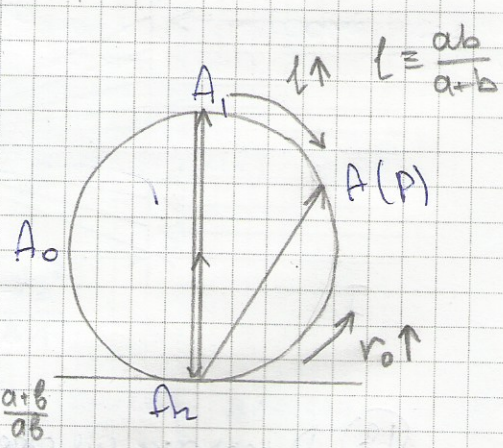


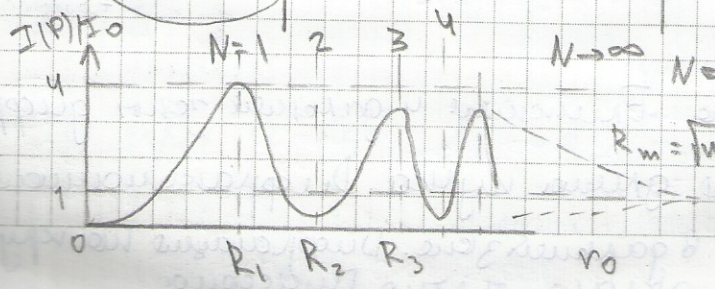
$d_0 \sin\theta_g = \lambda \to \theta_g \simeq \frac{\lambda}{d_0}$

угол дифракционной расходимости пучка

3. Дифракция на круглом отверстии.

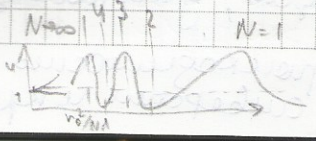




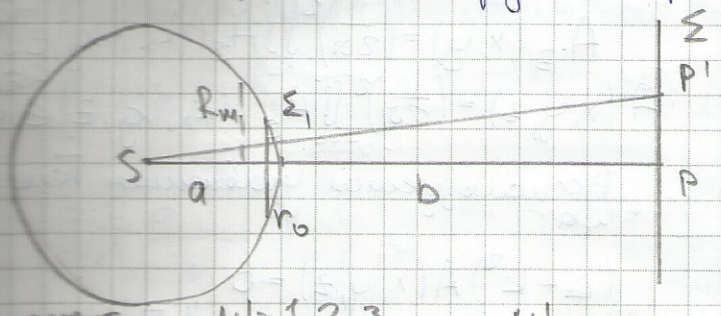


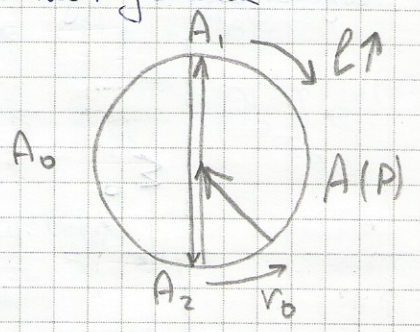
$N = \frac{r_0^2}{\lambda}\frac{a+b}{ab}$

$R_m = \sqrt{m\lambda\frac{ab}{a+b}}$



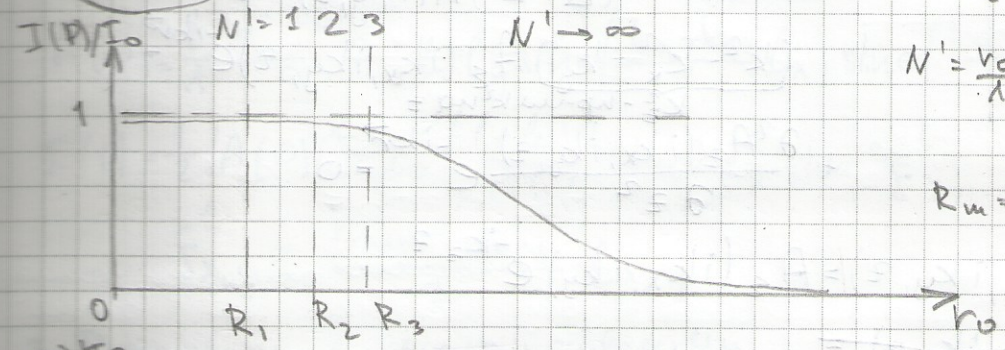
4. Дифракция на круглом экране. Пятно Пуассона

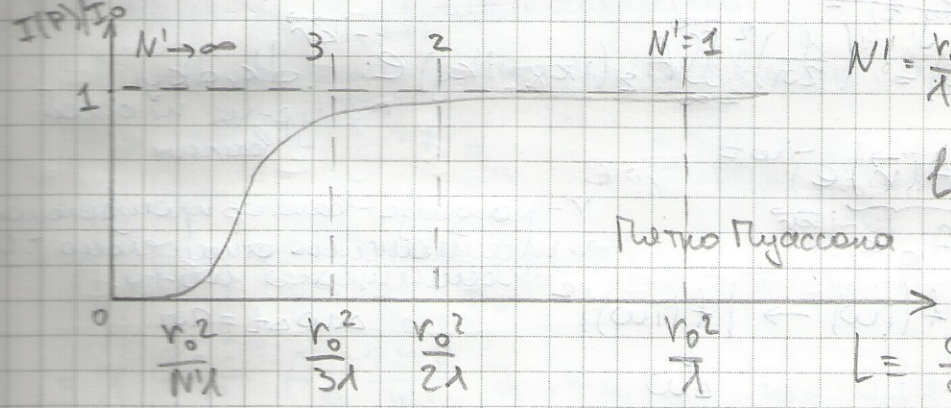




$$N' = \frac{r_0^2}{\lambda} \cdot \frac{a+b}{ab}$$

$$R_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$$





$$N' = \frac{r_0^2}{\lambda l}$$

$$l = \frac{ab}{a+b} = \frac{r_0^2}{N'\lambda}$$

$$L = \frac{ab}{a+b}$$

$P \perp SP$. $|A_1|\uparrow$, $|A_2|\downarrow$ => $|A(P)|\downarrow$

21 Дифракция света. Дифракция в дальней зоне как пространственное преобразование Фурье. Комплексная пространственная спектральная амплитуда. Разложение пучка по плоским волнам. Угловой спектр и его ширина.

1. Дифракция в дальней зоне как пространственное преобразование Фурье

комплексная амплитуда и интенсивность дифр картины в приближении Фраунгофера

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_\Sigma e^{i(k_x x - k_y y)} dx\,dy$$

(спектральная)

$A(ik_x, ik_y)$ – комплексная пространственная амплитуда.

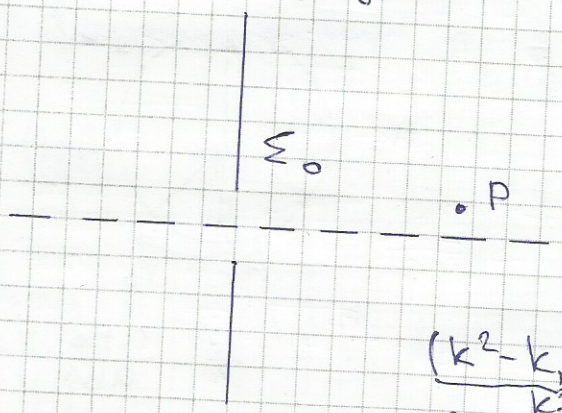
(прямое пространственное преобразование Фурье к.а. $A_\Sigma(x,y)$ сферического поля)

k_x, k_y – пространственные частоты

$$I(P) = \frac{1}{2\lambda^2 b^2}|A_\Sigma(ik_x, ik_y)|^2 = \frac{1}{2}|A(P)|^2$$

пространственная спектральная плотность интенсивности в сечении пучка (угловой спектр)

• Разложение пучка по плоским волнам



$$A_z(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} A_z(ik_x, ik_y) e^{-i\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y$$

$$A(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} A_z(ik_x, ik_y, z) e^{-i\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y$$

Воспользуемся уравнением Гельмгольца:

$$(\Delta + k^2) A(x,y,z) = 0$$

$$\underbrace{(k^2 - k_x^2 - k_y^2)}_{k_z^2 \text{ - пр-ие } k^2 \text{ на } z} A_z(ik_x, ik_y, z) e^{-i\vec{k}\vec{r}} + \frac{\partial^2 A_z(ik_x, ik_y, z)}{\partial z^2} e^{-i\vec{k}\vec{r}} = 0$$

$$A_z(ik_x, ik_y, z) = A_z(ik_x, ik_y) e^{-ik_z z}$$

~~$A_z(ik_x, ik_y, z) =$~~

$$A(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} A_z(ik_x, ik_y) e^{-i\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y$$

ур-ие плоской волны

$$\hat{E}(t,\vec{r}) = \underbrace{A(\vec{r})}_{A_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}} e^{-i\omega t}$$

r – радиус-вектор произвольной т. пространства относительно т. O – центра сферической волн-ти.

$$f(t) \to f(i\omega) \to |f(i\omega)|^2$$

$\downarrow \Delta t$ $\qquad \downarrow \Delta\omega$

$$\Delta\omega \Delta t = 2\pi$$

$$A_z(x,y) \to A_z(ik_x, ik_y) \to |A_z(ik_x, ik_y)|^2$$

$\downarrow l_{xy}$ $\qquad$ угловой спектр $\downarrow \Delta k_{x,y}$

$$\Delta k_{x,y} l_{xy} = 2\pi$$

ширина углового спектра

$$\boxed{\Delta k_{x,y} \simeq \frac{2\pi}{l_{x,y}}}$$

Θ_x и Θ_y – угловые координаты точки наблюдения

$$k_{x,y} = k \sin\Theta_{x,y}$$

$$\Delta k_{x,y} = k \cos\Theta_{x,y} \Delta\Theta_{x,y}$$

$$\Delta\Theta_{x,y} \simeq \frac{2\pi\lambda}{l_{x,y} 2\pi \cos\Theta_{x,y}} \simeq \frac{\lambda}{l_{x,y}}$$

(22) Дифракция на периодических структурах. Функция (комплексный коэффициент) пропускания (отражения). Фактор многолучевой интерференции. Интерференционная функция. Угловая ширина главных максимумов. Амплитудная и фазовая решётки.

1. Дифракция на прямоугольном отверстии

Плоская монохроматическая волна – $A_{\Sigma_0} = A_0 e^{-i\vec{k}_0\vec{r}}$

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint_{\Sigma_0} A_0 e^{-i\vec{k}_0\vec{r}} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\sigma = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \iint_{\Sigma_0} e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0)\vec{r}} d\sigma =$$

$$= \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \int_{-l_x/2}^{l_x/2} e^{i(k_x-k_{0x})x} dx \int_{-l_y/2}^{l_y/2} e^{i(k_y-k_{0y})y} dy$$

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b} A_0 l_x l_y \operatorname{sinc}\left(\frac{k_x-k_{0x}}{2} l_x\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k_y-k_{0y}}{2} l_y\right)$$

$$I(P) = \frac{1}{2}|A(P)|^2 = I_0 \left(\frac{l_x l_y}{\lambda b}\right)^2 \operatorname{sinc}^2 \xi_x^l \operatorname{sinc}^2 \xi_y^l,$$

$$\xi_{x,y}^l \equiv \frac{k_{xy}-k_{0x,y}}{2} l_{x,y}$$

2. Дифракция на круглом отверстии

Плоская монохроматическая волна падает нормально:

$$A_{\Sigma_0} = A_0 e^{-i\vec{k}_0\vec{r}} = A_0 \qquad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = (\vec{k}_z + \vec{k}_{xy})\cdot\vec{r} = k_{xy} r\cos(\varphi-\varphi')$$

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\sigma = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{ik_{xy} r\cos(\varphi-\varphi')} r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \frac{2\pi R}{k_{xy}} J_1(k_{xy}R),$$ где $J_1(z)$ – ф-ия Бесселя первого порядка.

$$A(\xi) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \pi R^2 \frac{2J_1(\xi)}{\xi}$$

$$\xi \equiv k_{xy}R = kR\sin\theta = \frac{2\pi R}{\lambda}\sin\theta$$

$$I(\xi) = \frac{1}{2}|A(\xi)|^2 = I_0\left(\frac{\pi R^2}{\lambda b}\right)^2 \left(\frac{2J_1(\xi)}{\xi}\right)^2$$

3. Ф-ия (коэфф) пропускания (отражения)

$$t(x,y) = \frac{A_\Sigma(x,y)}{A_{0\Sigma}(x,y)}$$

$$t(x+n_x dx,\ y+n_y dy) = t(x,y)$$

$n_x, n_y \in \mathbb{Z}$ в пределах границы
dx, dy – период повторяемости
$N_{x,y}$ – число периодов

$$\left.\begin{aligned} N_x dx &= L_x \\ N_y dy &= L_y \end{aligned}\right\}$$ р-р дифр решётки

$$t(x,y) = |t(x,y)|\, e^{-i\varphi(x,y)}$$

Типы дифр. решёток:

1. пропускательная
2. отражательная
3. Амплитудная $\varphi(x) = 0$ 5. 3+4
4. Фазовая $|t(x)| = 1$

4. Одномерная решётка. Фактор многоволновой интерференции

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint_{\Sigma} A_{\Sigma}(x,y)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\,dx\,dy$$

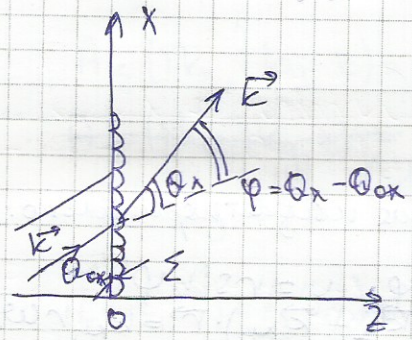
$t(x,y) \to t(x)$ одномерная решётка

одном дифр инт

$$A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}}\, e^{-ikb}\int_{-\infty}^{+\infty} A_{\Sigma}(x)\, e^{ik_x x}\,dx$$

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\pi/2}} = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$A_{\Sigma}(x) = A_{0\Sigma}(x)\, t(x) \qquad A_{0\Sigma}(x) = A_0 e^{-ik_{0x}x}$$



N – число периодов решётки, попадающих в зону „покрываемой" волной

$$A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}}\, e^{-ikb}\int_0^L A_0\, e^{i(k_x - k_{0x})x}\, t(x)\,dx =$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}}\, e^{-ikb} A_0 \sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)d}^{jd} e^{i(k_x - k_{0x})x}\,dx =$$

$$= \{\, y = x - (j-1)d \,\} = \underbrace{\frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}}\, e^{-ikb} A_0 \sum_{j=1}^{N}\int_0^d t(y + \cancel{(j-1)d})\, e^{i(k_x - k_{0x})y}}_{A_1(P) = A_1(k_x)}\cdot$$

$$\cdot \exp(i(k_x - k_{0x})(j-1)d)\,dy =$$

$$= A_1(k_x)\underbrace{\sum_{j=1}^{N} e^{i(k_x - k_{0x})d(j-1)}}_{h(N,\,k_x)}$$

$$S_N = a_1\frac{1-q^N}{1-q}$$

$h(N, k_x)$ – фактор многоволновой интерференции

$$h(N,k_x) = \frac{1-\exp(i(k_x - k_{0x})Nd)}{1-\exp(i(k_x - k_{0x})d)} = e^{i\left(\frac{k_x - k_{0x}}{2}\right)(N-1)d}\cdot\frac{\left(-2i\sin\left(\frac{k_x - k_{0x}}{2}\right)Nd\right)}{-2i\sin\frac{(k_x - k_{0x})d}{2}}$$

$$h(N, \xi_x d) = S_N = e^{i(N-1)\xi_x d}\,\frac{\sin(N\xi_x d)}{\sin(\xi_x d)}$$

$$\xi_x d = \frac{k_x - k_{0x}}{2}d$$

5. Интерференционная ф-ия Лауэ. Угловая ширина главных максимумов

$$I(P) = I(k_x) = \frac{1}{2}|A(k_x)|^2 = I_1(k_x)\,\frac{\sin^2(N\xi_x d)}{\sin^2(\xi_x d)} =$$

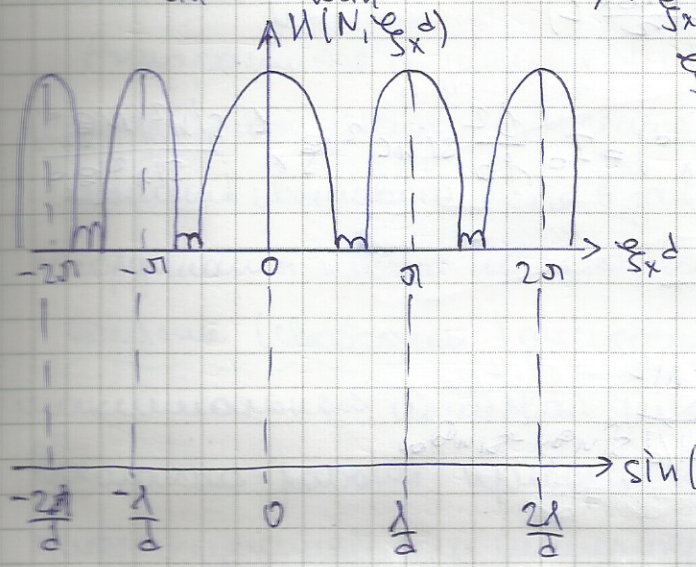
$$= I_1(k_x)\, H(N, \xi_x d)$$

$$H(N, \xi_x d) = \frac{\sin^2(N\xi_x d)}{\sin^2(\xi_x d)}$$ ф-ия Лауэ

max $H_{max} = N^2$, $\xi_x d = m\pi$, $m = 0, 1, 2 \ldots$

min $H_{min} = 0$, $N\xi_x d = k\pi$, $k = 1, 2, \ldots N-1, N+1$

$$\xi_x d = \frac{k\pi}{N}$$



$$\xi_x d = \frac{k_x - k_{0x}}{2} d = k\frac{\sin\theta_x - \sin\theta_{0x}}{2} d = \frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta_x - \sin\theta_{0x}) \to m\pi$$

угловая ширина главных максимумов

$$m\pi\xi_x d = \frac{k}{N}\pi$$

$$\delta(\xi_x d) = \frac{\pi}{N} = \frac{k}{2} d(\delta(\sin\theta_x - \sin\theta_{0x})) = \frac{\pi}{N}$$

$$\delta(\sin\theta_x - \sin\theta_{0x}) = \frac{\lambda}{Nd}$$

$$\cos\theta_x \delta\theta_x = \frac{\lambda}{Nd}$$

угловая ширина

$$\delta\theta_x = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_x} = \frac{\lambda}{Nd}$$

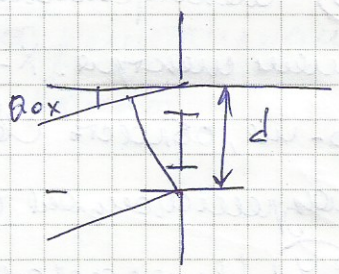
$$\sin\theta_x - \sin\theta_{0x} = \frac{m\lambda}{d}$$

$$2\cos\frac{\theta_x + \theta_{0x}}{2}\sin\frac{\theta_x - \theta_{0x}}{2} = m\frac{\lambda}{d}$$

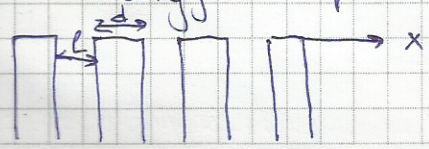
$$\varphi\cos\theta_{0x} = \frac{m\lambda}{d}$$

$\varphi \ll 1$ – угол дифракции

$$\varphi = m\frac{\lambda}{d\cos\theta_{0x}}$$



6. Амплитудная прямоугольная решётка



$$t(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le l \quad ((j-1)d) \\ 0 & l < x < d \quad ((j-1)d) \end{cases}$$

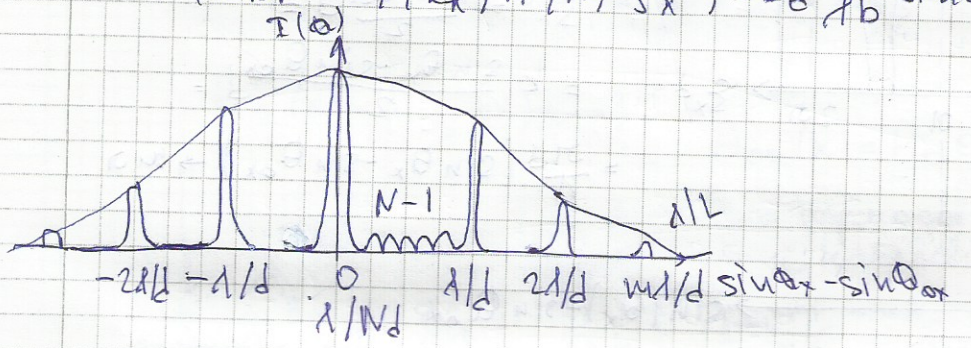
$$A_1(p) = A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 \int_0^{l} t(x) e^{i(k_x - k_0)x} dx =$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 e^{i\frac{k_x - k_{0x}}{2} l} l \, \mathrm{sinc}\left(\frac{k_x - k_{0x}}{2} l\right)$$

$$I_1(k_x) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{k_x - k_{0x}}{2} l\right)$$

На всей решётке:

$$I(k_x) = I_1(k_x) H(N, \xi_x d) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \mathrm{sinc}^2 \xi_x l \frac{\sin^2(N\xi_x d)}{\sin^2 \xi_x d}$$



7. Фазовая решётка

$$t(x) = e^{-i\varphi(x)} \qquad \varphi(x) \cong k(n-1)\gamma x / \cos\theta_{0x} = k\varphi x$$

$$\varphi = (n-1)\gamma / \cos\theta_{0x}$$

На 1 щел:

$$A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 \int_0^{l} e^{-ik\varphi x} e^{i(k_x - k_{0x})x} dx =$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 e^{i\frac{(k_x - k_{0x} - k\varphi)l}{2}} l \, \mathrm{sinc}\left(\frac{k_x - k_{0x} - k\varphi}{2} l\right)$$

$$I_1(\theta) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{k_x - k_{0x} - k\varphi}{2} L\right)$$

повёрнуто на угол φ

(23) Спектральные приборы с пространственным разложением спектра. Х-ки спектральных приборов – аппаратная ф-ия, область свободной дисперсии, предел разрешения, разрешающая способность. Призма. Диф. решётка.

