Подготовка к экзамену по оптике.

① Электромагнитная теория света. Уравнения Максвелла и материальное уравнение. Волновое уравнение. Принцип суперпозиции. Бегущие электромагнитные волны. Скорость света. Плоские сферические волны. Комплексное представление гармонических волн.

Уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

ρ - объёмная плотность свободных зарядов

j - плотность объёмных токов проводимости

определение

$$\boxed{\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

$\vec{P}$ - вектор поляризации. электрический дипольный момент единицы объёма вещества

$$\boxed{\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}}$$

$\vec{J}$ - намагниченность - магнитный дипольный момент единицы объёма

Силовые характеристики поля: $\vec{E}, \vec{B}$ - определяют силовые взаимодействия полей с веществом - полевые вектора

$\vec{P}, \vec{J}$ - определяют отклик вещества от взаимодействия с полями - материальные вектора

! Требования к среде, чтобы пользоваться этими уравнениями - она должна быть неподвижной. !

Материальные уравнения

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}} \qquad \boxed{\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}}$$

ε - диэлектрическая проницаемость

$$\boxed{\vec{j} = \lambda \vec{E}}$$

λ - удельная проводимость

Требования к среде:

1. Среда должна быть линейной - нет нелинейных эффектов, т.е. величины достаточно слабые

2. Изотропна - соответствующее силовое воздействие не зависят от направления в пространстве

3. Безинерционные
4. Локальные

$\rightarrow \vec{D}(t,\vec{r}) = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}(t,\vec{r})$
$\vec{B}(t,\vec{r}) = \mu\mu_0 \vec{H}(t,\vec{r})$

5. Однородное: $\varepsilon \neq \varepsilon(\vec{r})$, $\mu \neq \mu(\vec{r})$
6. Стационарные: $\varepsilon, \mu = const(t)$
7. Безграничные
8. $\rho = 0$
9. $\vec{j} = 0$

Волновое уравнение

Воспользуемся всеми этими требованиями:

$$\begin{cases} div\,\vec{D} = 0 \\ div\,\vec{B} = 0 \\ rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

$$rot(rot\,\vec{E}) = [\nabla[\nabla\vec{E}]] = \nabla(\nabla\vec{E}) - \Delta\vec{E} = \underbrace{grad\,(div\,\vec{E})}_{= grad\,div\,\frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0} = 0} - \Delta\vec{E}$$

С другой стороны

$$rot(rot\,\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} rot\,\vec{B} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{rot\,\vec{H}}_{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} =$$

$$= -\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{E}} \leftarrow \text{Волновое уравнение}$$

Аналогично для $\vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$.

Введём термин: <u>световое возмущение</u> - любой из полевых или материальнополевых векторов

$$\vec{\xi} \in \vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$$

3

Из закона Кулона и Био-Савара-Лапласа:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cong 9\cdot 10^9 \ \frac{Н\cdot м^2}{Кл^2}$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\cdot \frac{Н}{А^2}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\right] = \frac{м^2}{с^2} \to v^2$$

Из вышесказанного запишем

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{f}(t,\vec{r})}{\partial t^2} = v^2 \Delta \vec{f}(t,\vec{r})}$$ — Волновое уравнение для электромагнитного (светового) возмущения

Уравнение является линейным, однородным, коэффициенты вещественны

Бегущие электромагнитные волны. Скорость света. Формула Максвелла

В дальнейшем будет показано, что

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c = 3\cdot 10^8 \ м/с$$

$$\boxed{n = \sqrt{\varepsilon\mu}}$$ — Формула Максвелла

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

Плоские волны

Рассмотрим ситуацию, когда $f(t,\vec{r}) = f(t,z)$.

Введём понятие фронта возмущения — это некая поверхность, образованная точками в пространстве, в каждом из которых возмущение одинаково. Т.е. это плоскость, перпендикулярная оси z. Поэтому эти волны называются плоскими.

Фронт возмущения позволяет следить за поведением этой плоскости в пространстве со временем и в частности говорить о скорости перемещения этого фронта возмущения.

4 | Волновое уравнение в этом случае:

$$\frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial z^2}$$

Общее решение имеет вид

произвольная, дважды дифференцируемая функция

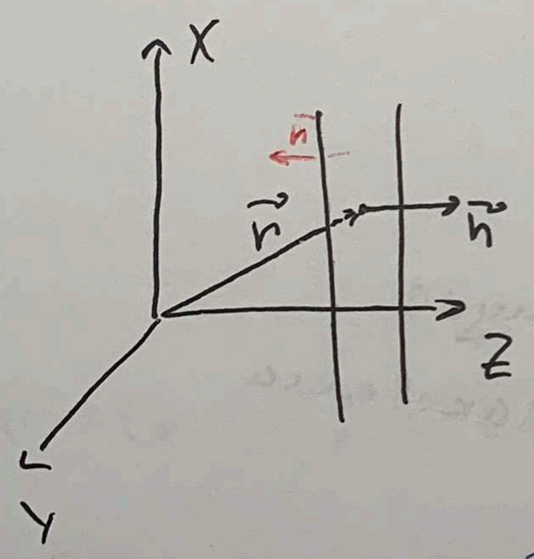
$$\boxed{f(t,z) = f\left(t \mp \frac{z}{v}\right)}$$ ← уравнение плоской волны

Форма волны - зависимость светового возмущения от координаты в данный момент времени

Возмущение одно и то же в том случае, когда

$$t \mp \frac{z}{v} = const$$

$$dt \mp \frac{dz}{v} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{dz}{dt} = \pm v}$$ ← скорость распространения волны



$$z = \vec{n} \cdot \vec{r} \Rightarrow \boxed{f(t,\vec{r}) = f\left(t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{v}\right)}$$

$\underline{f(t,z)}$

$f(t, z=0) = a\cos(\omega t + \varphi_0)$ $\Big| \Rightarrow f(t,z) = a\cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi_0\right) =$

волновое число

$= a\cos(\omega t - kz + \varphi_0)$

$-kz \rightarrow$ набег фазы

$\varphi(z) = -kz + \varphi_0 \rightarrow$ начальная фаза в произвольной точке

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(t,z) = a\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)}$$

$\vec{k} = k\vec{n} \rightarrow$ волновой вектор

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \mathrm{Re}\, e^{i\alpha} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Т.к. коэффициенты волнового уравнения вещественны, то вещественная и мнимая части решения также является решением.

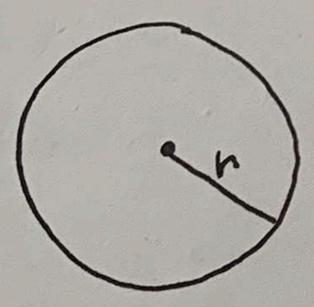
$$f(t,\vec r) = a\,\mathrm{Re}\left(e^{i(\omega t - \vec k \vec r + \varphi_0)}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\Big(\underbrace{a\, e^{i(-\vec k \vec r + \varphi_0)}\, e^{i\omega t}}_{\text{комплексное представление уравнения плоской волны } \hat f(t,\vec r)}\Big)$$

$$\boxed{\hat f(t,\vec r) = \underbrace{A(\vec r)}_{\text{комплексная амплитуда}}\, e^{i\omega t}} \qquad \boxed{A(\vec r) = a\, e^{i\varphi(\vec r)}}$$

Сферические волны

Пусть теперь $f(t,\vec r) = f(t,r)$ – зависит от расстояния от какой-то фиксированной точки в пространстве. Следовательно, фронт возмущения – это сфера, а такие волны называются сферическими.



$$\frac{\partial^2 f(t,r)}{\partial t^2} = v^2 \Delta f(t,r)$$

Можно показать, что в общем виде уравнение сферической волны:

$$\boxed{f(t,r) = \frac{f\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}}$$

Действительно, В то же время, учитывая, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{f\left(t \mp \frac{r}{v}\right)}{r}\right) = \frac{f''}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = \frac{x_\alpha}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f\left(t \mp \frac{r}{v}\right)}{r}\right) = \frac{f' \frac{\mp x}{vr} r - f \frac{x}{r}}{r^2} = \frac{\left(\mp \frac{1}{v} f' r - f\right) x}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{f\left(t \mp \frac{r}{v}\right)}{r}\right) = \frac{\frac{1}{v^2} f'' r^2 x^2 \mp \frac{1}{v} f' r^3 - f r^2 \pm \frac{1}{v} f' x^2 \cdot 3r + 3 f x^2}{r^5}$$

6| $\Delta f(t \mp \frac{r}{v}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) = \frac{\frac{1}{v^2} f'' r^4}{r^5} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{f''}{r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{f(t \mp \frac{r}{v})}{r}\right)$

Данное решение волнового уравнения описывает две волны. Первую из них (со знаком „-") - расходящуюся от начала координат, вторую („+") - сходящуюся к началу координат сферические волны с модулем скорости волнового фронта v.

Запишем уравнение сферической гармонической волны. Зададим граничные условия:

$$f(t, r_0) = \frac{a}{r_0} \cos(\omega t - k r_0 + f_0)$$

Тогда в соответствие с общим решением

$$\boxed{f(t, r) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - k r + f_0)}$$

В комплексной форме:

$$f(t, r) = \frac{a}{r} \mathrm{Re}\left(e^{i(\omega t - k r + f_0)}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\underbrace{\frac{a}{r} e^{i(-kr + f_0)}}_{\text{комплексная амплитуда } A(r)} e^{i\omega t}\right)$$

$$\boxed{\hat{f}(t, r) = A(r) e^{i\omega t}}$$

② Световые пучки и импульсы. Модели реальных световых волн. Квазимонохроматическая гармоническая волна. Квазимонохроматический импульс. Энергетики световых пучков и импульсов.

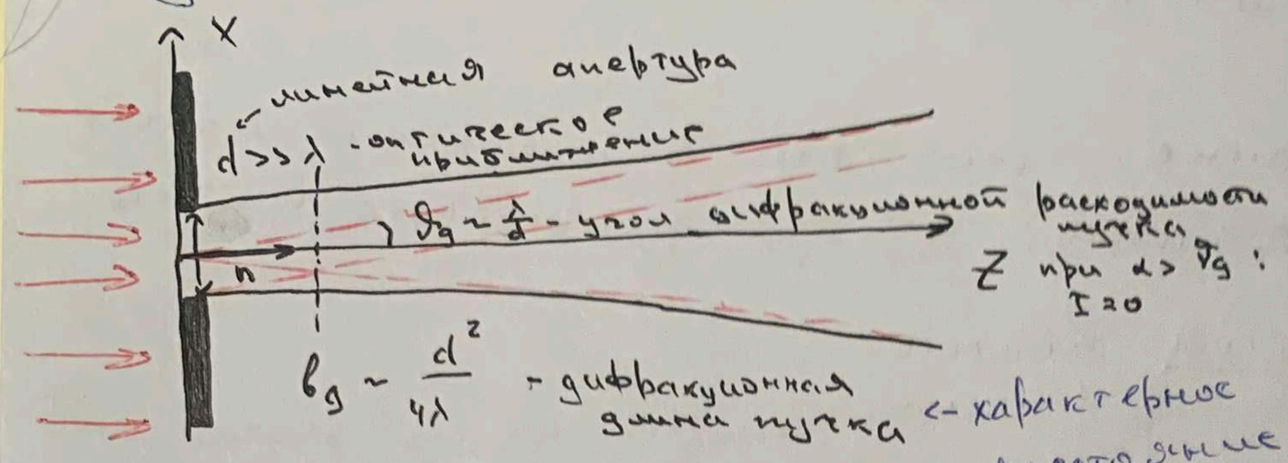
Пучок - это волна пространственно модулированная с масштабом d, который $d \gg \lambda$, т.е. характеристики меняются в пространстве.

Если модуляции наблюдаются и во времени, то соответствующий масштаб $\tau \gg T$, T - период колебаний

7 |

Квазиплоская и квазисферическая гармонические волны.

Будем считать, что достаточно плоская гармоническая волна падает на отверстие с характерным размером d.



• Если рассматривать структуру пучка на расстоянии $z \ll b_g$ - область геометрической оптики - то волну можно описать с помощью квазиплоской гармонической волны:

$$\xi(t, x, y, z) = a(x, y)\cos(\omega t - kz + f_0)$$

<- функция координат!

• Если рассматривать на расстояниях $z \ll b_g$ и $R = \sqrt{x^2+y^2} \ll d$ - расстояние от оси. Тогда волну можно описать как плоскую:

$$\xi(t, z) = a \cdot \cos(\omega t - kz + f_0)$$

• Если рассматривать волны на расстояние $z \gg b_g$, то волны будут близки к сферическим, однако амплитуда будет зависеть от направления на точку наблюдения - она будет квазисферической:

$$\xi(t, k_x, k_y, r) = \frac{a(k_x, k_y)}{r}\cos(\omega t - kr + f_0)$$

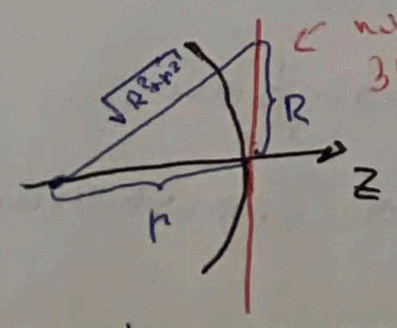
<- проекции волнового вектора

• $z \gg b_g$, $R \ll (\vartheta_g r) \sim \frac{\lambda r}{d}$, то волна будет сферической

<- расстояние до края пучка

$$\xi(t, r) = \frac{a}{r}\cos(\omega t - kr + f_0)$$

• $z \gg b_g$, $R \ll \sqrt{r\lambda}$



<- плоскость - соответствующий набор точек, у которых фаза одна и та же значит набег фазы должен быть один и тот же или $\ll$ чем что-то

=> разность хода! $\sqrt{r^2+R^2} - r \ll \frac{\lambda}{2}$

$$r\sqrt{1+\frac{R^2}{r^2}} - r \sim r\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{1}{2}\right) - r = \frac{R^2}{2r} \ll \frac{\lambda}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$R \ll \sqrt{r\lambda}$$

интересует такая область существования этой волны, близкая к распространению, что можно считать, что волна не сферическая, а плоская

8 | Тогда можно считать, что волна плоская с убывающей амплитудой

$$\xi(t,z) = \frac{a}{z}\cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

• $z \gg b_g$, $R \ll \sqrt{r\lambda}$, расстояние вдоль оси z достаточно малые по сравнению с расстоянием до сечения этого пучка $\Delta z \ll z$, то это плоская волна

$$\xi(t,z) = a\cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

Квазигармонические волны (импульсы)

Они представляют собой модуляции во времени. Это сказывается на характеристики волн: амплитуде и фазе. К ним добавляется зависимость от времени:

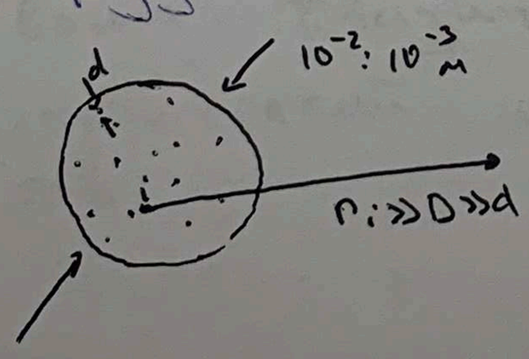
• Граничные условия

$$\boxed{\xi(t,x,y,0) = a(t,x,y)\cos(\omega t + \varphi_0(t))}$$

• Справедливы все те же шесть случаев, но в амплитуде a и начальной фазе φ_0 нужно добавить зависимость от $\boxed{t - \frac{z}{v}}$ или $\boxed{t - \frac{r}{v}}$

Случайно модулированные волны

Будем считать, что источник микроскопический, его характерные размеры порядка $10^{-2} : 10^{-3}$ м.



Будем считать, что он представляет собой совокупность точечных независимых источников, их характерные линейные размеры $d \simeq 10^{-10}$ м. Характерное время модуляции $\tau = 10^{-8} - 10^{-10}$ с и определяется температурой, или плотностью газа. Нас интересуют волны на больших расстояниях r_i

9|

$$f(t,r) = \sum_i \frac{a_i}{r_i} \cos(\omega t - \overset{=\frac{2\pi}{\lambda}}{k} r_i + \varphi_{0i})$$

изменение порядка D

изменение фазы от одного источника до другого → помехи в φ_{0i}, тогда

Воспользуемся тем, что $r_i \gg D \gg d$. Это означает, что $\langle r_i \rangle = r$, тогда

$$f(t,r) \simeq \frac{1}{r} \sum_i a_i \cos(\omega t - kr + \varphi_0^i)$$

Получилась сумма гармонических функций, у которых амплитуда и фаза меняются от одного источника до другого и по времени. С достаточной степенью точности:

$$f(t,r) = \frac{\tilde{a}}{r} \cos(\omega t - kr + \tilde{\varphi}_0)$$

случайно меняющиеся величины

При обычных условиях количество атомов или молекул: $10^{19} \div 10^{22}$

③ Волновое уравнение. Общее решение в виде плоских волн. Свойства плоских волн: ориентация и взаимосвязь полевых векторов. Поляризация света. Классификация состояний поляризации. Поляризация естественного света.

Для любой электромагнитной волны, если мы рассматриваем малую область пространства в направление перпендикулярном направлению волны, то всегда можно с достаточной степенью точности сказать, что она плоская.

Волновое уравнение и его общее решение в виде плоских волн (1 вопрос):

$$\frac{d^2 \vec{f}(t,\vec{r})}{dt^2} = v^2 \Delta \vec{f}(t,\vec{r})$$

!

$$f(t,z) = f\left(t \mp \frac{z}{v}\right)$$

10| Ориентация и взаимосвязь полевых векторов

Волны плоская => световое возмущение является функцией следующего аргумента:

единичный вектор вдоль распространения волны!

$$\vec{\xi}(t,\vec{r}) = \vec{\xi}\left(t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{v}\right)$$ ← общее решение плоских волн

Запишем некоторые уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Рассмотрим чему равен $\mathrm{rot}\,\vec{E}$, если волна плоская

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}\left(t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{v}\right) = [\nabla \vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{v}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & \dot{E}_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{v}[\vec{n}\cdot\dot{\vec{E}}] = -\dot{\vec{B}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{[\vec{n}\vec{E}] = v\vec{B}}$$

Аналогично:

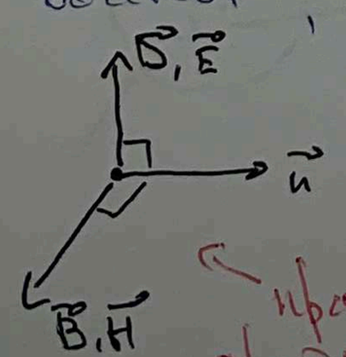
$$\boxed{[\vec{n}\vec{H}] = -v\vec{D}}$$

Умножим скалярно на $\vec{n}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{n}\vec{B} &= 0 \\ \vec{n}\vec{D} &= 0 \end{aligned}}$$

Отсюда можно сформулировать свойства плоских волн.

- Если $\vec{n}$ - единичный вектор в направлении распространения волны, то $\vec{D}$ перпендикулярно ему. Из материальных уравнений: $\vec{D}$ и $\vec{E}$ сонаправлены
  $\vec{B}$ и $\vec{H}$ сонаправлены



правая тройка векторов

$\vec{B}$ и $\vec{H}$ $\perp$ $\vec{n}$ и $\vec{E}, \vec{D}$ из вышеполученных уравнений.

$\vec{B}$ и $\vec{E}$ - полевые вектора => ! электромагнитные волны поперечны!

Т.е. векторные характеристики волны всегда перпендикулярны направлению распространению

11) • Возьмём модуль из первого полученного уравнения

$$\boxed{E(t,\vec{r}) = vB(t,\vec{r})}$$

! Это означает, что в данной точке пространства, если существует бегущая электромагнитная волна, то силовые характеристики поля меняются синхронно. !

$$E(t,\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}\mu\mu_0 H(t,\vec{r}) \Rightarrow \boxed{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E(t,\vec{r}) = \sqrt{\mu\mu_0}\,H(t,\vec{r})}$$

Поляризация.

Поляризация - ориентация полевых векторов в пространстве.

Плоскость поляризации - плоскость, образованная двумя векторами: $\vec{E}$ и $\vec{n}$

Если в процессе распространения волна не меняет ориентацию плоскости поляризации, то такие волны называются линейно поляризованными или плоско поляризованными.

Если между двумя волнами, поляризованными перпендикулярно относительно друг друга, нет сдвига по фазе и амплитуды одинаковы, то в результате суперпозиции получается волна линейно поляризованная, но соответствующая плоскость поляризации оказывается повёрнута на $\frac{\pi}{4}$.

Начнём менять разность фаз $< \frac{\pi}{2}$. В результате кончик вектора напряжённости описывает эллипс.

Такие волны называются эллиптически поляризованными.

Если вектор описывает эллипс по часовой стрелке, то это правополяризованная эллиптическая волна.

При $\frac{\pi}{2}$ → круговая поляризация

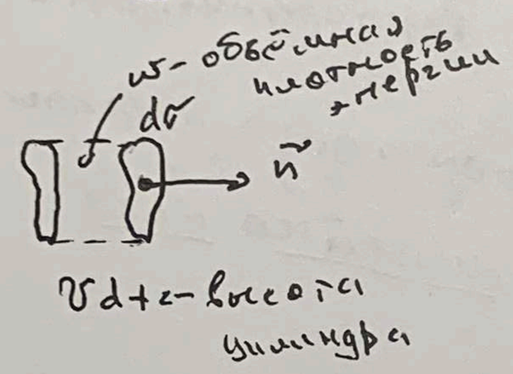
Левая поляризация при разности фаз $> \pi$.

При разных амплитудах плоскость поляризации меняется.

|12| Существует так называемая естественная поляризация. Это случай, когда соответствующее направление электрического поля в волне случайным образом меняет своё направление в пространстве. В общем случае ещё и величина может меняться случайным образом.

(4) Поток и плотность потока энергии электромагнитной волны. Вектор Умова-Пойнтинга. Интенсивность света. Закон изменения энергии электромагнитного поля.

Зададим направление распространения волны с помощью единичного вектора $\vec{n}$. Рассмотрим энергию, которую переносит волна за интервал времени dt через элемент поверхности $d\sigma$.



$$dW = w v dt d\sigma$$

Введём физическую величину, которая называется плотностью потока энергии

$$\boxed{S' = \frac{dW}{dt d\sigma} = wv}$$ ← энергия, переносимая через элемент поверхности единичной площади, ориентированной перпендикулярно направлению переноса энергии, в единицу времени

$$\boxed{\vec{S} = S\vec{n} = wv\vec{n}}$$ ← Вектор Умова

В электромагнитном поле:

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\vec{B}}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \varepsilon_0\varepsilon E^2 =$$

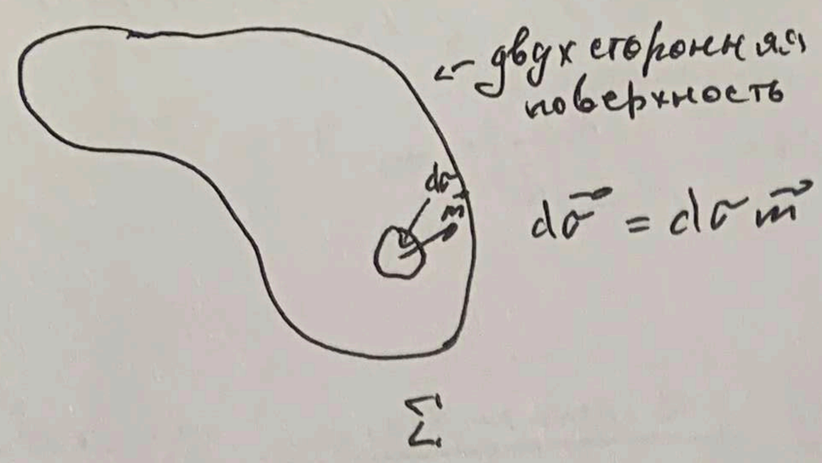
$$= \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\, E \sqrt{\mu_0\mu}\, H = \frac{1}{v} EH$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]}$$ ← Вектор Умова-Пойтинга

$$[S] = \frac{Дж}{м^2 с}$$

13| Рассчитаем поток энергии через любой элемент поверхности.



$d\vec{\sigma} = d\sigma \vec{n}$

поток энергии

$$dP = \vec{S}\, d\vec{\sigma}$$

$$P = \int_{\Sigma} \vec{S}\, d\vec{\sigma}$$

Интенсивность света

$$\boxed{I = \langle S \rangle_{\tau_p}}$$, τ_p - время разрешения прибора

$$I = \langle \varepsilon_0 \varepsilon v E^2 \rangle = \varepsilon_0 \varepsilon v \langle E^2 \rangle \sim \langle E^2 \rangle$$

В магнитных и не сегнетоэлектрических средах

$$I \simeq \frac{1}{377} \langle E^2 \rangle$$ ← в системе СИ

Энергия световых пучков и импульсов

Световые пучки - световая волна, модулированная в пространстве

Световые импульсы - световая волна, модулированная во времени

Опишем пучок с помощью квазимонохроматической волны. Это означает, что напряжённость электрического поля:

$$E(t,x,y,z) = \underbrace{E_0(x,y)}_{\text{амплитуда поля}} \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

Интенсивность соответствующей волны:

$$I(x,y) = \varepsilon_0 \varepsilon v \frac{E_0^2(x,y)}{2}$$

Характеристики пучка:

- площадь поперечного сечения пучка σ;
- мощность пучка P - работа/энергия, которая совершается

или накапливается в единицу времени

некое среднее значение

$$P = \iint_{-\infty}^{\infty} I(x,y)\,dx\,dy = I_{эфф}\,\sigma$$

$$\boxed{I_{эфф} = \frac{P}{\sigma}}$$

Теперь рассмотрим импульс:

квазиплоская → квазигармоническая волна

$$E(t,x,y,z) = E_0\left(t-\frac{z}{v},\,x,\,y\right)\cos\left(\omega t - kz + f_0\left(t-\frac{z}{v}\right)\right)$$

Характерное время модуляции импульса или длительность импульса:

$\tau \gg T$ с другой стороны $T \ll \tau_p < \tau$

$$I\left(t-\frac{z}{v},x,y\right) = \varepsilon_0\varepsilon v\,\frac{E_0^2\left(t-\frac{z}{v},x,y\right)}{2}$$

Характеристики светового импульса

- Энергия W - энергия электромагнитной волны, которая несёт с собой световой импульс
- Площадь поперечного сечения σ
- Длительность τ

Полная энергия:

$$W = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\iint I\left(t-\frac{z}{v},x,y\right)dx\,dy}_{P\left(t-\frac{z}{v}\right)}\,dt =$$

$$= I_{эфф}\,\sigma\tau = P_{эфф}\,\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_{эфф} = \frac{W}{\sigma\tau}} \rightarrow \boxed{P_{эфф} = \frac{W}{\tau}}$$

15 | Зная интенсивность, можно найти соответствующую эффективную напряжённость, а точнее эффективную амплитуду напряжённости поля:

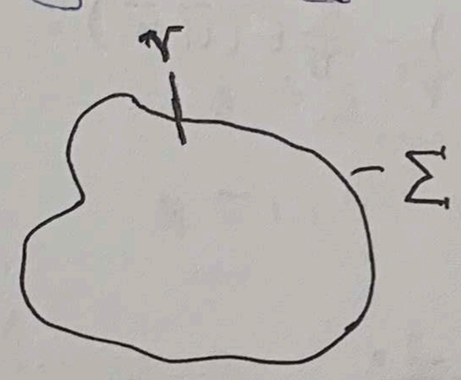
$$E_{эф} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0 \varepsilon v} I_{эф}} \cong \sqrt{754 \cdot I_{эф}}$$

в системе СИ

Закон изменения энергии электромагнитного поля

Что можно сказать об энергии электромагнитного поля в какой-то области пространство?

Рассмотрим некоторый объём V в пространстве, где существуют электромагнитные волны.



$$\vec{H} \cdot \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

← работают в случае, если среда неподвижная относительно наблюдателя

$$\underbrace{\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}}_{\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}]} = -\underbrace{\vec{j}\vec{E}}_{\text{количество теплоты в единицу времени и единицу объёма } q} - \underbrace{\left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)}_{\text{скорость изменения объёмной плотности энергии}}$$

(закон Джоуля-Ленца)

$$\operatorname{div}\underbrace{[\vec{E}\vec{H}]}_{\vec{S}} = -q - \frac{\partial w}{\partial t}$$

среда должна быть линейной, изотропной, стационарной

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\vec{B}}{2}\right) \overset{!}{=} \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0\mu\vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{S} = -q - \frac{\partial w}{\partial t}}$$

← Закон изменения электромагнитной энергии в дифференциальной форме

$$\underbrace{\int_V \operatorname{div}\vec{S}\,dV}_{} = -Q - \frac{\partial W}{\partial t} \Rightarrow$$

уравнение Остроградского-Гаусса: $\oint_\Sigma \vec{S}\,d\vec{\sigma}$ ← поток энергии через поверхность

В интегральной форме

$$\boxed{-\frac{\partial W}{\partial t} = Q + \oint_\Sigma \vec{S}\,d\vec{\sigma}}$$

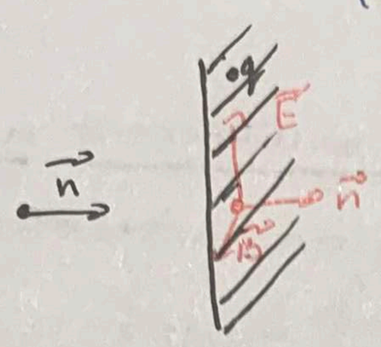
выделяется внутри объёма

поток энергии, который уносится электромагнитной волной

16 | (5) Импульс фотона. Плотность импульса электромагнитной волны. Давление светоноб. волны на поверхность тела.

Давление и плотность импульса электромагнитной волны

Рассмотрим воздействие электромагнитной волны на поверхность тела. Будем считать, что волна падает нормально к поверхности.



Посмотрим, чему равна сила, действующая на заряд q внутри тела. В общем случае он движется хаотически со скоростью $\vec{u}$.

$$\vec{F}_q = \vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{u}\,\vec{B}]$$

сила Лоренца

Поле не произвольное, а электромагнитной волны. $[\vec{n}\,\vec{E}] = -v\vec{B} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{F}_q = q\vec{E} + q[\vec{u}[\vec{n}\,\vec{E}]]\frac{1}{v} = q\vec{E} + \frac{q}{v}\vec{n}(\underbrace{\vec{u}q\vec{E}}_{\text{мощность}}) - \frac{q}{v}\vec{E}(\vec{u}\,\vec{n}) =$$

$$= q\vec{E} + \frac{1}{v}\vec{n}\cdot P_q - \frac{q}{v}\vec{E}(u_n)$$ ← проекция скорости

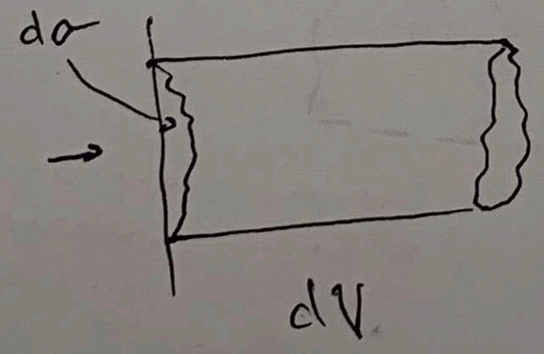
Усредним по времени $\gg T$:

$$\langle\vec{F}_q\rangle = q\underbrace{\langle\vec{E}\rangle}_{=0} + \frac{1}{v}\langle P_q\rangle\vec{n} - \frac{q}{v}\underbrace{\langle\vec{E}\rangle}_{=0}\underbrace{\langle u_n\rangle}_{=0}$$ ← хаотическое движение

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\langle\vec{F}_q\rangle = \langle P_q\rangle\frac{1}{v}\vec{n}}$$

Предположим, что вся электромагнитная волна, которая проходит через элемент поверхности $d\sigma$, в результате поглощается в этой среде в каком-то объёме dV. Тогда посчитаем энергию, которая поглощается волной в единицу времени:



$$I\,d\sigma = \sum_{q(dV)}\langle P_q\rangle$$

Энергия поглощается и выделяется теплота, т.е. мощность, которая выделяется при воздействие на заряды

$$\sum_{q(dV)}\langle\vec{F}_q\rangle = \frac{\vec{n}}{v}\sum_{q(dV)}\langle P_q\rangle = \frac{I}{v}\vec{n}\,d\sigma = d\vec{F}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d\vec{F}}{d\sigma} = \vec{P} = \frac{I}{v}\vec{n} = \frac{\langle w\rangle \cancel{v}}{\cancel{v}}\vec{n} = \langle w\rangle\vec{n}}$$

давление

17

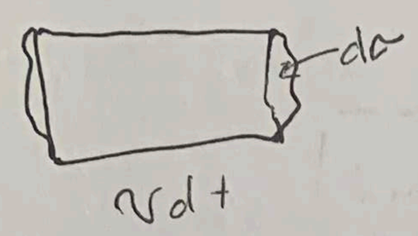
Найдём импульс электромагнитной волны:

импульс силы = изменение импульса системы

$$d\vec{F}\,dt = \vec{g}\cdot v\,dt\,d\sigma \Rightarrow \boxed{\vec{g} = \frac{\vec{P}}{v} = \frac{\langle w\rangle}{v}\vec{n} = \frac{I}{v^2}\vec{n}}$$

давление

объёмная плотность импульса



! Тем самым волна переносит не только энергию, но и импульс !

Момент импульса фотона

Если представить себе световой квант, как волну, локализованную в пространстве и времени, тогда импульс гамма-кванта:

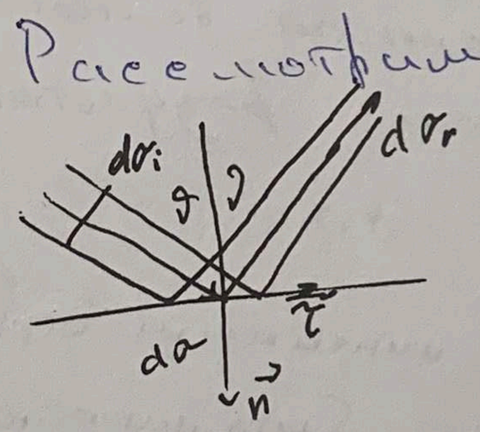
объём гамма-кванта

$$\vec{P}_\gamma = \vec{g}\cdot V = \frac{\langle w\rangle}{v}\vec{n}\cdot V = \frac{E_\gamma}{v}\vec{n} = \frac{\hbar\omega}{v}\vec{n} = \hbar\underbrace{k\vec{n}}_{\vec{k}} = \hbar\vec{k}$$

$\hbar \approx 1{,}05\cdot 10^{-34}$ Дж·с

Давление световой волны на поверхность тела

Рассмотрим электромагнитную волну, которая падает на поверхность тела под некоторым углом ϑ и частично от неё отражается с коэффициентом отражения (по интенсивности) R.



Импульс волны, „приносимый" на поверхность $d\sigma$ за время dt:

$$d\vec{G}_i = \vec{g}_i\,d\sigma_i\,v\,dt = \frac{\langle w_i\rangle}{\cancel{v}}\vec{n}_i\underbrace{d\sigma_i}_{d\sigma\cos\vartheta}\cancel{v}\,dt = \langle w_i\rangle\vec{n}_i\,d\sigma\cos\vartheta\,dt$$

Импульс световой волны, „уносимой" с поверхности $d\sigma$ за время dt:

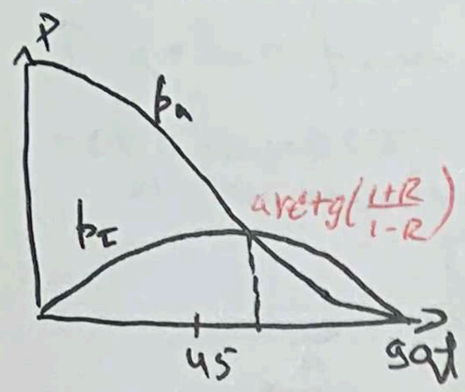
$$d\vec{G}_r = \vec{g}_r\,d\sigma_r\,v\,dt = \frac{\langle w_r\rangle}{v}\vec{n}_r\,d\sigma_r\,\cancel{v}\,dt = \langle w_r\rangle\vec{n}_r\,d\sigma\cos\vartheta\,dt$$

Давление световой волны на поверхность:

$$\vec{p} = \frac{d\vec{G}_i - d\vec{G}_r}{d\sigma\,dt} = \frac{\langle w_i\rangle\vec{n}_i\,\cancel{d\sigma}\cos\vartheta\,\cancel{dt} - \langle w_r\rangle\vec{n}_r\,\cancel{d\sigma}\cos\vartheta\,\cancel{dt}}{\cancel{d\sigma}\,\cancel{dt}} = (\langle w_i\rangle\vec{n}_i - \langle w_r\rangle\vec{n}_r)\cos\vartheta =$$

18 | $= \langle w_i \rangle (\vec{n}_i - R\vec{n}_r)\cos\vartheta = \frac{1}{v}(\vec{n}_1 - R\vec{n}_r)\cos\vartheta$ ← коэффициент отражения $\frac{\langle w_r \rangle}{\langle w_i \rangle}$

В проекциях на оси перпендикулярную (н) и параллельную (т) плоскости падения



$$p_n = \langle w_i \rangle (1+R)\cos^2\vartheta = \frac{1}{v}(1+R)\cos^2\vartheta$$

$$p_\tau = \langle w_i \rangle (1-R)\cos\vartheta\sin\vartheta = \frac{1}{v}(1-R)\cos\vartheta\sin\vartheta$$

(6) Метод спектрального описания волновых полей. Преобразования Фурье. Интеграл и коэффициенты Фурье. Комплексная спектральная амплитуда, спектры амплитуд и фаз, их свойства.

Произвольное электромагнитное поле волны можем представить в виде суперпозиций, т.е. совокупности некоторых плоских гармонических волн.

Тогда можно описать воздействие произвольной по своей структуре пространственно-временной волны с какой-то неоднородной средой путём представления сложной волны в виде плоских гармонических волн. Потом результаты таких взаимодействий складывают.

Требования к среде: она должна обладать линейным откликом на такое воздействие, т.е. среда должна быть линейной. Т.е. связь между материальными уравнениями должна быть записана через соответствующие пропорциональности векторов. Значит напряжённость электрического поля должна быть малой, меньше, чем внутриатомная.

Преобразование Фурье

Если некая функция $f(t)$ абсолютно интегрируема в каждом конечном интервале времени и существует интеграл в бесконечных пределах, то функцию можно представить в виде:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(a(\omega)\cos(\omega t) + b(\omega)\sin(\omega t)\right) d\omega$$ ← Интеграл Фурье

19)

$$\boxed{a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt}$$ Коэффициенты Фурье $$\boxed{b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt}$$

Свойства коэффициентов

- $a(-\omega) = a(\omega)$ ← чётная
- $b(-\omega) = -b(\omega)$ ← нечётная

Введём величину

$$\boxed{g(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}}$$ ← спектральная амплитуда

Она чётная и положительная.

Тогда:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} g(\omega)\Big(\underbrace{\frac{a(\omega)}{g(\omega)}}_{\cos(\varphi(\omega))}\cos\omega t + \underbrace{\frac{b(\omega)}{g(\omega)}}_{\sin(\varphi(\omega))}\sin\omega t\Big)\,d\omega$$

т.к. $\cos^2\varphi(\omega) + \sin^2\varphi(\omega) = 1$

$\varphi(\omega)$ – спектральная фаза

$$\Downarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \underbrace{g(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega))}_{\text{чётная функция}}\,d\omega$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega))\,d\omega$$ ← но это не имеет физического смысла, т.к. $\omega > 0$

Введём комплексную спектральную амплитуду (Фурье-образ)

$$f(i\omega) \equiv a(\omega) - ib(\omega) = g(\omega)\big(\cos\varphi(\omega) - i\sin\varphi(\omega)\big) = g(\omega)e^{-i\varphi(\omega)}$$

$$\boxed{f(i\omega) = g(\omega)e^{-i\varphi(\omega)}}$$

Вернёмся к функции $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega))\,d\omega + \overbrace{\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\sin(\omega t - \varphi(\omega))\,d\omega}^{=0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)e^{i(\omega t - \varphi(\omega))}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)e^{i\omega t}e^{-i\varphi(\omega)}$$

20

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega}$$ ← Обратное преобразование Фурье

В свою очередь:

$$f(i\omega) = a(\omega) - i\,b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\omega t - i\sin\omega t)\,dt$$

$$\boxed{f(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt}$$ <- Прямое преобразование Фурье

Свойства

- $f^*(i\omega) = f(-i\omega)$
- $\boxed{|f(i\omega)|^2 = F^2(\omega)}$ ← спектральная плотность
- Пусть $f(t)$ - чётная функция, тогда $b(\omega) = 0 \Rightarrow f(i\omega) = a(\omega)$ - вещественная, чётная $\Rightarrow f(\omega) = |f(i\omega)| = |a(\omega)|$

Это значит, что $f(i\omega)$

$|f(i\omega)|^2 = a^2(\omega)$; $\quad \varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & a(\omega) > 0 \\ \pi, & a(\omega) < 0 \end{cases}$

- Пусть $f(t)$ - нечётная, тогда $a(\omega) = 0 \Rightarrow f(i\omega) = -i\,b(\omega)$ - мнимая, нечётная.

$f(\omega) = |b(\omega)|$ $\quad |f(i\omega)|^2 = b^2(\omega)$ $\quad \varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & b(\omega) > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & b(\omega) < 0 \end{cases}$

⑦ Свойства преобразования Фурье: соотношение между длительностью импульса и шириной спектра, смещение спектра по частоте. Примеры преобразования Фурье. Теорема Парсеваля. Связь спектра и спектральной плотности интенсивности.

Суперпозиция импульсов

Пусть некоторая функция $F(t)$ является линейной комбинацией от функций $\delta_j(t)$:

$$F(t) = \sum_j \alpha_j \delta_j(t)$$, причём $\alpha_j = const(t)$

21 В соответствие с определением комплексная спектральная амплитуда:

$$\boxed{F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_j \alpha_j f_j(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \sum_j \alpha_j f_j(i\omega)}$$

! Фурье образ линейной комбинации функций равняется той же линейной комбинации Фурье образов этих функций !

<u>Смещение импульса по времени</u>

Пусть нас интересует функция:

$$F(t) = f(t \pm t_0)$$

Комплексная спектральная амплитуда:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\underbrace{t \pm t_0}) e^{-i\omega t}\, dt =$$

$t \pm t_0 = \tau$
$dt = d\tau$
$t = \tau \mp t_0$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega t}\, e^{\pm i\omega t_0}\, d\tau = e^{\pm i\omega t_0} f(i\omega) \overset{\text{с другой стороны}}{=} F(\omega)\, e^{-i\varphi(\omega)}$$

$$\Downarrow$$

$$F(\omega) = f(\omega) \qquad |F(i\omega)|^2 = |f(i\omega)|^2$$

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega) \mp \omega t_0$$

<u>Изменение масштаба времени</u>

Пусть

$$F(t) = f(\alpha t), \text{ где } \alpha = \text{const}(t)$$

Тогда

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\underbrace{\alpha t}_{=\tau}) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega \frac{\tau}{\alpha}}\, d\tau = \frac{1}{\alpha} \cdot f\left(i\frac{\omega}{\alpha}\right) = F(i\omega)\, e^{-i\varphi(\omega)}$$

$\tau \Rightarrow dt = \frac{d\tau}{\alpha}$
$t = \frac{\tau}{\alpha}$

$$\Downarrow$$

$$F(\omega) = |F(i\omega)| = \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \qquad \varphi(\omega) = \varphi\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) + \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ \pi, & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$|F(i\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2} f^2\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^2}\left|f\left(i\frac{\omega}{\alpha}\right)\right|^2$$

22

Соотношение между длительностью импульса и шириной спектра

Под длительностью импульса будем понимать интервал времени в течение которого импульс существенно отличается от нуля

Ширина спектра - интервал частот, в котором соответствующий спектр частот существенно отличается от нуля.

$$\boxed{\Delta\omega \approx \frac{1}{\Delta t}}$$

ширина спектра

константа зависит от определения, которое мы даём в той или иной задаче

длительность импульса

Интегральное определение

Пусть по определению

$$\Delta t \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt}{f(t=0)}$$

$$\Delta\omega \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)\,d\omega}{f(i\omega=0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} a(\omega)\,d\omega}{a(\omega=0)}$$

Тогда

$$\Delta\omega\cdot\Delta t = \frac{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)\,d\omega}}{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt}} \cdot \frac{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt}}{\frac{1}{2\pi}\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)\,d\omega}}$$

$e^{-i\omega t}\big|_{\omega=0} = 1$

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}}$$

Смещение спектра по частоте

Пусть

$$F(t) = f(t)\cos(\omega_0 t)$$

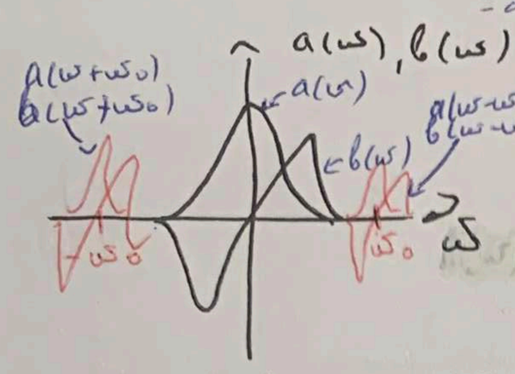
При этом длительность импульса, описывающая $f(t)$:

$$\Delta t \gg T_0$$

$$\Delta\omega \sim \frac{2\pi}{\Delta t} \ll \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0 \Rightarrow \Delta\omega \ll \omega_0$$

Тогда

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}\,e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2}\Big(f(i(\omega-\omega_0)) + f(i(\omega+\omega_0))\Big)$$



Пусть например так

их ширина $\sim \Delta\omega \ll \omega_0$

$A(\omega)$, $B(\omega)$ это сумма функций, но смещённых по оси частот

локализация их такая, что вклад от левой части, той частью, что находится в правой части можно пренебречь, т.к. $\Delta\omega \ll \omega_0$, т.к. $f(t)$ модулирована во времени с характерным временем, которое $\gg T_0$

Это означает, что можно записать:

$$F(i\omega) \cong \frac{1}{2} f(i(\omega-\omega_0))$$

$$F(\omega) \cong \frac{1}{2} f(\omega-\omega_0) \qquad \Phi(\omega) = \varphi(\omega-\omega_0)$$

$$|F(i\omega)|^2 \cong \frac{1}{4}\,|f(i(\omega-\omega_0))|^2$$

Теорема Планшереля

Интегральное соотношение, связывающее комплексную спектральную амплитуду с функцией, к которой относится эта амплитуда

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(i\omega)|^2\,d\omega}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,f^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega\right)^* dt = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)\,f^*(i\omega)\,e^{-i\omega t}}_{f(i\omega)}\,dt\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(i\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |f(i\omega)|^2\,d\omega$$

Примеры преобразования Фурье

Гармонические колебания

Пусть $f(t) = f_0\cos(\omega_0 t)$, тогда

$$f(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0\cos(\omega_0 t)\,e^{-i\omega t}\,dt = f_0\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}\right)e^{-i\omega t}\,dt =$$

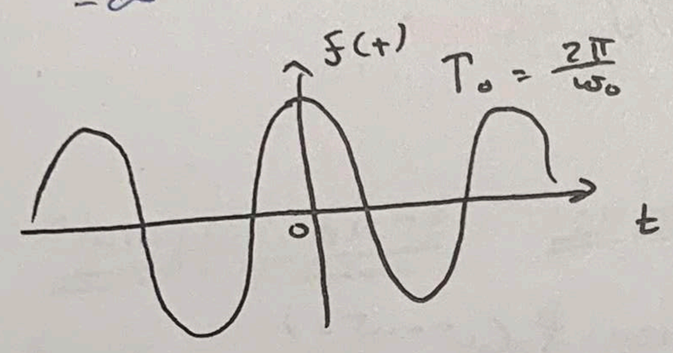
24 | $= \pi f_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}}{2\pi} \right) dt = \pi f_0 \left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0) \right)$

При $\omega \geq 0$ $f(i\omega) = \pi f_0 \delta(\omega - \omega_0)$, где $\delta(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t \, dt$ –

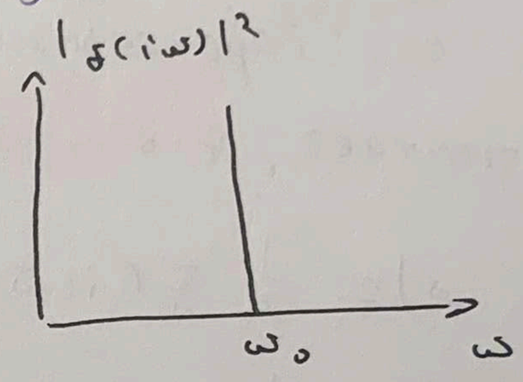
дельта-функция

Свойства дельта-функции:

- $\delta(\omega \to 0) \to \infty$
- $\delta(\omega \neq 0) = 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) \delta(\omega - \Omega) d\omega = \delta(\Omega)$
- Она размерная: $[\delta(\omega)] = [\frac{1}{\omega}]$

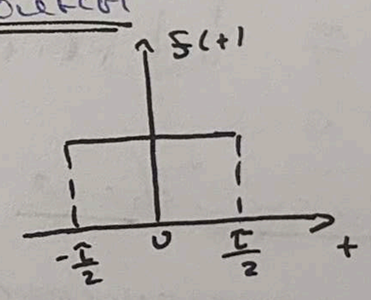


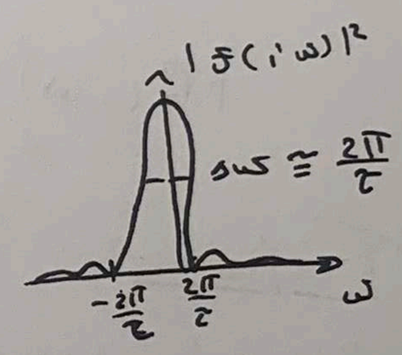
$\Longrightarrow$



Прямоугольный импульс и цуг волны

- $f(t) = \begin{cases} f_0, & \text{при } t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \\ 0, & \text{при } t \notin [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \end{cases}$





$$f(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = f_0 \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t} dt =$$

$$= f_0 \frac{e^{-i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{i\omega\frac{\tau}{2}}}{-i\omega} = f_0 \tau \frac{-2i\sin(\omega\frac{\tau}{2})}{-i\omega\tau} = f_0 \tau \, \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$|f(i\omega)|^2 = (f_0 \tau)^2 \, \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

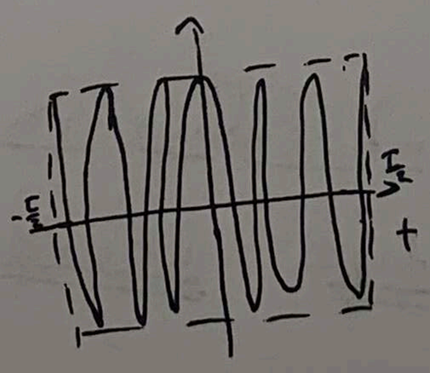
$\mathrm{sinc}\, \alpha = 0$ при $\alpha = k\pi$

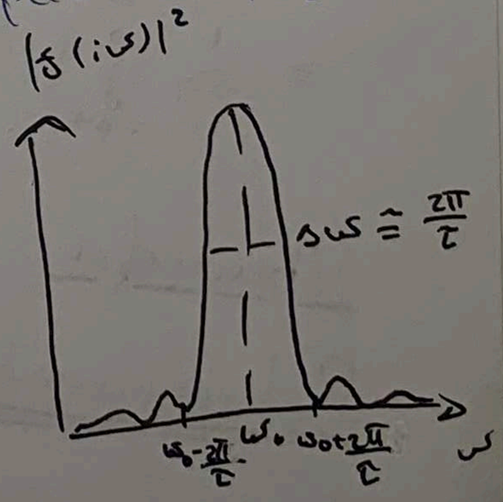
$\mathrm{sinc}\, \alpha \to 1$ при $\alpha \to 0$

$\mathrm{sinc}\, \alpha \to 0$ при $\alpha \to \infty$

- Цуг волн – гармоническая функция, которая обрезана с двух сторон

$$f(t) = \begin{cases} f_0 \cos\omega_0 t, & t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \\ 0, & t \notin [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \end{cases}$$





$$|f(i\omega)|^2 = \frac{(f_0 \tau)^2}{4} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right)$$

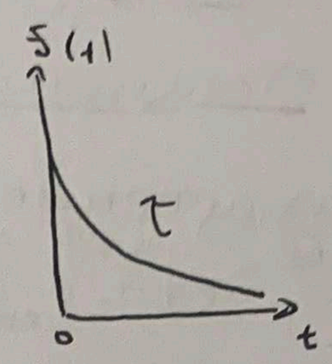
25) **Экспоненциальный импульс и слабозатухающая волна**

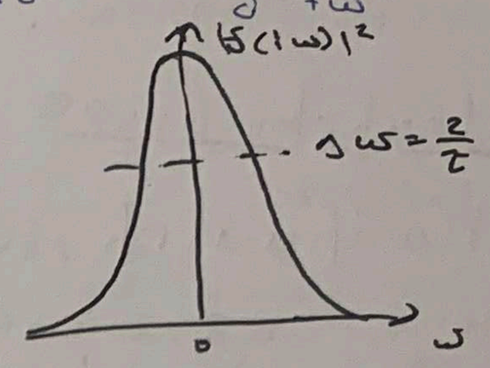
• $f(t) = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = f_0 e^{-\delta t}$ при $t \geq 0$

$$f(i\omega) = \int_0^\infty f_0 e^{-\delta t} e^{-i\omega t} dt = f_0 \cdot \frac{e^{-(\delta + i\omega)t}}{-(\delta + i\omega)} \Big|_0^\infty = f_0 \cdot \frac{1}{\delta + i\omega} = f_0 \frac{\delta - i\omega}{\delta^2 + \omega^2}$$

$$|f(i\omega)|^2 = \frac{f_0^2}{\delta^2} \cdot \frac{\delta^2}{\delta^2 + \omega^2} = (f_0 \tau)^2 \cdot L\left(\frac{\omega}{\delta}\right)$$

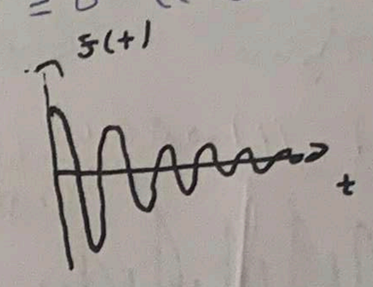
$$L(\omega) \equiv \frac{1}{1 + x^2}$$

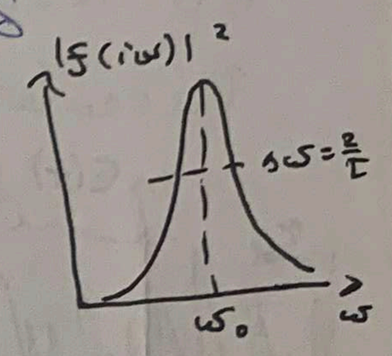




• $f(t) = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\omega_0 t = f_0 e^{-\delta t} \cos\omega_0 t$ при $t \geq 0$ и $\omega \gg \delta$

$$|f(i\omega)|^2 = \frac{f_0^2}{4} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2} = \frac{(f_0 \tau)^2}{4} L\left(\frac{\omega - \omega_0}{L}\right)$$





Спектральная плотность интенсивности

Будем рассматривать $E(t)$. $\Rightarrow |E(i\omega)|^2$ - ?

Световой импульс

Рассмотрим $E(t)$, которая ограничена во времени.

Для импульса:

$$I = \langle S \rangle = \langle \varepsilon_0 \varepsilon v E^2(t) \rangle_{\tau_p \gg T_0} = \underbrace{\varepsilon_0 \varepsilon v}_{\text{В СИ} = \frac{1}{377}} \langle E^2(t) \rangle \Rightarrow \langle E^2(t) \rangle$$

В нашем случае:

вне интеграла равен нулю

Теорема Планшереля

$$I = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau E^2(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t) dt = \frac{1}{\tau} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |E(i\omega)|^2 d\omega = \int_0^\infty S(\omega) d\omega$$

длительность импульса

$S(\omega)$ - спектральная плотность интенсивности

Для импульса

$$\boxed{S(\omega) = \frac{|E(i\omega)|^2}{\pi \tau}}$$

Спектральная плотность интенсивности с другой стороны имеет следующий смысл. Если мы хотим записать

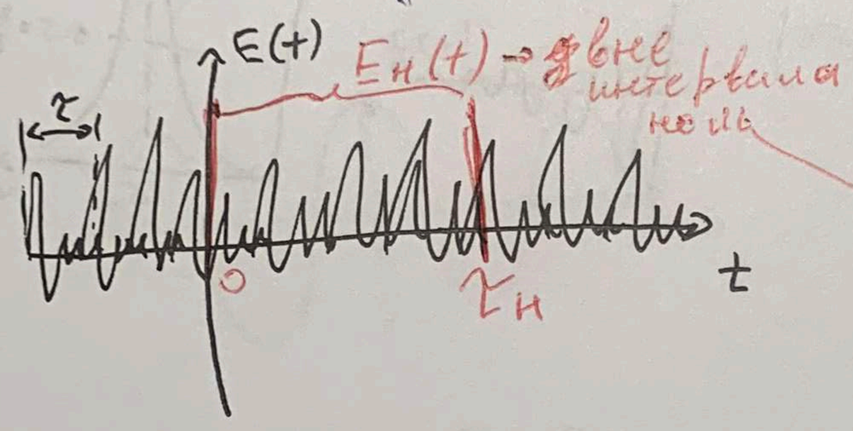
26 | интенсивность той части импульса, которая соответствует набору гармоник из интервала частот от ω до $\omega+d\omega$:

$$\boxed{dI = S(\omega)\,d\omega}$$

Непрерывное стационарное излучение

Например, излучение лампы накаливания. Стационарное означает, что время разрешения гораздо больше времени модуляции $\tau_p \gg \tau \gg T_0$ (период несущей частоты ω_0).