+ (24) Интерферометр Фабри-Перо. Интерферометр Майкельсона.

Спектральный прибор - оптический прибор для пространственного разложения светового поля на монохроматические составляющие (в частности спектр) с помощью угловой дисперсии

Аппаратная функция $I(P)$ - „отклик" прибора на монохроматическое излучение - регистрируемая интенсивность светового поля в зависимости от обобщённой координаты точки наблюдения P.

Область (свободная) дисперсии, дисперсионная область $\Delta\lambda$ - максимальный интервал длин волн, при котором возможна работа прибора (получение разрешённой дифракционной или интерференционной картины). Максимальный интервал длин волн, исследуемый спектральным прибором.

Предел разрешения $\delta\lambda$ - минимальная разность длин волн двух спектральных линий, которые разрешает спектральный прибор.

Разрешающая способность (сила) $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ - отношение характерной длины волны λ исслед. излучения к пределу разрешения $\delta\lambda$

Угловая дисперсия $D_\theta = \frac{d\theta}{d\lambda}$ - скорость изменения угловой координаты θ максимума регистрируемой интенсивности с изменением длины волны

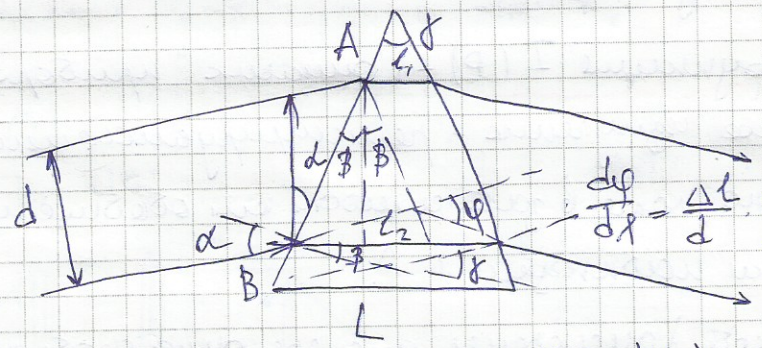
Дисперсия

$\gamma = 2\beta \quad \varphi = 2(\alpha - \beta)$

$\beta = \gamma/2 \quad \alpha = (\varphi + \gamma)/2$

Призма

$d = AB$



$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\Delta l}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

Закон Снеллиуса: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin((\varphi+\gamma)/2)}{\sin(\gamma/2)} = n$

$$\frac{\cos((\varphi+\gamma)/2)}{2\sin(\gamma/2)} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\cos\alpha}{2\sin\beta} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda}$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \underbrace{\frac{2\sin\beta}{\cos\alpha}}_{AB} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{l_2 - l_1}{AB} \cdot \frac{AB}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\Delta l}{d} \frac{dn}{d\lambda}$$

Аппаратная ф-ия –

$$I(\theta) = I_0 \frac{d^2}{\lambda b} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k\sin(\theta - \varphi)}{2} d\right)$$

Область дисперсии – $\Delta\lambda \sim \infty$

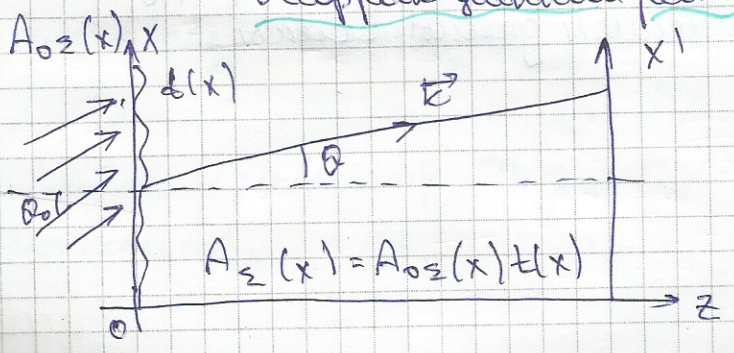
Угловая дисперсия – $D_\theta = \dfrac{d\theta}{d\lambda} = \dfrac{d\varphi}{d\lambda} = \dfrac{\Delta l}{d} \cdot \dfrac{dn}{d\lambda}$

Предел разрешения – $\delta\lambda = \dfrac{\delta\theta}{|D_\theta|} = \dfrac{\lambda}{\Delta l \left|\frac{dn}{d\lambda}\right|}$

Разрешающая способность – $R = \dfrac{\lambda}{\delta\lambda} = \Delta l \left|\dfrac{dn}{d\lambda}\right|$

$R_{max} = L \left|\dfrac{dn}{d\lambda}\right|$

Дифракционная решётка



разность хода крайних лучей для одного периода решетки

- Аппаратная ф-ия – $I(\theta) = I_1(\theta) H(N, \xi(\theta))$

$$H(N, \xi(\theta)) = \frac{\sin^2(N\xi(\theta))}{\sin^2 \xi(\theta)}, \quad \xi(\theta) = k\frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{2} d = k\frac{\Delta(\theta)}{2}$$

- Порядок дифракции: $m = \frac{d(\sin\theta - \sin\theta_0)}{\lambda}$
- Область дисперсии: $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$
- Предел разрешения: $m(\lambda + \delta\lambda) = (m + \frac{1}{N})\lambda \Rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm}$
- $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm$; $R_{max} = Nm_{max} = N\frac{d}{\lambda} = \frac{L}{\lambda}$
- $D_\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}$

Интерф

Интерферометр Фабри – Перо.

- Аппаратная ф-ия – ф-ла Эйри:

$$I_{пр}(\theta) = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\varphi(\theta)}{2}}, \quad \varphi(\theta) = \frac{4\pi d}{\lambda}\cos\theta$$

- Условие максимумов $\varphi(\theta) = m2\pi \Rightarrow 2d\cos\theta = m\lambda$

$$m = \frac{2d\cos\theta}{\lambda}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{2d\cos\theta}$$

- Предел разрешения – $\frac{d\varphi}{d\lambda}\delta\lambda = \delta \Rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \cdot \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}$
- Разрешающая способность – $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = m\frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$
- Угловая дисперсия – $D_\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{m}{2d\sin\theta} = -\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\lambda}$

Интерферометр Майкельсона.

- Аппаратная ф-ия – уравнение двухволновой интер-ии.

$$I(\theta) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(k\Delta(\theta)), \quad \Delta(\theta) = 2\Delta l\cos\theta$$

- Усл-вие max: $2\Delta l\cos\theta = m\lambda$ min: $2\Delta l\cos\theta = (m + \frac{1}{2})\lambda$

$$m = \frac{2\Delta l\cos\theta}{\lambda}$$

- Область дисперсии $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$, $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$
- Предел разрешения $m(\lambda + \delta\lambda) = (m + 1/2)\lambda$, $\delta\lambda = \frac{\lambda}{2m}$

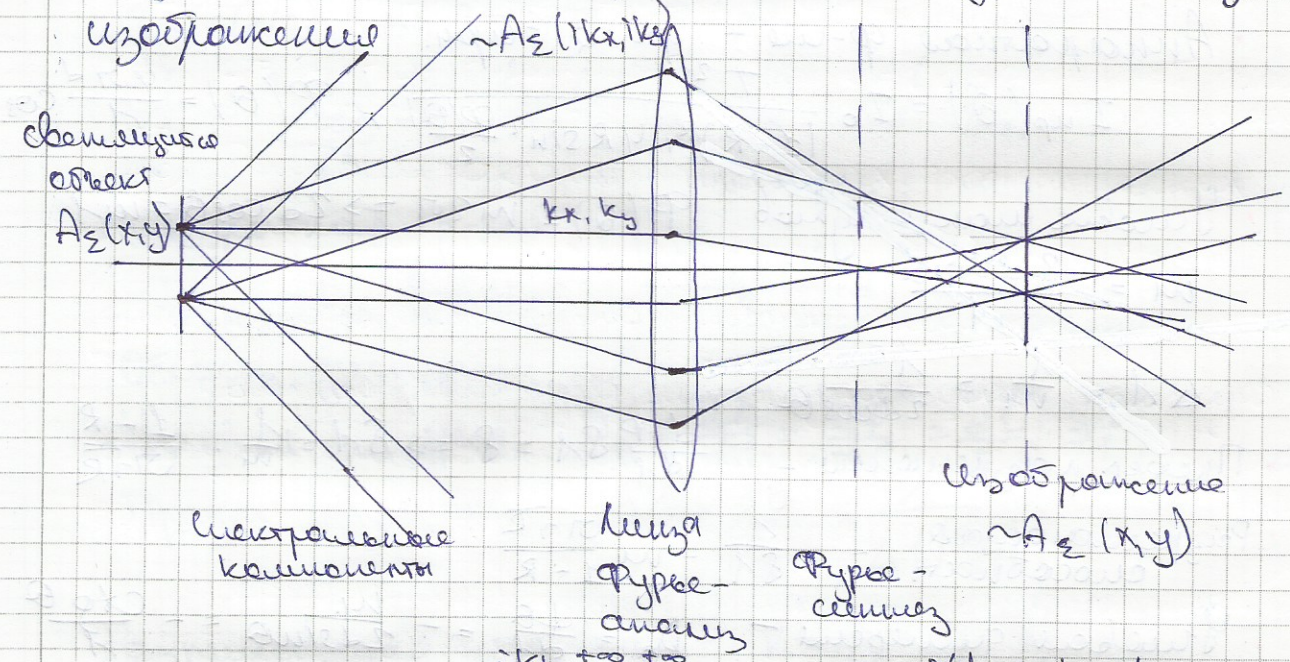
$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm = 2m$

$D_\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{m}{2d\sin\theta} = -\frac{1}{\lambda\operatorname{tg}\theta}$

(25) Основы дифракционной теории формирования изображения Аббе. Пространственная фильтрация изображения. Опыт Аббе-Портера. Специальные методы наблюдения фазовых объектов. Метод тёмного поля. Метод фазового контраста.

Первый этап: линза в своей фокальной плоскости осуществляет пространственный Фурье-анализ светового поля светящегося объекта.

Второй этап: в процессе свободной дифракции осуществляется пространственный Фурье-синтез изображения



$$A(k_x,k_y)=\frac{i}{\lambda}\cdot\frac{e^{-ikb}}{b}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A_\Sigma(x,y)\,e^{i(k_x x+k_y y)}\,dx\,dy=$$

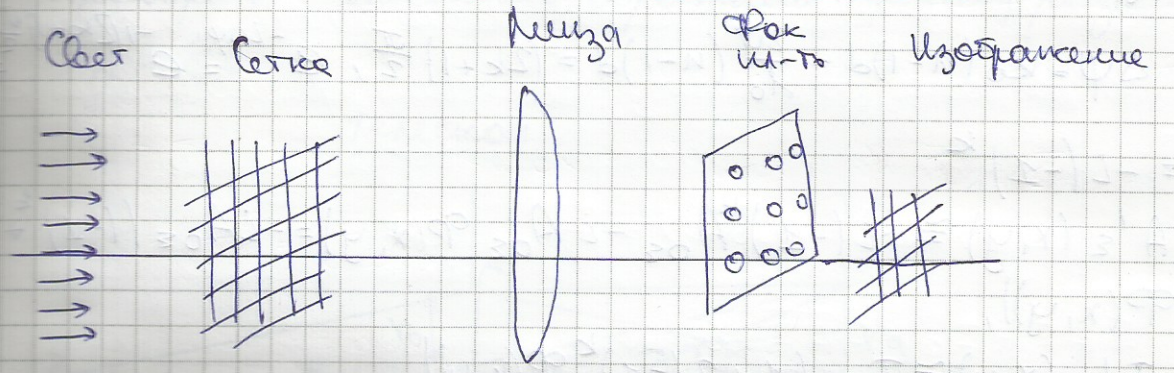
$$=\frac{i}{\lambda}\cdot\frac{e^{-ikb}}{b}A_\Sigma(ik_x,ik_y),$$

$$I(k_x,k_y)=|A(k_x,k_y)|^2=\frac{1}{\lambda^2 b^2}|A_\Sigma(ik_x,ik_y)|^2$$

$$A_\Sigma(x,y,z)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A_\Sigma(ik_x,ik_y)\,e^{-i(k_x x+k_y y+k_z z)}\,dk_x dk_y$$

Пространственная фильтрация изображения — изменение изображения объекта посредством модификации пространственных спектральных компонент светового поля объекта.

Схема опыта Аббе — Портера.



Расстояние между пятнами определяется периодом d сетки $\frac{1}{d} f$

Размер пятна определяется размером L освещаемой части сетки $\frac{1}{L} f$

Специальные методы наблюдения фазовых объектов

Δ фазовые объекты, которые практически не поглощают свет $|t(x,y)| \sim 1$ и слабо меняют его фазу $\varphi(x,y) \ll 1$:

$$t(x,y) = |t(x,y)| e^{-i\varphi(x,y)} \cong 1 - i\varphi(x,y);$$

$$A_{0\Sigma}(x,y) \cong A_{0\Sigma} - const(x,y)$$

$$A_\Sigma(x,y) \cong A_{0\Sigma}(1 - i\varphi(x,y)) = A_{0\Sigma} - iA_{0\Sigma}\varphi(x,y)$$

$$I_\Sigma(x,y) = \frac{1}{2}|A_\Sigma| = I_{0\Sigma}|t(x,y)|^2 \cong I_{0\Sigma}(1 + \varphi^2(x,y)) \cong I_{0\Sigma}$$

А. Метод тёмного поля

В заднем фокусе объектива микроскопа — непрозрачный диск, закрывающий кружок Эйри радиуса $r_Э = \theta_Э f_1 \cong 1{,}221 \lambda_0 f_1$

$$A'_\Sigma(x,y) \cong A_{0\Sigma} - iA_{0\Sigma}\varphi(x,y) - A_{0\Sigma} \cong -iA_{0\Sigma}\varphi(x,y)$$

$$I'_\Sigma(x,y) \cong I_{0\Sigma}\varphi^2(x,y)$$

Б. Метод фазового контраста

Фазовый рельеф преобразуется в амплитудный рельеф с помощью фазовой пластинки, перекрывающей кружок Эйри. Пластинка толщиной $d = (2k+1)\frac{\lambda_0}{4(n-1)}$ осуществляет изменение фазы $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = k_0(n-1)d = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)d = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ e^{-i\Delta\varphi} = e^{-i(2k+1)\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -i(-1)^k$$

$$A'_\Sigma(x,y) \cong -i(-1)^k A_{0\Sigma} - iA_{0\Sigma}\Phi(x,y) = -iA_{0\Sigma}((-1)^k + \Phi(x,y)),$$

$$I'_\Sigma(x,y) \cong I_{0\Sigma}(1 + 2(-1)^k\Phi(x,y))$$

При $k = 2l+1$ - тёмный, а при $k = 2l$ - светлый фазовый контраст

(26) Роль дифракции в приборах, формирующих изображение. Предел разрешения и разрешающая способность оптического прибора: телескоп, микроскоп

• Конечная апертура линзы улавливает конечную полосу пространственных частот спектра изображения объекта

• Изображением светящейся точки в сопряжённой плоскости является дифракционная картина, состоящая из концентрических колец, окружающих центральный светлый кружок (пятно) - **кружок Эйри**. Изображение объекта есть наложение таких кружков и дифракционных колец.

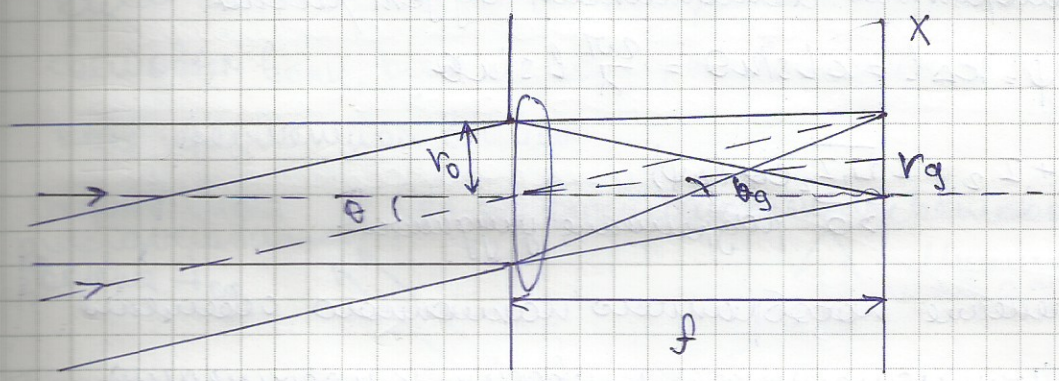
• Разрешающая способность оптических приборов ограничивается дифракцией Фраунгофера на их входной апертуре.

Предел углового (линейного) разрешения оптического прибора $\delta\theta$ (δl) – минимальное угловое (линейное) расстояние между двумя светящимися точками объекта, которое разрешается прибор.

Разрешающая способность (сила) оптического прибора R – величина, обратная пределу разрешения

$R = \frac{1}{\delta\theta}$

Телескоп

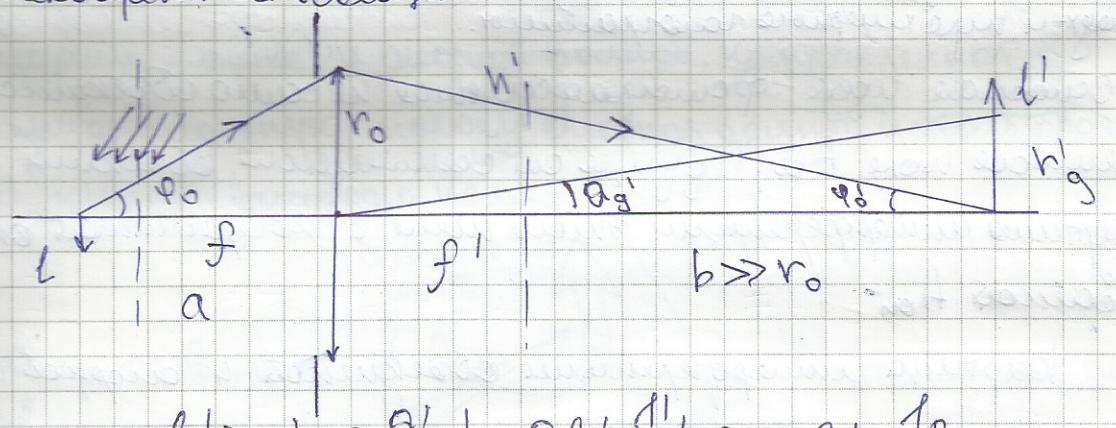


Волны плоские $a \gg r_0^2/\lambda$, пространственно когерентны $\Omega < \lambda/d_0$

В соответствии с критерием Рэлея: $\delta\theta = \theta_g = 0{,}61\frac{\lambda}{r_0}$, $R_\theta = \frac{r_0}{0{,}61\lambda}$

Микроскоп

1. Некогерентное освещение объекта

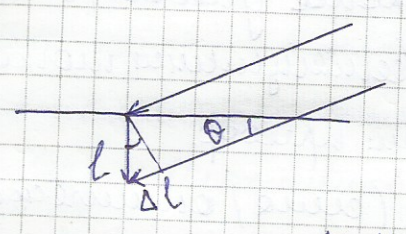


$$l' \geq r'_g = \theta'_g b = 0{,}61\frac{\lambda'}{r_0}b \cong 0{,}61\frac{\lambda_0}{n'\sin\varphi_0'}$$

$$n l \sin\varphi_0 = n' l' \sin\varphi_0' \geq 0{,}61\lambda_0, \quad l \geq 0{,}61\frac{\lambda_0}{n\sin\varphi_0} = \delta l$$

$$\delta l = 0{,}61\frac{\lambda_0}{n\sin\varphi_0} = 0{,}61\frac{\lambda}{\sin\varphi_0}; \quad R = \frac{1}{\delta l} = \frac{n\sin\varphi_0}{0{,}61\lambda_0}$$

2. Когерентное освещение объекта



Пусть поверхность объекта освещается плоской монохроматической волной под углом θ к нормали к плоскости объекта, тогда, если l – расстояние между светящимися точками, то разность фаз между волнами приходящими к этим вторичным источникам будет равна:

$$\Delta\varphi = k\Delta l = kl\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} l\sin\theta$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\underbrace{\sqrt{I_1 I_2}}_{>0}\cos(\Delta\varphi)$$

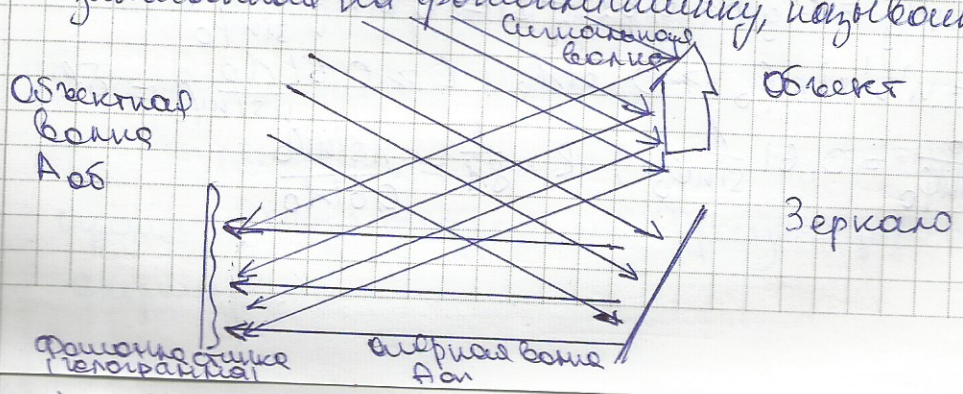
разрешение ухудшится

Применение подобранного наклонного освещения когерентным источником приводит к повышению разрешающей способности микроскопа.

27. Запись и восстановление светового поля. Голография. Схемы голографической записи и восстановления: Двух- и трёхмерные голограммы.

Основная идея – фотографируется не само объектное световое поле $A_{об}$, идущее от светящегося объекта, а картина интерференции этого поля с когерентной опорной волной $A_{оп}$

Картина интерференции объектной и опорной волн, записанная на фотопластинку, называется голограммой.

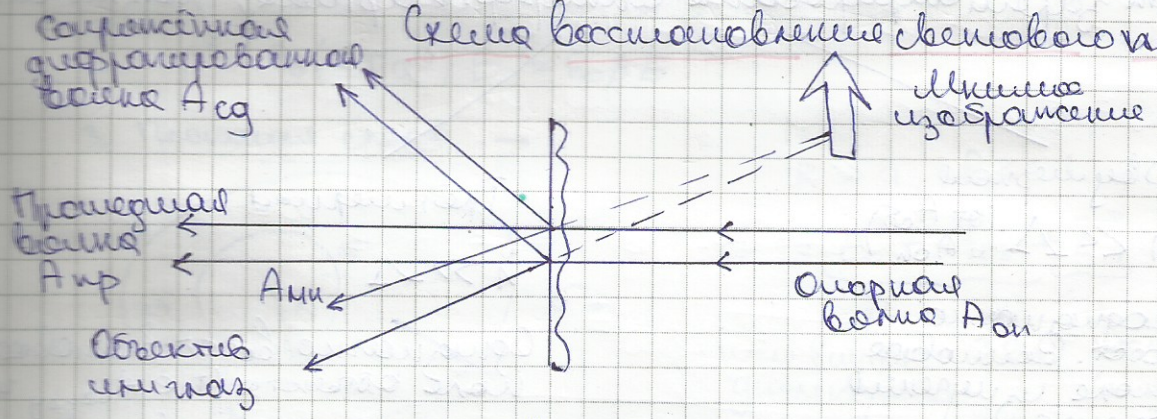


• Амплитуда светового поля в плоскости фотопластинки — $A(x,y) = A_{об}(x,y) + A_{оп}$, а распределение интенсивности — $I(x,y) = \frac{1}{2}|A(x,y)|^2 = \frac{1}{2}|A_{оп} + A_{об}|^2 = I_{оп} + I_{об} + \frac{1}{2}A_{оп}A_{об}^* + \frac{1}{2}A_{оп}^*A_{об}$

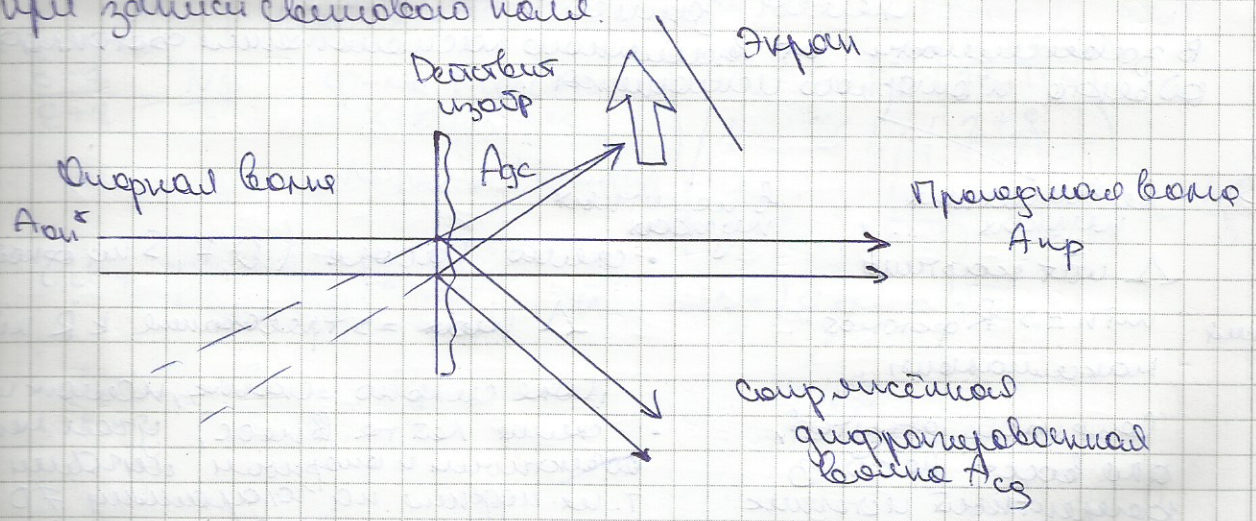
! Есть слагаемые содержащие информацию о фазе объектной волны

• Для восстановления светового поля голограмму освещают опорной волной $A_{оп}$. В результате дифракции опорной волны на голограмме возникает несколько световых волн, одна из которых в точности повторяет поле предметной волны

Схема восстановления светового поля



• Для восстановления светового поля голограмму можно освещать также и опорной волной, направленной в противоположную сторону опорной волны, использованной при записи светового поля.



Регистрирующие среды – галогенидо-серебряные
– бихромированная желатина

Классификация голограмм

• Св-ва голограммы существенно зависят от:

– геометрической конфигурации и физических свойств светочувствительной среды, в которой осуществляется запись

– взаимного расположения голограммы, объекта и источника опорной волны

– физической природы (световой, радио-, акустической) волнового поля, записываемого на голограмме

В зависимости от геометр конфиг светочувств среды, в кот зарегистрирована интерф. картина, различают

• Двумерная

h-толщ фотоэмул

$h \ll \Lambda$ (от $A_{об}$ и $A_{оп}$)

Λ-пространств период регистр интерф картины

Неоднозначно восст. волновое поле излучения объекта ($A_{истоб}$ + ~~дист~~ изобр + $A_{сопрд}$ + сопр изобр)

S монохроматич

• Трёхмерная

$h \gg \Lambda$

Однозначно восст волновое поле объекта (т.е $A_{сопрд}$ и сопр изобр отсутствуют)

Способность воспроизводить не только фазу и амплитуду записанного на нее излуч, но и его спектр состав

Схемы записи

В зависимости от взаимного расположения фотопластинки, объекта и опорного источника:

объект O опорн ист S

• во встречных пучках

Λ мин картины

требования

min n => R фотоэмул максимальн

Сопр изобр отсутств, для восст не обяз когерентный источник (естеств свет)

• в попутных пучках

• схема Габора (O, F, S на одной оси)

Λ max => требование к R мин

Поле сильно искажено, нельзя исп сопр

• схема Лейта (внеос) угол между объектным и опорным лучами в т. их падения на голограмму ≠ 0

• схема Фурье O, S по одну сторону на одинаковом расстоянии. Простота и ясность восст изображ

(25) Дисперсия и поглощение света. Поляризуемость молекулы и вектор поляризации. Ф-ла Лоренц–Лорентца. Классическая электрон. теория дисперсии. Плазменная частота. К.и. преломления. Закон Бугера. Зависимость показателя преломления и коэф поглощения от частоты.

1. $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i \Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V} = \sum_j N_j \vec{p}_j = N\vec{p}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \varkappa \vec{E}$$

2. $$P_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \varkappa_{ij} E_j$$

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_j \varepsilon_{ij} E_j$$

Изотропное в-во можем было „построено" как из изотропных, так и из анизотропных молекул.

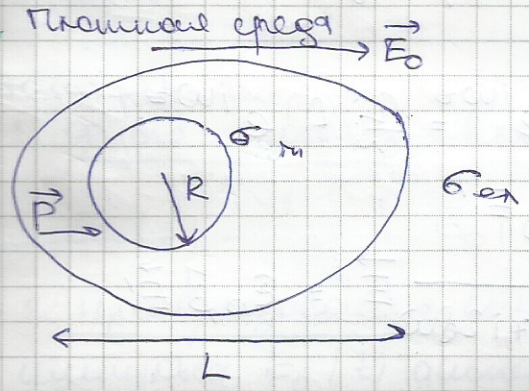
$$\vec{p} = \varepsilon_0 \beta \vec{E}' \qquad \vec{E}' \neq \vec{E}$$

$\beta\,[м^3]$ – поляризуемость $= 4\pi a^3 = 10^{-29} м^3$

$$E(l) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{l}{a^3} = E'$$

$$\vec{p} = \varepsilon_0 (4\pi a^3) \vec{E}' = \varepsilon_0 \beta \vec{E}'$$

3. Плотная среда



$R \gg a, \quad R \ll L$

для высоко симметр. систем, напр. в конд-сат

$$\vec{E}' = \underbrace{\vec{E}_0 + \vec{E}_{ex}}_{\vec{E}} + \underbrace{\vec{E}_{in}}_{\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}} + \vec{E}_{dip}$$

поле внутри диэлектрика

поле Лоренца (на внутр нов диэл)

$$\Rightarrow \vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \underbrace{(\varepsilon - 1)}_{\varkappa} \vec{E}' = \varepsilon_0 N\beta \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right)$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 N\beta \left(\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0(\varepsilon-1)} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right)$$

$$1 = \varepsilon_0 N\beta \left(\frac{1}{\varepsilon_0(\varepsilon-1)} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\right)$$

$$1 = \varepsilon_0 N\beta \left(\frac{3+\varepsilon-1}{3\varepsilon_0(\varepsilon-1)}\right)$$

$$1 = \cancel{\varepsilon_0} N\beta \left(\frac{2+\varepsilon}{3\cancel{\varepsilon_0}(\varepsilon-1)}\right)$$

$$\frac{1}{2+\varepsilon} = \frac{N\beta}{3(\varepsilon-1)} \qquad \frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2} = \frac{N\beta}{3}$$

$$\boxed{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{N\beta}{3}}$$

Ф-ла Моссоти-Клаузиуса

Лоренц–Лорентца

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{n} \qquad n = \sqrt{\varepsilon \underbrace{\mu}_{1}} = \sqrt{\varepsilon}$$

1 – немагн. среда

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{N\beta}{3}$$

4. Атом с одним оптическим электроном m и q

$$\frac{m_p}{m_e} \cong 1836 \quad F_E \gg F_B$$

электрон рассматривается как затухающий гармон. осц:

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + qE'(t)$$

квазиупр сила

сила трения, введена учёта потерь и излуч. электрон

смещение электрона отн ядра атома под действием локального электр поля

① $\vec{x}, \vec{p}, \vec{m}, \vec{E}'$
② $\vec{\beta}(\omega, \omega_0, \delta)$
③ $\hat{\beta}, \hat{\varepsilon}, \hat{n}, \hat{k}$

УД в случае воздействия гармон. волны

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m} A'(r) e^{i\omega t}$$

$\delta \equiv \frac{\gamma}{2m}$ - коэф затухания, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ собственная частота колеб.

$x \le r_{атм} \ll 1$

?

$$x_0(-\omega^2 + i\omega 2\delta + \omega_0^2) e^{i\omega t} = \frac{q}{m} A' e^{i\omega t}$$

$$x = \frac{q}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega} E'$$

$$\vec{p} = q\vec{x} = \frac{q^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega} \vec{E}' = \varepsilon_0 \hat{\beta} \vec{E}'$$

p - электр дип момент атома

$$\hat{\beta}(\omega) = \frac{q^2}{m\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}$$

β - поляризуемость молекулы

$$\hat{\varepsilon} - 1 = N\beta = \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega} = \omega_n^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}$$

ω - сост поля

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - i\varepsilon'$$

ω_0 - осц электр в молек

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}}$$ - плазменная частота (характеристика среды)

$$E(t,z) = A(z)e^{i\omega t} = A_0 e^{-ik(\omega)z} e^{i\omega t} =$$

$$= A_0 e^{-ik(\omega)z} e^{-k'z} e^{i\omega t} = e^{-k'z} A_0 e^{i(\omega t - k(\omega)z)}$$

$$I(z) = \frac{1}{2} \langle |E(t,z)|^2 \rangle = I_0 e^{-2k'z} = I_0 e^{-\alpha z}$$ - закон Бугера

$$\alpha(\omega) = 2\frac{\omega}{c} n'(\omega)$$ - линейный коэф затухания

$$\hat{n}^2 - 1 \simeq 2(\hat{n} - 1) = \omega^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

5 $\vec{P} = \sum_j N_j \vec{p}_j = \sum_j N_j \varepsilon_0 \hat{\beta}_j \vec{E}' = \varepsilon_0 \underbrace{\left(\sum_j N_j \hat{\beta}_j(\omega)\right)}_{N\hat{\beta}} \vec{E}'$

$$\hat{\varepsilon} - 1 = \sum_j N_j \beta_j = \sum_j \frac{N_j q_j^2}{\varepsilon_0 m_j} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i2\delta_j\omega} =$$

$$= \omega_n^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i2\delta_j\omega}$$

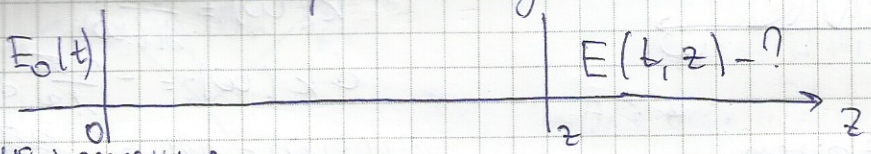
$$\boxed{n^2(\omega) - 1 = \omega_n^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2}}$$

$$f_j = \frac{N_j q_j^2}{\varepsilon_0 m_j} \cdot \frac{\varepsilon_0 m}{N q^2} \sim \frac{m}{m_j}$$ ф-ла Зельмеера

молярная рефракция $R = \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)\frac{\mu}{\rho} = \frac{N\beta}{3}\frac{\mu}{\rho} = \frac{N_A\beta}{3} \neq f(\rho)$

(29) Распространение светового импульса в диспергирующей среде. Фазовая и групповая скорости. Формула Рэлея. Дисперсионное расплывание волновых пакетов. Дисперсионная длина светового импульса.

1.



Три этапа решения.

1. Фурье-анализ входного импульса $E_0(t)$:

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \text{ где } E_0(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

2. Преобразование спектральных компонент входного импульса $E_0(t)$ диспергирующей средой:

$$E(i\omega, z) = E_0(i\omega) e^{-ik(\omega)z}$$

3. Фурье-синтез импульса на выходе:

$$E(t,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(i\omega, z) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t') e^{-ik(\omega)z} \cdot e^{i\omega(t-t')} dt' d\omega$$

① $k_0' \gg \frac{1}{2}k_0''(\omega-\omega_0)$ – диспергирующие среды 1-го порядка

② $k_0' \sim \frac{1}{4}k_0''\Delta\omega$ – — // — 2-го порядка

$$k(\omega) \cong k_0 + k_0'(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}k_0''(\omega-\omega_0)^2$$

2. Фазовая и групповая скорости. Формула Рэлея.

Групповая скорость распространения узкополосного импульса в диспергирующей среде 1-го порядка – скорость движения огибающей; скорость переноса импульса к энергии

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$$

$$\frac{dn}{d\omega} > 0$$ для прозр диспергирующей среды

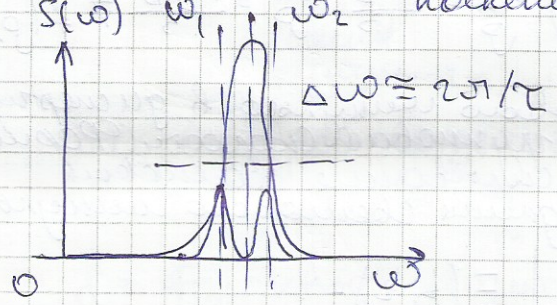
$$\frac{d}{d\omega} k(\omega) = \frac{1}{c}\left(n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}\right)$$

$$u(\omega) = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{v(\omega)}{1 + \frac{\omega}{n(\omega)} \frac{dn}{d\omega}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(\omega) &\le v(\omega) \\ u(\omega) &\le c \end{aligned}}$$

Диспергирующая среда 2-го порядка $k_0' \sim \frac{k_0''}{4} \Delta\omega$

Дисперсионное расплывание временной пакетов.



Ф-ла Рэлея:

$$\omega = k(\omega) v(\omega)$$

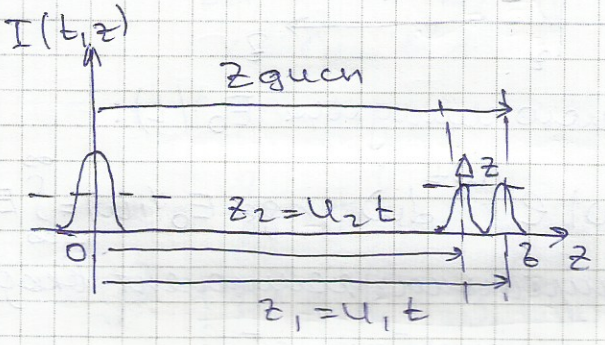
$$u = \frac{d\omega}{dk} = v(\omega) + k(\omega) \frac{dv}{dk}$$

$$k(\omega) = \frac{2\pi}{\lambda(\omega)}$$

$$dk(\omega) = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$$

$$u(\omega) = v(\omega) + \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda^2}{2\pi} dv\right)$$

$$\boxed{u(\omega) = v(\omega) - \lambda(\omega) \frac{dv}{d\lambda}}$$



$$\Delta t = \frac{\Delta z}{u_2} = \frac{u_1 - u_2}{u_2} t = \frac{u_1 - u_2}{u_2 u_1} z_1 = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) z_1 =$$

$$= (k_2' - k_1') z_1 \cong k_0'' \Delta\omega z_1 \cong \frac{2\pi k_0''}{\tau} z_1$$

Из-за такой задержки между пакетами начнёт увеличиваться длительность импульса примерно на ту же величину.

$z_{дис}$ такое, что $\Delta t = \tau$ в начале процесса

$$\boxed{z_{дисп} = \frac{\tau^2}{2\pi k_0''}}$$

Дисперсионная длина светового импульса в среде - расстояние вдоль направления распространения светового импульса в прозрачной диспергирующей среде, на котором его длительность увеличивается вдвое

(30) Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Законы отражения и преломления. Формулы Френеля, поляризация отражённой и прошедшей волн. Угол Брюстера.

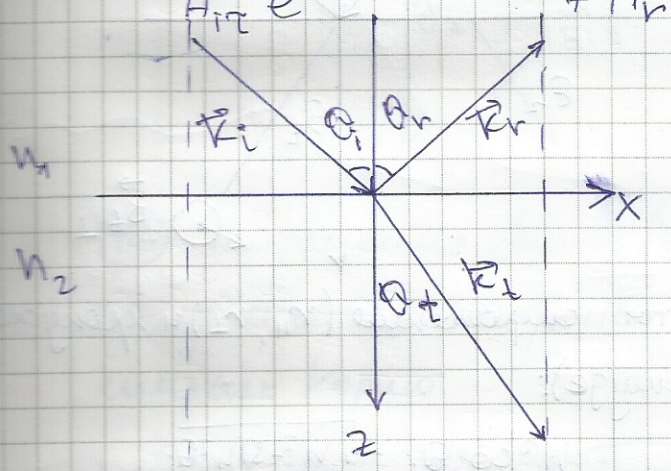
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mu_1 \cong \mu_2 \cong 1, \sigma = 0, i = 0$

1. Законы отражения и преломления. Свойства

Плоская монохроматическая волна линейно поляризованная свет-ая: $\vec{E} = \vec{A} e^{i(\omega t - k\vec{r})}$, $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$, $\vec{E}_2 = \vec{E}_t$

Граничное условие $\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$:

$$\vec{A}_{i\tau} e^{i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} + \vec{A}_{r\tau} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \vec{r})} = \vec{A}_{t\tau} e^{i(\omega_t t - \vec{k}_t \vec{r})}$$



- В любой момент времени t:

  $\omega_i = \omega_r = \omega_t$

- Для всех точек, лежащих на границе раздела двух сред:

  $\vec{k}\vec{r} = (\vec{k}_n + \vec{k}_\tau)\vec{r}_\tau = \vec{k}_\tau \vec{r}_\tau$

  $\vec{k}_{i\tau} = \vec{k}_{r\tau} = \vec{k}_{t\tau}$

  $k_i \sin\theta_i = k_r \sin\theta_r = k_t \sin\theta_t$

  $k_0 n_1 \sin\theta_i = k_0 n_1 \sin\theta_r = k_0 n_2 \sin\theta_t$

  $n_1 \sin\theta_i = n_1 \sin\theta_r = n_2 \sin\theta_t$

1. Частоты падающей, отражённой и преломлённой волн равны
2. Волновые векторы падающей, отражённой и преломлённой волн лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела двух сред в точке падения.
3. Угол падения равен углу отражения $\theta_i = \theta_r$
4. Закон Снеллиуса: $\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{n_2}{n_1} = n$

Плоскость падения луча – плоскость, образованная волновым вектором падающей волны и нормалью к поверхности раздела сред

2. Формулы Френеля.