Рассмотрим время наблюдения $\tau_H > \tau_p$.



$$I = \lim_{\substack{\tau_H\to\infty \\ \tau_H \gg \tau}} \frac{1}{\tau_H}\int_0^{\tau_H} E_H^2(t)\,dt = \lim_{\tau_H\to\infty}\frac{1}{\tau_H}\int_{-\infty}^{+\infty} E_H^2(t)\,dt =$$

$$= \lim_{\tau_H\to\infty}\frac{1}{\tau_H}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|E_H(i\omega)|^2\,d\omega = \int_0^{\infty} S(\omega)\,d\omega$$

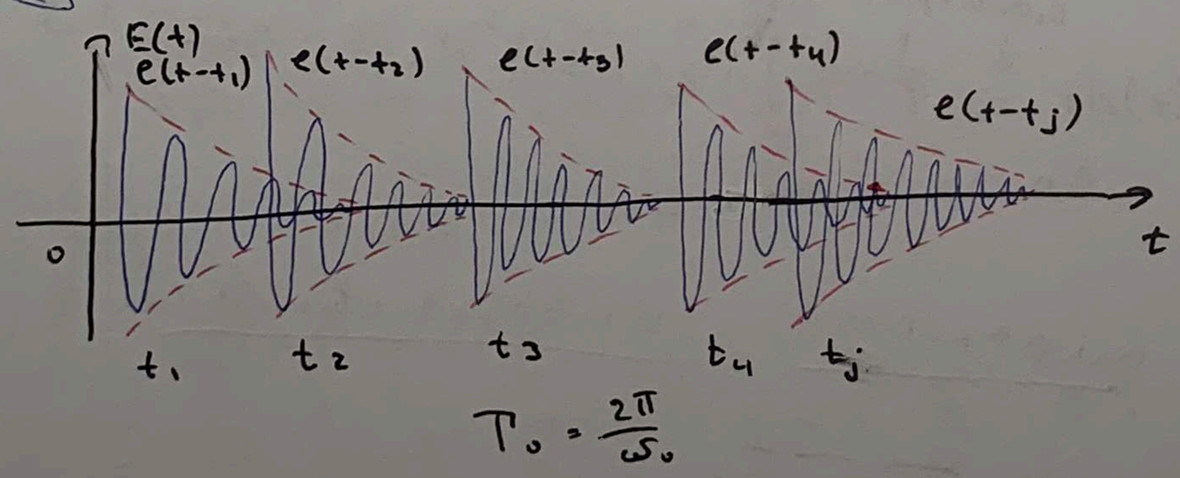
$$\Downarrow$$

$$dI = S(\omega)\,d\omega$$

$$\boxed{S(\omega) = \lim_{\tau_H\to\infty}\frac{|E_H(i\omega)|^2}{\pi\tau_H}}$$

Совокупность случайно разбросанных во времени одинаковых световых импульсов

Пусть $E(t) = \sum_j e(t-t_j)$, t_j - начало j-го импульса с длительностью $\tau \gg T_0$



$$E_H(t) = \begin{cases} E(t), & t\in[0,\tau_H] \\ 0, & t\notin[0,\tau_H]\end{cases}$$

Фурье образ излучения $E_H(t)$ за время наблюдения $\tau_H \gg \tau$

$$E_H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_H(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^{\tau_H} E(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^{\tau_H}\sum_j e(t-t_j)e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_H}\int_{-\infty}^{\infty} e(t-t_j)e^{-i\omega t}\,dt = \sum_{j=1}^{N_H} e^{-i\omega t_j}e(i\omega) = e(i\omega)\sum_{j=1}^{N_H} e^{-i\omega t_j}$$

27 где $N_н$ - число зарегистрированных импульсов за время $\tau_н$.

Спектральная плотность в этом случае равна:

$$|E_н(i\omega)|^2 = E_н(i\omega)E_н^*(i\omega) = |e(i\omega)|^2 \sum_{j,k=1}^{N_н} e^{-i\omega(t_j - t_k)}$$

При $\tau_н \to \infty$ ($\tau_н \gg \tau$) получим спектральную плотность интенсивности всего излучения:

$$S(\omega) = \lim_{\tau_н \to \infty} S_н(\omega) = \lim_{\tau_н \to \infty} \frac{|E_н(i\omega)|^2}{\pi \tau_н} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{|e(i\omega)|^2 \sum_{j,k=1}^{N_н} e^{-i\omega(t_j - t_k)}}{\pi \tau_н} =$$

$$= \frac{|e(i\omega)|^2}{\pi} \lim_{\tau_н \to \infty} \frac{N_н + \sum_{j \neq k}^{N_н} e^{-i\omega(\overbrace{t_j - t_k}^{\text{случайная}})}}{\tau_н} = n\tau \frac{|e(i\omega)|^2}{\pi \tau} = n\tau\, s(\omega)$$

среднее значение = 0

n - средняя частота следования импульсов

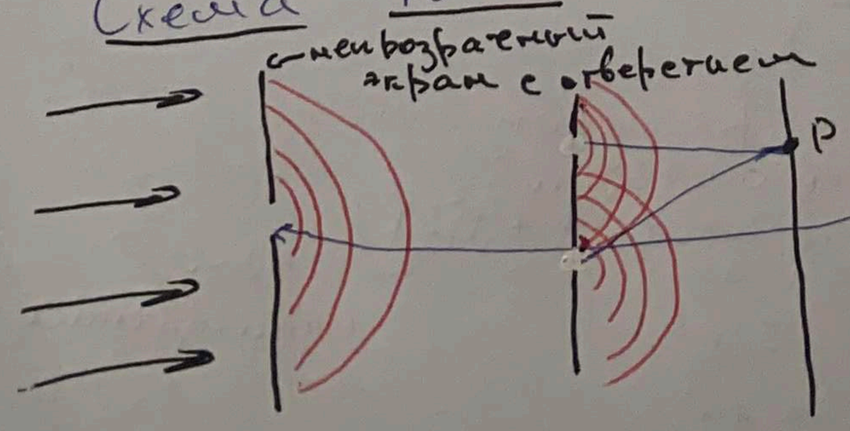
! Спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ случайно разбросанных во времени одинаковых световых импульсов пропорциональна спектральной плотности отдельного импульса $s(\omega)$!

(8) Интерференция света. Общая схема и уравнение двухволновой интерференции. Когерентность. Интерференция монохроматических волн в схеме Юнга. Уравнение интерференции, порядок интерференции, функция видности, линейная и угловая ширины интерференционных полос.

Интерференция - пространственное перераспределение объёмной плотности энергии в световой волне или интенсивности (если волны бегущие) при наложении световых волн.

Когерентность - способность световых волн к интерференции

Схема Юнга



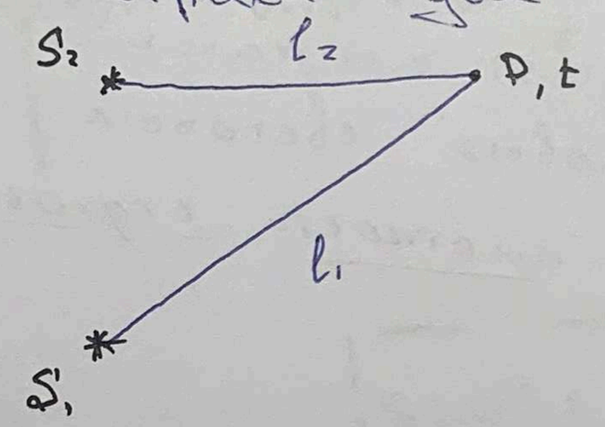
В соответствие с принципом Гюйгенса соответствующая часть волнового фронта исходной волны рассматривается как источник вторичных волн той же самой частоты

28 В результате на экране мы увидим, как интенсивность перераспределилась в пространстве. Тем самым делаем предположение, что вторичные источники являются когерентными. ← Принцип Гюйгенса-Френеля:

- Любая точка волнового поля является источником вторичных сферических волн
- Спектральный состав этих волн такой же как спектральный состав исходной волны
- Все вторичные волны - когерентны.

Общая схема и уравнение двухволновой интерференции

Рассмотрим два вторичных точечных источника. Нас будет интересовать интенсивность в точке P в момент времени t.



По принципу суперпозиции:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_1(t) + \vec{E}_2(t)$$

Тогда:

скалярное произведение

$$I = \langle (\vec{E}(t))^2 \rangle = I_1 + I_2 + \underbrace{2\langle \vec{E}_1(t)\vec{E}_2(t)\rangle}_{\text{интерференционный вклад}}$$

Если $2\langle \vec{E}_1(t)\vec{E}_2(t)\rangle = 0$, то интерференции нет.

Если накладывать волны со взаимноперпендикулярными направлениями поляризации, то интерференции не будет.

Рассмотрим ситуацию, когда $\vec{E}_1(t) \parallel \vec{E}_2(t)$. Тогда:

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\langle \vec{E}_1(t)\vec{E}_2(t)\rangle}$$ ← Основное уравнение двухволновой интерференции

Интерференция монохроматических волн

Из монохроматичности следует:

в месте расположения источников S_1 и S_2

$$E_{1,2}(t) = a_{1,2}\cos(\omega t - k l_{1,2} + \varphi_{0_{1,2}}) = a_{1,2}\cos(\omega t + \varphi_{1,2})$$

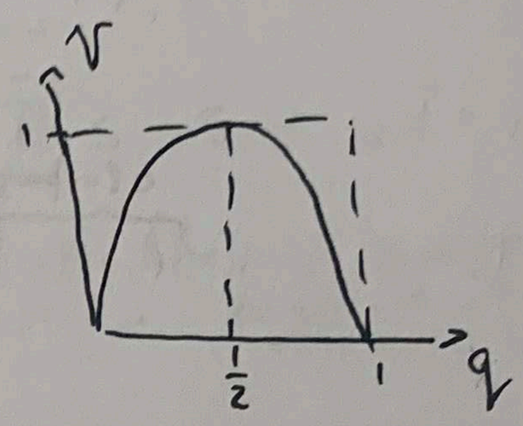
в точке наблюдения

30) Введём величину, которая характеризует относительную интенсивность одной из волн:

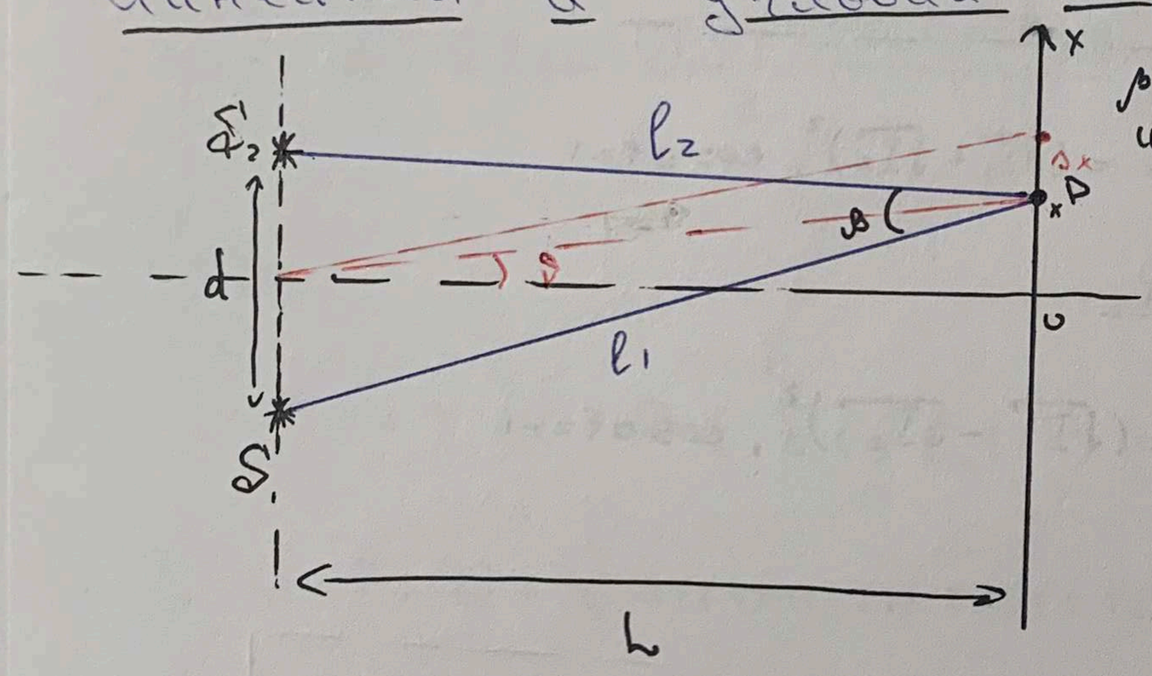
$$\boxed{q = \frac{I_{1,2}}{I_1 + I_2}}$$

Тогда

$$\boxed{V(q) = 2\sqrt{q(1-q)}}$$



Линейная и угловая ширины интерференционных полос



φ - угол сходимости интерферирующих волн

Рассмотрим случай, когда $L \gg d, x$

Разность хода:

$$l_1^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2$$

$$l_2^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2$$

$$l_1^2 - l_2^2 = 2xd$$

$$l_1^2 - l_2^2 = (l_1 - l_2)\overbrace{(l_1 + l_2)}^{\approx 2L} \approx \Delta l \cdot 2L$$

Введём величину, которая характеризует ширину максимума - минимальное расстояние между соседними максимумами

$$\boxed{\Delta l = \overbrace{\frac{xd}{L}}^{\beta} = \beta x}$$

$$\Delta l_{max} = m \cdot \lambda = \frac{d}{L} x_{max} \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{\lambda L}{d}}$$

соответствует изменению порядка интерференции $\Delta m = 1$

Оценка для лазера

$$\Delta x \approx \frac{0{,}63 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{0{,}1 \cdot 10^{-3}} = 25 \text{ мм}$$

Чем дальше отодвигаем экран, тем больше линейные размеры $\sim L$. Вводят величину, которая называется угловым размером полосы:

$$\boxed{\Delta\nu = \frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda}{d}}$$

29| В этом случае:

$$I_{1,2} = \langle E_{1,2}^2(t)\rangle = \langle a_{1,2}^2 \underbrace{\cos^2(\omega t + \varphi_{1,2})}_{\frac{1+\cos 2(\omega t+\varphi_{1,2})}{2}}\rangle = \frac{a_{1,2}^2}{2} \Rightarrow a_{1,2} = \sqrt{2 I_{1,2}}$$

$$\Downarrow$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\langle a_1 a_2 \overbrace{\cos(\omega t+\varphi_1)\cos(\omega t+\varphi_2)}^{\frac{\cos(\omega t+\varphi_1+\omega t+\varphi_2)+\cos(\omega t+\varphi_1-(\omega t+\varphi_2))}{2}}\rangle =$$

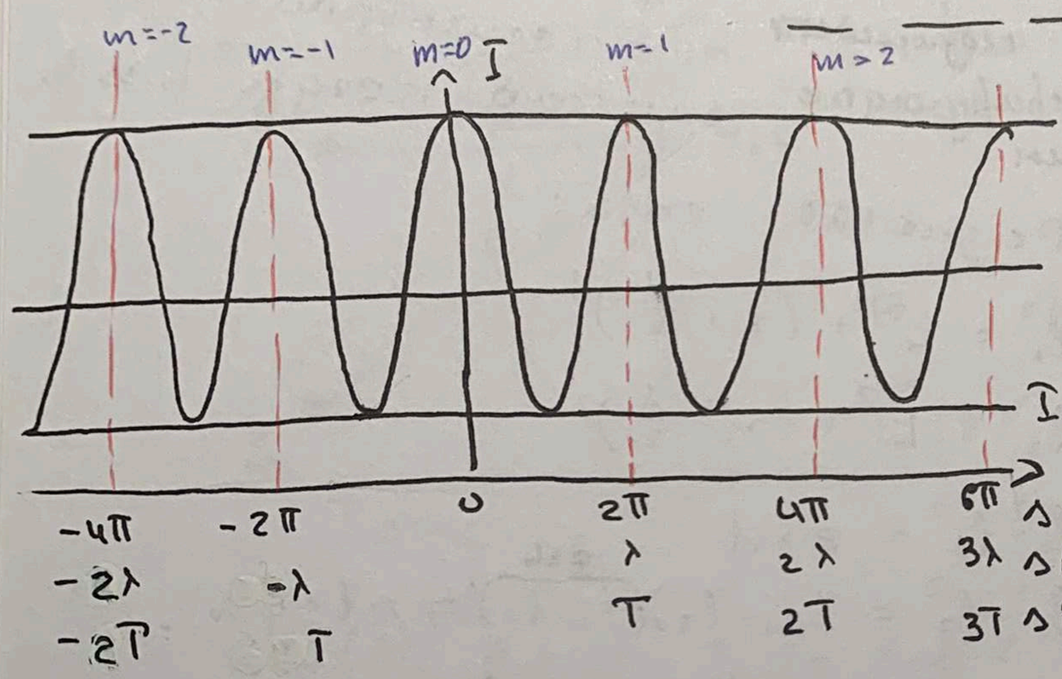
$$= I_1 + I_2 + 2\cdot 2\sqrt{I_1 I_2}\,\frac{\cos\Delta\varphi}{2}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k\overbrace{(l_1 - l_2)}^{\Delta l\text{ — разность хода}} + \Delta\varphi_0 = k\Delta l + \Delta\varphi_0 = \frac{\omega}{v}\Delta l + \Delta\varphi_0 = \omega\Delta\tau + \Delta\varphi_0$$

$\Delta\tau$ — время задержки

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I(\Delta\varphi, \Delta l, \Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi}$$



$I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$, $\cos\Delta\varphi = 1$

$I_1 + I_2$

$I_{min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$, $\cos\Delta\varphi = -1$

Максимумы наблюдаются при $\cos\Delta\varphi = 1 \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi_{max} = m2\pi}$

$\Delta l_{max} = m\lambda \quad \Delta\tau_{max} = mT$

m - порядок интерференции

Минимумы наблюдаются при $\cos\Delta\varphi = -1 \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi_{min} = (m+\frac{1}{2})2\pi}$

$\Delta l_{min} = (m+\frac{1}{2})\lambda \quad \Delta\tau = (m+\frac{1}{2})T$

Введём функцию видности:

$$\boxed{V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}}$$ ← характеристика картины в данной области пространства

$0 \le V \le 1$

В случае монохроматических волн:

$$V = \frac{(\sqrt{I_1}+\sqrt{I_2})^2 - (\sqrt{I_1}-\sqrt{I_2})^2}{(\sqrt{I_1}+\sqrt{I_2})^2 + (\sqrt{I_1}-\sqrt{I_2})^2} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

31 | (9) Интерференция квазимонохроматического света. Условие интерференции. Спектральное описание, уравнение интерференции в частном представлении. Функция видности, время и длина когерентности, максимальный порядок интерференции. Временная когерентность.

В случае квазимонохроматического света:

$$E_{1,2}(t) = a_{1,2}(t)\cos(\omega_0 t - k_0 l_{1,2} + \varphi_{0_{1,2}}(t)) =$$

$$= a_{1,2}(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_{1,2}(t))$$ ← характерное время изменения амплитуды и фазы: $\tau \gg T_0$

Интенсивность каждой из волн:

$$I_{1,2}(t) = \langle E^2_{1,2}(t)\rangle_{\tau_p} = \langle a^2_{1,2}(t)\cos^2(\omega_0 t + \varphi_{1,2}(t))\rangle =$$

$$\simeq \frac{\langle a^2_{1,2}(t)(1+\cos 2(\omega_0 t + \varphi_{1,2}(t)))\rangle}{2} = \begin{cases} const, & \tau_p \gg \tau \\ \cancel{const}, & \tau_p \approx \tau,\ \tau_p < \tau \end{cases}$$

Тогда:

$$I = I_1 + I_2 + 2\langle E_1(t)E_2(t)\rangle = I_1(t) + I_2(t) + 2\langle a_1(t)a_2(t)\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_1)\cos(\omega_0 t + \varphi_2)\rangle$$

$$= I_1(t) + I_2(t) + \langle a_1(t)a_2(t)\cos(\Delta\varphi(t))\rangle$$

- Пусть $\tau_p < \tau$. Тогда будем наблюдать все смаскированные, которые меняются во времени, т.е. динамическую интерференцию
- $\tau_p > \tau$. Чтобы усреднение по cos не дало 0, надо, чтобы выполнялось условие: $\max(\delta(\Delta\varphi(t))) < \pi$

$$\Delta\varphi(t) \sim const_{\tau_p}(t)$$

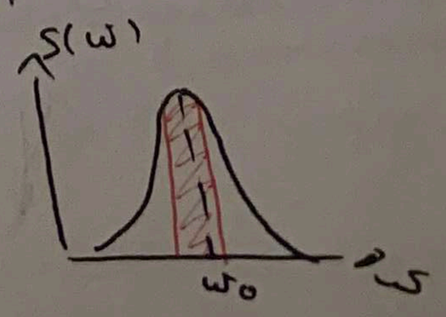
Спектральное описание

Для квазимонохроматического света $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Пусть интенсивность, пришедшая в точку P от одной щели на частоте ω_0:

Волны порождены одной и той же точкой светового поля

$$I_{1,2} = \alpha_{1,2} I_0 = \alpha_{1,2}\int_0^\infty S(\omega)\,d\omega$$



32) Интенсивность от двух щелей:

$$dI = dI_1 + dI_2 + 2\sqrt{dI_1 dI_2}\cos\omega\Delta\tau$$, $\Delta\tau$ - время задержки

$dI_0 = S(\omega)d\omega$

$dI_{1,2} = \alpha_{1,2} dI_0$

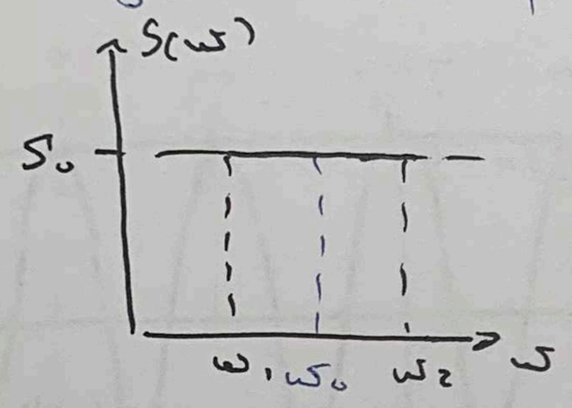
$\alpha_{1,2} = \frac{I_{1,2}}{I_0}$

$$\Rightarrow I(\Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\int_0^\infty S(\omega)\cos(\omega\Delta\tau)d\omega$$

$$\boxed{I(\Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\frac{1}{I_0}\int_0^\infty S(\omega)\cos(\omega\Delta\tau)d\omega}$$

Функция видности, время и длина когерентности

Пусть спектральная плотность интенсивности имеет прямоугольный вид. Интенсивность в этом случае:



$$I_0 = \int_0^\infty S(\omega)d\omega = S_0\Delta\omega$$, где $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $\omega_0 = \frac{\omega_2+\omega_1}{2}$

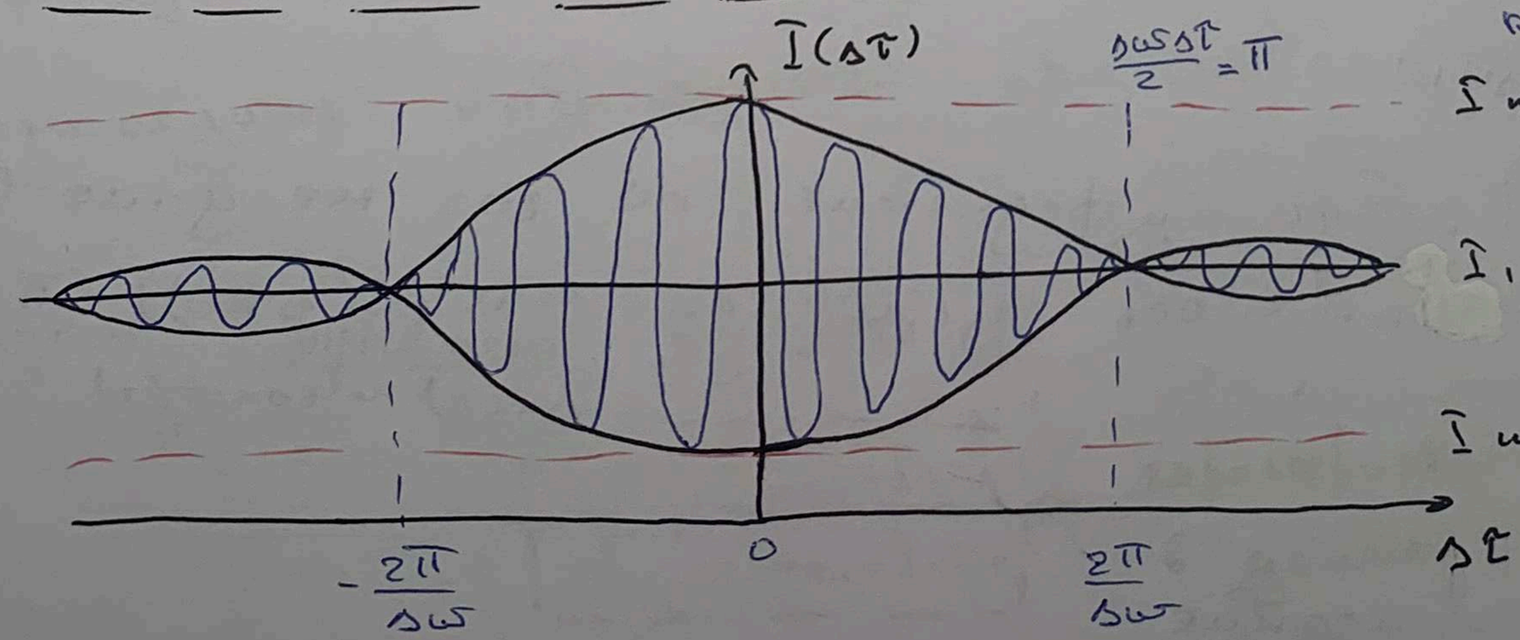
$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0\cos(\omega\Delta\tau)d\omega = \frac{I_0}{\Delta\omega}\frac{\sin(\omega_2\Delta\tau) - \sin(\omega_1\Delta\tau)}{\Delta\tau} =$$

$$= I_0\frac{2\cos(\omega_0\Delta\tau)\sin\left(\frac{\Delta\omega\Delta\tau}{2}\right)}{\Delta\omega\,\Delta\tau}$$

Тогда

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta\tau}{2}\right)\cos(\omega_0\Delta\tau)}$$

Если $\frac{\Delta\omega\Delta\tau}{2} \le \pi$, то мы будем видеть достаточно чёткую интерференционную картину



$I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$

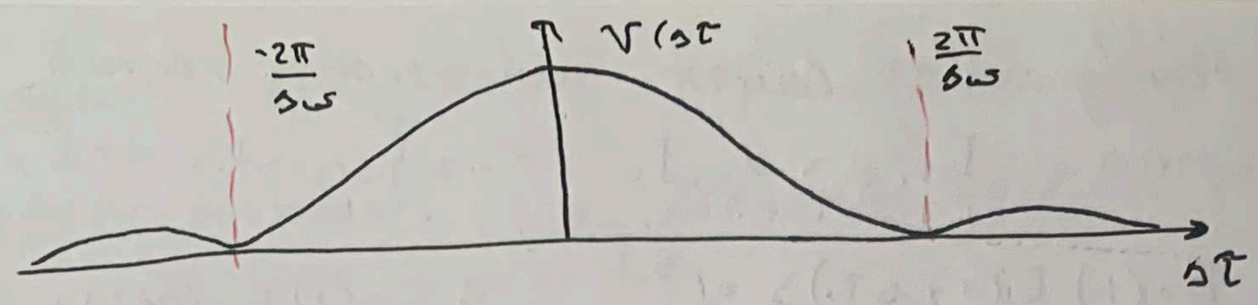
$I_1 + I_2$

$I_{min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$

В отличие от интерференции монохроматических волн, в случае квазимонохроматических волн функция видности зависит от времени задержки $\Delta\tau$

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\Delta\tau}{2}\right)\right|$$

33



Воспользуемся неравенством:

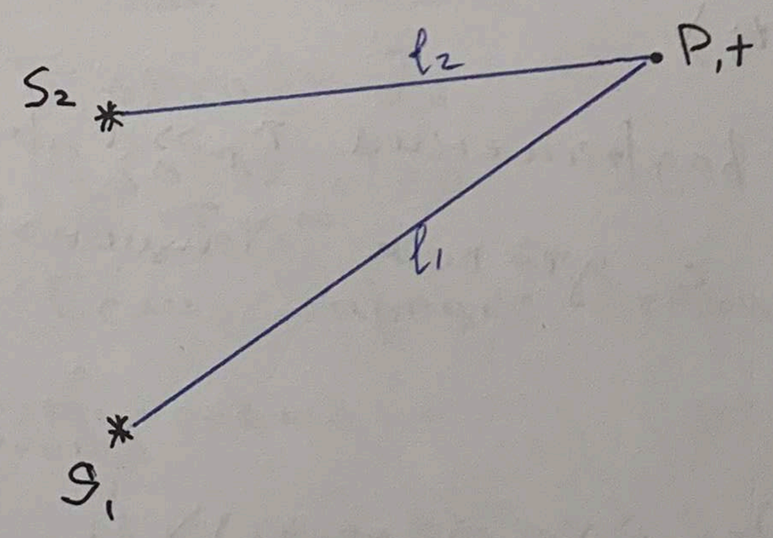
Картина чёткая: $\boxed{\Delta\tau \le \frac{2\pi}{\Delta\omega} \cong \tau_к}$ ← Время когерентности ← максимальное время задержки, при которой наблюдается интерференция

$\Delta\tau = \frac{\Delta l}{v} \Rightarrow \Delta l = v\Delta\tau \Rightarrow \boxed{\Delta l \le v\Delta\tau_к = l_к}$ ← Длина когерентности = длина цуга

Максимальный порядок (когерентности) интерференции при этом

$$\boxed{m_{max} = \frac{\tau_к}{T_0} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}\cdot\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \sim \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}}$$

(10) Интерференция квазимонохроматического света. Условие интерференции. Временное описание. Функция корреляции и её свойства. Теорема Винера - Хинчина. Понятие о Фурье - спектроскопии.



Введём напряжённость в точке расположения источника:

$$E_1(t_1) = E_1\left(t - \frac{l_1}{v}\right)$$

$$E_2(t_2) = E_2\left(t - \frac{l_2}{v}\right)$$

Время задержки:

$$\Delta\tau = t_2 - t_1 = \frac{l_1 - l_2}{v} = \frac{\Delta l}{v}$$

$$t_2 = t_1 + \Delta\tau$$

Общее уравнение двухволновой интерференции

$$I = I_1 + I_2 + 2\underbrace{\langle E_1(t_1)E_2(t_2)\rangle_{\tau_p}}_{B_{12}(t_1,t_2)}$$

$B_{12}(t_1,t_2)$ ← функция пространственно-временной корреляции - колебания в точках S_1 и S_2 в моменты времени t_1 и t_2

Если мы рассмотрим стационарное световое поле, то:

$$B_{12}(t_1,t_2) = \langle E_1(t_1)E_2(t_1+\Delta\tau)\rangle = \langle E_1(t)E_2(t+\Delta\tau)\rangle = B_{12}(\Delta\tau)$$

34 | Если интерферирующие волны порождены одной точкой светового поля, тогда $I_{1,2} = \alpha_{1,2} I_0 = \alpha_{1,2} \int_0^\infty S(\omega) d\omega \Rightarrow E_{1,2} = \sqrt{\alpha_{1,2}}\, E_0$

$$B_{12}(\Delta\tau) = \langle \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}\, E_0(t)\, E_0(t+\Delta\tau) \rangle = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_0} \underbrace{\langle E_0(t)\, E_0(t+\Delta\tau) \rangle}_{B(\Delta\tau)}$$

$B(\Delta\tau)$ ← функция временной корреляции

Тогда:

$$\boxed{I(\Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, \frac{1}{I_0} B(\Delta\tau)}$$

← Уравнение двухволновой интерференции квазимонохроматических волн при временном рассмотрении

Функция временной корреляции совокупности случайно разбросанных во времени одинаковых световых импульсов

Если источник представляет собой множество одинаково и независимо со случайными начальными фазами излучающих атомов с временем жизни $\tau \gg T$ (длиной цуга $l_ц \gg \lambda$), то для всей непрерывной стационарной волны напряжённость электрического поля можно записать в виде:

$$E_0(t) = \sum_j e_0(t - t_j)$$

При усреднении по времени разрешения $\tau_p \gg \tau$ функция временной корреляции с учётом стационарности излучения:

$$B(\Delta\tau) = \langle E_0(t)\, E_0(t+\Delta\tau) \rangle = \left\langle \sum_{j,k} e_0(t - t_j)\, e_0(t + \Delta t - t_k) \right\rangle \overset{\text{стационарность}}{=}$$

$$= \left\langle \sum_{j,k} e_0(t)\, e_0(t + \Delta\tau + t_j - t_k) \right\rangle = \frac{1}{\tau_p} \int_0^{\tau_p} \sum_{j=k} e_0(t)\, e_0(t + \Delta\tau + t_j - t_k)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\tau_p} \sum_{j,k=1}^{N_p} \int_0^{\tau} e_0(t)\, e_0(t + \Delta\tau + t_j - t_k)\, dt = \frac{1}{\tau_p} \sum_{j=k=1}^{N_p} \int_0^{\tau} e_0(t)\, e_0(t + \Delta\tau)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\tau_p} \sum_{j \neq k=1}^{N_p} \int_0^{\tau} e_0(t)\, e_0(t + \Delta\tau + t_j - t_k)\, dt \overset{\tau_p \gg \tau}{\cong} \frac{N_p}{\tau_p} \int_0^{\tau} e_0(t)\, e_0(t + \Delta\tau)\, dt =$$

$$= n\tau \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} e_0(t)\, e_0(t + \Delta\tau)\, dt = n\tau\, b(\Delta\tau)$$

35 Функция временной корреляции для цуга волны $B(\Delta\tau)$, как характеристика цуга, введена путём усреднения по длительности цуга τ.

! Как видим, функции временной корреляции для всей волны и для цуга волн, соответствующего одному акту излучения, пропорциональны. !

Теорема Винера - Хинчина

Вспомним, что для квазимонохроматического излучения

$$I(\Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\frac{1}{I_0}\int_0^\infty S(\omega)\cos(\omega\Delta\tau)\,d\omega$$

с другой стороны мы запишем, что:

$$I(\Delta\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\frac{1}{I_0}\,B(\Delta\tau)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{B(\Delta\tau) = \int_0^\infty S(\omega)\cos(\omega\Delta\tau)\,d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cos(\omega\Delta\tau)\,d\omega} \quad (1)$$

Свойства $B(\Delta\tau)$

- $B(\Delta\tau = 0) = I_0$
- $B(\Delta\tau \gg \tau_k) = 0$, $\Delta\tau \to \infty$
- Если процес стационарный, то $B(-\Delta\tau) = B(\Delta\tau)$

Действительно:

$$\langle E_0(t)\,E_0(t-\Delta\tau)\rangle = \langle E_0(t+\Delta\tau)\,E_0(t)\rangle = B(\Delta\tau)$$

- $B(\Delta\tau)$ - быстро осциллирует с характерным временем T_0 и слабо убывает с характерным временем τ.

(1) - это обратное преобразование Фурье, следовательно прямое:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\Delta\tau)\cos(\omega\Delta\tau)\,d(\Delta\tau)$$

36| В комплексной форме:

$(\cos\omega\Delta\tau + i\sin\omega\Delta\tau)$ ← интеграл равен нулю

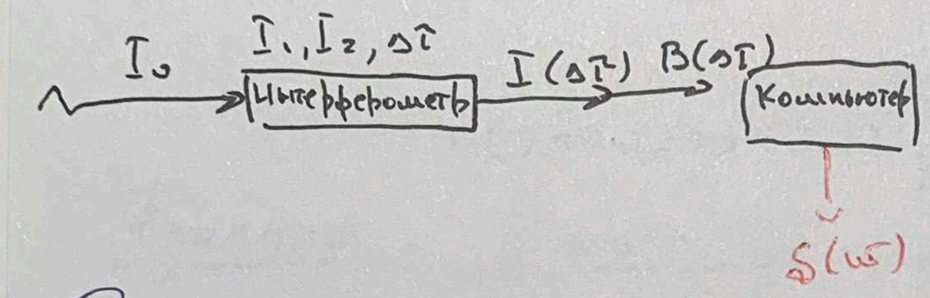
$$B(\Delta\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S'(\omega)\, e^{i\omega\Delta\tau}\, d\omega$$

$(\cos\omega\Delta\tau - i\sin(\Delta\tau\omega))$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\Delta\tau)\, e^{-i\omega\Delta\tau}\, d(\Delta\tau)$$

Понятие о Фурье-спектроскопии

Первая часть Фурье-спектрометра называется интерферометром — это оптический прибор, с помощью которого можно исходное световое возмущение в пространстве разделить на две, внести разность хода или задержку по времени, затем в какой-то области свести.



Тогда

$$B(\Delta\tau) = \frac{I(\Delta\tau) - I_1 - I_2}{2\sqrt{I_1 I_2}}\, I_0$$

Далее с помощью компьютера воспользоваться формулой Винера-Хинчина и найти спектральную плотность интенсивности.

Токо меряем мы не бесконечно, а $B(\Delta\tau)$ и $\cos(\omega\Delta\tau)$ чётные, то интеграл можно взять от 0 до ∞.

Зная свойства функции корреляции $\Delta\tau > \tau_k \cong \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, где $\Delta\omega$ - ширина спектра $\Rightarrow \Delta\omega > \frac{2\pi}{\Delta\tau}$ $\Rightarrow$ Максимальное время задержки обеспечит минимальную ширину спектра: $\Delta\omega_{min} \cong \frac{2\pi}{\Delta\tau_{max}}$

Вводят физическую величину, разрешающую способность

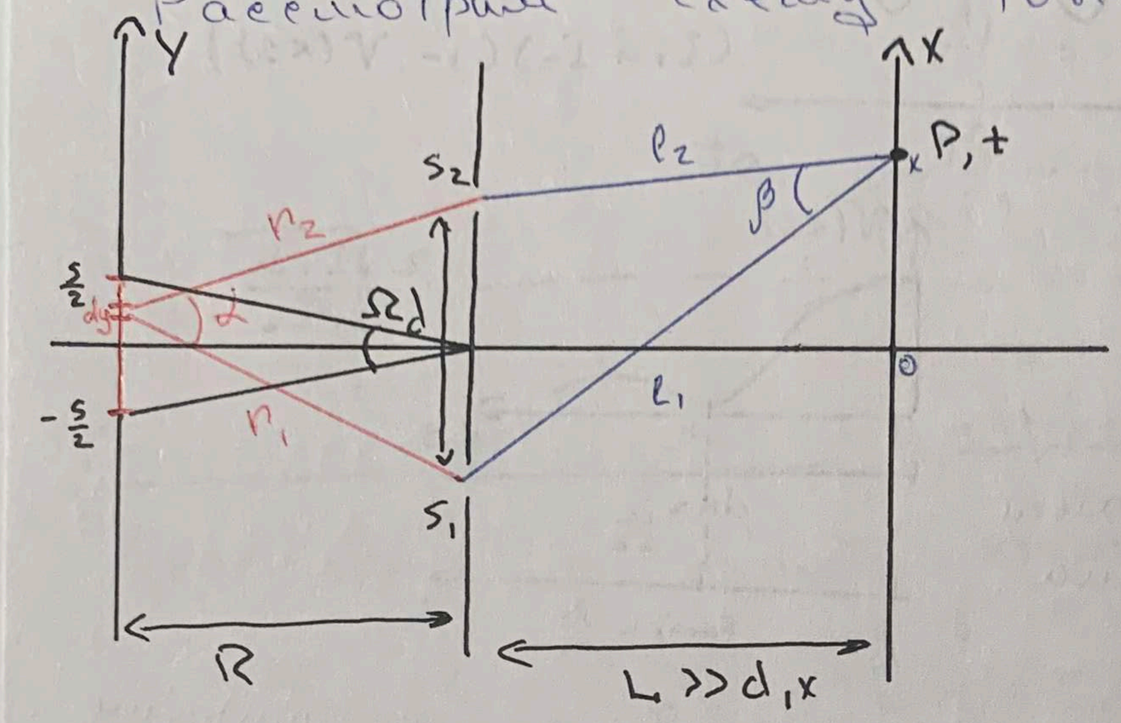
$$\boxed{R \equiv \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{min}} = \frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{\Delta\tau_{max}}{2\pi} = \frac{\Delta\tau_{max}}{T_0} = \frac{\Delta l_{max}}{\lambda}}$$

$\Delta\omega \ll \omega_0$:

$$\boxed{R = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{min}} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_{min}}}$$

37 (11) Пространственная когерентность. Уравнение интерференции в схеме Юнга. Функция видности, угол и радиус когерентности. Звёздный интерферометр Майкельсона.

Рассмотрим схему Юнга. Рассмотрим источник с некоторыми помеченными поперечными размерами. Нас будет интересовать область этого источника малой толщины dy с координатой y. Рассмотрим расстояния от dy до S_1 и S_2.



Угол сходимости – β, а угол интерференции – α

Ω – угловая апертура – угол, под которым виден источник из области расположения вторичных источников

Пусть источник представляет собой совокупность независимых источников друг от друга, но гармонических с одинаковой частотой. Пусть излучение однородно в пространстве. Возьмём элемент dy, а всё остальное закроем.

Тогда $\Delta\varphi = k(\alpha y + \beta x)$

$$\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} dI = dI_1 + dI_2 + 2\sqrt{dI_1 dI_2}\cos(\alpha y + \beta x)k$$

$dI_{1,2} = \frac{I_{1,2}}{s}dy$, $I_{1,2}$ – интенсивность интерференционной картины в случае, когда через первую и вторую щель проходят волны от всех источников

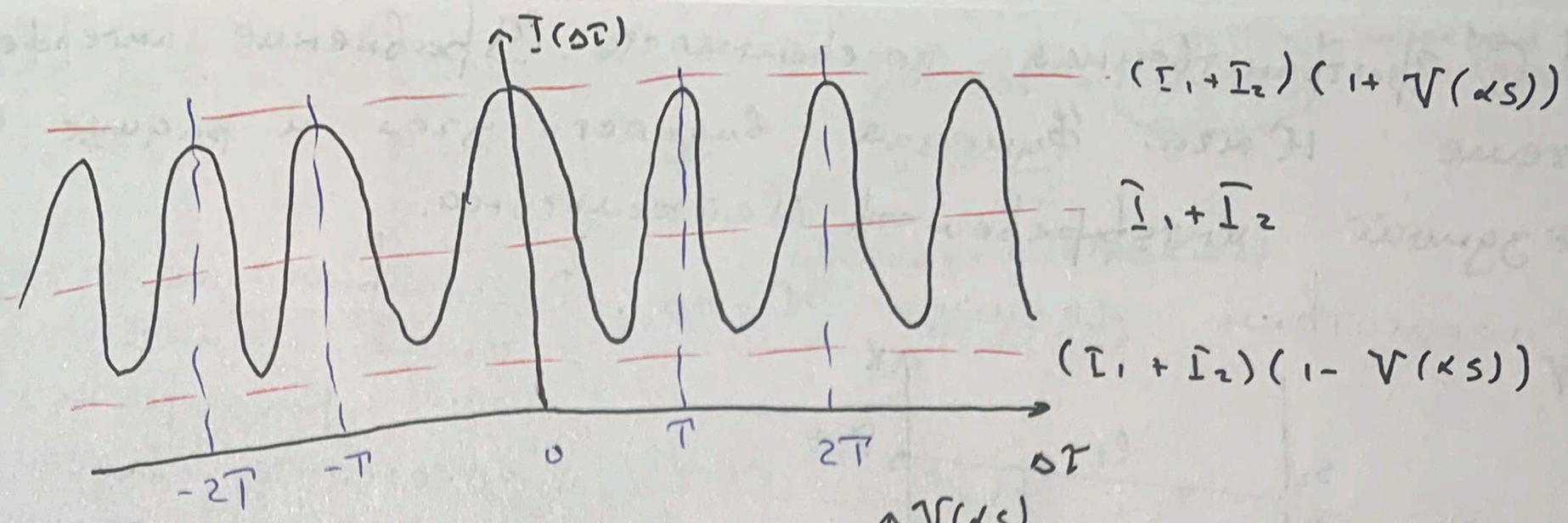
$$I = I_1 + I_2 + 2\frac{\sqrt{I_1 I_2}}{s}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\cos(k(\alpha y + \beta x))\,dy =$$

$$= I_1 + I_2 + 2\frac{\sqrt{I_1 I_2}}{s}\cdot\frac{\sin\left(k\left(\frac{\alpha s}{2} + \beta x\right)\right) - \sin\left(k\left(-\frac{\alpha s}{2} + \beta x\right)\right)}{k\alpha} =$$

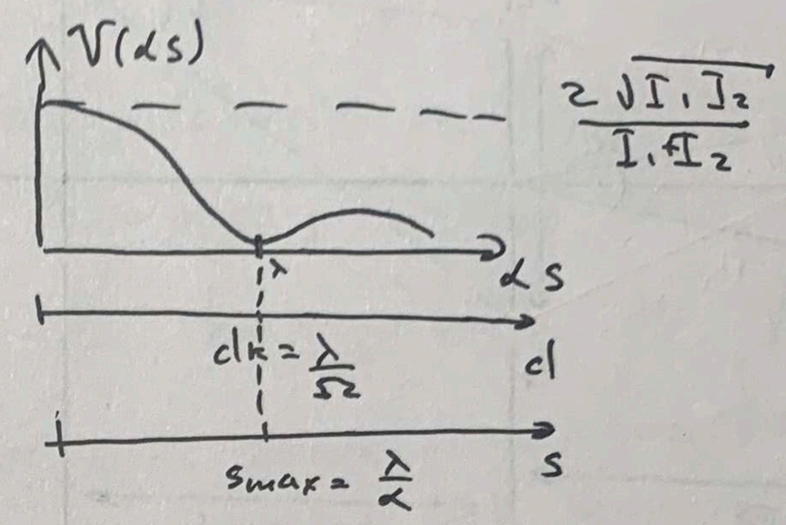
$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\frac{\cos(\omega\Delta\tau)\sin\left(k\frac{\alpha s}{2}\right)}{\frac{k\alpha s}{2}}$$

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\alpha s}{2}\right)\cos(\omega\Delta\tau)}$$

← уравнение двухволновой интерференции с участием протяжённого источника



$$V(\alpha s) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1+I_2}\left|\operatorname{sinc}\left(\frac{k\alpha s}{2}\right)\right|$$



- Если $\frac{k\alpha s}{2} < \pi$ ← будет наблюдаться чёткая картина

$$\frac{2\pi\,\alpha s}{\lambda\ 2} < \pi \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha s}{\lambda} < 1}$$

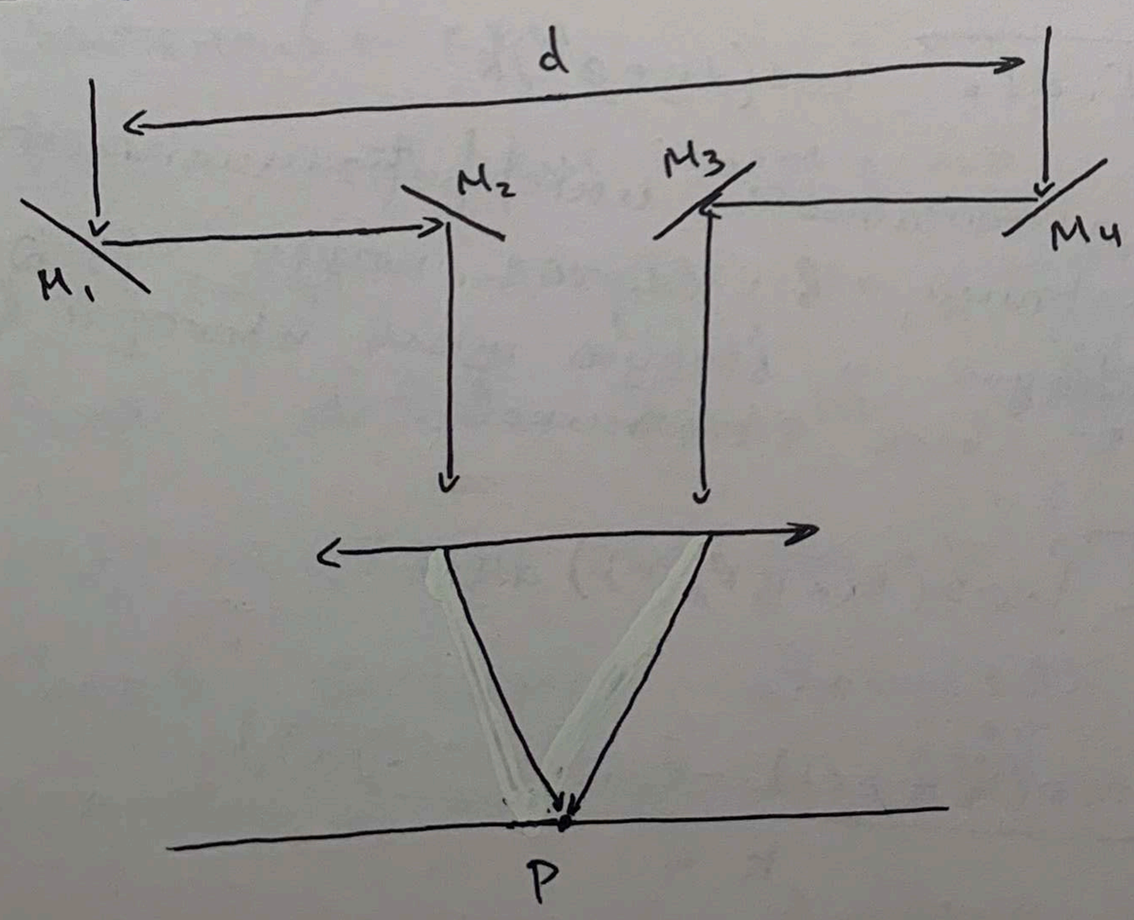
- Если $R \gg s, d$, тогда $\boxed{\frac{ds}{R\lambda} < 1} \Rightarrow$

- $d < \frac{R\lambda}{s} = \frac{\lambda}{\Omega} = d_k$ – ширина (радиус) когерентности

$d < d_k$ ← зона когерентности

- $\Omega < \frac{\lambda}{d} = \Omega_k$ – угол когерентности
- $s < \frac{R\lambda}{d} = \frac{\lambda}{\alpha} = s_{max}$
- $\alpha < \frac{\lambda}{s} = \alpha_{max}$

Звёздный интерферометр Майкельсона



Для звезды с угловым размером Ω в центре интерференционной картины ($m=0, \Delta\Gamma=0, \Delta l=0$) функция видности определяется только пространственной когерентностью:

$$V(d) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1+I_2}\left|\operatorname{sinc}\left(\frac{k\alpha s}{2}\right)\right| = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1+I_2}\left|\operatorname{sinc}\left(\frac{kd}{2}\Omega\right)\right|$$

Пусть при базе прибора d функция видности $V(d)=0$, тогда:

$$\frac{kd}{2}\Omega = \pi \Rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{kd} = \frac{\lambda}{d}$$

39 | Достоинство – d_{max} велико (до ~50м), Ω_{min} – мал (до ~0,002")

Для углового расстояния $\Delta\Omega$ между звёздами:

$$\Delta r = d\Delta s = \frac{d}{R}\Delta s = d\Delta\Omega = \frac{\lambda}{2}$$

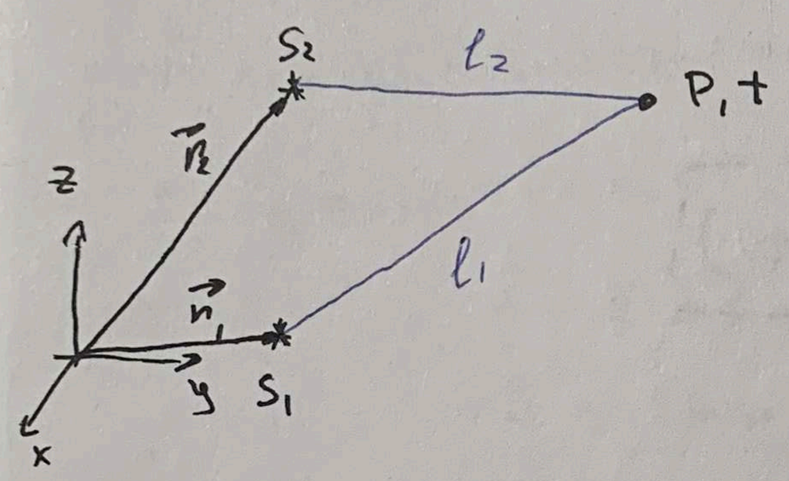
интерференции не будет

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta\Omega = \frac{\lambda}{2d}}$$

Комплексные функции корреляции и степень когерентности

Вернёмся к общей схеме двухволновой интерференции.



$$E(t) = E_1(t_1) + E_2(t_2)$$

$$t_{1,2} = t - \frac{l_{1,2}}{v}$$

$$t_2 = t_1 + \Delta\tau = t_1 + \frac{\Delta l}{v} = t_1 + \frac{l_1 - l_2}{v}$$

Будем рассматривать квазимонохроматические волны:

$$E_{1,2}(t_{1,2}) = a_{1,2}(t_{1,2})\cos(\omega_0 t_{1,2} + \varphi_{0,1,2}(t_{1,2}))$$

В комплексной форме:

$$E_{1,2}(t_{1,2}) = \mathrm{Re}(\hat{E}_{1,2}(t_{1,2}))$$

$$\hat{E}_{1,2}(t_{1,2}) = a_{1,2}(t_{1,2})\, e^{i(\omega_0 t_{1,2} + \varphi_{0,1,2}(t_{1,2}))} = \underbrace{a_{1,2}(t_{1,2})\, e^{i\varphi_{0,1,2}(t_{1,2})}}_{A_{1,2}\text{ - комплексная амплитуда}} e^{i\omega_0 t_{1,2}}$$

$$I = \langle E^2(t)\rangle_{\tau_p} = \left\langle\left(\frac{\hat{E}(t) + \hat{E}^*(t)}{2}\right)^2\right\rangle \overset{\langle\hat{E}^2(t)\rangle = 0,\ \langle\hat{E}^{*2}(t)\rangle = 0}{=} \frac{1}{2}\langle\hat{E}(t)\hat{E}^*(t)\rangle = \frac{1}{2}\langle A(t)A^*(t)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\langle(\hat{E}_1(t_1) + \hat{E}_2(t_2))(\hat{E}_1^*(t_1) + \hat{E}_2^*(t_2))\rangle = I_1 + I_2 + \frac{1}{2}\langle\hat{E}_1(t_1)\hat{E}_2^*(t_2) + \hat{E}_1^*(t_1)\hat{E}_2(t_2)\rangle =$$

$$= I_1 + I_2 + \mathrm{Re}\underbrace{\langle\hat{E}_1(t_1)\hat{E}_2^*(t_2)\rangle}_{\substack{\text{комплексная функция пространственно-временной корреляции} \\ \hat{\Gamma}_{12}(t_1, t_2)}}$$

В дальнейшем будем рассматривать стационарные непрерывные поля. Для них:

$$\hat{\Gamma}_{12}(t_1, t_2) = \langle\hat{E}_1(t_1)\hat{E}^*(t_2)\rangle = \langle\hat{E}_1(t)\hat{E}^*(t + \Delta\tau)\rangle = \hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau)$$

Подставим выражение через комплексные амплитуды:

40 | $\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau) = \langle A_1(t) A_2^*(t+\Delta\tau)\rangle e^{-i\omega_0\Delta\tau} = \Gamma_{12}(\Delta\tau)\, e^{-i(\omega_0\Delta\tau + \psi_{12}(\Delta\tau))}$

модуль $\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau)$

Если соответствующие точки светового поля S_1 и S_2 принадлежат одному фронту исходной волны, то в каждый момент времени фаза одинакова, и $\Delta\tau < \tau_k$, то $\psi_{12}(\Delta\tau) = 0$.

возникает из-за разницы в начальных фазах $\Delta f_{0_{1,2}}(t, \Delta t) = f_{0_2}(t+\Delta t) - f_{0_1}(t)$

Комплексная степень пространственно-временной когерентности $\hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau)$:

$$\hat{\gamma}_{12}(\Delta\tau) = \frac{\hat{\Gamma}_{12}(\Delta\tau)}{2\sqrt{I_1 I_2}} = \underbrace{\gamma_{12}(\Delta\tau)}_{\text{степень пространственно-временной когерентности}} e^{-i(\omega_0\Delta\tau + \psi_{12}(\Delta\tau))}$$

Интенсивность интерференционной картины:

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\gamma_{12}(\Delta\tau)\cos(\omega_0\Delta\tau + \psi_{12}(\Delta\tau))}$$

Видность:

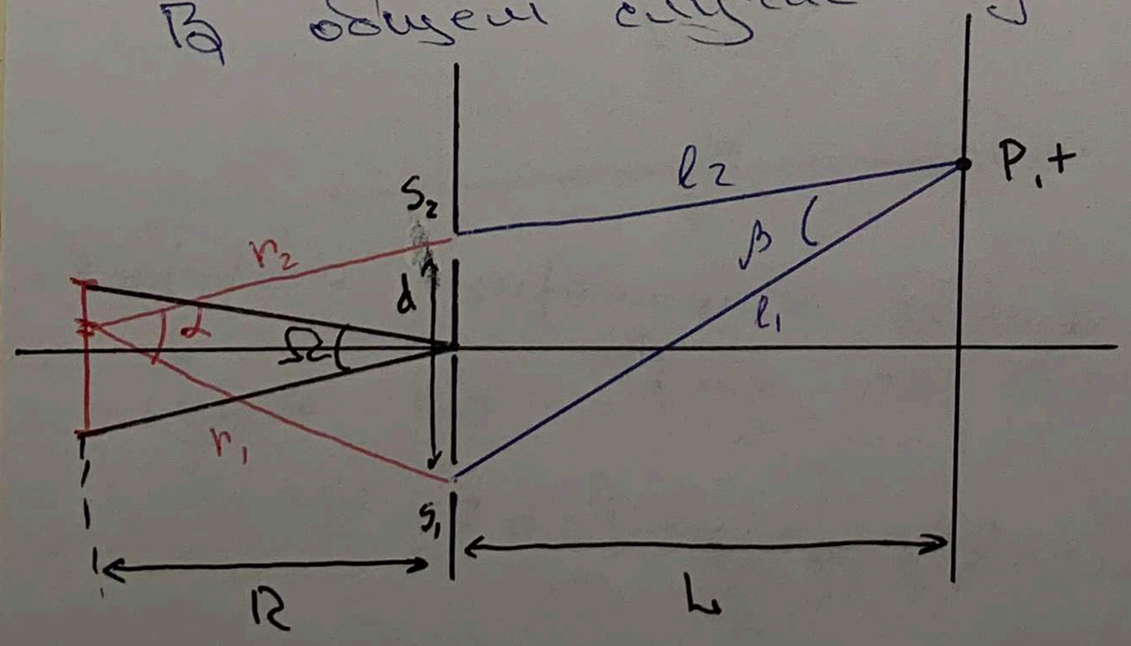
$$\boxed{V_{12}(\Delta\tau) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\,\gamma_{12}(\Delta\tau)}$$

(12) Основные схемы двухволновой интерференции. Метод деления волнового фронта и метод деления амплитуды. Характерные особенности методов. Примеры реализации методов. Интерференция в тонких плёнках.

Метод деления волнового фронта

Типичная схема реализации этого метода – схема 40 +12а.

В общем случае для протяжённого источника:



β – угол когерентности

α – угол интерференции

Ω – угловой размер источника

41 | Основные характеристики

- Углы интерференции α и сходимости β: $\delta \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$
- Локализация интерференционной картины: не локализована, т.е. если начать двигать экран ближе или дальше, то интерференция будет наблюдаться, т.е. во всей области пересечения волн наблюдается пространственное распределение энергии световой волны
- Образование интерференционной картины: пучками от одной точки протяжённого источника
- Интенсивность интерференционной картины: мала
- Увеличение размера источника (s, Ω): ухудшает видимость

$$\boxed{\Omega \leq \Omega_к = \frac{\lambda}{d}}$$

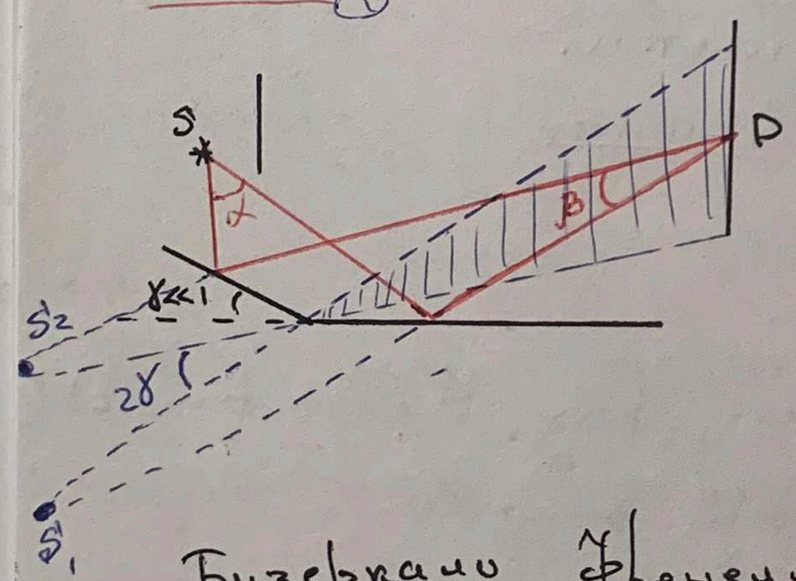
$$\boxed{s \leq s_{max} = \frac{\lambda}{\alpha}}$$

- Увеличение ширины спектра $\Delta\omega$ или $\Delta\tau(\Delta l, m)$: ухудшает видимость

$$\boxed{\Delta\tau \leq \tau_к = \frac{2\pi}{\Delta\omega}}$$

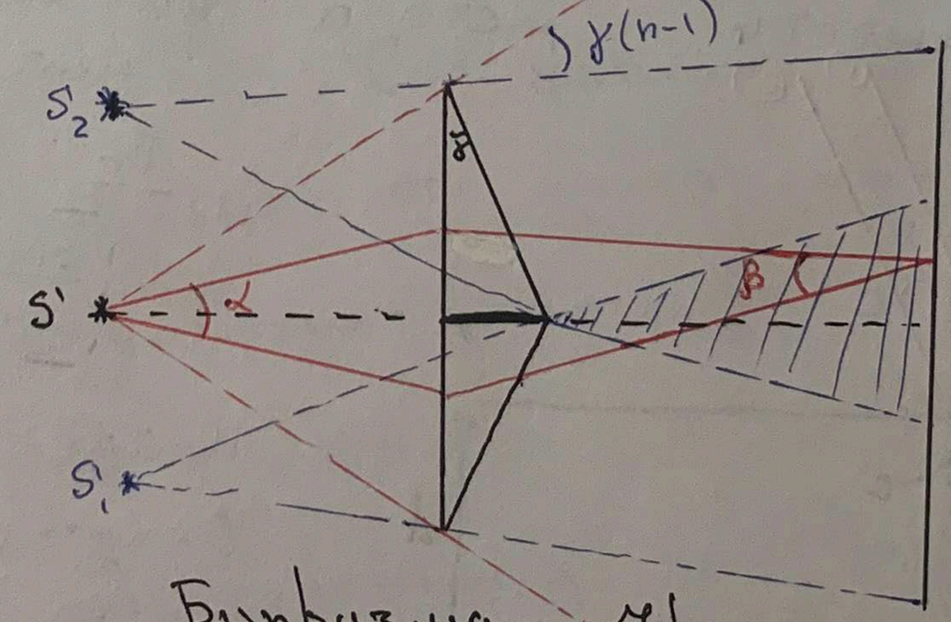
$$\boxed{\Delta l \leq l_к = \tau_к v}$$

Реализация метода



Бизеркало Френеля

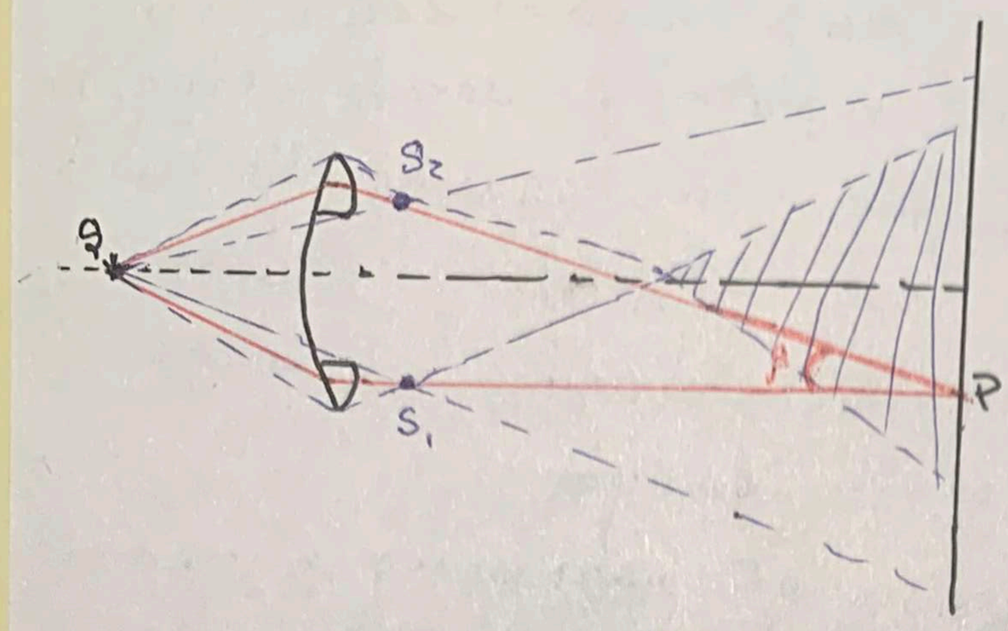
Для получения пространственно разделённых пучков используется явление отражения света. Два мнимых изображения S_1 и S_2 щелевого источника S образуются при отражение исходной световой волны от двух плоских зеркал M_1 и M_2, расположенных под малым углом γ друг к другу и являются мнимыми когерентными источниками



Бипризма Френеля

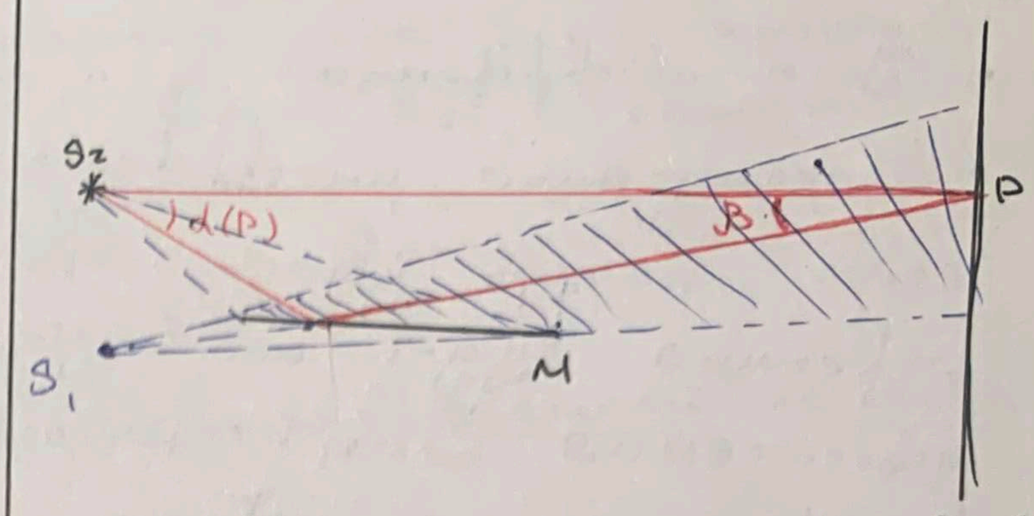
Для получения пространственно разделённых световых пучков используется явление преломления света. Две призмы с малыми преломляющими углами склеены друг с другом основаниями. Угол при вершине ~180°, а углы при основании $\gamma \approx 0°$

42| Бипризма Бийе



Выпуклая линза разрезается по диаметру и половинки слегка разводятся. Прорезь закрывается экраном.
Роль когерентных источников играют два действительных изображения реального точечного источника.

Зеркало Лойда

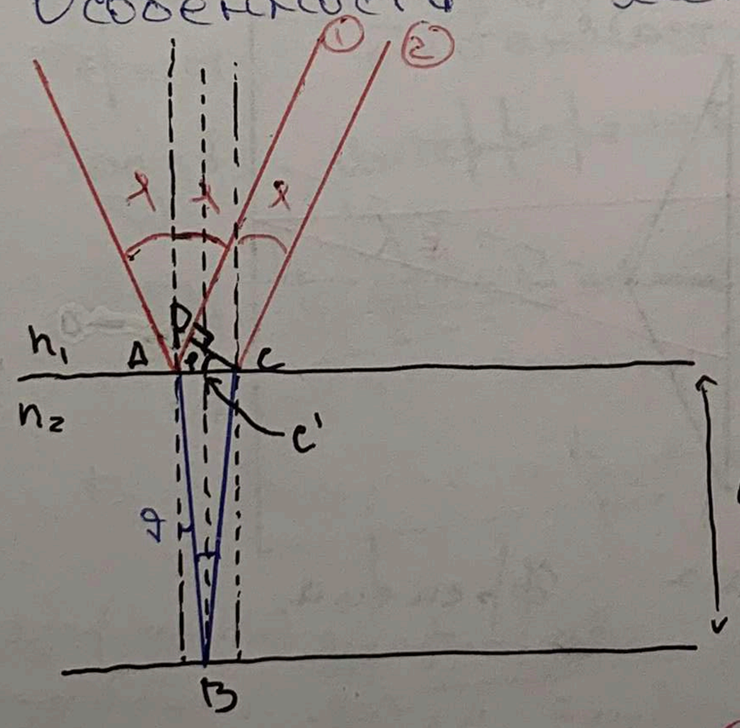


$I_{min}(\frac{d_0}{2})$

Пучок света от точечного источника S_2 падает на плоское зеркало M под углом, близким к 90°. Одно мнимое изображение S'_1 образуется при отражении от плоскости зеркала M. Интерферируют пучки от источника S'_2 и его изображения S'_1.

Метод деления амплитуды

Заключается в том, что исходная волна, падающая на поверхность раздела двух сред, раздваивается, потом их можно свести вместе и наблюдать интерференцию. Особенности метода рассмотрим в случае прозрачной пластинки.



По закону Снеллиуса

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1}}$$

Найдём разность фаз. Набег фазы $= kl$, l - путь, пройденный волной

$k = \frac{\omega}{v}$

Скорость в среде: $v = \frac{c}{n}$

в вакууме

$$\Delta l = \frac{\omega}{v} l = \frac{\omega}{c/n} l = k_0 \underbrace{nl}_{\text{оптическая длина пути}}$$

Вводят оптическую разность хода $= n\Delta l$

Найдём оптическую разность хода для этих двух волн и получим разность фаз.

43) Путь, пройденный вторым лучом внутри пластинки:

$$AB + BC = 2\frac{d}{\cos\vartheta}$$

Тогда оптическая длина пути для второй волны: $2\frac{dn_2}{\cos\vartheta}$

Для первой волны: $n_1 AD = n_1 AC \sin\varphi = n_1 2AC' \sin\varphi =$

$= n_1 2 d \operatorname{tg}\vartheta \sin\varphi$

Тогда оптическая разность хода:

$$\Delta = \left(2\frac{dn_2}{\cos\vartheta} - 2n_1 \operatorname{tg}\vartheta \sin\varphi\right) =$$

$$= 2\frac{n_2 d}{\cos\vartheta}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\sin\varphi\sin\vartheta\right) = 2\frac{n_2 d}{\cos\vartheta}(1 - \sin^2\vartheta)$$

$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\vartheta}{\sin\varphi}$

$$\boxed{\Delta = 2n_2 d\cos\vartheta} + \frac{\lambda_0}{2}$$

при отражении от более плотной среды появляется или пропадает фаза π

Чтобы наблюдать соответствующий максимум в том направлении, куда уходят ① и ②, необходимо, чтобы

$$\boxed{\Delta = m\lambda_0}$$

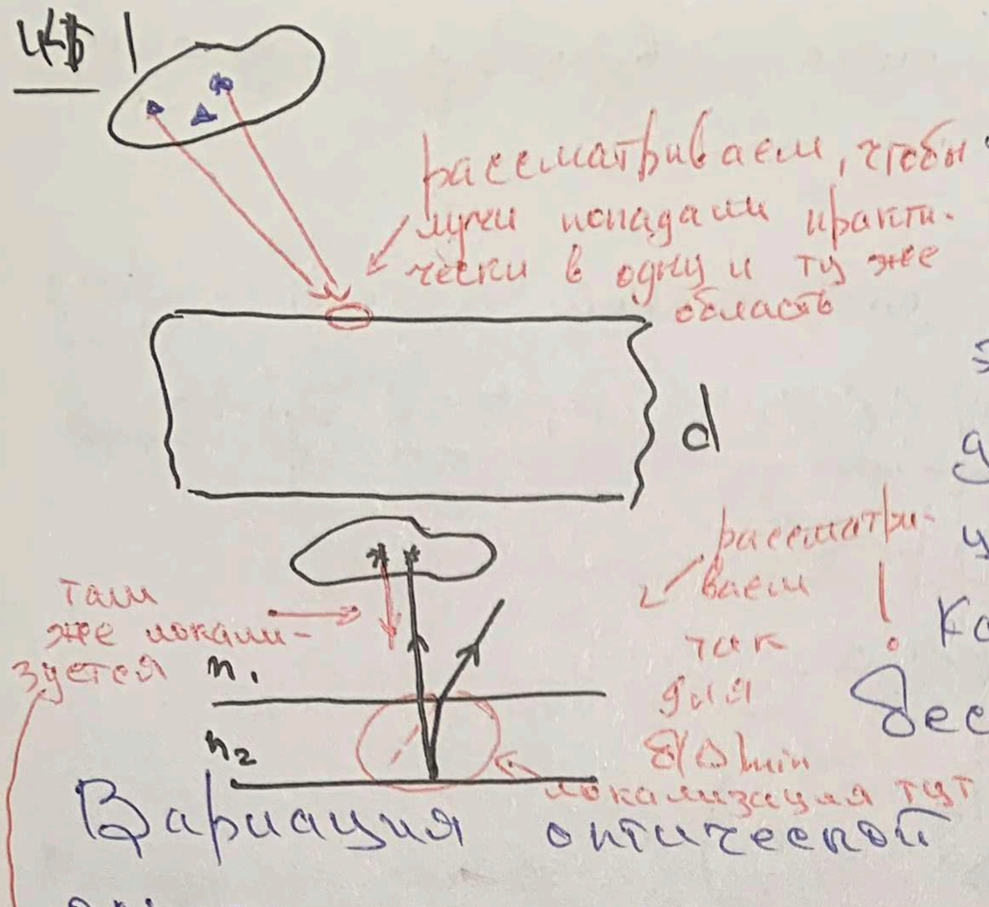
длина волны в вакууме

Чтобы наблюдать интерференцию, надо поместить линзу и наблюдать её в фокальной плоскости

- Если $d = const$, то её зависит от угла приложения или угла падения. Такие полосы называются полосами равного наклона
- Если источник является протяжённым, то будет происходить усиление видимости картины

Теперь рассмотрим случай, когда толщина пластины не выдерживается постоянной вдоль пластины. Рассмотрим ситуацию, когда пластина такая, что слабо меняется соответствующая толщина пластины. Изменения такие, что волны от протяжённого,

ЦФ



падая на поверхность пластины, оказываясь в тех областях, которым соответствует заметно разные толщины. Вариация толщины в этом случае: $\delta d \gtrsim \lambda \Rightarrow$ наблюдать на бесконечности интерференционную картины не удастся. ! Картина локализована уже не на бесконечности. !

Вариация оптической разности хода при переходе от одного точечного источника к другому!

$$\delta(\Delta) = 2n_2(\cos\vartheta\,\underbrace{\delta d}_{\approx 0} - d\sin\vartheta\,\underbrace{\delta\vartheta}_{\approx 1}) < \frac{\lambda_0}{2}$$

чтобы min

Основные характеристики

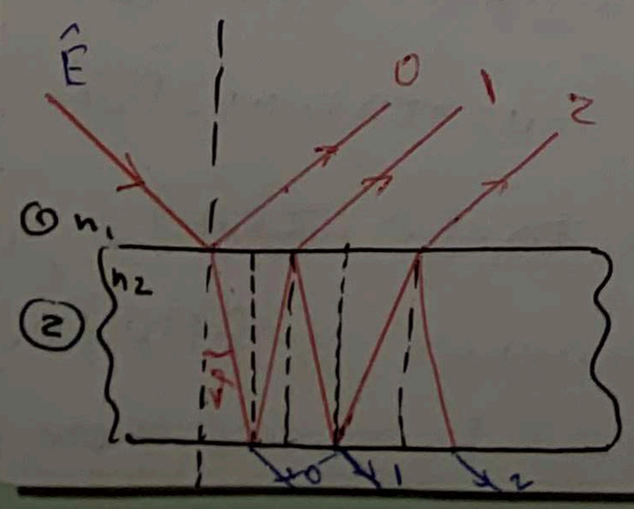
- $\alpha \cong 0$, $\beta \cong 0$ $(d \cong 0)$
- Локализована
- Образуется лучами от всех точек источника
- Интенсивность картины велика
- Увеличение размера источника не ухудшает видимость, а даже усиливается
- Увеличение ширины спектра $\Delta\omega$ или $\Delta\tau(\Delta l, m)$ ухудшает видимость:

$$\boxed{\Delta\tau \le \tau_к \cong \frac{2\pi}{\Delta\omega}}$$

$$\boxed{\Delta l \le l_к = \tau_к v}$$

(13) Многоволновая интерференция. Уравнение многоволновой интерференции - формула Эйри. Функция видности и ширина интерференционных полос. Интерферометр Фабри-Перо. Пластинка Люммера-Герке.

Рассмотрим на примере плоскопараллельной пластины.



Рассмотрим плоскую монохроматическую волну.

Количество волн, которые мы будем учитывать, зависит от коэффициента отражения.

Для прошедшей волны, набег фазы, до выхода из пластины: $\varphi = k_0 n_2 \frac{d}{\cos\vartheta} = \frac{2\pi d}{\lambda \cos\vartheta}$.

$$\hat{E}_0 = \hat{E}\, t_{12}\, e^{-i\varphi} \cdot t_{21} = \hat{E}\, e^{-i\varphi} \cdot T$$

Введём физические величины:

- Комплексный коэффициент отражения при попадании в среде ① на границу раздела со средой ②: r_{12}
- Комплексный коэффициент пропускания из ① в ②: t_{12}
- Коэффициенты отражения и пропускания по энергии:

$$\boxed{R = |r_{12}|^2 = |r_{21}|^2} \qquad \boxed{T = |t_{12} t_{21}|^2}$$

разность фаз для 0 и 1

через 0

$$\hat{E}_1 = \hat{E}\, t_{12}\, e^{-i\varphi}\, r_{21} r_{21} t_{21} \cdot e^{-i\Phi} = \hat{E}_0 R e^{-i\Phi}, \text{ где } \Phi = k_0 \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2 n_2 d \cos\vartheta = 4\frac{\pi}{\lambda} d\cos\vartheta$$

$$\hat{E}_2 = \hat{E}_1 R e^{-i\Phi} \Rightarrow \hat{E}_k = \hat{E}_{k-1} R e^{-i\Phi} = E_0 R^k e^{-ik\Phi}$$

Напряжённость поля для всей прошедшей волны:

$$\hat{E}_{пр} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{E}_0 (R e^{-i\Phi})^k = \hat{E}\, T\, e^{-i\varphi} \frac{1}{1 - R e^{-i\Phi}}$$

$$\Downarrow$$

$$I_{пр}(\Phi) = \frac{1}{2} \langle \hat{E}_{пр} \hat{E}^*_{пр} \rangle = I \frac{T^2}{(1 - R e^{-i\Phi})(1 - R e^{i\Phi})} =$$

$$= I \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \underbrace{\cos\Phi}_{1 - 2\sin^2\frac{\Phi}{2}}}$$

$$\boxed{I_{пр}(\Phi) = I \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\Phi}{2}}}$$

← Формула Эйри для интенсивности прошедших волн

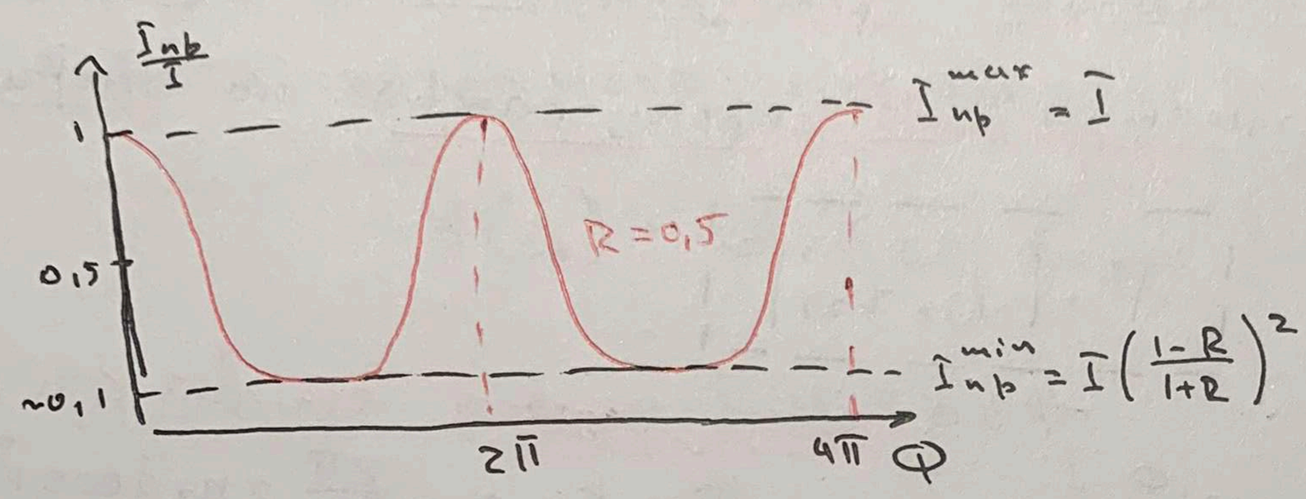
46 | Аналогично

$$\boxed{I_{отр}(\Phi) = I R \frac{(1-(R+T))^2 + 4(R+T)\sin^2\frac{\Phi}{2}}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\Phi}{2}}}$$

← Формула Эйри для отражённых волн

Рассмотрим случай, когда в пластинке нет поглощения света, тогда $R+T=1$ и $I_{пр}(\Phi) + I_{отр}(\Phi) = I$

$$I_{пр}(\Phi) = I \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\Phi}{2}} \qquad I_{отр}(\Phi) = I \frac{4R\sin^2\frac{\Phi}{2}}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\Phi}{2}}$$



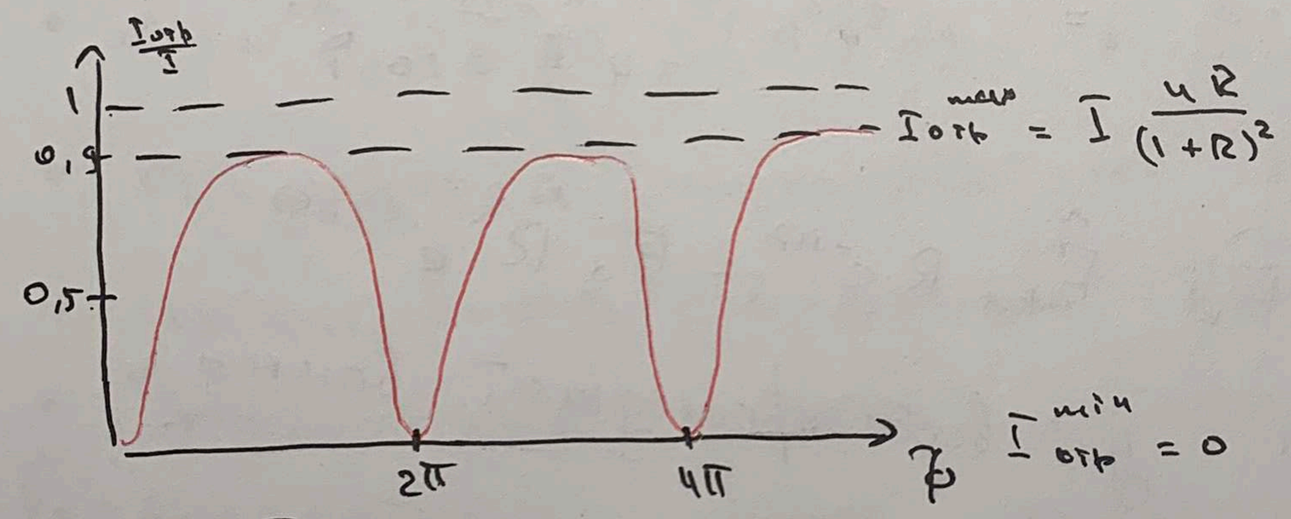
$I_{пр}^{max} = I$

$I_{пр}^{min} = I\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2$

max → $\Phi = m2\pi$

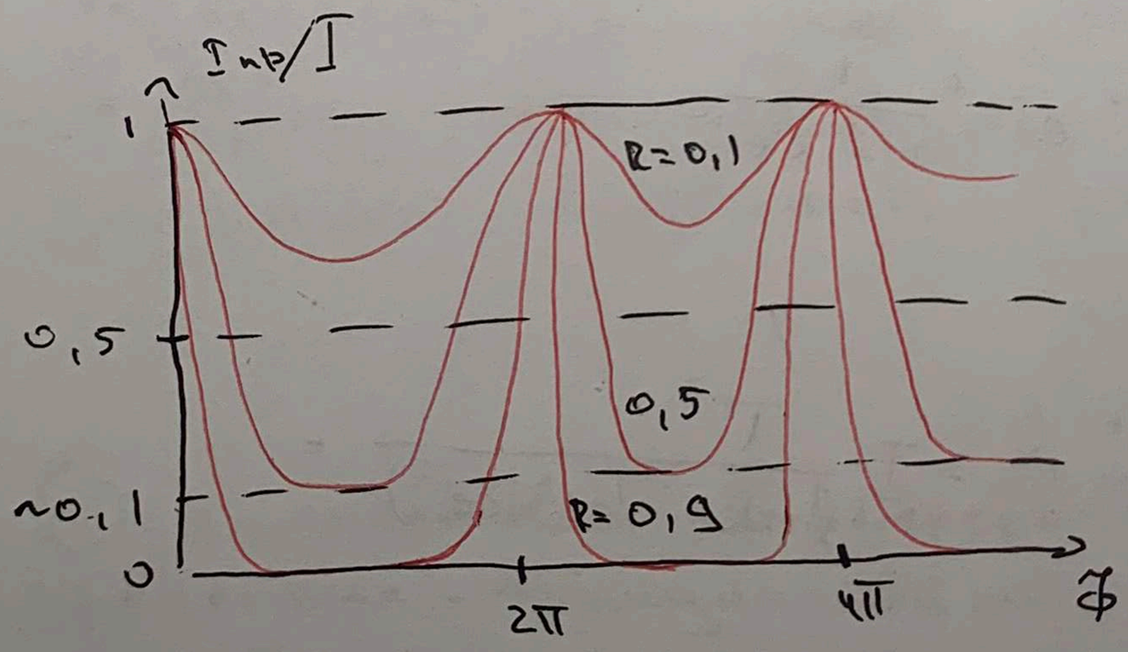
min → $\Phi = (m+\frac{1}{2})2\pi$

$m(\lambda, \vartheta) = \frac{\Phi}{2\pi} = \frac{4\pi d}{2\pi\lambda}\cos\vartheta = \frac{2d}{\lambda}\cos\vartheta$



$I_{отр}^{max} = I\frac{4R}{(1+R)^2}$

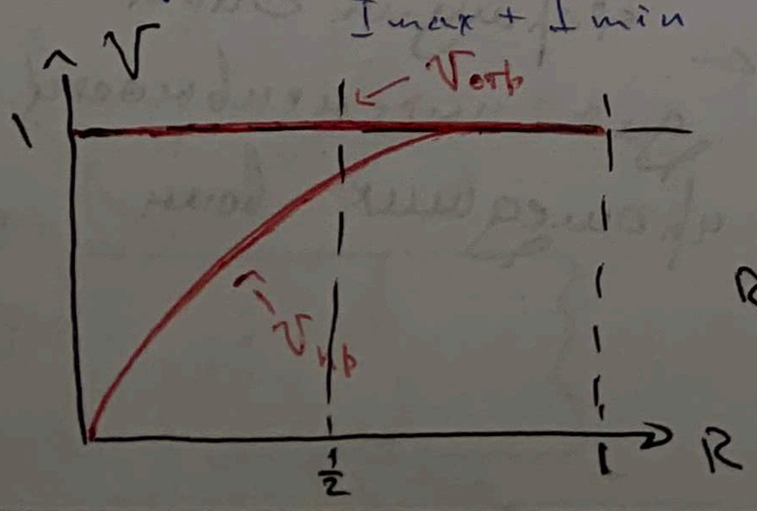
$I_{отр}^{min} = 0$



Функция видности:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \Rightarrow \boxed{V_{пр} = \frac{1-(1-R)^2/(1+R)^2}{1+(1-R)^2/(1+R)^2} = \frac{2R}{1+R^2}}$$

$$\boxed{V_{отр} = 1}$$



$R \in 0,9 \div 0,98$

47) Ширина интерференционной полосы. В качестве ширины мы введём в рассмотрение ширину на половине высоты $\delta_{пр}$, тогда

max

$$I_{пр}\left(m2\pi \pm \frac{\delta_{пр}}{2}\right) = I/2 \rightarrow$$ подставим в формулу Эйри

$$I\frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\left(\frac{\delta_{пр}}{2\cdot 2}\right)^2} = \frac{I}{2} \Rightarrow (1-R)^2 = \frac{R}{4}\delta_{пр}^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\delta_{пр} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}}$$

Если $R \to 0 \Rightarrow \delta_{пр} \to 0$

Для отражённых волн:

$$\boxed{\delta_{отр} = 2\pi - \delta_{пр}} \Rightarrow R \to 1,\ \delta_{отр} \to 2\pi$$

$$\Downarrow$$

Для отражённых волн широкие светлые полосы

Для прошедших волн яркие узкие полосы.

Введём физическую величину, которая характеризует резкость интерференционной картины:

расстояние между полосами

$$\boxed{F_{пр} = \frac{2\pi}{\delta_{пр}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}} \xrightarrow{R\to 1} \infty$$

$$\boxed{F_{отр} = \frac{2\pi}{\delta_{отр}} = \frac{2\pi}{2\pi - \delta_{пр}}} \xrightarrow{R\to 1} 1$$

Многоволновые интерферометры

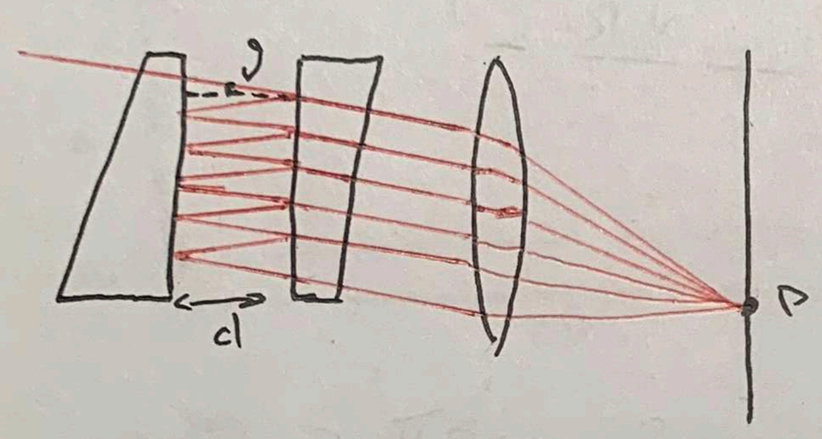
Интерферометр Фабри-Перо состоит из двух стеклянных или кварцевых пластин, расположенных на расстоянии $d = 0{,}1 \div 100$ мм. Внутренние поверхности пластин плоские, строго параллельны друг другу и покрыты полупрозрачной

Пластинка Люммера-Герке

Чтобы добиться нормального падения света и уменьшить, таким образом, потери энергии на отражение, один конец пластинки либо срезается, либо снабжается добавочной треугольной призмой.

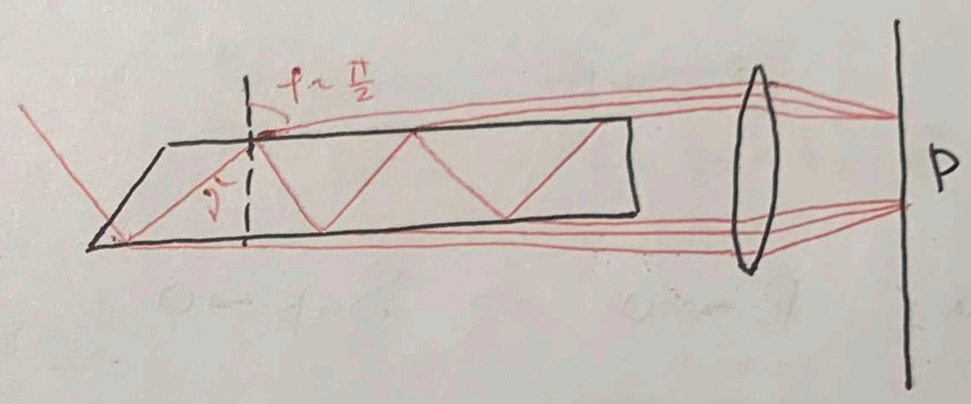
48| пленкой с высокой отражающей способностью $R \cong 0{,}9 \div 0{,}99$

Для устранения вредного влияния света, многократно отражённого от поверхности внутри пластины, внешние поверхности делают под наклоном по отношению к внутренним рабочим поверхностям. Если расстояние строго фиксировано между пластинками, то такой прибор называется эталоном Фабри-Перо. Интерференционная картина полос равного наклона — концентрические кольца



Лучи света от источника направляются на срезанный конец пластинки так, чтобы на границу раздела лучи падали под углом чуть меньшим угла полного внутреннего отражения — $\vartheta \le \vartheta_0 = \arcsin \frac{n_1}{n_2}$.

Такое падение луча обеспечивает $R \sim 1$ и примерно одинаковые интенсивности $N = 10 \div 15$ лучей, вышедших из пластинки, число которых лимитируется длиной пластинки



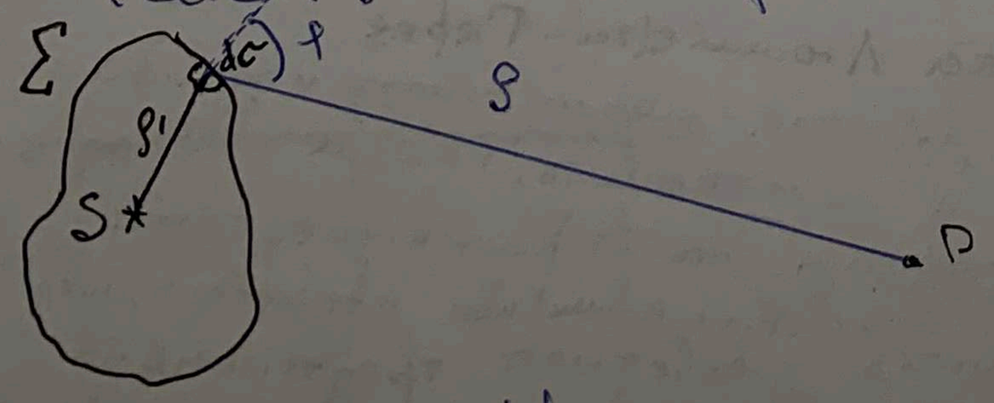
(14) Дифракция света. Принцип Гюйгенса-Френеля и дифракционный интеграл Френеля. Теорема обратимости Гельмгольца. Принцип дополнительности Babинe.

Дифракция — явление отклонения от законов геометрической оптики при распространении света в среде, обусловленное волновой теорией света.

Принцип Гюйгенса-Френеля

Любая точка волнового фронта является источником вторичных когерентных волн сферических, а результат интерференции этих волн — световое поле, которое образуется при наличие исходного фронта волны

Обобщённый вариант этого принципа сформулировал Релей. Рассмотрим точечный монохроматический источник. Согласно Релею источник можно заменить на некую светящуюся замкнутую поверхность, которая полностью охватывает источник. Любой физический элемент её является источником вторичных волн.



φ — угол дифракции

49 | Запишем:

$$E(P) = a \cdot \frac{1}{r} \cos(\omega t - \underbrace{kr}_{\text{набег фазы}} + \varphi_0)$$

В комплексной форме:

$$\hat{E}(P) = \underbrace{\frac{a}{r} e^{i\varphi_0} e^{-ikr}}_{A} e^{i\omega t} = A(P) e^{i\omega t}$$

$$A(P) = \frac{a e^{i\varphi_0} e^{-ikr}}{r} = A_0 \frac{e^{-ikr}}{r}$$

Запишем комплексную амплитуду на поверхности

$$A_\Sigma = A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}$$

Для точки P сначала запишем вклад от $d\sigma$:

$$\boxed{A(P) = \iint_\Sigma A_\Sigma \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \underbrace{k(\varphi)}_{\text{коэффициент наклона}} d\sigma}$$

← Дифракционный интеграл Френеля

Свойства $k(\varphi)$

- $[k(\varphi)] = м^{-1}$
- $k(\varphi = 0) = k_{max}$
- $k(\varphi \uparrow) = k(\varphi) \downarrow$
- $k(\varphi \geq \frac{\pi}{2}) = 0$

Интеграл можно записать в виде

$$\boxed{A(P) = \iint_\Sigma A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} k(\varphi) d\sigma}$$

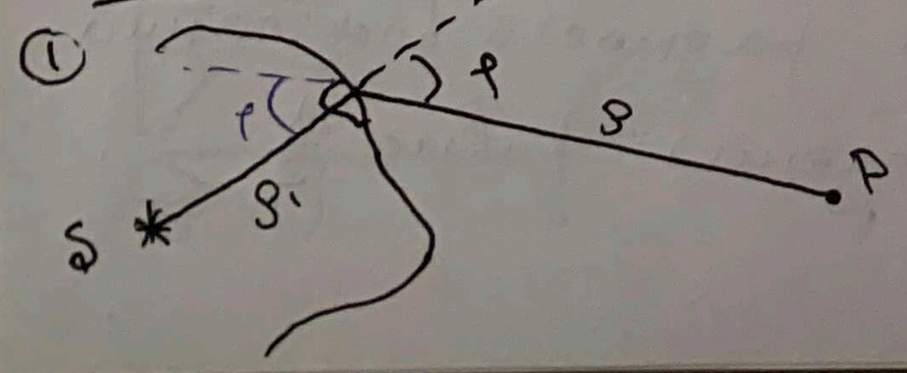
- Если источников несколько

$$A_\Sigma k(\varphi) \longleftrightarrow \sum_j A_{j\Sigma} k(\varphi_j)$$

- Если вместо светящейся поверхности использовать фронт волны:

$$A_\Sigma = const \Rightarrow A(P) = A_\Sigma \iint \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} k(\varphi) d\sigma$$

Свойства интеграла Френеля

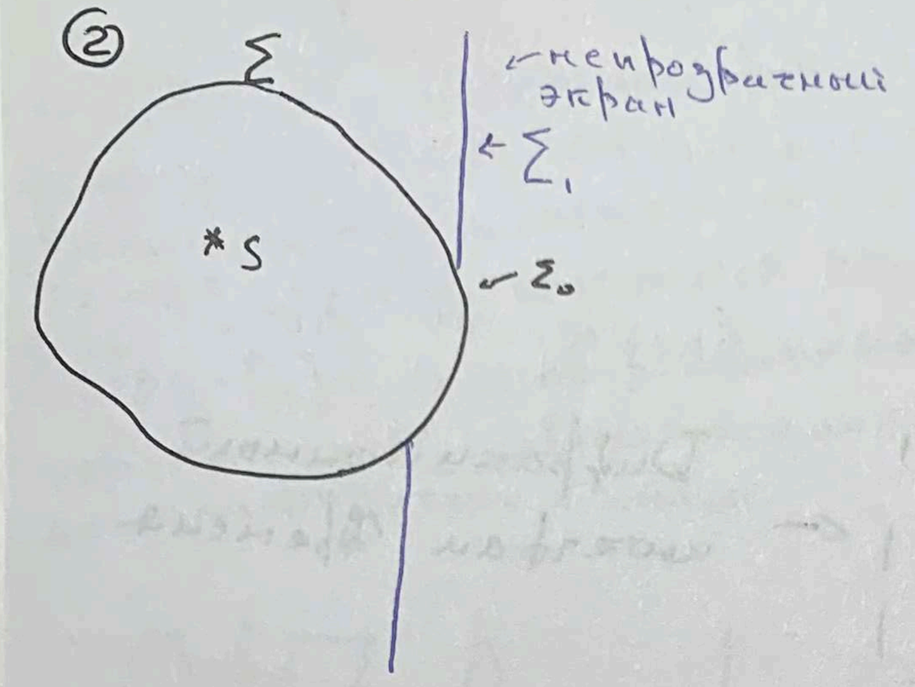


Применяем местами точки P и S, тогда ρ_1 и ρ_2 тоже поменяются местами, φ не изменится. Тем самым можно сформули-

50) Доказать теорему обратимости (взаимности) Гельмгольца:

$$\boxed{A_s(P) = A_P(S)}$$

(2)



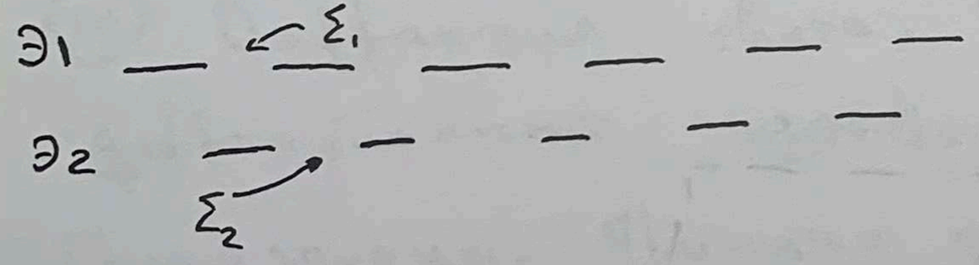
Гипотеза Френеля

Если размеры прозрачных и непрозрачных частей экрана $\gg \lambda$, то для соответствующих точек светящейся поверхности, которые находятся на расстоянии $\gg \lambda$, тогда

$$\boxed{A_{\Sigma_0} = A_{\Sigma}} \qquad \boxed{A_{\Sigma_1} = 0}$$

(3) Воспользуемся гипотезой Френеля и сформулируем принцип дополнительности Babine.

Рассмотрим два экрана.



$$\int_{\Sigma} = \int_{\Sigma_1} + \int_{\Sigma_2}$$

когда стоит только первый экран — когда только второй

$$\boxed{A_1(P) + A_2(P) = A(P)}$$

(15) Дифракция света на круглом отверстии. Метод зон Френеля. Радиус и площадь зон Френеля. Число Френеля. Амплитудная и фазовая зонные пластинки, оптимальная зонная пластинка. Условие перехода от волновой к геометрической оптике.

В основе метода зон Френеля лежит три утверждения:

1. В качестве светящейся поверхности возьмём фазовую поверхность $\Rightarrow A_{\Sigma_0} = const$

2. Выбираются так называемые зоны Френеля - область светящейся поверхности постоянная разность расстояния границ которой до точки наблюдения равна $\frac{\lambda}{2}$

5* | 3. В соответствие с принципом суперпозиции

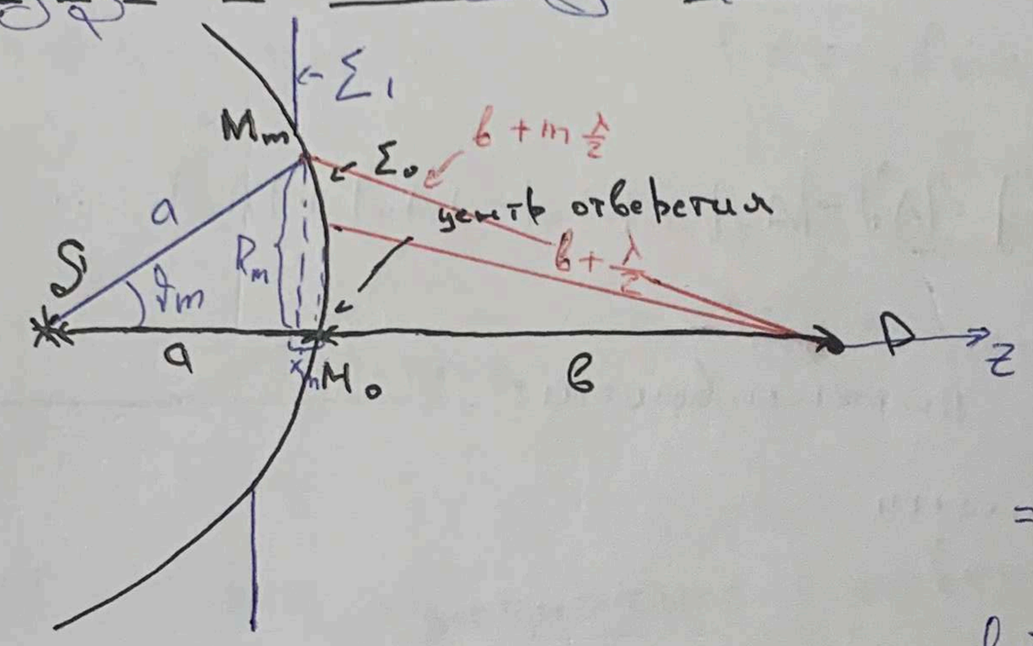
от зон Френеля, они отличаются друг от друга на фазу π

от зоны до P

$$A(P) = \sum_m A_m(\sigma_m, \vartheta_m, \rho_m) =$$

$$= \sum \underbrace{(-1)^{m-1}}_{e^{i\pi}} |A_m(\sigma_m, \vartheta_m, \rho_m)|$$

Радиус и площадь зоны Френеля



$$R_m^2 = a^2 - (a - x_m)^2$$
$$\parallel$$
$$\left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + x_m)^2$$

$$R_m^2 = \cancel{a^2} - \cancel{a^2} + 2ax_m - \cancel{x_m^2} =$$
$$= \cancel{b^2} + bm\lambda + \cancel{m^2\frac{\lambda^2}{4}} - \cancel{b^2} - 2bx_m - \cancel{x_m^2}$$

$$bm\lambda \gg m^2\frac{\lambda^2}{4} \Rightarrow m \ll \frac{4b}{\lambda}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{x_m = \frac{mb\lambda}{2(a+b)}}$$

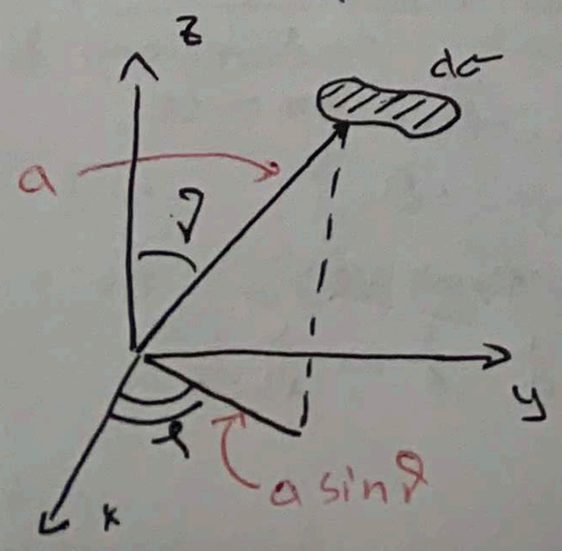
Тогда:

$$R_m^2 = 2ax_m - x_m^2 \overset{x_m \ll 2a}{=} \cancel{2}a\frac{mb\lambda}{\cancel{2}(a+b)}$$

$$\boxed{R_m = \sqrt{\frac{m\lambda ab}{a+b}}} \leftarrow$$ Радиус m-й зоны Френеля

Раз это сферический поле, то при расчёте площади зоны Френеля используем сферическую систему координат.

$$d\sigma = a^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$



$$\sigma_m = \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m}\int_0^{2\pi} a^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = a^2 2\pi(-\cos\vartheta_m + \cos\vartheta_{m-1}) =$$

$a - x_m$

$$= 2\pi a(-(\cancel{a} - x_m) + \cancel{a} - x_{m-1}) = 2\pi a\underbrace{(x_m - x_{m-1})}_{\frac{b\lambda}{2(a-b)}}.$$

$$\boxed{\sigma_m = \pi a\frac{b\lambda}{a+b}} = const(m)$$

52| Число Френеля. Условия подобия дифракции и перехода от волновой к геометрической оптике

Число Френеля - число открытых зон Френеля

$$\frac{R_m^2}{m} = \lambda \frac{ab}{a+b}$$

$\| \; m = max = N$

$\frac{r_0^2}{N}$ ← радиус отверстия $\Rightarrow$ $\boxed{N = \frac{r_0^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$

$$A(P) = \sum_m (-1)^{m-1} |A_m(\sigma_m, \varphi_m, \rho_m)| = |A_1| - |A_2| + |A_3| - |A_4| + |A_5| - \dots$$

N - чётное => наблюдаем max интенсивности

N - нечётное => min интенсивности

$A_m \xrightarrow{m\to\infty} 0$

$\frac{ab}{a+b} = l$ ← приведённое расстояние $\quad a \to \infty \Rightarrow l \to b$

$|A_{m-1}| \overset{\shortparallel}{<} |A_m|$

$$A(P) = |A_1| - \frac{|A_1| + |A_3|}{2} + |A_3| - \frac{|A_3| + |A_5|}{2} + |A_5| - \dots =$$

$$= \frac{|A_1|}{2} + \begin{cases} \frac{|A_N|}{2} & N \text{ - нечётное} \\ -\frac{|A_{N+1}|}{2} & N \text{ - чётное} \end{cases}$$

Как правило $N \gg 1$, тогда

$$A(P) \to \frac{|A_1|}{2}$$

$$I(P) = \frac{1}{2} \langle A(P) A^*(P) \rangle = \frac{I_1}{4}$$

! Тогда постановка экрана увеличивает интенсивность в точке P в 4 раза. !

$N \gg 1 \Rightarrow$ изменение в не сказывается на интенсивности, тогда начинают работать законы геометрической оптики

$$\frac{r_0^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \gg 1$$

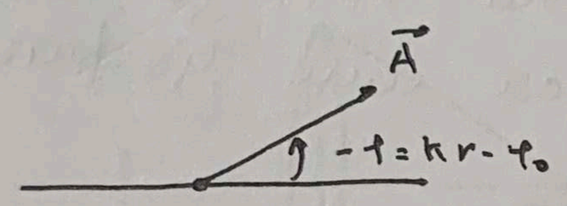
$N = const$ ← условие подобия дифракции

$$r_0 \gg \sqrt{\frac{\lambda ab}{a+b}} \qquad \lambda \ll r_0^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \gg \frac{\lambda}{r_0^2}$$

53) (16) Метод векторных диаграмм. Спираль Френеля. Дифракция Френеля на круглом отверстии и круглом экране. Пятно Пуассона.

$$A(P) = \sum_m A_m$$

Для того, чтобы упростить операцию сложения и любую операцию над комплексными амплитудами ставят в однозначное соответствие: $A \to \vec{A}$



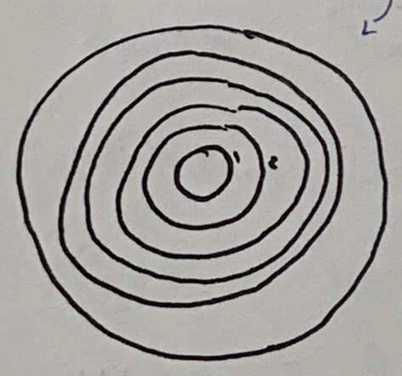
- Модуль вектора = модулю комплексной амплитуды
- Угол вектора $\vec{A}$ с осью $\to -\varphi = kr - \varphi_0$

$$A = A_0 \frac{e^{-ikr}}{r} = a_0 \frac{e^{-i(\underbrace{kr-\varphi_0}_{-\varphi})}}{r}$$

Вот такое однозначное соответствие позволяет утверждать, что произвольной линейной комбинации $\sum_j \alpha_j A_j \longrightarrow \sum_j \alpha_j \vec{A}_j$

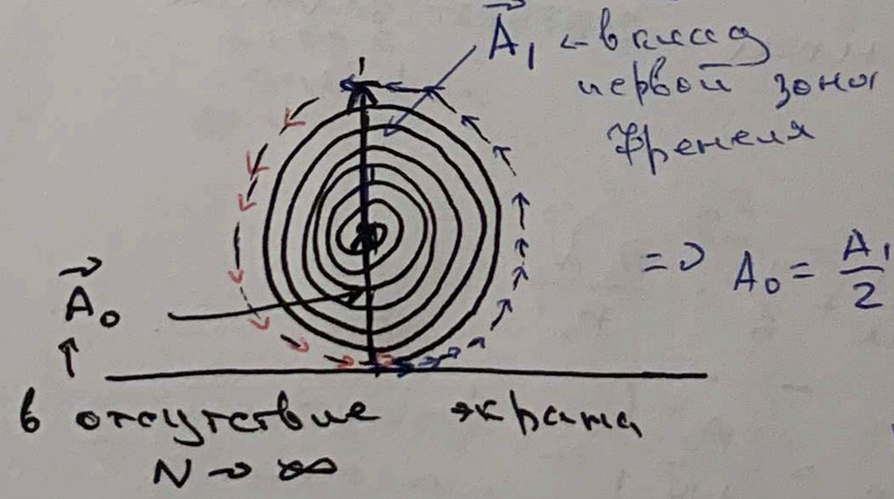
Спираль Френеля

Если посмотреть навстречу пучку света, для которого построены зоны Френеля, то выглядыть это будет следующим образом:



Для получения спирали Френеля все зоны делят на элементарные подзоны - область светящейся поверхности, принадлежащая данной зоне, постоянное расстояние которой от границы до точки наблюдения $\ll \frac{\lambda}{2}$

Сложим вклады в P для первой зоны Френеля:



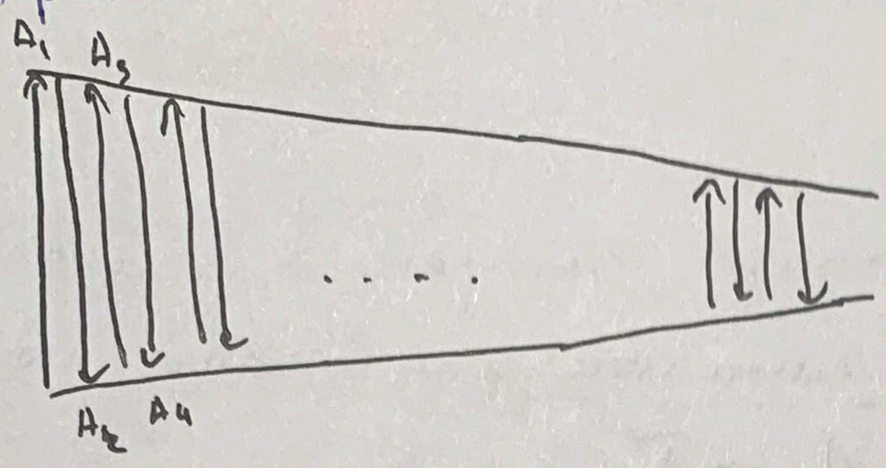
Первая и последняя подзоны Френеля отличаются набегом фазы $\frac{\lambda}{2}$, а разность фазы π. Значит вклад первой направлен слева направо, а последней справа налево.