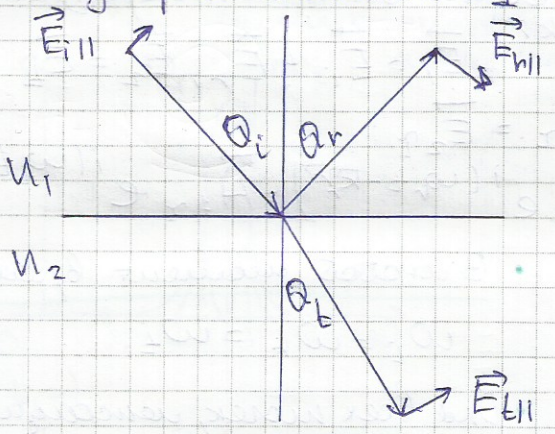
Граничные условия: $\vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n}$, $\vec{B}_{2n} = \vec{B}_{1n}$, $\vec{E}_{2\tau} = \vec{E}_{1\tau}$, $\vec{H}_{2\tau} = \vec{H}_{1\tau}$

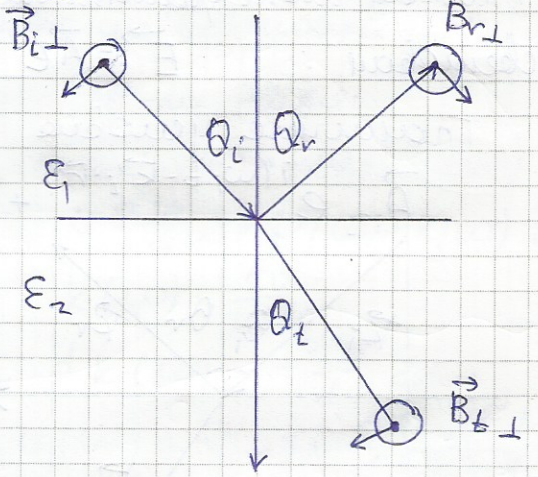
Свойства плоских волн: $[\vec{n}\vec{E}] = v\vec{B}$, $[\vec{n}\vec{H}] = -v\vec{D}$;

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}\, E = \sqrt{\mu_0 \mu}\, H$$

Материальные уравнения: $\vec{D}_{1,2} = \varepsilon_0 \varepsilon_{1,2} \vec{E}_{1,2}$, $\vec{B}_{1,2} = \mu_0 \vec{H}_{1,2}$

Поляризация падающей волны в плоскости $\vec{E}_{\parallel}$ и перпендикулярно плоскости $\vec{E}_{\perp}$ падения:





Комплексные коэф-ты отражения ($r_{\parallel}$, $r_{\perp}$) и пропускания ($t_{\parallel}$, $t_{\perp}$) (по амплитуде):

$$r_{\parallel} = \frac{A_{r\parallel}}{A_{i\parallel}} = -\frac{tg(\theta_i - \theta_t)}{tg(\theta_i + \theta_t)} = -\frac{n^2\cos\theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}{n^2\cos\theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}$$

$$t_{\parallel} = \frac{A_{t\parallel}}{A_{i\parallel}} = \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} = \frac{2n\cos\theta_i}{n^2\cos\theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}$$

$$r_{\perp} = \frac{A_{r\perp}}{A_{i\perp}} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}$$

$$t_{\perp} = \frac{A_{t\perp}}{A_{i\perp}} = \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}$$

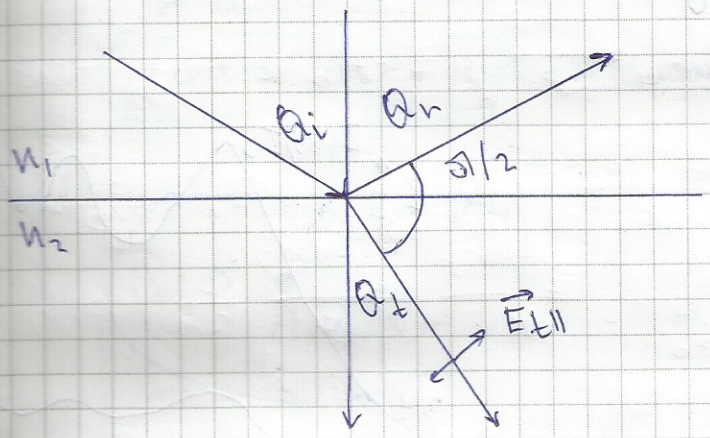
Нормальное падение луча: $r = r_{\parallel} = r_{\perp} = \frac{1-n}{1+n}$

$$t = t_{\parallel} = t_{\perp} = \frac{2}{1+n}$$

3. Эффект Брюстера.

– явление полной поляризации ($\perp$ плоскости падения) отражённой волны при $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ или при угле падения, равном углу Брюстера:

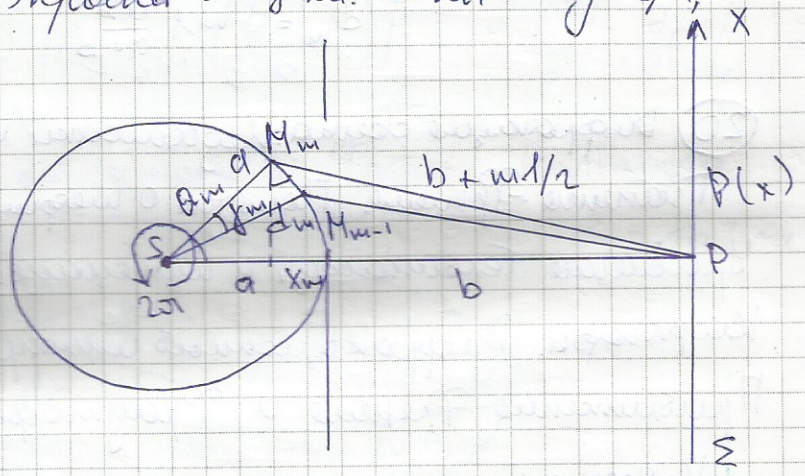
$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{\sin\theta_B}{\sin(\pi/2-\theta_B)} = tg\,\theta_B = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \theta_B = arctg\,\frac{n_2}{n_1}$$



Степень поляризации –

$$P = \frac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel}, \quad 0 \le P \le 1$$

(19) Дифракция света. Дифракция на щели и крае полубесконечного экрана и щели. Зоны Шустера, спираль Корню



$$d_m = \sqrt{m\lambda\frac{ab}{a+b}}$$

$a \sim b \sim 4$ м

$\lambda \sim 0{,}5\cdot10^{-6}$ м

$d_m \sim \sqrt{m}\cdot10^{-3}$ м

$x_m = m\cdot0{,}125\cdot10^{-6}$ м

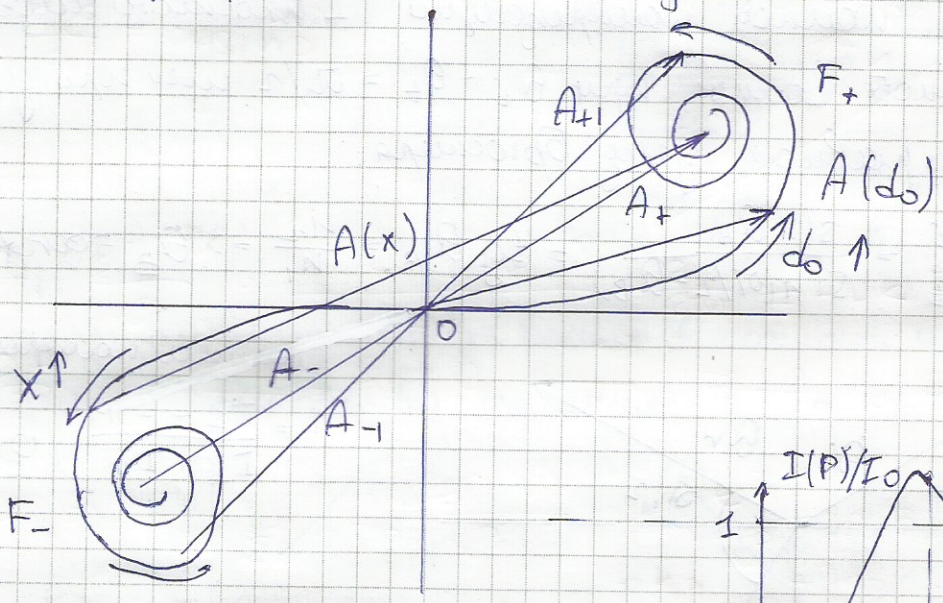
$$\cos\theta_m = \frac{a-x_m}{a} \cong \frac{d_m - d_{m-1}}{l_m} \cong 1$$

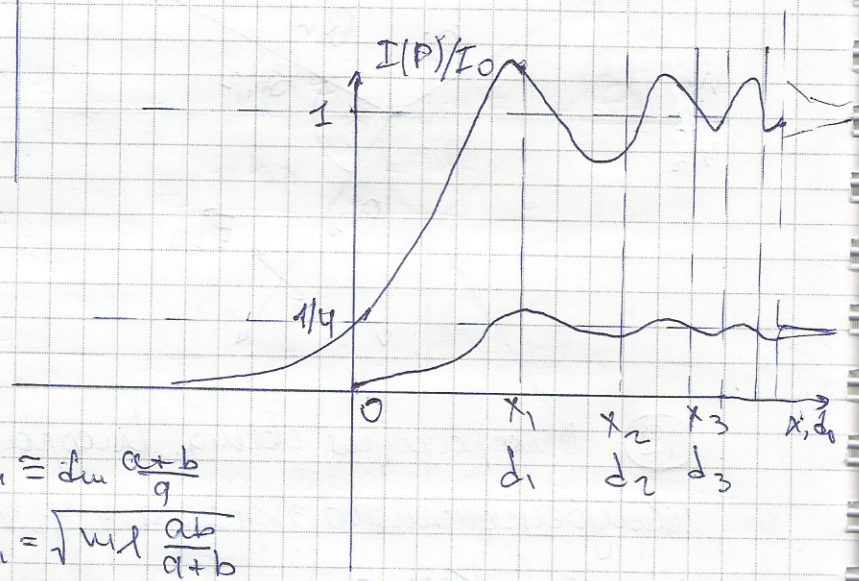
$$\sigma_m = \frac{4\pi a^2}{2\pi}\gamma_m = 2a^2\frac{l_m}{a} = 2al_m \cong 2a(d_m - d_{m-1}) \sim (\sqrt{m} - \sqrt{m-1}) = \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{m-1}}$$

$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_4 : \sigma_5 : \ldots = 1 : 0{,}41 : 0{,}32 : 0{,}27 : 0{,}24 : \ldots$

Зона – сферический двуугольник – лунка, при $a \to \infty$ – плоская полоса – зона Шустера

O-центр, F_+, F_- – полюса клотоиды





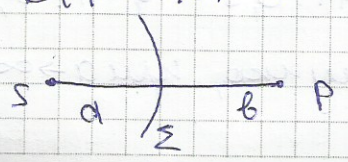
$$x_m \cong d_m \frac{a+b}{a}$$

$$d_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$$

(20) Дифракция света. Недостатки положений принципа Гюйгенса-Френеля. Понятие о теории дифракции Кирхгофа. Уравнение Гельмгольца и интегральная теорема Гельмгольца-Кирхгофа. Дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа. Приближение Френеля и Фраунгофера.

1. Недостатки положения принципа Г-Ф

$$\left.\begin{aligned} &[K(\varphi)] - м^{-1} \\ &K(\varphi=0) = K_{max} \\ &K(\varphi \uparrow) \downarrow \\ &K(\varphi \geq \pi/2) = 0 \end{aligned}\right\} \; ?$$



$$A_\Sigma = A_0 \frac{e^{-ika}}{a}; \; A(P) = A_0 \frac{e^{-ik(a+b)}}{a+b} = A_0 \frac{e^{-ika}}{a+b}$$

2. Ур-ие Гельмгольца и инт теорема Г–К

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t^2} = v^2 \Delta \vec{E}(t,\vec{r})$$

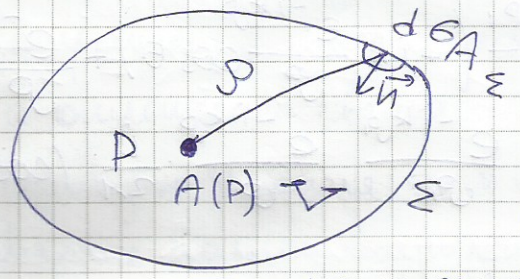
в виде монохромат (гармон) волны в компл форме:

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 A(\vec{r}) e^{i\omega t} = v^2 \Delta A(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

$$(v^2\Delta + \omega^2) A(\vec{r}) = 0 \qquad \omega = vk$$

$$\boxed{(\Delta + k^2) A(\vec{r}) = 0}$$ – Ур-ие Гельмгольца

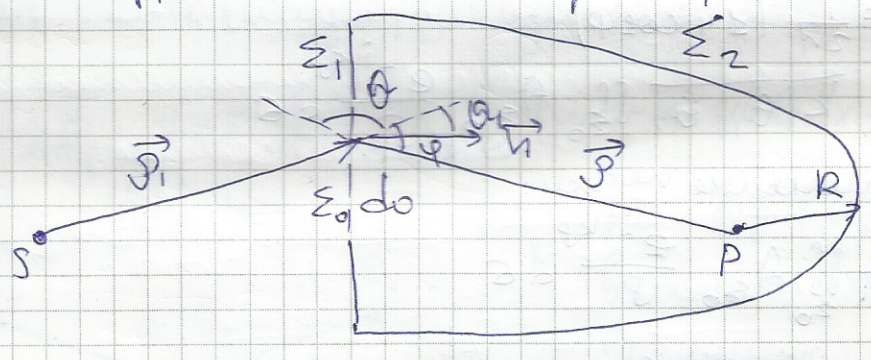


Если решение ур-ия Гельмгольца (к-а $A(\vec{r})$ гарм в-ы) имеет непрерывные ЧП 1 и 2 порядка на заданной пов-ти Σ и внутри V, огр этой пов-тью, то имеет место интегральная теорема Гельмгольца–Кирхгофа:

$$\boxed{A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(A_\Sigma \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\right)\Big|_\Sigma - \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \cdot \frac{\partial A}{\partial n}\Big|_\Sigma \right) d\sigma}$$

3. Дифракционный интеграл Френеля–Кирхгофа

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2$$



$d_0 \gg \lambda$. ГУ Кирхгофа (приближение Кирхгофа):

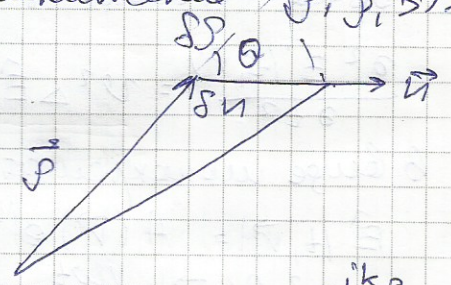
1) на Σ_0 в отсутствие экрана $A_\Sigma = \frac{A_0}{\rho_1} e^{-ik\rho_1}$, $\frac{\partial A}{\partial n}\Big|_{\Sigma_0} = \frac{\partial A_{\Sigma_0}}{\partial n}\Big|_{\Sigma_0}$

2) в области расположения экрана Σ_1: $A_{\Sigma_1} = 0$ $\frac{\partial A}{\partial n}\Big|_{\Sigma_1} = 0$

3) на поверхности Σ_2 $A_{\Sigma_2} \to 0$ $\frac{\partial A}{\partial n}\Big|_{\Sigma_2} \to 0$ при бесконечном удалении точек поверхности Σ_2 от P

] справедливо оптическое приближение — $\rho, \rho_1 \gg 1 > \frac{1}{r_{01}} = \frac{1}{k}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = \cos(\widehat{n\rho})$$



$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\right) = \frac{-ik e^{-ik\rho}\rho - e^{-ik\rho}}{\rho^2}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial n} \cong -ik\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\cos\theta$$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_{\Sigma_0} = \frac{\partial A_\Sigma}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left(A_0\frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\right) \cong -A_0 ik\frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\cos\theta_1$$

$$A(P) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma_0}\left(A_0\frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\left(-ik\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\cos\theta\right) + \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}A_0 ik\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\cos\theta_1\right)d\sigma = \iint_{\Sigma_0} A_0\frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\cdot\frac{i}{2\lambda}(\cos\theta_1 - \cos\theta)d\sigma$$

$$\boxed{A(P) = \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0}\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\cdot\frac{i}{2\lambda}(\cos\theta_1 - \cos\theta)d\sigma} \quad - \text{ ф-к}$$

A_{Σ_0} — к.а. поля реального точечного источника S

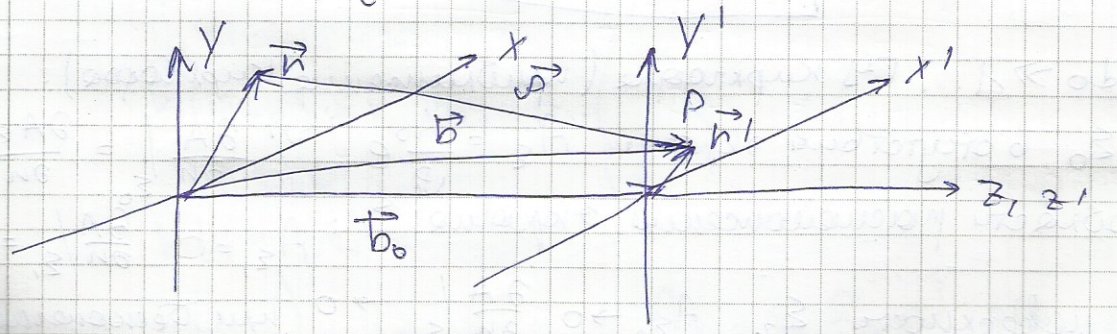
$$K(\theta_1, \theta) = \frac{i}{2\lambda}(\cos\theta_1 - \cos\theta)$$

Σ_0: $\theta_1 = 0$, $\theta = \pi - \varphi$, $\cos\theta_1 = 1$, $\cos\theta = -\cos\varphi$

$$K(\varphi) = \frac{i}{2\lambda}(1 + \cos\varphi)$$

- $A(P) = \overline{K(\theta_1, \theta)}\iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0}\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}d\sigma$
- Параксиальные пучки:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0}\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}d\sigma$$



Приближение Френеля – $|r-r'| \ll b_0$, $b_0 \sim b_g = \frac{r_0^2}{\lambda}$

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb_0}}{b_0}\iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{\frac{ik(\vec{r}-\vec{r}')^2}{2b_0}} d\sigma$$

Приближение Фраунгофера $b > b_0 \gg b_g = \frac{r_0^2}{\lambda} > \frac{r^2}{\lambda} \gg r$:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{ik\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{b}} d\sigma = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\sigma.$$

(31) Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Формулы Френеля, явление полного внутреннего отражения. Энергетические соотношения при преломлении и отражении света.

1. Формулы Френеля см в (30).

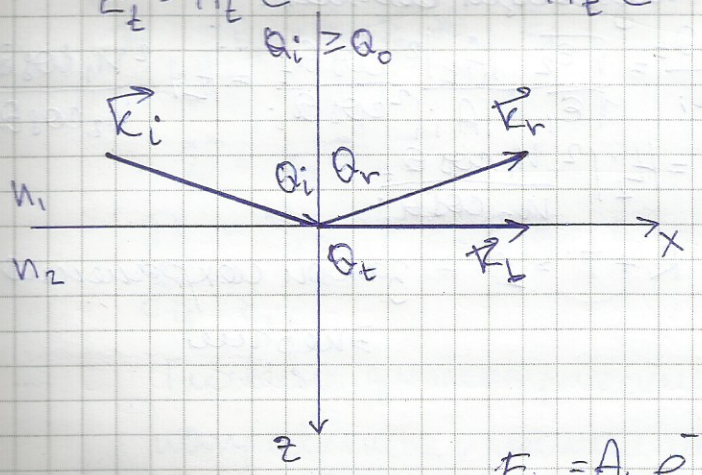
2. Явление полного внутреннего отражения.