$\Rightarrow A_0 = \frac{A_1}{2}$

Все вклады уменьшаются по абсолютному значению $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ образуется спираль.

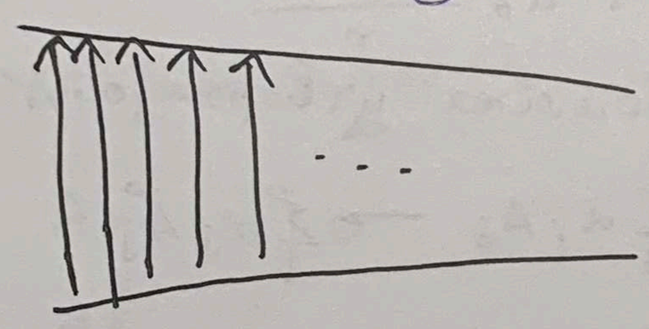
Зонные пластинки (вопрос 15)

Изобразим в векторной форме вклад от всех зон Френеля.



• Если поставить полупрозрачный экран, который будет закрывать чётные зоны.
Такой оптический объект называется зонной пластинкой, а точнее амплитудной зонной пластинкой.

• Если воздействовать таким образом на чётную или нечётную зону, что будет добавляться или убираться набег фазы π.



Такие пластинки называются фазовыми. Для амплитудной:

нечётных зон

$$A_{низ} = \sum_{k=0}^{N} |A_{2k+1}| = \frac{N}{2}\,\frac{|A_1|+|A_N|}{2} \underset{N\gg 1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow A_{низ} \cong \frac{N}{2}\,\frac{|A_1|}{2} = \frac{N}{2}|A_0|$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_{низ} \cong \frac{N^2}{4} I_0 \simeq I_{из}}$$

Для фазовой:

$$A_ф = N|A_0| \Rightarrow \boxed{I_ф = N^2 I_0}$$

Любая фазовая пластинка является фазовой, если соответствующие зоны пластинки соответствовали зонам Френеля

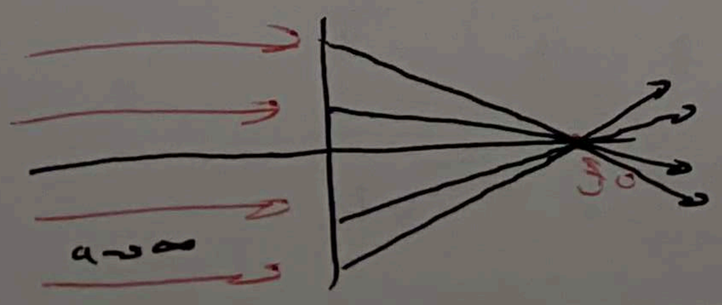
$$\frac{r_0^2}{N} = \frac{R_m^2}{m} = \frac{\lambda a b}{a+b}$$ — условие зонной пластинки

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{2N}{r_0^2} = \frac{1}{f_0}$$

$$\boxed{f_0 = \frac{r_0^2}{\lambda N}}$$ ← фокус пластинки (она ведёт себя как линза)

$$\updownarrow$$

$$R_m = \sqrt{m\,\frac{\lambda a b}{a+b}}$$



Интенсивность в f_0:

$$I_{f_0} = N^2 I_0$$

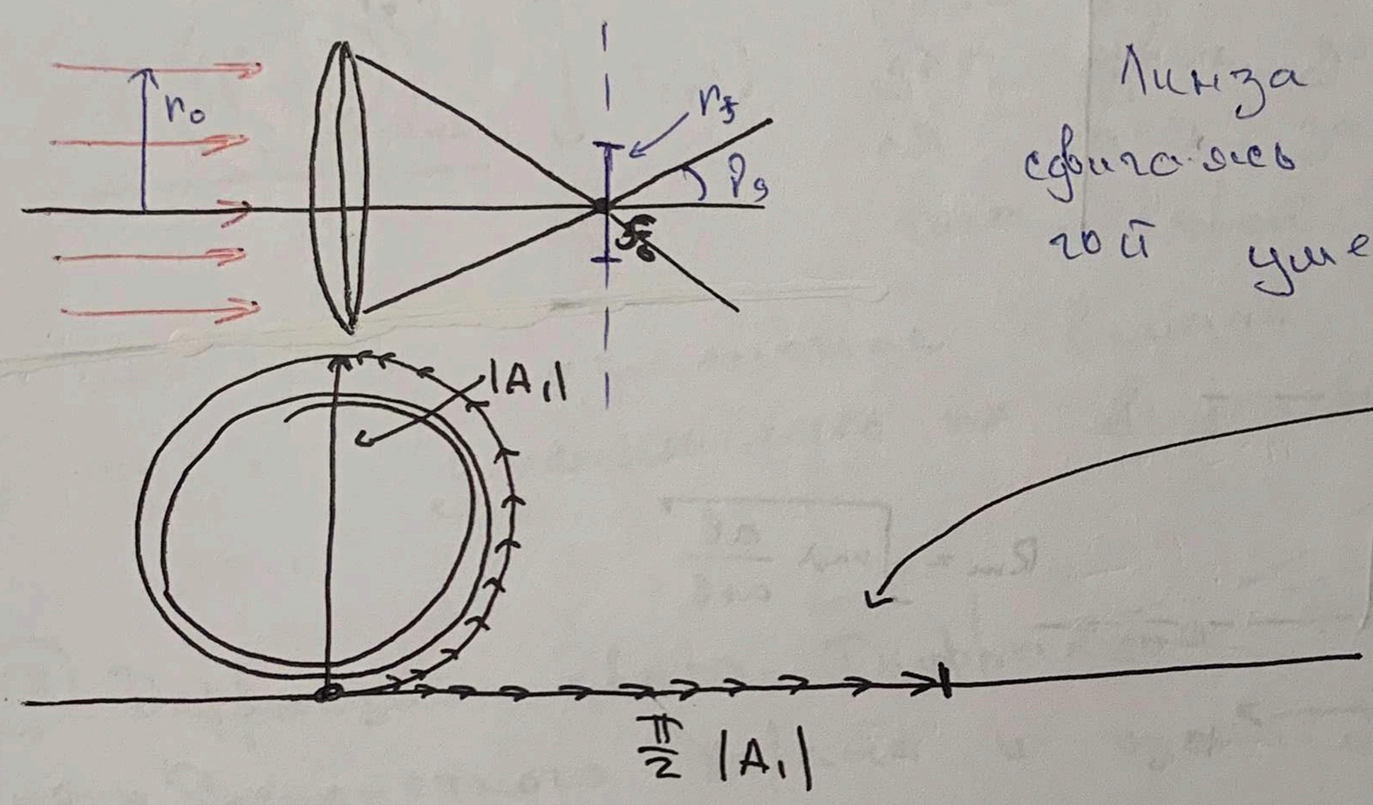
55 | Уменьшим расстояние от точки наблюдения до зонной пластинки в нечётное число раз:

$$R_m = \sqrt{m\lambda b} \underset{\substack{a\to\infty \\ b\to f_0}}{=} \sqrt{m\lambda f_0} = \sqrt{m(2k+1)\lambda \frac{f_0}{2k+1}} = \sqrt{m_k \lambda f_k}$$

Интенсивность в этом случае:

$$\boxed{I_{f_k} = \frac{I_{f_0}}{(2k+1)^2}}$$

Линза как оптимальная фазовая зонная пластинка



Линза устроена так, что сдвигаясь от одной элементарной зоны к другой уменьшается набег фазы

Другими словами каждый из вкладов: $\frac{\pi}{2}|A_m|$

$$\boxed{I_f = \frac{\pi^2}{4} N^2 I_0}$$

Плотность энергии электромагнитной волны не может быть бесконечным => пучок в области расположения фокальной плоскости имеет конечные размеры. Пусть пучок, который падает однороден в пространстве =>

$$\Rightarrow \underbrace{I_0 \pi r_0^2}_{\text{поток энергии до линзы}} = I_f \pi r_f^2 \Rightarrow r_f = r_0\sqrt{\frac{I_0}{I_f}} = r_0\sqrt{\frac{\cancel{I_0}}{\frac{\pi^2}{4}N^2\cancel{I_0}}}$$

$$r_f = 2r_0\frac{1}{\pi N}$$

$$\frac{r_0^2}{N} = \frac{R_m^2}{m} = \lambda f \Rightarrow N = \frac{r_0^2}{\lambda f} \Rightarrow \boxed{r_f = \frac{2\lambda f}{\pi \underset{\frac{d_0}{2}}{r_0}} = \frac{4f}{\pi d_0}\lambda}$$

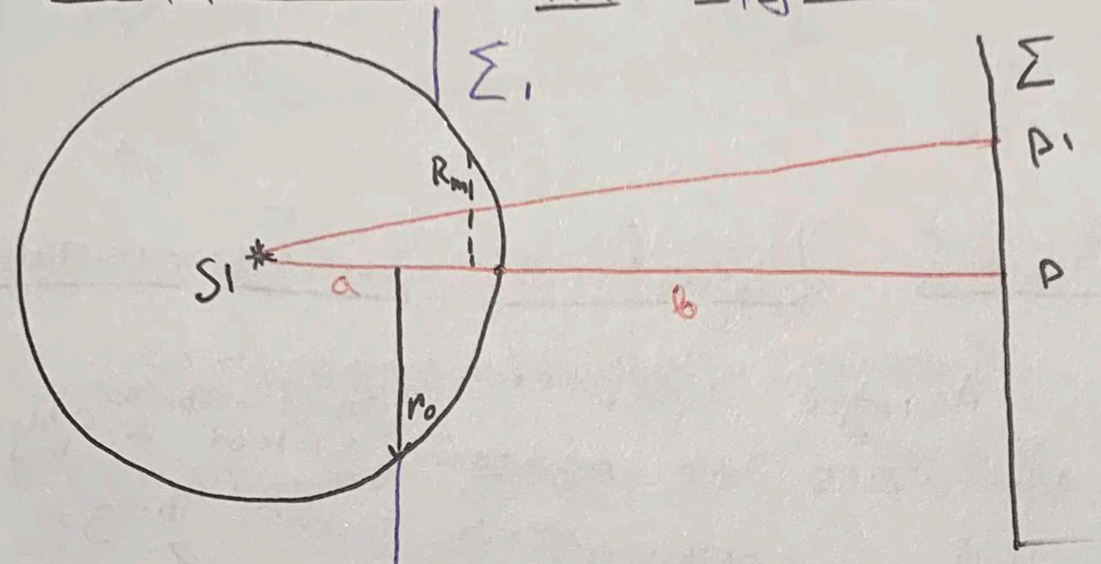
заменим $d_0 \to d$, d - диаметр линзы, для характеристики самой линзы

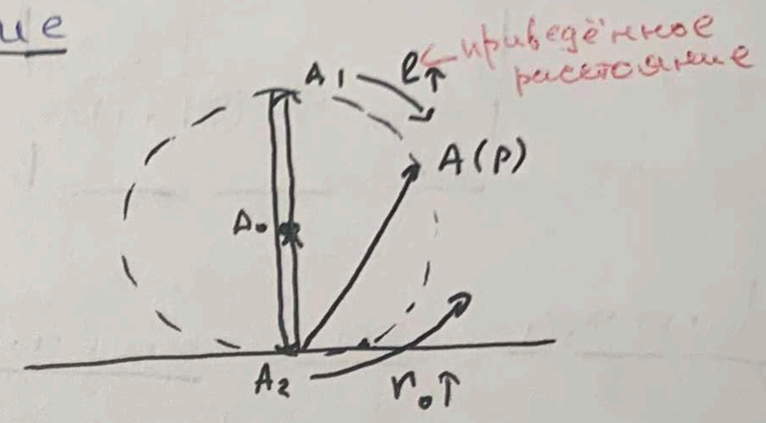
$$\frac{4f}{\pi d_0}\lambda \geq \frac{4}{\pi}\frac{f\lambda}{d} \gtrsim \lambda$$

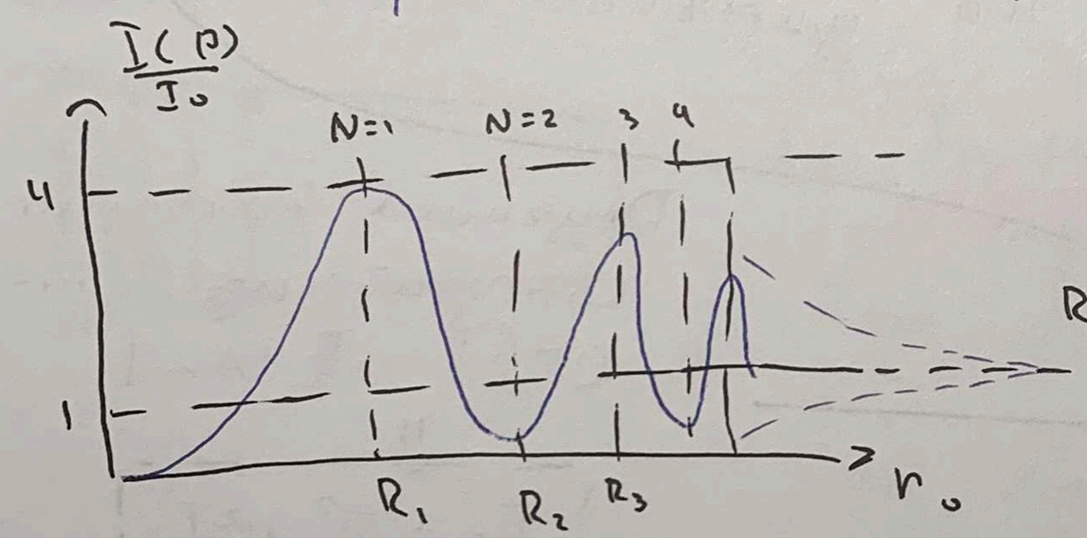
56 | Углом, который задаёт степень расхождения исходного пучка, который проходит через линзу

$$\boxed{\vartheta_g \simeq \frac{r_0}{f} = \frac{2\lambda f}{f\pi r_f} = \frac{4}{\pi}\frac{\lambda}{d_f} \sim \frac{\lambda}{d_f}}$$

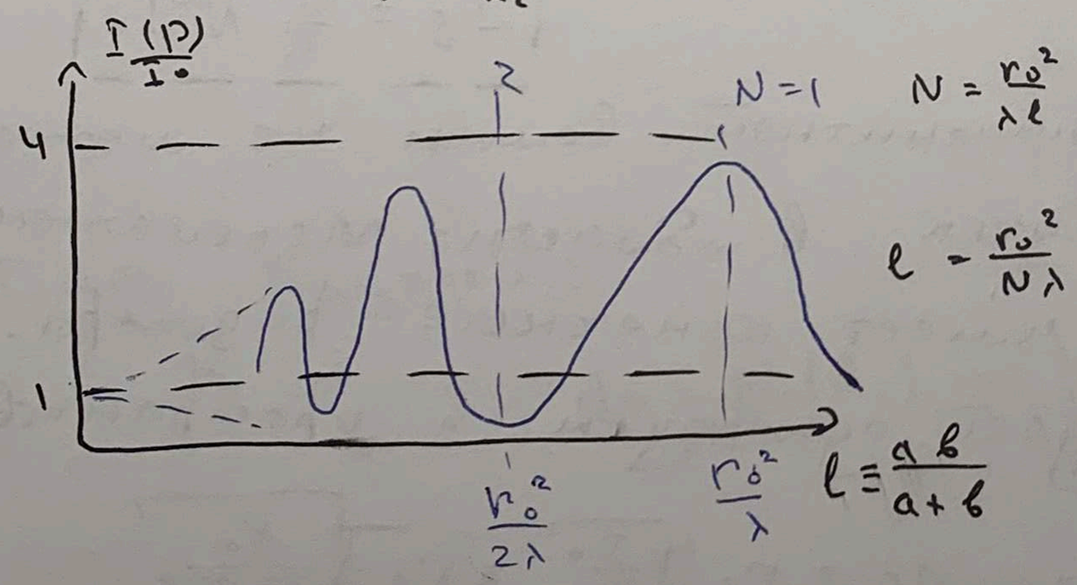
Дифракция на круглом отверстие







$$R_m = \sqrt{m\lambda\frac{ab}{a+b}}$$

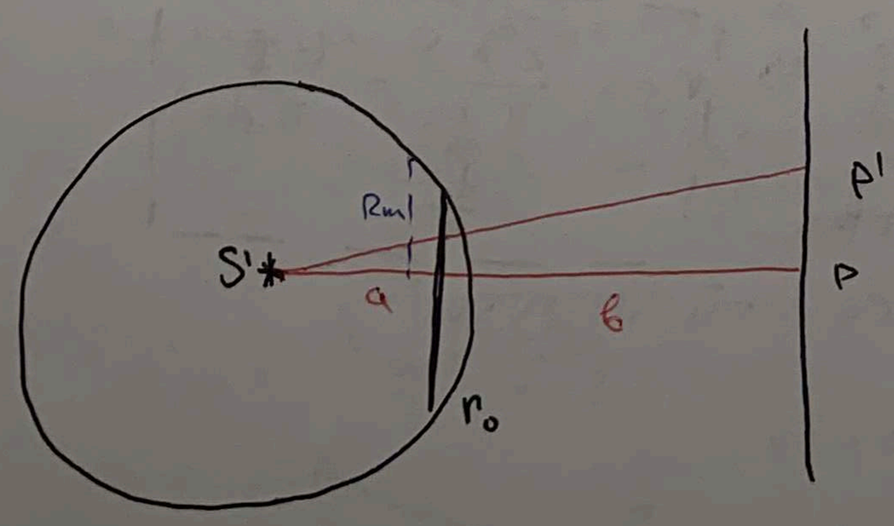


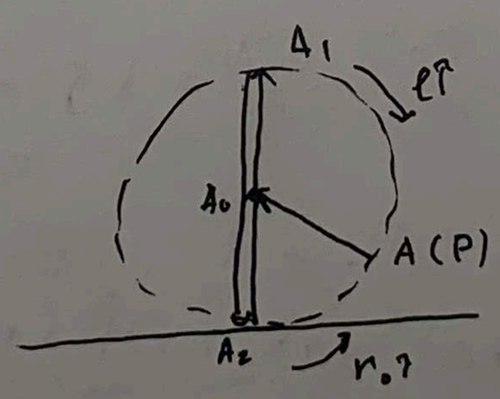
$$N = \frac{r_0^2}{\lambda\ell}$$

$$\ell = \frac{r_0^2}{N\lambda}$$

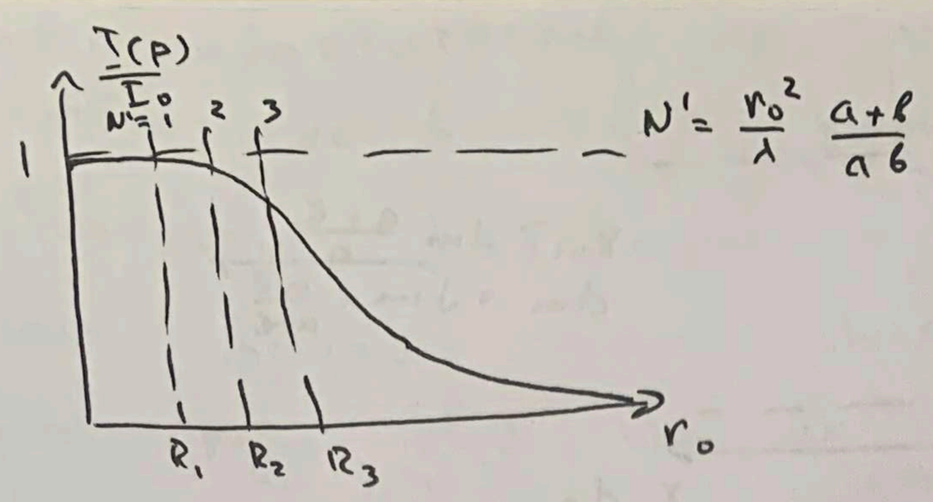
$$\ell \equiv \frac{ab}{a+b}$$

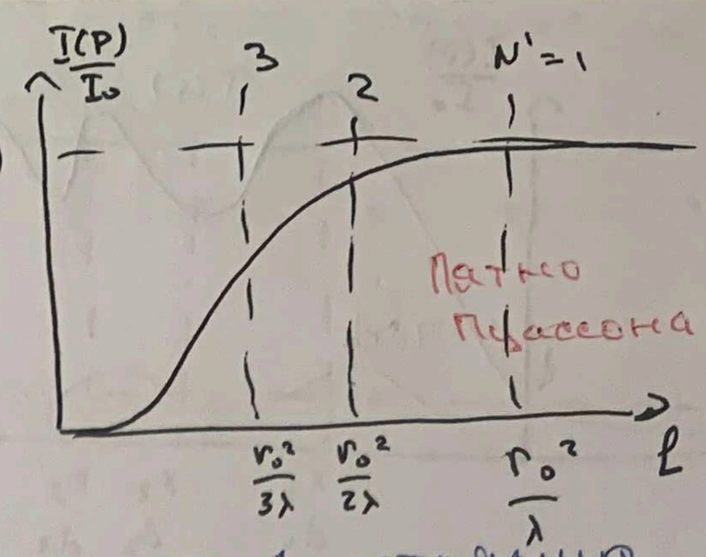
Пятно Пуассона (дифракция на круглом экране)



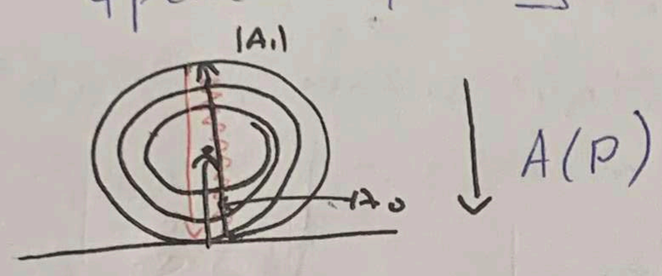


57



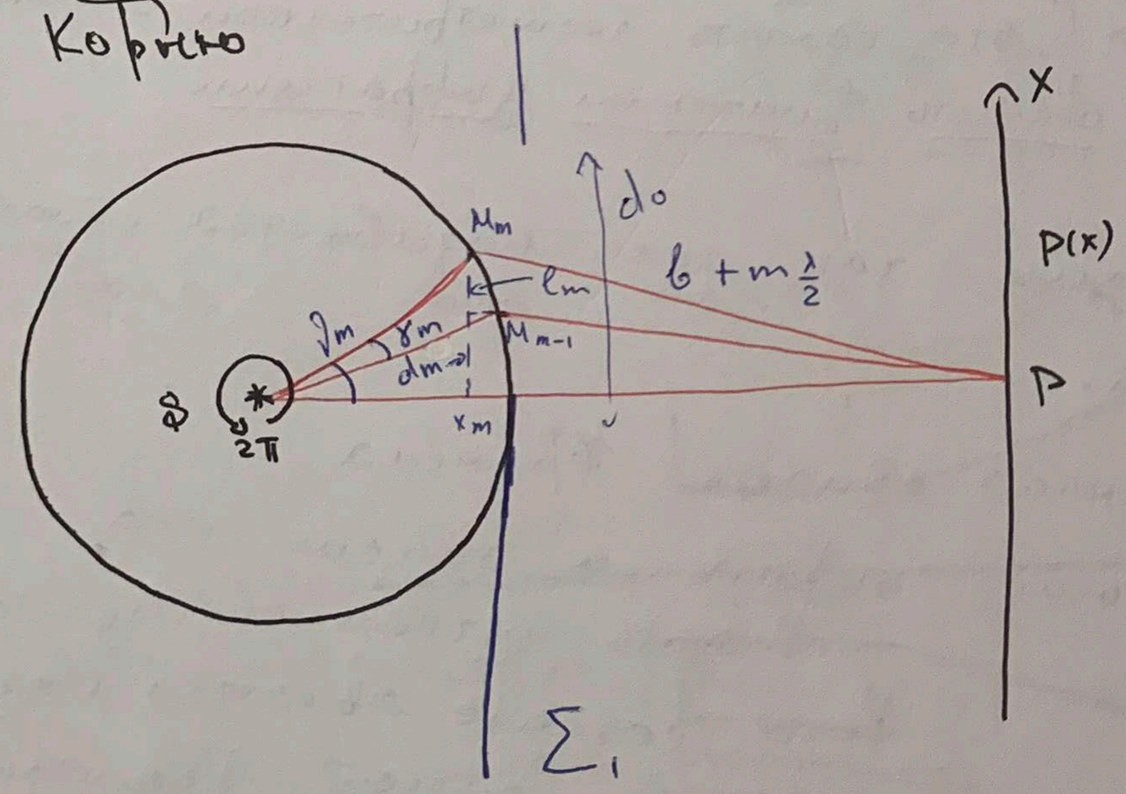


Представим себе, что находимся на расстоянии на, котором радиус диска совпадает с радиусом зоны Френеля, тогда



Если сдвинуть диск с оси, то произойдёт сдвиг зоны Френеля и приоткроется часть зоны Френеля => закроется часть второй зоны и вклад уменьшится => изменение вклада увеличится, амплитуда уменьшилась => в центре экрана было светлое пятно

(17) Дифракция света. Дифракция Френеля на крае полубесконечного экрана и щели. Зоны Шустера. Спираль Корню



Разбиваем на зоны, не совпадающиеся зонами Френеля — лунки

$$d_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$$

при $a \to \infty$ => плоская полоса — зона Шустера

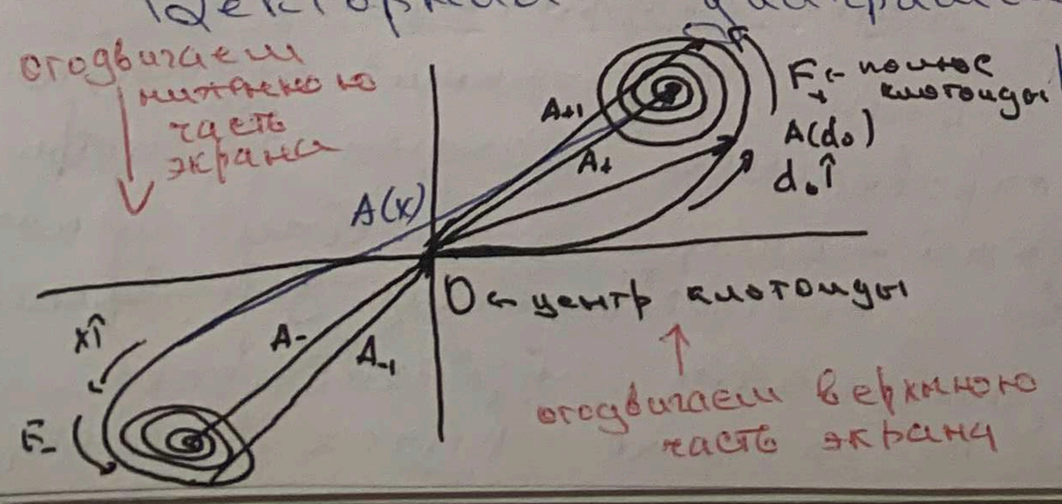
Площадь лунки:

$$\sigma_m = \frac{\cancel{4}^{2}\pi a^2}{\cancel{2\pi}}\gamma_m = 2a^2\frac{l_m}{a} = 2a l_m \cong$$

$$\cong 2a(d_m - d_{m-1}) \sim (\sqrt{m} - \sqrt{m-1}) =$$

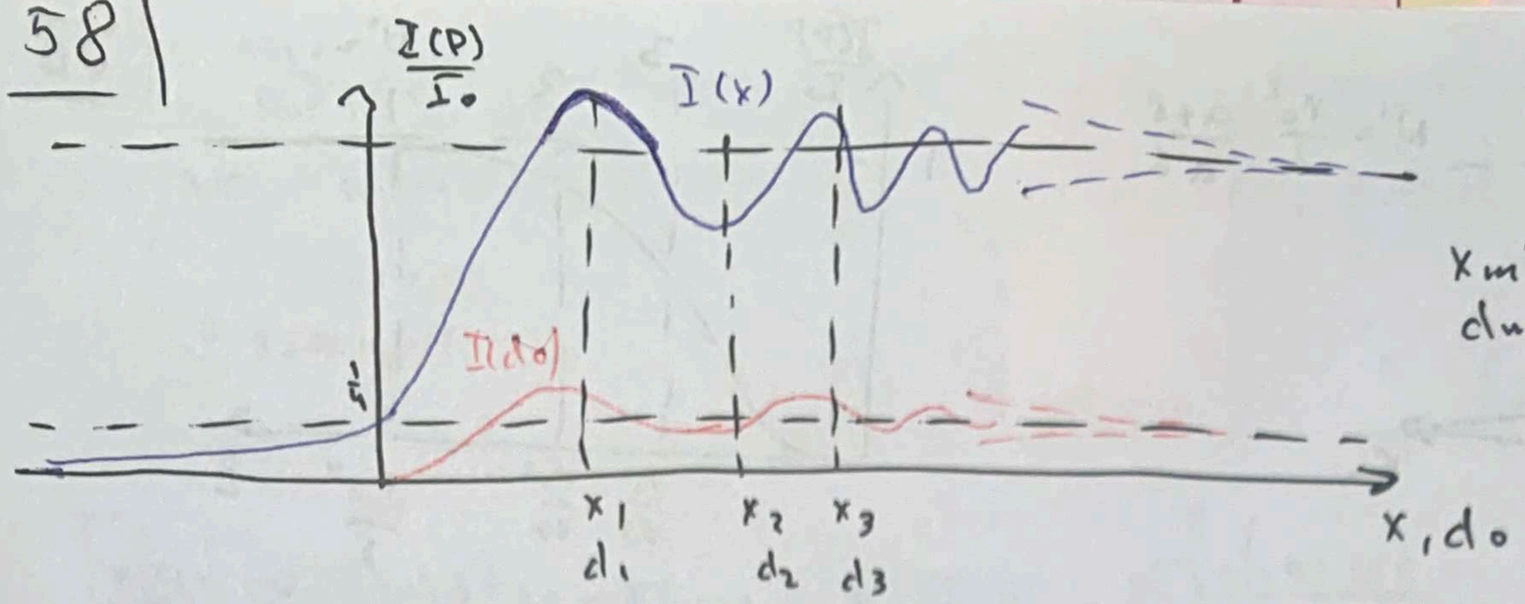
$$= \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}$$

Векторная диаграмма выглядит так



Когда первая лунка будет пройдена мы окажемся наверху спирали, то вклад от элементарной лунки будет направлен в обратную сторону

58



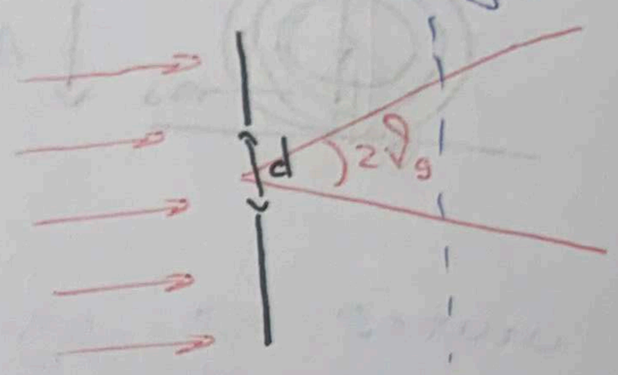
$x_m \cong d_m \frac{a+b}{a}$

$d_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$

(19) Ближняя и дальняя зоны дифракции. Приближения Френеля и Фраунгофера. Дифракционная длина пучка. Дифракционная расходимость пучка в дальней зоне.

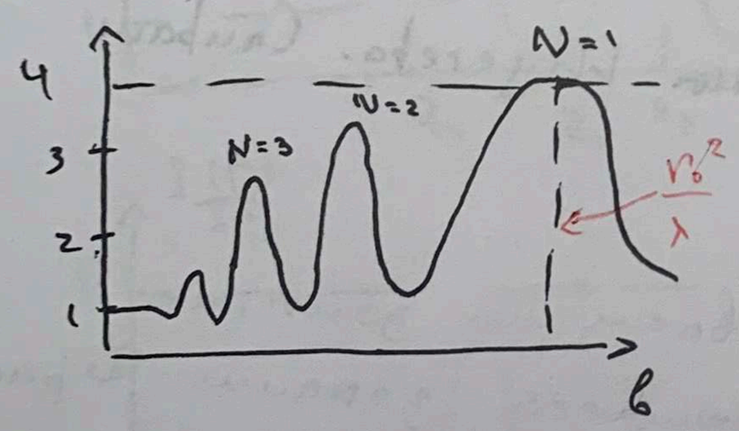
Будем рассматривать случай, когда $a \to \infty$, тогда

$R_m \to \sqrt{m\lambda b}$.



$r_0 = R_N = \sqrt{N\lambda b} \to N = \frac{r_0^2}{\lambda b} \to b = \frac{r_0^2}{N\lambda}$

$\boxed{\frac{r_0^2}{\lambda} = b_0}$ ← дифракционная длина пучка – расстояние от сечения, в котором пучок квазипараллелен и сечение совпадает с первой зоной Френеля



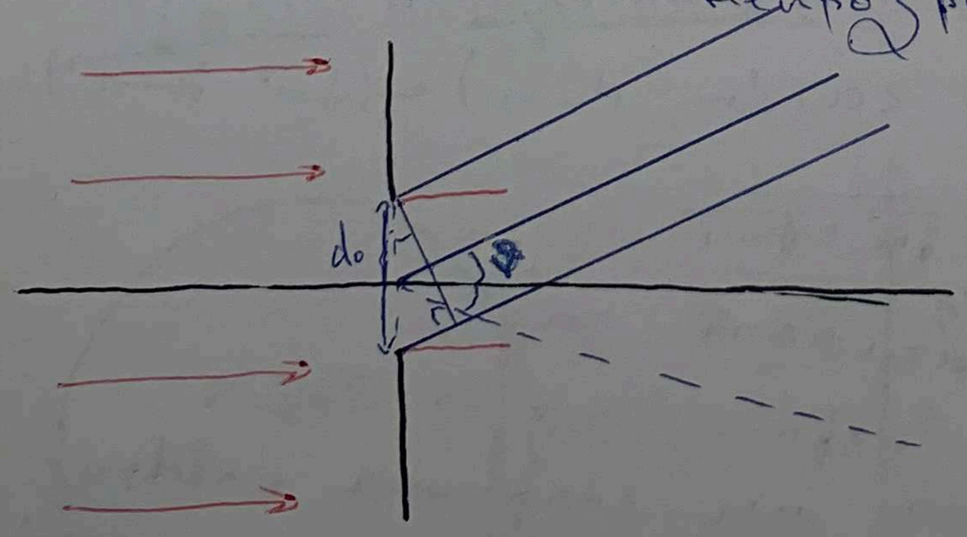
Когда расстояние $\gg \frac{r_0^2}{\lambda}$ пучок становится расходящимся – дальняя область дифракции

Если расстояние $\ll \frac{r_0^2}{\lambda}$, тогда $N \to \infty \Rightarrow$ $\Rightarrow$ это область геометрической оптики – область ближней дифракции

Дальняя область дифракции так же называется областью дифракции Фраунгофера.

Когда $b \sim b_0$ ← дифракционная область Френеля

Рассмотрим непрозрачный экран и будем его освещать пучком света, у которого сечение является квазиплоской волной. Посмотрим как распространяется световое поле вторичных источников.



Если расстояния малы, то справедливы законы геометрической оптики, т.е. когда меняется количество соответствующих зон Френеля и они соответствуют большим значениям, интенсивность практически не меняется. В сечение пучок такой,

59| что практически не меняет своё сечение и полностью соответствует форме отверстия.

На больших расстояниях всё зависит от того, с какими фазами они приходят.

Разность хода двух крайних лучков:

углы малы

$$\Delta l = d_0 \sin\vartheta \cong d_0 \vartheta$$

В каком случае все пучки, исходящие из светящейся щели погасят друг друга в этом направлении?

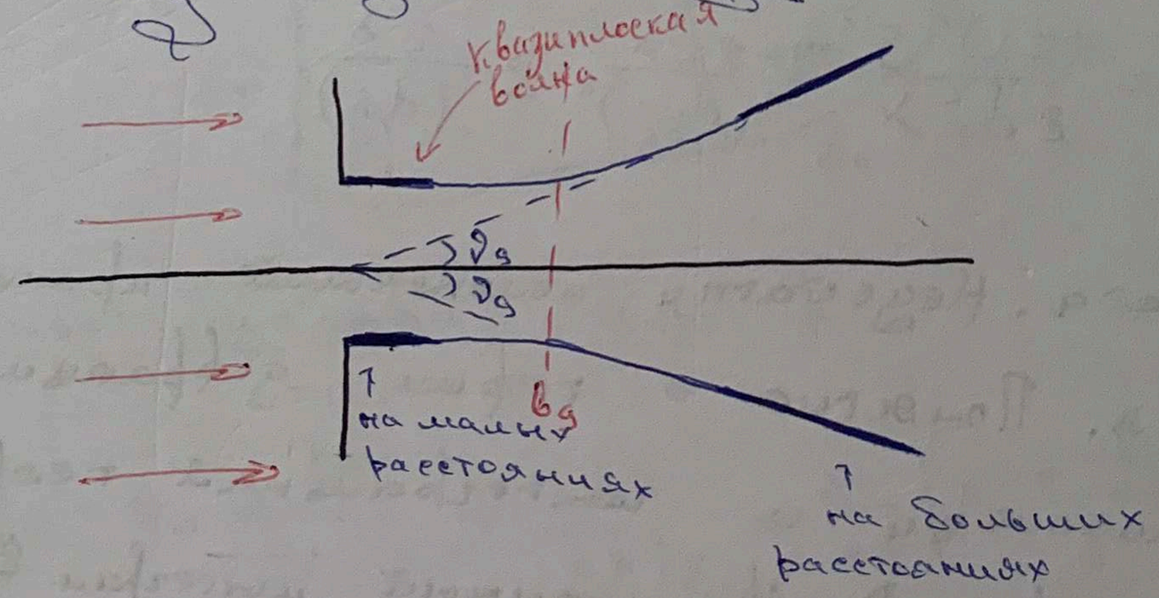
Разобьём все светящиеся пучки на пары, причём расстояние между ними $\frac{d_0}{2}$ и пусть разность хода для них $\frac{\lambda}{2}$, тогда они погасят друг друга. Можно рассмотреть таким образом все источники и тогда они погасят друг друга, тогда

$$\Delta l = d_0 \vartheta_g = \lambda \Rightarrow$$ в направление ϑ_g интенсивность равна нулю

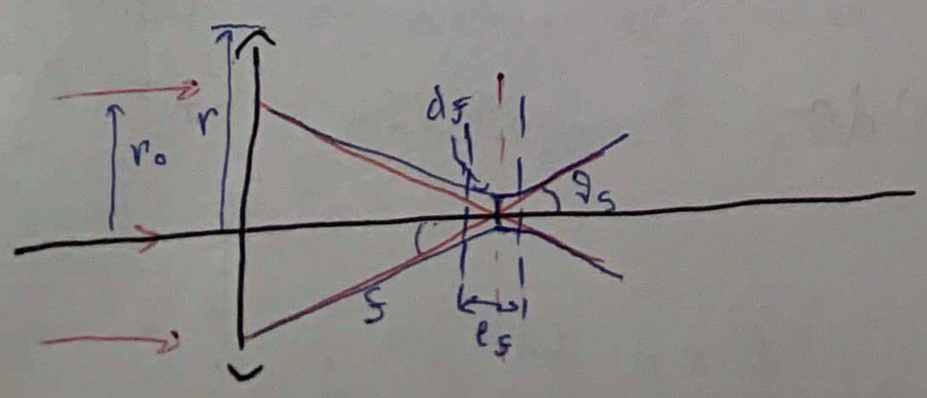
Угол ϑ_g называется углом дифракционной расходимости

$$\boxed{\vartheta_g \cong \frac{\lambda}{d_0}}$$

Тогда вид пучка будет такой:



Фокусировка света как дифракционное явление



Ширина пучка в фокальной плоскости, из соображения симметрии, можно сказать, что это есть сечение, в котором пучок прошедший через линзу является

60 | квазиплоским. Если рассматривать только часть рисунка, начиная от фокальной плоскости, то это ни что иное, как рассмотрение, которое мы сделали выше, т.е. наблюдается дифракционное расширение пучка. Пусть d_f - диаметр пучка в фокальной плоскости, тогда

$$\vartheta_g \cong \frac{\lambda}{d_f} = \frac{r_0}{f}$$

$$\Downarrow$$

$$d_f = \frac{f}{r_0}\lambda = \frac{f}{d_0}2\lambda = \frac{2\lambda}{d_0/f}$$

Диаметр линзы $d \geq d_0$, подставим, тогда

$$d_f = \frac{2\lambda}{d_0/f} \geq \frac{2\lambda}{d/f}$$

относительное отверстие линзы

Опыт показывает, что $\frac{d}{f} < 1$.

Вернёмся к области пространства у фокальной плоскости. Можно сказать, что есть некая область l_f, которая называется фокальной перетяжкой - область, в которой диаметр пучка практически не меняется. Тогда

$$l_f \cong 2b_g = 2\frac{r_f^2}{\lambda} = \frac{d_f^2}{2\lambda} =$$

$$= \frac{(2\lambda)^2 f^2}{2d_0^2\lambda} = \frac{2\lambda}{(d_0/f)^2} \geq \frac{2\lambda}{(d/f)^2}$$

(18) Дифракция света. Недостатки положений принципа Гюйгена-Френеля. Понятие о теории дифракции Кирхгофа. Уравнение Гельмгольца и интегральная теорема Гельмгольца-Кирхгофа. Дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа.

Интеграл Френеля:

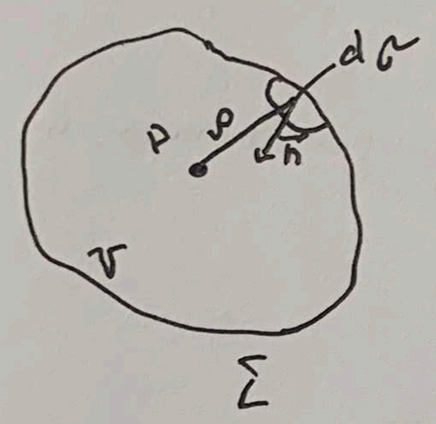
$$A(P) = \iint_{\Sigma} A_{\Sigma_0} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} K(t)\, d\sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta + k^2) A(\vec{r}) = 0} \leftarrow$$ Уравнение Гельмгольца

Другими словами, если функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то её можно представить как комплексную амплитуду световой волны.

Оказалось, что решение удовлетворяет теореме Гельмгольца-Кирхгофа (математическая теорема)

Рассмотрим некоторую точку в пространстве - точку наблюдения P, охватим её замкнутой поверхностью Σ. Пусть поверхность охватывает объём V.



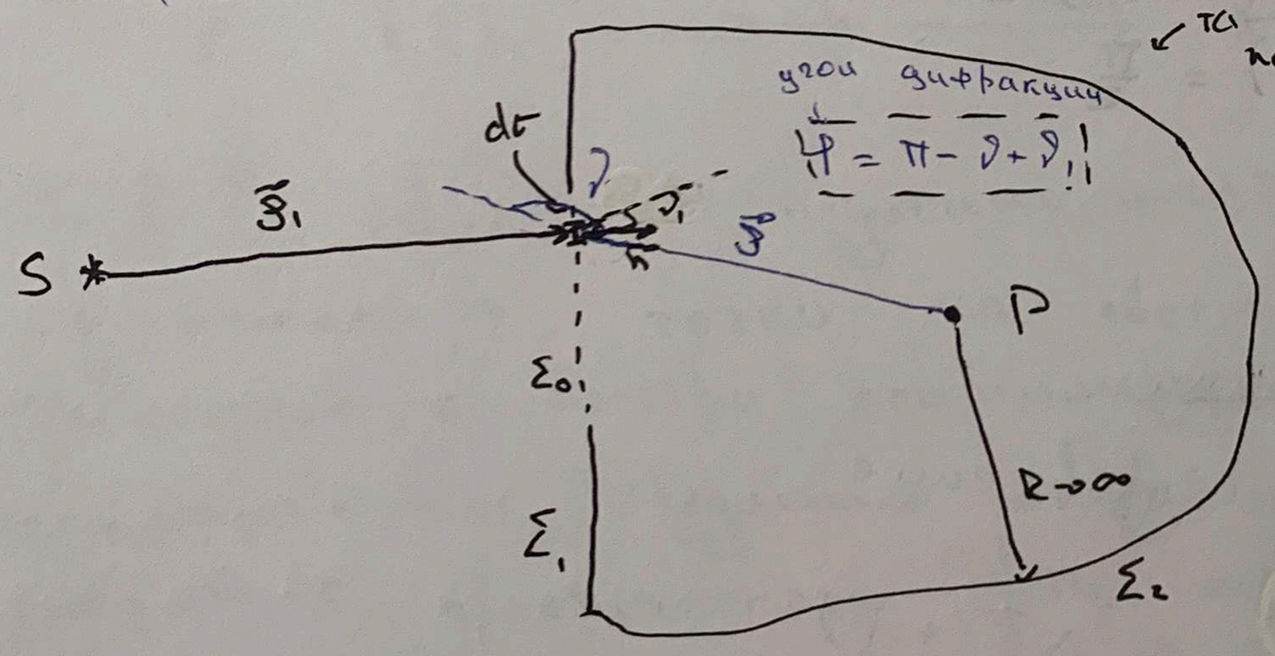
$\vec{n}$ - внутренняя нормаль элемента $d\sigma$

Тогда в соответствие с теоремой

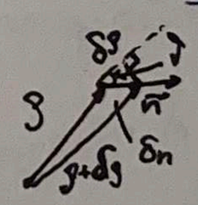
на поверхности в точке $d\sigma$

$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} \left(A_\Sigma \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\right)\Big|_\Sigma - \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \frac{\partial A_\Sigma}{\partial n}\Big|_\Sigma \right) d\sigma$$

Дифракционный интеграл Френеля - Кирхгофа



$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\right) = \frac{-ik e^{-ik\rho}\rho - e^{-ik\rho}}{\rho^2} \frac{d\rho}{dn} =$$



$$= -\frac{ike^{-ik\rho}}{\rho}\left(1 + \frac{1}{ik\rho}\right) \overset{\rho \gg \lambda = 0 \frac{1}{k\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\rho} \ll 1}{=}$$

$$= -\frac{ik}{\rho} e^{-ik\rho} \cdot \cos\vartheta$$

Граничные условия Кирхгофа

в отсутствие экрана

- $\Sigma_0 : A_\Sigma = A_0 \frac{e^{ik\rho_1}}{\rho_1} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial n}\Big|_{\Sigma_0} = \frac{\partial}{\partial n}\left(A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\right)$

Наличие непрозрачного экрана практически не сказывается на той области, где нет непрозрачного экрана.

Это справедливо, когда характерный линейный размер отверстия $d_0 \gg \lambda$

- $\Sigma_1 : A_\Sigma = 0 \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial n}\Big|_{\Sigma_1} = 0$

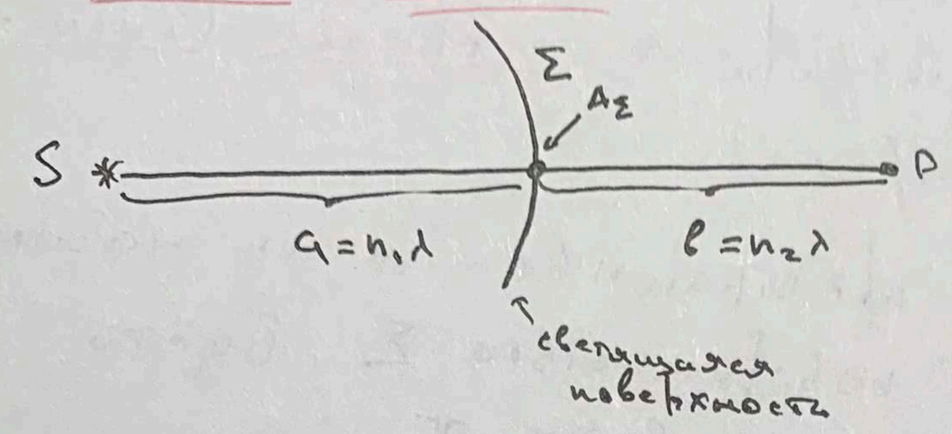
61 • Первая проблема: $k(\varphi)$ появился непонятным образом с предположениями $k(\varphi=0) = k_{max}$

$k(\varphi\uparrow) \to k$!

$k(\varphi \geq \frac{\pi}{2})$

$[k(\varphi)] = м^{-1}$

• Вторая проблема:



содержит начальную фазу колебаний

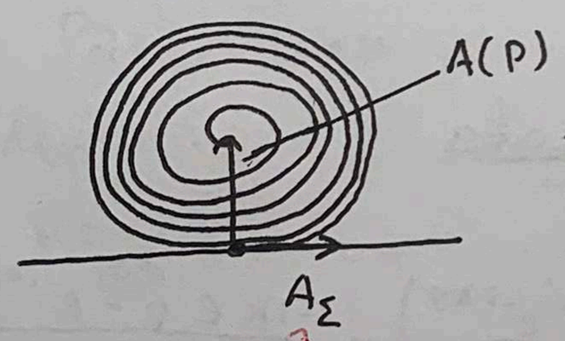
$$A(r) = A_0 \frac{e^{-ikr}}{r}$$

$A(a) = \frac{A_0}{a}$, т.е. колебания в точке a происходят в фазе колебаний в самом источнике

$A(a+b) = \frac{A_0}{a+b}$ ← тоже в фазе

Тогда колебания в точке наблюдения и колебания в источнике происходят в фазе.

В соответствие со спиралью Френеля



=> разность фаз между $A(P)$ и $A(\Sigma) = \frac{\pi}{2}$

Уравнение Гельмгольца

Рассмотрим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 E(t,\vec{r})}{\partial t^2} = v^2 \Delta E(t,\vec{r})$$

Ему удовлетворяет также комплексное представление. Рассмотрим гармонические монохроматические волны в комплексной форме:

$$\hat{E}(t,\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

Подставим в волновое уравнение

$$\left. -\omega^2 \cancel{e^{i\omega t}} A(\vec{r}) = v^2 \cancel{e^{i\omega t}} \Delta A(\vec{r}) \right| = 0$$

$$k = \frac{\omega}{v}$$

63 | • $\Sigma_2 : A_{\Sigma_2} \to 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_{\Sigma_2} \to 0$

Воспользовавшись этими граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_{\Sigma_0} = \frac{\partial}{\partial n}\left(A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\right) \overset{\rho_1 \gg \lambda}{=} -\frac{ik}{\rho_1} e^{-ik\rho_1} \cos\vartheta_1$$

Тогда

$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma_0} \left(A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\left(-\frac{ik}{\rho} e^{-ik\rho} \cos\vartheta\right) + \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} A_0 ik \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \cos\vartheta_1 \right) d\sigma =$$

$$\overset{k=\frac{2\pi}{\lambda}}{=} \iint\limits_{\Sigma_0} \underbrace{A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}}_{A_{\Sigma_0}} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \frac{i}{2\lambda} (\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)\, d\sigma$$

$$\boxed{A(P) = \iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \underbrace{\frac{i}{2\lambda}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}_{k(\vartheta_1,\vartheta)}\, d\sigma}$$ ← Дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа

Если светящаяся поверхность не произвольная, а является фронтом волны, то $\vartheta_1 = 0 \Rightarrow \varphi = \pi - \vartheta + \vartheta_1 = \pi - \vartheta \Rightarrow \vartheta = \pi - \varphi$

Тогда $k(\vartheta_1, \vartheta) \Rightarrow \underbrace{\frac{i}{\lambda}}_{= e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{разность фаз } \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos\varphi}{2} = k(\varphi)$

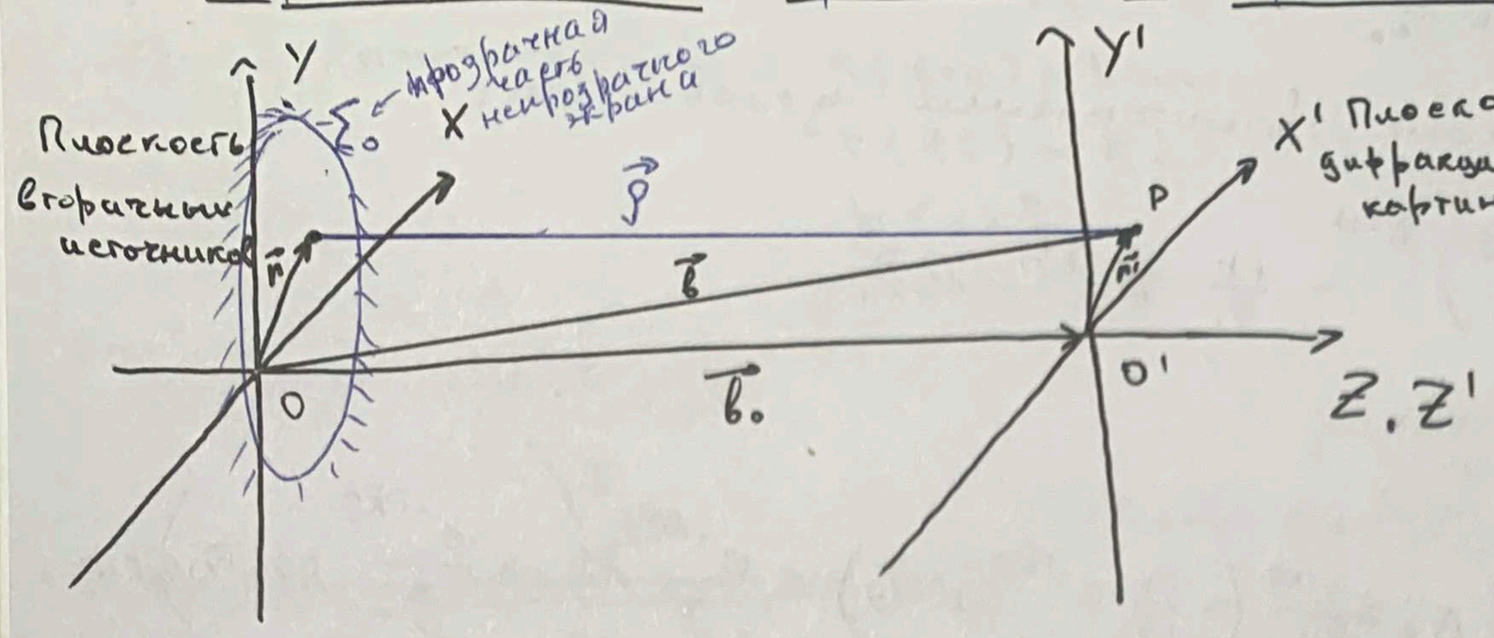
$k(\vartheta_1, \vartheta)$ является медленно меняющейся функцией от положения точки на светящейся поверхности Σ_0 по сравнению с быстро осциллирующим экспоненциальным множителем. Медленно меняющийся множитель не оказывает практического влияния на картину интерференции, не меняет её видность, а лишь слабо влияет на среднюю освещённость. В этом приближении:

$$A(P) = \overline{k(\vartheta_1, \vartheta)} \iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\, d\sigma$$

В большинстве практически важных случаях ϑ_1 и ϑ меняются в небольших пределах близи средних значений $\vartheta_1 = 0$ и $\vartheta = \pi$ (параксиальные лучи), тогда

$$\overline{k(\vartheta_1, \vartheta)} \cong \frac{i}{\lambda} \to \boxed{A(P) = \frac{i}{\lambda} \iint\limits_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\, d\sigma}$$

64) Приближения Френеля и Фраунгофера (вопрос 19)



Будем рассматривать светящуюся поверхность в виде плоскости, перпендикулярной оптической оси.

Положение светящегося точки задаётся вектором $\vec{b}$

• Дифракция Френеля – дифракция параксиальных пучков на расстояниях порядка дифракционной длины пучка

$$\begin{cases} b \geq b_0 \sim b_g \simeq \frac{r_0^2}{\lambda} = r_0 \frac{r_0}{\lambda} \gg r_0 \\ b_0 \gg |\vec{r} - \vec{r}'| \end{cases}$$

$$\vec{\rho} = -\vec{b}_0 + (\vec{r} - \vec{r}') \rightarrow \rho^2 = b_0^2 + (\vec{r} - \vec{r}')^2 \rightarrow \rho = \sqrt{b_0^2 + (\vec{r} - \vec{r}')^2} \cong b_0 + \frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{2b_0}$$

$$\boxed{A(P) \cong \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-kb_0}}{b_0} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} \cdot e^{-ik\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{2b_0}} d\sigma}$$

• Дифракция Фраунгофера – в дальней зоне дифракции или дифракция в параллельных пучках света

$$b \geq b_0 \gg b_g = \frac{r_0^2}{\lambda} \gg r_0 \quad (N \ll 1)$$

$$\vec{\rho} = -\vec{b} + \vec{r} = b^2 - 2\vec{b}\vec{r} + r^2 \rightarrow \rho \cong b - \frac{\vec{b}\cdot\vec{r}}{b} + \frac{r^2}{2b}$$

$$e^{-ik\rho} = e^{-ikb} e^{ik\frac{\vec{b}\cdot\vec{r}}{b}} e^{-ik\frac{r^2}{2b}} \quad \frac{r^2}{2b} = \frac{\pi r^2}{\lambda b} \ll \pi \ll 1$$

$$\boxed{A(P) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{ik\frac{\vec{b}\vec{r}}{b}} d\sigma}$$

$$\vec{b}\vec{r} = (\vec{b}_0 + \vec{r}')\vec{r} = \underbrace{\vec{b}_0\vec{r}}_{=0} + \vec{r}\vec{r}'$$

$$\boxed{A(P) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{ik\frac{\vec{r}\vec{r}'}{b}} d\sigma = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{i\vec{k}\vec{r}'} d\sigma}$$

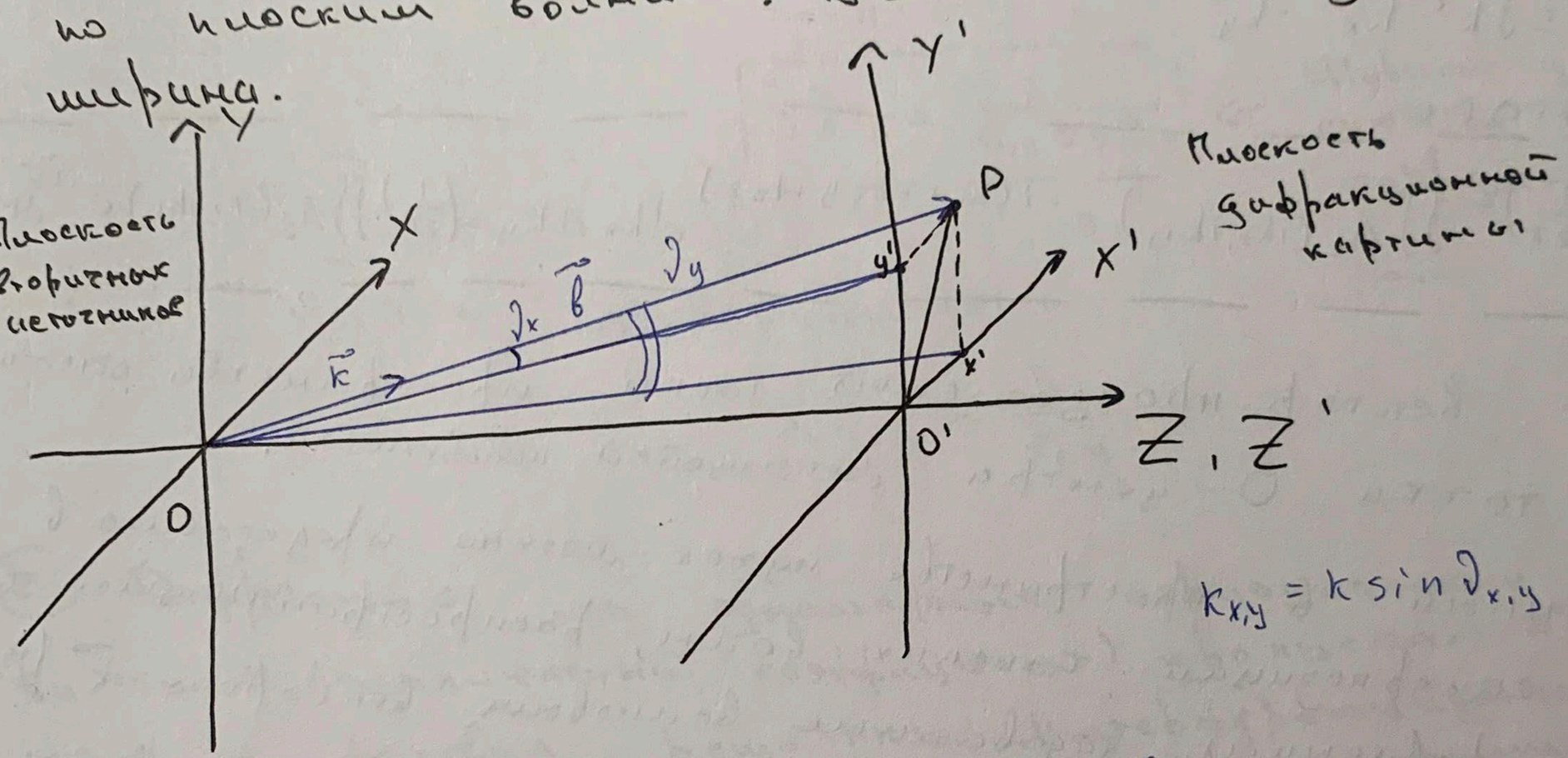
$\vec{k} = k\frac{\vec{b}}{b}$ ← единичный вектор распространения волны

← волновой вектор

65) В декартовой системе координат

$$\boxed{A(P) = \frac{i}{\lambda}\cdot\frac{e^{-ikb}}{b}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} A_\Sigma(x,y)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, dx\, dy}$$

(20) Дифракция света. Дифракция в дальней зоне как пространственное преобразование Фурье. Комплексная пространственная спектральная амплитуда. Разложение пучка по плоским волнам. Угловой спектр излучения и его ширина.



$k_{x,y} = k \sin \vartheta_{x,y}$

Сделаем однозначное соответствие $t \to x, y$

$\omega \to k_x, k_y$ ← пространственные частоты

для использования преобразований Фурье

Комплексная амплитуда дифракционной картины в приближении Фраунгофера:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\underbrace{\iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(x,y)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, dx\, dy}_{\text{Пространственная спектральная амплитуда } A_\Sigma(ik_x, ik_y)}$$

Тогда

$$A_\Sigma(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(ik_x, ik_y)\, e^{-i(k_x x + k_y y)}\, dk_x\, dk_y$$

<u>Разложение пучка по плоским волнам</u>

Комплексную амплитуду светового поля $A(x,y,z)$ в произвольной точке пространства за плоскостью вторичных источников ищем в виде аналогии для поля на светящейся поверхности $A_\Sigma(x,y)$:

$$A(x,y,z)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\iint\limits_{-\infty}^{\infty} A(ik_x,ik_y,z)\,e^{-i(k_x x+k_y y)}\,dk_x\,dk_y$$

Воспользуемся условием Гельмгольца $(\Delta+k^2)A(x,y,z)=0$

$$(\Delta+k^2)\left(A(ik_x,ik_y,z)\,e^{-i(k_x x+k_y y)}\right)=0$$

$$\frac{\partial^2 A(ik_x,ik_y,z)}{\partial z^2}+(k^2-k_x^2-k_y^2)\,A(ik_x,ik_y,z)=0$$

$$A(ik_x,ik_y,z)=A_\Sigma(ik_x,ik_y)\,e^{-i\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\,z}=A_\Sigma(ik_x,ik_y)\,e^{-ik_z z}$$

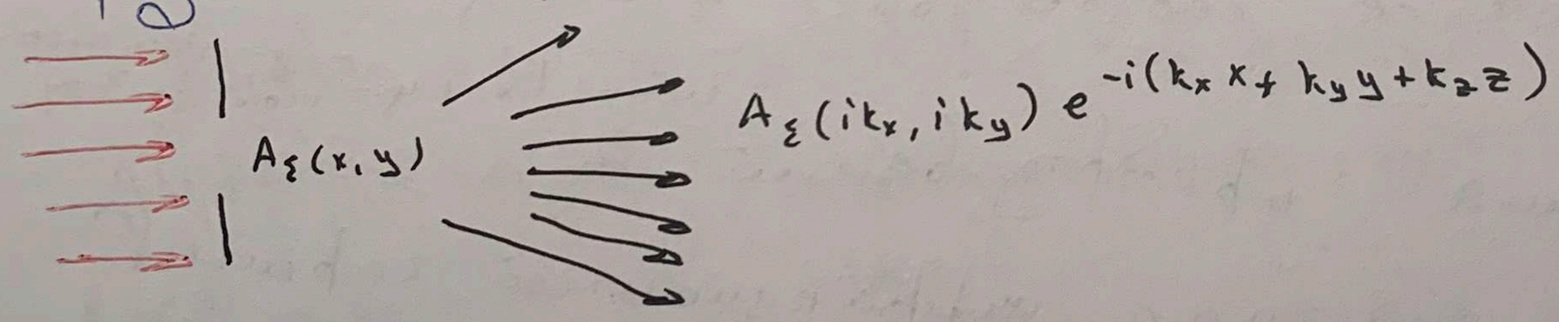
где $k_z\equiv\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}$

В результате

$$A(x,y,z)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(ik_x,ik_y)\,e^{-i(k_x x+k_y y+k_z z)}\,dk_x\,dk_y=\left(\frac{1}{2\pi}\right)\iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(ik_x,ik_y)\,e^{-i\vec{k}\vec{R}}\,dk_x\,dk_y$$

$\vec{R}$ - радиус вектор произвольной точки пространства относительно точки O - центра светящейся поверхности.

! Ограниченный в пространстве пучок можно представить в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся в разных направлениях, задаваемых волновым вектором $\vec{k}$!



Угловой спектр и его ширина

Интенсивность в точке наблюдения

$$I(P)=\frac{1}{2}|A(P)|^2=\frac{1}{2\lambda^2 B^2}\left|A_\Sigma(ik_x,ik_y)\right|^2$$

Здесь $|A_\Sigma(ik_x,ik_y)|^2$ – пространственная спектральная плотность или угловой спектр излучения.

Оказывается, что интенсивность в дальней зоне дифракции пропорциональна соответствующему угловому спектру.

Как и при частотно-временном Фурье-преобразовании, когда ширина частотного спектра $\Delta\omega$ связана с дли-

67) Длительностью импульса Δt: $\Delta\omega\Delta t \simeq 2\pi$. При пространственно-частотном Фурье-преобразовании ширины углового спектра Δk_x и Δk_y связаны с поперечными линейными размерами пучка l_x и l_y

$$\boxed{\Delta k_{x,y}\, l_{x,y} \simeq 2\pi} \quad \text{и} \quad \boxed{\Delta k_{x,y} = \frac{2\pi}{l_{x,y}}}$$

$$\Delta k_{x,y} = \Delta(k \sin\vartheta_{x,y}) = \overset{\frac{2\pi}{\lambda}}{k} \cos\vartheta_{x,y}\, \Delta\vartheta_{x,y} \simeq \frac{2\pi}{l_{x,y}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta\vartheta_{x,y} \simeq \frac{\lambda}{l_{x,y}\cos\vartheta_{x,y}}} \leftarrow$$ Ширина углового спектра в угловых координатах

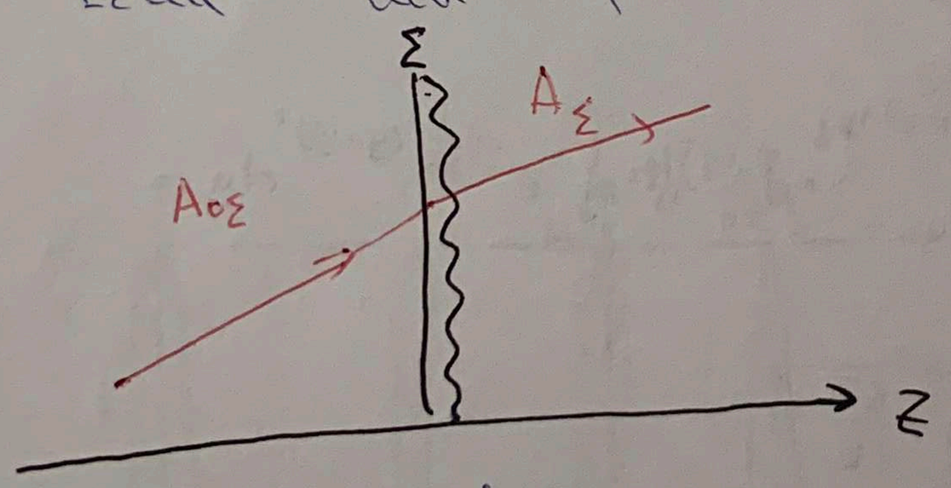
Если пучки параксиальны:

$$\Delta\vartheta_{x,y} \simeq \frac{\lambda}{l_{x,y}}$$

(21) Дифракция на одномерных периодических структурах. Амплитудная и фазовая решётки. Интерференционная функция. Положение и угловая ширина главных максимумов.

Дифракционная решётка - оптический элемент, который обладает периодической пространственной структурой оптических свойств. Это значит, что если этот элемент одномерный, значит в каком-то направление воспроизводятся оптические свойства этого оптического элемента.

Если мы рассмотрим какой-то плоский оптический элемент и волну, которая на него падает, и её комплексная амплитуда на поверхности Σ: $A_{0\Sigma}$.



Рассмотрим волну, которая покидает поверхность: A_Σ

Введём физическую величину: комплексный коэффициент пропускания (отражения)

$$\boxed{t(x,y) \equiv \frac{A_\Sigma(x,y)}{A_{0\Sigma}(x,y)}}$$

68) В случае дифракционной решётки:

число период

$$t(x+n_x d_x,\ y+n_y d_y) = t(x,y)$$

$d_{x,y}$ - период оптических свойств вдоль двух направлений.

число периодов

$$d_{x,y} N_{x,y} = L_{x,y}$$ — линейные размеры решётки

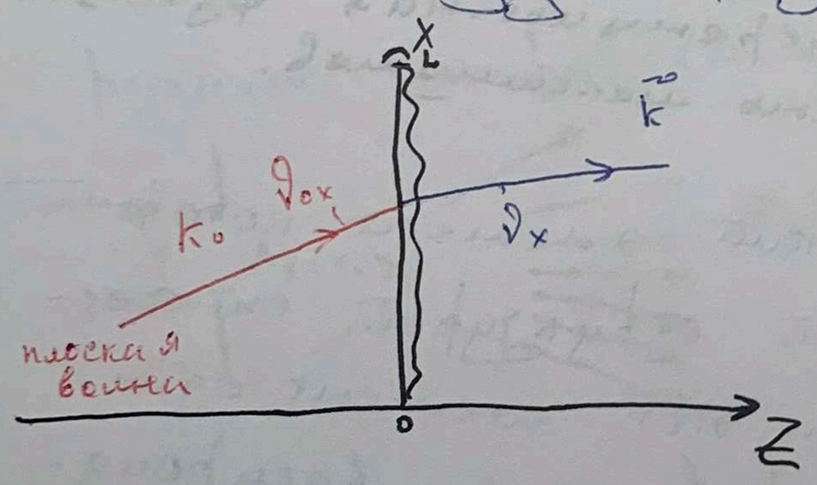
Типы дифракционных решёток

Т.к. $t(x,y)$ - комплексная величина, то:

фаза, описывающая коэффициент

$$t(x,y) = |t(x,y)|\, e^{-i\Phi(x,y)}$$

- пропускательные
- отражательные
- амплитудные - модифицирует только амплитуду, но не модифицирует фазу: $|t(x,y)| \neq 1$, $\Phi(x,y) = 0$
- фазовая: $|t(x,y)| = 1$, $\Phi(x,y) \neq 0$
- амплитудно-фазовые: $|t(x,y)| \neq 1$, $\Phi(x,y) \neq 0$



Рассмотрим одномерную решётку:

$$A_\Sigma(x,y) = A_\Sigma(x).$$

Т.к. $\vec{\rho}\vec{b} = \vec{r}\vec{r}'$ и $b \gg r$, то

$$\rho = \sqrt{b^2 + r^2 - 2\vec{r}\vec{b}} = \sqrt{b^2 + r^2 - 2\vec{r}\vec{r}'} \cong$$

$$\cong b + \frac{r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{2b}$$

Дифракционный интеграл Френеля Кирхгофа можно записать в виде:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\iint_\Sigma A_\Sigma \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\, d\sigma \cong \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint_\Sigma A_\Sigma\, e^{-ik\frac{r^2-2\vec{r}\vec{r}'}{2b}}\, dx\,dy =$$

$$= \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b}\iint_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(x)\, e^{-ik\frac{x^2-2xx'}{2b}}\, e^{-ik\frac{y^2-2yy'}{2b}}\, dx\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k}{2b}(y^2-2yy')}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k}{2b}(y-y')^2}\, e^{i\frac{k}{2b}y'^2}\, dy = e^{i\frac{k}{2b}y'^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k}{2b}(y-y')^2}\, dy =$$

$$= e^{i\frac{k}{2b}y'^2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i\frac{k}{2b}}} = e^{i\frac{k}{2b}y'^2}\sqrt{\frac{2b\pi}{ik}} \overset{b \gg \frac{y'^2}{\lambda}}{\cong} \sqrt{\frac{2b\pi}{ik}}$$

Тогда

$$A(P) = \frac{i}{\lambda}\cdot\frac{e^{-ikb}}{b}\sqrt{\frac{2b\pi}{ik}}\int_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(x)\, e^{-ik\frac{x^2-2xx'}{2b}}\, dx = \frac{1+i}{\sqrt{2b\lambda}}\, e^{-ikb}\int_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(x)\, e^{-ik\frac{x^2-2xx'}{2b}}\, dx$$

69) При рассмотрении дифракции в дальней зоне дифракции по координате x $\left(b \gg \frac{r_0^2}{\lambda} \geq \frac{x^2}{\lambda}\right)$ получим:

$$A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} \int_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(x) e^{ik_x x} dx$$

Пусть решётка длиной L и $dN = L$, тогда

$$A(k_x) = \underbrace{\frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb}}_{\odot} \int_0^L \underbrace{A_0 e^{-ik_{0x}x}}_{A_{0\Sigma}} t(x) e^{ik_x x} dx =$$

$$= \odot \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)d}^{jd} A_0 t(x) e^{i(k_x - k_{0x})x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x - (j-1)d \\ du = dx \end{array} \right| =$$

$$= \odot \sum_{j=1}^{N} \int_0^d A_0 \underbrace{t(u + (j-1)d)}_{t(u)} e^{i(k_x - k_{0x})u} \cdot e^{i(k_x - k_{0x})(j-1)d} du =$$

$$= \underbrace{\frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} \int_0^d \underbrace{\underbrace{A_0 e^{-ik_{0x}u}}_{A_{0\Sigma}} t(u) e^{ik_x u}}_{A_\Sigma} du}_{A_1(k_x) \leftarrow \text{ от одного периода решётки}} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{N} e^{i(k_x - k_{0x})(j-1)d}}_{h(N, k_x, k_{0x}) \leftarrow \text{ фактор многоволновой интерференции}} =$$

$$= A_1(k_x) h(N, k_x, k_{0x})$$

$$h(N, k_x, k_{0x}) = \frac{1 - e^{iN(k_x - k_{0x})d}}{1 - e^{i(k_x - k_{0x})d}}$$

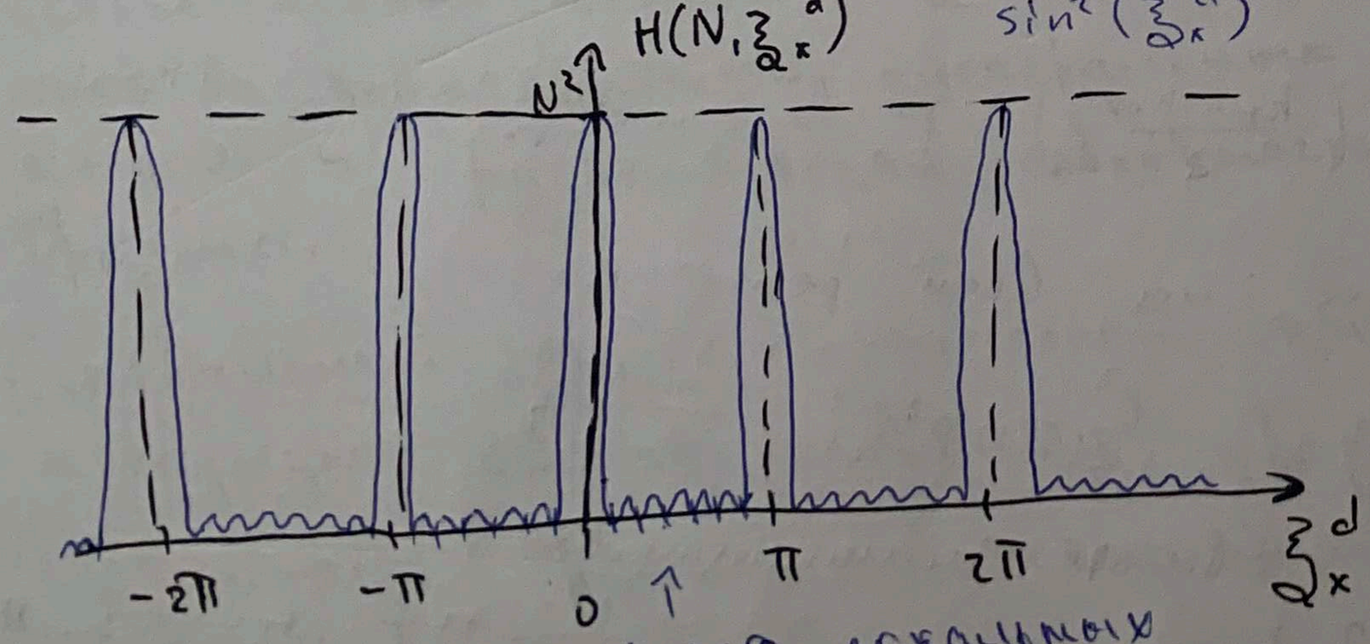
Введём физическую величину:

$$\boxed{\xi_x^d \equiv \frac{k_x - k_{0x}}{2} d} \Rightarrow h(N, k_x, k_{0x}) = \frac{1 - e^{i2N\xi_x^d}}{1 - e^{i2\xi_x^d}} = \frac{e^{iN\xi_x^d}}{e^{i\xi_x^d}} \frac{\sin(N\xi_x^d)}{\sin(\xi_x^d)}$$

$$I(P) = \frac{1}{2}|A(P)|^2 = \underbrace{I_1(k_x, k_{0x})}_{\leftarrow \text{ от одного периода}} H(N, \xi_x^d)$$

$$\boxed{H(N, \xi_x^d) = |h(N, \xi_x^d)|^2} \leftarrow \text{ интерференционная функция Лауэ}$$

$$\| \quad \frac{\sin^2(N\xi_x^d)}{\sin^2(\xi_x^d)}$$



число локальных максимумов: $N-2$

$$H_{max}(N, \xi_x^d): \xi_x^d = m\pi =$$

$$= \frac{k_x - k_{0x}}{2} d =$$

$$= k \frac{\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x}}{2} d =$$

$$= \pi \frac{d}{\lambda} (\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x})$$

$$\boxed{\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x} = m\frac{\lambda}{d}} \leftarrow \text{ условие max}$$

70 | $H_{min}(N, \xi_x^d)$: $\xi_x^d = k\frac{\pi}{N}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots, N-1$

Ширина пика интенсивности:

$$\delta \xi_x^d = \frac{\pi}{N}$$

$$\delta(\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x}) = \frac{\lambda}{dN}$$

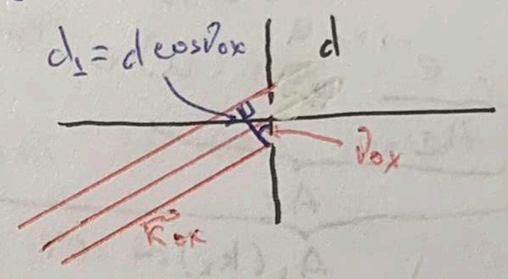
$$\cos\vartheta_x \, \delta\vartheta_x = \frac{\lambda}{dN} = \frac{\lambda}{L}$$

$$\delta\vartheta_x = \frac{\lambda}{dN\cos\vartheta_x} \underset{\uparrow}{\sim} \frac{\lambda}{dN\cos\vartheta_{0x}} = \frac{\lambda}{d_\perp N} = \frac{\lambda}{L_\perp}$$

ϑ мало
угол дифракции

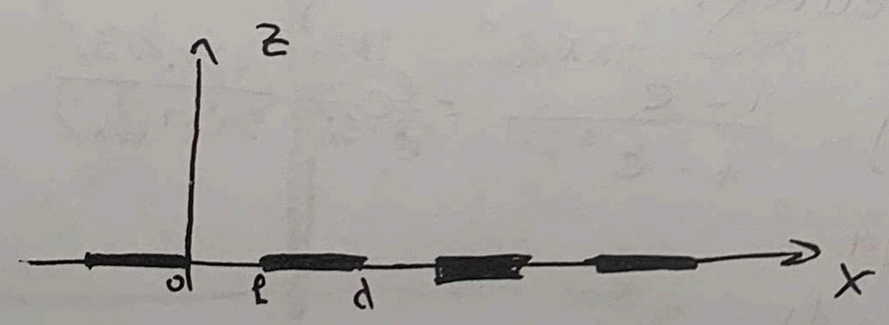
поперечное сечение волны

$d\cos\vartheta_{0x}$ – периодичность структуры с оптическими свойствами, поперёк пучка света



! Тем чем шире волны, тем уже максимумы !

Амплитудная прямоугольная решётка



$$t(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le l \\ 0, & l < x < d \end{cases}$$

Результат дифракции на одной щели:

$$A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 \int_0^d t(x) e^{i(k_x - k_{0x})x} dx =$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 e^{i\frac{k_x - k_{0x}}{2} l} \, l \, \mathrm{sinc}\left(\frac{k_x - k_{0x}}{2} l\right)$$

Тогда:

$$I_1(k_x) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{k_x - k_{0x}}{2} l\right) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \mathrm{sinc}^2(\xi_x^l)$$

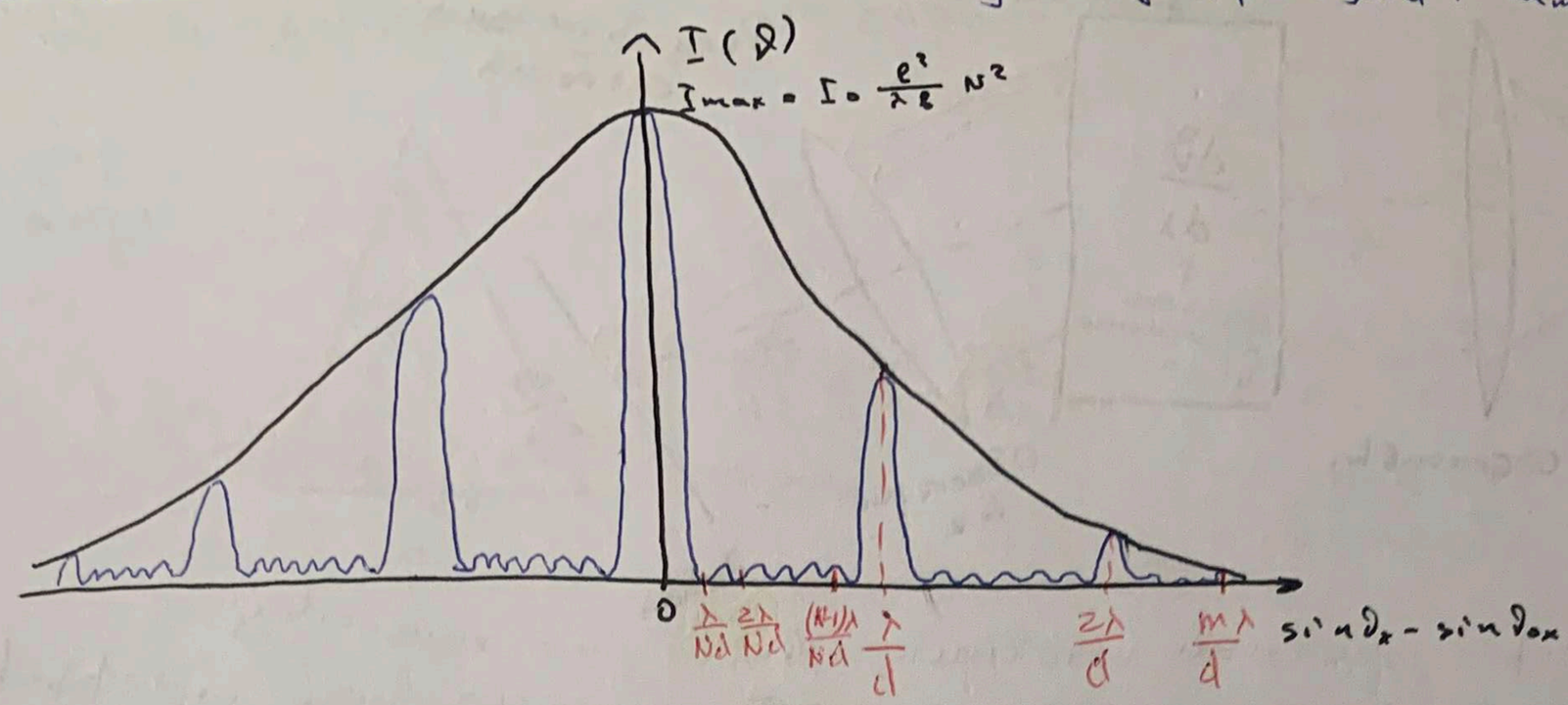
Результат дифракции на всей решётке:

$$I(k_x) = I_1(k_x) H(N, \xi_x^d) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \mathrm{sinc}^2 \xi_x^l \, \frac{\sin^2(N\xi_x^d)}{\sin^2 \xi_x^d}$$

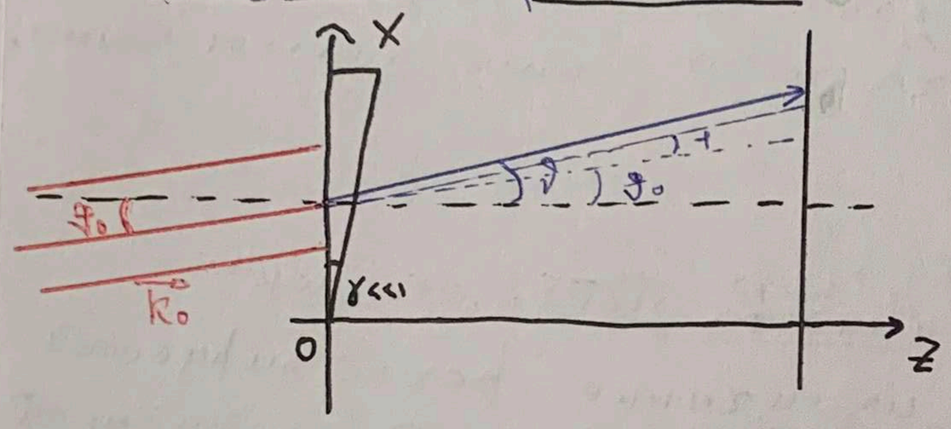
Условие наличия главных минимумов:

$$\frac{k_x - k_{0x}}{2} l = \frac{\pi l(\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x})}{\lambda} = n\pi \rightarrow \sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x} = n\frac{\lambda}{l}, \; n = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

71) Максимальное значение порядка дифракции: $m_{max} = \frac{\lambda/\ell}{\lambda/d} = \frac{d}{\ell}$



Фазовые решётки



Дифракция на щели с непрерывным изменением фазы (тонкая призма)

$$t(x) = e^{-i\Phi(x)}$$

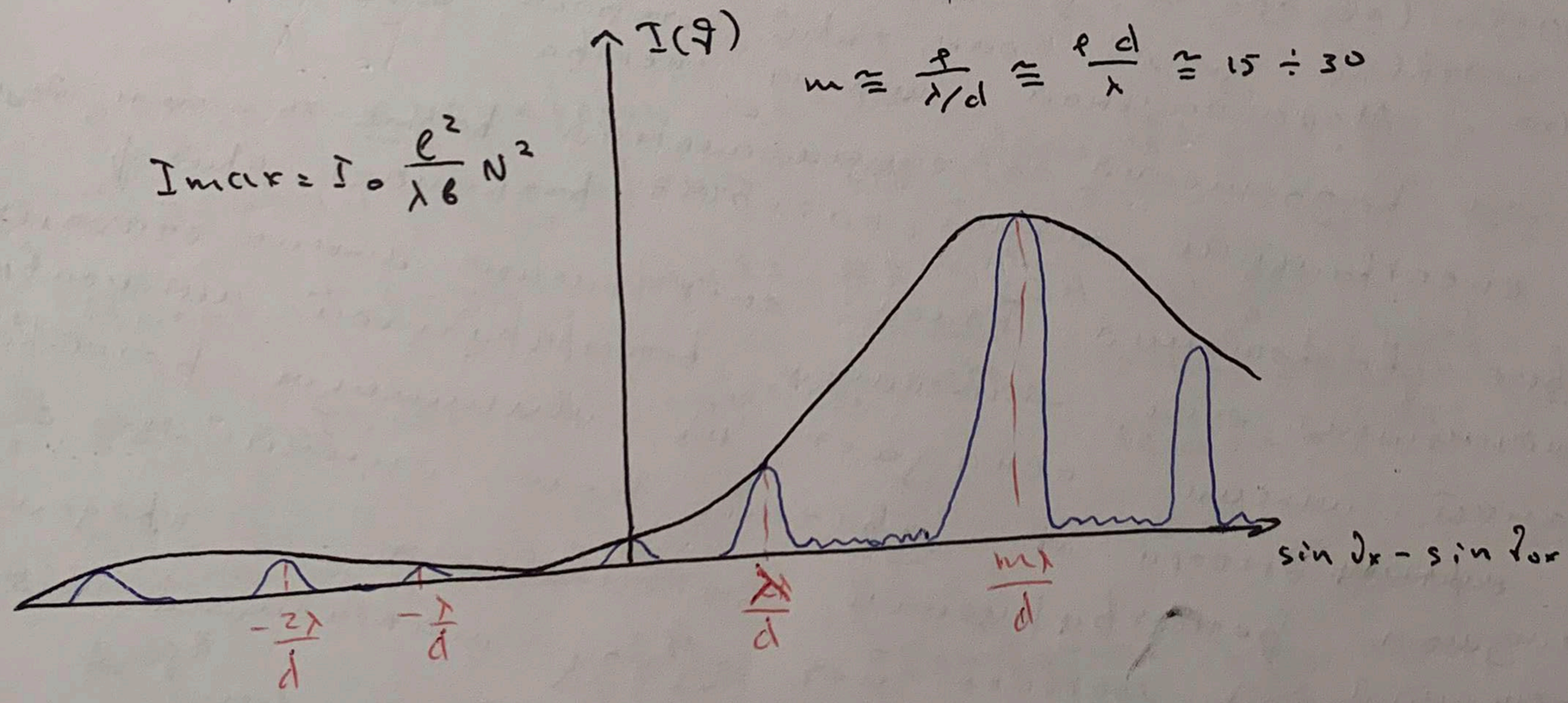
$$\Phi(x) \cong k(n-1)\frac{\gamma x}{\cos\vartheta_{0x}} = k f x, \quad f = \frac{(n-1)\gamma}{\cos\vartheta_{0x}}$$

$$A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 \int_0^{\ell} e^{-ikfx} e^{i(k_x - k_{0x})x} dx =$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 e^{i\frac{k_x - k_{0x} - kf}{2}\ell} \ell \sin\left(\frac{k_x - k_{0x} - kf}{2}\ell\right)$$

$$I_1(\vartheta) = I_0 \frac{\ell^2}{\lambda b} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_x - k_{0x} - kf}{2}\ell\right) = I_0 \frac{\ell^2}{\lambda b} \operatorname{sinc}^2\left(k\frac{\sin\vartheta_x - \sin\vartheta_{0x} - f}{2}\ell\right)$$

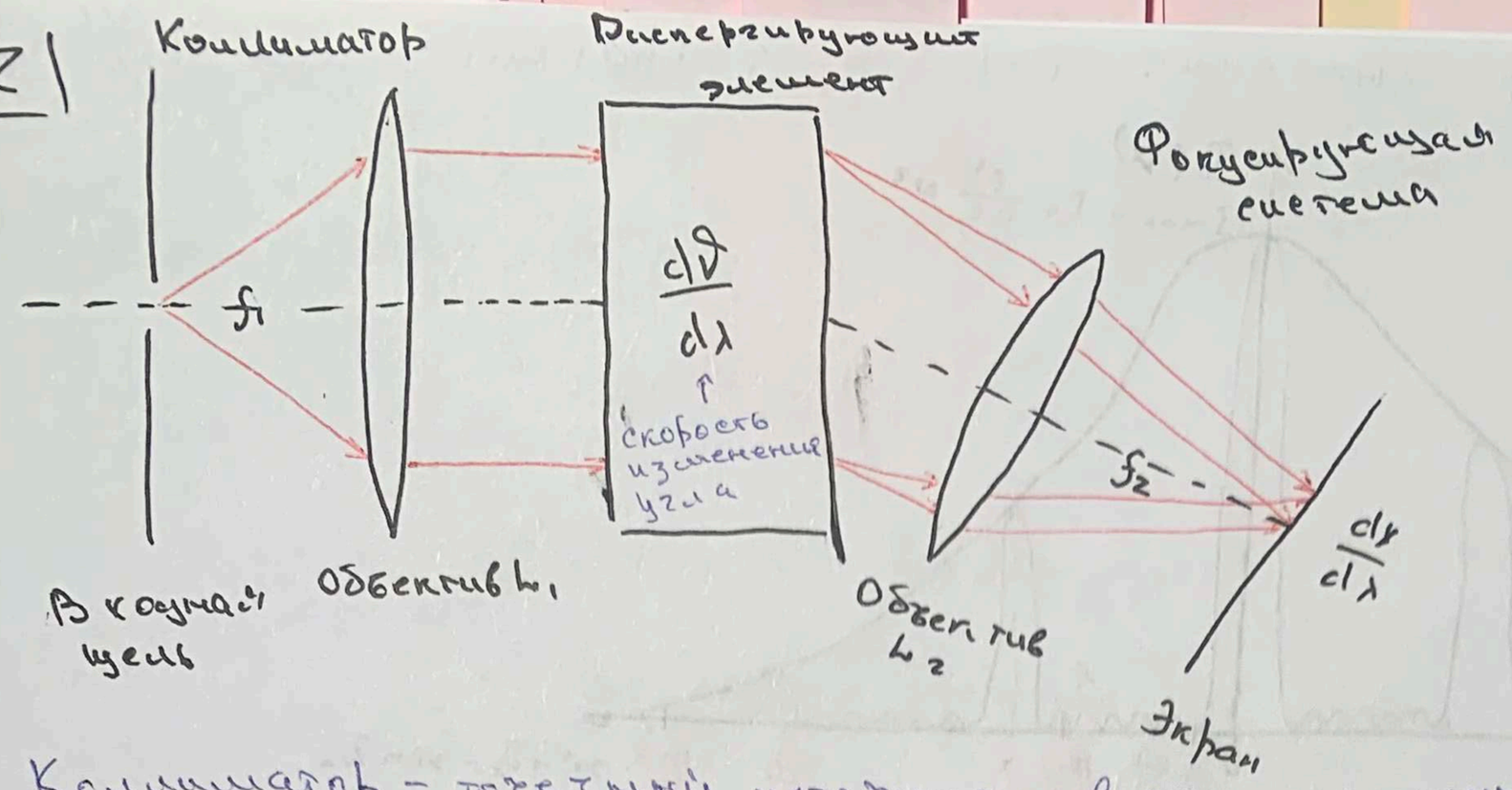
$$m \cong \frac{f}{\lambda/d} \cong \frac{\ell d}{\lambda} \cong 15 \div 30$$



(22) Спектральные приборы с пространственным разложением спектра. Характеристики спектральных приборов – предел разрешения λ и разрешающая способность. Дифракционная решётка. Призма.

Спектральный прибор – оптический прибор, с помощью которого исходную световую волну пространственным образом разложить на соответствующие временные спектральные составляющие.

72



Коллиматор – точечный источник света по существу

Диспергирующий элемент – может использовать интерференцию, дифракцию или дисперсию, т.е. в зависимости, например, показателя преломления от частоты или длины волны.

Характеристики прибора

- Аппаратная функция спектрального прибора $I(P)$ – „отклик" прибора на монохроматическое излучение – регистрируемая интенсивность светового поля в зависимости от обобщённой координаты точки наблюдения P
- Область (свободной) дисперсии, дисперсионная область $\Delta\lambda$ – максимальный интервал длин волн, при котором возможна работа прибора. Максимальная ширина спектра
- Предел разрешения $\delta\lambda$ – минимальная разность длин волн двух спектральных линий, которые разрешает прибор

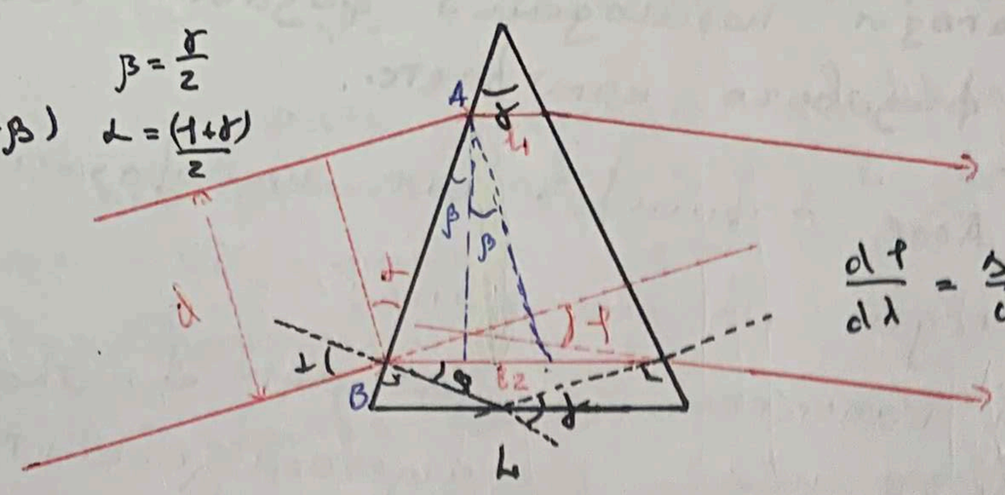
Условие разрешения Рэлея: спектральные линии считаются разрешёнными, если максимум регистрируемой интенсивности от одной линии попадает на минимум регистрируемой интенсивности от другой. Если линии не обладают минимумом регистрируемой интенсивности, то предел разрешения $\delta\lambda$ соответствует сдвигу максимума интенсивности на её ширину.

- Разрешающая способность (сила) $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ – отношение характерной длины волны λ исследуемого излучения к пределу разрешения $\delta\lambda$
- Угловая дисперсия $D_\vartheta = \frac{d\vartheta}{d\lambda}$ – скорость изменения угловой координаты ϑ максимума регистрируемой интенсивности с изменением длины волны.

73| Призма - дисперсионный спектральный прибор

$\gamma = 2\beta \qquad \beta = \frac{\gamma}{2}$

$\varphi = 2(\alpha - \beta) \qquad \alpha = \frac{(\varphi+\gamma)}{2}$



$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\Delta l}{d}\cdot\frac{dn}{d\lambda}$$

Закон Снеллиуса:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin((\varphi+\gamma)/2)}{\sin(\gamma/2)} = n$$

$$\frac{\cos((\varphi+\gamma)/2)}{2\sin(\gamma/2)}\cdot\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\cos\alpha}{2\sin\beta}\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{2\sin\beta}{\cos\alpha}\frac{dn}{d\lambda} = \frac{l_2-l_1}{AB}\cdot\frac{AB}{d}\frac{dn}{d\lambda}$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\Delta l}{d}\frac{dn}{d\lambda} \Leftarrow$$

- Аппаратная функция

$$I(\vartheta) = I_0\frac{d^2}{\lambda b}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k\sin(\vartheta-\varphi)}{2}d\right) \leftarrow \text{из фазовой решётки}$$

- Условие максимума: $\frac{k\sin(\vartheta-\varphi)}{2}d = 0 \Rightarrow \vartheta = \varphi$ и $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda}$
- Условие минимума: $\frac{k\sin(\vartheta-\varphi)}{2}d = \pi \Rightarrow \vartheta \cong \varphi + \frac{\lambda}{d}$

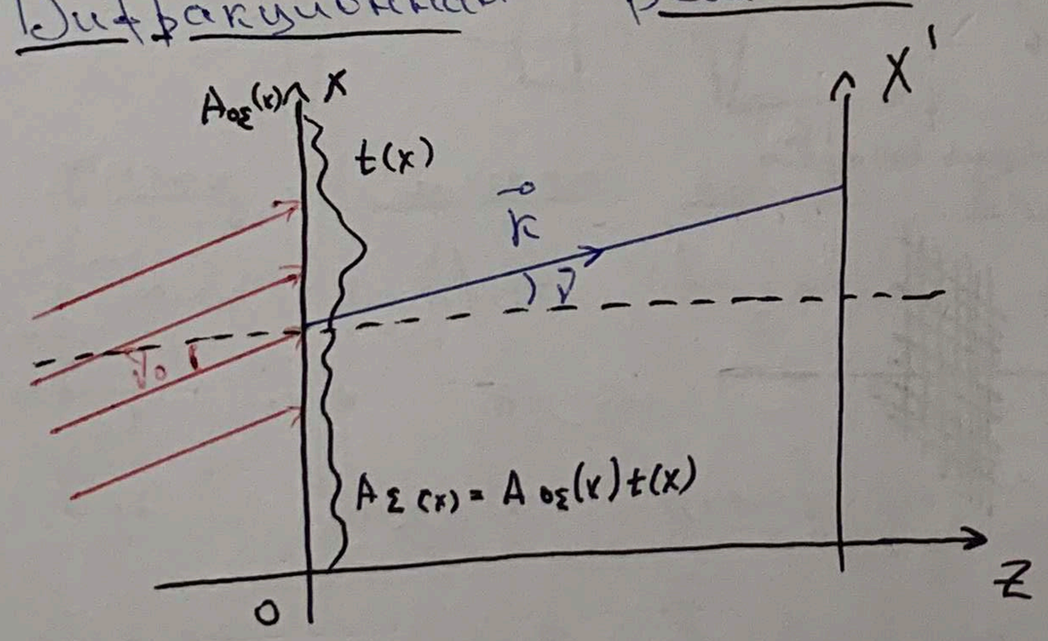
сдвиг минимума относительно максимума

$$\delta\vartheta = \frac{\lambda}{d}$$

- Область дисперсии $\Delta\lambda \sim \infty$
- Угловая дисперсия: $D_\vartheta = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\Delta l}{d}\cdot\frac{dn}{d\lambda}$
- Предел разрешения: $\delta\lambda = \frac{\delta\vartheta}{|D_\vartheta|} = \frac{\lambda}{\Delta l\left|\frac{dn}{d\lambda}\right|}$
- Разрешающая способность: $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \Delta l\left|\frac{dn}{d\lambda}\right|$

$$R_{max} = b\left|\frac{dn}{d\lambda}\right|$$

Дифракционная решётка



- Аппаратная функция:

$$I(\vartheta) = I_1(\vartheta)\,H(N, \xi_2(\vartheta))$$

$$H(N, \xi_2(\vartheta)) = \frac{\sin^2(N\xi_2(\vartheta))}{\sin^2\xi_2(\vartheta)}$$

$$\xi_2(\vartheta) = k\frac{\sin\vartheta - \sin\vartheta_0}{2}d = k\frac{\Delta(\vartheta)}{2}$$

$\Delta(\vartheta)$ - разность хода крайних лучей для одного периода решётки

- Условие главных максимумов

$$\xi_2(\vartheta) = k\frac{\Delta(\vartheta)}{2} = m\pi \rightarrow \Delta(\vartheta) = d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = m\lambda$$

- Условие ближайших минимумов: $\Delta(\vartheta) = d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda$
- Порядок дифракции: $m = \frac{\Delta(\vartheta)}{\lambda}$
- Область дисперсии: $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$
- Предел разрешения: $m(\lambda+\delta\lambda) = \left(m+\frac{1}{N}\right)\lambda \rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm}$
- Разрешающая способность: $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$

$$R_{max} = Nm_{max} = N\frac{d}{l} = \frac{b}{l}$$

- Угловая дисперсия: $D_\vartheta = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\vartheta}$

74 | 23 Основы дифракционной теории формирования изображений Аббе. Пространственная фильтрация изображения. Опыт Аббе-Портера. Специальные методы наблюдения фазовых объектов. Метод тёмного поля. Метод фазового контраста.

В соответствие с теорией Аббе формирование изображения, в частности в линзе, происходит в два этапа:

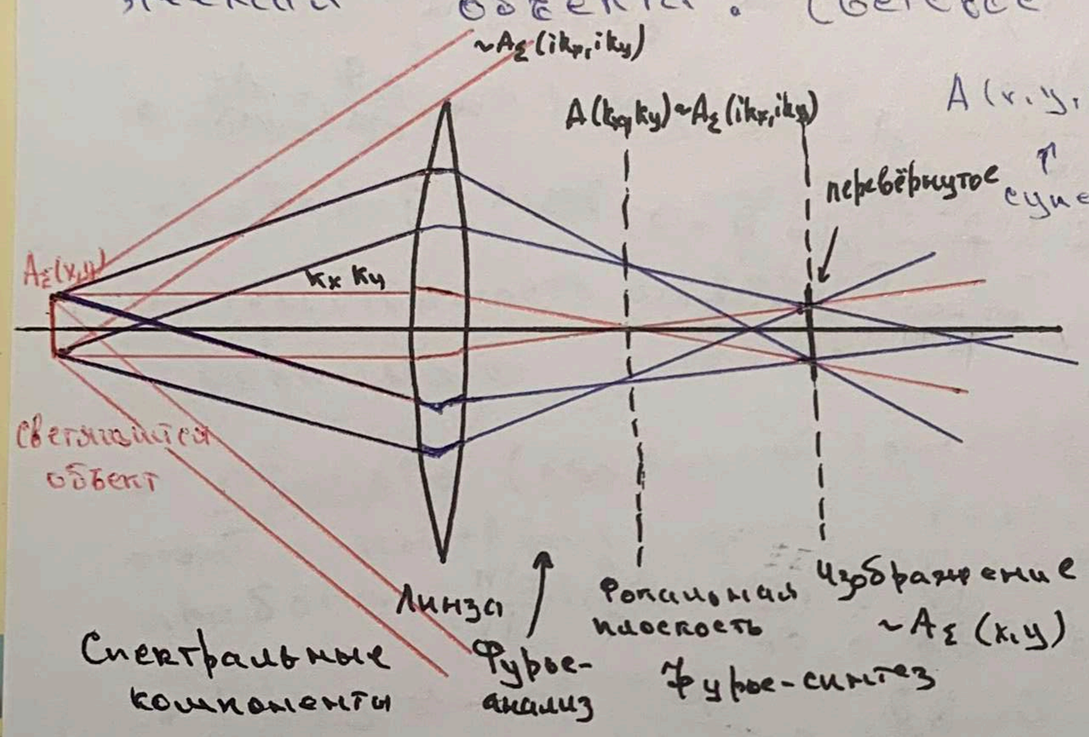
1. Линза в своей фокальной плоскости осуществляет пространственный Фурье-анализ светового поля светящегося объекта

2. В процессе свободной дифракции осуществляется пространственный Фурье-синтез изображения.

Пусть есть светящийся объект, который характеризуется комплексной амплитудой светового поля в области расположения объекта. Световое поле за светящимся объектом:

$$A(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} A_\varepsilon(ik_x, ik_y)\, e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}\, dk_x dk_y$$

суперпозиция плоских волн



Комплексная амплитуда дифракционной картины в дальней зоне дифракции:

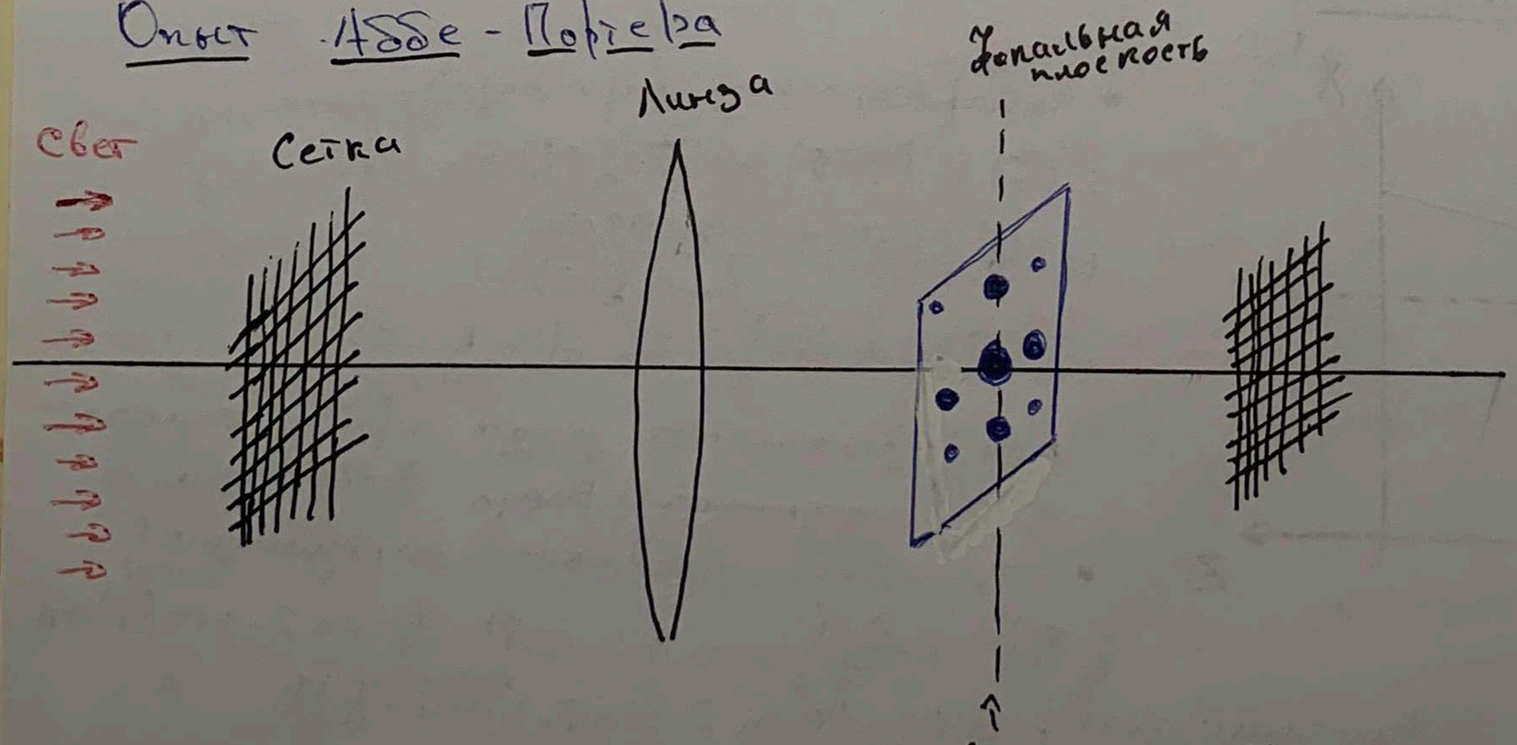
$$A(k_x, k_y) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikb}}{b} \underbrace{\iint_{-\infty}^{\infty} A_\varepsilon(x,y)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, dx\, dy}_{A_\varepsilon(ik_x, ik_y)}$$

b - от объекта до плоскости наблюдения

$$I(k_x, k_y) = \frac{1}{2}\left|A(k_x, k_y)\right|^2 = \frac{1}{2\lambda^2 b^2}\underbrace{\left|A_\varepsilon(ik_x, ik_y)\right|^2}_{\text{пространственная спектральная плотность}}$$

Под пространственной фильтрацией изображения подразумевается изменение изображения объекта посредством модификации пространственных спектральных компонент светового поля объекта

Опыт Аббе-Портера



75| • Если в фокальной плоскости помещают узкую щель то в плоскости изображений наблюдают систему полос, вытянутых перпендикулярно щели. Увеличение щели приводит к проявлению параллельных полос

• Если поместить присовую диафрагму (непрозрачный экран с отверстием переменного диаметра) в центре фокальной плоскости, то, изменяя её диаметр, можно мы за шагом проследить Фурье-синтез изображения

• Если в центре фокальной плоскости поместить маленький непрозрачный экран, закрывающий центральное пятно Фурье-спектра, то получим изображение сетки с обращённым контрастом

• Если в центре непрозрачного экрана в фокальной плоскости сделать малое отверстие, то получим практически равномерно заревещенный экран

Специальные методы наблюдения фазовых объектов

Рассмотрим фазовые объекты, которые практически не поглощают свет $|t(x,y)| \simeq 1$ и слабо меняют его фазу $\Phi(x,y) \ll 1$

$$t(x,y) = |t(x,y)| e^{-i\Phi(x,y)} \approx 1 - i\Phi(x,y)$$

$$A_{0x}(x,y) \cong A_{0\Sigma} = const(x,y)$$

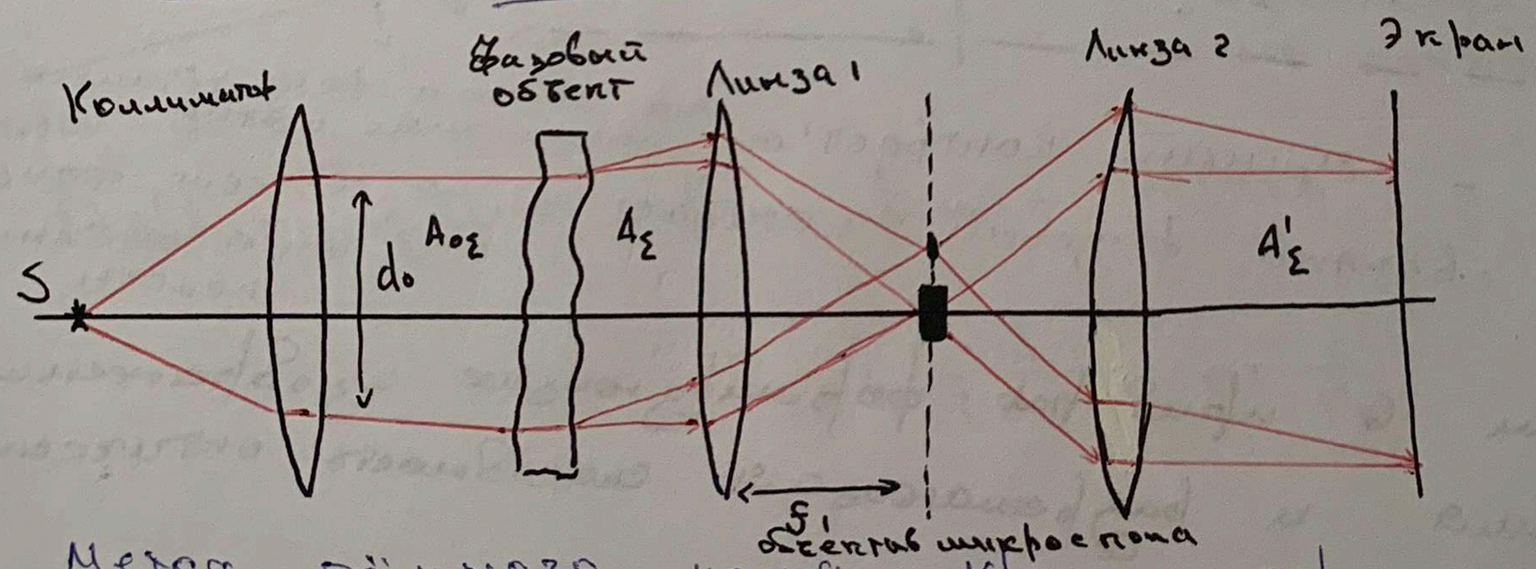
$$A_\Sigma(x,y) \cong A_{0\Sigma}(1 - i\Phi(x,y)) = A_{0\Sigma} - iA_{0\Sigma}\Phi(x,y)$$

$$I_\Sigma(x,y) = \frac{1}{2}|A_\Sigma| = I_{0\Sigma}|t(x,y)|^2 \cong I_{0\Sigma}(1 + \Phi^2(x,y)) \cong I_{0\Sigma}$$

не имеет никакой информации о распределении фазы и амплитуды $t(x,y)$

наблюдение очень неудачно, поэтому пользуются различными методами

Схема наблюдения в микроскопе



Метод тёмного поля. Кружок Эйри.