При $n_2 < n_1$ $(n < 1)$ существует угол полного внутреннего отражения θ_0 – наименьший угол падения, при котором нет преломленной волны во второй среде:

$$\sin\theta_0 = \frac{n_2}{n_1} = n, \quad \theta_0 = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$$

В этом случае волна движется вдоль поверхности раздела с амплитудой, затухающей вглубь второй среды:

$$E_t = A_t e^{i(\omega t - \vec{k}_t\vec{r})} = A_t e^{i(\omega t - k_t \sin\theta_t x - k_t\cos\theta_t z)}$$



при $\theta_i \geq \theta_0$ $\sin\theta_i \geq n$ и в соответствии с законом Снеллиуса:

$$\cos\theta_t = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \pm\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}{n} = \pm i\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{n}$$

$$E_t = A_t e^{-k_t\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}{n}z} e^{i(\omega t - k_t\sin\theta_t x)} = A_t e^{-z/\Delta z} e^{i(\omega t - k_t\sin\theta_t x)}$$

Глубина проникновения волны в среду Δz вдоль оси z:

$$\Delta z = \frac{n}{k_t\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}} = \frac{n\lambda_t}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}$$

3. Энергетические соотношения при преломлении и отражении света.

Плотность потока энергии с указанием направления потока (вектор Умова-Пойнтинга) плоской световой волны, усреднённая по времени наблюдения:

$$\langle\vec{S}\rangle = I\vec{n} = \varepsilon_0\varepsilon v\langle|E|^2\rangle\vec{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\cdot\frac{1}{2}\langle|\hat{E}|^2\rangle\vec{n} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\cdot\frac{1}{2}|A|^2\vec{n}$$

Коэффициент отражения (по энергии) R – отношение модулей нормальных компонент плотностей потоков энергии в отражённой и падающей волнах:

$$R \equiv \left|\frac{I_r\cos(\pi-\theta_r)}{I_i\cos\theta_i}\right| = \frac{I_r\cos\theta_r}{I_i\cos\theta_i} = \frac{|A_r|^2}{|A_i|^2} = |r|^2$$

$$R_\parallel = |r_\parallel|^2, \quad R_\perp = |r_\perp|^2$$

Коэффициент пропускания (по энергии) T – отношение модулей нормальных компонент плотностей потоков энергии в прошедшей и падающей волнах:

$$T \equiv \left|\frac{I_t\cos\theta_t}{I_i\cos\theta_i}\right| = \frac{I_t\cos\theta_t}{I_i\cos\theta_i} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\frac{|A_t|^2}{|A_i|^2}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} = |t|^2\frac{n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i}$$

$$T_\parallel = |t_\parallel|^2\frac{n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i}, \quad T_\perp = |t_\perp|^2\frac{n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i}$$

Из формул Френеля $R + T = 1$ – закон сохранения энергии

(32) Распространение света в анизотропных средах. Описание диэлектрических свойств анизотропных сред. Главные диэлектрические оси. Плоские электромагнитные волны в анизотропной среде. Структура световой волны, нормаль и луч, фазовая и лучевая скор-ти.

1. Основные особенности распространения света в анизотропной среде.

1) Фазовая $\vec{v} = v\vec{n}$ и лучевая $\vec{v}_s = v\vec{s}$ скорости распространения волны в общем случае не равны по модулю ($v = v_s \cos\alpha$) и не совпадают по направлению ($\vec{n}\cdot\vec{s} = \cos\alpha$)

2) Модули фазовой $\vec{v}$ и лучевой $\vec{v}_s$ скоростей распространения волны зависят только от ориентации векторов эл. поля волны относительно главных диэлектрических осей кристалла – $v(\vec{D}/D)$, $v_s(\vec{E}/E)$

3) В данном направлении нормали $\vec{n}$ могут распространяться только две линейно поляризованные волны в общем случае с разными по модулю фазовыми скоростями – v', v'', векторы эл. индукции которых взаимно перпендикулярны ($\vec{D}' \perp \vec{D}''$)

4) В данном направлении луча $\vec{s}$ могут распространяться только две линейно поляризованные волны в общем случае с разными по модулю лучевыми скоростями v_s', v_s'', векторы эл. поля которых взаимно перпендикулярны ($\vec{E}' \perp \vec{E}''$)

2. $P_i = \varepsilon_0 \sum_j \varkappa_{ij} E_j$

$\varkappa_{ij} = \varkappa_{ji}$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

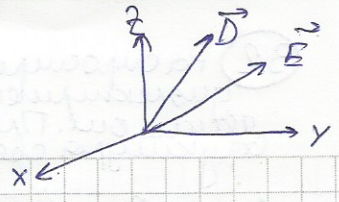
$D_i = \varepsilon_0 E_i + \varepsilon_0 \sum_j \varkappa_{ij} E_j = \varepsilon_0 \sum_j (\delta_{ij} + \varkappa_{ij}) E_j = \varepsilon_0 \sum_j \varepsilon_{ij} E_j$

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

Главные диэлектрические оси кристалла = главные направления кристалла = собственные оси тензора: $\{X, Y, Z\} \exists$

$$\varepsilon_{IJ} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

$\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}$ – главные диэлектрические проницаемости



$D_I = \varepsilon_0 \varepsilon_I E_I \qquad I = \{x, y, z\}$

3. Плоские э/м волны в анизотропной среде

$\vec{n}\vec{D} = 0$

$\vec{n}\vec{B} = 0$

$[\vec{n}\vec{E}] = v\vec{B}$

$[\vec{n}\vec{H}] = -v\vec{D}$

Рассматриваем немагнитоактивные среды $\mu \simeq 1$

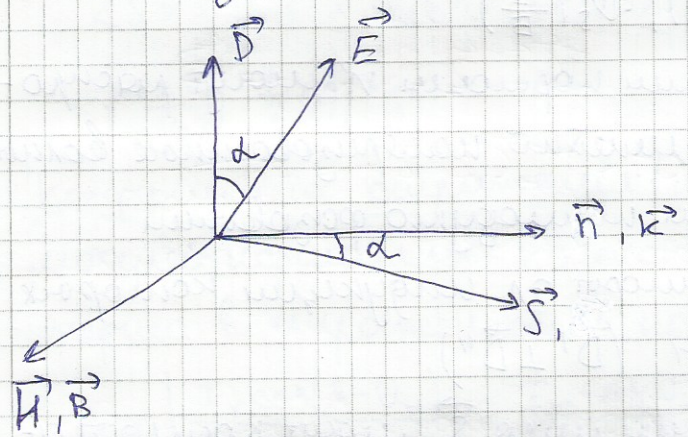
$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

α - угол анизотропии

$\vec{s} = \frac{\vec{S}}{S}$ вектор луча

перенос энергии осуществляется в направлении

$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$



Лучевая скорость - скорость переноса энергии (импульса) плоской э/м волны

лучевая — $\vec{v}_s = v_s \vec{s}$

$v = v_s \cos\alpha$

фазовая

(33) Распространение света в анизотропных средах. Главные скорости. Уравнение Френеля для фазовых скоростей. Свойства волн, распространяющихся в заданном направлении нормали + (34) Ур-ие Френеля для лучевых скоростей. Свойства волн, распространяющихся в заданном направлении луча

$$\begin{cases} [\vec{n}\vec{E}] = v\vec{B} \\ [\vec{n}\vec{H}] = -v\vec{D} \end{cases}$$

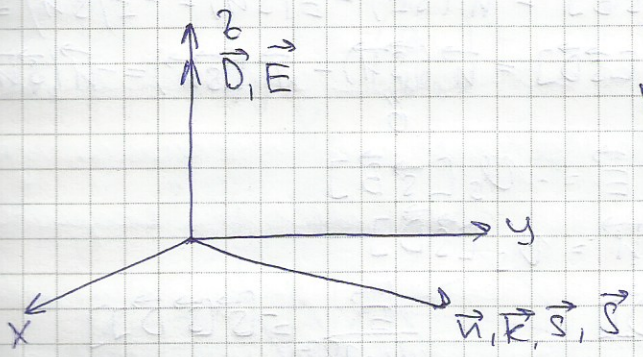
$$v\vec{D} + \frac{1}{\mu_0 v}[\vec{n}[\vec{n}\vec{E}]] = 0$$

?

$$\mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n}(\vec{n}\vec{E}) - \vec{E}\underbrace{(\vec{n}\vec{n})}_{=1} = 0$$

$$\mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n}(\vec{n}\vec{E}) - \vec{E} = 0$$

$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}$



$$D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_z E_z$$

$$D_{x,y} = 0; \quad E_{x,y} = 0$$

Индекс z – вектор направлен вдоль z

$$\mu_0 v_z^2 D_z + 0 - E_z = 0$$

$$\rightarrow v_z^2 = \frac{1 \cdot \cancel{E_z}}{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_z \cancel{E_z}} = \frac{c^2}{\varepsilon_z}$$

$$v_z = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}} = \frac{c}{n_z}$$

аналогично:

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}} = \frac{c}{n_x} \qquad v_y = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}} = \frac{c}{n_y}$$

v_x, v_y, v_z – главные скорости оптически анизотропной среды.

$$v_I = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_I}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_I}} = \frac{c}{n_I}$$

Запишем ур-ие $\mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n}(\vec{n}\vec{E}) - \vec{E}(\vec{n}\vec{n}) = 0$ в проекциях на главные диэлектрические оси:

$$\mu_0 v^2 D_I + n_I(\vec{n}\vec{E}) - E_I = 0$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_I v^2 E_I - E_I + n_I(\vec{n}\vec{E}) = 0$$

$$-n_I(\vec{n}\vec{E}) + \left(1 - \frac{v^2}{v_I^2}\right)E_I = 0 \quad \Big| : -\left(1 - \frac{v^2}{v_I^2}\right) \cdot \sum_I n_I$$

$$\sum \frac{n_I^2(\vec{n}\vec{E})}{1 - \frac{v^2}{v_I^2}} - \sum_I n_i E_I = 0$$

?

$$\sum_I \frac{n_I^2}{1 - \frac{v^2}{v_I^2}} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{v_I^2}$$

$$\boxed{\sum_I \frac{n_I^2}{v_I^2 - v^2} = 0}$$ – уравнение Френеля

св-ва: $v' \neq v''$ $\vec{D}' \perp \vec{D}''$

$$\frac{n_x^2}{v-v_x^2} + \frac{n_y^2}{v^2-v_y^2} + \frac{n_z^2}{v-v_z^2} = 0$$ – уравнение нормалей Френеля

(34) $[\vec{n}\vec{E}] = v\vec{B}$

$[\vec{n}\vec{H}] = -v\vec{D}$

$[\vec{s}[\vec{n}\vec{E}]] = v[\vec{s}\vec{B}] = \vec{n}(\vec{s}\vec{E}) - \vec{E}(\vec{s}\vec{n}) = -\vec{E}(\vec{s}\vec{n}) = v[\vec{s}\vec{B}]$ ($(\vec{s}\vec{E}) = 0$)

$[\vec{s}[\vec{n}\vec{H}]] = -v[\vec{s}\vec{D}] = \vec{n}(\vec{s}\vec{H}) - \vec{H}(\vec{s}\vec{n}) = -\vec{H}(\vec{s}\vec{n}) = -v[\vec{s}\vec{D}]$ ($(\vec{s}\vec{H}) = 0$)

$\left\{ v = v_s \cos\alpha \right\} \Rightarrow \vec{E} = -v_s[\vec{s}\vec{B}]$

$\vec{H} = v_s[\vec{s}\vec{D}]$

$\vec{E} = -\mu_0 v_s^2 [\vec{s}[\vec{s}\vec{D}]]$ $\qquad \frac{\vec{E}}{\mu_0 v_s^2} = -[\vec{s}[\vec{s}\vec{D}]]$

$\frac{1}{\mu_0 v_s^2}\vec{E} + \vec{s}(\vec{s}\vec{D}] - \vec{D} = 0$

Ан-но для фазовых скоростей $n \Rightarrow s$, $D \Leftrightarrow E$,

$\mu_0 v^2 \Rightarrow \frac{1}{\mu_0 v_s^2}$, $\mu_0 v_I^2 = \frac{1}{\mu_0 v_I^2}$

В результате для лучевых скоростей получим:

$$\boxed{\sum_I \frac{s_I^2 v_I^2}{v_I^2 - v_s^2} = 0}$$ – уравнение Френеля

$$\frac{1}{v_s^2} = \sum_I \frac{1}{v_I^2}\left(\frac{E_I}{E}\right)^2$$

Св-ва:

$v_s' \neq v_s''$ $\vec{E}' \cdot \vec{E}'' = 0$

(35) Эллипсоид лучевых скоростей. Лучевая поверхность и её сечения. Оптическая ось. Классификация анизотропных сред.

1. Воспользуемся взаимосвязью модуля лучевой скорости v_s и ориентации напряжённости поля $\vec{E}$ относительно главных диэлектрических осей кристалла:

$$\frac{1}{v_s^2} = \sum_I \frac{1}{v_I^2}\left(\frac{E_I}{E}\right)^2, \quad \sum_I \frac{v_s^2}{v_I^2}\left(\frac{E_I}{E}\right)^2 = 1$$

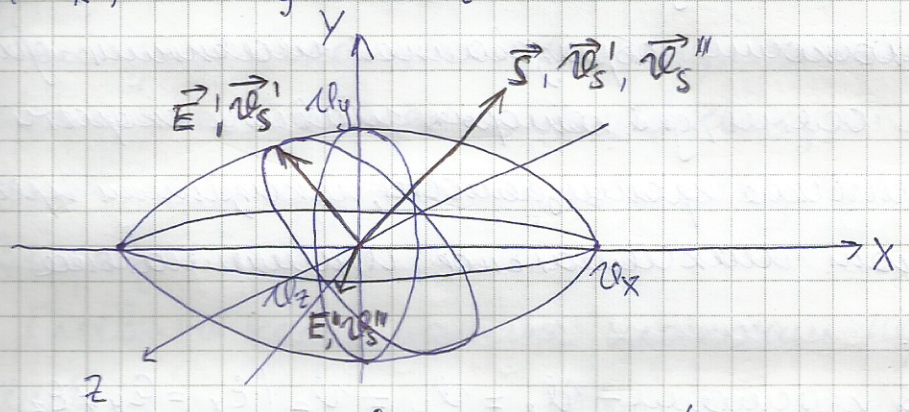
Зададим координаты точки поверхности в главных осях, сделав замену переменных:

$$X_I = v_s \frac{E_I}{E}, \quad \vec{R} = v_s \frac{\vec{E}}{E}, \text{ в направлении}$$

$$\vec{E} - R = |\vec{R}| = v_s$$

В результате получим ур-ие поверхности:

$$\left(\frac{X}{v_x}\right)^2 + \left(\frac{Y}{v_y}\right) + \left(\frac{Z}{v_z}\right)^2 = 1$$



Эллипсоид лучевых скоростей (эллипсоид Френеля) – эллипсоид, главные оси которого совпадают с главными диэлектрическими осями X, Y, Z кристалла, а главные полуоси равны главным скоростям v_x, v_y и v_z распространения в среде.

В сечении лучевого эллипсоида, перпендикулярном лучу $\vec{S}$, образуется эллипс; вдоль главных осей которого направлены напряжённости $\vec{E}'$ и $\vec{E}''$ двух волн, переносящие энергию вдоль $\vec{S}$, а его главные полуоси равны модулям соответствующих лучевых скоростей v_s' и v_s'' этих волн.

2 Классификация анизотропных сред.

Оптическая ось – направление в кристалле (среде), перпендикулярное плоскости кругового сечения эллипсоида лучевых скоростей.

Всем лучам вдоль оптической оси соответствует одна и та же лучевая скорость, а векторы напряжённости электрического поля $\vec{E}$ могут колебаться в любом направлении, перпендикулярном лучу.

Двуосный кристалл – $v_x \neq v_y \neq v_z$ ($\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$; $n_x \neq n_y \neq n_z$)

Кристалл имеет две оптические оси, лежащие в главной плоскости, образованной главными диэлектрическими осями, для которых главные скорости (диэлектрические проницаемости, показатели преломления) имеют максимальное и минимальное значения.

Одноосный кристалл – $v_x = v_y \neq v_z$ ($\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$; $n_x = n_y \neq n_z$)

Эллипсоид лучевых скоростей – эллипсоид вращения вокруг оси, для которой главная скорость отлична от остальных (X). При этом имеется только одна оптическая ось, совпадающая с осью вращения.

Изотропный кристалл – $v_x = v_y = v_z$ ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$)

Эллипсоид лучевых скоростей – сфера. Все направления оптически эквивалентны и кристалл оптически изотропен.

3. Лучевая поверхность.

Воспользуемся уравнением Френеля для лучевых скоростей:

$$\sum_I \frac{s_I^2 v_I^2}{v_I^2 - v_s^2} = 0$$

Зададим координаты точки поверхности в главных осях, сделав замену переменных:

$$x_I = v_s s_I, \quad \vec{R} = v_s \vec{s} = \vec{v_s}, \quad R = |\vec{R}| = v_s$$

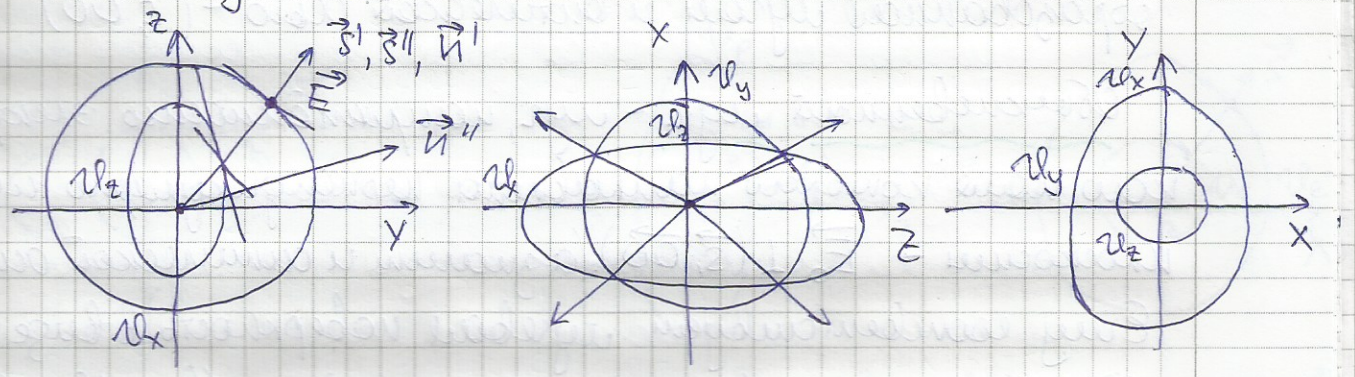
В результате получим уравнение лучевой поверхности:

$$\sum_I \frac{x_I^2 v_I^2}{v_I^2 - R^2} = 0$$

Лучевая (волновая) поверхность – поверхность, до которой доходит световое возбуждение из данной точки среды за фиксированный интервал времени.

Это двухоболочечная самопересекающаяся поверхность. В общем случае в каждом направлении из начала координат лучевая поверхность встречается два раза.

Главные координатные плоскости пересекают лучевую поверхность по эллипсу и окружности. При $v_x > v_y > v_z$:



Фронт волны для каждой точки лучевой поверхности (волны с заданным лучом) – плоскость, касательная к лучевой поверхности в этой точке.

(36) Оптические свойства одноосных кристаллов. Отрицательные и положительные кристаллы, сечения лучевых поверхностей. Главная плоскость, обыкновенный и необыкновенный лучи. Взаимная ориентация фазовой и лучевой скоростей. Двойное лучепреломление и поляризация света. Метод построения Гюйгенса.

Одноосные кристаллы.

Одноосный кристалл (среда) – кристалл (среда), для которого две главные скорости распространения волн равны:

$v_o \equiv v_x = v_y \neq v_z \equiv v_e$ ($\varepsilon_o \equiv \varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z \equiv \varepsilon_e$; $n_o \equiv n_x = n_y \neq n_z \equiv n_e$)

Для одноосного кристалла имеется:

– одна оптическая ось, совпадающая с осью вращения – главной диэлектрической осью, для которой диэлектрическая проницаемость отлична от остальных.

– эллипсоид лучевых скоростей – эллипсоид вращения

– лучевая поверхность – совокупность сферы и эллипсоида вращения, вписанные друг в друга

Главная плоскость (главное сечение) – плоскость, образованная лучом и оптической осью – $(\vec{s}, \vec{OO})$

Обыкновенный луч – луч, напряжённость электрического поля которого направлена перпендикулярно главной плоскости – $\vec{E}_o \perp (\vec{s}, \vec{OO})$ (а значит и оптической оси). Ему соответствует лучевая поверхность в виде сферы. Фазовая и лучевая скорости равны $v_o \equiv v_x = v_y$ и не зависят от направления.

Необыкновенный луч – луч, вектор напряжённости электрического поля которого лежит в главной плоскости – $\vec{E}_e \parallel (\vec{s}, \vec{OO})$. Ему соответствует лучевая поверхность в виде эллипсоида вращения. Фазовая и лучевая скорости не равны $v \neq v_s$ ($v < v_s$) и зависят от угла между лучом и оптической осью, меняясь при этом от $v_o \equiv v_x = v_y$ до $v_e \equiv v_z$.

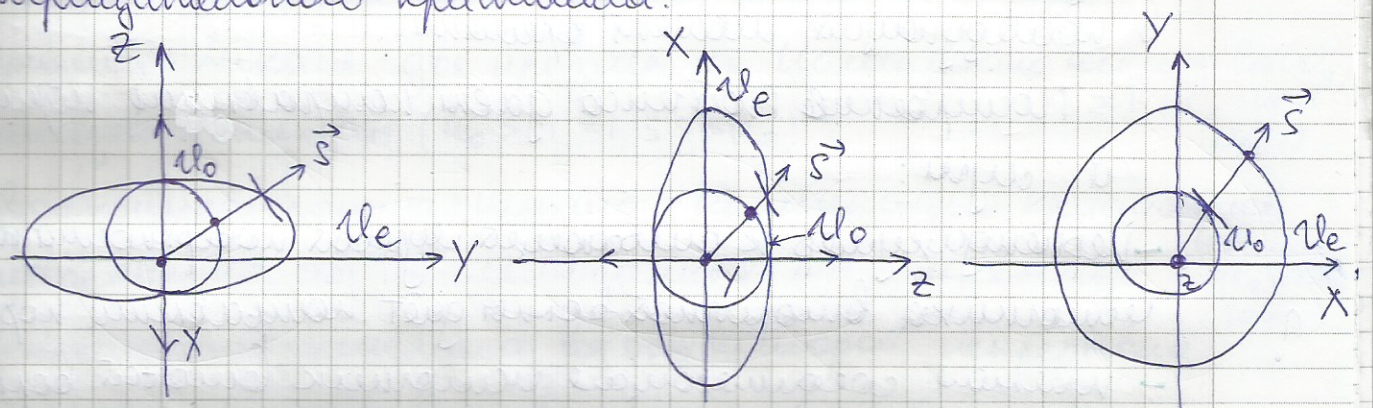
В одноосной оптической среде:

– для обыкновенного луча лучевая и фазовая скорости совпадают по величине и направлению и не зависят от направления – $\alpha_o = 0$, $\vec{n}_o \cdot \vec{s}_o = 0$

– для необыкновенного луча они не совпадают и зависят от направления – $\alpha_e \neq 0$, $\vec{n}_e \vec{s}_e = \cos\alpha_e$

Отрицательный кристалл – $v_o \equiv v_x = v_y < v_z \equiv v_e$ ($n_o \equiv n_x = n_y > n_z \equiv n_e$) эллипсоид Френеля вытянут вдоль оси вращения z; лучевая сфера вписана в сплющенный вдоль оси z лучевой эллипсоид вращения. Исландский шпат – $CaCO_3$ с $n_o = 1{,}658 > n_e = 1{,}486$

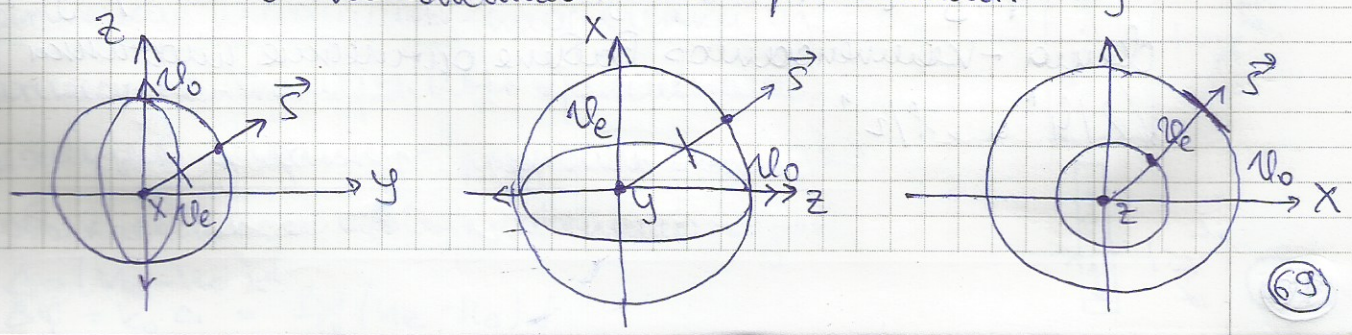
• Главные сечения лучевой поверхности одноосного отрицательного кристалла:



Положительный кристалл – $v_o \equiv v_x = v_y > v_z \equiv v_e$ ($n_o \equiv n_x = n_y < n_z \equiv n_e$);

эллипсоид Френеля сплюснут вдоль оси z; лучевая сфера охватывает вытянутый вдоль оси z лучевой эллипсоид вращения. Кварц – SiO_2 с $n_o = 1{,}543 < n_e = 1{,}552$

• Г С Л И О положительного кристалла:



Двойное лучепреломление - явление возникновение при падении на поверхность анизотропной среды плоской произвольно поляризованной волны двух преломленных частично и взаимно перпендикулярно поляризованных плоских волн.

Метод построения Гюйгенса

Основные положения:

1) Каждая точка, до которой доходит возбуждение, становится источником вторичных волн, несущих световое возбуждение. (возникает лучевая поверхность)

2) Огибающая вторичных волн (касательная поверхность к лучевым поверхностям) определяет фронт волны в последующий момент времени.

Построение Гюйгенса дает направление нормали и луча:

- перпендикуляр к огибающей лучевой поверхности из источника вторичной волны дает направление нормали,
- прямая, соединяющая источник вторичной волны с точкой касания огибающей с лучевой поверхностью дает направление луча.

?

(37) Поляризационные приборы. Получение и анализ поляризованного света - явление дихроизма, поляроид и поляризационные призмы. Управление поляризацией света - компенсатор Бабине, оптические пластинки „λ/4" и „λ/2"

Поляроид - дихроичная пластинка, при прохождении которой один из лучей в результате поглощения сильно ослабляется, а другой выходит линейно поляризованным.

В основе - явление дихроизма - зависимость поглощения света от направления поляризации.

Кристаллы турмалина, герапатита

Поляризатор - поляроид, использующийся для получения поляризованного света.

Анализатор - поляроид, использующийся для анализа поляризованного света.

Поляризационная призма - комбинация кристаллов, оставляющая один поляризованный луч на выходе

Призма Николя - две призмы из Исландского шпата $CaCO_3$, канадский бальзам ($n_o > n = 1,55 > n_e$) ($n_o = 1,658 > n_e = 1.486$)

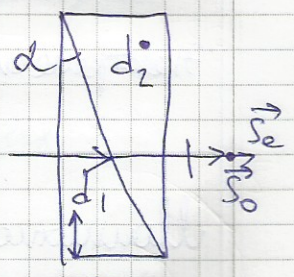
Двоякопреломляющая призма - комбинация кристаллов, оставляющая оба поляризованных луча на выходе. (Волластона, два клина $CaCO_3$)

Компенсатор - пластина, в ней которой непрерывно меняется разность фаз выходящих лучей.

Компенсатор Бабине (тонкие кварцевые клинья с $\alpha \ll 1$ (SiO_2 - $n_o = 1,543 < n_e = 1,552$)):

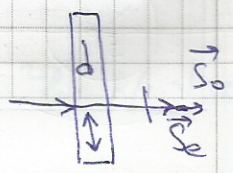
$$\Delta = (n_e d_1 + n_o d_2) - (n_o d_1 + n_e d_2) = (n_e - n_o)(d_1 - d_2)$$

$$\Delta\varphi = k_0 \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)(d_1 - d_2)$$

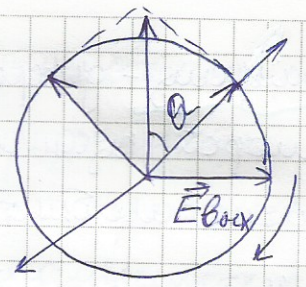


Оптические пластинки - пластинки из оптически анизотропных кристаллов, вносящие заданную разность хода для необыкновенного и обыкновенного лучей:

$$\Delta = (n_e - n_o)d$$
$$\Delta\varphi = k_0\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d$$



$\lambda/4$ Пластинка в четверть волны:

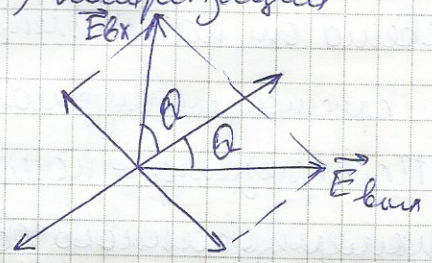


$$\Delta = (n_e - n_o)d = \frac{\lambda_0}{4}$$

$$\Delta\varphi = k_0\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d = \frac{\pi}{2}$$

Линейная поляризация $\Leftrightarrow$ циркулярная – $\theta = 45°$ (эллиптическая – $\theta \neq 45°$) поляризация

$\lambda/2$ Пластинка в полволны:



$$\Delta = (n_e - n_o)d = \frac{\lambda_0}{2}$$

$$\Delta\varphi = k_0\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d = \pi$$

Поворот линейной поляризации на 2θ или изменение направления вращения плоскости поляризации в циркулярно (эллиптически) поляризованной волне

(38) Наведённая анизотропия оптических свойств. Фотоупругость. Эффекты Поккельса и Керра. Явление Коттон-Мутона

Механо- (электро-, магнито-) оптические эффекты – изменение оптических характеристик среды под внешним механическим (электрическим, магнитным) воздействием.

Воздействие	Тип эффекта	Эффект
Механическое	Линейный (поперечный)	Фотоупругость
Электрическое	Лин (попер)	Поккельса
	Квадратичный (поперечный)	Керра
Магнитное	Квадратичный (поп)	Коттон-Мутона
	Расщепление (прод и поперец)	Зеемана
	Линейный (прод)	Фарадея

1. Фотоупругость – линейный механооптический эффект

Мера возникшей оптической анизотропии – разность главных показателей преломления для необыкновенной n_e ($\vec{E}_e \parallel \vec{F}$) и обыкновенной n_o ($\vec{E}_o \perp \vec{F}$) волн

σ, σ ?

смена знака σ → смена знака $\Delta n(\omega)$

$$n_e - n_o = \Delta n(\omega) = \gamma(\omega)\cdot\frac{F}{S} = \gamma(\omega)\cdot\sigma \quad (\gamma>0, \gamma<0)$$

$$\Delta\varphi = k_0(n_e-n_o)l = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}(n_e-n_o)l = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}\Delta n(\omega)l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_0(\omega)}2\pi\sigma l$$

$\gamma(\omega)$ – постоянная Брюстера, для стекол $\gamma(\omega) = 10^{-12}-10^{-11}\ м^2/Н$

Механизм – направленная механическая деформация тела

Белый свет => окрашивание из-за зависимости набегающей разности фаз $\Delta\varphi$ от частоты и распределения напряжений внутри образца

2. Эффект Поккельса – линейный электрооптический эффект.

Механизм – ангармонизм движения связанных зарядов в кристалле. Классическая электронная теория, модель ангармонического осциллятора ($-kx-\beta x^2$), $\vec{E}\parallel\vec{E}_0$, $E_0 \gg E(t)$:

образец помещ между обкладками плоского конденс

$$E_0 \Rightarrow \Delta\omega_0^2 = \frac{2\beta q}{\omega_0^2 m^2}E_0 \Rightarrow \Delta n(\omega),$$

$$n_e - n_o = \Delta n(\omega) = -\frac{\omega^2 n}{2n(\omega_0^2-\omega^2)^2}\cdot\frac{2\beta q}{\omega_0^2 m^2}E_0 = \gamma(\omega)E_0$$

Линейный оптический эффект наблюдается только в кристаллах, не обладающих центром симметрии

3. Эффект Керра – квадратичный электрооптический эффект в центрально-симметричных средах.

($-kx-\beta x^3$), $\vec{E}\parallel\vec{E}_0$, $E_0 \gg E(t)$:

$$n_e - n_o = \Delta n(\omega) = \gamma(\omega)E_0^2$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}(n_e-n_o)l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_0(\omega)}2\pi E_0^2 l = B(\omega)2\pi E_0^2 l$$

где $B(\omega) = \gamma(\omega)/\lambda_0(\omega)$ – постоянная Керра

Механизм - поляризация и ориентация анизотропных молекул.

Для полярных $B>0$, $B<0$, для неполярных $B>0$

Эффект Керра определяется свойствами молекул и, следовательно, усиливается с повышением концентрации молекул.

С повышением температуры постоянная Керра падает из-за дезориентирующего действия температуры на дипольные моменты

4. Явление Коттона-Мутона - квадратичный магнитооптический эффект в поперечном магнитном поле:

$$n_e - n_0 = f(\omega) B_0^2 \quad (f \sim 10^{-8} Тл^{-2})$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}(n_e - n_0)l = \frac{f(\omega)}{\lambda_0(\omega)} 2\pi B_0^2 l =$$

$$= C(\omega) 2\pi B_0^2 l$$

Механизм - ориентация анизотропных молекул, обладающих μ.

Этот эффект очень мал.

39 Рассеяние света. Излучение точечного электрического диполя. Индикатриса рассеяния, поляризация рассеянного света. Закон Рэлея. Рассеяние Ми.

1. Рассеяние света - возмущение (в общем случае частичное поглощение и изменение интенсивности, частоты, поляризации) световых полей при оптических прозрачных неоднородностях среды.

Оптические неоднородности – включения инородных частиц и флуктуации оптических свойств среды.

Процесс рассеяния света состоит в заимствовании молекулой или частицей энергии у распространяющейся в среде волны и последующем излучении всей или части этой энергии.

Упругое рассеяние – $\omega_{рас} = \omega_{пад}$; сохраняются фазовые соотношения между падающей и рассеянной волнами – когерентное рассеяние

Неупругое рассеяние – $\omega_{рас} \neq \omega_{пад}$; фазовый сбой – некогерентн. рассеяние.

Стоксово рассеяние – $\omega_р < \omega_п$, Антистоксово – $\omega_р > \omega_п$

Рассеяние света

- Упругое $\omega_п = \omega_р$, когер
  - Рэлеевское: упругое когер рассеян света на оптических неоднородн, размеры которых $r \ll \lambda$
    - Молекулярное: на тепловых стоит незав флуктуациях опт св-в макроскопически однородной среды, не соз. примесей
  - Ми: упругое рассеяние в дисперсных системах на частицах с $r \geq \lambda$
    - В дисперсных системах: на инородных частицах ($r \ll \lambda$), сод в макроскоп однородной (дисперсной) среде
- Неупругое $\omega_п \neq \omega_р$, не когер
  - Манд-Брилл: на упругих волнах, $r \sim \lambda$
  - Комбинационное: на молекулах и атомах, $r \ll \lambda$

Дисперсные системы – системы, состоящие из ансамбля мелких частиц (дисперсная фаза), распределённых в однородной среде (дисперсной среде)

Индикатриса рассеяния – пространственная диаграмма зависимости интенсивности $I(r, \Omega)$ рассеянного света от телесного угла Ω (направления) рассеяния на данном расстоянии r от рассеивателя.

Элементарный рассеиватель:

$$I(\theta) = \langle E^2 \rangle = \frac{\omega^4}{(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)^2} p^2 \sin^2\theta$$

• Обсудим состояние поляризации рассеянного света. Предположим, что пучок параллельных лучей естественного света распространяется в рассеивающей среде по оси OX. В плоскости YOZ вектор $\vec{E}$ м.б. ориентирован произвольным образом. Однако его всегда можно представить как совокупность составляющих $\vec{E}_y$ и $\vec{E}_z$. Также ориентированы и дипольные излучатели вторичных волн. Будем регистрировать вторичные волны, распространяющиеся перпендикулярно к направлению распространения исходного пучка. Свет, рассеянный под прямым углом к исходному пучку, оказывается плоско поляризованным.

Закон Рэлея:

Если размеры неоднородностей малы по сравнению с длиной волны, то интенсивность рассеянного света оказывается:

$$\boxed{I \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}}$$

(40) Молекулярное рассеяние света в газах и жидкостях. Элементы статистической теории рассеяния. Формулы Эйнштейна и Рэлея. Основные особенности молекулярного рассеяния.

1 Молекулярное рассеяние – рэлеевское (упругое, при $r \ll 1$) рассеяние света на тепловых статистически независимых флуктуациях оптических свойств макроскопически однородной среды, не содержащей примесей.

2 Статистическая теория рассеяния.

Основные положения:

- размеры оптических неоднородностей малы по сравнению с длиной волны света;
- положение каждой области неоднородности не зависит от положений других областей;
- взаимодействием областей неоднородности можно пренебречь.

Основная причина статистических (тепловых) флуктуаций оптических свойств – флуктуация плотности среды. При этом будет флуктуировать и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$:

$$\Delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \Delta T \cong \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho$$

Рассеяние обусловлено наличием флуктуации электрического дипольного момента выделенных объёмов V_j оптической неоднородности $\vec{p}_{V_j} = V_j \vec{P} = V_j \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}_0$:

$$\Delta \vec{p}_{V_j} = V_j \varepsilon_0 \Delta\varepsilon_j \vec{E}_0 = V_j \varepsilon_0 \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho_j \vec{E}_0$$

Рассеяние на молекулах каждой оптической неоднородности упругое и когерентно. Напряжённость э-го поля рас-о света на этой неоднородности равна сумме напряжённостей полей света, рассеянного каждой молекулой. =>:

$$E_j = \frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\Delta P_{V_j}\sin\theta = E_0\frac{\omega^2}{4\pi c^2 r}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho_j V_j \sin\theta$$

$$I_j = \langle E_j^2\rangle = I_0\frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 \overline{(\Delta\rho_j V_j)^2}\sin^2\theta$$

$\rho_j = \frac{m_j}{V_j}$ при малых флуктуациях

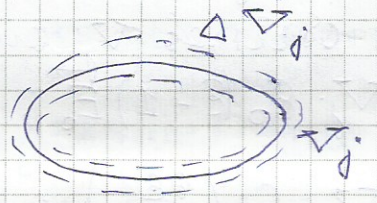
$$\frac{\Delta\rho_j}{\rho_j} = -\frac{\Delta V_j}{V_j};\quad \overline{(\Delta\rho_j V_j)^2} = \overline{(\rho_j\Delta V_j)^2} \cong \rho\overline{(\Delta V_j)^2}$$

Рассеяние на совокупности областей оптической неоднородности не когерентно и интенсивность рассеянного света равна сумме интенсивностей света, рассеянного отдельными областями. В результате при рассеянии на статистически независимых тепловых флуктуациях плотности в совокупности объёмов $\{V_j\}$ получим:

$$\boxed{I = \sum_j I_j \cong I_0\frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2}\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 \sum_j \overline{(\Delta V_j)^2}\sin^2\theta}$$

3. Формулы Эйнштейна и Рэлея.

Ф-ла Эйнштейна для рассеяния света в жидкостях и плотных газах



Флуктуирует на малую величину ΔV_j. В первом приближении:

$$\left(\frac{\Delta P_j}{\Delta V_j}\right)_T \cong \alpha_j - const(V_j) < 0$$

Работа сил давления при флуктуации:

$$\Delta A_j = \int_{V_j}^{V_j+\Delta V_j}(\bar{P}+\Delta P_j)\,dV = \int_0^{\Delta V_j}(\bar{P}+\alpha_j\Delta V_j)\,d(\Delta V_j) =$$

$$= \bar{P}\Delta V_j + \frac{\alpha_j}{2}(\Delta V_j)^2$$

Адиабат. процесс: $\Delta Q_j = \Delta U_j + \Delta A_j = 0$

Т. о равнораспределении энергии по степеням свободы для т.д с-ы в состоянии равновесия:

$$\Delta \overline{U_j} = -\Delta \overline{A_j} = -\overline{P_j \Delta V_j} - \frac{\alpha_j}{2} \overline{(\Delta V_j)^2} = -\frac{\alpha_j}{2} \overline{(\Delta V_j)^2} = \frac{kT}{2}$$

$$\overline{(\Delta V_j)^2} = -\frac{kT}{\alpha_j}$$

Изотермическая сжимаемость: $\beta_T \equiv -\frac{1}{V_j}\left(\frac{\partial V_j}{\partial P_j}\right)_T$

$$\alpha_j \cong \left(\frac{\Delta P_j}{\Delta V_j}\right)_T \cong -\frac{1}{V_j \beta_T}$$. Т. о.

$$\overline{(\Delta V_j)^2} = V_j \beta_T kT \text{ и } \sum_j \overline{(\Delta V_j)^2} = V \beta_T kT$$

$$\boxed{I = I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2} \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T^2 V \beta_T kT \sin^2\theta}$$ – ф-ла Эйнштейна

Формула Рэлея: В случае разреженных газов воспользуемся уравнением состояния $P_j V_j = N_j kT$:

$$\beta_T \equiv -\frac{1}{V_j}\left(\frac{\partial V_j}{\partial P_j}\right)_T = \frac{1}{V_j} N_j kT \frac{1}{P_j^2} = \frac{1}{P_j}$$

$$\beta_T kT = \frac{kT}{P_j} = \frac{V_j}{N_j} \cong \frac{1}{N}$$, средняя концентрация

число молекул (атомов) в V_j

Выражение для диэлектрической проницаемости газа

$$\varepsilon - 1 = N\beta = N_a \frac{\rho}{\mu} \beta$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} = \rho \cdot N_a \frac{1}{\mu} \beta = \varepsilon - 1 = n^2 - 1 \cong 2(n-1)$$

поляризуемость молекулы

$$\boxed{I = I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2} \cdot 4(n-1)^2 \frac{V}{N} \sin^2\theta}$$ ф-ла Рэлея

4. Важнейшие особенности молекулярного рассеяния.