Если убрать фазовый объект, то в фокальной плоскости линзы мы будем наблюдать чёткое светлое пятно. ●

Его радиус – центральная часть дифракционной картины: кружок Эйри

$$r_g = \vartheta_g f_1 \overset{\text{для кругового отверстия}}{\cong} 1{,}22 \frac{\lambda}{d} f_1 \sim 0{,}1\,мм$$

угол дифракционного расширения

диаметр пучка

Он возникает, потому что апертура пучка, который проходит через линзу ограничена => дифракционная картина

76| Поставим в фокальную плоскость непрозрачный диск и перекроем кружок Эйри в присутствие фазового объекта. Тогда модифицированная комплексная амплитуда после перекрытия

$$A'_{\Sigma}(x,y) \cong A_{\Sigma}(x,y) - A_{0\Sigma} = A_{0\Sigma}(1 - i\Phi(x,y) - A_{0\Sigma} = -i A_{0\Sigma}\Phi(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I'(x,y) \approx I_0 \cdot \Phi^2(x,y)}$$

<u>Метод фазового контраста</u>

Поставим теперь фазовую пластинку в место кружка Эйри. Пластинку выбираем такую, чтобы изменение фазы:

$$\Delta\varphi = k_0(n-1)d = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k\text{ - целое число}$$

Тогда комплексную амплитуду вклада надо умножить на $e^{-i\Delta\varphi} = e^{-i(2k+1)\frac{\pi}{2}} = -i(-1)^k$:

$$A'_{\Sigma}(x,y) \cong -i(-1)^k A_{0\Sigma} - iA_{0\Sigma}\Phi(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I'_{\Sigma}(x,y) \cong I_{0\Sigma}\left(1 + 2(-1)^k\Phi(x,y)\right)}$$

степень светлоты и тёмности ~ фазовому контрасту

Если $k = 2l+1$ – тёмный контраст ← на светлом фоне тёмные полосы или пятна

$k = 2l$ – светлый фазовый контраст ← на светлом фоне ещё более светлые полосы

(24) Роль дифракции в приборах, формирующих изображение. Предел разрешения и разрешающая способность оптического прибора: микроскоп, телескоп.

Будем считать, что приборы с точки зрения геометрической оптики абсолютно идеальны, тоесть каждой светящейся точке светящейся поверхности формируется светящаяся точка в плоскости изображений.

Изображением светящейся точки в сопряжённой плоскости является дифракционная картина, состоящая из концентрических колец, окружающих центральный светлый кружок – кружок Эйри. Изображение объекта есть

77 | наложение таких кружков и дифракционных колец.

! Разрешающая способность оптических приборов ограничивается дифракцией Фраунгофера на их входной апертуре. !

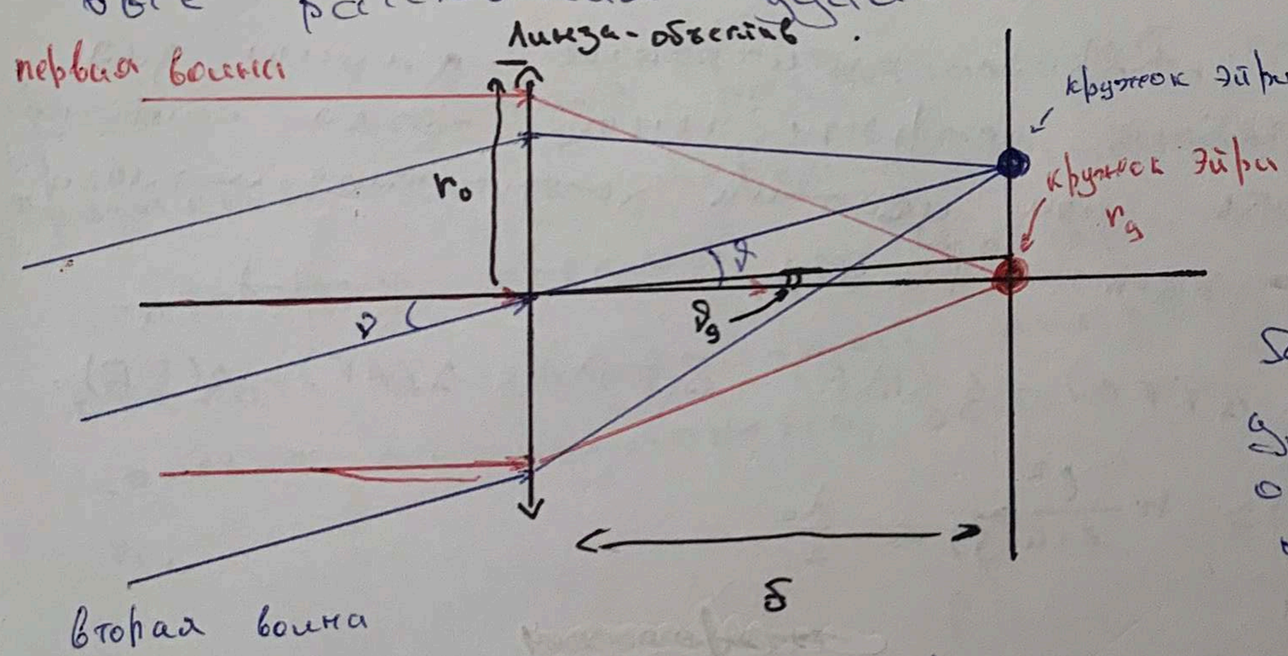
Предел углового (линейного) разрешения оптического прибора $\delta\vartheta$ (δl) - минимальное угловое (линейное) расстояние между двумя светящимися точками объекта, которые разрешает прибор.

Разрешающая способность (сила) оптического прибора:

$$\boxed{R = \frac{1}{\delta\vartheta}}$$

Телескоп

Оптический прибор, с помощью которого измеряют угловые расстояния удалённых объектов и их размеры.



Рассмотрим две светящиеся точки, которые находятся очень далеко от объекта, т.е. угловой размер объекта Ω такой, чтобы волна, приходящая в область разрешения объектива, была пространственно когерентна: $\Omega < \frac{\lambda}{d_0}$

Дифракционное расширение пучка

$$\vartheta_g = 1{,}22\frac{\lambda}{d_0} = 0{,}61\frac{\lambda}{r_0}$$

$$\Downarrow$$

$$r_g = \vartheta_g \delta$$

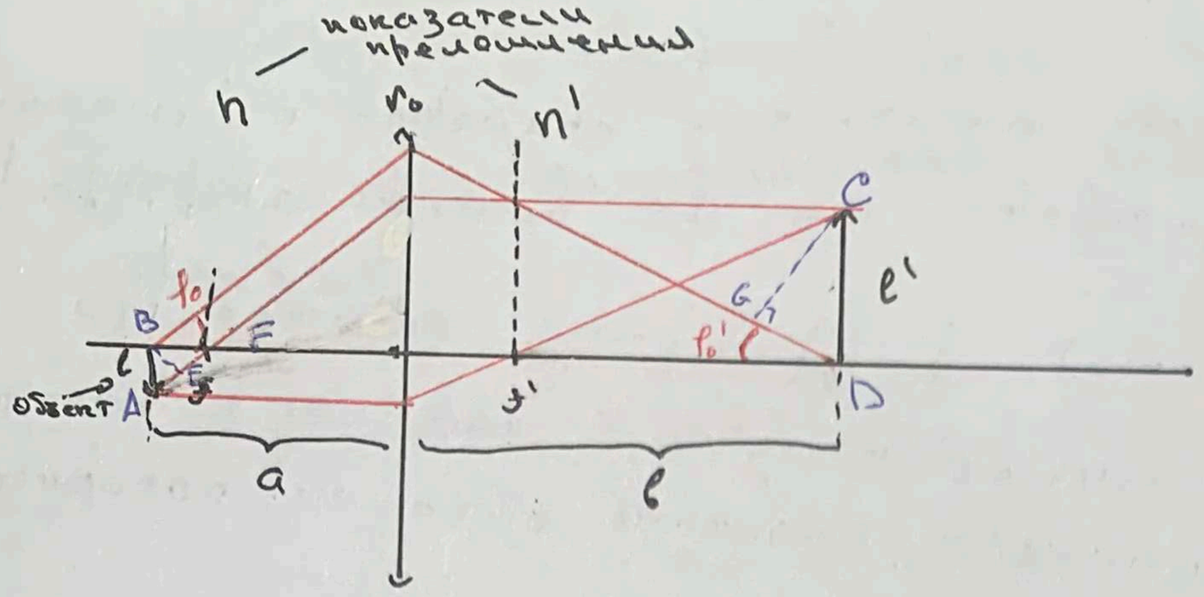
По критерию Рэлея:

$$\vartheta \geq \vartheta_g = 0{,}61\frac{\lambda}{r_0} = \delta\vartheta$$

$$\downarrow$$

$$R_\vartheta = \frac{1}{\delta\vartheta} = \frac{r_0}{0{,}61\lambda}$$

78) Микроскоп



Будем считать, что луч от основания объекта использует всю апертуру линзы ℓ_0

Увеличение:

$$\frac{\ell'}{\ell} = \frac{f}{a-f} \Rightarrow \ell' = \ell\,\frac{f}{a-f}$$

Уравнение для такой линзы:

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{b} = 1 \Rightarrow \frac{f'}{b} = 1 - \frac{f}{a} = \frac{a-f}{a} \ll 1$$

$$\Downarrow$$

$$b \gg f' > r_0 \Downarrow \ell_0' \ll 1$$

В случае <u>виртуальных</u> изображений, когда каждой светящейся точке объекта соответствует одна точка изображения, оптические длины всех лучей, соединяющих определённые сопряжённые точки объекта и его изображения одинаковы.

Найдём условие, при которых оптические длины для лучей, соединяющих любые сопряжённые точки одинаковы. Это будет происходить при условии достаточно малого поперечного размера объекта $\ell \ll a-f$

оптические длины лучей

$$\Delta(AFC) - \Delta(BFD) = \Delta(AF) + \Delta(FC) - \Delta(BF) - \Delta(FD) = \Delta(AF) - \Delta(BF) =$$

$$= n\sqrt{(a-f)^2+\ell^2} - n(a-f) \cong n\frac{\ell^2}{2(a-f)} \ll \frac{\lambda_0}{2}$$

или

$$\ell \ll \sqrt{\frac{\lambda_0}{n}(a-f)} = \sqrt{\lambda(a-f)}$$

Рассмотрим параллельный пучок лучей, испущенных объектом под произвольным углом ℓ_0 к оптической оси. Параллельность рассматриваемого пучка после прохождения линзы нарушится, однако ввиду малой высоты объекта и того, что при $a-f \ll a$ и $b \gg f$, будем считать, что расхождение мало и лучи наклонены одинаково к оптической оси под углом ℓ_0'. Запишем условие равенства оптических длин хода:

$$\Delta(AEC) = \Delta(AE) + \Delta(EC) = \Delta(BGD) = \Delta(BG) + \Delta(GD)$$

С учётом $\Delta(EC) = \Delta(BG) \Rightarrow \Delta(AE) = \Delta(GD)$

79) В результате

$$\boxed{n l \sin\varepsilon_0 = n' l' \sin\varepsilon_0'}$$ ← уравнение синусов Аббе

По критерию Рэлея разрешение будет при:

$$l' \geq r_g' = \delta_g' \beta = 0{,}61 \frac{\lambda_0}{n' r_0} \beta =$$

$$= \frac{0{,}61 \lambda_0}{n' \underbrace{tg\, \varepsilon_0'}_{\approx \sin\varepsilon_0'}}$$

$$\Downarrow$$

$$n l \sin\varepsilon_0 = n' l' \sin\varepsilon_0' \geq 0{,}61 \lambda_0$$

$$\Downarrow$$

$$l \geq \frac{0{,}61 \lambda_0}{n \sin\varepsilon_0} = \delta l \simeq 0{,}4 \text{ мкм}$$

← числовая апертура объектива

$$\Downarrow$$

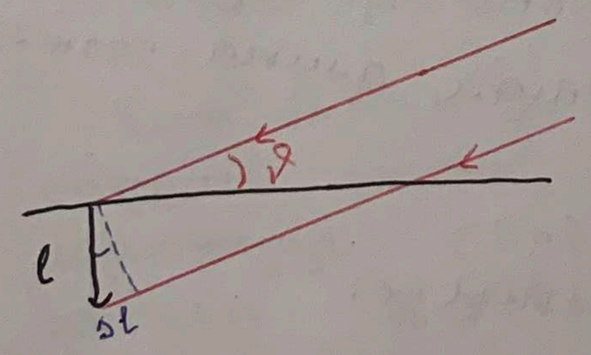
$$R = \frac{1}{\delta l} = \frac{n \sin\varepsilon_0}{0{,}61 \cdot \lambda_0}$$

Для повышения разрешающей способности микроскопа применяют иммерсию - заполнение пространства между покровным стеклом, на котором размещается исследуемый объект, и фронтальной линзой объектива прозрачной жидкостью с возможно большим показателем преломления n.

↑

Некогерентное освещение

Рассмотрим теперь когерентное излучение. Облучаем объект узким светом.

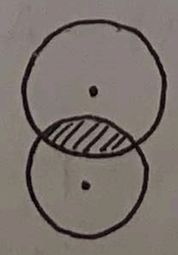


Разность фаз между волнами, приходящими к вторичным источникам:

$$\Delta\varphi = k l \sin\vartheta = \frac{2\pi l}{\lambda} \sin\vartheta$$

Подберём такой угол, чтобы

$$\Delta\varphi = (2k_1 + 1)\pi$$



k_1 - целое

80 | Уравнение двухволновой интерференции

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\underbrace{\Delta\varphi}_{\text{нечётное}})$$

нечётное => $\cos\Delta\varphi = -1$ => I_{min}

$$\sin\vartheta = \frac{(2k_1+1)\pi}{2\pi l}\lambda < 1$$

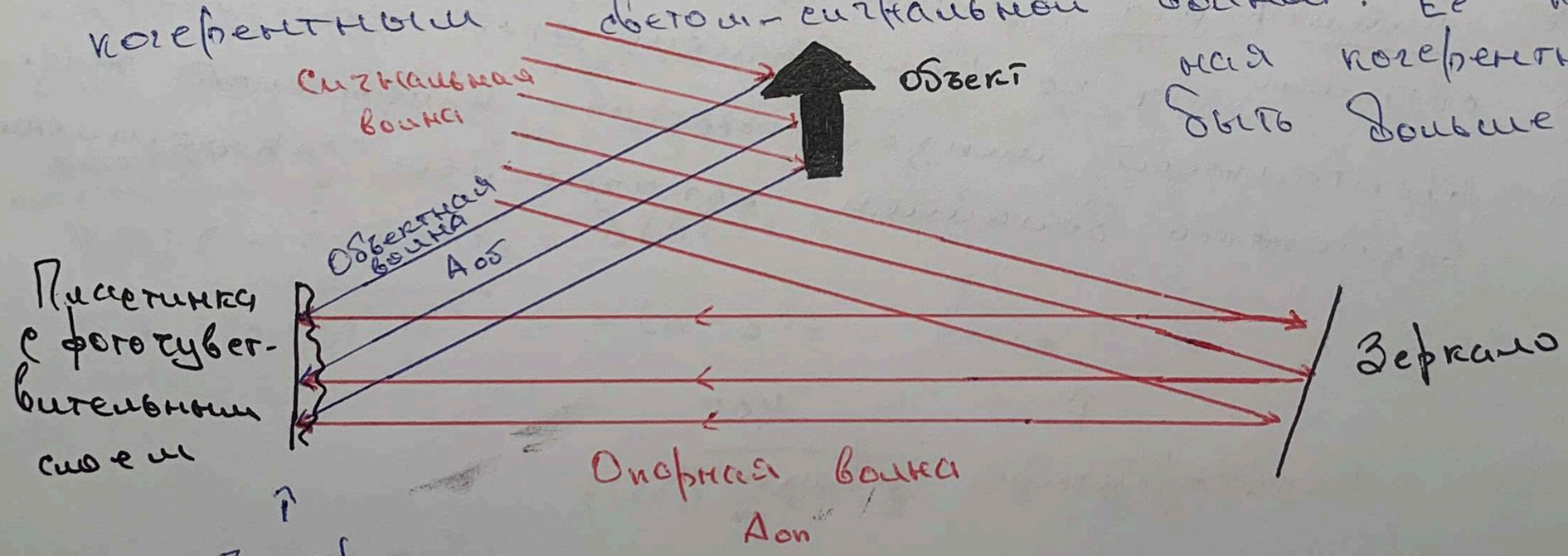
Возьмём $k_1 = 0$, тогда

$$l > \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_0}{n\cdot 2} = 8l \approx 0{,}17$$

(25) Запись и восстановление светового поля. Голография. Схемы голографической записи и восстановления светового поля.

Основная идея: фотографируется не само объемное световое поле $A_{об}$, идущее от светящегося объекта, а картина интерференции этого поля с когерентной опорной волны $A_{оп}$.

Рассмотрим некий объект. Эта стрелка будет освещаться когерентным светом-сигнальной волной. Её пространственная когерентность должна быть больше объекта



Ещё одно важное условие - временной когерентности: разность хода этих волн должна быть достаточно малой, т.е. меньше, чем соответствующая длина когерентности.

По принципу суперпозиции на пластинке:

$$A(x,y) = A_{об}(x,y) + A_{оп}$$

$$I(x,y) = \frac{1}{2}|A(x,y)|^2 = \frac{1}{2}\underbrace{|A_{об} + A_{оп}|^2}_{(A_{об}+A_{оп})(A_{об}^* + A_{оп}^*)} = I_{оп} + I_{об} + \frac{1}{2}A_{оп}A_{об}^* + \frac{1}{2}A_{оп}^*A_{об}$$

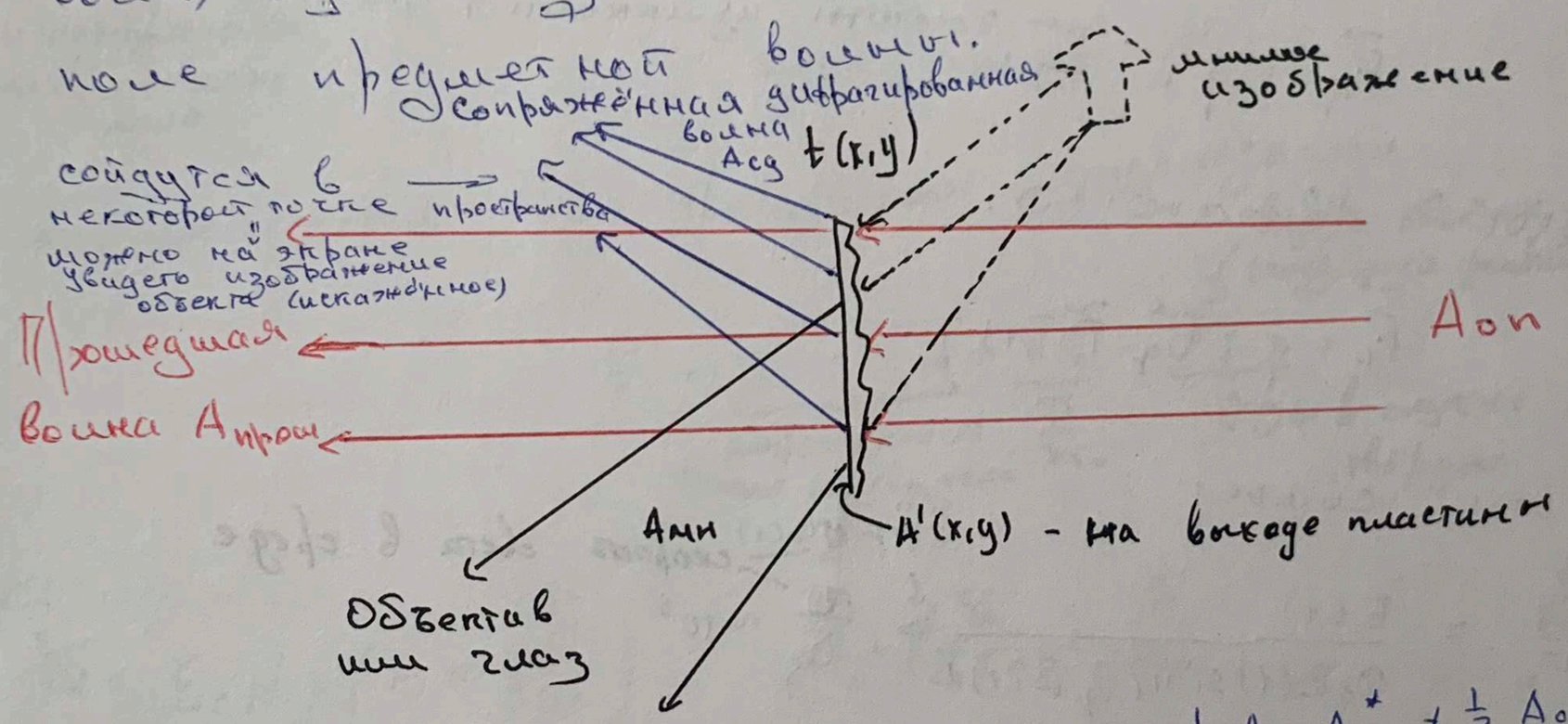
811 В результате такого воздействия на пластинку в ней происходят изменения оптических свойств – меняется функция пропускания:

зависит от того как долго происходит воздействие и чувствительности пластинки, интенсивности

пластинка непрозрачные почти прозрачные → $t(x,y) = 1 \Longrightarrow t(x,y) = 1 - \alpha I(x,y)$

в результате воздействия происходит почернение некоторых областей: чем дольше-тем больше

Для восстановления светового поля голограмму освещают опорной волной $A_{оп}$. В результате дифракции опорной волны на голограмме возникает несколько световых волн, одна из которых в точности повторяет поле предметной волны.

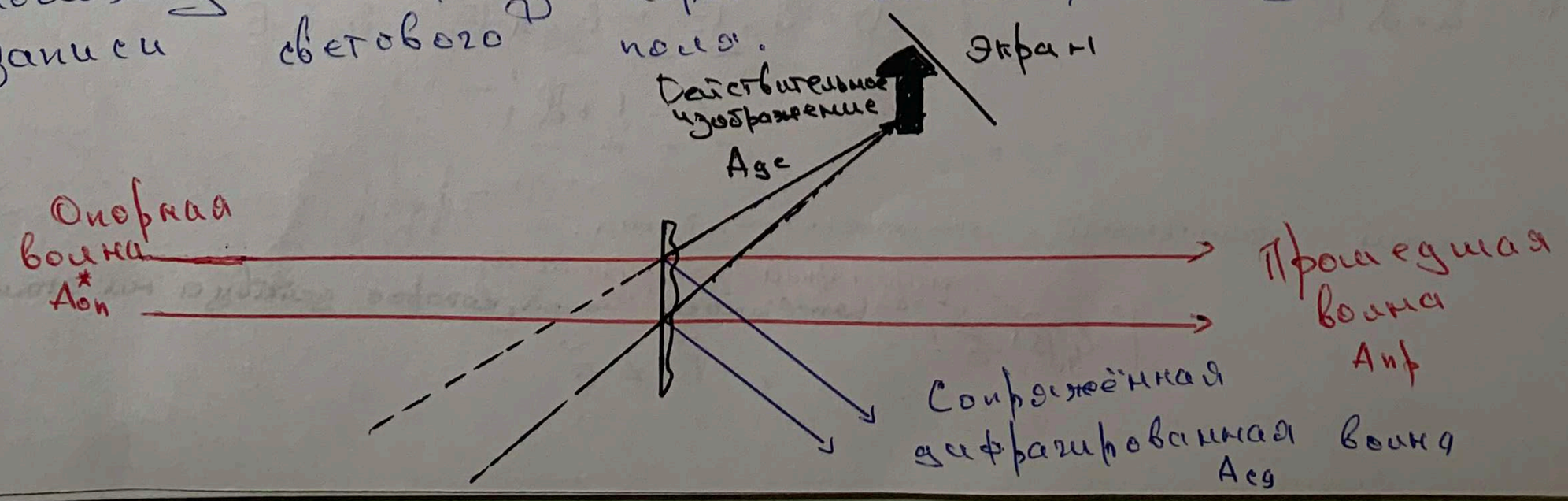


$$A'(x,y) = A_{оп}\, t(x,y) = A_{оп} - \alpha A_{оп}\left(I_{оп} + I_{об} + \frac{1}{2} A_{об} A_{оп}^* + \frac{1}{2} A_{оп} A_{об}^*\right) =$$

$$= \underbrace{A_{оп}(1 - \alpha I_{об} - \alpha I_{оп})}_{A_{прош}} - \underbrace{\alpha \overset{=const(x,y)}{I_{оп}} A_{об}}_{\text{волна, полностью подобная объектной } A_{мн}} - \frac{1}{2}\alpha \underbrace{A_{оп}^2 A_{об}^*}_{e^{-i(-k_x x - k_y y)}} =$$

$$= A_{прош} + A_{мн} + A_{сд}$$

Для восстановления светового поля голограмму можно освещать также и опорной волной, направленной в противоположную сторону опорной волны, использованной при записи светового поля.



82| $A'(x,y) = A^*_{on}\, t(x,y) = A^*_{on} - \alpha I(x,y) A^*_{on} = A^*_{on} - \alpha(I_{on} A^*_{on} + I_{об} A^*_{on} + I_{on} A^*_{об} + \frac{1}{2} A^{*2}_{on} A_{об})$

$= (1 - \alpha I_{on} - \alpha I_{об}) A^*_{on} - \alpha I_{on} A^*_{об} - \frac{1}{2} \alpha A^{*2}_{on} A_{об} = A_{пр} + A_{ge} + A_{cg}$

(26) Дисперсия света. Поляризуемость молекулы и вектор поляризации. Классическая электронная теория дисперсии. Формула Лоренца-Лоренца. Плазменная частота.

Дисперсия – зависимость оптических характеристик среды от частоты излучения или длины волны.

Принцип воздействия светового поля на среду:

Сила, действующая со стороны электрического поля

частоты изменения $\nu \sim 10^{15}$ Гц

$$\vec{F}_q = q\vec{E}(t)$$

Если заряды двигаются:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}_q \vec{B}(t)]$$

Сравним эти силы:

$\sin = 1$
$E(t) = v B(t)$

скорость света в среде

$$\frac{F_q}{F_L} = \frac{E(t)}{v_q B(t) \sin(\vec{v}_q \vec{B}(t))} \overset{!}{>} \frac{v}{v_q} \sim 10^5$$

$\Downarrow$

Будем описывать состояние электрического поля в среде

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

электрический дипольный момент атомов и молекул

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i(\Delta V)} \vec{p}_i}{\Delta V} = \sum_j N_j \vec{p}_j = N\langle \vec{p} \rangle$$

макроскопический объём

концентрация типов молекул

диэлектрическая восприимчивость

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \varkappa \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \varkappa \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

$$\boxed{\varepsilon = 1 + \varkappa}$$

Электрический дипольный момент атома:

молекулярная поляризуемость

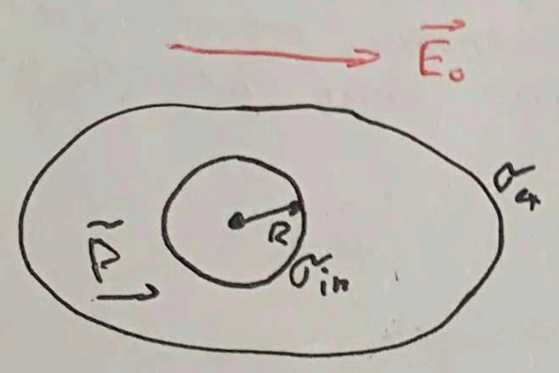
напряжённость поля, которое действует на атом

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \beta \vec{E}', \quad \vec{E}' \neq \vec{E}$$

Тогда

$$\vec{P} = N \cdot \vec{p} = \varepsilon_0 N \beta \vec{E}'$$

Рассмотрим неподвижный линейный, изотропный, однородный диэлектрик во внешнем электрическом поле. Выделим некий макроскопический объём.



$L \gg R \gg a \simeq (2 \div 5)\, 10^{-10}$ м

L — характерный линейный размер неоднородности электрического поля

a — расстояние между атомами

Результат поляризации, т.е. пространственное перераспределение связанных зарядов — появление поверхностных зарядов σ_{ex}.

Если рассматривать всю часть тела без сферического объёма, то на внутренней поверхности тоже появятся поверхностные заряды σ_{in}.

В соответствие с принципом суперпозиции:

$$\vec{E}' = \underbrace{\vec{E}_0 + \vec{E}_{ex}}_{\text{напряжённость поля внутри тела } \vec{E}} + \underbrace{\vec{E}_{in}}_{\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}} + \underbrace{\vec{E}_{dip}}_{=0 \leftarrow \text{в случае высокосимметричных твёрдых тел}}$$

$\vec{E}_{dip}$ — внутри объёма (создаются диполи)

$$\vec{E} = \varepsilon_0 N \beta \left(E + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right) = \varepsilon_0 N \beta \left(\frac{\vec{E}}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} + \frac{\vec{E}}{3\varepsilon_0}\right)$$

$$1 = N\beta \frac{(\varepsilon + 2)}{3(\varepsilon - 1)} \Rightarrow \boxed{\frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} = \frac{N\beta}{3}} \leftarrow$$

Формула Клаузиуса-Моссоти или Лоренц-Лорентца

Будем рассматривать случай немагнитных сред $\mu = 1 \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{\varepsilon}$,

Тогда

$$\boxed{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N\beta}{3} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}}$$

Если газы разреженные: $N\beta \ll 1$, тогда

$$\boxed{n^2 - 1 = \varepsilon - 1 = N\beta}$$

84 Рассмотрим атом с одним оптическим электроном массой m и зарядом q. Учтём, что $\frac{m_p}{m_e} \approx 1836$ и $F_E \gg F_B$

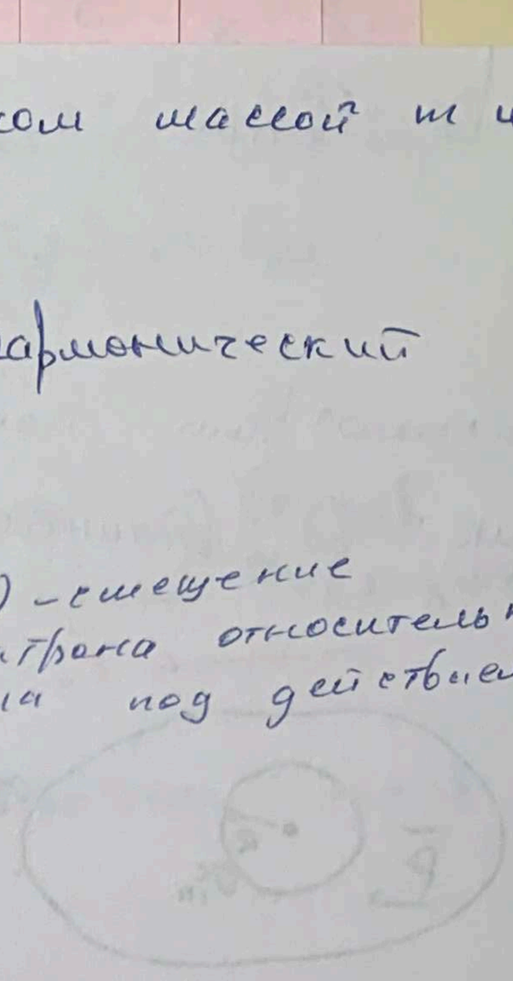
Электрон рассматривается как затухающий гармонический осциллятор:

сила, благодаря которой электрон не покидает атома

$$m\ddot{\vec{x}} = -k\vec{x} - \gamma\dot{\vec{x}} + q\vec{E}'$$

сила трения, которая учитывает поглощение и излучение света электроном

$\vec{x}(\vec{E}')$ – смещение электрона относительно атома под действием $\vec{E}'$



$$\ddot{\vec{x}} + 2\delta\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} = \frac{q}{m}\vec{E}'$$

δ – коэффициент затухания $= \frac{\gamma}{2m}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – частота собственных колебаний электрона в атоме

Рассмотрим гармоническую волну: ($x \le r_{ат} \ll \lambda$)

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = A_0(\vec{r})e^{i\omega t}$$

$\Downarrow$

по отношению к x постоянна

Будем искать решение в виде $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{i\omega t}$:

$$-\omega^2\vec{x}(t) + i2\delta\omega\vec{x}(t) + \omega_0^2\vec{x}(t) = \frac{q}{m}\vec{E}'(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{x}(t) = \frac{q}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}\vec{E}'$$

- В любой момент времени $\vec{x}(t) \uparrow\uparrow \vec{E}(t)$
- $\vec{x}(\underline{\omega}, \underline{\omega_0}, \underline{\delta})$
- $\vec{x}$ – комплексная величина

электрический дипольный момент

комплексная величина

$$\vec{P} = q\vec{x} = \frac{q^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}\vec{E}' = \varepsilon_0\beta\vec{E}' \Rightarrow \beta = \frac{q^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}$$

Тогда

$$\frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 2} = \frac{\hat{\varepsilon} - 1}{\hat{\varepsilon} + 2} = \frac{\omega_n^2}{3}\cdot\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}$$

$\omega_n = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}}$ – плазменная частота

85 | (27) Дисперсия и поглощение света. Комплексный показатель преломления. Закон Бугера. Зависимость показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты. Нормальная и аномальная дисперсии.

Представим комплексную диэлектрическую проницаемость в виде:

$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - i\varepsilon'$

Уравнение Максвелла:

$n = \sqrt{\varepsilon}$

$\downarrow$

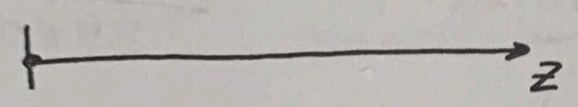
$n^2 = \varepsilon$

Показатель преломления:

$\tilde{n} = n - in'$

Волновое число: $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} n \rightarrow \hat{k} = \frac{\omega}{c}\hat{n} = \frac{\omega}{c} n - i\frac{\omega}{c} n'$

Рассмотрим распространение плоской волны вдоль z в некой среде.



$$A(z) = A_0 e^{-i\hat{k}z} = A_0 e^{-ikz} e^{-k'z} = A_0 e^{-ikz} e^{-\frac{\omega}{c}n'z}$$

$$I = \frac{1}{2}|A(z)|^2 = \underset{z=0}{I_0} e^{-z\frac{\omega}{c}n'z}$$

Интенсивность падает экспоненциально. Введём соответствующий коэффициент поглощения: $\alpha = 2\frac{\omega}{c}n'$

$$I = I_0 e^{-\alpha z} \leftarrow \text{Закон Бугера}$$

Вывод: наличие мнимой составляющей в показателе преломления соответствует наличию поглощения.

Для разреженных сред $\Rightarrow \hat{n} \sim 1$

$$\hat{n}^2 - 1 = \omega_n^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}$$

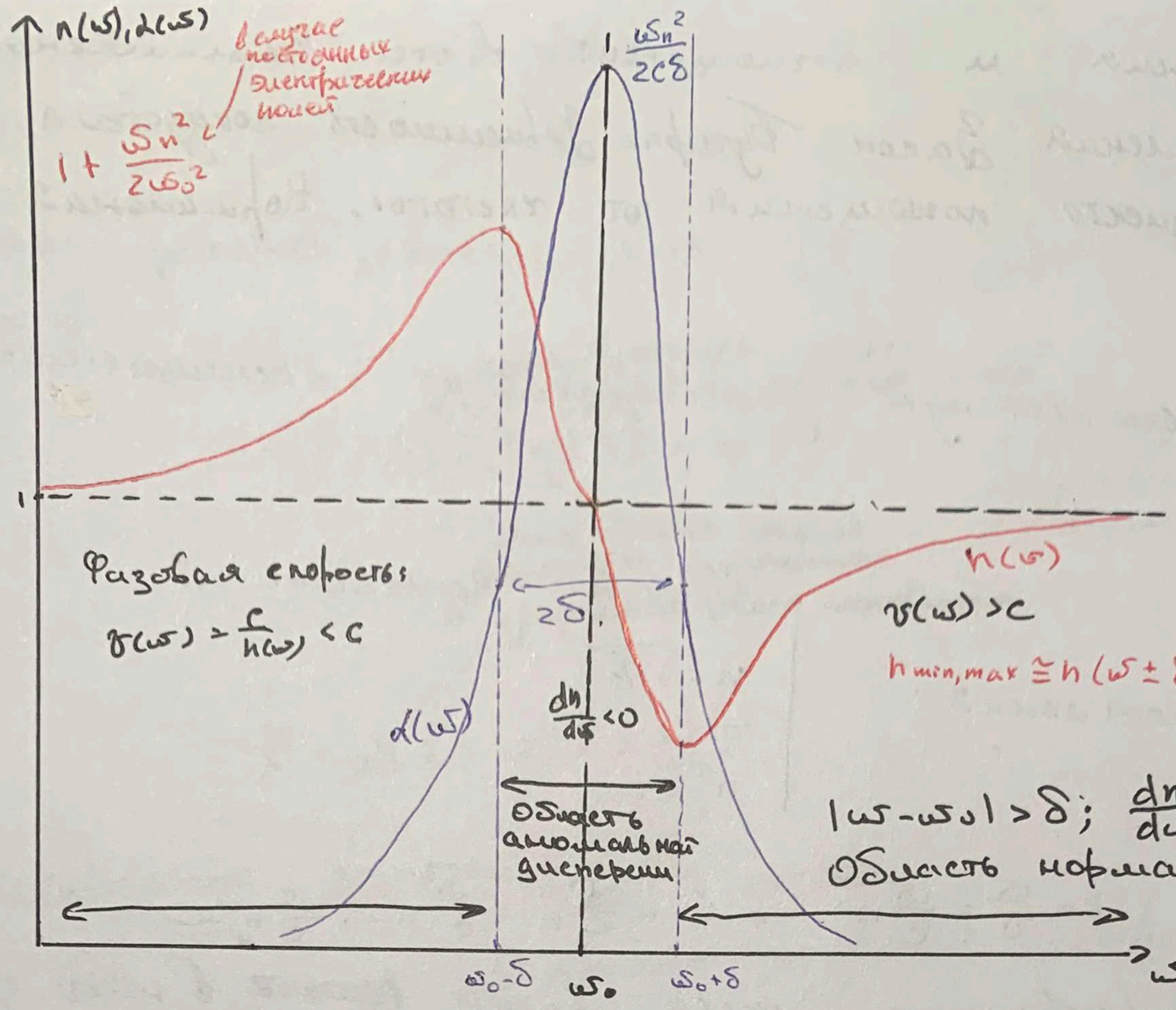
$$\hat{n} \cong 1 + \frac{\omega_n^2}{2} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}$$

← умножим числитель и знаменатель на комплексно сопряжённый знаменатель и возьмём вещественную часть

$$n(\omega) = 1 + \frac{\omega_n^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{2\omega}{c} n'(\omega) = \frac{\omega_n^2}{c} \cdot \frac{2\delta\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

86



Пусть $\delta \ll \omega_0$

⇓

для $\alpha(\omega)$ форма линии Лоренца

$v(\omega)>c$

$n_{min,max} \cong n(\omega\pm\delta) \cong 1 \mp \frac{\omega_n^2}{8\omega_0\delta}$

$|\omega-\omega_0|>\delta$; $\frac{dn}{d\omega}>0$

Область нормальной дисперсии

прозрачные среды

$n'\approx 0$

В эксперименте для прозрачных сред определяется молекулярная рефракция:

молярная масса

$$R \equiv \frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{\mu}{\rho} = \frac{N\beta}{3}\frac{\mu}{\rho} = \left|\cdot\frac{1/N}{1/N}\right| = \frac{N_A\beta}{3} = const(\rho)$$

Дисперсия в области низких частот:

$$n-1 = \frac{\omega_n^2}{2}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2} \cong \frac{\omega_n^2}{2}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} = \frac{\omega_n^2}{2\omega_0^2}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

$$\boxed{n-1 = A+\frac{B}{\lambda^2}}$$ ← Дисперсионная формула Коши

Дисперсия в области высоких частот:

$$\omega \gg \omega_0,\ \hat{n}\to n\to 1 \Rightarrow \frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2} \cong \frac{n^2-1}{3} = \frac{\omega_n^2}{3}\cdot\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i2\delta\omega} \cong -\frac{\omega_n^2}{3\omega^2}$$

$$\boxed{n^2 \cong 1-\frac{\omega_n^2}{\omega^2}}$$

В общем случае:

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\hat{\varepsilon}-1)\vec{E} = \sum_j N_j\vec{p}_j = \sum_j N_j\varepsilon_0\hat{\beta}_j\vec{E}' = \varepsilon_0\left(\sum_j N_j\hat{\beta}_j\right)\vec{E}'$$

87 Тогда

по различным типам

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = 1 + \sum_j N_j \hat{\beta}_j = 1 + \omega_n^2 \sum_j \frac{\delta_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i2\delta_j\omega}$$

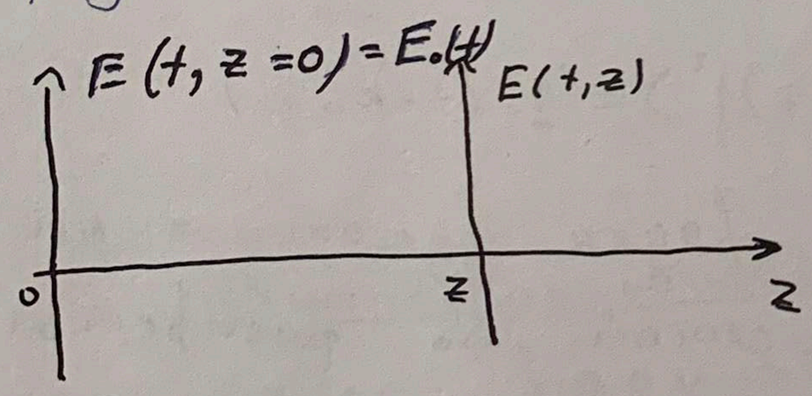
$$\hat{n}(\omega) = 1 + \frac{\omega_n^2}{2} \sum_j \frac{\delta_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i2\delta_j\omega}$$

для электронов

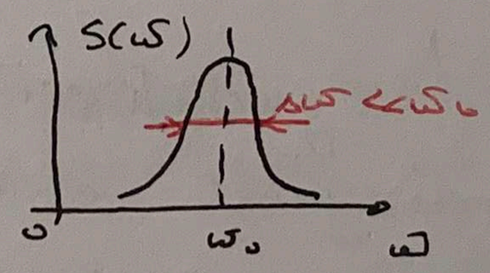
$$\delta_j = \frac{N_j q_j^2}{m_j}\left(\frac{m}{Nq^2}\right) = \frac{m}{m_j}$$ – сила j-го осциллятора

(28) Распространение светового импульса в диспергирующей среде. Фазовая и групповая скорости. Формула Рэлея. Дисперсионное расплывание светового импульса. Дисперсионная длина

Рассмотрим прозрачные диспергирующие среды, т.е. рассмотрим такие частоты световых волн, которые лежат вне полосы поглощения этой средой $|\omega - \omega_0| > \delta \Rightarrow$ можно пренебречь мнимой частью всех характеристик среды: $n(\omega)$ – вещественное, $\frac{dn}{d\omega} > 0$.



Пока мы рассматриваем световой импульс, то



Проведём расчёт в три этапа

(1) Фурье-синтез

комплексная спектральная амплитуда

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_0(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$E_0(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t')\, e^{-i\omega t'}\, dt'$$

независимые переменные

Представляем световой импульс как совокупность соответствующих гармонических волн

(2) Спектральное преобразование

$$E(i\omega, z) = E_0(i\omega)\, e^{-ikz}, \quad k = k(\omega)$$

(3) Фурье-синтез

$$E(t, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(i\omega, z)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} E_0(t')\, e^{-i\omega t'}\, e^{-ikz}\, e^{i\omega t}\, d\omega\, dt'$$

88 | $\Delta\omega \ll \omega_0 \Rightarrow k(\omega) = k_0 + k_0'(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}k_0''(\omega-\omega_0)^2 + \ldots$

ряд Тейлора

Рассмотрим два типа сред: • диспергирующие среды первого порядка: $k_0'(\omega-\omega_0) \gg \frac{1}{2}k_0''(\omega-\omega_0^2) \Rightarrow$ » чем следующие

$$k_0' > \frac{1}{2}k_0''(\omega-\omega_0) \geq \frac{1}{4}k_0''\Delta\omega$$

• диспергирующие среды второго порядка.

① Первого порядка:

$k(\omega) \cong k_0 + k_0'(\omega-\omega_0)$

Меняя порядок интегрирования, получим:

$$E(t,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_0(t')e^{-i(k_0+k_0'(\omega-\omega_0))z}e^{i\omega(t-t')}d\omega dt' =$$

$$= e^{-i(k_0-k_0'\omega_0)z}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(E_0(t')\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(-k_0'z+t-t')}d\omega}_{\delta\text{-функция}}\Big)dt' =$$

$$= e^{-i(k_0-k_0'\omega_0)z}\int_{-\infty}^{\infty}E_0(t')\,\delta(t'-(t-k_0'z))dt' = e^{-i(k_0-k_0'\omega_0)z}E_0(t-k_0'z)$$

$$I(t,z) = \frac{1}{2}\langle|E(t,z)|^2\rangle = \frac{1}{2}\langle|E_0(t-k_0'z)|^2\rangle = I_0(t-k_0'z)$$

В среде с дисперсией первого порядка узкополосный световой импульс с несущей частотой ω_0 распространяется без изменения формы с постоянной групповой скоростью U_0:

$$d(t-k_0'z) = dt - k_0'dz = 0$$

$$U_0 = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{k_0'} = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\omega_0} - const$$

То есть энергия переносится волной со скоростью U_0

Фазовая скорость:

$$k = \frac{\omega}{v} \rightarrow v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k(\omega)} = v(\omega)$$

Групповая скорость:

$$U = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\omega} = U(\omega)$$

89 | Найдём соотношение между скоростями:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$$

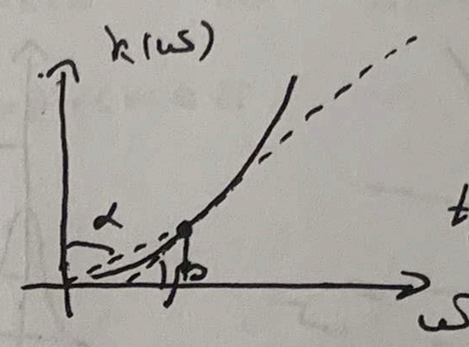
$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c}\left(n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}\right)$$

$$U_0 = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n(\omega) + \omega \underbrace{\frac{dn}{d\omega}}_{>0}} = \frac{v(\omega)}{1 + \frac{\omega}{n(\omega)} \frac{dn}{d\omega}}$$

т.к. среда прозрачная

$$\Downarrow$$

$$U \le v \; ; \quad U \le c$$



$tg\,\alpha = v$

$tg\,\beta = U$

Формула Рэлея

$$k = \frac{\omega}{v} \to \omega = k(\omega) v(\omega)$$

$$\frac{d\omega}{dk} = U(\omega) = v(\omega) + k(\omega) \frac{dv}{dk} \Rightarrow \boxed{U(\omega) = v(\omega) - \lambda \frac{dv}{d\lambda}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

(2) Диспергирующие среды второго порядка. Дисперсионное расплывание волновых пакетов.

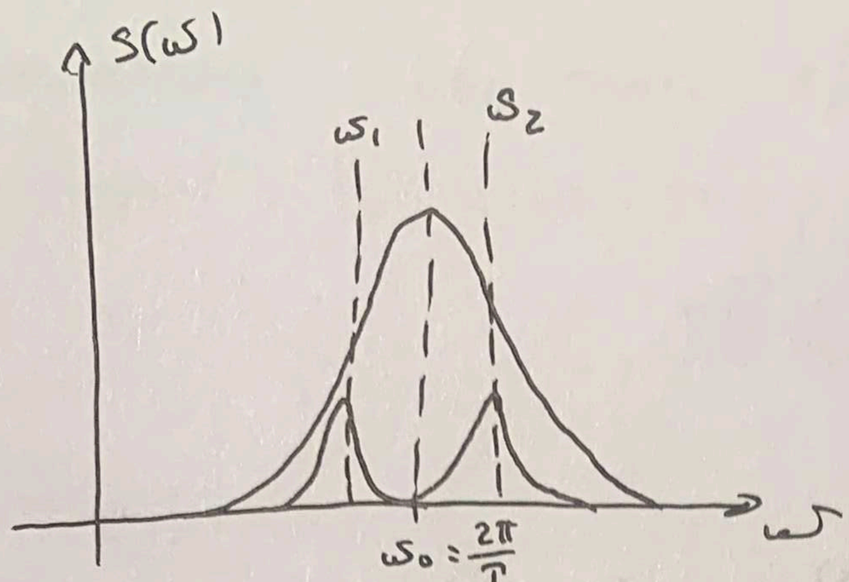
В мнимых прозрачных средах с дисперсией второго и более порядков групповая скорость $U(\omega)$ зависит от частоты света, имеет место дисперсия групповых скоростей

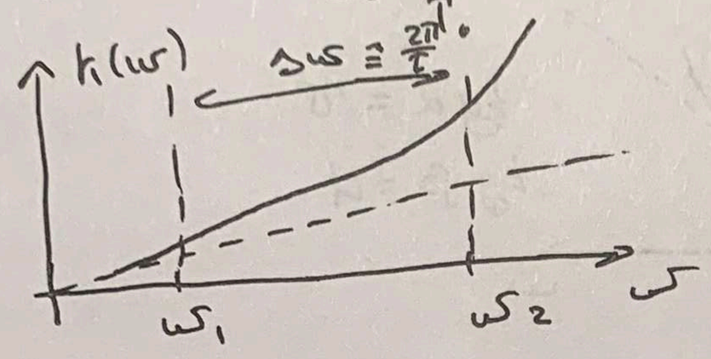
$$k(\omega) = k_0 + k_0'(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k_0''(\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

$$U(\omega) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{dk/d\omega} = \frac{1}{k_0' + k_0''(\omega - \omega_0) + \dots}$$

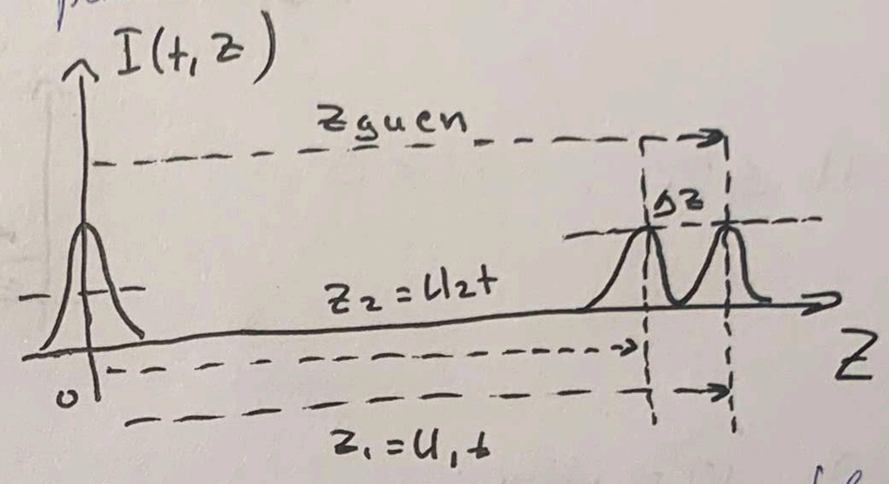
Рассмотрим два узкополосных волновых пакета (импульса) с частотами ω_1 и ω_2 на краях частотного интервала $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ исходного светового импульса.

При этом для волновых пакетов среда оказывается диспергирующей средой с дисперсией первого порядка.





Эти пакеты вначале находятся вместе в начале координат, а затем распространяются в пространстве с разными групповыми скоростями u_1 и u_2.
За время t эти пакеты пройдут расстояния z_1 и z_2 соответственно



В точке с координатой z_1 после фиксации первого пакета второй пакет будет зафиксирован через время:

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{u_2} = \frac{u_1 - u_2}{u_2} t = \frac{u_1 - u_2}{u_2 u_1} z_1 = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) z_1 =$$

$$= (k_2' - k_1') z_1 \cong k_0'' \Delta\omega z_1 \cong \frac{2\pi k_0''}{\tau} z_1$$

Из-за такой задержки между пакетами начнёт увеличиваться длительность импульса примерно на ту же величину.
Выберем расстояние $z_{диск}$ такое, чтобы задержка между пакетами Δt равнялась длительности импульса τ в начале процесса, и назовём её дисперсионной длиной импульса в данной среде, тогда:

$$\boxed{z_{диск} = \frac{\tau^2}{2\pi k_0''}}$$

Чем короче исходный импульс (шире его частотный спектр), тем быстрее он расплывается

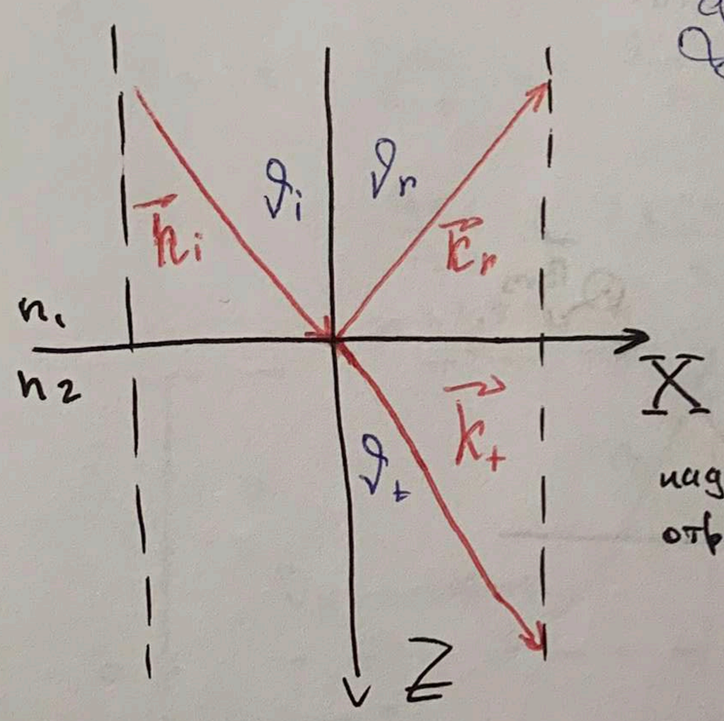
Дисперсионная длина светового импульса в среде – расстояние вдоль направления распространения светового импульса в прозрачной диспергирующей среде, на котором его

91 | длительность увеличивается вдвое

Дальняя дисперсионная зона светового импульса в среде - расстояния z, существенно превосходящие дисперсионную длину $z \gg z_{дисп}$. В дальней дисперсионной зоне импульс "забывает" свою первоначальную форму.

29 Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Законы отражения и преломления. Формулы Френеля, поляризация отражённой и прошедшей волн. Угол Брюстера.

Рассмотрим границу раздела двух изотропных и немагнитных диэлектриков. Будем считать, что на поверхности раздела двух сред не ни поверхностных свободных зарядов, ни токов проводимости.



Рассматриваем плоскую волну:

$$\vec{E} = \vec{A} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

падающая + отражённая $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$ $\quad \vec{E}_2 = \vec{E}_t$ - прошедшая

Граничное условие $\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$:

$$\vec{A}_{i\tau} e^{i(\omega_i t - \vec{k}_i \vec{r})} + \vec{A}_{r\tau} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \vec{r})} = \vec{A}_{t\tau} e^{i(\omega_t t - \vec{k}_t \vec{r})}$$

В любой момент времени t:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t$$

Для всех точек, лежащих на границе раздела двух сред:

$$\vec{k}\vec{r} = (\vec{k}_n + \vec{k}_\tau)\vec{r}_\tau = \vec{k}_\tau \vec{r}_\tau$$

$$\vec{k}_{i\tau} = \vec{k}_{r\tau} = \vec{k}_{t\tau}$$

$$k_i \sin\vartheta_i = k_r \sin\vartheta_r = k_t \sin\vartheta_t$$

$$k_0 n_1 \sin\vartheta_i = k_0 n_1 \sin\vartheta_r = k_0 n_2 \sin\vartheta_t$$

$$n_1 \sin\vartheta_i = n_1 \sin\vartheta_r = n_2 \sin\vartheta_t$$

92| ① Частоты падающей, отражённой и преломлённой волн равны

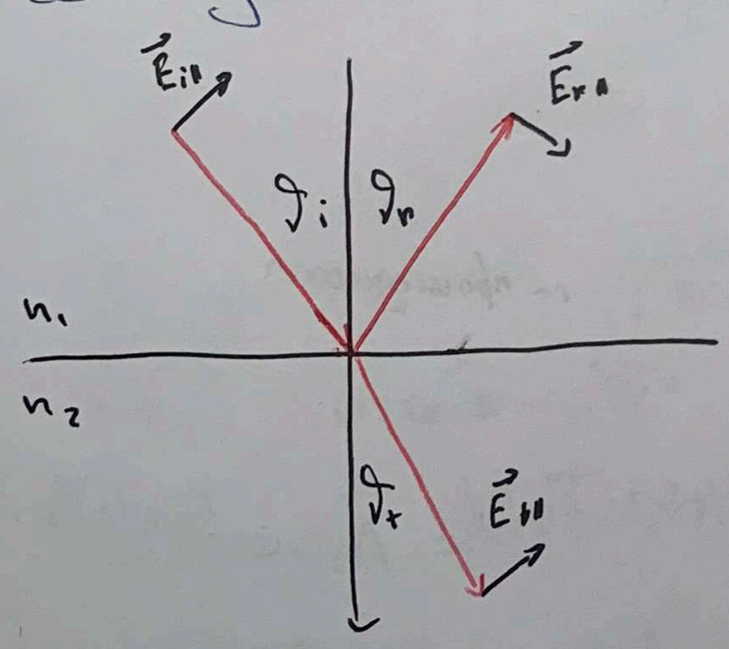
② Волновые векторы падающей, отражённой и преломлённой волн лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела двух сред в точке падения

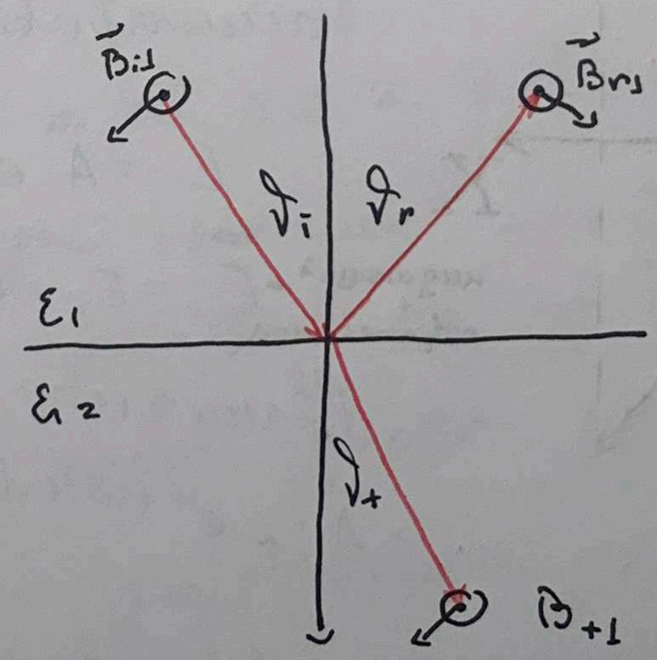
③ Угол падения равен углу отражения $\vartheta_i = \vartheta_r$

④ Закон Снеллиуса $\frac{\sin\vartheta_i}{\sin\vartheta_t} = \frac{n_2}{n_1} = n$

Плоскость падения плоской световой волны - плоскость, образованная волновым вектором падающей волны и нормалью к поверхности раздела сред.

Вводим локальные системы координат для описания напряжённости электрического поля и описания магнитной индукции. Введём их так, чтобы при нормальном падении положительное направление основной компоненты полевых векторов совпадали.





Падающую плоскую волну представим в виде суперпозиции двух плоских волн с взаимно перпендикулярными поляризациями - параллельно $\vec{E}_\parallel$ и перпендикулярно $\vec{E}_\perp$ плоскости падения.

Направления амплитуд полей на рисунке выбраны таким образом, чтобы все векторы $\vec{E}_\parallel$ были „слева" от векторов $\vec{k}$, тогда все векторы $\vec{H} \sim \vec{k}\times\vec{E}_\parallel$ направлены в одну сторону.

93 | Граничные условия:

$$\vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n}$$
$$\vec{B}_{2n} = \vec{B}_{1n}$$
$$\vec{E}_{2\tau} = \vec{E}_{1\tau}$$
$$\vec{H}_{2\tau} = H_{1\tau}$$

свойства плоских волн

$$[\vec{n}\vec{E}] = v\vec{B}$$
$$[\vec{n}\vec{H}] = -v\vec{D}$$
$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H$$

Материальные уравнения

$$\vec{D}_{1,2} = \varepsilon_0\varepsilon_{1,2}\vec{E}_{1,2}$$
$$\vec{B}_{1,2} = \mu_0\vec{H}_{1,2}$$

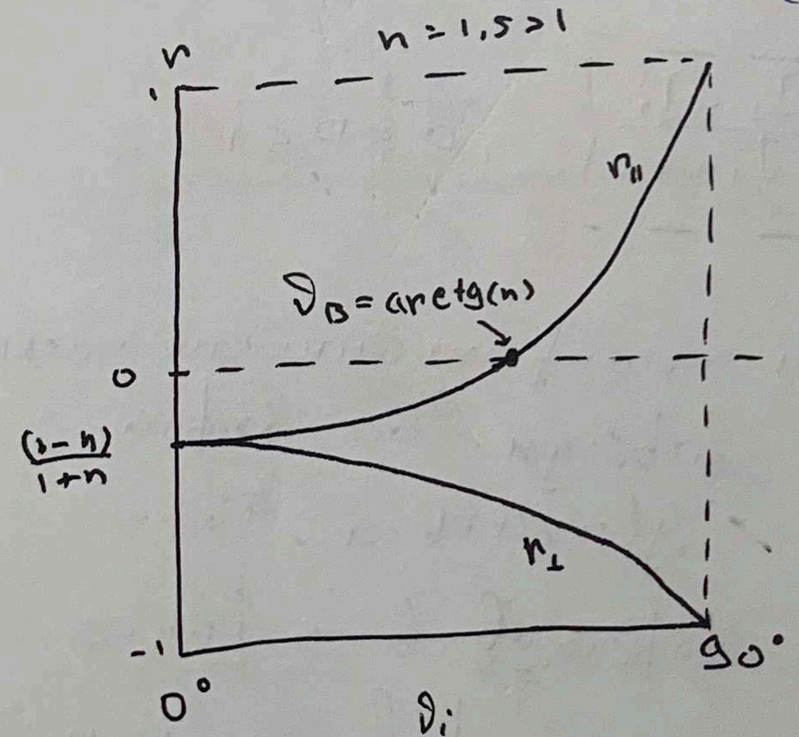
Комплексные коэффициенты отражения ($r_\parallel, r_\perp$) и пропускания ($t_\parallel, t_\perp$) (по амплитуде):

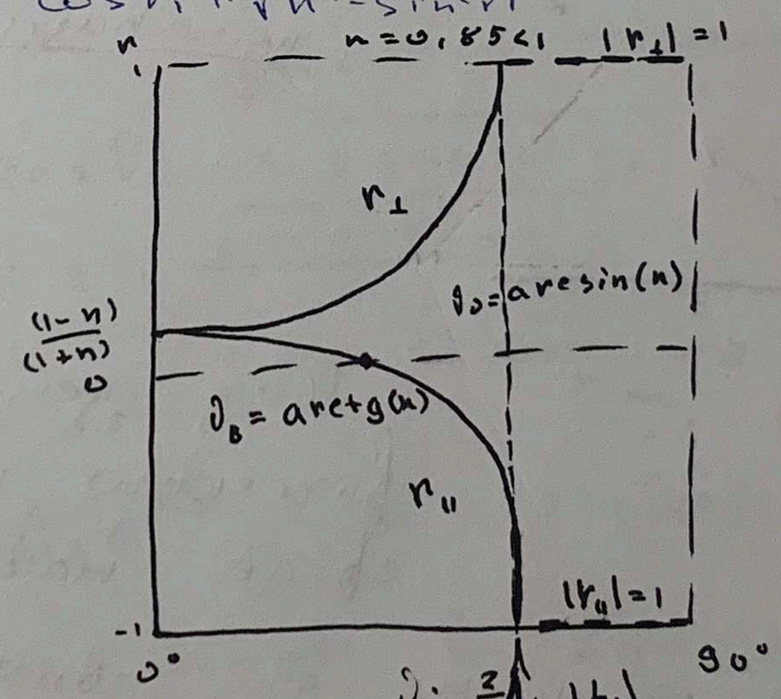
$$r_\parallel \equiv \frac{A_{r\parallel}}{A_{i\parallel}} = -\frac{tg(\vartheta_i-\vartheta_t)}{tg(\vartheta_i+\vartheta_t)} = -\frac{n^2\cos\vartheta_i - \sqrt{n^2-\sin^2\vartheta_i}}{n^2\cos\vartheta_i + \sqrt{n^2-\sin^2\vartheta_i}}$$

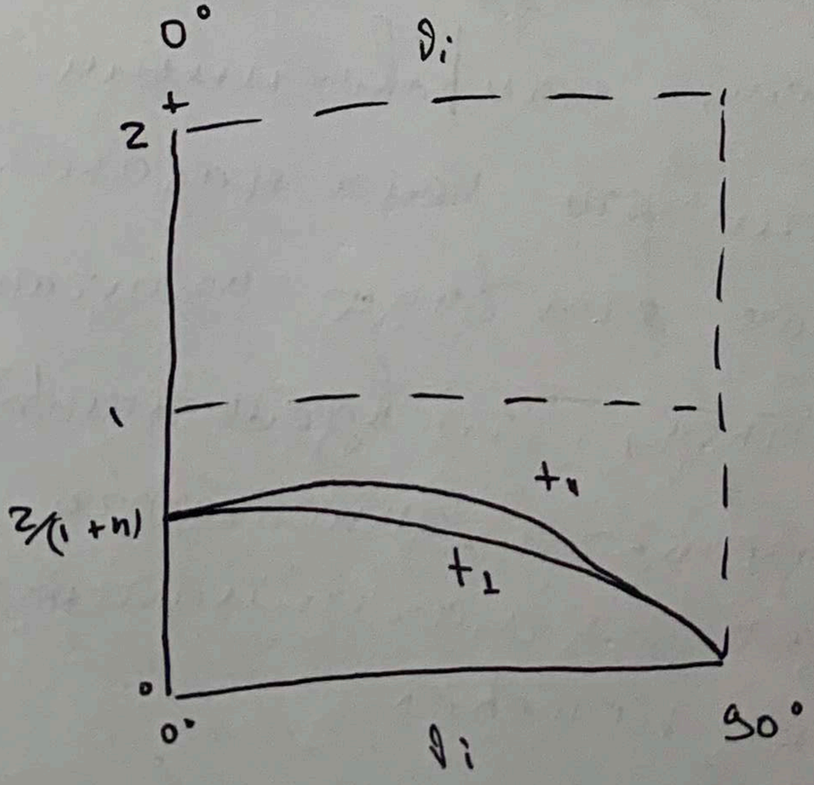
$$t_\parallel \equiv \frac{A_{t\parallel}}{A_{i\parallel}} = \frac{2\sin\vartheta_t\cos\vartheta_i}{\sin(\vartheta_i+\vartheta_t)\cos(\vartheta_i-\vartheta_t)} = \frac{2n\cos\vartheta_i}{n^2\cos\vartheta_i + \sqrt{n^2-\sin^2\vartheta_i}}$$

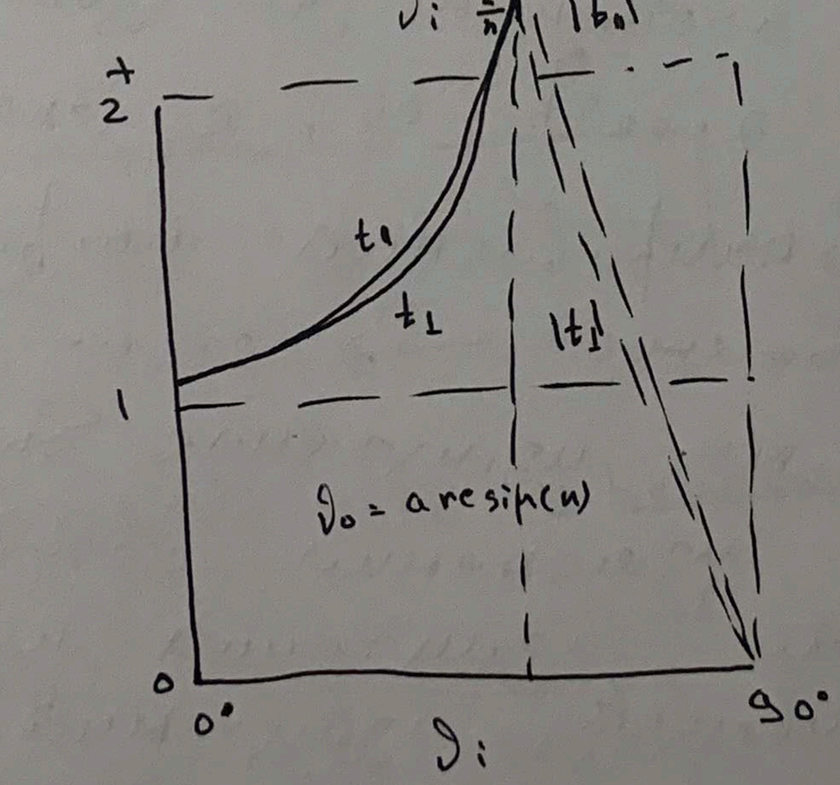
$$r_\perp \equiv \frac{A_{r\perp}}{A_{i\perp}} = -\frac{\sin(\vartheta_i-\vartheta_t)}{\sin(\vartheta_i+\vartheta_t)} = \frac{\cos\vartheta_i - \sqrt{n^2-\sin^2\vartheta_i}}{\cos\vartheta_i + \sqrt{n^2-\sin^2\vartheta_i}}$$

$$t_\perp \equiv \frac{A_{t\perp}}{A_{i\perp}} = \frac{2\sin\vartheta_t\cos\vartheta_i}{\sin(\vartheta_i+\vartheta_t)} = \frac{2\cos\vartheta_i}{\cos\vartheta_i + \sqrt{n^2-\sin^2\vartheta_i}}$$







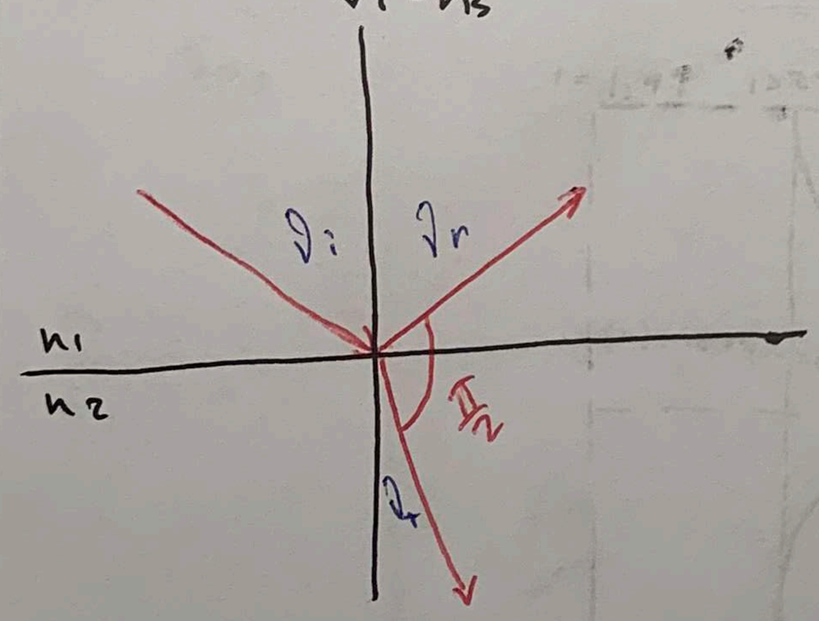


94 Существует такой угол падения, при котором соответствующий коэффициент отражения, в случае если поляризована волна в плоскости падения, оказывается равен нулю. Этот угол называется углом Брюстера.

$$\frac{\sin\vartheta_i}{\sin\underbrace{\vartheta_t}_{\vartheta_i+\vartheta_t=\frac{\pi}{2}}} = \frac{\sin\vartheta_B}{\sin(\frac{\pi}{2}-\vartheta_B)} = tg\,\vartheta_B = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \boxed{\vartheta_B = arctg\frac{n_2}{n_1}}$$

Если угол падения в случае, когда $n<1$, равен $\vartheta_0 = arcsin(n)$ или больше, чем ϑ_0, то волна вообще не проходит сквозь поверхность раздела. Будет отражённая волна и волна, которая распространяется во второй среде, но параллельно поверхности раздела.

Эффект Брюстера



Можно ввести величину: степень поляризации

$$\boxed{P = \frac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel}}, \quad 0 \le P \le 1$$

Под действием напряжённости электрического поля заряды во второй среде начинают двигаться. Токи среды изотропные, то движение зарядов, в первую очередь электронов, с ускорением, направленным вдоль направления напряжённости поля падающей волны. В этом случае они будут излучать волны, но излучение будет таков, что вдоль направления изменения соответствующего дипольного момента излучения не будет, а максимальная интенсивность излучения будет поперёк.

95 | (30) Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Формулы Френеля, явление полного внутреннего отражения. Энергетические соотношения при преломлении и отражении света.

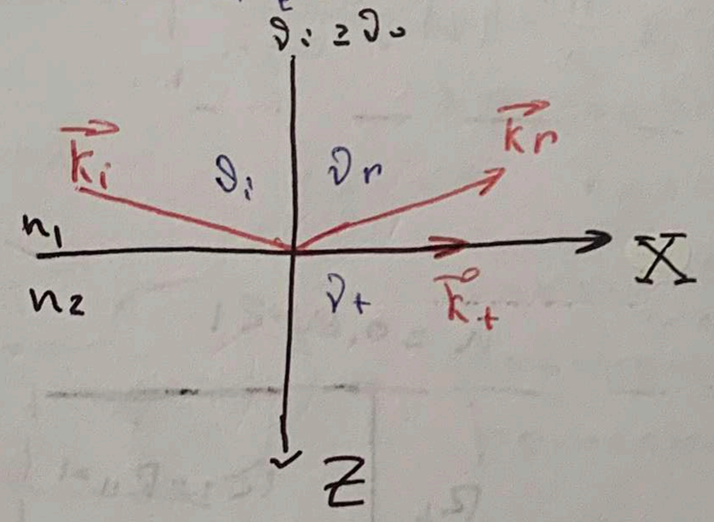
При $n_2 < n_1$ $(n<1)$ существует угол полного внутреннего отражения ϑ_0 - наименьший угол падения, при котором нет преломлённой волны во второй среде:

$$\sin\vartheta_0 = \frac{n_2}{n_1} = n$$

$$\boxed{\vartheta_0 = \arcsin\frac{n_2}{n_1} = \arcsin(n)}$$

В этом случае волна движется вдоль поверхности раздела с амплитудой, затухающей вглубь второй среды:

$$E_t = A_t e^{i(\omega t - \vec{k}_t \vec{r})} = A_t e^{i(\omega t - k_t \sin\vartheta_t x - k_t \cos\vartheta_t z)}$$



При $\vartheta_i \geq \vartheta_0$, $\sin\vartheta_i \geq n$ и в соответствии с законом Снеллиуса:

$$\cos\vartheta_t = \pm\sqrt{1-\sin^2\vartheta_t} = \pm\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\vartheta_i}}{n} =$$

$$= \pm i\frac{\sqrt{\sin^2\vartheta_i - n^2}}{n}$$

$$E_t = A_t e^{-k_t\frac{\sqrt{\sin^2\vartheta_i - n^2}}{n}z} e^{i(\omega t - k_t \sin\vartheta_t x)} =$$

$$= A_t e^{\frac{-z}{\Delta z}} e^{i(\omega t - k_t \sin\vartheta_t x)}$$

Глубина проникновения волны в среду Δz вдоль оси Z:

$$\boxed{\Delta z = \frac{n}{k_t\sqrt{\sin^2\vartheta_i - n^2}} = \frac{n\lambda_t}{2\pi\sqrt{\sin^2\vartheta_i - n^2}}}$$

← глубина, на которой амплитуда убывает в e раз

Энергетические соотношения при преломлении и отражении света

Усреднённый по времени разрешения прибора вектор Умова-Пойнтинга S' - произведение интенсивности волны на единичный вектор направления

96 | переноса энергии:

$$\langle \vec{S} \rangle = I\vec{n} = \varepsilon_0 \varepsilon v \langle |E|^2 \rangle \vec{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} \frac{1}{2} \langle |\hat{E}|^2 \rangle \vec{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} \frac{1}{2} |A|^2 \vec{n}$$

Коэффициент отражения по энергии R - модуль отношения плотностей потоков энергии вдоль нормали к поверхности раздела сред отраженной и падающей волн:

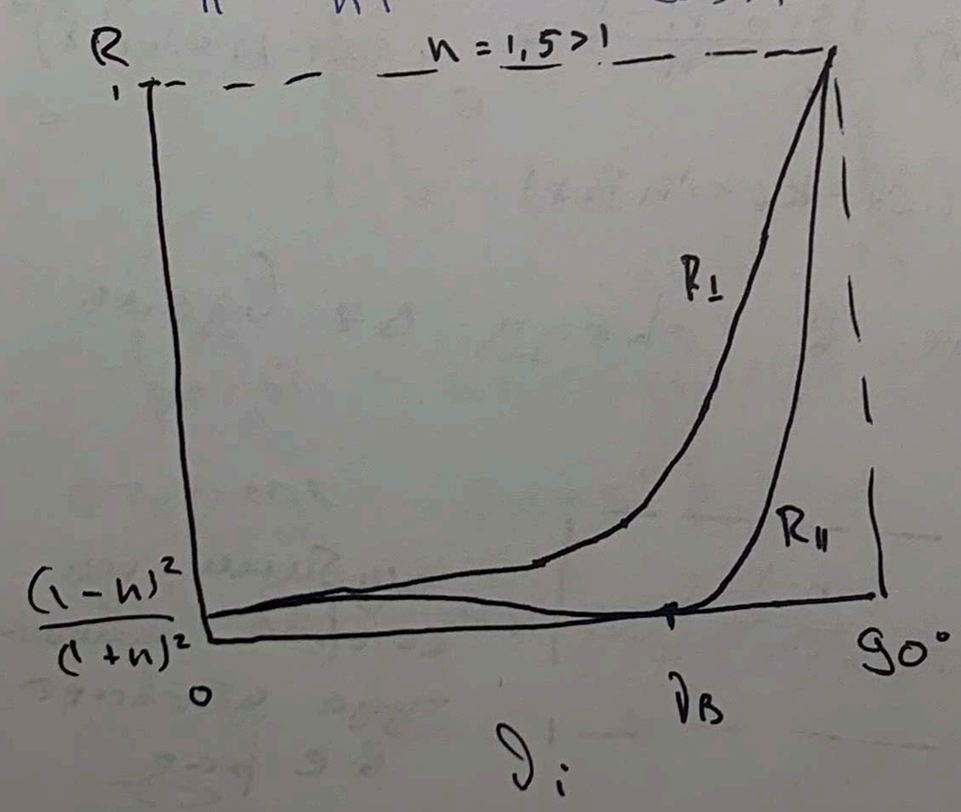
$$\boxed{R \equiv \left| \frac{I_r \cos(\pi - \vartheta_r)}{I_i \cos\vartheta_i} \right| = \frac{I_r \cos\vartheta_r}{I_i \cos\vartheta_i} = \frac{|A_r|^2}{|A_i|^2} = |r|^2}$$

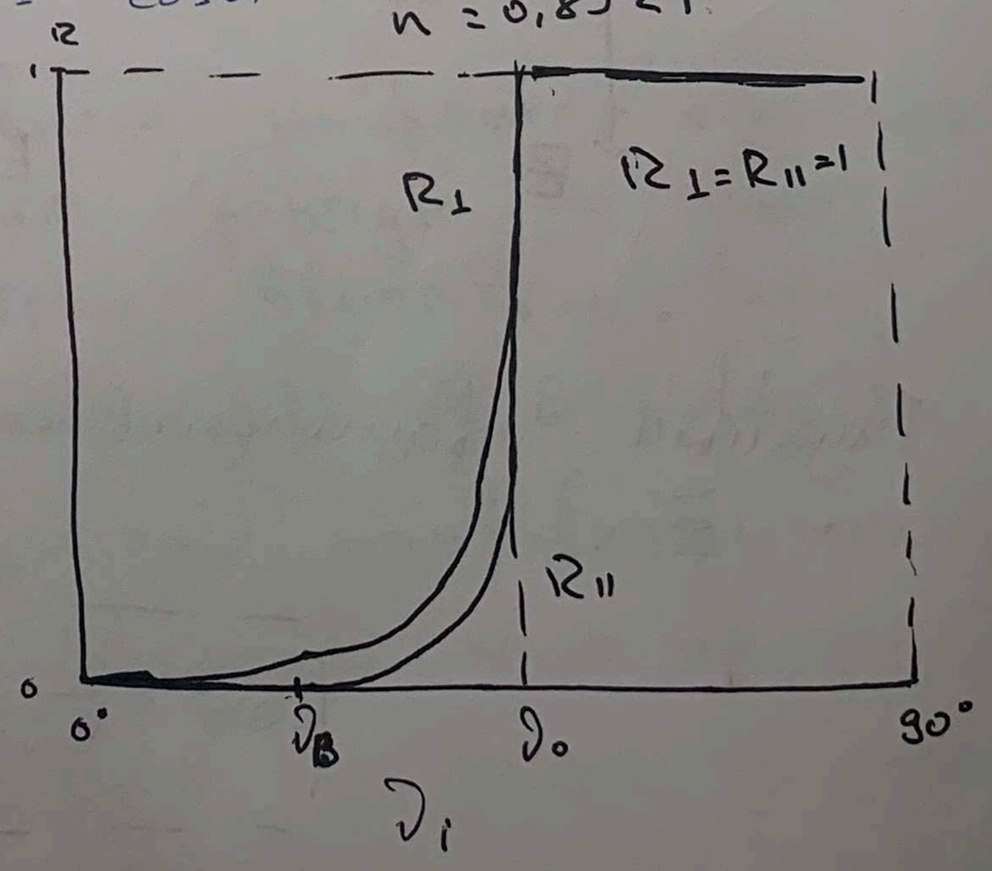
$$R_{\parallel} = |r_{\parallel}|^2, \quad R_{\perp} = |r_{\perp}|^2$$

Коэффициент пропускания по энергии T - модуль отношения плотностей потоков энергии вдоль нормали к поверхности раздела сред прошедшей и падающей волн:

$$\boxed{T \equiv \left| \frac{I_t \cos\vartheta_t}{I_i \cos\vartheta_i} \right| = \frac{I_t \cos\vartheta_t}{I_i \cos\vartheta_i} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\, |A_t|^2 \cos\vartheta_t}{\sqrt{\varepsilon_1}\, |A_i|^2 \cos\vartheta_i} = \frac{n_2}{n_1} |t|^2 \frac{\cos\vartheta_t}{\cos\vartheta_i}}$$

$$T_{\parallel} = \frac{n_2}{n_1} |t_{\parallel}|^2 \frac{\cos\vartheta_t}{\cos\vartheta_i} \qquad T_{\perp} = \frac{n_2}{n_1} |t_{\perp}|^2 \frac{\cos\vartheta_t}{\cos\vartheta_i}$$





97| (31) Распространение света в анизотропных средах. Материальные уравнения для анизотропных сред. Главные диэлектрические оси кристалла, главные диэлектрические проницаемости. Свойства плоских волн в анизотропной среде: ориентации полевых векторов, нормали и луча, фазовой и лучевой скоростей.

Под анизотропными средами будем понимать среды, в которых некие свойства зависят от направления. В этом случае

тензор диэлектрической восприимчивости

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \varkappa_{ij} E_j$$

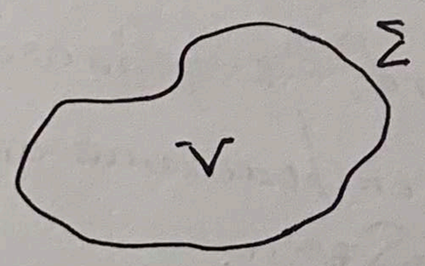
проекция на ось

$i = x, y, z$

символ Кронекера

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow D_i = \varepsilon_0 E_i + \varepsilon_0 \sum_j \varkappa_{ij} E_j = \varepsilon_0 \sum_j \underbrace{(\delta_{ij} + \varkappa_{ij})}_{\varepsilon_{ij}} E_j$$

Получим закон изменения энергии электромагнитного поля в произвольной неподвижной, линейной, анизотропной среде, воспользовавшись уравнениями Максвелла.



Рассмотрим некоторый объём V, ограниченный поверхностью Σ, внутри которого имеются электромагнитное поле и движущиеся заряды.

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad | \cdot \vec{H} \qquad \vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad | \cdot \vec{E} \quad \ominus \Rightarrow \quad \vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{E}\vec{j} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\underbrace{\vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}}_{\mathrm{div}[\vec{E}\vec{H}]} = -\vec{E}\vec{j} - \underbrace{\left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)}_{\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\vec{B}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\vec{D} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\vec{B}\right)}$$

$$\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H}\dot{\vec{B}} = \dot{\vec{E}}\vec{D} + \dot{\vec{H}}\vec{B}$$

С учётом материальных уравнений:

$$D_i = \sum_j \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j \quad \text{и} \quad B_i = \sum_j \mu_0 \mu_{ij} H_j:$$

$$\sum_{i,j} E_i \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} \dot{E}_j - \sum_{i,j} \dot{E}_j \varepsilon_0 \varepsilon_{ji} E_i + \sum_{i,j} H_i \mu_0 \mu_{ij} \dot{H}_j - \sum_{i,j} \dot{H}_j \mu_0 \mu_{ji} H_i = 0$$

$$\sum_{i,j} E_i \varepsilon_0 (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}) \dot{E}_j + \sum_{i,j} H_i \mu_0 (\mu_{ij} - \mu_{ji}) \dot{H}_j = 0$$

98| Так как это равенство должно выполняться для любых изменяющихся во времени электромагнитных полей, то:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$
и
$$\mu_{ij} = \mu_{ji}$$

Для анизотропных сред достаточно единственного требования симметричности тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей.

По определению: $\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$

Закон Джоуля - Ленца: $q = \vec{j}\vec{E}$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\partial w}{\partial t} = q + \operatorname{div}\vec{S}}$$ ← Закон изменения энергии электромагнитного поля в дифференциальной форме

q - количество теплоты, выделяющееся в единице объёма проводника в единицу времени

Проинтегрируем обе части уравнения по объёму и воспользуемся математической теоремой Остроградского- Гаусса:

$$\boxed{-\frac{\partial W}{\partial t} = Q + \int_V \operatorname{div}\vec{S}\,dV = Q + \oint_\Sigma \vec{S}\,d\vec{\sigma}}$$

Убыль энергии электромагнитного поля в произвольном объёме в единицу времени равна сумме джоулевой теплоты, выделяемой в этом объёме в единицу времени, и потока электромагнитной энергии через поверхность, ограничивающую этот объём.

Тем самым

тензор симметричен

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_j \varepsilon_{ij} E_j$$

Тогда для каждой среды можно найти собственные главные оси тензора, в которых он диагонализуется. Система координат в главных осях тензора называется главными диэлектрическими осями анизотропной среды

$$\varepsilon_{IJ} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Это означает, что:

$$\boxed{D_I = \varepsilon_0 \varepsilon_I E_I} \qquad I = x, y, z$$

Введём показатели преломления

$$\boxed{n_I = \sqrt{\varepsilon_I}}$$ ← Главные показатели преломления

Плоские электромагнитные волны в анизотропной среде

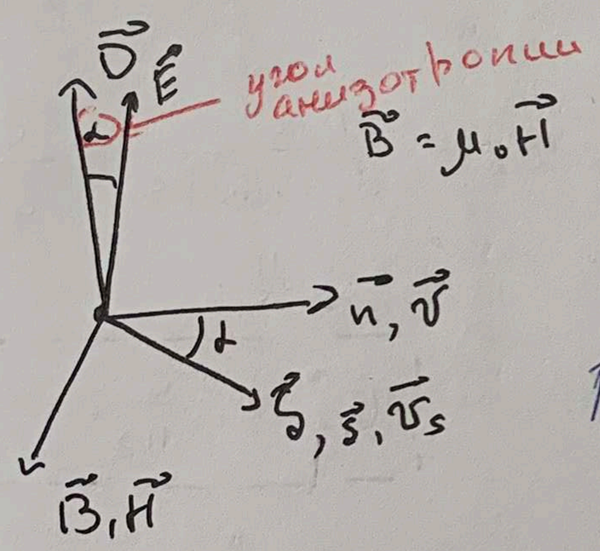
Рассмотрим среду: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ $\Rightarrow$

$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow [\vec{n}\vec{E}] = v\vec{B}$

$\operatorname{div}\vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{n}\vec{D} = 0$

$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{n}\vec{B} = 0$

$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow [\vec{n}\vec{H}] = -v\vec{D}$



$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$$

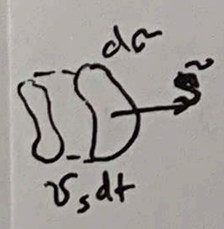
Введём ещё один вектор, который назовём луч

$$\boxed{\vec{s} \equiv \frac{\vec{S}}{S}}$$

Фазовая скорость - скорость световой волны по нормали:

$$\vec{v} = v\vec{n} = \frac{\omega}{k}\vec{n}$$

Скорость переноса энергии в световой волне:



$$\vec{S} = S\vec{s} = \frac{w\,dS\,v_s dt}{dS\,dt}\vec{s} = w v_s \vec{s} = w\vec{v}_s$$

, v_s - лучевая скорость - скорость световой волны вдоль луча

$$\boxed{\vec{v}_s = \frac{\vec{S}}{w}}$$

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\vec{B}}{2} = \frac{\vec{E}\cdot[\vec{H}\vec{n}]}{2v} + \frac{\vec{H}\cdot[\vec{n}\vec{E}]}{2v} = \frac{\vec{n}[\vec{E}\vec{H}]}{2v} + \frac{\vec{n}[\vec{E}\vec{H}]}{2v} = \frac{\vec{n}\vec{S}}{v}$$

$$\boxed{v = \frac{\vec{n}\vec{S}}{w} = \vec{n}\vec{v}_s = v_s\cos\alpha}$$

$$\Downarrow$$

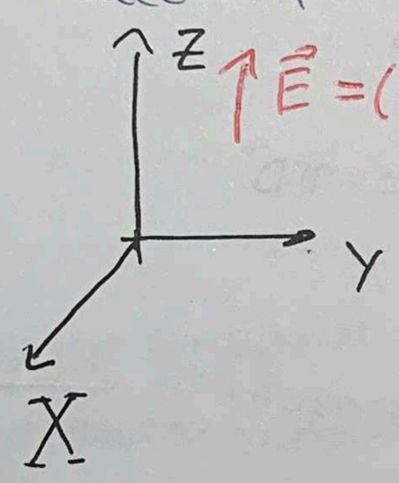
$$v < v_s$$

100 | (32) Распространение света в анизотропных средах. Главные скорости. Уравнение Френеля для фазовых скоростей. Свойства волн, распространяющихся в заданном направлении нормали.

$[\vec{n}\,\vec{E}] = v\vec{B}$
$[\vec{n}\,\vec{H}] = -v\vec{D}$ ← исключим $\vec{B}$ и $\vec{H}$

$$v\vec{D} + \frac{[\vec{n}[\vec{n}\,\vec{E}]]}{v\mu_0} = 0 \rightarrow \boxed{\mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n}(\vec{n}\,\vec{E}) - \vec{E} = 0}$$

Рассмотрим частный случай:



$\vec{E} = (0, 0, E_z)$ $\quad \vec{D} = (0, 0, \varepsilon_0 \varepsilon_z E_z)$

Подставим:

$$\mu_0 v_z^2 D_z - E_z = 0 \Rightarrow v_z^2 = \frac{\cancel{E_z}}{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_z \cancel{E_z}} = \frac{c^2}{\varepsilon_z}$$

фазовая скорость для которой $\vec{E}$ направлено вдоль Z.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_z = \frac{c}{n_z} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}}}$$

$$\Downarrow$$

Главные скорости анизотропной среды $\quad \boxed{v_I = \frac{c}{n_I} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{z_I}}}}$

Проекции на главные оси:

$$\mu_0 v^2 D_I + n_I(\vec{n}\vec{E}) - E_I = 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_z v^2 E_I + n_I(\vec{n}\vec{E}) - E_I = 0$$

$$(\mu_0 v^2 \varepsilon_0 \varepsilon_I - 1) E_I + n_I(\vec{n}\vec{E}) = 0$$

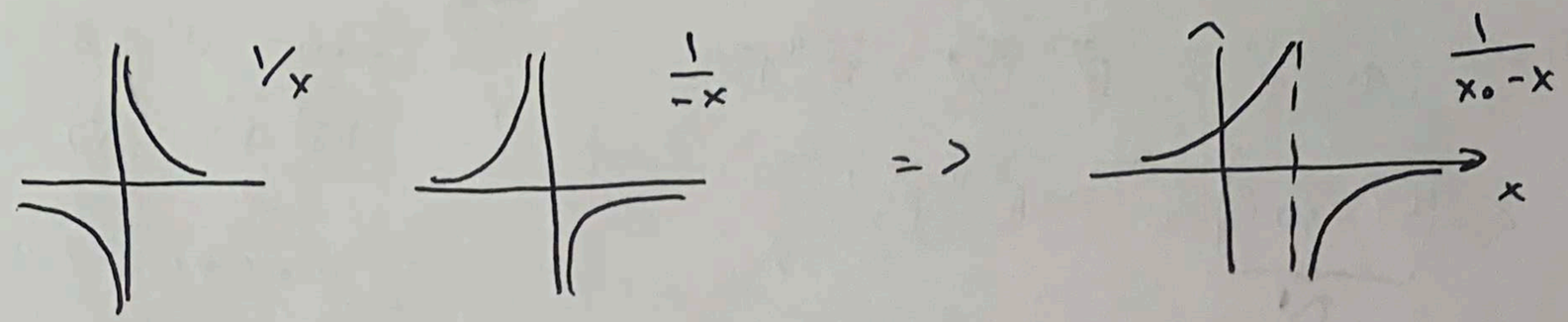
$$\Downarrow$$

$$\sum_I \left| \left(\frac{v^2}{v_I^2} - 1\right) E_I + n_I(\vec{n}\vec{E}) = 0 \right| \frac{n_I}{\left(\frac{v^2}{v_I^2} - 1\right)}$$

$$\sum_I \frac{n_I^2 \cancel{(\vec{n}\vec{E})}}{\left(\frac{v^2}{v_I^2} - 1\right)} + \underbrace{\sum_I E_I n_I}_{\cancel{(\vec{n}\vec{E})}} = 0 \Rightarrow \boxed{\underbrace{\sum_I \frac{n_I^2}{v_I^2 - v^2}}_{f(v^2)} = 0}$$

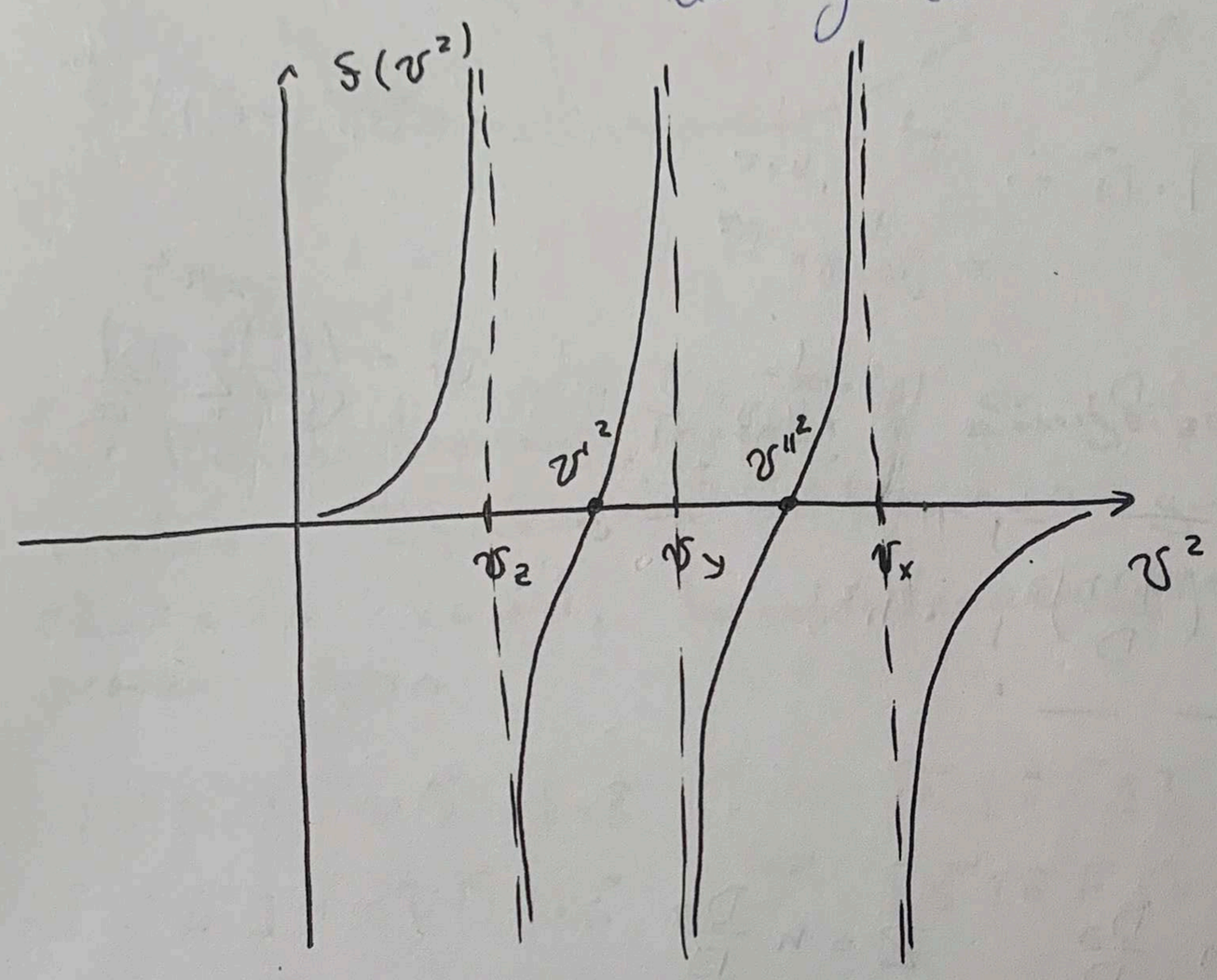
$1 = \sum_I n_I^2$

← Уравнение Френеля для фазовых скоростей



$\Downarrow$

$f(v^2)$ - совокупность трёх таких функций около значений главных скоростей в квадрате



=> В данном направлении нормали в принципе в анизотропной среде могут распространятся только две волны с двумя скоростями

Умножим теперь скалярно уравнение $\mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n}(\vec{n}\vec{E}) - \vec{E} = 0$ на $\vec{D}$

$$\mu_0 v^2 D^2 - \vec{E}\vec{D} = 0$$

$$v^2 = \frac{\vec{E}\vec{D}}{\mu_0 D^2} = \frac{\sum_I E_I D_I}{\mu_0 D^2} = \sum_I v_I^2 \frac{D_I^2}{D^2}$$

$$\boxed{v^2 = \sum_I v_I^2 \frac{D_I^2}{D^2}} \Rightarrow v = v\left(\frac{\vec{D}}{D}\right)$$

Теперь запишем уравнение для тех двух волн с разными скоростями:

$$\mu_0 v'^2 \vec{D}' + \vec{n}(\vec{n}\vec{E}') - \vec{E}' = 0 \quad | \vec{D}''$$

$$\mu_0 v''^2 \vec{D}'' + \vec{n}(\vec{n}\vec{E}'') - \vec{E}'' = 0 \quad | \vec{D}' \quad (-)$$

102

$$\mu_0 \vec{D}'\vec{D}''(v'^2 - v''^2) - \vec{E}'\vec{D}'' + \vec{E}''\vec{D}' = 0$$

$$\vec{E}'\vec{D}'' = \sum_I \underbrace{(E_I' \varepsilon_0 \varepsilon_I)}_{D_I'} E_I'' = \vec{E}''\vec{D}'$$

$\Rightarrow$ Если $v' \neq v''$: $\vec{D}'\vec{D}'' = 0$ $\Downarrow$ взаимноперпендикулярны

(33) Распространение света в анизотропных средах. Эллипсоид волновых нормалей, или эллипсоид фазовых скоростей

$\vec{D}' \perp \vec{D}''$.

$$\vec{D} = \frac{1}{\mu_0 v^2}\left(\vec{E} - \vec{n}(\vec{n}\vec{E})\right) \Big| \cdot \vec{D} \Rightarrow D^2 = \frac{1}{\mu_0 v}\left(\vec{D}\vec{E} - (\vec{D}\vec{n})(\vec{n}\vec{E})\right) \overset{\vec{D}\perp\vec{n}}{=} \frac{1}{\mu_0 v^2}\vec{D}\vec{E}$$

В главных осях $E_I = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_I} D_I \Rightarrow D^2 = \underbrace{\frac{1}{\mu_0 v^2}\sum_I \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_I}}_{=\frac{1}{c^2}} D_I^2 = \underbrace{\frac{c^2}{v^2}}_{=n^2} \sum_I \frac{D_I^2}{\varepsilon_I}$

$$\boxed{\frac{1}{n^2} = \sum_I \frac{1}{\varepsilon_I}\left(\frac{D_I}{D}\right)^2} \cdot n^2$$

Обозначим:

$$X = n\frac{D_x}{D} \qquad Y = n\frac{D_y}{D} \qquad Z = n\frac{D_z}{D}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{X^2}{\varepsilon_x} + \frac{Y^2}{\varepsilon_y} + \frac{Z^2}{\varepsilon_z} = 1}$$

или

$$\boxed{\frac{X^2}{n_x^2} + \frac{Y^2}{n_y^2} + \frac{Z^2}{n_z^2} = 1}$$

← уравнение эллипсоида волновых нормалей или оптической индикатрисы

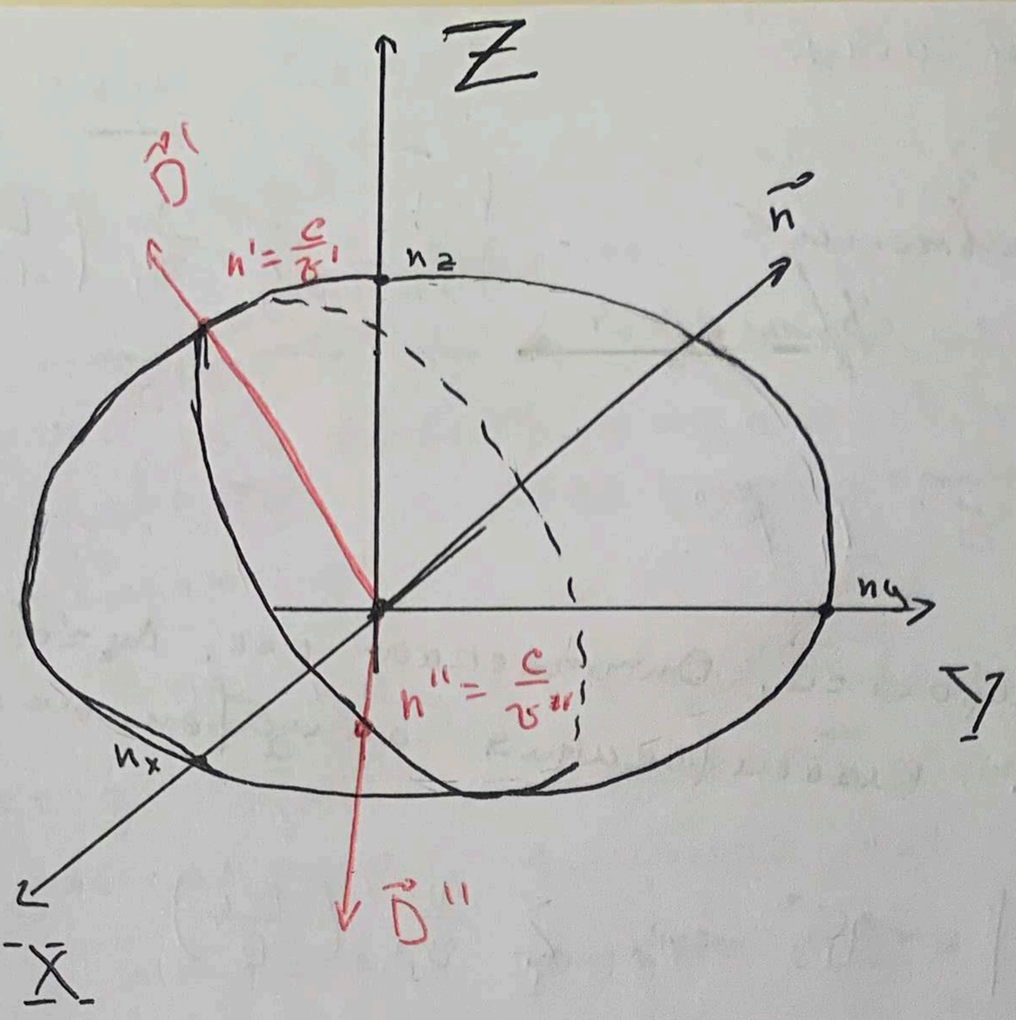
, $n_I = \sqrt{\varepsilon_I}$

Главные оси совпадают с главными осями кристалла.

Расстояние от центра эллипсоида до поверхностей $X^2 + Y^2 + Z^2 = n^2$ определяет n для данного $\vec{D}$.

Выберем направление нормали волны $\vec{n}$, тогда сечение эллипсоида $\perp \vec{n}$ - эллипс, вдоль осей которого направлены $\vec{D}'$ и $\vec{D}''$. Полуоси, равные n' и n'', опре-

103)



делают фазовые скорости:

$v' = \frac{c}{n'}$ и $v'' = \frac{c}{n''}$

Оптическая индикатриса позволяет определить направления $\vec{D}'$ и $\vec{D}''$ и величины n', n'', v', v'' для собственных волн в зависимости от направления $\vec{n}$.

(34) Распространение света в анизотропных средах. Главные скорости. Уравнение Френеля для лучевых скоростей. Свойства волн, распространяющихся в заданном направлении луча.

$$[\vec{n}\vec{E}] = v\vec{B} \quad |\cdot\vec{s}$$
$$[\vec{n}\vec{H}] = -v\vec{D} \quad |\cdot\vec{s}$$

$$\Rightarrow \quad [\vec{s}[\vec{n}\vec{E}]] = v[\vec{s}\vec{B}]$$
$$[\vec{s}[\vec{n}\vec{H}]] = -v[\vec{s}\vec{D}]$$

$\vec{s}\vec{E} = 0$

$\vec{s}\vec{H} = 0$

$v = v_s \cos\alpha$

$$\Downarrow$$

$$[\vec{s}[\vec{n}\vec{E}]] = \vec{n}(\vec{s}\vec{E}) - \vec{E}(\vec{s}\vec{n}) = -\vec{E}(\vec{s}\vec{n}) = v[\vec{s}\vec{B}]$$
$$[\vec{s}[\vec{n}\vec{H}]] = \vec{n}(\vec{s}\vec{H}) - \vec{H}(\vec{s}\vec{n}) = -H(\vec{s}\vec{n}) = -v[\vec{s}\vec{D}]$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E} = -v_s[\vec{s}\vec{B}]$$
$$\vec{H} = v_s[\vec{s}\vec{D}]$$

Исключим из уравнений вектора магнитного поля:

$$\vec{E} = -\mu_0 v_s^2 [\vec{s}[\vec{s}\vec{D}]] \rightarrow \frac{1}{\mu_0 v_s^2}\vec{E} + \vec{s}(\vec{s}\vec{D}) - \vec{D} = 0$$

это уравнение аналогично уравнению для фазовых скоростей $\mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n}(\vec{n}\vec{E}) - \vec{E} = 0$ с точностью до замены:

$\vec{n} \leftrightarrow \vec{s}$ $\quad \mu_0 v^2 \rightarrow \frac{1}{\mu_0 v_s^2}$

$\vec{D} \leftrightarrow \vec{E}$ $\quad \mu_0 v_I^2 \rightarrow \frac{1}{\mu_0 v_I^2}$

104 | В результате получим:

$$\boxed{\sum_I \frac{s_I^2 v_I^2}{v_I^2 - v_s^2} = 0} \leftarrow \text{уравнение Френеля}$$

$$\boxed{\frac{1}{v_s^2} = \sum_I \frac{1}{v_I^2}\left(\frac{E_I}{E}\right)^2}$$

• Если $v_s' \neq v_s'' \Rightarrow \vec{E}' \perp \vec{E}''$

(35) Эллипсоид лучевых скоростей. Оптическая ось. Лучевая поверхность и её сечения. Классификация анизотропных сред

$$\frac{1}{v_s^2} = \sum_I \frac{1}{v_I^2}\left(\frac{E_I}{E}\right)^2 \quad \Big| \cdot v_s^2 \Rightarrow \sum_I \frac{v_s^2}{v_I^2}\left(\frac{E_I}{E}\right)^2$$

Сделаем замену:

$X_I = v_s \frac{E_I}{E}$ и рассмотрим некую поверхность, задающуюся данными координатами

Радиус вектор точки поверхности геометрического образа:

$$\vec{R} = v_s \frac{\vec{E}}{E}$$

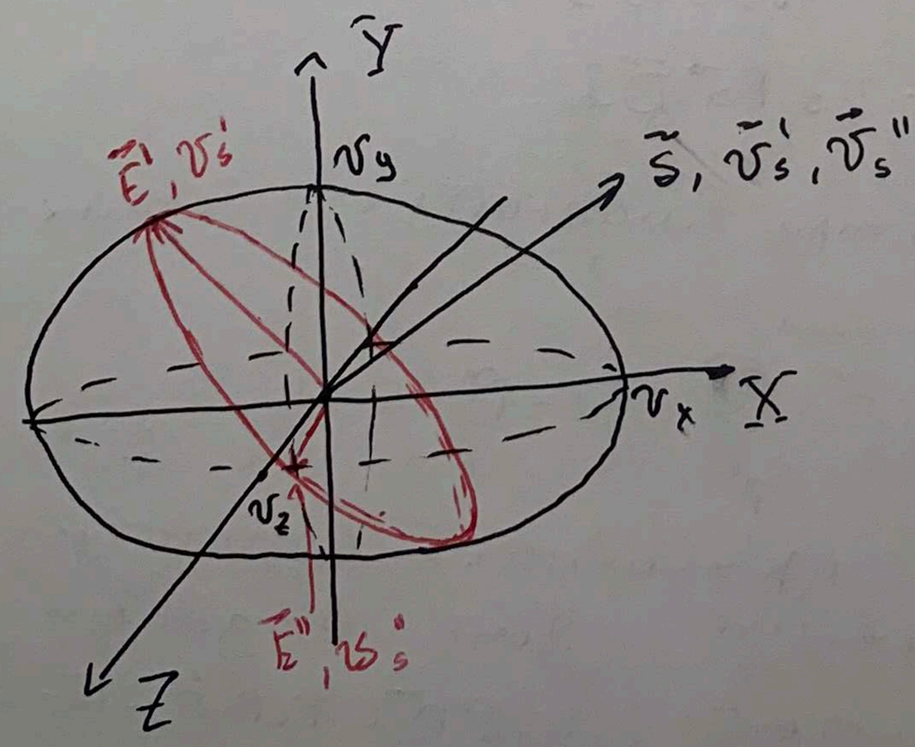
$$\downarrow$$

$$R = v_s$$

Тогда:

$$\boxed{\sum_I \frac{X_I^2}{v_I^2} = 1} \leftarrow \text{уравнение эллипсоида}$$

← Главные оси эллипсоида — главные диэлектрические оси кристалла, а полуоси — набор главных скоростей



Для любого эллипсоида существует всего два сечения, образующих окружность. Направление луча, у которого в сечение получается окружность называется оптической осью.

В общем случае, для любого кристалла, если все три скорости главных не совпадают, таких осей две.

105 • Если $v_x \neq v_y \neq v_z$, то кристалл называется двуосным. Эллипсоид лучевых скоростей – двукаболочечная самопересекающаяся поверхность. Кристалл имеет две оптические оси, лежащие в главной плоскости, образованной главными диэлектрическими осями, для которых главные скорости имеют максимальное и минимальное значения.

• Если $v_x = v_y \neq v_z$, то кристалл называется одноосным. Эллипсоид лучевых скоростей – эллипсоид вращения вокруг оси, для которой главная ось отлична от остальных. При этом имеется только одна оптическая ось, совпадающая с осью вращения

• Если $v_x = v_y = v_z$, то кристалл называется изотропным. Эллипсоид лучевых скоростей – сфера. Все направления оптически эквивалентны и кристалл оптически изотропен.

Теперь возьмём в рассмотрение уравнение Френеля:

$$\sum_I \frac{s_I v_I^2}{v_I^2 - v_s^2} = 0 \quad \Big| \cdot v_s$$

и сделаем замену

$$X_I = v_s s_I$$

$$\vec{R} = v_s \vec{s} = \vec{v}_s$$

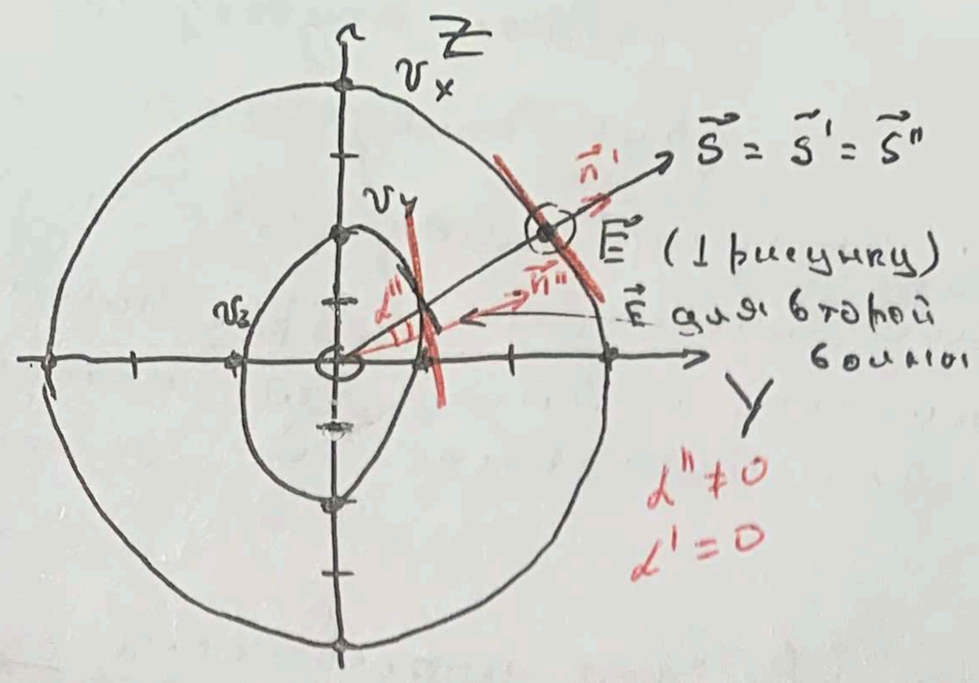
$$R = v_s$$

$$\sum_I \frac{X_I v_I^2}{v_I^2 - v_s^2} = 0$$

Лучевая (волновая) поверхность – поверхность, до которой доходит световое возбуждение из данной точки среды за фиксированный интервал времени.

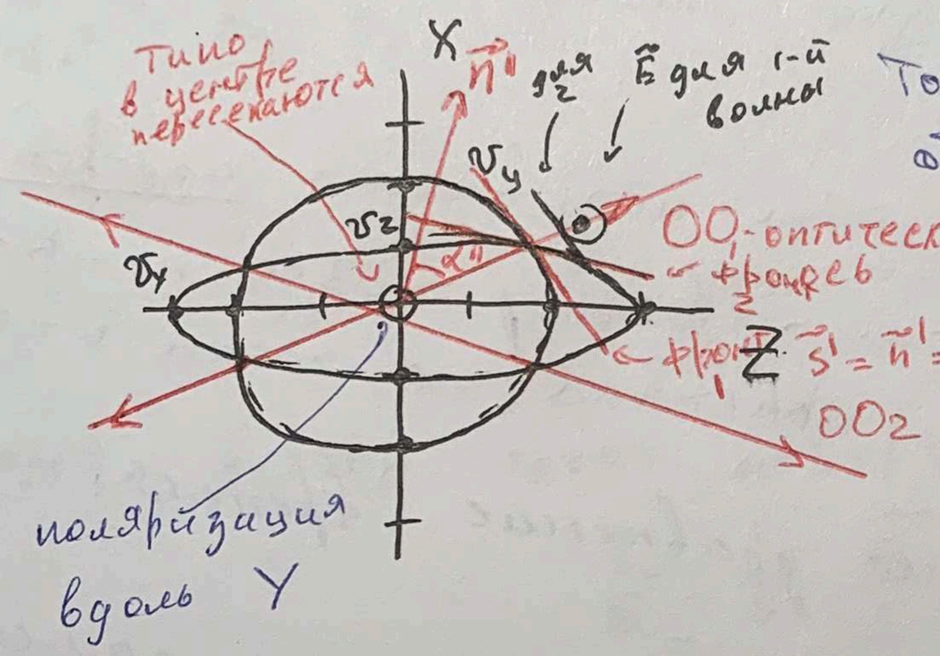
Это двукаболочечная самопересекающаяся поверхность. В общем случае в каждом направлении из начала координат лучевая поверхность встречается два раза. Главные координатные плоскости пересекают лучевую поверхность по эллипсу и окружности.

Пусть ось X направлена на нас. Пусть $v_x > v_y > v_z$



Если волна распространяется вдоль Y, то возможна поляризация вдоль X, тогда реализуется максимальная из трёх главных скоростей. Вторая скорость соответствует напряжённости вдоль Z, а это максимальная из трёх скоростей.

Фронт волны для каждой лучевой поверхности - плоскость, касательная к лучевой поверхности в этой точке



Точки пересечения этих двух плоскостей образуют поверхности лежит плоскости XOZ (скорости максимальная и минимальная)

(36) Оптические свойства одноосных кристаллов. Отрицательные и положительные кристаллы, сечения лучевых поверхностей. Главная плоскость, обыкновенный и необыкновенные лучи. Взаимная ориентация фазовой и лучевой скоростей. Двойное лучепреломление и поляризация света. Метод построения Гюйгенса.

Для одноосных кристаллов $v_x = v_y \neq v_z$.

Введём обозначение: $v_o \equiv v_x = v_y$ - обыкновенные скорости

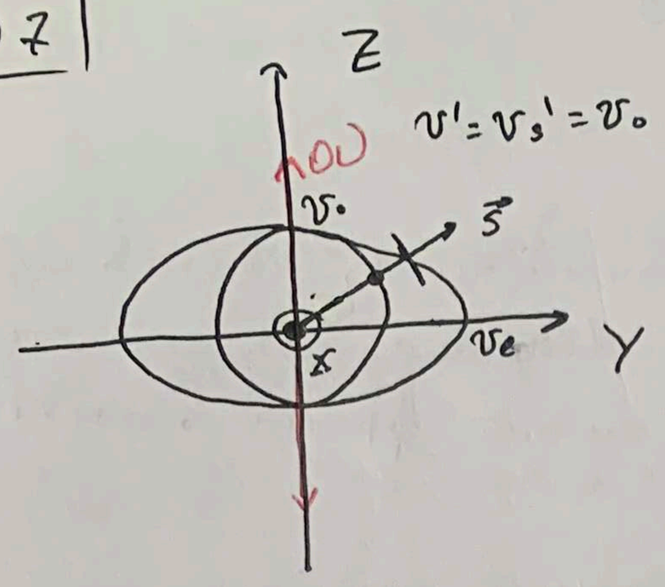
$v_e \equiv v_z$ = необыкновенная скорость

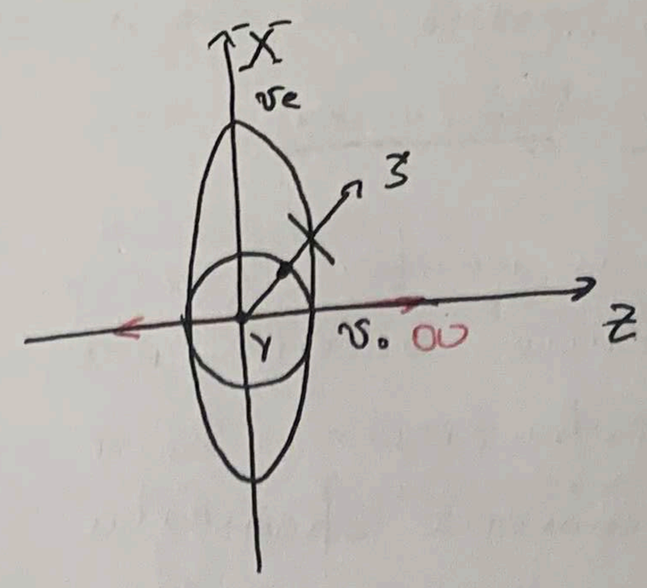
Получается эллипсоид вращения.

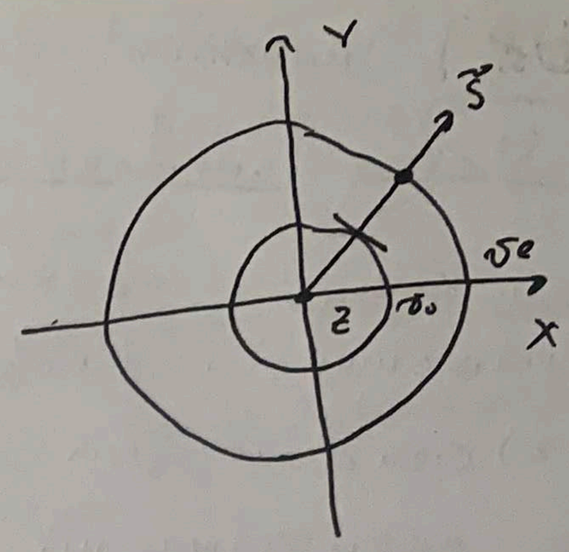
Рассмотрим два кристалла: • $v_o \equiv v_x = v_y < v_z \equiv v_e$: такие кристаллы называются отрицательными одноосными

• $v_o \equiv v_x = v_y > v_z \equiv v_e$: положительные одноосные кристаллы

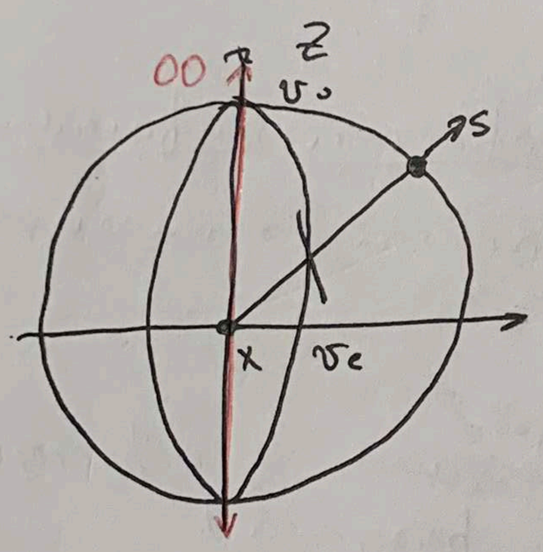
Для отрицательных кристаллов эллипсоид Френеля вытянут вдоль оси вращения Z, лучевая сфера вписана в сплющенный вдоль оси Z лучевой эллипсоид вращения

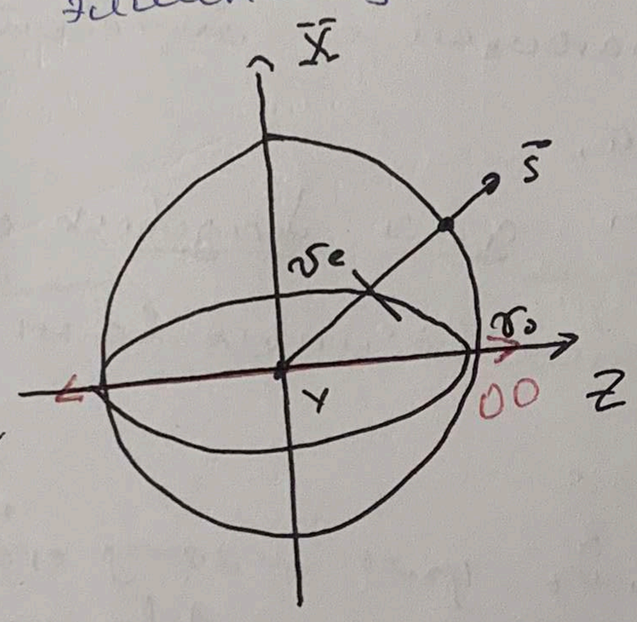


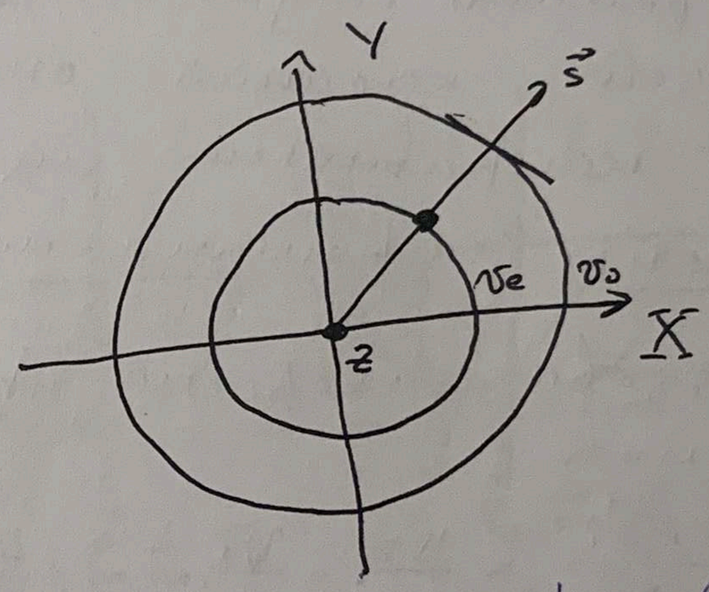




Для положительного кристалла эллипсоид Френеля сплюснут вдоль оси Z, лучевая сфера охватывает вытянутый вдоль оси Z лучевой эллипсоид вращения.







Главная плоскость (главное сечение) - плоскость, образованная лучом и оптической осью - $(\vec{s}, \vec{OO})$

Обыкновенный луч - луч, вектор напряжённости электрического поля которого перпендикулярен главной плоскости $\vec{E}_o \perp (\vec{s}, \vec{OO})$

Ему соответствует лучевая поверхность в виде сферы и $\vec{v}' = \vec{v}_s' = v_0 \vec{s}$, их модули равны v_0 и не зависят от направления

Необыкновенный луч - луч, вектор напряжённости электрического поля которого лежит в главной плоскости $\vec{E}_e \parallel (\vec{s}, \vec{OO})$.

Ему соответствует лучевая поверхность в виде эллипсоида вращения, $\vec{v}'' \neq \vec{v}_s''$, зависят от угла между лучом и оптической осью $v'' < v_s'' \in (v_0, v_e]$ или $v'' < v_s'' \in [v_e, v_0)$

Двойное лучепреломление - явление возникновения при падении на поверхность анизотропной среды плоской произвольно поляризованной волны двух преломлённых линейно и взаимно перпендикулярно поляризованных

108 | плоских волн.

Метод построения Гюйгенса

1) Каждая точка, до которой доходит возбуждение, становится источником вторичных волн, несущих световое возмущение
2) Огибающая вторичных волн определяет фронт волны в последующий момент времени

Построение даёт направления нормали и луча:

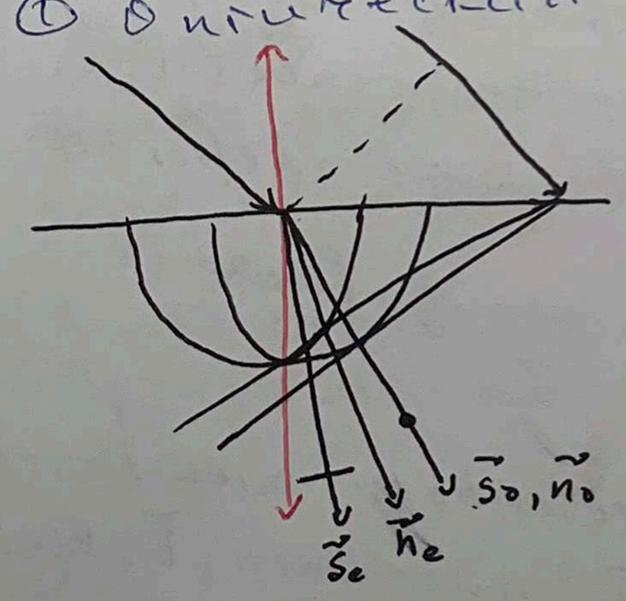
- перпендикулярно к огибающей лучевой поверхности из источника вторичных волн даёт направление нормали
- прямая, соединяющая источник вторичной волны с точкой касания огибающей с лучевой поверхностью, даёт направление луча.

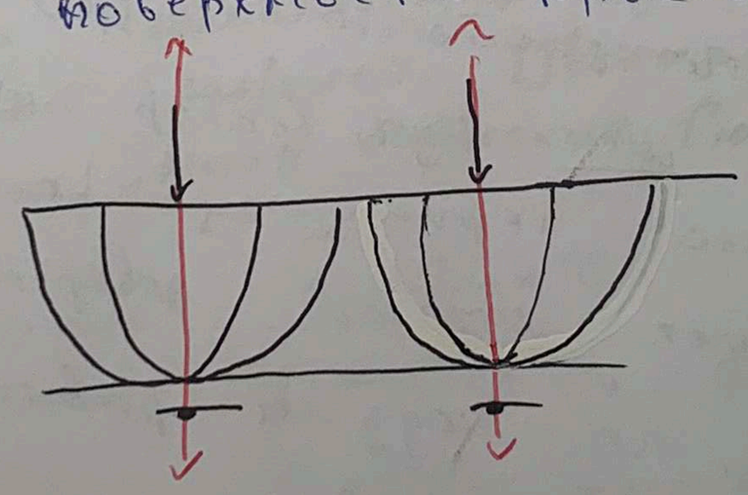
Законы преломления для фазовых скоростей (нормалей)

- Фазовые скорости преломлённых волн лежат в плоскости падения
- $\frac{\sin\vartheta_i}{\sin\vartheta_t} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$ (ϑ_i, ϑ_t углы между скоростями и перпендикуляром к поверхности раздела)

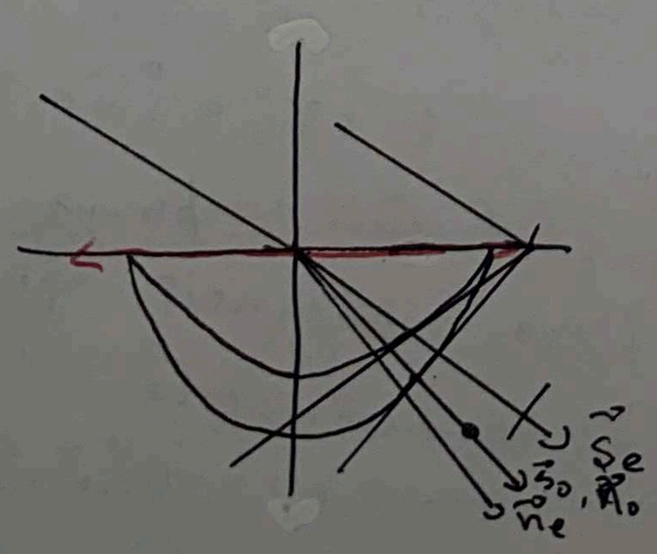
Характерные случаи построения

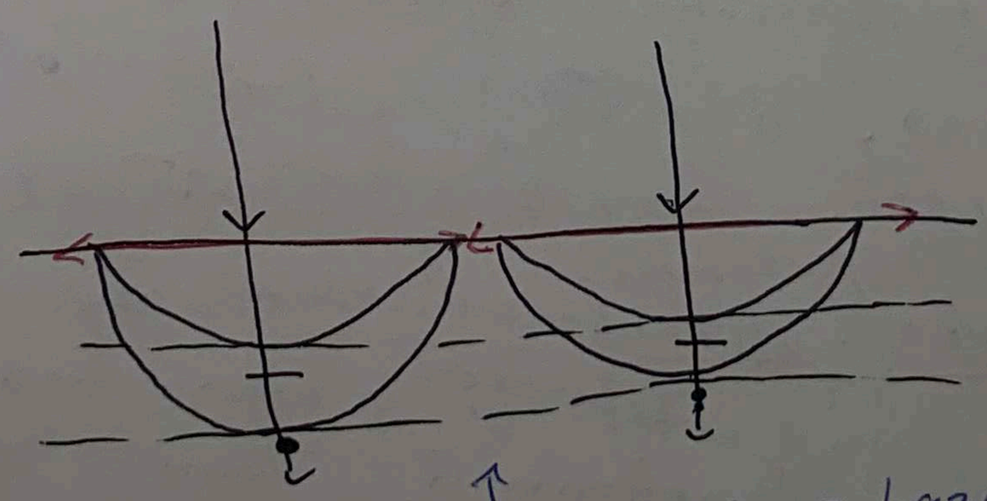
① Оптическая ось ⊥ поверхности кристалла





② Оптическая ось параллельна поверхности кристалла





скорость разная ⇒ разность фаз, которая меняется ~ расстоянию,

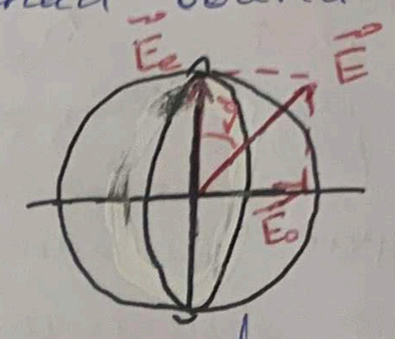
109 | прошедшего волнами => на выходе, например, из пластинки получим те же две волны с разностью фаз, которая зависит от толщины пластинки.

При нормальном падении луча действует закон Малюса:

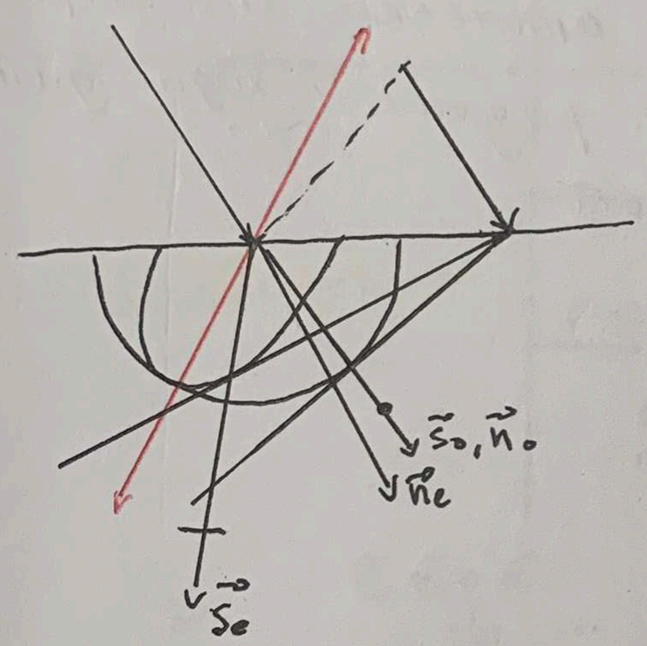
$E_o = E \sin\vartheta \to I_o = I \sin^2\vartheta$

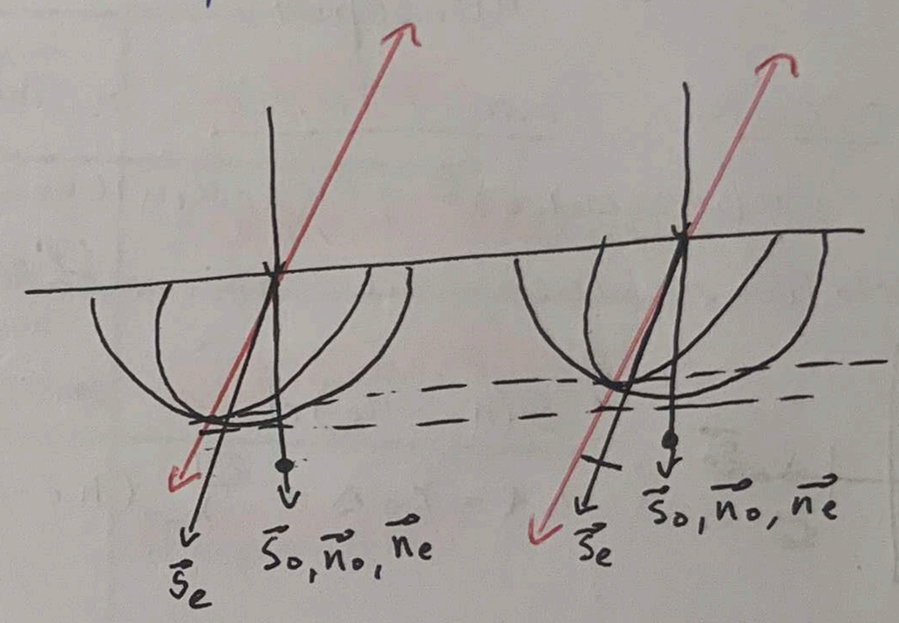
$E_e = E \cos\vartheta \to I_e = I \cos^2\vartheta$

Пусть падает линейнополяризованная волна



③ Оптическая ось под углом к поверхности кристалла





(37) Поляризационные приборы. Получение и анализ поляризованного света - явление дихроизма, поляроид и поляризационные призмы. Управление поляризацией света, оптические пластинки «$\frac{\lambda}{4}$» и «$\frac{\lambda}{2}$».

Явление дихроизма - зависимость поглощения света от направления поляризации

Поляроид - дихроичная пластинка, при прохождении которой один из лучей в результате поглощения сильно ослабляется, а другой выходит линейно поляризованным.

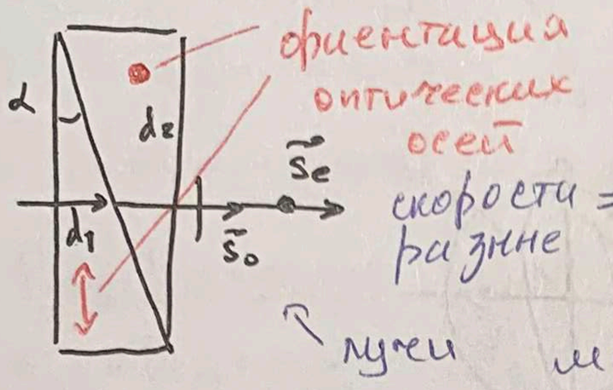
Поляризатор - поляроид, использующийся для получения поляризованного света.

Анализатор - поляроид, используются для анализа поляризованного света (направление поляризации волны связано с осями кристалла)

Поляризационная призма - комбинация кристаллов, составляющая один поляризованный луч на выходе

110 **Двоякопреломляющая призма** - комбинация кристаллов, оставляющая оба поляризованных луча на выходе

Компенсатор - пластинка, вдоль которой непрерывно меняется разность фаз выходящих лучей



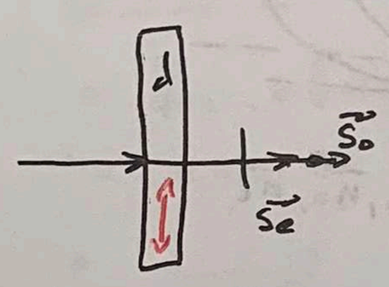
Пусть $n_o < n_e$

$\Delta = (n_e d_1 + n_o d_2) - (n_o d_1 + n_e d_2) = (n_e - n_o)(d_1 - d_2)$

скорости разные $\Rightarrow$ $\Delta\varphi = k_0 \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)(d_1 - d_2)$

лучи меняются: тот, который был обыкновенным стал по отношению ко второму клину необыкновенным и наоборот

Оптические пластинки - пластинки из оптически анизотропных кристаллов, вносящие заданную разность хода для необыкновенного и обыкновенного лучей



$\Delta = (n_e - n_o)d$

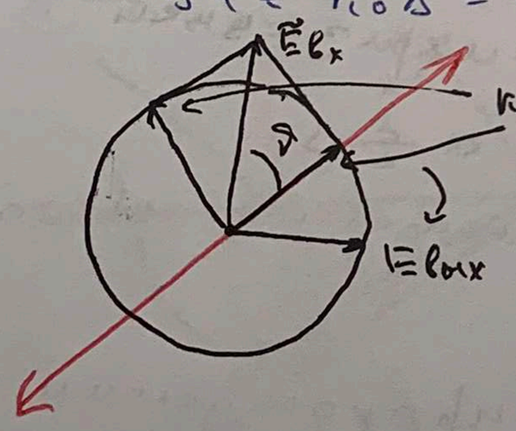
$\Delta\varphi = k_0\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d$

Пластинка в четверть волны

$\Delta = (n_e - n_o)d = \frac{\lambda_0}{4}$

$\Delta\varphi = k_0\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d = \frac{\pi}{2}$

линейная поляризация $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ циркулярная $\vartheta = 45°$ поляризация



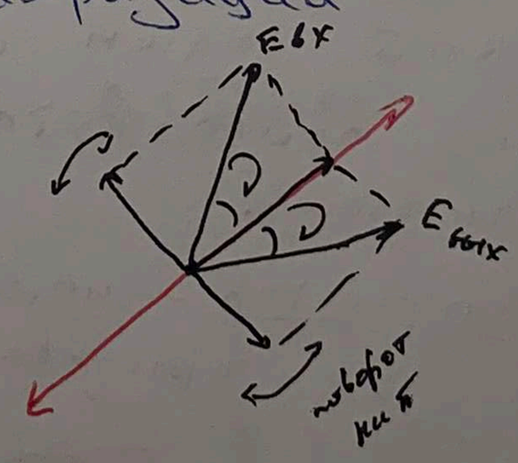
компоненты синхронно меняются $\Leftrightarrow$ теперь одна из них сдвинута по фазе на $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ сумма их даёт компоненту, которая не меняется по величине и описывает окружность

Если $\vartheta \neq 45° \Rightarrow$ эллиптическая поляризация

Пластинка в полволны

$\Delta = (n_e - n_o)d = \frac{\lambda_0}{2}$

$\Delta\varphi = k_0\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d = \pi$

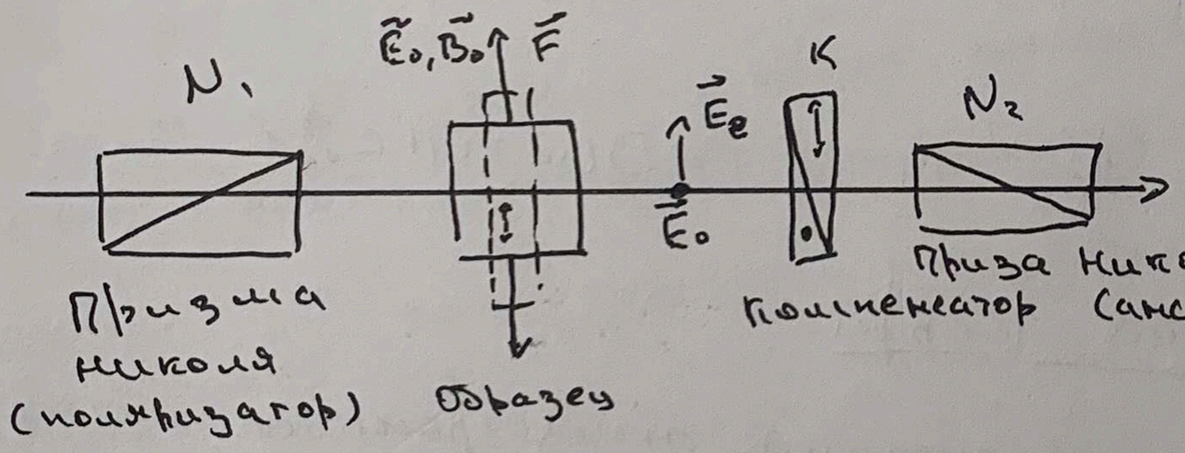


Поворот линейной поляризации на 2ϑ или изменение направления вращения плоскости поляризации в циркулярно (эллиптически) поляризованной волне

III | (38) Наведённая анизотропия оптических свойств. Фотоупругость. Эффекты Поккельса и Керра. Явление Коттон-Мутона.

Механо-(электро-, магнито-) оптические эффекты – изменение оптических характеристик среды под внешним механическим (электрическим, магнитным) воздействием.

Воздействие	Тип эффекта	Эффект
Механическое	Линейный (поперечный)	Фотоупругость
Электрическое	Линейный (поперечный)	Поккельса
	Квадратичный поперечный	Керра
Магнитное	Квадратичный (поперечный)	Коттон-Мутона
	Расщепление (продольный и поперечный)	Зеемана
	Линейный продольный	Фарадея



⇒ чередование тёмных и светлых полос

$\Delta\varphi_k = (2k+1)\pi$ – светлые

$\Delta\varphi_k = 2k\pi$ – тёмные

Фотоупругость

Мера возникшей оптической анизотропии – разность главных показателей преломления для необыкновенной n_e ($\vec{E}_e \parallel \vec{F}$) и обыкновенной n_0 ($\vec{E}_0 \perp \vec{F}$) волн:

$$n_e - n_0 = \Delta n(\omega) = \gamma(\omega)\cdot\frac{F}{S} = \gamma(\omega)\,\sigma$$

$\gamma(\omega)$ – постоянная Брюстера

$$\Delta\varphi = k_0(\omega)(n_e(\omega) - n_0(\omega))l = \frac{\omega}{c}\Delta n(\omega) l = \frac{2\pi}{\lambda_0(\omega)}\Delta n(\omega) l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_0(\omega)} 2\pi\sigma l$$

Механизм – направленная механическая деформация тела

Белый свет → окрашивание из-за зависимости набегающей разности фаз $\Delta\varphi$ от частоты (в том числе дисперсии $\Delta n(\omega)$) и распределения напряжения внутри образца

112 | Эффект Поккельса

Образец помещается между обкладками конденсатора, в котором $\vec{E} \perp$ распространению света

Механизм - ангармонизм движения связанных зарядов в кристалле. Классическая электронная теория, модель ангармонического осциллятора $(-kx-\beta x^2)$, $\vec{E} \parallel \vec{E}_0$, $E_0 \gg E(t)$

$$E_0 \Rightarrow \Delta\omega_0^2 = \frac{2\beta q}{\omega_0^2 m^2} E_0^2 = \Delta n(\omega)$$

$$n_e - n_0 = \Delta n(\omega) = -\frac{\omega n^2}{2n(\omega_0^2-\omega^2)^2}\frac{2\beta q}{\omega_0^2 m^2} E_0 = \gamma(\omega) E_0$$

Линейный оптический эффект наблюдается только в кристаллах, не обладающих центром симметрии.

Эффект Керра

В центрально-симметричных средах.

Классическая электронная теория, модель ангармонического осциллятора $(-kx-\beta x^3)$, $\vec{E} \parallel \vec{E}_0$, $E_0 \gg E(t)$

$$n_e - n_0 = \Delta n(\omega) = \gamma(\omega) E_0^2$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_0)l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_0} 2\pi E_0^2 l = B(\omega) 2\pi E_0^2 l$$

$B(\omega) = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_0}$ - постоянная Керра

Механизм - поляризация и ориентация анизотропных молекул

Для неполярных молекул $B>0$, для полярных - $B>0$ и $B<0$

Эффект Керра определяется свойствами молекул => Эффект Керра определяется с повышением концентрации молекул => усиливается с повышением температуры постоянная Керра падает из-за дезориентирующего действия температуры на дипольные моменты.

Эффекты Поккельса и Керра практически ($\sim 10^{-10} \div 10^{-13}$ с) безинерционны => ячейки Поккельса и Керра - изотропный кристалл во внешнем поле с наведённой оптической осью и симметрично скрещенные под 90° два поляроида - высокоскоростные электрооптические модуляторы света.

43) Явление Коттона - Мутона

Эффект в поперечном магнитном поле.

$n_e - n_0 = \gamma(\omega) B_0^2 \quad (\gamma \sim 10^{-8} Тл^{-2})$

$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_0)l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_0} = 2\pi B_0^2 l = C(\omega)\, 2\pi B_0^2 l$

Механизм - ориентация анизотропных молекул, обладающих М.

(40) Рассеяние света. Рассеяние точечным электрическим диполем. Индикатриса рассеяния, поляризация рассеянного света. Закон Релея. Понятие о молекулярном рассеянии света в газах и жидкостях. Рассеяние Ми.

Рассеяние света - возмущение световых полей на оптических пространственных неоднородностях среды

Оптические неоднородности - включения инородных частиц и флуктуации оптических свойств среды

Процесс рассеяния света состоит в заимствовании молекулой или частицей энергии у распространяющейся в среде волны и последующем излучении всей или части этой энергии

Рассеяние света

Упругое

частота рассеянного света ω_p равна частоте падающего света ω_n; сохраняются фазовые соотношения между падающей и рассеянной волнами - когерентное рассеяние

Неупругое

частота рассеянного света ω_p не равна частоте падающего ω_n; фазовый сбой - некогерентное рассеяние

Релеевское ($r \ll \lambda$)

Ми ($r \geq \lambda$)

Молекулярное (на тепловых флуктуациях)

В дисперсионных системах (на инородных частицах)

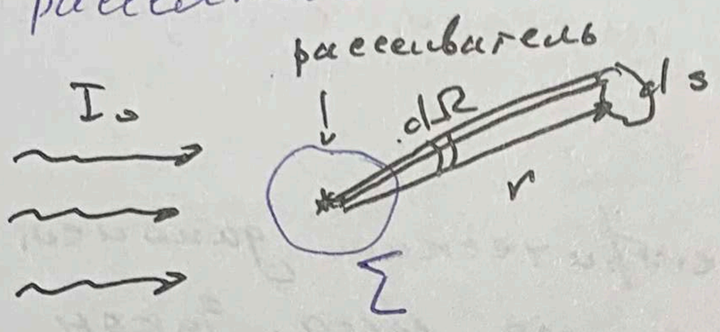
Мандельштама - Бриллюэна (на упругих волнах)

Комбинационное (на молекулах и атомах)

114

Индикатриса рассеяния, сечения и коэффициенты рассеяния

Индикатриса рассеяния – пространственная диаграмма зависимости интенсивности $I(r,\Omega)$ рассеянного света от телесного угла Ω рассеяние на данном расстоянии r от рассеивателя



Дифференциальное сечение рассеивания

$$d\sigma \equiv \frac{dJ}{I_0} = \frac{I(r,\Omega)\,dS}{I_0} = \frac{I(r,\Omega)\,r^2 d\Omega}{I_0}; \quad [d\sigma] = м^2$$

dJ – поток рассеянного света

I_0 – плотность потока / интенсивность

Полное сечение рассеяния

$$\sigma \equiv \frac{J}{I_0} = \frac{\oint_{\Sigma} I(r,\Omega)\,r^2 d\Omega}{I_0} = \int d\sigma$$

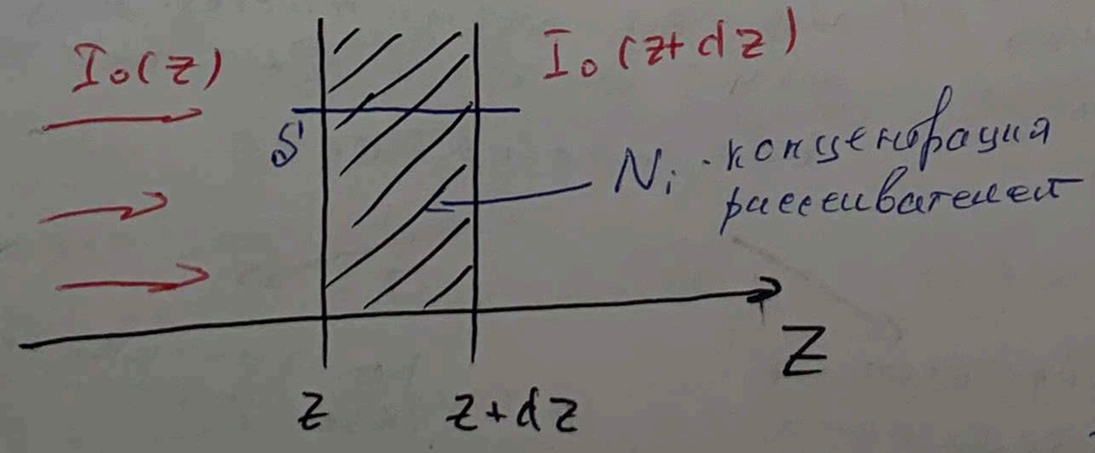
Коэффициент рассеяния

$$K_s = \frac{J}{J_0(S)} = \frac{J}{I_0 S} = \frac{\sigma}{S}$$

$J_0(S)$ – поток падающего света

S – площадь поперечного сечения рассеивателя

Рассмотрим процесс распространения света вдоль Z. Рассмотрим слой толщиной dz.



изменение за счёт рассеяния

$$dI_0 = I_0(z+dz) - I_0(z) = -\alpha_s I_0(z)\,dz$$

α_s – линейный коэффициент рассеяния

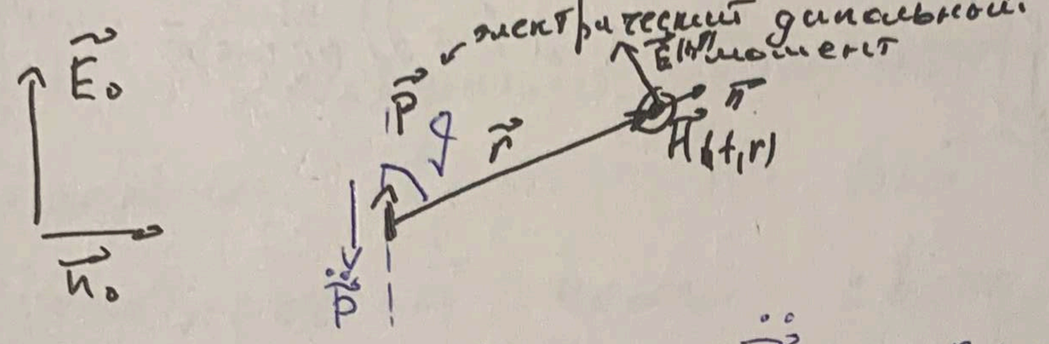
$$I_0(z) = I_0(0)\,e^{-\alpha_s z} = I_0(0)\,e^{-\frac{z}{1/\alpha_s}}$$

115 Рассмотрим сечение слоя площадью S. Изменение потока:

$$-\alpha_s \cancel{S} I_0(z)\, \cancel{dz} = -N_i J \cancel{S}\, \cancel{dz} \Rightarrow \boxed{\alpha_s = N_i \frac{J}{I_0} = N_i \sigma}$$

Излучение элементарного рассеивателя. Закон Рэлея, индикатриса рассеяния и поляризация

Рассмотрим линейно поляризованную волну в вакууме.



Рассмотрим систему зарядов.

$\vec{p} = q \cdot \vec{l}$

Пусть $l \ll \lambda$; $r \gg l$.

$$\vec{H}(t,\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi c r}\left[\vec{n}\cdot\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow [\vec{n}\vec{H}] = -v\vec{D} \Rightarrow \vec{D} = -\frac{1}{v}[\vec{n}\vec{H}] \overset{\text{вакуум}}{\Rightarrow} -\frac{1}{c}[\vec{n}\vec{H}] = \varepsilon_0 \vec{E}$$

Тогда

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi c^2 r}\left[\vec{n}\left[\vec{n}\,\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right]$$

Будем считать, что для излучения характерно гармоническое изменение электрического поля, тогда $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos(\omega t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{p}} = -\omega^2 \vec{p}_0$$

! Напряжённость электрического поля лежит в плоскости $\vec{E}_0, \vec{n}$!

Интенсивность рассеянной волны:

с точностью до константы $\Rightarrow$ домножить на $\varepsilon_0 c$

$$I(\vec{r}) = \langle E^2(t)\rangle \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)^2}\overline{(\ddot{p})^2}\sin^2\vartheta = \frac{\omega^4}{(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)^2}\bar{p}^2\sin^2\vartheta$$

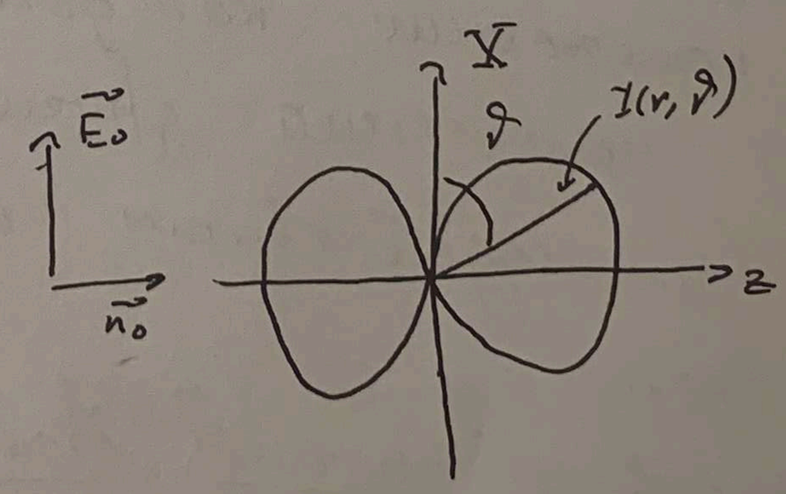
Проекция $\vec{E}(t,\vec{r})$ на локальную ось: $E(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi c^2 r}\ddot{p}(t)\sin\vartheta$

Особенности

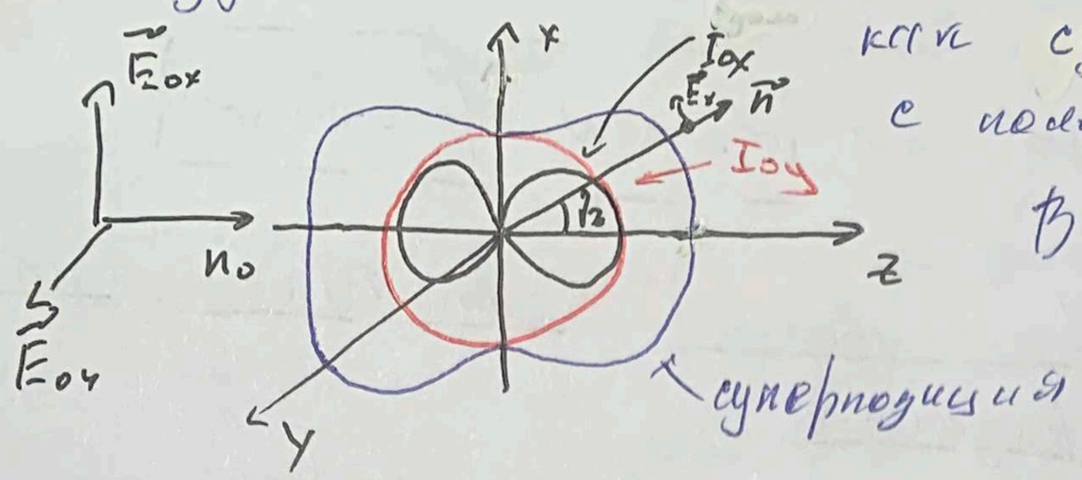
① $I \sim \omega^4$ ← закон Рэлея

② $I \sim \frac{1}{r^2}$

③ $I \sim \sin^2\vartheta$



116 | Будем освещать теперь естественным светом. Можно представить как суперпозицию двух составляющих с поляризацией по x и y.

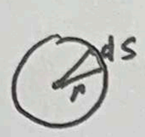


В разных направлениях вклады составляющих разные.

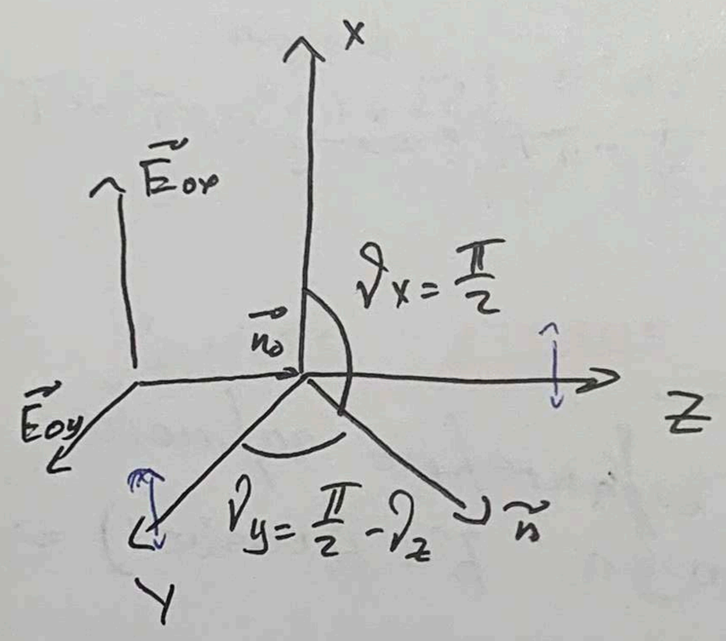
$$I(\vec{n}) = I_x(\vartheta_x) + I_y(\vartheta_y) \sim \frac{\sin^2\vartheta_x + \sin^2\vartheta_y}{2} = \frac{1+\cos^2\vartheta_z}{2}$$

Поток:

$$J = \oiint I(\vartheta)\, ds = \int_0^{4\pi} I(\vartheta) r^2 d\Omega = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} I(\vartheta) r^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\omega^4 p^2}{(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)^2} \cdot \sin^2\vartheta \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta =$$



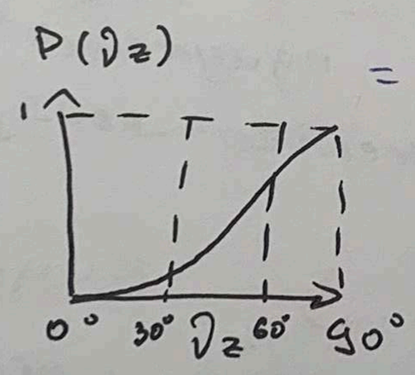
$$= \frac{\omega^4 p^2}{6\pi\varepsilon_0^2 c^4} = J$$



Степень поляризации

поперёк плоскости $(\vec{n}_0, \vec{n})$

$$\boxed{P \equiv \frac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel}} \Rightarrow P = \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} = \frac{\sin^2\vartheta_x - \sin^2\vartheta_y}{\sin^2\vartheta_x + \sin^2\vartheta_y} = \frac{1-\cos^2\vartheta_z}{1+\cos^2\vartheta_z} = \frac{\sin^2\vartheta_z}{1+\cos^2\vartheta_z} = P(\vartheta_z)$$



Молекулярное рассеяние света

Основные положения:

- размеры оптических неоднородностей малы по сравнению с длиной волны света
- положение каждой области неоднородности не зависит от положений других областей
- взаимодействием областей неоднородностей можно пренебречь

Основная причина статистических флуктуаций – флуктуации плотности среды

$$\Delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \Delta T \cong \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho$$

117 | Рассеяние обусловлено наличием флуктуации электрического дипольного момента выделенных объёмов V_j оптической неоднородности $p_{V_j} = V_j \vec{P} = V_j \varepsilon_0 (\varepsilon_j - 1) E_0$:

$$\Delta p_{V_j} = V_j \varepsilon_0 \Delta\varepsilon_j \vec{E}_0 = V_j \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T \Delta\rho_j \vec{E}_0$$

Рассеяние на молекулах каждой оптической неоднородности упруго и когерентно. Напряжённость электрического поля рассеянного света на этой неоднородности равна сумме напряжённостей полей света, рассеянного каждой молекулой. Следовательно:

$$E_j = \frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \Delta p_{V_j} \sin\vartheta = E_0 \frac{\omega^2}{4\pi c^2 r} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T \Delta\rho_j V_j \sin\vartheta$$

$$I_j = \langle E_j^2 \rangle = I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T^2 \overline{(\Delta\rho_j V_j)^2} \sin^2\vartheta$$

Поскольку $\rho_j = \frac{m_j}{V_j}$, то для выделенной массы m_j среды при малых флуктуациях $\frac{\Delta\rho_j}{\rho_j} = -\frac{\Delta V_j}{V_j}$ и

$$\overline{(\Delta\rho_j V_j)^2} = \overline{(\rho_j \Delta V_j)^2} \cong \rho \overline{(\Delta V_j)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I = \sum_j I_j \cong I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2} \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T^2 \sum_j \overline{(\Delta V_j)^2} \sin^2\vartheta}$$

Формула Эйнштейна для рассеяния в жидкостях и плотных газах

$$\left(\frac{\Delta P_j}{\Delta V_j}\right)_T \cong \alpha_j - const\,(V_j) < 0$$

$$\Delta A_j = \int_{\bar{V}_j}^{\bar{V}_j + \Delta V_j} (\bar{P} + \Delta P_j)\, dV = \int_0^{\Delta V_j} (\bar{P} + \alpha_j \Delta V_j)\, d(\Delta V_j) = \bar{P}\Delta V_j + \frac{\alpha_j}{2}(\Delta V_j)^2$$

Пусть флуктуируют достаточно быстро по сравнению со скоростью обмена энергией. $\Delta Q_j = \Delta U_j + \Delta A_j = 0$

$$\overline{\Delta U_j} = -\overline{\Delta A_j} = -\overline{P\,\Delta V_j} - \frac{\alpha_j}{2}\overline{(\Delta V_j)^2} = -\frac{\alpha_j}{2}\overline{(\Delta V_j)^2} = \frac{1}{2}kT$$

$$\overline{(\Delta V_j)^2} = -\frac{kT}{\alpha_j}$$

Изотермическая сжимаемость

$$\beta_T \equiv -\frac{1}{V_j}\left(\frac{\partial V_j}{\partial P_j}\right)_T$$

$$\alpha_j \cong \left(\frac{\Delta P_j}{\Delta V_j}\right)_T \cong -\frac{1}{V_j\beta_T}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{(\Delta V_j)^2} = V_j\beta_T kT$$

$$\sum_j \overline{(\Delta V_j)^2} = V\beta_T kT$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\overline{I} = I_0\frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2}\overline{\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2}\,V\beta_T kT\,\overline{\sin^2\chi}}$$

Формула Рэлея для разреженных газов

$P_j V_j = N_j kT$: $\quad \beta_T \equiv -\frac{1}{V_j}\left(\frac{\partial V_j}{\partial P_j}\right)_T = \frac{1}{V_j}N_j kT\frac{1}{P_j^2} = \frac{1}{P_j}$

$$\beta_T kT = \frac{kT}{P_j} = \frac{V_j}{N_j} \cong \frac{1}{N}$$

N_j - число молекул (атомов)

N - средняя концентрация

$$\varepsilon - 1 = N\beta = N_A\frac{\rho}{\mu}\beta$$

поляризуемость молекулы

$$\rho\frac{d\varepsilon}{d\rho} = \rho N_A\frac{1}{\mu}\beta = \varepsilon - 1 = n^2 - 1 \cong 2(n-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I = I_0\frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2}4(n-1)^2\frac{V}{N}\sin^2\chi}$$

!Рассеяние Ми смотри в файле Русакова!