- Ф-ла Эйнштейна (для жидкостей и плотных газов):

$$I = I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2} \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T^2 V \beta_T k T \sin^2\theta$$

- Ф-ла Рэлея (для разреженных газов):

$$I = I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2} 4(n-1)^2 \frac{V}{N} \sin^2\theta$$

1. Индикатриса интенсивности рассеянного света — как у элементарного рассеивателя:

- линейно поляризованное излучение — $I(\Omega) \sim \sin^2\theta$
- естеств поляризация — $I(\Omega) \sim \frac{1+\cos^2\theta_z}{2}$

2. Поляризация рассеянного света:

- от изотропных молекул — как у эл. расс-ля: степень поляризации —

$$P(\theta_z) = \frac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel} = \frac{\sin^2\theta_z}{1+\cos^2\theta_z}$$

- от анизотропных молекул — деполяризация света при $\theta_z = \pi/2$

коэффициент деполяризации — $\gamma = \frac{I_\parallel}{I_\perp} (\theta_z = \pi/2)$

3. Закон Рэлея — $I \sim \omega^4 \sim 1/\lambda^4$ как у эл рас.

4. Критическая опалесценция — явление возрастания интенсивности рассеянного излучения вблизи критич. температуры из-за возрастания флуктуаций и соответственно возрастания изот. сжим β_T

5. Селективное по частоте рассеяние – интенсивность рассеянного излучения возрастает вблизи собственных частот элементарного рассеивателя $\omega \sim \omega_0$, поскольку $I \sim (n-1)^2$

(41) Излучение света. Классическая осцилляторная модель атома. Оценка времени затухания. Естественная форма и ширина линии излучения

1 ◁ классическую осцилляторную модель атома. Для простоты предположим, что в атоме есть всего один оптический электрон. По определению электрического дипольного момента

$$\vec{p}(t) = q\vec{x}(t)$$

$\vec{x}(t)$ – смещение электрона относительно ядра

◁ электрон в атоме, как <u>затухающий</u> <u>гармонический</u> <u>осциллятор</u> (<u>атомный</u> <u>осциллятор</u>), колебания которого описываются классическим уравнением движения:

$$m\ddot{\vec{x}} = -\gamma\dot{\vec{x}} - k\vec{x}$$

описывает излучение и введение для излучения света

квазиупругая сила стремящаяся вернуть электрон в положение равновесия

<u>УД</u> электрона:

$$\ddot{\vec{x}} + 2\delta\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} = 0$$

$\delta = \frac{\gamma}{2m}$ – <u>коэф рассеяния</u> <u>затухания</u>

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – <u>собственная</u> <u>частота колебаний</u>

<u>ЗД</u>: $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ – период затухающего колебания

$\delta \ll \omega$

$$\langle x^2(t)\rangle_T = \langle x_0^2 e^{-2\delta t}\cos^2(\omega t + \varphi)\rangle_T \cong \frac{1}{2}x_0^2 e^{-2\delta t}$$

$$\dot{x}(t) = x_0 e^{-\delta t}(-\delta\cos(\omega t+\varphi) - \omega\sin(\omega t+\varphi))$$

$$\langle \dot{x}^2(t)\rangle_T \simeq \frac{1}{2} x_0^2 e^{-2\delta t}(\delta^2+\omega^2) = \frac{1}{2} x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t}$$

Кинетическая энергия атомного осциллятора:

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\langle W_k\rangle_T = \langle \frac{1}{2} m\dot{x}^2\rangle_T = \frac{1}{4} m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t} = \frac{1}{4} k x_0^2 e^{-2\delta t}$$

Потенциальная энергия атомного осциллятора:

$$\langle W_n\rangle_T = \langle \frac{1}{2} k x^2\rangle_T = \frac{1}{4} k x_0^2 e^{-2\delta t}$$

Полная энергия атомного осциллятора:

$$\langle W\rangle_T = \langle W_k\rangle_T + \langle W_n\rangle_T = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\delta t} = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t} = W_0 e^{-2\delta t}$$

Средняя мощность потерь атомного осциллятора:

$$\langle P\rangle_T = \left\langle \frac{dW}{dt}\right\rangle_T = \frac{d\langle W\rangle_T}{dt} = -2\delta W_0 e^{-2\delta t} = -\delta m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t}$$

$$\mathcal{J} = \oint_\Sigma I(r,\theta)\,d\sigma = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon_0 c \frac{\omega^4}{(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)^2}\overline{p^2(t)}\sin^2\theta\, r^2 \sin\theta \cdot d\varphi\, d\theta \simeq \frac{\omega_0^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{1}{2} q^2 x_0^2 e^{-2\delta t}$$

Приравнивая, получим:

$$\delta = \frac{1}{12\pi\varepsilon_0}\frac{q^2\omega_0^2}{mc^3}$$

Время радиационного затухания $\tau = \frac{1}{\delta}$ – время, через которое амплитуда колебаний осциллятора уменьшается в e раз:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{12\pi\varepsilon_0 m c^3}{q^2\omega_0^2}}$$

Время жизни атома в возбуждённом состоянии:

$$\Delta t = \frac{\tau}{2} = \frac{6\pi\varepsilon_0 m c^3}{q^2\omega_0^2}$$

2 $\vec{p}(t) = q\vec{x}(t) = p_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left[\vec{n}\left[\vec{n}\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right]$$

$$\ddot{\vec{p}}(t) \cong -\omega_0^2 \vec{p}_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

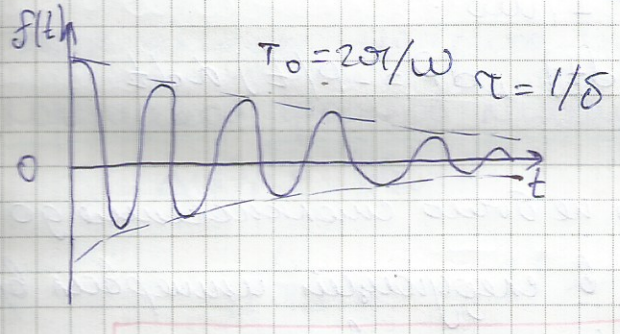
$$\vec{E}(t) \cong \vec{E}_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

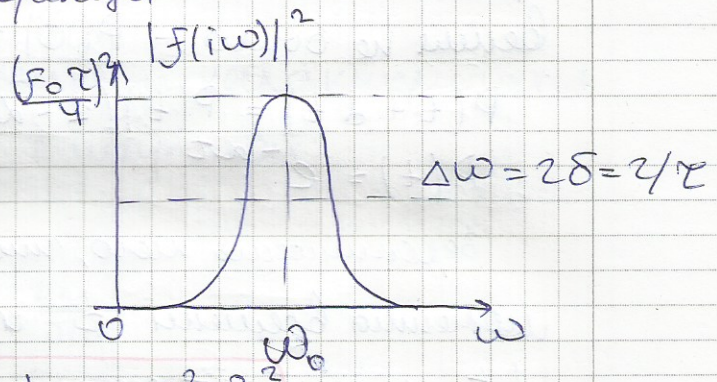
$$E(t) \cong E_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$f(t) = f_0 e^{-\delta t}\cos\omega_0 t, \quad \omega_0 \gg \delta$$

$$|f(i\omega)|^2 = \left(\frac{f_0}{2\delta}\right)^2 L\left(\frac{\omega-\omega_0}{\delta}\right) = \left(\frac{f_0}{2\delta}\right)^2 \frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\delta}\right)^2}$$

$L(x) \equiv \frac{1}{1+x^2}$ – ф-ия Лоренца





$$\Delta\omega = 2\delta = \frac{2}{\tau} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{q^2\omega_0^2}{mc^3}$$

$$|E(i\omega)|^2 = \left(\frac{E_0}{\Delta\omega}\right)^2 \frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega/2}\right)^2}$$

Лоренцева форма линии образуется при „естеств" условиях излучения, когда 1 фактором, влияющим на излучение осциллятора, является радиац. затух-ие. Эта форма – естественная форма линии излучения, а $\Delta\omega$ – естественная ширина линии излучения.

Оценка: $\lambda = 0{,}5\cdot10^{-6}$ м $\quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cong 9\cdot10^9$ (СИ), $m_e \cong 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, $q_e \cong -1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл

$$\tau = \frac{12\pi\varepsilon_0 mc^3}{q^2\omega_0^2} = \frac{12\pi\varepsilon_0 mc^3 T^2}{q^2 4\pi^2} = 4\pi\varepsilon_0\frac{3mc\lambda^2}{q^2 4\pi^2} \cong 2{,}3\cdot10^{-8}\text{ с}$$

(42) Изучение ансамбля статистически независимых осцилляторов. Ударное и допплеровское уширение спектральной линии. Понятие об однородном и неоднородном уширении.

А. Ударное уширение

Пусть вероятность столкновения в единицу времени α не зависит от времени. Если $P(t)$ - вероятность отсутствия столкновения до момента времени t, при этом в начальный момент времени столкновения не было - $P(0)=1$, то:

$$P(t+dt) = P(t)(1-\alpha dt), \quad dP = -P(t)\alpha dt$$

$$P(t) = e^{-\alpha t}$$

Вероятность того, что не было столкновения до момента времени t и в следующий интервал времени dt произойдёт столкновение, т.е. вероятность столкновения в интервале времени от t до $t+dt$, равна:

$$p(t)dt = P(t)\alpha dt$$

плотность вероятности столкновения в момент времени t.

$$p(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

Среднее время между столкновениями τ_0 будет:

$$\tau_0 \equiv \bar{t} = \int_0^\infty t\alpha e^{-\alpha t}dt = \alpha\int_0^\infty te^{-\alpha t}dt = \alpha\left(t\left(-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty\left(-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}dt\right) = \frac{1}{\alpha}$$

Вероятность столкновения в интервале времени от ξ до $\xi+d\xi$:

$$p(\xi)d\xi = \left(\frac{1}{\tau_0}\right)e^{-\frac{\xi}{\tau_0}}d\xi$$

$\tau \gg \tau_0$: $E(t) = E_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$, $t_0 < t < t_0 + \xi$

К с. а:

$$E(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{t_0}^{t_0+\xi} E_0 e^{i(\omega_0 t - \omega t + \varphi_0)} dt =$$

$$= E_0 e^{i((\omega_0-\omega)t_0+\varphi_0)} e^{i(\omega_0-\omega)\xi/2} \frac{2\sin((\omega_0-\omega)\xi/2)}{i(\omega_0-\omega)}$$

Спектральная интенсивность:

$$|E(i\omega)|^2 = 4E_0^2 \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)\xi/2]}{(\omega_0-\omega)^2}$$

$$w(\omega) \sim \frac{1}{\tau_0}\int_0^\infty |E(i\omega)|^2 e^{-\xi/\tau_0} d\xi = \frac{1}{\tau_0}\int_0^\infty \frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)\xi/2]}{(\omega_0-\omega)^2} \cdot$$

$$\cdot e^{-\xi/\tau_0} d\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\omega_0-\omega)^2 + (1/\tau_0)^2}$$

Как видим, ударное уширение характеризуется лоренцевой формой линии с шириной:

$$\Delta\omega_L = 2/\tau_0$$

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \qquad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$$

$$\tau_0 = \frac{\langle l \rangle}{\langle v \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle} = \frac{\sqrt{mk_BT}}{4\sqrt{\pi} d^2 p}$$

Ударное уширение $\Delta\omega_L$ –

$$\boxed{\Delta\omega_L = \frac{2}{\tau_0} = \frac{8\sqrt{\pi} d^2 p}{\sqrt{mk_BT}}}$$

$p = const$ $\Delta\omega_L \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$

$V = const$ $\Delta\omega_L \sim \sqrt{T}$

Б. Допплеровское уширение

Излучающий ~~атом~~ осциллятор участвует в тепловом движении. Тогда в со-ии с эф Допплера излучаемая им частота не равна частоте излучения покоящегося атома.

ЗСЭ и ЗСИ в возбуждённом (2) и основном (1) сост-х:

$E_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = E_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + \hbar\omega$ – эн испущ фотона

$m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 + \hbar\vec{k}$ – импульс испущ фотона

$\hbar\omega_0 = E_2 - E_1$

$$\hbar(\omega_0-\omega) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$m^2v_1^2 = m^2v_2^2 - 2m\hbar\vec{v}_2\cdot\vec{k} + \hbar^2k^2$$

$$\hbar(\omega_0-\omega) = \frac{\hbar^2k^2}{2m} - \hbar v_2\cdot\vec{k}$$

$k = \omega/c$ Вдоль z

$$\omega_0-\omega = \frac{\hbar\omega^2}{2mc^2} - \frac{\omega v_{2z}}{c}$$

Для комнатных T и тяжелых масс атомов:

$$\frac{\hbar\omega}{2mc^2}(10^{-9}) \ll \frac{v_{2z}}{c}(10^{-5})$$

$\Rightarrow$ частота излучения осциллятора ω и проекция его скорости v_{2z} линейно связаны (продольный эффект Доплера):

$$\omega = \frac{\omega_0}{1-\frac{v_{2z}}{c}} \approx \omega_0\left(1+\frac{v_{2z}}{c}\right)$$

Распр. Максвелла:

$$W(v_{2z})\,dv_{2z} \sim e^{-\frac{mv_z^2}{2k_BT}}\,dv_{2z}$$

$$\omega \simeq \omega_0\left(1+\frac{v_{2z}}{c}\right),\quad d\omega = \frac{\omega_0}{c}\,dv_{2z}$$

$$W(\omega)\,d\omega = W(v_{2z})\,dv_{2z}$$

$$W(\omega)\,d\omega \sim e^{-\frac{mc^2(\omega-\omega_0)^2}{2k_BT\omega_0^2}}\,d\omega = e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega_G/2}\right)^2\ln 2}\,d\omega$$

Как видим, ударное уширение характеризуется гауссовой формой линии с шириной на половине высоты распределения:

$$\boxed{\Delta\omega_G = \omega_0\sqrt{\frac{8k_BT\ln 2}{mc^2}}} \sim \sqrt{T}$$

Понятие об однородном и неоднородном уширении

1. Однородный ансамбль осцилляторов – ансамбль, в котором осцилляторы имеют одинаковые собственные частоты колебаний

Однородно уширённая спектральная линия – спектральная линия однородного ансамбля осцилляторов, равная суперпозиции спектральных линий отдельных осцилляторов.

Однородная ширина $\Delta\omega$ характеризует спектр колебаний ансамбля осцилляторов с одинаковыми собственными частотами.

Причины – одинаковость квантовых состояний атомов или молекул, однородность изотопного или химического состава среды.

Прим. удержка естеств

2. Неоднородный ансамбль осцилляторов – ансамбль, в котором осцилляторы имеют разные собственные частоты колебаний.

Неоднородно уширённая спектральная линия – спектральная линия неоднородного ансамбля осцилляторов, равная суперпозиции спектральных линий отдельных осцилляторов

доплер. изотоп. кратная

Неоднородная ширина $\Delta\omega^*$ характеризует спектр колебаний ансамбля осцилляторов с разными собственными частотами.

Причины – разные квантовых состояний атомов или молекул, неоднородность изотопного или химического состава среды, хаотическое тепловое движение частиц и т.п.

(43) Основные представления о квантовой теории излучения света атомами и молекулами. Модель двухуровневой системы. Спонтанные и вынужденные радиационные переходы. Коэффициенты Эйнштейна. Взаимосвязь коэф Эйнштейна. Формула Планка.

1. Квантовые свойства света

А. Фотоэффект – явление испускания электронов веществом под действием света – фотоэлектронная эмиссия.

Законы фотоэффекта.

1. $J_{нас} \sim I_{пад\,света}$
2. $W_{кин\,max} = eV_{зат}$ не зависит от $I_{пад}$, а линейно зависит от $\nu_{пад}$
3. ν_{min} – красная граница фотоэффекта

Внутренний фотоэффект – оптическое возбуждение электронов, оставшихся внутри освещённого тела.

Для объяснения з. ф. пришлось предположить, что свет состоит из отдельных корпускул – квантов света, фотонов

$$h\nu = A + W_{max}$$

Б. Эффект Комптона – явление увеличения длины эл.маг. волны (рентгеновских лучей) при её рассеянии на свободном электроне

$$\Delta\lambda = \lambda_K (1 - \cos\theta)$$

зависит от направления рассеяния

$$\lambda_K = \frac{h}{mc} \approx 0{,}024\ A^\circ$$

Эффект Комптона – прямое доказательство существования кванта света – фотона и обладания им импульсом

Опыт Вальтера Боте показал, что вторичные рентгеновские, испускаемые металлической фольгой, кванты летят беспорядочно то в одну, то в другую сторону.

Вывод:

Свет испускается атомом, распространяется в пространстве и вступает во взаимодействие с веществом как целое, в виде локализованной порции света - квантов света, фотона.

Квант света или фотон - это элементарная (наименьшая) неделимая порция света, обладающая энергией и импульсом:

$$E_\nu = h\nu = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \frac{E_\nu}{c}\vec{n} = \hbar\vec{k} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$

Квантовые свойства атомов. Постулаты Бора

1. Существуют стационарные состояния атомов, в которых они не излучают и не поглощают свет. W_n
2. Излучаемые или поглощаемые атомами световые волны при переходе с уровня энергии W_n на уровень W_m, монохроматичны с частотой ν_{nm} (ω_{nm}), опред. ур-м:

$$h\nu_{nm} = \hbar\omega_{nm} = W_n - W_m$$

2. Типы радиационных переходов.

Коэффициенты Эйнштейна.

Вероятность спонтанного перехода в единицу времени для состояния n: α_n ($[\alpha_n] = 1/c$). Не зависит от времени нахождения в возбуждённом состоянии: $\alpha_n - const(t)$

Вероятность нахождения атома в возбуждённом состоянии n в момент времени t: $p_n(t) = e^{-\alpha_n t}$ (при $p_n(0) = 1$)

Средняя длительность (время жизни) возбуждённого состояния n:

$$\tau_n = \int_0^\infty t\alpha_n p_n(t)\,dt = \int_0^\infty t\alpha_n e^{-\alpha_n t}\,dt = \frac{1}{\alpha_n}$$

Число возбуждённых атомов в единице объёма N_n:

$$N_n(t) = N_n(0)\, e^{-\alpha_n t} = N_n(0)\, e^{\frac{-t}{\tau_n}}$$

Интенсивность спонтанного излучения:

$$I_n(t) \sim -\frac{dN_n}{dt} = \alpha_n N_n(0)\, e^{-\alpha_n t}, \quad I_n(t) = I_n(0)\, e^{-\alpha_n t}$$

Средняя мощность (поток энергии)

— n

— m

- спонтанного излучения — $P_{nm}^{сп} = A_{nm} N_n \hbar\omega_{nm}$
- поглощения — $P_{mn}^{п} = B_{mn} N_m \hbar\omega_{nm}\, u(\omega_{nm})$
- вынужденного излучения — $P_{nm}^{вн} = B_{nm} N_n \hbar\omega_{nm}\, u(\omega_{nm})$

Термодинамическое равновесие — $P_{mn}^{п} = P_{nm}^{сп} + P_{nm}^{вн}$

Распределение Больцмана $\frac{N_m}{N_n} = \frac{g_m}{g_n} e^{-\frac{W_m - W_n}{k_B T}} = \frac{g_m}{g_n} e^{\frac{\hbar\omega_{nm}}{k_B T}}$

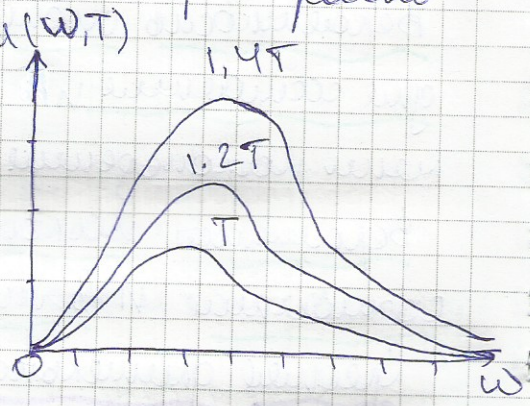
Соотношения для коэффициентов Эйнштейна для любых переходов и квантовых систем:

$$B_{mn} g_m = B_{nm} g_n, \quad \frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{\hbar\omega_{nm}^3}{\pi^2 c^3}$$

3. Формула Планка

Спектральная объёмная плотность энергии равновесного теплового излучения:

$$\boxed{u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}}$$



(44) Многоуровневые системы. Энергетическая структура атомов, молекул и твёрдых тел. Явление люминесценции: определение и классификация, механизмы и свойства.

1. Энергетическая структура атомов, молекул и твёрдых тел.

1 Атомов - линейчатая (серии Лаймана, Бальмера, Пашена, ...) $W_n = -\frac{(Z-a)^2}{n^2} Rhc$; $\hbar\omega_{nm} = W_n - W_m = Rhc\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$

$n = 1, 2, 3$ - главное квантовое число, $R = 109678\ см^{-1}$ - постоянная Ридберга, a - константа экранирования

2. Молекул - линейчато-полосатая.

Три типа переходов - электронные, колебательные и вращательные.

Энергия колеб. движения - $W_v = \hbar\omega_0\left(v + \frac{1}{2}\right)$, $v = 0, 1, 2...$ - колеб квант число, ω_0 - частота колебания.

Энергия вращат. движения - $W_r = \frac{L_r^2}{2J} = \frac{\hbar^2 r(r+1)}{2J}$, J - момент энергии, r - вращ. квант число

3. Твёрдых тел - полосатая (взаимод. атомов, пломн. уровней)

2. Люминесценция - квантовый неравновесный процесс спонтанного излучения при энергетических переходах, происходящих после возбуждения вещества в газообразном (в атомах и молекулах), жидком и твёрдом состояниях.

Люминесценция представляет собой избыток над тепловым излучением тела и продолжается в течение времени τ, значительно превышающего период световых колебаний.

Вещество, на которое оказывается энергетическое воздействие, должно находиться в состоянии, близком к равновесному

излуч некоор

Виды люминесценции

Способ возбуждения

- Фото-
- Радио-
- Ионо-
- α-
- Хемил-
- Электро-...
- Кандо-

Длительность свечения

- Флуоресценция $\tau \leq \sim 10^{-8}$ с
- Фосфоресценция $\tau > \sim 10^{-8}$ с

Механизмы и свойства

Механизм процесса испускания

- Резонансная
- Спонтанная
- Метастабильная
- Рекомбинац.

Свойства люминесценции

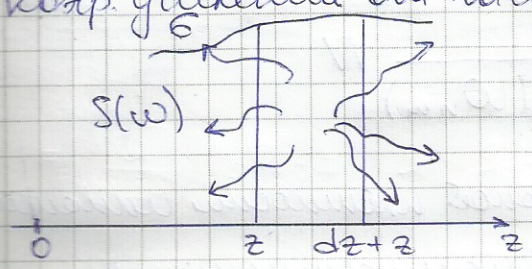
Правило Стокса – длина волны испущенного кванта света больше, чем поглощенного

$$\hbar\omega_л^c < \hbar\omega_п$$

Закон Стокса-Ломмеля – спектр люминесценции в целом и его максимум всегда сдвинуты по сравнению со спектром поглощения и его максимумом в сторону длинных волн

При спонтанной люминесценции успевают наступить термодинамическое равновесие по колебательным степеням свободы. В этом случае спектр люминесценции не зависит от длины волны возбуждающего света и ширина спектра люминесценции определяется шириной линией энергетической полосы, образованной набором уровней, соответствующих различным колебательным состояниям и одному электронному состоянию.

(45) Резонансное усиление света. Линейные коэф-ты поглощения и усиления среды. Инверсная заселённость прак энергетических уровней. Воздействие светового потока на заселённость уровней. Получение инверсной заселённости с помощью трёхуровневой системы. Зависимость коэф. усиления от частоты.



$$dS(\omega)\sigma = \left(P^{сп}_{nm} + P^{вн}_{nm} + P^{п}\right)_{\sigma dz}$$

$$dS(\omega) = \left(a_{nm}(\omega)N_n + b_{nm}(\omega)N_n u(\omega) - b_{mn}(\omega)N_m u(\omega)\right)\hbar\omega\, dz$$

$$S(\omega) = v\, u(\omega)$$

$$dS(\omega) = \frac{\hbar\omega}{v} S(\omega)\left[\frac{a_{nm}N_n v}{S(\omega)} + b_{nm}N_n - b_{mn}N_m\right]dz$$

$$dS(\omega) = -\alpha_{nm}(\omega)S(\omega, z)\,dz$$

$$\alpha_{nm}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{v}\left(b_{mn}N_m - b_{nm}N_n\right)$$

$$S(\omega, z) = S_0(\omega)\, e^{-\alpha_{nm}(\omega)z}$$

$$\alpha_{nm}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{v} b_{nm} g_n \left(\frac{b_{mn}N_m g_m}{b_{nm} g_n g_m} - \frac{N_n}{g_n}\right)$$

$$\alpha_{nm}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{v} b_{nm} g_n (n_m - n_n)$$

$$n_{n,m} \equiv \frac{N_{n,m}}{g_{n,m}}$$ относительная заселённость

коэффициент усиления $\boxed{\beta_{n,m}(\omega) = -\alpha_{nm}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{v} b_{nm}(\omega) g_n (n_n - n_m)}$

среды, для которых $n_n > n_m$ – активные (среды с инверсной заселённостью)

$$N_{n,m} = \frac{N}{Z} g_{n,m} \exp\left(-\frac{W_{n,m}}{kT}\right)$$

$$\frac{n_m}{n_n} = \exp\left(\frac{\hbar\omega_{nm}}{kT}\right) > 1$$

Воздействие светового потока на заселённость уровней.

$N = N_m + N_n$ – const – полная концентрация атомов в среде.

$$\left(P^{сп}_{nm}/\hbar\omega_{nm}\right) + \left(P^{п}_{nm}/\hbar\omega_{nm}\right) + P^{вн}_{nm}/\hbar\omega_{nm})$$

$$\frac{dN_n}{dt} = -A_{nm}N_n + B_{mn}N_m u(\omega_{nm}) - B_{nm}N_n u(\omega_{nm})$$

$$\frac{dN_n}{dt} = 0: \quad -A_{nm}N_n + B_{mn}N_m u(\omega_{nm}) - B_{nm}N_n u(\omega_{nm}) = 0$$

$$A_{nm}N_n + B_{nm}N_n u(\omega_{nm}) = B_{mn}N_m u(\omega_{nm})$$

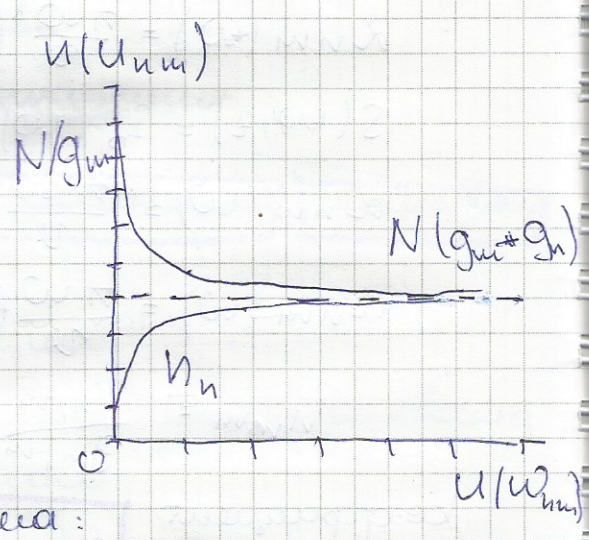
$$A_{nm}N_n + B_{nm}N_n u(\omega_{nm}) = B_{nm}(N-N_n)\,u(\omega_{nm})$$

$$N_n = \frac{B_{mn}\,u(\omega_{nm})}{A_{nm}+(B_{nm}+B_{mn})\,u(\omega_{nm})}\,N$$

При увеличении спектральной плотности интенсивности $S(\omega_{nm}) = \eta u(\omega_{nm})$ с учётом соотношения $B_{mn}g_m = B_{nm}g_n$ получим:

$$N_n \to \frac{B_{mn}}{B_{nm}+B_{mn}}\,N = \frac{g_n}{g_m+g_n}\,N$$

$$N_m = N - N_n \to \frac{g_m}{g_m+g_n}\,N$$

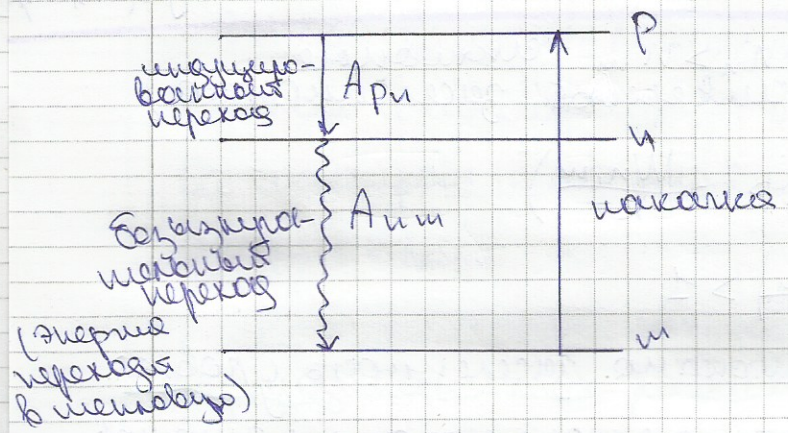


Следовательно:

$$n_n \equiv \frac{N_n}{g_n} \to \frac{N}{g_m+g_n}$$

$$n_m \equiv \frac{N_m}{g_m} \to \frac{N}{g_m+g_n}$$

Трёхуровневая система:



с E_p на E_n до тех пор, пока их населённости не сравняются, тогда процесс усиления прекратится

E_n постоянно опустошается и может не меньше η заселения за счёт излучательных переходов

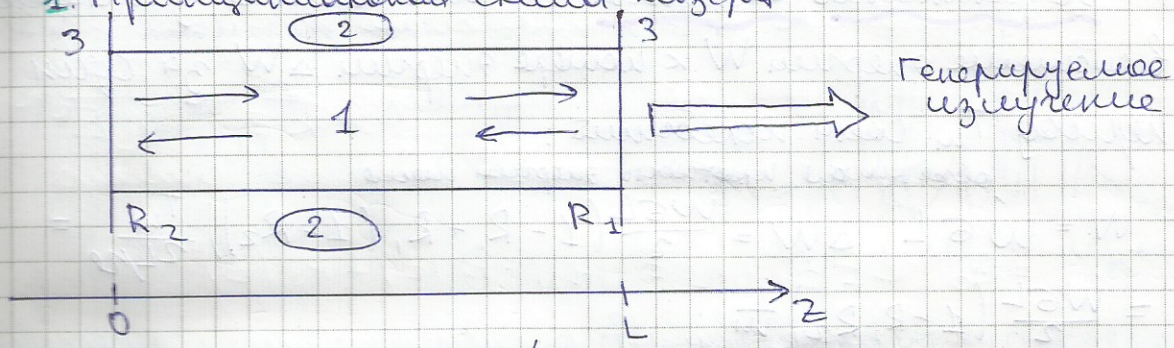
$$A_{pn}g_p > A_{nm}g_n$$

46 Лазеры.

LASER – „Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation"

Усиление света путём вынужденного излучения.

1. Принципиальная схема лазера



1 - активная среда (рабочая среда с инверсной заселённостью уровней)

2 - система накачки (источник энергии для создания активной среды)

3 - оптический резонатор (обратная связь для генерации, зеркала)

Накачка → Инверсная заселённость → Спонтанное излучение → Вынужденное излучение → Усиление света → Обратная связь → Генерация света

2 Условия стационарной генерации

Элементарный цикл - два последовательных прохождения через активную среду и соответствующие отражения от зеркал

Баланс амплитуд - условие усиления для возникновения генерации:

$$\boxed{\frac{S(\omega)}{S_0(\omega)} = R_1 R_2 e^{\beta_{пп}(\omega) 2L} > 1}$$

R_1, R_2 - коэф отраж (по энергии) зеркал; L - длина резонатора

Баланс фаз - условие цикличности для генерации.

$$\boxed{2L = m\lambda_m}$$

Длительность импульса τ определяется временем нахождения системы в условиях генерации и зависит от момента времени выхода системы из этих условий вследствие изменения инверсной заселённости ($\beta(\omega)\downarrow$) или уменьшения добротности (увелич потерь - $\beta_{пор}\uparrow$)

Добротность системы Q – отношение запасённой в системе энергии W к потере энергии ΔW за один период T_m своих колебаний:

σ – площадь поперечного сечения лазерного пучка

$$W = \underbrace{W'}_{\text{объёмная плотность энергии поля}} \sigma L, \quad \Delta W = \frac{W\sigma L}{2}\left(1 - R_1 + R_1(1-R_2)\right)\frac{T_m}{2L/v} =$$

$$= \frac{W\sigma L}{2}(1 - R_1 R_2)\frac{1}{m};$$

$$Q = \frac{W}{\Delta W} = \frac{2m}{1-R_1R_2} = \frac{2m}{1-e^{-2f}} \simeq \frac{m}{f} = \frac{m}{\beta_{пор} L}$$

$T = \frac{2L}{v}$ – продолжительность цикла

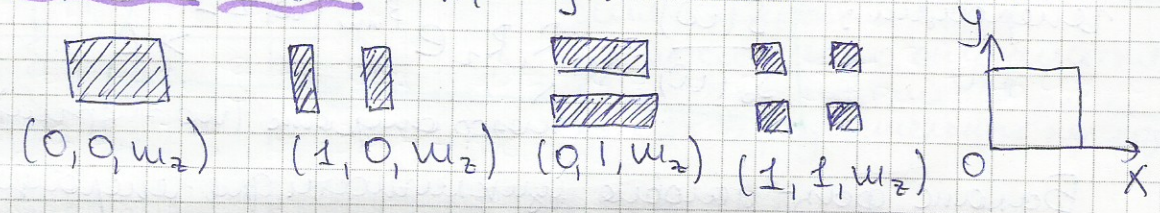
3. Продольные и поперечные моды. Спектральный состав излучения

Стационарность и цикличность → стоячая и бегущая волны.

Стоячая волна – суперпозиция гармонических стоячих волн – мод колебаний.

Продольные моды – $(0, 0, m_z)$ – в плоскости XOY нет узлов: $k_{m_z} = \frac{2\pi}{\lambda_{m_z}} = m_z \frac{\pi}{L}$, $\omega_{m_z} = k_{m_z} v = m_z \frac{\pi v}{L}$

Поперечные моды – $m_x, m_y \neq 0$ – число узлов в плоскости XOY



Ширина линий излучения – $\delta\omega (\sim 1/\tau \sim 10^6 c^{-1})$

Ширина межмодового интервала – $\Delta\omega_z = \frac{\pi v}{L} (\sim 10^9 c^{-1})$

Полоса усиления – $[\omega_н, \omega_к]$

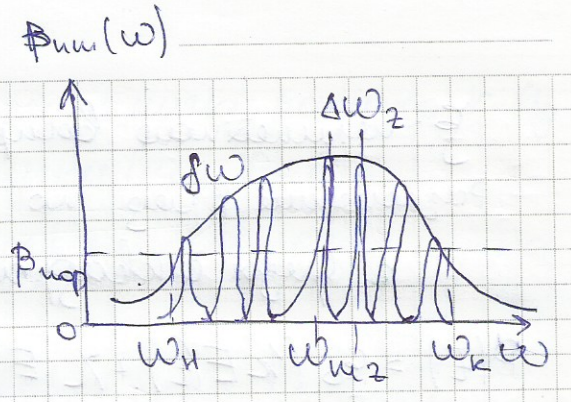
Ширина полосы усиления – $\Delta\omega_{ус} = \omega_н - \omega_к$ $(\sim 10^{10} \div 10^{14} c^{-1})$

Форма и ширина линейного коэф. усиления

$\beta_{лин}(\omega)$ определяются спектральной линией с учётом уширений.

Число генерируемых мод:

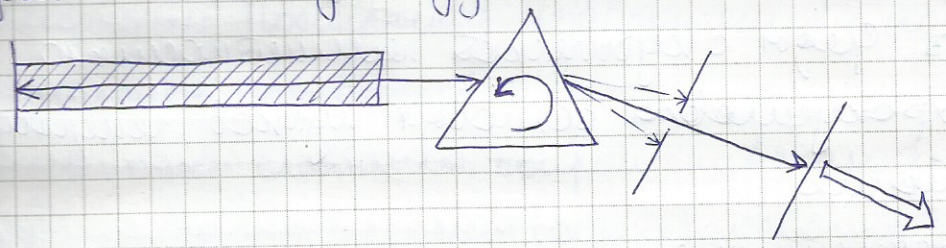
$$N = \frac{\omega_к - \omega_н}{\Delta\omega_z} = \frac{\Delta\omega_{ус}}{\Delta\omega_z}$$



Ширина линии излучения $\delta\omega$ определяется длительностью излучения τ – $\delta\omega \sim 1/\tau$

4. Одномодовый лазер

Внутри резонатора – частотный фильтр – дисперсионный элемент (призма, дифракционная решётка и т.д) и диафрагма. Преодолимый порог генерации $P_{пор}$ создаётся только для узкой области частот.



Примеры: рубиновый лазер (накачка: импульсная оптическая – вспышки лампы Xe, импульсный режим), He-Ne (электр удар по посреднику-атомам He, непр режим), Молекулярный газ... эл. удар на C_r пор-N_2)

(47) Нелинейные оптические явления. Поляризация среды в поле высокоинтенсивного лазерного излучения. Среды с квадратичной нелинейностью. Оптическое детектирование и генерация гармоник

+(48) Среды с кубичной нелинейностью. Самофокусировка волновых пучков и генерация гармоник.

1. Поляризация среды в поле высокоинтенсивного...

Электрическая поляризация среды в сильном поле:

$$P(t) = \varepsilon_0 (\kappa E(t) + \chi E^2(t) + \xi E^3(t) + \dots) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + \dots$$

κ – линейная (оптическая) восприимчивость

χ – нелинейная восприимчивость второго порядка

ξ - нелинейная восприимчивость третьего порядка

Разложение в ряд по отношению $\frac{\chi E^2}{kE} \sim \frac{\xi E^3}{\chi E^2} \sim \frac{E}{E_{ат}}$

2. Среды с квадратичной нелинейностью

$$P(t) = \varepsilon_0 (kE(t) + \chi E^2(t)) = P_1(t) + P_2(t)$$

Оптическое детектирование, генерация гармоник

$$P_2(t) = \varepsilon_0 \chi_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \chi E_0^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \chi E_0^2 \cos(2\omega t - 2kz)$$

Оптическое детектирование - выпрямление высокочастотного светового поля: $U(t) \sim \sigma(t) \sim \langle P(t) \rangle \sim$
$\sim \langle E^2(t) \rangle \sim E_0^2(t) = I(t)$

Генерация второй гармоники

$$I_{изл}(t) \sim \ddot{D} \sim \ddot{P}_2 = 2\varepsilon_0 \chi \omega^2 E_0^2 \cos(2\omega t - 2kz)$$

3. Среды с кубической нелинейностью

Самофокусировка волновых пучков, генерация гармоник

Для изотропных сред или кристаллов с центром симметрии:

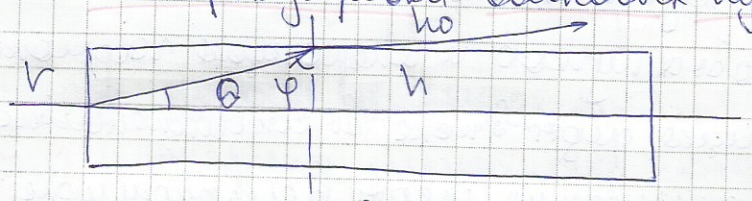
$$\vec{P}(-\vec{E}) = -\vec{P}(\vec{E}) \Rightarrow P(t) = \varepsilon_0 (k(E(t)) + \xi E^3(t) + \dots) =$$
$$= P_1(t) + P_3(t) + \dots;$$

$$P_3(t) = \varepsilon_0 \xi E_0^3 \cos^3(\omega t - kz) = \varepsilon_0 \xi E_0^2 \cdot \frac{3}{4} E_0 \cos(\omega t - kz) +$$
$$+ \varepsilon_0 \xi E_0^3 \cdot \frac{1}{4} \cos(3\omega t - 3kz)$$

Изменение показателя преломления среды:

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + k + \frac{3}{4}\xi E_0^2} \cong n_0 + \frac{3}{8n_0}\xi E_0^2, \quad n = n_0 + n_2 E_0^2$$

Самофокусировка волновых пучков ($n_2 > 0$)



Полное внутреннее отражение

$$\cos\theta_n = \sin\varphi_n = \frac{n_0}{n} = \frac{n_0}{n_0 + n_2 E_0^2}, \quad 1 - \frac{1}{2}\theta_n^2 \cong 1 - \frac{n_2 E_0^2}{n_0}, \quad \theta_n^2 \cong \frac{2 n_2 E_0^2}{n_0}$$

Дифракционное расширение пучка радиуса r - $\theta_g = 0{,}61\frac{\lambda}{r}$

1. $\theta_g > \theta_н$ - расширение пучка (при $P < P_{пор}$)
2. $\theta_g \cong \theta_н$ - самоканалирование светового пучка (при $P = P_{пор}$)
3. $\theta_g < \theta_н$ - самофокусировка (при $P > P_{пор}$)

Пороговая мощность $P_{пор}$ определяется из условия $\theta_g \cong \theta_н$:

$$P_{пор} = I_п \pi r^2 = \varepsilon_0 \varepsilon v \frac{E_0^2}{2} \pi r^2 = \frac{\pi \varepsilon_0 c}{4 n_2} (0{,}61 \lambda_0)^2 \ (\sim 1 кВт)$$

Генерация третьей гармоники

$$I_{изл}(t) \sim \ddot{P} \sim \ddot{P}_3 = \frac{9}{4} \varepsilon_0 \xi \omega^2 E_0^3 \cos(3\omega t - 3kz)$$

(49) Геометрическая оптика. Кардинальные элементы оптической системы - узловые точки, главные и фокальные плоскости. Построение изображений с помощью кардинальных элементов.

Установим свойства сопряжённых плоскостей, в которых находятся предмет (объект) и его изображение. Первой фокальной плоскостью называется плоскость, сопряжённая с бесконечно удалённой в положительном направлении плоскостью. Соответственно вторая фокальная плоскость сопряжена с бесконечно удалённой в отрицательном направлении плоскостью. Свет, идущий от бесконечно удалённого предмета (парал. пучок), фокусируется в одной из фокальных плоскостей. Если на выходе получается расходящийся пучок, то продолжения лучей пересекаются в одной из этих плоскостей.

Среди бесконечного числа пар сопряжённых плоскостей особое место занимают две главные плоскости, для нахождения которых рассмотрим ход лучей через систему: