

БИЛЕТ 1

Э/м теория света. Ур.-е Максвеля и материальное ур.-е. Волновое ур.-е. Принцип суперпозиции. Бегущие э/м волны. Скорость света. Плоские и сферические волны. Комплексное представление гармон. волн.

Оптика - раздел физики, изуч. природу оптического излучения (света), его распространение и взаимодействие с веществом.

Свет - э/м волна, имея кот. сущ. есть возможность спрогнозировать изображение видимый диапазон: 380-780 нм

Уравнение Максвеля:

- $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ - з. э/м индукции Фарадея
- $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$ - теорема о циркуляции \vec{H}
- $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ - т. Гаусса для \vec{D}
- $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ - т. Гаусса для \vec{B}

Материальные ур.-е:

$$\begin{aligned} \cdot \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \cdot \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) \\ \cdot \vec{J} &= \sigma \vec{E} \end{aligned}$$

Вид этих ур.-е зависит от свойств среды распространения волн. Эти ур.-е описывают связь между хар-ми э/м поля в среде и откликом среды на воздействие поля.

В однород. изотроп. беск. эл.-кинейтр. среде $\rho=0, \sigma=0$

Тогда ур.-е Максвеля и матер. ур.-е принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \end{array} \right. \quad \xrightarrow{\substack{0, \tau, \kappa, \beta = 0 \\ \parallel}} \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

$$\downarrow$$

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \operatorname{rot} \vec{H}}{\partial t}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

волновое ур.-е

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

- скорость света

$$n = \sqrt{\epsilon \mu}$$

- показатель преломления

Волн. ур.-е в скаляр. виде: $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f$, где $f: E_x, E_y, E_z, H_x, H_y$ или H_z - ур.-е волни

Принцип суперпозиции: $\vec{f} = \sum_i \vec{f}_i$ - э/м волны распред. не зависят друг от друга

Бегущие волны - волна, кот. при распред. в среде передает энергию свидетельствует о том, что \vec{E} и \vec{H} находятся в одной фазе

Пусть f зависит только от $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и времени $\rightarrow f = f(r, t)$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r} \left(\frac{x}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

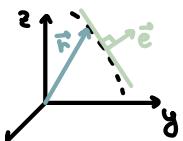
$$\text{Тогда } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} \quad \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right. \rightarrow \psi(r, t) = \psi_1(t - \frac{r}{c}) + \psi_2(t + \frac{r}{c}) \rightarrow f(r, t) = \frac{\psi_1(t - \frac{r}{c})}{r} + \frac{\psi_2(t + \frac{r}{c})}{r}$$

от начала координат

к началу координат

ур.-е сферической волны

На больших расстояниях от начала координат фрагмент сфер. волны ш.д. представлен в виде плоской волны.



Фиксированная f постоянна на плоскости $\vec{r} \cdot \vec{e}$ и зависит только от $\zeta = \vec{r} \cdot \vec{e} \rightarrow f = f(\zeta, t)$

$$\text{Тогда } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \rightarrow f(\zeta, t) = f_1(t - \frac{\zeta}{c}) + f_2(t + \frac{\zeta}{c}) \rightarrow f(\vec{r}, t) = f_1(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{e}}{c}) + f_2(t + \frac{\vec{r} \cdot \vec{e}}{c})$$

ур.-е плоской волны

Волновой фронт - поверхн.ть, сост. из точек, в кот. $f(1 \pm \frac{r}{v}) = \text{const}$

Ур-ние динамич. гарм. волны: $f(x, y, z, t) = A(x, y, z) \cos[\omega t - \varphi(x, y, z)]$

↓

$$f = \frac{1}{2} [A e^{i(\omega t - \varphi)} + A^* e^{i(\omega t - \varphi)}]$$

$A = A e^{i\varphi}$ - комплекс. амплитуда

$$f = \frac{1}{2} [\hat{A} e^{i\omega t} + \hat{A}^* e^{i\omega t}]$$

комплекс. представл.е
гарм. волны

БИЛЕТ 2

Световые пучки и импульсы. Модели реальных волн. Квазициклические гармоники. Волна. Квазимонохром. импульс. Энергетика свет. пучков и импульсов.

Надулижение - вариации интенс.-тии по времени или амплитуды или фазы во времени или пр.-ве

Пиоские и монохром. волны не существуют в реальности. Реальные волны надулижированы во времени и пр.-ве, а также ограничены

Световой пучок - свет. волна, модулир. в пр.-ве с масштабом, сущ.-ко превыш. длину волны $d \gg \lambda \sim 10^{-6}$ см

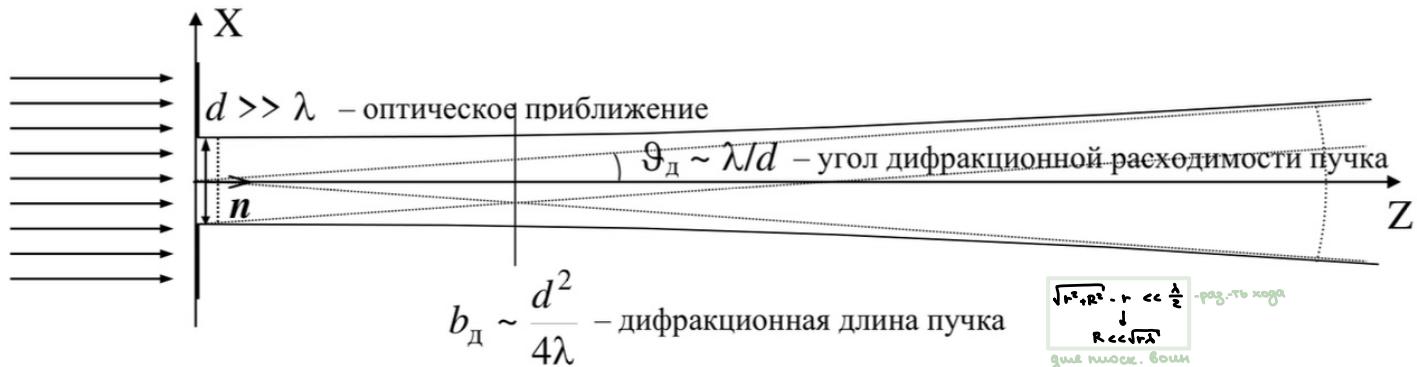
Пучки распред. по времени одной оси, а в попереч. напр.-ии амплитуда быстро спадает от центра пучка к его периферии.

Пример: $f(x, y, z, t) = A(x, y, z) \cos[\omega t - k z + \varphi_0(x, y, z)]$ Гауссов пучок: $A(z, t) = A_0 e^{\frac{-z^2}{2a_0^2}} \cos(\omega t - k z + \varphi)$, $a^2 = x^2 + y^2$

Световой импульс - свет. волна, модулир. во времени с масштабами, сущ.-ко превыш. периода волны $\tau \gg T \sim 10^{-15}$ с

Пример: $f(x, y, z, t) = A(x, y, z, t - \frac{\tau}{c}) \cos[\omega t - k z + \varphi_0(x, y, z, t - \frac{\tau}{c})]$

Модели реальных световых волн



	z	Гармонические волны пучок	Квазигармонические волны импульс-надулижение по t
Квазициклические	$0 \leq z \ll b_D$ геом. оптика	$f(t, x, y, z) = a(x, y) \cos(\omega t - k z + \varphi_0)$	$f(t, x, y, z) = a(t - \frac{z}{v}, x, y) \cos(\omega t - k z + \varphi_0(t - \frac{z}{v}))$
Пиоские	$0 \leq z \ll b_D$ $R = \sqrt{x^2 + y^2} \ll d$	$f(t, z) = a \cos(\omega t - k z + \varphi_0)$	$f(t, z) = a(t - \frac{z}{v}) \cos(\omega t - k z + \varphi_0(t - \frac{z}{v}))$
Квазисферические	$z \gg b_D$	$f(t, x, y, r) = \frac{a(k_x, k_y)}{r} \cos(\omega t - k r + \varphi_0)$	$f(t, x, y, r) = \frac{a(t - \frac{r}{v}, k_x, k_y)}{r} \cos(\omega t - k r + \varphi_0(t - \frac{r}{v}))$
Сферические	$z \gg b_D$ $R \ll \theta_D r \sim \frac{d}{a}$	$f(t, r) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - k r + \varphi_0)$	$f(t, r) = \frac{a(t - \frac{r}{v})}{r} \cos(\omega t - k r + \varphi_0(t - \frac{r}{v}))$
Пиоские с уб. амплитудой	$z \gg b_D$ $R \ll \sqrt{\lambda}$	$f(t, z) = \frac{a}{z} \cos(\omega t - k z + \varphi_0)$	$f(t, z) = \frac{a(t - \frac{z}{v})}{z} \cos(\omega t - k z + \varphi_0(t - \frac{z}{v}))$
Пиоские	$z \gg b_D$ $R \ll \sqrt{\lambda}, \Delta z \ll z$	$f(t, z) = a \cos(\omega t - k z + \varphi_0)$	$f(t, z) = a(t - \frac{z}{v}) \cos(\omega t - k z + \varphi_0(t - \frac{z}{v}))$

Энергетические характеристики:

Пучок:

$$P = \iint_{-\infty}^{+\infty} I dx dy = I_{\text{эфф}} \sigma \rightarrow I_{\text{эфф}} = \frac{P}{\sigma} \quad P - \text{мощ.-ть}$$

б-сечение

Импульс:

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I dx dy dt = I_{\text{эфф}} \sigma \tau \rightarrow I_{\text{эфф}} = \frac{W}{\sigma \tau} = \frac{P}{\sigma} \quad W - \text{полн. энергия}$$

P - мощ.-ть б-сечение

τ - длительность

БИЛЕТ 3

Волновое ур.-е. Общее реш.-е в виде плоских волн. Свойства плоских волн: ориентацию и взаимосвязь появления векторов. Поляризация света. Классификация сост.-й поляризации. Компликации естеств. света

Волновое ур.-е: $\Delta \vec{f} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} = 0$ см. Билет 1

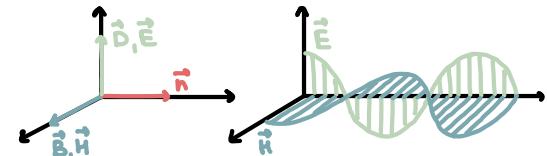
Ур.-е плоской волны: $\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{f}(t \pm \frac{\vec{r}}{c})$ см. Билет 1

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(t \pm \frac{\vec{r}}{c}) \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{rot } \vec{E}(t \pm \frac{\vec{r}}{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{c} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & \dot{E}_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{c} [\vec{n}, \vec{E}] = -\vec{B} \rightarrow [\vec{n}, \vec{E}] = c \vec{B} \rightarrow \vec{n} \vec{B} = 0$$

I ур. Ньютона

Свойства плоских волн:

- 1) Э/и волны поперечные - \vec{E}, \vec{H} и \vec{n} образуют правую тройку
- 2) электр. и магнит. комп.-ты бегущей э/и волны компликаются синхронно
- 3) свдь появления векторов: $\sqrt{\epsilon \mu_0} \vec{E} = \sqrt{\mu_0 \epsilon} \vec{H}$



Поляризация света:

Плоскость поляризации - плоскость, зад. векторами \vec{E} и \vec{n}

Линейная поляризация - при расп-ии волны плоскость поляр.-ции не меняет ориентацию в пр.-ве

Э/и волна с любой поляр.-цией и.д. представлена как суперпозиция двух э/и волн, имеюю поляр.-к во врем. и перп.-к пл-ти:

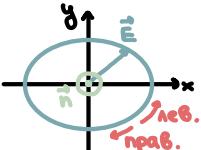
$$\begin{cases} E_{1x}(z, t) = E_{10} \sin(\omega t - kz), E_{1y} = E_{1z} = 0 & (1) \\ E_{2y}(z, t) = E_{20} \sin(\omega t - kz + \delta), E_{2x} = E_{2z} = 0 & (2) \end{cases} \quad \delta - \text{сдвиг фаз}$$

$$\begin{aligned} E_y(2): E_y = E_{2y} = E_{20} [\sin(\omega t - kz) \cdot \cos \delta + \sin \delta \cdot \cos(\omega t - kz)] \\ E_y(1): \sin(\omega t - kz) = \frac{E_x}{E_{10}} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} E_y &= E_{20} \frac{E_x}{E_{10}} \cos \delta + E_{20} \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{10}}\right)^2} \sin \delta \quad | : E_{20} \text{ и } t^2 \\ \frac{1}{E_{20}^2} \cdot (E_y - E_{20} \frac{E_x}{E_{10}} \cos \delta)^2 &= \left(1 - \left(\frac{E_x}{E_{10}}\right)^2\right) \sin^2 \delta \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{E_y^2}{E_{20}^2} + \frac{E_x^2}{E_{10}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{10}} \cdot \frac{E_y}{E_{20}} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

- $\cos \delta = 0, \sin \delta = \pm 1: \delta = \frac{\pi}{2} + \pi n$

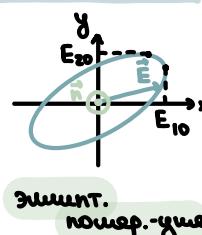
- $E_{10} \neq E_{20}$ - эллиптическая поляр.-ция



- $E_{10} = E_{20}$ - круговая поляр.-ция

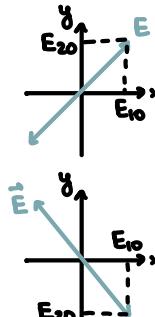


- $\cos \delta \neq 0, \sin \delta \neq 0:$



- $\cos \delta = \pm 1, \sin \delta = 0: \delta = \pi n$

- $\cos \delta = 1: \frac{E_y}{E_{20}} - \frac{E_x}{E_{10}} = 0$

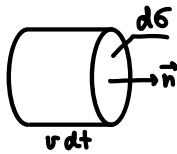


- $\cos \delta = -1: \frac{E_y}{E_{20}} + \frac{E_x}{E_{10}} = 0$

В естеств. свете ориентации пл-ти пол. поляр.-ции хаотически меняются с изменениями времени

БИЛЕТ 4

Поток и плотность потока энергии э/м волны. Вектор Чибова-Пойнтинга. Интенсивность света. Закон изменения энергии э/м волны.



$dW = w dV = w v dt dS$ - энергия, перенесенная э/м волной за dt через dS

$$S = \frac{dW}{dt dS} \rightarrow S = w v \quad \text{- плотность потока энергии}$$

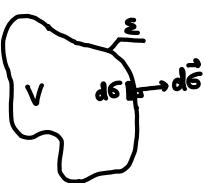
$\vec{S} = w v \vec{n}$ - вектор Чибова-Пойнтинга $[S] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} = \frac{\psi \epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} = \sqrt{\epsilon_0} E \sqrt{\mu_0} H = \frac{1}{v} EH \\ S &= w v \end{aligned} \right\} \vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$$

Интенсивность света - среднее за период волны значение квадрата потока энергии: $I = \langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \epsilon_0 \epsilon v \langle E^2 \rangle \sim \langle E^2 \rangle$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot \vec{H} \\ \cdot \vec{E} \end{array} \right. \rightarrow \vec{H} \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot} \vec{H} = -\vec{j} \vec{E} - (\vec{E} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot \vec{E} \\ \cdot \vec{B} \end{array} \right. \quad \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E} \vec{D}}{2} + \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} \right) = \frac{1}{2} (2\epsilon \epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 2\mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{j} \vec{E} &= q \quad \text{з. Пояснение - Ленга} \\ \vec{S} &= [\vec{E}, \vec{H}] \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{div } \vec{S} = -q - \frac{\partial w}{\partial t} \\ \text{з. изменение э/м энергии} \\ \text{дифф. форма} \end{array} \right\}$$



Применим правило нач. закон по нек. объему, получим:

$$\int_V \text{div} \vec{S} dV = -Q - \frac{\partial W}{\partial t}$$

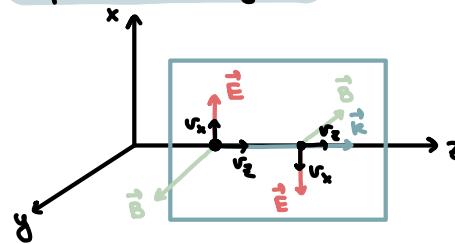
$$\int_V \text{div} \vec{S} dV = \oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{s} \quad \text{- ф.из Остроградского-Гаусса}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial W}{\partial t} &= Q + \oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{s} \\ \text{з. изменение э/м энергии} \\ \text{инт. форма} \end{aligned} \right\}$$

БИЛЕТ 5

Излучение фотона. Плотность излучающей э/и волны. Давление свет. волны на кв.-тъ тема.

Нормальное падение:



$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}] = qE_x\vec{e}_x + q \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = qE_x\vec{e}_x + qB_y(-\vec{e}_xv_z + \vec{e}_zv_x)$$

Учитывая за период: $\langle E_x \rangle = 0$
 $\langle v_z B_y \rangle \approx v_z \langle B_y \rangle = 0$

$$\left. \begin{aligned} \langle \vec{F} \rangle &= q \langle v_x B_y \rangle \vec{e}_z \\ \frac{dW}{dt} &= (\vec{F}, \vec{v}) = q E_x v_x \\ E_x &= c B_y \end{aligned} \right\} \frac{dW}{dt} = q c B_y v_x \rightarrow \langle \frac{dW}{dt} \rangle = q c \langle B_y v_x \rangle$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \vec{F} \rangle &= \frac{1}{c} \langle \frac{dW}{dt} \rangle \vec{e}_z \\ P &= \frac{I}{cS} \cdot \langle \frac{dW}{dt} \rangle \end{aligned} \right\}$$

$P = \frac{I}{c}$ - давление света
 $P = \frac{I}{c}(1+R)$

R - коэф. отраж. че по интенс. ти

$$\left. \begin{aligned} \vec{P} &= \frac{\vec{F}}{S} = \frac{I}{c} \vec{e}_z \\ \vec{F}_{at} &= \vec{g} \cdot \vec{n} \cdot S \end{aligned} \right\} \vec{g} = \frac{I}{c^2} \vec{e}_z = \frac{c w_r}{c} \vec{e}_z$$

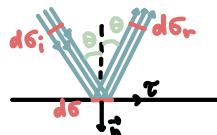
- общей. инт. ти излучающей

Это значит, что э/и волна переносит не только энергию, но и излучение

Если рассм. ти фотон как э/и волну, идущую в пр. ве и времени, то это излучение:

$$\vec{P}_\sigma = \vec{g} V = \frac{c w_r}{c} V \vec{e}_z = \frac{E_\sigma}{c} \vec{e}_z = \frac{\hbar \omega}{c} \vec{e}_z = \hbar \vec{k}$$

Наклонное падение:



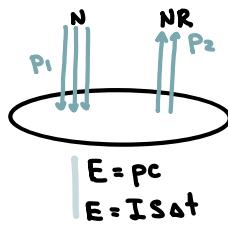
$$\left. \begin{aligned} dG_i &= \vec{g}_i \cdot d\Omega_i \cdot c dt = \frac{c w_i}{c} \vec{n}_i \cdot d\Omega_i \cdot c dt = c w_i \vec{n}_i \cos \theta d\Omega_i dt \\ dG_p &= \vec{g}_p \cdot d\Omega_p \cdot c dt = \frac{c w_p}{c} \vec{n}_p \cdot d\Omega_p \cdot c dt = c w_p \vec{n}_p \cos \theta d\Omega_p dt \end{aligned} \right\} \vec{P} = \frac{dG_i - dG_p}{d\Omega dt} = [c w_i \vec{n}_i - c w_p \vec{n}_p] \cos \theta = c w_i (\vec{n}_i - R \vec{n}_p) \cos \theta = \frac{I}{c} (\vec{n}_i - R \vec{n}_p) \cos \theta$$

$$P_n = \frac{I}{c} (1+R) \cos^2 \theta$$

$$P_t = \frac{I}{c} (1-R) \cos \theta \sin \theta$$

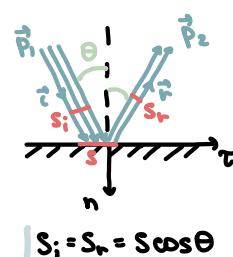
Квантовое рассмотрение:

Нормальное падение:



$$\begin{aligned} P &= \frac{F_n}{S} = \frac{(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)_n}{S_{at}} = \frac{N_p + N_{Rp}}{S_{at}} = \\ &= \frac{N_p(1+R)}{S_{at}} = \frac{NE}{cS_{at}} (1+R) = \frac{I_{at} + S}{cS_{at}} (1+R) \\ P &= \frac{I}{c} (1+R) \end{aligned}$$

Наклонное падение:



$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= N_p c S_i \vec{i} \\ \vec{P}_2 &= R N_p c S_r \vec{r} \end{aligned} \quad \begin{aligned} P_n &= \frac{\Delta P_n \Delta t}{S} \\ P_t &= \frac{\Delta P_t \Delta t}{S} \end{aligned}$$

$$P_n = \frac{I}{c} (1+R) \cos^2 \theta$$

$$P_t = \frac{I}{c} (1-R) \sin \theta \cos \theta$$

БИЛЕТ 6

Метод спектрального описания волн. поиски. Преобразование Фурье. Интеграл и коэффи.-ты Фурье. Комплексные спектр. амплитуды, спектр. амплитуд и фаз, их свойства.

Метод спектр. описания волн. поиски:

Дан. метод позволяет описать волни. -е пронизв. по простр.-временной структуре волны с какой-то неоднор. средой с поис.-то представление нек-го волни в виде совок.-ми плоских гарм. волни, распред.-ие в разн. напр.-ях с разн. частотами. В основе метода лежат принцип суперпозиции и преобр.-е Фурье. Метод применяется только для сред с линейными откликами на вл.-е.

Преобразование Фурье:

Если нек. ф.-чина $f(t)$ одн.-но интегр.-на в комп. конеч. интервале времени и сущ.-ет интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$, то эта ф.-чина представлена в виде интеграла Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)] d\omega, \quad \text{тогда}$$

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ b(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

- коэффи.-ты
Фурье

Введём спектральную амплитуду:

$$g(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$$

$$\text{Тогда } f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\omega) \left[\frac{a(\omega)}{g(\omega)} \cos(\omega t) + \frac{b(\omega)}{g(\omega)} \sin(\omega t) \right] d\omega \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \cos(\varphi(\omega)) &\equiv \frac{a(\omega)}{g(\omega)} \\ \sin(\varphi(\omega)) &\equiv \frac{b(\omega)}{g(\omega)} \end{aligned}$$

$\varphi(\omega)$ - спектральная фаза

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega$$

$$\text{Введём комплекс. спектр. амплитуду: } f(i\omega) \equiv a(\omega) - i b(\omega) = g(\omega) (\cos \varphi(\omega) - i \sin \varphi(\omega)) \rightarrow f(i\omega) = g(\omega) e^{-i\varphi(\omega)}$$

Прибавим к $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega$ интегралу $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega = 0$. Тогда:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) [\cos(\omega t - \varphi(\omega)) + i \sin(\omega t - \varphi(\omega))] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i(\omega t - \varphi(\omega))} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\text{Также } f(i\omega) = a(\omega) - i b(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

обратное преобр.-е
Фурье

$$f(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

прямое преобр.-е
Фурье

Спектр. плотность: $|f(i\omega)|^2 = f^2(\omega)$

Свойства преобр.-й Фурье:

1) Если $f(t)$ - чёткое ф.-чина, то $b(\omega) = 0$, след.-но:

$$f(i\omega) = a(\omega)$$

$$f(\omega) = |f(i\omega)| = |a(\omega)| \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & a(\omega) > 0 \\ \pi, & a(\omega) < 0 \end{cases}$$

$$|f(i\omega)|^2 = a^2(\omega)$$

2) Если f - нечёткое ф.-чина, то $a(\omega) = 0$, след.-но:

$$f(i\omega) = -i b(\omega)$$

$$f(\omega) = |b(\omega)|$$

$$|f(i\omega)|^2 = b^2(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} +\pi/2, & b(\omega) > 0 \\ -\pi/2, & b(\omega) < 0 \end{cases}$$

3) $\begin{cases} a(-\omega) = a(\omega) \\ b(-\omega) = -b(\omega) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} f^*(i\omega) = f(-i\omega) \end{array} \right.$

БИЛЕТ 7

Свойства преобр.-е Фурье: соотн.-е ш/у длительностью импульса и ширины спектра, симметрия спектра по частоте. Принцип преобр.-е Фурье. Теорема Гюндерсена. Свободный спектр и спектр. интегр. интегр. -ии.

Суперпозиция импульсов:

$$F(t) = \sum_j a_j f_j(t) \xrightarrow{\text{в сущ. ширине}} F(i\omega) = \sum_j a_j f_j(i\omega)$$

Симметрия импульса во времени:

Рассмотрим $f(t)$, симм. во времени на t_0 : $F(t) = f(t \pm t_0)$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \pm t_0) e^{-i\omega t} dt = \left| \frac{d\tau}{dt} = dt \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} e^{\pm i\omega t_0} d\tau = e^{\pm i\omega t_0} f(i\omega) = F(\omega) e^{\pm i(\varphi(\omega) \mp \omega t_0)}$$

Таким образом: $\Phi(\omega) = \varphi(\omega) \mp \omega t_0$, $F(\omega) = |F(i\omega)| = |f(i\omega)| = f(\omega)$, $|F(i\omega)|^2 = |f(i\omega)|^2$ — спектр. фаза измен.-ся на $\mp \omega t_0$, а спектр. амплитуда и спектр. интегр. -ть остаются неизменными.

Изменение масштаба времени:

Рассмотрим ф.-чно $f(t)$ с измн. масштабом времени: $F(t) = f(\pm \alpha t)$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\pm \alpha t) e^{-i\omega t} dt = \left| \frac{d\tau}{dt} = \pm \alpha dt \right| = \pm \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i(\pm \frac{\omega}{\alpha})\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i(\pm \frac{\omega}{\alpha})\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} f(\pm i \frac{\omega}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha} f(\pm \frac{\omega}{\alpha}) e^{-i\varphi(\pm \frac{\omega}{\alpha})}$$

Таким образом: $\Phi(\omega) = \varphi(\pm \frac{\omega}{\alpha}) = \pm \varphi(\frac{\omega}{\alpha})$, $F(\omega) = |F(i\omega)| = \frac{1}{\alpha} f(\frac{\omega}{\alpha})$, $|F(i\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2} f^2(\frac{\omega}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha^2} |f(i\frac{\omega}{\alpha})|^2$

Соотношение ш/у длительностью импульса и ширины спектра:

Длительность импульса Δt — интервал времени, в теч.-е кот. импульс сущ.-ко от нач. до конца.

Ширина спектра $\Delta\omega$ — интервал частот, на кот. спектр. амплитуда $f(\omega)$ или спектр. интегр. -ть $|f(i\omega)|^2$ сущ.-ко от нач. до конца

В завис.-ти от определений этих понятий соотн.-е ш/у $\Delta\omega$ и Δt неизвестно.

Однако сущ.-ет универсальная закономерность: $\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t}$

$$\text{Пусть: } \Delta t \equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt}{f(t=0)}, \quad \Delta\omega \equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) d\omega}{f(i\omega=0)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) d\omega}{a(\omega=0)}$$

Это написано,
чтобы помнить,
что этовещ.-й
функционалом и
без корня

$$\text{Тогда: } \Delta\omega \cdot \Delta t = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^0 dt} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) e^0 d\omega} \rightarrow \Delta\omega \cdot \Delta t = 2\pi$$

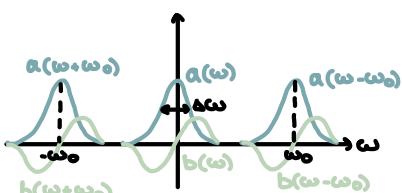
Изменение спектра по частоте:

ногде, но +

Рассмотрим импульс длит.-ю $\Delta t \gg T_0$ в виде квазигарм. ф.-чи с несущей частотой ω_0 : $F(t) = f(t) \cos(\omega_0 t)$

$$\text{т.к. } \Delta t \gg T_0, \text{ то } \Delta\omega \sim \frac{2\pi}{\Delta t} \ll \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}] dt = \frac{1}{2} [f(i(\omega-\omega_0)) + f(i(\omega+\omega_0))]$$



Для $\omega \gg \omega_0$: вклад от части справа имеет физ. смысл, а вкладом от части слева можно пренебречь, т.к. $\Delta\omega \ll \omega_0$

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{2} [a(\omega-\omega_0) + a(\omega+\omega_0)] \approx \frac{1}{2} a(\omega-\omega_0) \\ B(\omega) &= \frac{1}{2} [b(\omega-\omega_0) + b(\omega+\omega_0)] \approx \frac{1}{2} b(\omega-\omega_0) \end{aligned} \right\} F(i\omega) \approx \frac{1}{2} f(i(\omega-\omega_0))$$

Таким образом: $F(i\omega) \approx \frac{1}{2} f(i(\omega-\omega_0))$, $F(\omega) \approx \frac{1}{2} f(\omega-\omega_0)$, $|F(i\omega)|^2 \approx \frac{1}{4} |f(i(\omega-\omega_0))|^2$, $\Phi(\omega) = \varphi(\omega-\omega_0)$ — все величины такие же, как у $f(t)$, но смещены на несущую частоту ω_0 .

Теорема Пианинерсена: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(i\omega)|^2 d\omega$

Доказательство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right]^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(i\omega) e^{-i\omega t} d\omega dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(i\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(i\omega)|^2 d\omega$$

Пример преобр.-е Фурье:

Гармоническое колебание: $f(t) = f_0 \cos(\omega_0 t)$

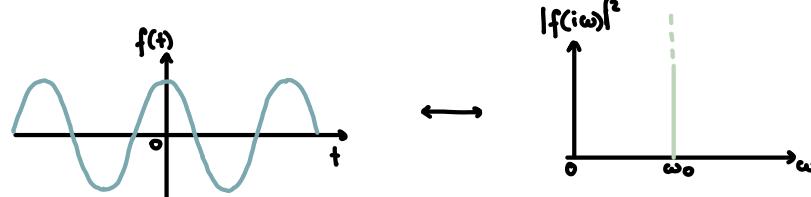
$$f(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt = \pi f_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} [e^{-(\omega-\omega_0)t} + e^{-(\omega+\omega_0)t}] dt = \pi f_0 [\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$$

При $\omega > 0$: $|f(i\omega)| = \pi f_0 \delta(\omega - \omega_0)$

$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt$ - дельта-функция

1) $\delta(\omega=0) = +\infty$ 2) $\delta(\omega \neq 0) = 0$

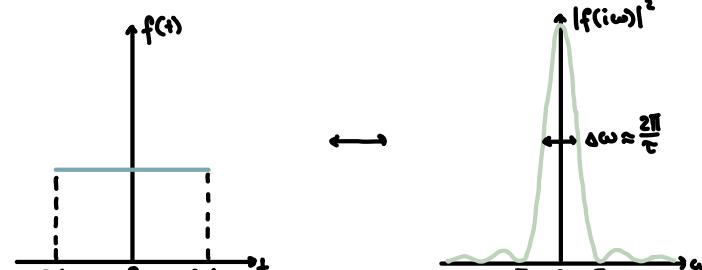
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \delta(\omega - \omega_0) d\omega = f(\omega_0)$



Прямоуг. импульс: $f(t) = \begin{cases} f_0, & t \in [-\tau/2, \tau/2] \\ 0, & t \notin [-\tau/2, \tau/2] \end{cases}$

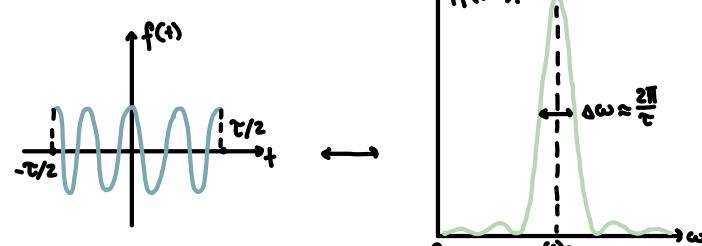
$$f(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = f_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = f_0 \frac{e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2}}{-i\omega} = f_0 \tau \frac{-2i \sin(\frac{\omega\tau}{2})}{-i\omega\tau}$$

$$f(i\omega) = f_0 \tau \operatorname{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$$



Идеал. волна: $f(t) = \begin{cases} f_0 \cos(\omega_0 t), & t \in [-\tau/2, \tau/2] \\ 0, & t \notin [-\tau/2, \tau/2] \end{cases}$

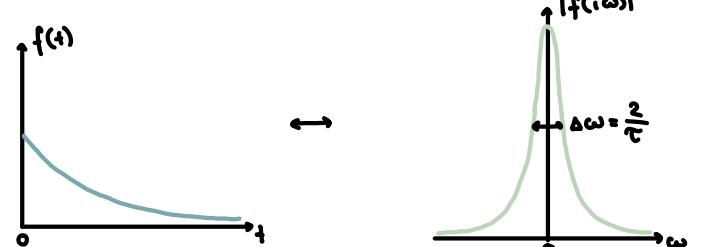
При $\omega > 0$: $f(i\omega) = \frac{1}{2} f_0 \tau \operatorname{sinc}(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2})$



Экспоненциальный импульс: $f(t) = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = f_0 e^{-\delta t}$ при $t > 0$

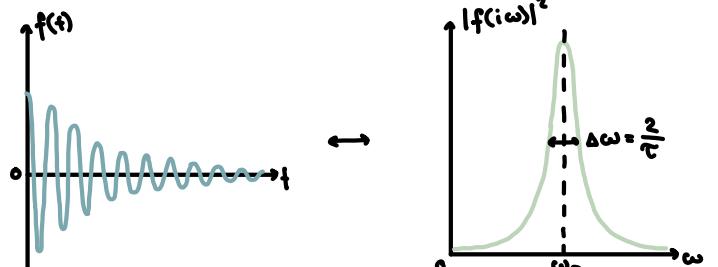
$$f(i\omega) = \int_0^{\infty} f_0 e^{-\delta t} e^{-i\omega t} dt = f_0 \frac{1}{\delta + i\omega} = f_0 \frac{\delta - i\omega}{\delta^2 + \omega^2}$$

$$|f(i\omega)|^2 = \frac{f_0^2}{\delta^2} \cdot \frac{\delta^2}{\delta^2 + \omega^2}$$



Синод. гарм. волна: $f(t) = f_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t)$

$$|f(i\omega)|^2 = \frac{1}{4} f_0^2 \tau^2 L(\frac{\omega - \omega_0}{\delta})$$



Спектральная плотность интенсивности: интенсивность, приходящаяся на единич. интервале частот

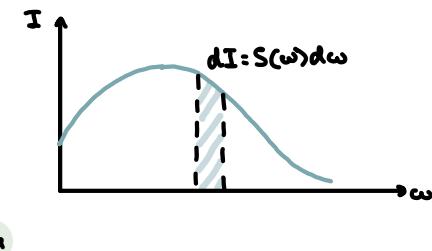
Какой смысл будет иметь $|E(i\omega)|^2$ при рассл.-ии напряж.-ти ви. помп $E(t)$?

- Свят. импульс: $E(t)$ с длит.-ю T

$$I = \langle S \rangle_T = \frac{1}{T} \langle E^2(t) \rangle \sim \langle E^2(t) \rangle$$

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T E^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |E(i\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$$

$$S(\omega) = \frac{|E(i\omega)|^2}{\pi T}$$



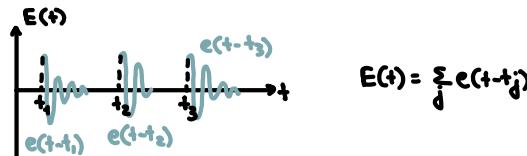
спектр. плот.-ть
интенс.-ции

- Непрерывное стационарное излучение: непр.-коющиеся раньше и закончивающие позже наблюдение - $T_p \gg T$

Водушим время наблюдения $\tau_n > T_p$. Пусть E_n - напряж.-ть $E(t)$ в шт.-ии $[0, \tau_n]$. Тогда:

$$I = \lim_{\tau_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_n} \int_0^{\tau_n} E_n^2(t) dt = \lim_{\tau_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_n} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_n(t)|^2 dt = \lim_{\tau_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |E_n(i\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega \quad \rightarrow \quad S(\omega) = \lim_{\tau_n \rightarrow \infty} \frac{|E_n(i\omega)|^2}{\pi \tau_n}$$

- Совок.-ть амплитудно разброяс. во времени огибаек. свет. импульсов:



$$E(t) = \sum_j e(t-t_j)$$

$$E_n(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_n(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\tau_n} E(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\tau_n} \sum_j e(t-t_j) \cdot e^{-i\omega t} dt = \sum_{j=1}^{N_n} \int_0^{\tau_n} e(t-t_j) e^{-i\omega t} dt = e(i\omega) \cdot \sum_{j=1}^{N_n} e^{-i\omega t_j}$$

$$S(\omega) = \lim_{\tau_n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{|E_n(i\omega)|^2}{\tau_n T} = \lim_{\tau_n \rightarrow \infty} \frac{|e(i\omega)|^2 \sum_{j=1}^{N_n} e^{-i\omega(t_j-t_n)}}{\tau_n T} = nT \frac{|e(i\omega)|^2}{\pi T} \quad \rightarrow \quad S(\omega) = nT S(\omega)$$

n-еп. частота
средн.-е имп.-соб

БИЛЕТ 8

Интерференция света. Общая схема и ур-ние двухволн. интерференции. Колебательность. Интерф-ция монохром. волн в схеме Юнга.

Ур-ные интерф-ции, порядок интерф-ций, ф-чные видности, мин. и уш. ширинки интерференц. полос.

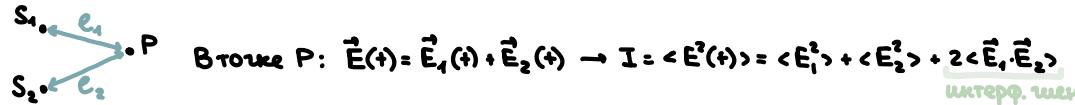
Интерференция - простр. пересечр.-е простр. мног.-ти электич. волн в свет. волнах при их наложении

Колебательность - способность свет. волн интерферировать

Методы получения коэффиц. пучков:

- делиение волн. фронта - от разн. оби.-тей одного фронта
- делиение амплитуды - от одной и той же оби.-ти волн. поб.-ти

Общая схема и ур-ние двухволн. интерференции:



Интерференция наблюд.-ся только в тех случаях, когда интерф. ширина не равна нулю.

Он может образув.-ся в наль. саш:

- 1) направл. члены двух волн перп. друг } неколебл. волни
- 2) частот колебаний ω_1 и ω_2 не равны

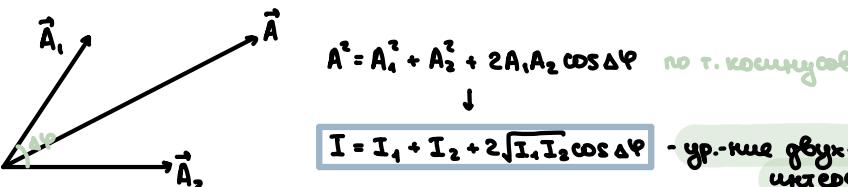
Пусть обе волни имеют одинак. частоту и одинаково иницируют начер.-ти. Тогда можно записать:

$$\begin{cases} E_1 = A_1 e^{i(\omega t - k\ell_1 + \varphi_{01})} = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} \\ E_2 = A_2 e^{i(\omega t - k\ell_2 + \varphi_{02})} = A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} \end{cases}, \text{ где } A_1 \text{ и } A_2 \text{ - комплексные амплитуды}$$

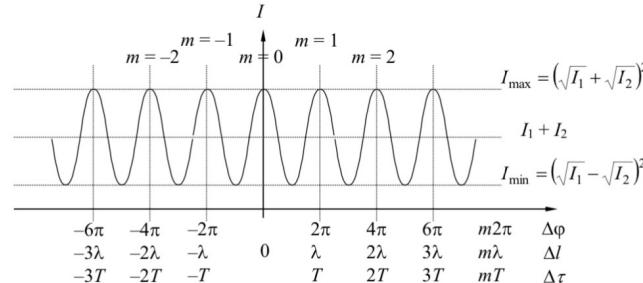
Пусть $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = k(\ell_1 - \ell_2) + (\varphi_{01} - \varphi_{02}) = k\Delta\ell + \Delta\varphi_0 = \omega\Delta\tau + \Delta\varphi_0$ - разность фаз

раз. фазы

бреш. задержки



$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi \quad \text{- ур-ние двухволн. интерференции}$$



Интерв. в точке наблюдения зависит только от раз. фаз $\Delta\varphi$ двух волн

Час.-е максимума: Час.-е минимума:

$$\Delta\varphi_{\max} = 2\pi m$$

$$\Delta\ell_{\max} = m\lambda$$

$$\Delta\tau_{\max} = mT$$

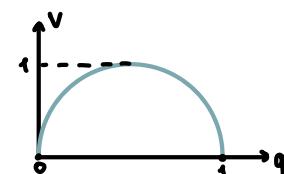
$$\Delta\varphi_{\min} = 2\pi(m + \frac{1}{2})$$

$$\Delta\ell_{\min} = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

$$\Delta\tau_{\min} = (m + \frac{1}{2})T$$

$m = \pm 1, \pm 2, \dots$ - порядок интерф-ций

Функция видности:



$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

$$V(q) = 2\sqrt{q(1-q)}, \text{ где } q = \frac{I_1, 2}{I_1 + I_2} \quad \text{- относит. интенс.-ть}$$

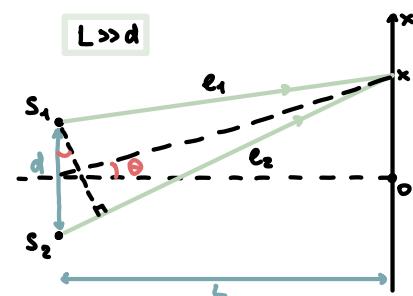
Схема Юнга:

$$\begin{aligned} \ell_1^2 &= L^2 + (x + \frac{d}{2})^2 \\ \ell_2^2 &= L^2 + (x - \frac{d}{2})^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \ell_1^2 - \ell_2^2 &= 2xd \\ \ell_1 - \ell_2 &= \frac{2xd}{\ell_1 + \ell_2} \end{aligned} \right\} \Delta\ell = \frac{xd}{L}$$

Тогда: $\Delta x = x_{2\min} - x_{1\min} = \frac{L}{d} (\Delta\ell_{2\min} - \Delta\ell_{1\min})$

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d} \quad \text{- мин. ширина интерф. полос}$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{d} \quad \text{- уш. ширина интерф. полос}$$



БИЛЕТ 9

Интерференция квазимонохром. света. Условие интерф.-ции. Спектр. описание, ур.-е интерф.-ции в частот. представлении. Физич. видности, врем. и длина когерентности, макс. порядок интерф.-ции. Временная когерентность. \rightarrow доп.

Квазимонохром. свет - свет, у кот. ширина спектра $\Delta\omega$ много меньше частоты ω

Пусть интерферируют две волны с одинаковыми по форме частот. спектрами $|E_n(i\omega)|^2$, но различными интенс.-ми: $I_{1,2} = \alpha_{1,2} I_0 = \alpha_{1,2} \int_0^\infty S(\omega) d\omega$

Пусть $S(\omega)$ однодimensionalна и хар.-са шириной $\Delta\omega$ и наивыс. частотой ω

Вспомним, что ур.-е двух волн. интерференции для волн в очень узком диапазоне частот $[\omega, \omega + d\omega]$:

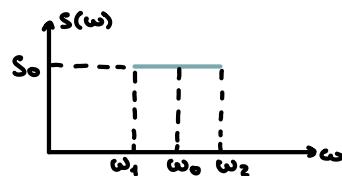
$$dI = dI_1 + dI_2 + 2\sqrt{dI_1 dI_2} \cos(\Delta\varphi) = dI_1 + dI_2 + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} dI_0 \cos(\Delta\varphi) = dI_1 + dI_2 + 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_0} S(\omega) \cos(\omega \delta t) d\omega$$

\downarrow

$$I(\delta t) = I_1 + I_2 + 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_0} \int_0^\infty S(\omega) \cos(\omega \delta t) d\omega$$

Ур.-е двух волн. интерференции для квазимонохром. волн при спектр. опис.-ии

Пусть $S(\omega)$ имеет прямолин. форму:

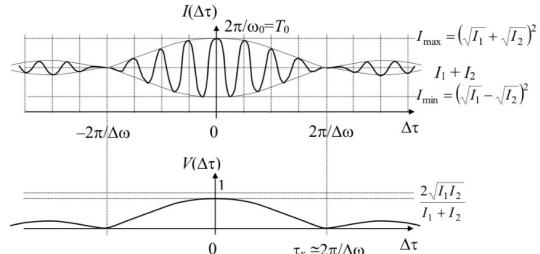


$$I_0 = \int_0^\infty S(\omega) d\omega = S_0 \Delta\omega, \text{ где } \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 \cos(\omega \delta t) d\omega = S_0 \cdot \frac{\sin(\omega_2 \delta t) - \sin(\omega_1 \delta t)}{\delta t} = I_0 \frac{2 \omega S(\omega_0 \delta t) \sin(\frac{\Delta\omega \delta t}{2})}{\Delta\omega \delta t}$$

$$I(\delta t) = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \sin\left(\frac{\Delta\omega \delta t}{2}\right) \cos(\omega_0 \delta t) - \text{ур.-е интерф.-ции}$$

$$V(\delta t) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| \sin\left(\frac{\Delta\omega \delta t}{2}\right) \right| - \text{Ф.-дущ. видности}$$



В отличии от интерф.-ции монохром. волн, в случае квазимонохром. волн ф.-дущ. видности зависят от времени задержки δt , т.е. от раз.-ни фаз $\Delta\varphi$, раз.-ни хода $\Delta\ell$, порядка инт.-ции m , т.к. наблюдение.

Время когерентности τ_K - макс. врем. задержки, при кот. вся еще наблюд.-са интерф. картина $T_K \approx 2\pi/\Delta\omega \approx \tau$

Длина когерентности ℓ_K - макс. заложение раз.-ни хода, при кот. наблюд.-са интерф. картина $\ell_K = V T_K = \frac{2\pi r}{\Delta\omega} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$

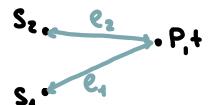
Макс. порядок интерференции: $m_{\max} \approx \frac{\tau_K}{T_0} = \frac{\ell_K}{\lambda_0} \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$

Временная когерентность харект.-ет сохр.-е волни. когерент.-ни при временному отставании одного из двух зоней, наивыс. методом деления амплитуды. Мера временной когерент. - время когерентности

сущай $S_1 = S_2$ (Билет 10)

БИЛЕТ 10

Интерф.-ции квадришонокр. света. Числовые интерф.-ции. Временное описание. Ф.-ции коррелиации и её свойства. Теорема Винера-Хингана. Понятие о фурье-спектроскопии.



Найдём интенс.ть результирующей волны в т. Р в момент времени t .
Коэффиц.-ты эл. поля источников S_1 и S_2 в точках их располож.-ия: $E_1(t_1) = E_0(t - \frac{c_1}{v})$, $E_2(t_2) = E_0(t - \frac{c_2}{v})$

Тогда $I = I_1 + I_2 + 2 \langle E_1(t_1) \cdot E_2(t_2) \rangle$, где $B_{12}(t_1, t_2)$ - Ф.-ция простр.-врем. коррелиации коэффиц.-й в точках S_1 и S_2 в моменты времени t_1 и t_2

Для стаци. свет. поля: $B_{12}(t_1, t_2) = \langle E_1(t_1) \cdot E_2(t_1 + \Delta t) \rangle = \langle E_1(t) \cdot E_2(t + \Delta t) \rangle \rightarrow B_{12}(t_1, t_2) = B_{12}(\Delta t)$

Если волны порождены одной точкой ($S_1 = S_2$), то $I_{1,2} = \alpha_{1,2} I_0 \rightarrow E_{1,2}(t_{1,2}) = \sqrt{\alpha_{1,2}} E_0(t_{1,2})$

Тогда $B_{12}(\Delta t) = \langle \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} E_0(t) E_0(t + \Delta t) \rangle = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_0} \langle E_0(t) \cdot E_0(t + \Delta t) \rangle$, где $B(\Delta t)$ - Ф.-ция врем. коррелиации (автокоррелиации)

В итоге получаем: $I(\Delta t) = I_1 + I_2 + 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_0} B(\Delta t)$ - упр.-ние двух волн. интерф.-ции
какр. стаци. квадришонокр. волн при времен. описании

Свойства Ф.-ции врем. коррелиации:

- $B(\Delta t = 0) = I_0$ • $B(\Delta t \gg T_p) = 0$ • $B(-\Delta t) = B(\Delta t)$ дин. стаци. изучение
- $B(\Delta t)$ - быстро осцил. Ф.-ция с характ. временем T_p и медленно меняющаяся с характ. временем τ

Ф.-ция врем. коррелиации совок.-ми аналогично разбрас. во временах одинак. свет. импульсов:

$$B(\Delta t) = \langle E_0(t) E_0(t + \Delta t) \rangle = \left\langle \sum_{j,k} e_0(t - t_j) \cdot e_0(t - t_k + \Delta t) \right\rangle \xrightarrow{\text{стаци.}} \left\langle \sum_{j,k} e_0(t) \cdot e_0(t + \Delta t + t_j - t_k) \right\rangle = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \sum_{j,k} e_0(t) \cdot e_0(t + \Delta t + t_j - t_k) dt = \\ = \frac{1}{T_p} \sum_{j,k=1}^{N_p} \int_0^{T_p} e_0(t) \cdot e_0(t + \Delta t + t_j - t_k) dt = \frac{1}{T_p} \sum_{j,k=1}^{N_p} \int_0^{T_p} e_0(t) \cdot e_0(t + \Delta t) dt + \frac{1}{T_p} \cdot \sum_{j,k=1}^{N_p} \int_0^{T_p} e_0(t) \cdot e_0(t + \Delta t + t_j - t_k) dt \xrightarrow{\Delta t \gg T_p} \\ \approx \frac{N_p}{T_p} \int_0^T e_0(t) \cdot e_0(t + \Delta t) dt = N_p \cdot \frac{1}{T} \int_0^T e_0(t) \cdot e_0(t + \Delta t) dt \rightarrow B(\Delta t) = N_p b(\Delta t)$$

Теорема Винера-Хингана: спектральные интегралы явн.-сие фурье-образами автокорр. Ф.-ции, а автокорр. Ф.-ции явн.-сие фурье-образами спектр. интегр. пол.

ан. Билет 3 →

$$B(\Delta t) = \int_0^\infty S(\omega) \cos(\omega \Delta t) d\omega \leftrightarrow S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\Delta t) \cos(\omega \Delta t) d(\Delta t)$$

$$B(\Delta t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega \Delta t} d\omega \leftrightarrow S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\Delta t) e^{-i\omega \Delta t} d(\Delta t)$$

Фурье-спектроскопия:

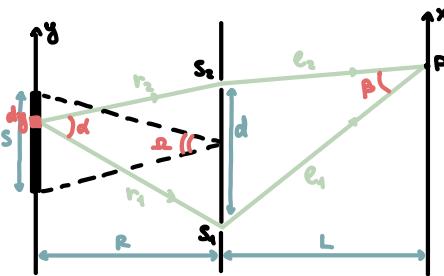
1) с помощью интерферометра проходит разложение некорр. возмущения I_0 на две волны I_1 и I_2 , вносится разность хода Δt или задержка Δt . Затем из полученного из-за интегр. $I(\Delta t)$ интерф. картинки находятся ф.-ции автокорр. Ф.-ции $B(\Delta t)$ - интерферограмма

2) с помощью упр.-й Винера-Хингана из $B(\Delta t)$ находятся спектр. интегр. $S(\omega)$

Т.о., с пом.-ю фурье-спектрометрии можно определить спектр. интегр. нек. свет. возмущ.-я

Пространственные количества. Ур-ние интерференции в схеме Юнга. Ф-ция видности, угол и радиус когерентности. Звёздный интерферометр Найкельсона.

don.

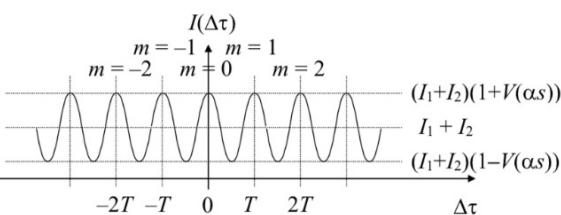


Расс. схему Юнга с протяжён. источниками света радиусами s .

Пусть источники - юзок. неявные. Монокроматич. источн. изотр. изв с одинак. частотой

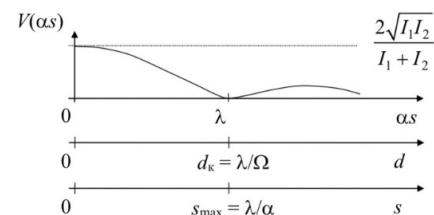
$$\text{Интенс. штраф. картина от эн.-та } dy: dI = dI_1 + dI_2 + 2\sqrt{dI_1 dI_2} \cos [\kappa(dy + \beta x)]$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда: } I &= \int_{-s/2}^{s/2} dI = \left| dI_{1,2} = \frac{I_{1,2}}{s} dy \right| = I_1 + I_2 + 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{s} \int_{-s/2}^{s/2} \cos [\kappa(dy + \beta x)] dy = \\ &= I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \frac{\sin [\kappa(s/2 + \beta x)] - \sin [\kappa(-s/2 + \beta x)]}{\kappa ds} = \\ &= I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \frac{\cos(\omega \alpha s) \sin(\frac{\kappa ds}{2})}{\kappa ds/2} \end{aligned}$$



$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\kappa ds}{2}\right) \cos(\omega \alpha s)$$

$$V(\alpha s) = \frac{2 \sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\kappa ds}{2}\right) \right|$$



Интерф. картина будет наблюдаваться, если $\frac{\kappa ds}{2} \leq \pi \rightarrow \frac{ds}{\lambda} \leq 1$

$$\left. \frac{ds}{\lambda} \leq 1 \right\} \frac{ds}{R\lambda} \leq 1 \rightarrow d \leq \frac{R\lambda}{s} \equiv d_k$$

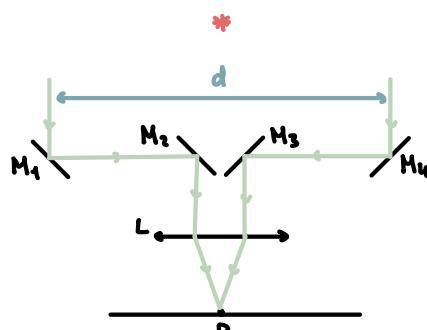
-радиус когерентности

$$\frac{\lambda}{d} \equiv \Omega_k$$

-угол когерентности

Из теч. же неравенств можно получить $\frac{\lambda}{d} \equiv s_{\max}$ и $\frac{\lambda}{s} \equiv d_{\max}$

Звёздный интерферометр Найкельсона:



При звездах с уш. радиусом R в центре интерф. картины ($m=0, \Delta \tau=0, \Delta \ell=0$) при макс. временн. когерентности ф-ция видности опред.-ся только простр. когерент.-ю:

$$V(ds) = V(d\Omega) = \frac{2 \sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\kappa d \Omega}{2}\right) \right|$$

Пусть при $d=d_k$ $V(d_k)=0$. Тогда: $\frac{\kappa d_k \Omega}{2} = \pi \rightarrow \Omega_k = \frac{2\pi}{\kappa d_k} = \frac{\lambda}{d_k}$

Т.о., движение звёздами, можно узнать радиус звезды

Основные схемы двухволн. интерференции. Метод деления волн. фронта и метод деления амплитуды. Характ. особенности методов. Примеры реализации методов. Интерференция в тонких пленках.

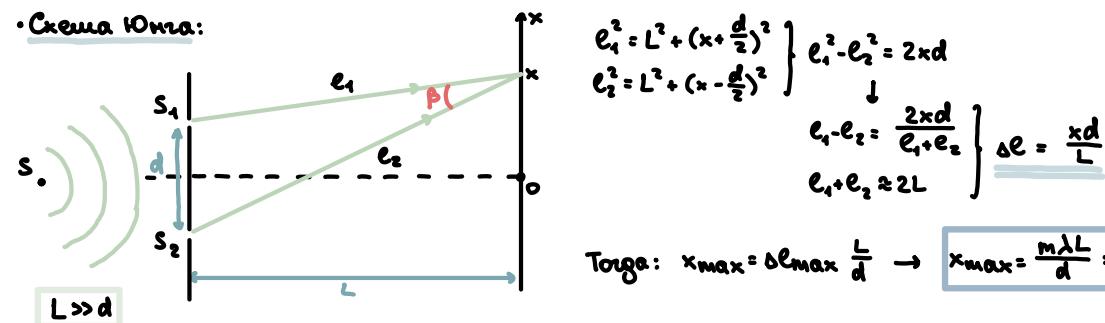
Методы реализации двухволн. интерференции:

- метод деления волн. фронта:** видимые фрагменты волн. фронта, которые затем рассмотрены как вторич. источники колебл. волн
- метод деления амплитуды:** две интерф. волны создаются при отражении под. волн от двух под. граней, в результате чего получаются две волны с одинак. меньшими ампл. дли неодн. волн

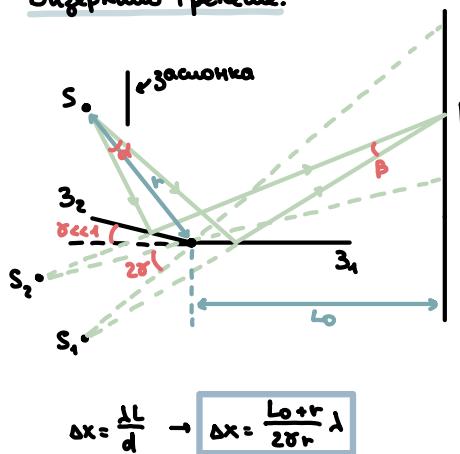
Характеристика	Метод деления	
	волнового фронта	амплитуды
Углы интерференции α и сходимости β	$\alpha \neq 0, \beta \neq 0 (d \neq 0)$	$\alpha \approx 0, \beta \approx 0 (d \approx 0)$
Локализация интерференционной картины	Не локализована	Локализована
Образование интерф. картины	Пучками от одной точки источника	Пучками от всех точек источника
Интенсивность интерференционной картины	Мала	Велика
Увеличение размера источника (s, Ω)	$\Omega < \Omega_k = \frac{\lambda}{d}, s < s_{max} = \frac{\lambda}{\alpha}$	Не ухудшает видимость
Увеличение ширины спектра $\Delta\omega$ или Δt ($\Delta l, m$)	$\Delta t < \tau_k \approx \frac{2\pi}{\Delta\Omega}, \Delta l < l_k = \tau_k v$	Ухудшает видимость, $\Delta t < \tau_k \approx \frac{2\pi}{\Delta\Omega}, \Delta l < l_k = \tau_k v$

Метод деления волн. фронта:

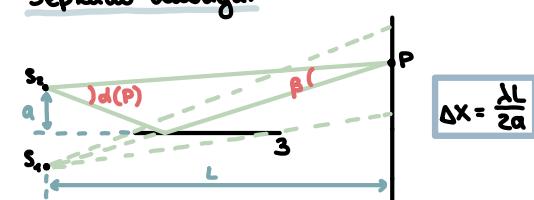
- Схема Юнга:



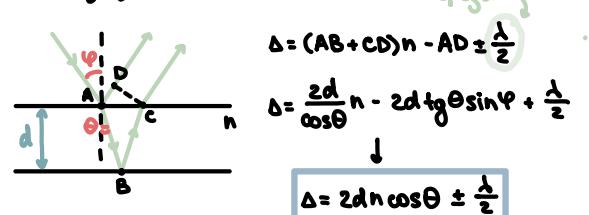
- Бидеркало Френеля:



- Зеркало Лисайда:



Метод деления амплитуды:



Для немонотроп. света длина колебл. т.к. длина быть больше раз.-ни хода, т.е. примерно большее d например длина света $\Delta l \sim \lambda \sim 10^2$ нм $\rightarrow d \sim 1$ мкм

Для изуч. освещ. т. и яркости интерф. картины необходима большая апертура сходимости β в интерф. щелей и малая апертура интерференции α (выше степень простр. колебл. т.). Однако α и β опред.-ся параметрами схем, поэтому для этих схем освещ. т. ит. картин достаточно ширины

Для зеркала Лисайда α уменьш.-ся при приближении к центру экрана, поэтому можно получать яркую ит. картину.

Полосы равного наклона:

Если $d = \text{const}$, то Δ зависит от угла падение - наклона. Т.о., на экране наблюд.-ся полосы, длия кот. $\cos \theta = \text{const}$ - полосы равного наклона.

Картина поканализована на деск.-ни - можно поставить шину

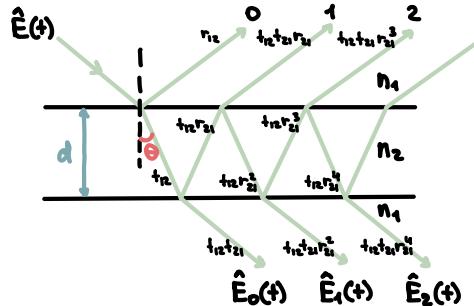
Полосы равной толщины:

Если $d \neq \text{const}$, но при фиксир. угле падение наблюд.-ся полосы равной толщины, длия кот. $d = \text{const}$. Они поканализованы на под.-ни пластины.

БИЛЕТ 13

Многоволновое интерференция. Ур.-е многоволн. интерференции - ф.-ча Эйри. Ф.-учие видности и ширина интерф. полос.

Интерферометр Фабри-Перо. Пластинка Люммера-Герке.



$$\text{Надел фазы после прохождения пластинки: } \Phi = k_0 \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_2 \cdot \frac{d}{\cos \theta} = \frac{2\pi d}{\lambda \cos \theta} \quad \text{т.к. } \lambda = \frac{\lambda_0}{n_2}$$

$$\text{Тогда } \hat{E}_0 = \hat{E} \cdot t_{12} \cdot t_{21} e^{-i\Phi} = \hat{E} e^{-i\Phi} T, \text{ где } T = |t_{12} t_{21}| - \text{коэф. пропуск.-я по энергии}$$

$$\text{Разность хода м/у соседними пучками: } \Phi = k_0 \cdot 2n_2 d \cos \theta = \frac{4\pi d}{\lambda} \cos \theta \quad \text{см. Билет 12 (изд)}$$

$$\text{Тогда: } \hat{E}_i = \hat{E}_0 r_{21}^2 e^{-i\Phi} = \hat{E}_0 R e^{-i\Phi} \rightarrow \hat{E}_{ik} = \hat{E}_0 R^k e^{-i\Phi_k}, \text{ где } R = |r_{21}|^2 = |r_{12}|^2 - \text{коэф. отр.-я по эн.-ии}$$

$$\text{Для всей промед. волны: } \hat{E}_{np} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{E}_0 R^k e^{-i\Phi_k} = \hat{E}_0 \cdot \frac{1}{1-R e^{-i\Phi}} = \frac{\hat{E} T e^{-i\Phi}}{1-R e^{-i\Phi}}$$

$$\text{Тогда интенс.-ть: } I_{np} = \frac{1}{2} \langle \hat{E}_{np} \cdot \hat{E}_{np}^* \rangle = I \frac{T^2}{(1-R e^{-i\Phi})(1-R e^{i\Phi})} = I \frac{T^2}{1+R^2 - 2R \cos \Phi} \rightarrow$$

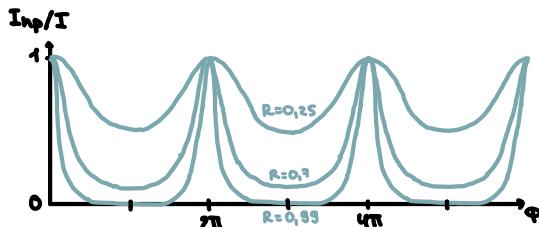
$$I_{np}(\Phi) = I \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\Phi/2)}$$

$$I_{otp}(\Phi) = I \frac{4R \sin^2(\Phi/2)}{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\Phi/2)}$$

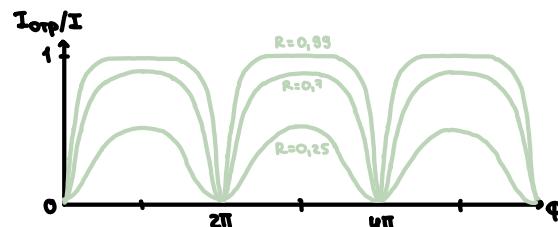
$$T+R=1$$

- формулами
Эйри

$$\text{Порядок интерф.-ции: } m = \frac{\Phi}{2\pi} = \frac{2d \cos \theta}{\lambda}$$



$$I_{min} = I \left(\frac{1-R}{1+R} \right)^2$$



$$I_{max} = I \frac{4R}{(1+R)^2}$$

Ширина инт. полос:

Будем считать за ширину инт. полосы ширину на половине высоты. Тогда:

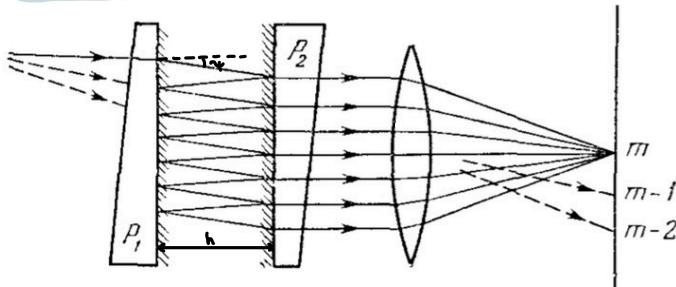
$$I(2\pi m \pm \delta/2) = \frac{I}{2} \rightarrow \delta_{np}(R) = 2 \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

$$\delta_{otp}(R) = 2\pi - \delta_{np}(R)$$

$$\text{При } R \rightarrow 1: \delta_{np} \rightarrow 0, \delta_{otp} \rightarrow 2\pi$$

Позже в спектрометрах используются промежуточные волны

Интерферометр Фабри-Перо:



$$\text{Усл.-е максимума: } 2h \cos \psi = m\lambda$$

$$\text{Порядок интерф.-ции: } m \approx \frac{2h}{\lambda}$$

Резкость интерференц. полос:

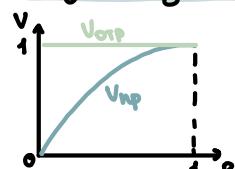
Отношение расст.-я м/у полосами к их ширине:

$$F(R) = \frac{2\pi}{\delta} \rightarrow F_{np}(R) = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$$

$$F_{otp}(R) = \frac{2\pi}{2\pi - \delta_{np}}$$

$$\text{При } R \rightarrow 1: F_{np} \rightarrow \infty, F_{otp} \rightarrow 1$$

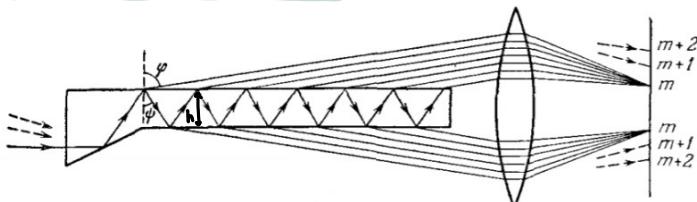
Ф.-учие видности:



$$V_{np}(R) = \frac{2R}{1+R^2}$$

$$V_{otp}(R) = 1$$

Пластинка Люммера-Герке:



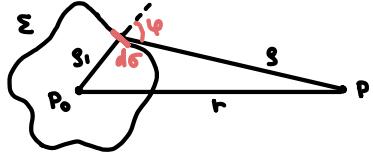
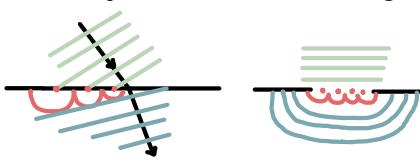
$$\text{Усл.-е максимума: } 2h \cos \psi = m\lambda$$

БИЛЕТ 14

Дифракция света. Принцип Гюйгенса-Френеля и дифр. интеграл Френеля. Теорема обратимости Гельмгольца. Принцип дополнительности Бабине.

Дифракция - явление отклон.-е от законов геом. оптики при распр.-ии света в среде, обусловл. волн. природой света.

Принцип Гюйгенса-Френеля: когд. эн.-т волн. фронта можно рассм.-ть как центр вторич. возмущения, порождающего вторич. сферич. волны, а результ. свет. волна в когд. т. нр.-ва будет опред.-ся интерф.-й этих волн



Рассм. тогд. монохром. источник в т. P_0 . Его можно заменить на светящ. поб.-ть, полностью охват.-шую этот источник. Тоне в т. P - конк. содр.-шае всей совок.-ты эн.-тов поб.-ти в соотв.-ии с принципом Гюйгенса-Френеля.

Напр.-ть эн.-точка в т. P : $\hat{E}(P) = \frac{a}{r} e^{i\varphi_0} e^{-ikr} e^{i\omega t} = A(P) e^{i\omega t}$, где $A(P) = a e^{-i\varphi_0} \frac{e^{-ikr}}{r} = A_0 \frac{e^{-ikr}}{r}$ - конк. амплитуда

Конк. амплитуда на эн.-те поб.-ти $d\sigma$: $A_\Sigma = A_0 \frac{e^{-ikg_1}}{g_1}$

Тогда в соотв.-ии с принципом Гюйгенса-Френеля:

$$A(P) = \iint_{\Sigma} A_\Sigma \frac{e^{-ikg}}{g} K(\varphi) d\sigma \rightarrow A(P) = \iint_{\Sigma} A_0 \frac{e^{-ikg_1}}{g_1} \frac{e^{-ikg}}{g} K(\varphi) d\sigma$$

дифр. интеграл Френеля

Френель предположил, что эн.-т $d\sigma$ наиболее сильно излучает в перп.-ном к направл.-нику и конк. амплитуда уменьшается при увелич.-ии угла дифракции. Отсюда наеви.-ся коэф. $K(\varphi)$

Свойство дифр. интеграла Френеля:

1) если P_0 и P поменять местами, то $g \leftrightarrow g_1$, а угол дифракции не изм.-ся - интеграл Френеля не изменился. Отсюда можно сформулир.-ть теорему обратимости Гельмгольца: $A_{P_0}(P) = A_P(P_0)$

2) рассмотрим два дополнит. друг к другу экрана:

Σ_1, Σ_2 - поб.-ни открыт. частей экранов

Если эти два экрана стоят по отдельности на пути распр.-е пучка, то $\int_{\Sigma} = \int_{\Sigma_1} + \int_{\Sigma_2}$ Σ -поверхность без экранов

Тогда $A_1(P) + A_2(P) = A(P)$, где $A_1(P)$ и $A_2(P)$ - амплитуды в т. P , если стоят только соотв. экраны, а $A(P)$ - амплитуда, принцип дополнит.-ти
Бабине когда нет экранов

Т.о., если мы знаем конк. амплитуду в тоже мебил.-е одного из экранов, можем сразу узнать конк. амплитуду в этой же точке для другого экрана.

Следствия:

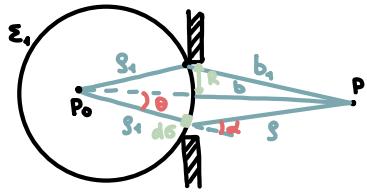
- если $A_1(P) = 0$, то $A_2(P) = A(P)$, т.е. в тойже, где амплитуда от одного экрана равна нулю, в присутствии только другого экрана будет такой же, как и в случае отсутствия экранов.

- если $A(P) = 0$, то $A_1(P) = -A_2(P)$, т.е. в тойже, где $A(P)$ равно нулю, фазы $A_1(P)$ и $A_2(P)$ различ.-ся на π , а интенс.-ти складываются $I_1 = |A_1|^2 = |-A_2|^2 = I_2$

БИЛЕТ 15

Дифракция света на круглом отверстии. Метод зон Френеля. Радиус и площадь зон Френеля. Число Френеля. Амплитуды и фазовые зонные пластинки, анти干涉ционные зонные пластинки. Условие перехода от волновой к геом. оптике.

Дифракция на круглом отверстии:



В ког.-вс свет лежит на поб.-ми рассмотрим фаз. поб.-ть $\rightarrow A_{g_1} = A_0 \frac{e^{-ikg_1}}{g_1} = \text{const}$

$$\text{Тогда } A(P) = A_0 \frac{e^{-ikg_1}}{g_1} \iint \frac{e^{-ikg}}{s} K(s) d\theta ds, \text{ где } d\theta = g_1^2 d\theta d\varphi \sin\theta$$

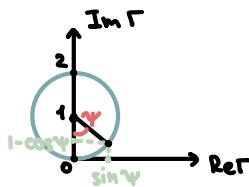
$$\text{Из } \Delta P P_0 d\theta: g^2 = g_1^2 + (g_1 + b)^2 - 2g_1(g_1 + b)\cos\theta \rightarrow 2gdg = -2g_1(g_1 + b)(-\sin\theta)d\theta \rightarrow \sin\theta d\theta = \frac{gd\theta}{(g_1 + b)g_1}$$

$$\text{Тогда } A(P) = \frac{A_0 K}{g_1} e^{-ikg_1} \iint \frac{e^{-ikg}}{s} g_1^2 d\theta d\varphi \sin\theta = \frac{A_0 K}{g_1} e^{-ikg_1} \iint \frac{e^{-ikg}}{s} \frac{gdg}{g_1(g_1 + b)} d\varphi = \frac{A_0 K}{g_1 + b} e^{-ikg_1} \iint e^{-ikg} dg d\varphi =$$

$$= \frac{A_0 K}{g_1 + b} e^{-ikg_1} \cdot 2\pi \int_b^{b_1} e^{-ikg} dg = \frac{A_0 K}{g_1 + b} \frac{2\pi}{ik} e^{-ikg_1} (e^{-ik(b_1 - b)} - e^{-ikb}) = \frac{A_0 K}{g_1 + b} \frac{2\pi}{ik} e^{-ik(g_1 + b)} (e^{-ik(b_1 - b)} - 1)$$

$$\text{Получаем } A(P) = B_i (1 - e^{-ik(b_1 - b)}) = B_i (1 - e^{-i\gamma}), \text{ где } B = \frac{A_0 K}{g_1 + b} \cdot \frac{2\pi}{ik} e^{-ik(g_1 + b)}, \quad \gamma = ik(b_1 - b)$$

$$\text{Пусть } \Gamma(\gamma) = i(1 - e^{-i\gamma}) = \sin\gamma + i(1 - \cos\gamma)$$

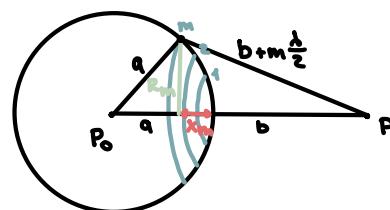


Заметим, что $\Gamma(\gamma)$ осциллирует: а тогда и $A(P) \sim \Gamma(\gamma)$ осциллирует

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_{\max} = 2 \text{ при } \gamma = \pi + 2k\pi \\ \Gamma_{\min} = 0 \text{ при } \gamma = 2k\pi \\ \gamma = k(b_1 - b) = \frac{2\pi}{\lambda} (b_1 - b) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \Gamma_{\max} = 2 \text{ при } b_1 = b + \frac{\lambda}{2}, b + \frac{3\lambda}{2}, \dots \\ \Gamma_{\min} = 0 \text{ при } b_1 = b + \lambda, b + 2\lambda, \dots \end{array} \right\} \rightarrow \text{тогда удобно ввести т.н. зоны Френеля}$$

Метод зон Френеля:

Зона Френеля - свобод. область свет. поб.-ми, разность расст.-й от границ которой до т. наблюд.-я есть величина постоянная и равна $\lambda/2$: $\Delta g_m = \lambda/2$. зона Френеля представляет собой сфер. конус



$$R_m^2 = a^2 - (a - x_m)^2 = (b + m\frac{\lambda}{2})^2 - (b + x_m)^2$$

$$2ax_m = mb\lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4} - 2bx_m \quad mb\lambda \gg m^2 \frac{\lambda^2}{4} \rightarrow \text{можно пренебречь последним}$$

$$x_m = \frac{mb\lambda}{2(a+b)} \rightarrow R_m^2 = 2ax_m - x_m^2 \rightarrow R_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}} \quad \text{- радиус } m\text{-й зоны Френеля}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = \pi R_1 = \frac{\pi ab}{a+b} \lambda \\ S_m = \pi (R_m^2 - R_{m-1}^2) \end{array} \right\} S_m = S_1 = \frac{\pi ab}{a+b} \lambda \quad \text{- площадь зон Френеля}$$

Площади всех зон Френеля одинаковы. Это значит, что их склады в конк. амплитуду не изменяют. После в т. наблюдения одинаковы по фазе и отличаются только по фазе на π

$$\text{Число Френеля} - \text{число открытых зон Френеля}: N = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \text{ где } r_0 - \text{радиус отверстия}$$

Такими образом, $|A(P)| = |A_1| - |A_2| + |A_3| - |A_4| \dots$

т.е. или не учили $K(\varphi)$

Однако, на самом деле, при увеличении m $|A_m|$ монотонно убывает: $|A_{m+1}| < |A_m| \rightarrow |A_N| = \frac{|A_{N-1}| + |A_{N+1}|}{2}$

$$\text{Тогда } |A(P)| = |A_1| - \frac{|A_1| + |A_3|}{2} + |A_3| - \frac{|A_3| + |A_5|}{2} + \dots = \frac{|A_1|}{2} + \begin{cases} + \frac{|A_N|}{2}, & \text{если } N \text{- неётное} \\ - \frac{|A_N|}{2}, & \text{если } N \text{- чётное} \end{cases}$$

$$\text{Если } N \gg 1, \text{ то } |A_N| \text{ и } |A_{N+1}| \text{ можно пренебречь} \rightarrow A(P) \approx \frac{|A_1|}{2} \rightarrow I(P) = \frac{I_1}{4}$$

Если $N \gg 1$, то при изм.-ии в интенс.-ти в т. наби.-я почти не мен.-ся $\rightarrow N \gg 1$ - условие на близодействие зон. оптики. Т.о., для перехода к геом. оптике можно увеличивать радиус отверстия и уменьшать длину волны или расст.-я а и б.

Зонные пластинки:

Если поставить прозрачный экран, на кот. кашу гётную зону Френеля сделать непрозрачной, то вклады от них пер-

станут огибать коне в т. наименьшем и изменить его возрастёт. Такой прибор - амплитудная зонная пластинка.

Если же вместо того, чтобы закрывать яркие зоны, поставить на них зоны пластинки такой толщины, что амплитуды от этих зон будут наименьшие в т. наименьшем, то изменится возрастёт ещё сильнее. Такой прибор наз. - ся фазовыми зонными пластинками.

$$A_{\text{амп}} = A_{\text{негат.}} = \sum_{k=0}^N |A_{2k+1}| = \frac{N}{2} \cdot \frac{|A_1| + |A_N|}{2} \xrightarrow{N \gg 1} A_{\text{амп}} = \frac{N}{2} \cdot \frac{|A_1|}{2} = \frac{N}{2} |A_1| \rightarrow I_{\text{амп}} = \frac{N^2}{4} I_0$$

$$A_{\text{фаз}} = A_{\text{негат.}} + A_{\text{зёт}} = \frac{N}{2} |A_0| + \frac{N}{2} |A_1| = N |A_1| \rightarrow I_{\text{фаз}} = N^2 I_0$$

Мицца как оптимальные зонные пластинки:

Радиус m -й зоны Френеля: $R_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$ $\rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{m\lambda}{R_m^2} = \frac{1}{f_0}$ \rightarrow зонные пластинки на расст.-ях a и b ведут себя как мицца с фокусом расст.-ем f_0 .

Пусть на фаз. зонную пластинку падает монохроматическая волна $\rightarrow a \rightarrow \infty, b \rightarrow f_0 \rightarrow R_m = \sqrt{m\lambda b} = \sqrt{m\lambda f_0}$

Пусть расст.-е b уменьшили в $2k+1$ раз. Тогда: $R_m = \sqrt{m(2k+1)\lambda \frac{f_0}{2k+1}} = \sqrt{m_k \lambda f_k}$

При уменьшении f_0 в $2k+1$ раз одной m -й зоне Френеля пластинки будет соответствовать $2k+1$ новым зонам. $2k$ из них друг друга скомпенсируют, так что уменьш. -е макс. -ма остаётся в новой т. наименьшем.

$$\left. \begin{array}{l} I_{f_0} = N^2 I_0 \\ I_{f_k} = \frac{N^2 I_0}{(2k+1)^2} \end{array} \right\} I_{f_k} = \frac{I_{f_0}}{(2k+1)^2} \rightarrow \text{зонные пластинки ведут себя как мицца и имеют беск. много фокус. расст.-и, но с разн. интенс.-ю восприним. -е исход. луча.}$$

Получается, мицца - это оптимальные зонные пластинки, которые благодаря уменьшению своей толщины при удалении от оптической оси разворачиваются кони. амплитуды от всех зон наложены в одну сторону.

Зонные пластинки используются, например, для радиосвязи, т.к. для радиосвязи нет мицза.

БИЛЕТ 16

Метод векторных диаграмм. Спираль Френеля. Дифракция Френеля на круг. отверстии и круг. экране. Патно Пуассона.

Метод векторных диаграмм:

Сложение комп. амплитуд - непростая процедура из-за различие в фазах.

Чтобы упростить эту задачу, можно сопоставить комп. амплитуду А вектор \vec{A} : $|\vec{A}| = |A|$

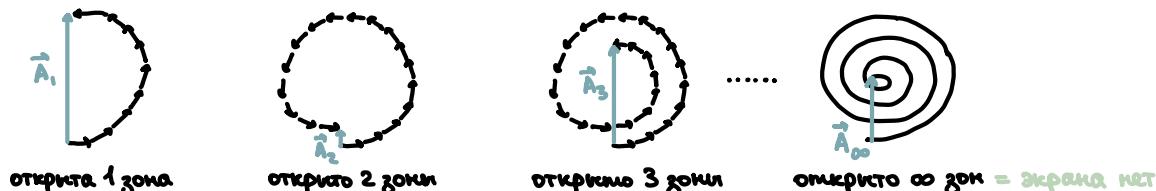
$$A = A_0 \frac{e^{-ikr}}{r} = A_0 \frac{e^{-i(kr-\varphi_0)}}{r} \rightarrow |\vec{A}| = \frac{A_0}{r}, \text{ а } \varphi = \varphi_0 - kr - \text{ угол между } \vec{A} \text{ и вектором направлением}$$

Тогда $\sum a_i A_i \rightarrow \sum a_i |\vec{A}_i|$

Спираль Френеля:

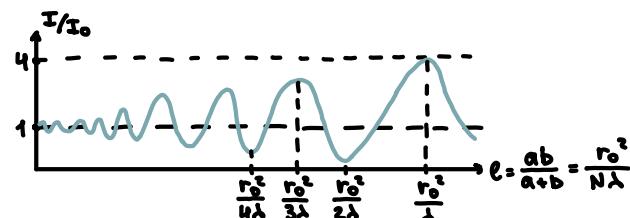
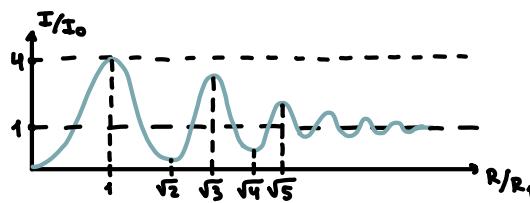
Разобьём конц. зону Френеля на m конц. полос с одинак. шир. $\Delta\theta$. Разность фаз для этих полос одинакова и равна π/m . Их вклады в амплитуду поме в т.Р по модулю почти одинаковы сочетание из-за К(р)

Тогда амплитуда результ. поме в т. наблюдения можно определить с пом. спирали Френеля:



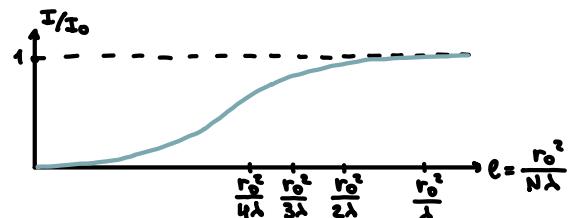
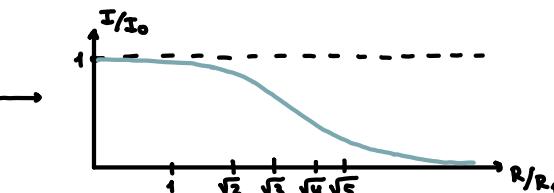
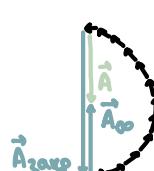
Дифракция на круглом отверстии:

Пользуясь спиралью Френеля можно решить след. задачу: дифракция на круг. отверстии:



Дифракция на круглом экране:

$$\vec{A}_{\text{закр.}} = \vec{A}_{\infty} - \vec{A}_{\text{дакр.}}$$

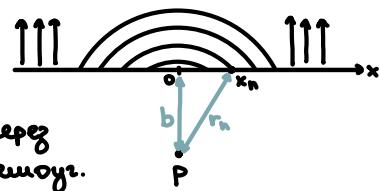


→ видно, что $|\vec{A}| \neq 0 \rightarrow$ в т. наблюдения наблюдается светлое пятно - пятно Пуассона

Дифракция света. Дифракция Френеля на краю полубеск. экрана и щели. Зоны Шустера, спираль Корни.

Зоны Шустера:

В одномер. задачах (например, дифракция на прямол. щели) разбиение фронта на конц. зоны неизвестообразно \rightarrow надо исходить др. подход.



Рассмотрим плоский волн. фронт. Проделаем цепочку каск. пов.-ти, ось кот. проходит через т.Р, перв.-ко же эти рисунки, а радиусы равны $b, b + \frac{\lambda}{2}, b + \lambda, \dots$. Тогда фронт разобъется на прямол. пояса, наз.-щие зонами Шустера.

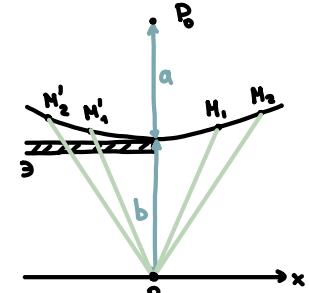
$$x_n = \sqrt{r_n^2 - b^2} = \sqrt{(b + \frac{\lambda}{2}n)^2 - b^2} = \sqrt{bn + \frac{\lambda^2}{4}n^2} \approx \sqrt{bn} \rightarrow d_n = \sqrt{b\lambda} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

- ширина зоны Шустера

для плоск. фронта

При использ.-ии зон Шустера получается спираль Корни.

Дифракция на краю полубеск. экрана:

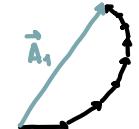


Разобъём сферич. свет. пов.-ть на сферич. двуугольники след. образом:
 $OM'_1 = OM_1 = b + \frac{\lambda}{2}$
 $OM'_2 = OM_2 = b + \lambda$

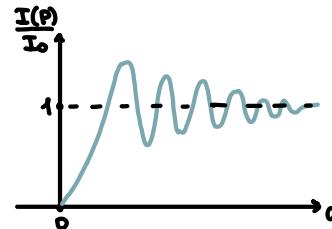
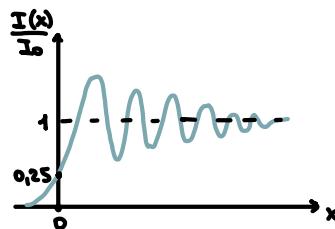
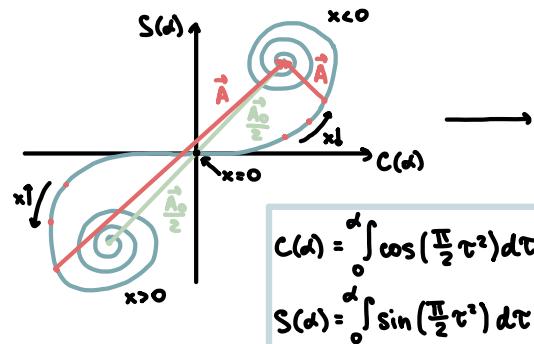
точка зоны Шустера

двуугольник

Т.е. макс. амплитуды от конц. из зон будут так же повернуты на одинак. угол друг. отн.-ко другу, но их модули будут отличаться из-за различия между зон: $d_m = \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m+1}}$



В конечном итоге получаем спираль Корни:

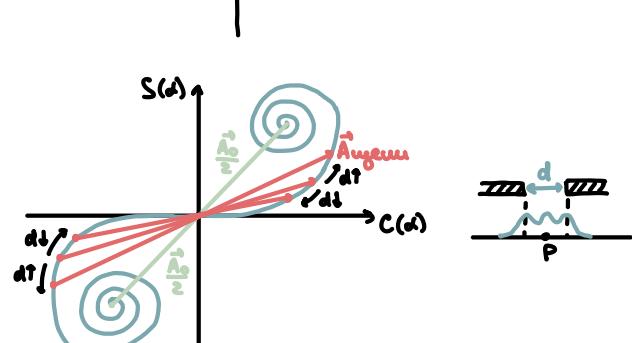


На инт. картинке наблюд.-ся пояса, паралл.-ные краю экрана.

Дифракция на щели:

Щель можно представить в виде двух полубеск. экранов.

Тогда, разбив волн. фронт на такие же зоны, можно поизводить спираль Корни для рассеяния интенс. в т. наблюдения.



Дифракция света. Недостатки пониманий принципа Гюйгенса - Френеля. Понятие о теории дифракции Кирхгофа. Ур.-ные Гельмгольца и инт. теорема Гельмгольца-Кирхгофа. Дифр. интегрант Френеля - Кирхгофа.

Недостатки пониманий принципа Гюйгенса - Френеля:

1) невозможность точно получать выражение для коэф.-та $K(\varphi)$ - известно только то, что $K(0) = \text{конт}$, $K(\varphi, \frac{\pi}{2}) = 0$

2) С одной стороны:

$$A(r) = A_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \rightarrow A(\Sigma) = A(a) = A_0 \frac{e^{-ika}}{a}, A(P) = A(a+b) = A_0 \frac{e^{-ik(a+b)}}{a+b}$$

Т.к. P_0, Σ и P лежат на одной прямой, то в этих точках конст. амплитуды имеют одинак. фазу

С другой стороны:



фазы в т. P и в т. Σ отлич. - ся на $\frac{\pi}{2}$

откуда же берётся эта разность фаз?

Ур.-ные Гельмгольца и инт. теорема Гельмгольца-Кирхгофа:

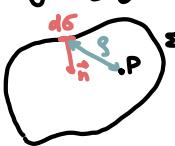
Пусть расп. - ся монохром. э/и волна: $A(\vec{r}) = A(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}$

$$\text{Волн. ур.-ные: } \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = v^2 \Delta A$$

$\Delta A + k^2 A = 0$ - ур.-ные Гельмгольца, где $k = \frac{\omega}{v}$

Если некот. ф. - чие удовл. ур.-ю Гельмгольца, то она может предст. собой конст. амп.-ду гарм. э/и волны

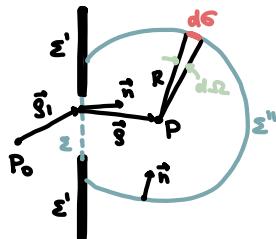
Пусть задана произв. замк. пов.-ть Σ и произв. т. P внутри Σ :



Тогда если реш.-е ур.-я Гельмгольца (т.е. конст. амплитуда $A(\vec{r})$) имеет квад. гарм. произв.-е 1-го и 2-го порядков на пов.-ти Σ и внутри неё, то имеет место интегр. теорема Гельмгольца-Кирхгофа:

$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[A_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{s} e^{-iks} \right) \Big|_{\Sigma} - \frac{1}{s} e^{-iks} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma} \right] d\sigma$$

Дифр. интегрант Френеля - Кирхгофа:



$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{s} e^{-iks} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} e^{-iks} \right) \cdot \frac{\partial s}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} e^{-iks} \right) \cos \varphi = -\frac{1}{s^2} e^{-iks} \left(\frac{1}{s} + ik \right) \cos \varphi \approx -ik \frac{e^{-iks}}{s^2} \cos \varphi \quad \text{при } s \gg \lambda$$

$$\text{На } \Sigma'': \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{s} e^{-iks} \right) \Big|_{s=R} \approx -ik \frac{e^{-ikR}}{R}$$

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \frac{\partial A}{\partial R}$$

$$d\sigma = R^2 d\Omega$$

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma''} (A \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{s} e^{-iks} \right) - (\frac{1}{s} e^{-iks}) \frac{\partial A}{\partial n}) d\sigma = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma''} (\frac{\partial A}{\partial R} + ikA) \frac{e^{-ikR}}{R^2} R^2 d\Omega \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

условие замкнутости - $\lim_{R \rightarrow \infty} R (\frac{\partial A}{\partial R} + ikA) = 0$ где $A = A_0 \frac{e^{-iks}}{s}$

На Σ' : можно считать, что $A=0$ и $\frac{\partial A}{\partial n}=0 \rightarrow \iint_{\Sigma'} \dots = 0$

$$\text{На } \Sigma: \frac{\partial A}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{A_0}{s_1} e^{-iks_1} \right) = -A_0 (ik + \frac{1}{s_1}) \frac{e^{-iks_1}}{s_1} \cos \varphi_1, \varphi_1 = \angle(\vec{n}, \vec{s}_1)$$

$$\text{Аналогично } \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{s} e^{-iks} \right) = (ik + \frac{1}{s}) \frac{e^{-iks}}{s^2} \cos \varphi \quad \varphi = \angle(\vec{n}, \vec{s})$$

$$\text{Получается } A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{e^{-iks_1}}{s_1} \cdot A_0 \frac{ik}{s_1} e^{iks_1} \cos \varphi_1 + \frac{e^{-iks}}{s} \cdot A_0 \frac{ik}{s} e^{-iks} \cos \varphi \right) d\sigma = \frac{1}{4\pi} \cdot i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \iint_{\Sigma} e^{i\epsilon(s_1 + s)} \cdot \frac{A_0}{s_1 s} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi) d\sigma$$

↓

$$A(P) = \frac{i}{2\lambda} \iint_{\Sigma} A_{\Sigma} \frac{e^{-iks}}{s} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi) d\sigma, \text{ где } A_{\Sigma} - \text{конт. амплитуда пог.-ка } P \text{ на пов.-ти } \Sigma$$

дифракц. интегрант Френеля - Кирхгофа

Если сравнивать этот интегрант с дифр. интегрантом Френеля, то $K(\varphi_1, \varphi) = \frac{i}{2\lambda} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi)$

В част. случае волн. фронта в ког.-ве выбр. нов.-ни: $K(\alpha) = \frac{1}{2\lambda} (1 + \cos \alpha)$



$K(\varphi, \varphi_i)$ изм.-ся непрерывно и меняющейся фр.-чной по сравн.-ю с диаметром оси или экспонентой, поэтому можно записать дифр. интеграл Френеля - Кирхгофа след. образом:

$$A(p) = \overline{K(\varphi, \varphi_i)} \iint_{\Sigma} A_z \frac{e^{-ikz}}{s} d\sigma \rightarrow A(p) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} A_z \frac{e^{-ikz}}{s} d\sigma$$

для параксимальных
лучков: $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_i = 0$

Дифракция света. Ближняя и дальняя зона дифракции. Приближение Френеля и Фраунгофера. Дифр. длина пучка. Дифр. расходящийся пучок в дальней зоне.

Радиус м-й зоны Френеля: $R_m = \sqrt{m\lambda} \frac{ab}{a+b}$

Если на экран падает паралл. пучок света, то $a \rightarrow \infty$ и $R_m = \sqrt{m\lambda b}$ $\rightarrow N = m = \frac{R_0^2}{\lambda b}$ - число Френеля - кнл. - во открытых зон

Число Френеля определяет, в каком приближении можно рассчитать дифракцию:

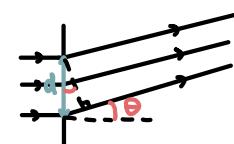
- $N \gg 1$ - приближение геом. оптики
- $N \sim 1$ - приближение Френеля
- $N \ll 1$ - приближение Фраунгофера

Если же зафиксировать $N=1$, то можно ввести дифр. длину пучка: $b_D = \frac{R_0^2}{\lambda}$ - расстояние от экрана до точки, в кот. пучок квазинеский и сечение его совпадает с отверстием в экране т.е. в 1-й зоне Френеля т.к. $N=1$

Тогда можно говорить о зонах дифракции:

- $b \ll b_D$ - ближняя зона дифракции (зона геом. оптики)
- $b \sim b_D$ - зона дифракции Френеля
- $b \gg b_D$ - дальняя зона дифракции (зона дифракции Фраунгофера)

Дифр. расходящийся пучок в дальней зоне:



Падать на отверстие диаметром d падает паралл. пучок света.

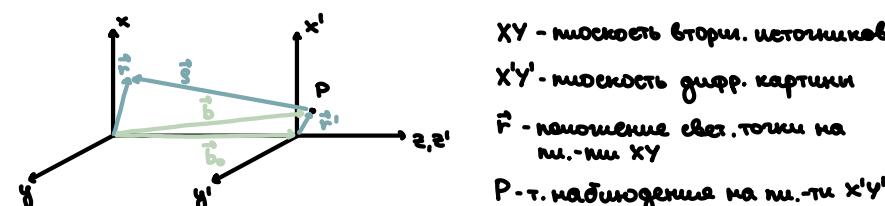
При расст.-ях от экрана $\sim b_D$ пучок практически не меняет своё сечение и соотв.-ет форме отверстия.

Рассм. крайние пучки, расход.-ые под углом Θ в дальней зоне: $\Delta l = d \sin \Theta \approx d \Theta$ - разность хода

Разобъём все вторич. источники в отверстии по паралл. расст.-ям между кот. $d/2$, а разность хода $\lambda/2$. Тогда пучки из такой пары будут гасить друг друга.

Тогда для двух вторич. источников на краях отверстия разность хода $\Delta l = \lambda$. Тогда можно ввести угол дифр. расх.-ши Θ_D , при кот. $\Delta l = d \Theta = \lambda$: $\Theta_D = \frac{\lambda}{d}$. Т.о., в дальней зоне пучок искажён в углах $\pm \Theta_D$.

Приближение Френеля и Фраунгофера:



$X'Y'$ - плоскость вторич. источников

$X'y'$ - плоскость дифр. картинки

\vec{r}' - положение свет. точки на пл.-ти $X'Y'$

P-т. наблюдения на пл.-ти $X'y'$

• Приближение Френеля: дифракция приосевых пучков света на расст.-ях порядка дифр. длины пучка b_D .

Условие приближ. Френеля: $b \geq b_0 \sim b_D = \frac{R_0^2}{\lambda} \geq r_0$

Условие приосевых пучков: $b_0 \geq |\vec{r} - \vec{r}'|$ $\left. \right\} g = \sqrt{b_0^2 + (\vec{r} - \vec{r}')^2} \approx b_0 + \frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{2b_0}$ $\rightarrow A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb_0}}{b_0} \iint_{\Sigma_0} A_Z e^{-ik \frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{2b_0}} d\sigma$

$\vec{g} = \vec{r} - \vec{r}' = -\vec{b}_0 + (\vec{r} - \vec{r}') \rightarrow g^2 = b_0^2 + (\vec{r} - \vec{r}')^2$ $A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb_0}}{b_0} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_Z(x, y) e^{-ik \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2b_0}} dx dy$

• Приближение Фраунгофера: дифракция в паралл. пучках света на расст.-ях много больше b_D .

Условие приближ. Фраунгофера: $b \geq b_0 \gg b_D = \frac{R_0^2}{\lambda} \geq r_0$

Условие приосевых пучков: $b_0 \gg |\vec{r} - \vec{r}'|$ $\left. \right\} g = \sqrt{b^2 - 2\vec{b}\vec{r} + \vec{r}^2} \approx b - \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{b} + \frac{\vec{r}^2}{2b} \rightarrow e^{-ikg} = e^{-ikb} \cdot e^{ik \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{b}} \cdot e^{-ik \frac{\vec{r}^2}{2b}}$

Сделаем несколько преобразований:

$$\begin{aligned} \cdot \kappa \frac{r^2}{2b} = \pi \frac{r^2}{\lambda b} \gg 1 \rightarrow e^{-i\kappa \frac{r^2}{2b}} \sim 1 & \quad \text{Здесь и далее мы будем использовать приближенную формулу Фраунгофера } b \gg r \\ \cdot \vec{b} \cdot \vec{r} = (\vec{b}_0 + \vec{r}') \cdot \vec{r} = \vec{b}_0 \cdot \vec{r} + \vec{r}' \cdot \vec{r} = \vec{r}' \cdot \vec{r} & \quad \text{так как } \vec{b}_0 \perp \vec{r} \end{aligned}$$

$$\rightarrow A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{z_0} e^{i\kappa \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{b}} d\sigma$$

$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{z_0} e^{i\kappa \frac{xx' + yy'}{b}} d\sigma$$

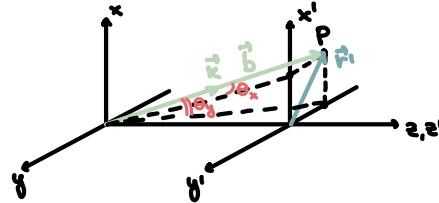
Знам.-е интеграла зависит от $\frac{x'}{b}$ и $\frac{y'}{b}$, т.е. от напр.-я на т. наблюд.-я. Значит, движение экрана, или будем всегда наблюдать илл. картину, но она будет изменяться в размере.

Возможна и другая запись, если учесть, что $\vec{k} = \kappa \frac{\vec{b}}{b}$:

$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{z_0} e^{i\kappa \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{b}} d\sigma = A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{z_0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\sigma \rightarrow A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_z(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} d\sigma$$

Дифракция света. Дифракция в дальней зоне как преобр. преобр.-е Фурье. Комплексные простр. спектр. амплитуда. Разложение пучка по плоским волнам. Учи. спектр излучение и его широта.

Дифракция в дальней зоне как проекц. преобр.-е Фурье:



На рис. 10.10 изображено базисное векторное сопротивление \vec{b}

Вектора \vec{a} и \vec{b} опред.-ся умнож. θ_x и θ_y : $k_x = k \sin \theta_x$, $k_y = k \sin \theta_y$

Преобр.-я Фурье: $f(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$, $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$, где $f(i\omega)$ - комп.спектр амплитуда

Из вышесказанного для косм. амплитуды дифр. картин в приближении Фраунгофера предполагается провести однодиапазонное соответствие: $t \rightarrow x, y$, где x, y - точки свет. пол.-тии; $\omega \rightarrow k_x, k_y$, где k_x, k_y - пространств. частоты

Тогда то оному земли предобр.-еми Фурье: обратное предобр.-е

$$A(p) = A_{\Sigma}(ik_x, ik_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A_{\Sigma}(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

$A_z(i\kappa_x, i\kappa_y)$ - пространств. спектр. амплитуда

$$A_z(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_z(i\kappa_x, i\kappa_y) e^{-i(\kappa_x x + \kappa_y y)} d\kappa_x d\kappa_y$$

$A_\Sigma(x, y)$ - пространств. комп. амплитуда

премое преодр.-е

Т.о., в дальней зоне дифракции колин. амплитуда дифр. картины - это, с точностью до множителя $\frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b}$, простр. спектр. амплитуда

Разложение пулька по токсичным болицам:

Комп.амплитуда све.волне $A(x, y, z)$ за па-тию вториј. методикој: $A(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint A(i k_x, i k_y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$

Помножив ур.-ем Гельмгольца: $(\Delta + k^2)A(x, y, z) = 0 \rightarrow (\Delta + k^2) \left[A(ik_x, ik_y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} \right] = 0$

$$\frac{\partial^2 A(i\kappa_x, i\kappa_y, z)}{\partial z^2} + (\kappa^2 - \kappa_x^2 - \kappa_y^2) A(i\kappa_x, i\kappa_y, z) = 0$$

$$\text{Torque } A(i\kappa_x, i\kappa_y, z) = A_z(i\kappa_x, i\kappa_y) e^{-i(\kappa^2 - \kappa_x^2 - \kappa_y^2)z} = A_z(i\kappa_x, i\kappa_y) e^{-iz^2}, \text{ where } \kappa_z = \sqrt{\kappa^2 - \kappa_x^2 - \kappa_y^2}$$

$$\text{B pez.-me: } A(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} A_{\xi}(ix_n, iy_n) e^{-i(x_n \xi_n + y_n \xi_y + z_n \xi_z)} d\xi_n d\xi_y \rightarrow A(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} A_{\xi}(ix_n, iy_n) e^{-i\vec{\xi} \cdot \vec{R}} d\xi_n d\xi_y$$

\vec{R} -радиус-вектор произв. т. пр.-ва отн.-но
центра свет. поб.-ни

т.о., оракул. в пр.-ве кулоц можно представить в виде суперпозиции линий, распределр. в разн. напр.-ях, зара-
ваних вами. Всегда они к'

Учебный спектр и его широта:

Интенс.-ть дифр. картинки: $I(P) = \frac{1}{2} |A(P)|^2 = 2\lambda^2 b^2 |A_2(i k_x, i k_y)|^2$, где $|A_2(i k_x, i k_y)|^2$ - простр. спектр. плотность или
умножен. спектр. излучения

В дальней зоне дифракции коли. амплитуда дифр. картинки $A(P)$ проп.-на колин. простр. спектр. амплитуде $A_2(i\kappa_x, i\kappa_y)$, а интенс.-ть дифр. картинки $I(P) = \text{уч. спектру } |A_2(i\kappa_x, i\kappa_y)|^2$ излучение вторич. источников с колин. амплитудой $A_2(\kappa_x, \kappa_y)$ в симметрии исхода пульса. Т.е. осн. закономерность дифр. -ции Фраунгофера - Фурье-преобразование в дальней зоне усаживающей уч. структурой коли, повторяющей форму уч. спектра пульса.

При прогр.-частотном преобр.-ии Фурье изменился учи.спектра Δk_x и Δk_y связанный с попереч.мик.размерами пучка ϵ_x и ϵ_y : $\Delta k_{x,y} \cdot \epsilon_{x,y} \approx 2\pi$

Используя умножение коорд.-тн $\Theta_{x,y}$: $\Delta k_{x,y} = \Delta(k \cdot \sin \Theta_{x,y}) = k \cos \Theta_{x,y} \cdot \Delta \Theta_{x,y} \rightarrow \Delta \Theta_{x,y} \approx \frac{2\pi}{e_{x,y} k \cos \Theta_{x,y}} = \frac{\lambda}{e_{x,y} \cos \Theta_{x,y}}$

нареке. нүүрүү: $\cos \theta_{x,y} \approx 1$

$\Delta\theta_{x,y} \approx \frac{\lambda}{e_{xy}}$ - угол дифр. расшир.-я

Дифракция на одномер. период. структурах. Ф.-уши (комп. когер.) пропускание. Амплитудная и фазовая решётки. Интерф. Ф.-уши. Помехи и учи. широта шага максимумов.

Дифракционные решётка - оптич. элемент, кот. обладает периодич. простр. структурой оптич. свойств

Рассл. волну, кот. на некот. носокий опт. элемент. Комп. амплитуда на поб.-ни Σ , где $\text{нек.} \rightarrow \text{эл.} - A_{0z}$.

Комп. амплитуда волны, покр. эл. поб.-ни A_z . Тогда можно ввести комп. когер.т пропускание:

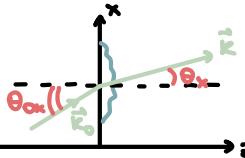
$$t(x, y) = \frac{A_z(x, y)}{A_{0z}(x, y)}$$

Дифр. решётка обладает периодич. простр. структурой опт. свойств $\rightarrow t(x + n_x d_x, y + n_y d_y) = t(x, y)$, где $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$, $d_{x,y}$ - период

Т.к. $t(x, y)$ явн.-се комп. величиной, то можно записать: $|t(x, y)| = |t(x, y)| e^{-i\Phi(x, y)}$. Т.о., дифр. решётки можно классифицировать след. образом:

- пропуск. решётки • амплитуд. решётки: $|t(x, y)| \neq 1, \Phi(x, y) = 0$ • амплитуд.-фазовые решётки:
 $|t(x, y)| \neq 1, \Phi(x, y) \neq 0$
- отражат. решётки • фазовые решётки: $|t(x, y)| = 1, \Phi(x, y) \neq 0$

Одномерные дифр. решётки:



В одномер. случае период. сб.-ва наби.-се в одном направлении $\rightarrow A_z(x, y) = A_z(x)$

$$\text{Т.к. } \vec{r} \cdot \vec{b} = \vec{r} \cdot \vec{r}' \text{ и } b \gg r, \text{ то } g = \sqrt{b^2 + r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = \sqrt{b^2 + r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \approx b + \frac{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{2b}$$

$$\text{Тогда: } A(P) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} A_z \frac{e^{-ikg}}{g} d\sigma \approx \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma} A_z \cdot e^{-ik \frac{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{2b}} dx dy = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma} A_z \cdot e^{-ik \frac{x^2 - 2xx'}{2b}} \cdot e^{-ik \frac{y^2 - 2yy'}{2b}} dx dy$$

$$\text{Проделённый преобр.-е: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik \frac{y^2 - 2yy'}{2b}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \frac{k}{2b} (y-y')^2} \cdot e^{i \frac{k}{2b} y'^2} dy = e^{i \frac{k}{2b} y'^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \frac{k}{2b} (y-y')^2} dy = e^{i \frac{k}{2b} y'^2} \sqrt{\frac{\pi}{i \frac{k}{2b}}} \approx \sqrt{\frac{2b\pi}{ik}} \quad \text{т.к. } b \gg \frac{y'^2}{k}$$

$$\text{Получаем: } A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \sqrt{\frac{2b\pi}{ik}} \int_{-\infty}^{+\infty} A_z \cdot e^{-ik \frac{x^2 - 2xx'}{2b}} dx = \frac{1+i}{\sqrt{2b\lambda}} e^{-ikb} \int_{-\infty}^{+\infty} A_z \cdot e^{-ik \frac{x^2 - 2xx'}{2b}} dx$$

При рассл.-ии дифракции в дальней зоне ($b \gg \frac{x^2}{\lambda}$): $A(P) = A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2b\lambda}} e^{-ikb} \int_{-\infty}^{+\infty} A_z(x) e^{ik_x x} dx$

Пусть длина дифр. решётки $- L$, а вдоль x она кратна периоду d , число кот. N ($N \cdot d = L$). Тогда:

$$A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2b\lambda}} e^{-ikb} \sum_{j=1}^N \int_0^d A_0 \cdot t(w + (j-1)d) \cdot e^{i(k_x - k_{0x})w} \cdot e^{i(k_x - k_{0x})(j-1)d} dw$$

↓ из-за период. сб.-ва $t(x)$

$$A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2b\lambda}} e^{-ikb} \int_0^d A_0 e^{-ik_{0x}w} \cdot t(w) e^{ik_x w} dw \cdot \sum_{j=1}^N e^{i(k_x - k_{0x})(j-1)d} \rightarrow A(k_x) = A_1(k_x, k_{0x}) \cdot h(N, k_x, k_{0x})$$

A_1 - комп.амп. от одного периода
 h - фактор многоволн. интерфер-ции

$$h\text{-сумма геом. прогрессии} \rightarrow h(N, k_x, k_{0x}) = \frac{1 - e^{iN(k_x - k_{0x})d}}{1 - e^{i(k_x - k_{0x})d}} = \frac{1 - e^{i2N \frac{gd}{\lambda}}}{1 - e^{igd}} \rightarrow h(N, k_x, k_{0x}) = \frac{iN \frac{gd}{\lambda}}{e^{igd}} \cdot \frac{\sin(N \frac{gd}{\lambda})}{\sin(\frac{gd}{\lambda})}$$

$$\frac{gd}{\lambda} = \frac{k_x - k_{0x}}{2} d$$

Тогда интенс.-ть дифр. картины: $I(P) = I_1(k_x, k_{0x}) \cdot h(N, \frac{gd}{\lambda})$

I_1 - инт.-ть от одного периода

h - интерф. ф.-уши Ишуз $\rightarrow h(N, \frac{gd}{\lambda}) = \frac{\sin^2(N \frac{gd}{\lambda})}{\sin^2(\frac{gd}{\lambda})}$

Помехи и учи. широта шага максимумов:

Интерф. ф.-уши Ишуз принимают макс. значение ($H = N^2$), когда $\sin \frac{gd}{\lambda} = 0$, т.е:

$$\frac{gd}{\lambda} = \frac{k_x - k_{0x}}{2} d = \frac{\pi}{2} (\sin \theta_x - \sin \theta_{0x}) d = \pi \frac{d}{\lambda} (\sin \theta_x - \sin \theta_{0x}) = m\pi \rightarrow \sin \theta_x - \sin \theta_{0x} = \frac{m\lambda}{d} \quad \text{-условие шага макс.-ма}$$

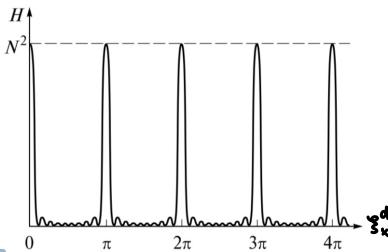
Минимум не достигается, если $\sin(N\gamma_x^d) = 0 \rightarrow \gamma_x^d = k\frac{\pi}{N}$ - узк.-е максимум

Ширина пика интенсивности равна: $\delta\gamma_x^d = \frac{\pi}{N} \rightarrow \frac{\pi d}{\lambda} \cdot \delta(\sin\theta_x - \sin\theta_{0x}) = \frac{\pi}{N}$

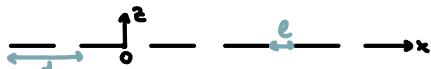
$$\cos\theta_x \cdot \delta\theta_x = \frac{\lambda}{dN} = \frac{\lambda}{L} \rightarrow \delta\gamma_x^d = \frac{\lambda}{dN} = \frac{\lambda}{L}$$

$$\delta\theta_x = \frac{\lambda}{dN\cos\theta_x} \approx \frac{\lambda}{dN\cos\theta_{0x}} \rightarrow \delta\theta_x = \frac{\lambda}{d_x N} = \frac{\lambda}{L_x}$$

ши. ширина
максимума



Амплитудная решётка:

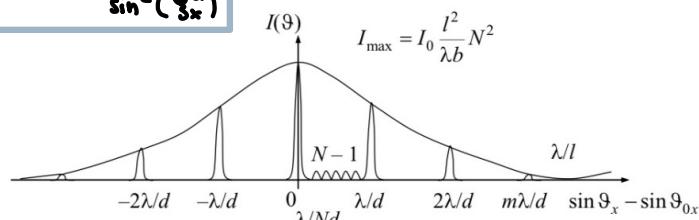


Ф.-ные пропуск.-е в дан. случае: $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq d \\ 0, & d < x \leq 2d \end{cases}$

Рез.-т дифракции на одной щели: $A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2b\lambda}} e^{-ikb} A_0 \int_0^d f(x) e^{i(k_x - k_{0x})x} dx = \frac{1+i}{\sqrt{2b\lambda}} e^{-ikb} A_0 \cdot e^{i\frac{k_x - k_{0x}}{2}\ell} \cdot e \cdot \text{sinc}(\frac{k_x - k_{0x}}{2}\ell)$

$$I_1(k_x) = I_0 \frac{e^2}{\lambda b} \cdot \text{sinc}^2(\frac{k_x - k_{0x}}{2}\ell) = I_0 \frac{e^2}{\lambda b} \cdot \text{sinc}^2 \gamma_x^d$$

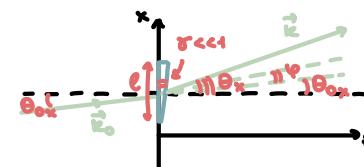
Тогда для всей решётки: $I(k_x) = I_1(k_x) \cdot H(N, \gamma_x^d) \rightarrow I(k_x) = I_0 \frac{e^2}{\lambda b} \cdot \text{sinc}^2 \gamma_x^d \cdot \frac{\sin^2(N\gamma_x^d)}{\sin^2(\gamma_x^d)}$



Условие шир. максимумов: $\gamma_x^d = k\pi \rightarrow \sin\theta_x - \sin\theta_{0x} = k\frac{\lambda}{d}$

Макс. порядок дифракции: $m_{max} = \frac{\lambda/d}{\lambda/d} \rightarrow m_{max} = \frac{d}{\lambda}$

Разовая призматическая решётка: практически не меняет амплитуду, но меняет фазу

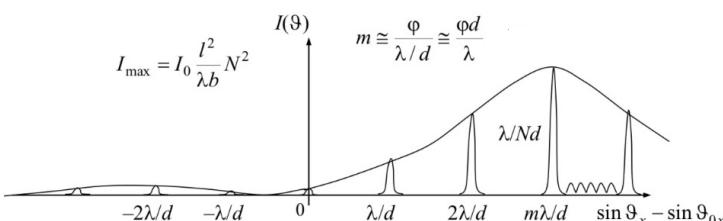


В дан. случае коэф. пропуск.-е: $f(x) = e^{-i\Phi(x)}$, где $\Phi(x) = \frac{k(n-1)\delta x}{\cos\theta_{0x}}$, а $\Psi = \frac{(n-1)\pi}{\cos\theta_{0x}}$

Тогда рез.-т дифр.-ции на одной щели:

$A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2b\lambda}} e^{-ikb} A_0 \int_0^d e^{-ik\Psi x} e^{i(k_x - k_{0x})x} dx = \frac{1+i}{\sqrt{2b\lambda}} e^{-ikb} A_0 \cdot e^{i\frac{k_x - k_{0x} - k\Psi}{2}\ell} \cdot e \cdot \text{sinc}(\frac{k_x - k_{0x} - k\Psi}{2}\ell)$

$$I_1(\theta) = I_0 \frac{e^2}{\lambda b} \text{sinc}^2(\frac{k_x - k_{0x} - k\Psi}{2}\ell) \rightarrow I_1(\Psi) = I_0 \frac{e^2}{\lambda b} \text{sinc}^2\left(k \frac{\sin\theta_x - \sin\theta_{0x} - \Psi}{2}\ell\right)$$

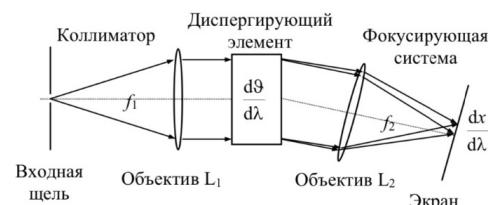


Если в дифр.решётке использ.-ть вместо щелей призмы, то напр.-е на шир. максимумов не измен.-ся, а огибающая $I_1(\theta)$ сдвигается на угол Ψ , увеличиваю инт.-ть шир. максимумов при более высоких порядках дифр.-ции m .

БИЛЕТ 22

Спектр. приборы с простр. разложением спектра. Характ.-ки спектр. приборов - предел разрешение и разреш. способность. Дифр. решётка. Интерферометр Фабри-Перо. Призма.

Спектр. прибор - оптический прибор для простр. разложения свет. пучка на монохром. сост.-цию с пост.-ю уш. дисперсии

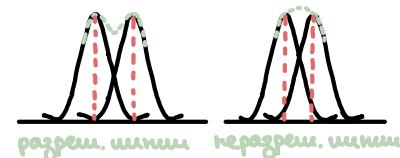


Аппаратное ф-ление I(λ) - "отклик" прибора на монохром. излучение - регистрир. интенс.-ть света в т. наблюдения P

Область свободн. дисперсии $\Delta\lambda$ - макс. интервал длин волн, при кот. возможна работа прибора (т.е. между -е разреш. и конт. или дифр. картин)

Предел разрешение $\Delta\lambda$ - минимальная разность длин волн двух спектр. линий, кот. разрешает спектр. прибор

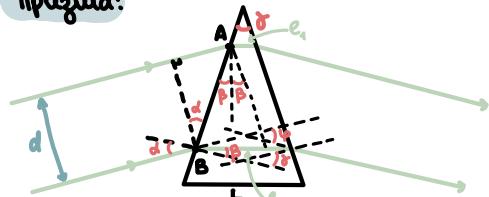
Условие разрешение Рэлея: спектр. линии свет.-е разреш. -ни, если максимум регистрир. -й интенс.-ти одной линии попадает на минимум регистрир. -й интенс.-ти другой. Если линии не облад. максимумами регистр. -й интенс.-ти, то предел разреш. -е $\Delta\lambda$ соотв. ет сдвигу максимума интенс.-ти линии на её ширину.



Разрешающая способность $R = \frac{1}{\Delta\lambda}$ - относ.-е характ. длины волн исслег. изм. к пределу разреш. -е

Условие дисперсия $\lambda_0 = \frac{d\theta}{dt}$ - скорость изменения уш. коорд.-и θ макс. -иа регистр. -й интенс.-ти с изм.-ем длины волны

Призма:



$$\left. \begin{array}{l} \text{Из геом. соображений: } \delta = 2\beta, \varphi = 2(\alpha - \beta) \rightarrow \beta = \frac{\delta}{2}, \alpha = \frac{\varphi + \delta}{2} \\ 3. \text{ Спектр.: } \frac{\sin \delta}{\sin \beta} = n \end{array} \right\} \frac{\sin \left(\frac{\varphi + \delta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\delta}{2} \right)} = n$$

$$\text{Продифр.-ен: } \frac{\cos \left(\frac{\varphi + \delta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\delta}{2} \right)} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \rightarrow \frac{\cos \alpha}{2 \sin \beta} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda}$$

Получаем: $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{2 \sin \beta}{\cos \alpha} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{e_2 - e_1}{AB} \cdot \frac{AB}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\Delta e}{d} \frac{dn}{d\lambda}$, где Δe - раз.-ть хода двух пучков, $\frac{dn}{d\lambda} \neq 0$ для призмы

$$\text{Аппарат. ф-ление: } I(\theta) = I_0 \frac{d^2}{\lambda b} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{k \sin(\theta - \varphi)}{2} d \right)$$

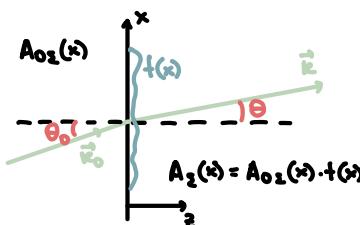
Усл.-е шв. макс.-иа: $\frac{k \sin(\theta - \varphi)}{2} d = 0 \rightarrow \theta = \varphi \rightarrow \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda} \rightarrow D_\theta = \frac{\Delta e}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$ - уш. дисперсия

Усл.-е минимума: $\frac{k \sin(\theta - \varphi)}{2} d = \pi \rightarrow \theta \approx \varphi + \frac{\lambda}{d} \rightarrow \delta\theta = \frac{\lambda}{d}$ - сдвиг относ.-но макс.-иа (ширина линии)

Тогда $\delta\lambda = \frac{\delta\theta}{|D_\theta|} \rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda}{\Delta e \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|}$ - предел разреш. -е **Область дисперсии: $\Delta\lambda \sim \infty$**

$$\text{Разреш. способность: } R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \rightarrow R = \Delta e \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \quad R_{\max} = L \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$$

Дифракц. решётка:



$$\text{Аппарат. ф-ление: } I(\theta) = I_0(\theta) \cdot H(N, \zeta(\theta)), \text{ где } H = \frac{\sin^2(N \zeta(\theta))}{\sin^2(\zeta(\theta))}, \text{ а } \zeta(\theta) = k \frac{\sin \theta - \sin \theta_0}{2} d = k \frac{\Delta(\theta)}{2}$$

Усл.-е шв. макс.: $\zeta(\theta) = m\pi \rightarrow \Delta(\theta) = d(\sin \theta - \sin \theta_0) = m\lambda$

Усл.-е ближайш. мин.: $\Delta(\theta) = d(\sin \theta - \sin \theta_0) = (m + \frac{1}{N})\lambda$

$$\text{Порядок дифр.-и: } m = \frac{\Delta(\theta)}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

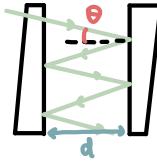
Оби.-ть дисперсии: $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda \rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$

$$\text{Разреш. способ. -ть: } R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \rightarrow R = Nm, \quad R_{\max} = Nm_{\max} = N \frac{d}{\lambda} = \frac{L}{\lambda}$$

Предел разреш. -е: $m(\lambda + \delta\lambda) = (m + \frac{1}{N})\lambda \rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm}$

$$\text{Уш. дисперсия: } D_\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} \rightarrow D_\theta = \frac{m}{d \cos \theta}$$

Интерферометр Фабри-Перо:



Аппарат. ф.-уравн - формула Эйри: $I_{\text{app}}(\Theta) = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\Phi(\Theta))}$, где $\Phi(\Theta) = \frac{4\pi d}{\lambda} \cos \Theta$

Ширина шашк.: $\delta = 2 \frac{1-R}{\sqrt{R}}$ Числ.-е шашк.: $\Phi(\Theta) = 2\pi m \rightarrow 2d \cos \Theta = m\lambda$ Порядок инт.-ции: $m = \frac{2d \cos \Theta}{\lambda}$

Общ.-то дисперсия: $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda \rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$

Предел разреш.-ия: $\delta = \delta\Phi = \frac{4\pi d}{\lambda^2} \cos \Theta \delta\lambda = \frac{2\pi m}{\lambda} \delta\lambda \rightarrow \delta\lambda = \delta \frac{\lambda}{2\pi m} \rightarrow \delta\lambda = \frac{1}{m} \cdot \frac{1-R}{\pi \sqrt{R}}$

Разреш. способ.-ти: $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \rightarrow R = m \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$

Числ.дисперсия: $D_\Theta = \frac{d\Theta}{d\lambda} = -\frac{m}{2d \sin \Theta} \rightarrow D_\Theta = -\frac{\cot \Theta}{\lambda}$

Основы дифр. теории Фурье-изобр.-е Аббе. Простр. фильтрации изобр.-е. Опыт Аббе-Портера. Спец. методы наблюд.-е фазо-вых объектов. Метод тёмного поля. Метод фазового контраста.

В соотв.-ии с теорией Аббе фурье-изобр.-е изображений происходит в два этапа:

1) Фурье-анализ: формирование распред.-е интенс.-ии в фок. пл.-ти иници, которое предст. собой картину дифр.-ции Фраунгофера свет. поля на объекте теперь уже не в дальней зоне, а в фок. пл.-ти иници

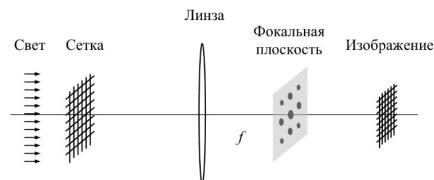
2) Фурье-синтез: формирование распред.-е интенс.-ии, обратного распред.-ю интенс.-ии света на объекте.

Это распред.-е интенс.-ии предст. собой результат интерференции волн, источниками кот. можно считать дифр. максимумы в фок. пл.-ти иници, и наз.-ся актил. изображением объекта.

Изображение (т.е. такое же распред.-е интенс.-ии как и у объекта) формир.-се след. образом: см. Билет 20

объект \rightarrow фок. пл.-ть иници \rightarrow изображение
 $A_\Sigma(x,y)$ $A(k_x, k_y) \sim A(i k_x, i k_y)$ $A_\Sigma(x,y)$

Опыт Аббе-Портера:



Расст.-е и/у петель опред.-се периодом $d_{x,y}$ сетки - $\frac{\lambda}{d_{x,y}} f$

Размеры петель опред.-се размерами $L_{x,y}$ освещ. части сетки - $\frac{\lambda}{L_{x,y}} f$

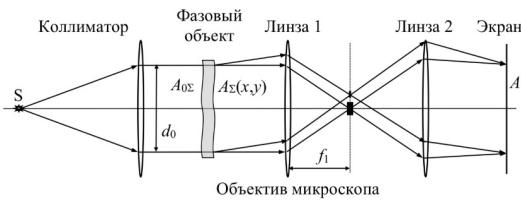
Простр. фильтрации изображение - изменение изображ.-е посредством модификации простр. спектр. компонент свет. поля объекта

Осуществить простр. фильтрацию можно, расположив разн. объекты, закрывающие опред. дифр. максимумы, в фок. пл.-ти иници:

- узкие и/у → конус, расплож. перп.-но и/у
- присоединение диафрагма → изменение её диаметра, можно проследить за Фурье-синтезом если увеличивать диаметр изобр.-е будет становиться жёстче
- экран, закрывающий центр. пятно → изобр.-е сетки с образц. контрастом и ещё период изобр.-е сетки увеличится
- отверстие, открывавшее центр. пятно → равномерное засветка

Эффект вычитывания - эффект потери жёсткости изображения, заключает. в том, что не все дифрагировавшие волны пройдут через объект (иници) в и/у конечности его апертуры (размера). Т.к. волны, дифраг.-ые на иницих деталях объекта, распростран.-ие под большими углами, то при недостат. большой апертуре эти детали могут пропасть в изображении то же самое будет, если специально закрывать крайние максимумы в фок. пл.-ти - изобр.-е будет терять жёсткость

Специальные методы наблюдения фазовых объектов:



Расс. фазовые объекты, кот. практически не поглощают свет и не меняют фазу: $|t(x,y)| \sim 1$, $|\Phi(x,y)| \ll 1 \rightarrow t(x,y) = |t(x,y)| e^{-i\Phi(x,y)} \approx 1 - i\Phi(x,y)$

Комп. амплитуда сразу за объектом: $A_\Sigma(x,y) = A_0\Sigma \cdot t(x,y) \approx A_0\Sigma (1 - i\Phi(x,y))$

Тогда интенс.-ть промед. света: $I_\Sigma(x,y) \approx I_0\Sigma$ это ничего нам не даст, т.к. не неёт инф.-ции о $\Phi(x,y)$ или $t(x,y)$

Метод тёмного поля:

Если фаз. объекта нет, то в центре фок. пл.-ти будет световое пятно - крупинка Эйри

т.к. апертура пучка ограничена и происходит подобие дифр.-ции на круглом отверстии

Радиус крупинки: $r_A = \theta_D \cdot f \approx \frac{\lambda}{d} f$, где θ_D - угол дифр. расходимости

Если перекрыть этот крупинку в отсутствие фаз. объекта, то перекроется распостр.-е пучка света в центре - поле на экране будет "тёмное". Т.е., по существу, крупинка Эйри несёт инф.-цию об исход. пучке с амплитудой $A_0\Sigma$.

Если учесть в присутствии фаз. объекта закрыть крупинку Эйри, то комп. амплитуда за объектом станет:

$A'_\Sigma(x,y) = A_\Sigma(x,y) - A_0\Sigma = A_0\Sigma (1 - i\Phi(x,y)) - A_0\Sigma = -i\Phi(x,y) \cdot A_0\Sigma \rightarrow I'(x,y) = I_0 \cdot \Phi^2(x,y)$ - распр.-е интенс.-ти будет подобно соотв. изм.-ю фазы $\Phi(x,y)$

Метод фазового контраста:

Фазовый рельеф преобр.-ся в амплитудный рельеф с конк.-ю фаз. пластинки, перекрывающей кружок Эйри.

Пластинка толщиной $d = (2k+1) \frac{\lambda_0}{4(n-1)}$ осуществляет изм.-е фазы на $\Delta\varphi = k_0(n-1)d = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

В таком случае $e^{-i\Delta\varphi} = e^{-i(2k+1)\frac{\pi}{2}} = -i(-1)^k$

Тогда: $A'_\Sigma(x,y) = A_\Sigma(x,y) - A_{0\Sigma} + [-i(-1)^k A_{0\Sigma}] = A_{0\Sigma}(1 - i\Phi(x,y)) - A_{0\Sigma} - i(-1)^k A_{0\Sigma} = A_{0\Sigma}(-i(-1)^k - i\Phi(x,y)) \rightarrow I'(x,y) = I_0(1 + 2(-1)^k \Phi(x,y))$

При нечётных k наблюдается тёмный, а при чётных k - светлый фазовый контраст.

Реальность дифракции в приборах, формирующих изображение. Предел разрешения и разреш. способ. -ть опт. прибора: микроскоп, телескоп

Изображение объекта формир.-ся пучками света от каждой его точки. Эти пучки ограничены апертурой ширины, след.-но, наблюд.-ся дифр. явление.

Изобр.-ые точки яви.-ся система концентр. конусов (из-за дифр.-ции), окружен.-их световым кругомок - кругомок Эйри. Изобр.-е объекта есть помешение таких круговок и конусов.

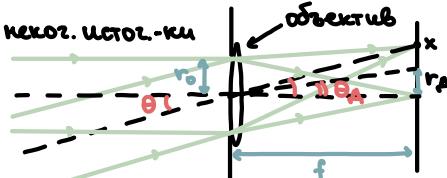
Предел разрешение и разреш. способность оптич. прибора:

Разреш. способ. -ть опт. приборов огранич.-ся дифр.-цией Фраунгофера на их входной апертуре

Предел углового (линейного) разрешение опт. прибора $\delta\theta$ ($\delta\ell$) - минимальное ум. (лини.) расст.-е и/у двумя свет. точками объекта, кот. разрешает прибор

Разреш. способность опт. прибора R - величина, обратная пределу разреш.-е: $R_\theta = \frac{1}{\delta\theta}$, $R_\ell = \frac{1}{\delta\ell}$

Телескоп: опт. прибор для наблюдения далёких объектов с малыми угловыми размерами



Рассл. где очень далёкий от прибора свет. точки. Ум. размер объекта Ω д.б. таким, чтобы вошла, приход. в обн.-ть объектива, была прозр. когерентн.-й: $\Omega < \frac{\lambda}{d\theta}$

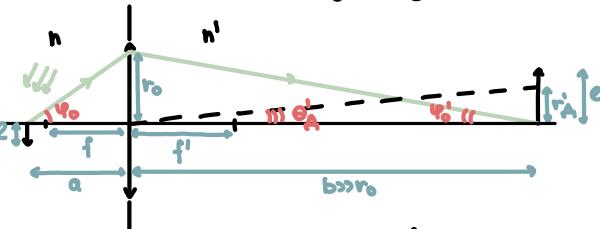
Пусть искл. волна от 1-го ист.-ка падает норм.-но на шинзу \rightarrow в центре фок. пл. будет кругомок Эйри радиуса $r_A = \theta_A f$

Пусть искл. волна от 2-го ист.-ка падает на шинзу под углом θ \rightarrow будет ещё один кругомок Эйри

Согласно критерию Рэлея дине разрешимости двух круговок: $\theta \geq \theta_A \approx \frac{\lambda}{2r_0} \rightarrow \delta\theta = \frac{\lambda}{2r_0}$ - предел разреш.-е

$R_\theta = \frac{2r_0}{\lambda}$ - разреш. способ. -ть

Микроскоп: опт. прибор для изучения объектов малых или. размеров



Пусть показ.-ии преломл.-е среди, в кот. наход.-ся объект и изобр.-е, разные и соотв. равны n и n' . Объект, измнг.-е кот. некогерентно, имеет разм. e , а изобр.-е - e' . ψ_0 -ум. апертура шинзы из-за изобр-ия, ψ_0 - угл. расходимости источника.

Увеличение: $\frac{e'}{e} = \frac{f}{a-f} \rightarrow e' = e \frac{f}{a-f} \rightarrow$ если $a-f \ll f$, то $e' \gg e$

Ур.-ные шинзы: $\frac{f}{a} + \frac{f'}{b} = 1 \rightarrow \frac{f'}{b} = 1 - \frac{f}{a} = \frac{a-f}{a} \ll 1 \rightarrow b \gg f' > r_0 \rightarrow b' \gg r_0 \rightarrow b' \gg 1$

Заметим, что если $e \ll \sqrt{\lambda(a-f)}$, то опт. длина пути дине всех соприч. точек объекта и изобр.-е одинакова с тог.-ю до $\frac{\lambda}{2}$. Помимо этого, при таком ум.-ии выполняется ур.-ние синусов Аббе: $n \sin \psi_0 = n' \sin \psi_0'$

Согласно критерию Рэлея разреш.-ти: $e' \geq r_A' = \theta_A' b \approx \frac{\lambda'}{2r_0} b \approx \frac{\lambda}{2n' \sin \psi_0'}$ $\lambda' = \frac{\lambda_0}{n'}$, $\psi_0' \approx \frac{r_0}{b}$

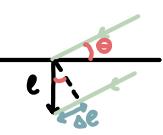
Тогда: $e' \geq \frac{\lambda_0}{2n \sin \psi_0} \rightarrow \delta\ell = \frac{\lambda_0}{2n \sin \psi_0}$ предел разреш.-е $R = \frac{2n \sin \psi_0}{\lambda_0}$ разреш. способ. -ть, где $n \cdot \sin \psi_0$ - начальная апертура объектива

Дине повыш.-е разреш. способ. -ти микроскопа применяют инициально - замен. -е пр.-ва и/у покров. стеклом и шинзой объектива проград. ширины с большими показ.-иями преломления чтобы макс. апертура вопроса

Рассмотрим случай когерентного увелич.-е объекта:

$$\Delta\psi = K \cdot \Delta\ell = K \cdot e \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta - раз.-ть фаз$$

Такое же раз.-ть фаз будет и и/у конц. -ии, приходящ.-ии в обн.-ть пересел.-е круговок Эйри от двух вторич. когерент. источников.



Изменение в этой оби.-ки: $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\Phi) \rightarrow$ изменение угла наклона Θ , можно изменять разреш. способ.-ть объективов: если инт. мен будет положит., то разреш.-е укрупн.-е, а если отриц. - уменьшится.

БИЛЕТ 25

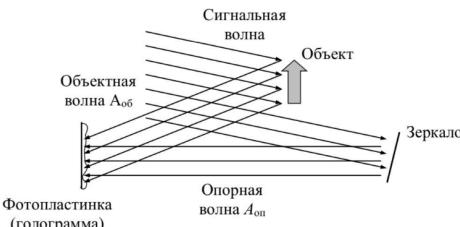
Запись и восстановление свет. поля. Голография. Схемы голографии. записи и восст.-е свет. поля.

При обычном фотографировании фиксируется инф.-ция только об амплитуде свет. поля и полностью теряется инф.-ция о его фазе.

Основное идея голографии - фотограф.ть не само объект. поле, а картину инф.-ции этого поля с когерент. спор.ной волной.

Голография:

• Запись светового поля:



Когда объект подает когерентные сигнальные волны (ей простр. когер.ть д.б. большая, чем объект). Объектные волны $A_{об}$, отраж.ые от объекта достигают пластиинки с фотопластинкой. Часть сигнальных волн, прошед. через объект - спиральная волна $A_{оп}$ - поворачивается зеркалом. Если простр. когер.ть сигнал. волн не достат. большая, то объектные и спиральные волны оказ.-ся некогерентными.

Картина инферф.-ции $A_{об}$ и $A_{оп}$, запис. на пластиинку наз.-ся голографией.

Амплитуда свет. поля в пластиинке: $A(x,y) = A_{об}(x,y) + A_{оп}$

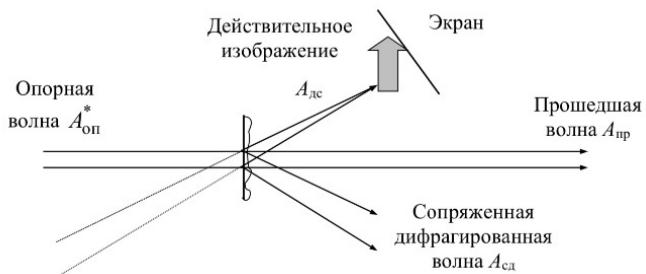
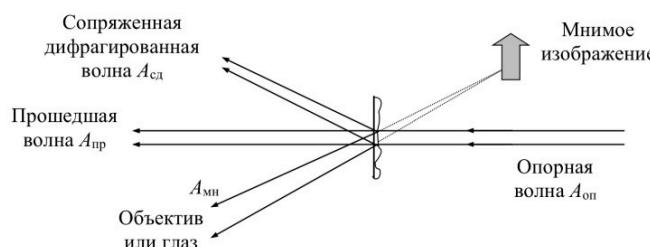
Тогда распр.-е интенс.-ии: $I(x,y) = \frac{1}{2} |A(x,y)|^2 = \frac{1}{2} |A_{об} + A_{оп}|^2 = I_{оп} + I_{об} + \frac{1}{2} A_{оп} A_{об}^* + \frac{1}{2} A_{оп}^* A_{об}$

Это распр.-е и фиксиру.-се на пластиинке. Важно, что в этом выражении есть смешанные, супер. инф.-ции о фазе обьектной волны.

• Восстановление свет. поля:

Для восстан.-е свет. поля голографию освещают спор. волной $A_{оп}$. Врез.-те фильтр.-ции спор. волны возникает неск. свет. волн, одна из кот. в точности повторяет поле объект. волни.

Это возможно благодаря особому виду ф.-ции пропускания фотопластинки: $t(x,y) = 1 - dI(x,y)$ - затемнение, получ.енное при экспонир.-ии фотопластинки, проп.-ко интенс.-ии измн.-е $I(x,y)$, а величина коэффиц.та d зависит от чувств.-ми пластиинки, времена экспонир.-е и интенс.-ии сигнал. волн.



Свет. поле на задней пластиинке:

$$\begin{aligned} A'(x,y) &= A_{оп} \cdot t(x,y) = A_{оп} \cdot dI(x,y) A_{оп} = \\ &= A_{оп} \cdot d(I_{оп} \cdot A_{оп} + I_{об} A_{оп} + \frac{1}{2} A_{оп} A_{об}^* + I_{оп} A_{об}) = \\ &= (1 - dI_{оп} - dI_{об}) A_{оп} \cdot \frac{d}{2} A_{оп} A_{об}^* \cdot dI_{оп} A_{об} = A_{пр} + A_{сд} + A_{мин} \end{aligned}$$

Свет. поле на передней пластиинке:

$$\begin{aligned} A'(x,y) &= A_{оп}^* \cdot t(x,y) = A_{оп}^* \cdot dI(x,y) A_{оп}^* = \\ &= A_{оп}^* \cdot d(I_{оп} A_{оп}^* + I_{об} A_{оп}^* + I_{оп} A_{об}^* + \frac{1}{2} A_{оп}^* A_{об}^*) = \\ &= (1 - dI_{оп} - dI_{об}) A_{оп}^* \cdot dI_{оп} A_{об}^* - \frac{d}{2} A_{оп}^* A_{об}^* = A_{пр} + A_{сд} + A_{мин} \end{aligned}$$

Прошедшее поле $A_{пр}$ в рез.-те свобод. фильтр.-ции распр.-се в прямом напр.-ии и с той жею до константы воспроизведя спиральную волну.

Волна $A_{мин}$ ($A_{мин}$) с той жею до константы повторяет объектное поле и несет минимум (действит.-ное) изобр.-е объекта.

Сопряжен.-е дифрагир.-е волна $A_{сд}$ несет в себе трансформир.-ю инф.-цию о действит.-ном (минимуме) изобр.-е объекта.

БИЛЕТ 26

Дисперсия света. Поляризация и вектор поляризации. Классическая электронная теория дисперсии. Формула Мюнка-Лоренца. Планканская частота.

Дисперсия - зависимость оптических характеристик среды от частоты излучения

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_q = q \vec{E}(t) \\ \vec{F}_A = q [\vec{v}_q, \vec{B}(t)] \\ E(t) = v B(t) \end{array} \right\} \frac{F_q}{F_A} = \frac{E(t)}{v_q B(t) \sin(\vec{v}_q, \vec{B}(t))} \left\} \frac{F_q}{F_A} \geq \frac{v}{v_q} \sim 10^5 \rightarrow \text{момент преобразование воздушной массы} \right.$$

Материальное уравнение для эл. поля: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, где $\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} = \sum_j N_j \vec{p}_j = N \vec{p}$

Здесь ΔV - физически бесконечный объем: $a^3 \ll \Delta V \ll L^3$, где a - характ. радиус-вектор между атомами, а L - характ. мин. размеры кристаллической ячейки. Суммируется по j -атомам и молекулам, где N_j - конц.-чина, \vec{p}_j - эл. дипольный момент j -го типа молекулы/атомов. N -конц.-чина молекул в вакууме, \vec{p} -сред. по всем молекулам зная -е \vec{p}_j

Вспомним, что $\vec{P} = \epsilon_0 \alpha \vec{E} \rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \alpha \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon + \alpha) \vec{E}$, где α -длинно-волновая проприетатность, $\epsilon = \alpha + 1$ - длино-проницаемость

Молекуларная поляризация и вектор поляризации:

Электрический дипольный момент атома: $\vec{p} = \epsilon_0 \beta \vec{E}'$, где β -молекуларная поляризация, \vec{E}' -напр. эл. поляя, действующая на атом

Вектор поляризации: $\vec{P} = \vec{p} N \rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 N \beta \vec{E}'$

Рассмотрим неподвижные и движущиеся однородные диэлектрики во внешнем эл. поле \vec{E}_0 . Будем интересоваться эл. полями, действующими на некот. молекулы. Внедрим некот. микроскопический объем, радиуса R : $a \ll R \ll L$

Тело поляризуется с векторами поляризации \vec{P} и в результате поляризации на поверхности находятся сверху заряды с поверхностью. Поэтому близко. Если рассмотреть часть тела без выделенного объема, то на внутренней поверхности этого объема также возникнут заряды с поверхностью. Поэтому \vec{E}_0 .

Тогда: $\vec{E}' = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ex} + \vec{E}_{in} + \vec{E}_{dip}$, где \vec{E}_{dip} -напр. поле, создаваемое совокупностью молекул, находящихся внутри сферы радиуса R

Понятно, что $\vec{E}_0 + \vec{E}_{ex} = \vec{E}$, $\vec{E}_{in} = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$, $\vec{E}_{dip} \approx 0$

Тогда: $\vec{P} = \epsilon_0 N \beta \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) = \epsilon_0 N \beta \left(\frac{\vec{P}}{\epsilon_0(\epsilon-1)} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) \rightarrow 1 = N \beta \frac{\epsilon+2}{3(\epsilon-1)} \rightarrow \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{N \beta}{3}$ - Формула Мюнка-Лоренца

Формула Мюнка-Лоренца

В случае немагнитных сред: $\mu \approx 1 \rightarrow n = \sqrt{\mu} \approx \sqrt{\epsilon} \rightarrow \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{N \beta}{3}$

В случае разреженных газов: $N \beta \ll 1 \rightarrow n^2-1 = \epsilon-1 = N \beta$

Классическая электронная теория дисперсии:

Рассмотрим атом с одним оптическим электроном массой m и зарядом q . Учтем, что $\frac{m_e}{m} \approx 1836$, $F_E \gg F_B$

Электрон рассматривается как резонансный осциллятор: $m \ddot{x} = -k \dot{x} - \delta \dot{x} + q \vec{E}'(t)$, где $\vec{E}'(t)$ -синусоидальное эл. поле отрицательного заряда атома под действием некот. эл. поля \vec{E}' , $-k \dot{x}$ -квадрупольный сила, $-\delta \dot{x}$ -сила трения -две убытки поляризации и излучение света эл. поля

Перепишем уравнение в виде: $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m} \vec{E}'$, где $\delta = \frac{\sigma}{2m}$ - коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - собственная частота колебаний.

В гармоническом поле $\vec{E}'(t, r) = A_0(r) e^{i\omega t}$. В таком случае можно считать \vec{E}' постоянным по отношению к x

Будем искать решение уравнения осциллятора в виде $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{i\omega t}$

Тогда: $-\omega^2 \vec{x}(t) + i2\delta \omega \vec{x}(t) + \omega_0^2 \vec{x}(t) = \frac{q}{m} \vec{E}'(t) \rightarrow \vec{x}(t) = \frac{q}{m} \cdot \frac{\vec{E}'}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}$

\hat{x} - константа величины

Электрический дипольный момент атома в таком случае: $\vec{p} = q \vec{x} \rightarrow \vec{p} = \frac{q^2}{m} \cdot \frac{\vec{E}'}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega} = \epsilon_0 \beta \vec{E}' \rightarrow \hat{p} = \frac{q^2}{m \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}$

По формуле Мюнка-Лоренца: $\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{N \beta}{3} = \frac{1}{3} \frac{N q^2}{m \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega} = \frac{\omega_n^2}{3} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}$, где $\omega_n = \sqrt{\frac{N q^2}{m \epsilon_0}}$ - планканская частота

характеристика среды

БИЛЕТ 27

Дисперсия и поглощение света. Комплексный показатель преломления. Закон Бугера. Зависимость показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты. Нормальная и аномальная дисперсия.

Компл. дин. проницаемость: $\hat{\epsilon} = \epsilon - i\epsilon'$

Компл. показ.-е преломление: $\hat{n} = \sqrt{\hat{\epsilon}} = n - in'$

Компл. волн. число: $\hat{k} = k - ik' = \frac{\omega}{c} \hat{n} = \frac{\omega}{c} (n - in')$

Рассмотрим распр.-е молекуларн. волны в среде с комплексным показ.-ем преломл.-я и волн. числом:

$$A(z) = A_0 e^{-ikz} = A_0 e^{-ikz - k'^2 z} = A_0 e^{-ikz} e^{\frac{\omega}{c} n' z} \rightarrow I(z) = I_0 e^{-2 \frac{\omega}{c} n' z} = I_0 e^{-az}$$

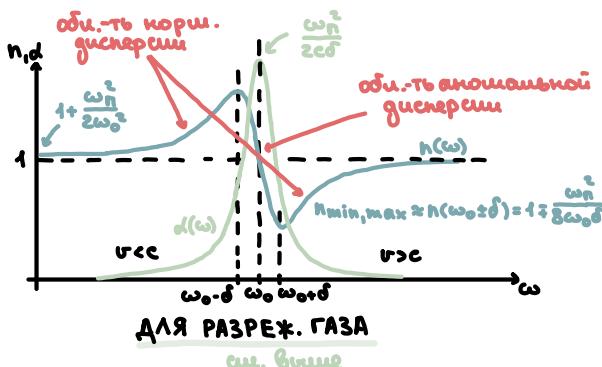
$a(\omega) = 2k' = 2 \frac{\omega}{c} n'(\omega)$ — шинейкский коэффиц. поглощени
з. Бугера

Т.е. интенс.-ть в такой среде экспоненциально падает вдоль оси z . Это значит, что наличие минимумов сост.-щед в показ.-е преломления означает наличие поглощения энергии волны в среде.

Рассмотрим разрещ. среды ($\hat{n} \approx 1$): $\frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 2} \approx \frac{(\hat{n} + 1)(\hat{n} - 1)}{3} \approx \frac{2}{3} (\hat{n} - 1) \approx \frac{N\beta}{3} = \frac{\omega n}{3} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\delta\omega} \rightarrow \hat{n} \approx 1 + \frac{\omega n}{3} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\delta\omega}$

Тогда: $n = 1 + \frac{\omega n}{2} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$ и $n' = \frac{\omega n}{2} \cdot \frac{2\delta\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \rightarrow a(\omega) = \frac{\omega n}{c} \cdot \frac{2\delta\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$

Зависимость показателя преломления и коэффицита поглощения от частоты:

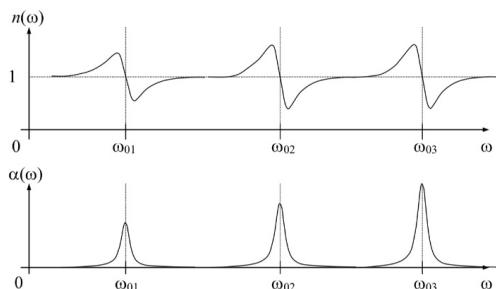


Общ. тв. нормальной дисперсии: $|\omega - \omega_0| > \delta \rightarrow \frac{dn}{d\omega} > 0$ — уменьшение частоты приводит к тому, что показ.-е преломл.-я увелич. ся. Спектр. сост.-щие с меньшей частотой отклон.-ся на границе раздела на больший угол.

Область аномальной дисперсии: $|\omega - \omega_0| < \delta \rightarrow \frac{dn}{d\omega} < 0$

Фазовая скорость: $v = \frac{c}{n} \rightarrow$ при $\omega < \omega_0$: $v < c$
при $\omega > \omega_0$: $v > c$

однако в реальности переход энергии не происходит с этой скоростью



В общ. случае $\hat{\rho} = \sum \hat{\rho}_j$ — сумма по всем видам атомов и ионам. Тогда:

$$\hat{\epsilon}(\omega) = 1 + \sum_j N_j \beta_j = 1 + \omega_n^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_{bj}^2 - \omega^2 + i\delta_j \omega}, \text{ где } f_j = \frac{N_j q_j^2}{m_j} \cdot \frac{m}{Nq^2} \sim \frac{m}{m_j}$$

БИЛЕТ 28

Распр.-е свет. импульса в диспергирующей среде. Разделение и групповая скорости. Формула Рэлея. Дисперсионное расщепление свет. импульса. Дисперсионная длина.

Распространение свет. импульса в диспергирующей среде:

Рассмотрим прогрессивные диспергирующие среды: $|\omega_0 - \omega| > \delta \rightarrow k(\omega) \approx k(\omega)$, $\frac{dn}{d\omega} > 0$

Пусть в такой среде распространяется свет. импульс с заданной $E(+, z=0) = E_0(+)$. Найдём $E(+, z)$.

Решение делится на три этапа:

- 1) **Фурье-анализ** вход. импульса $E_0(+)$: $E_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$, где $E_0(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t') e^{-i\omega t'} dt'$
- 2) **Преобразование спектр. компонент** вход. импульса $E_0(+)$ дисперг. средой: $E(i\omega, z) = E_0(i\omega) \cdot e^{-ik(\omega)z}$
- 3) **Фурье-синтез** импульса на выходе: $E(+, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(i\omega, z) e^{i\omega t} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t') e^{-ik(\omega)z} \cdot e^{i\omega(t-z)} dt' dz$

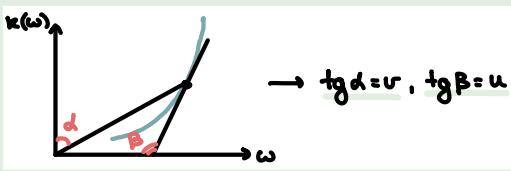
Пусть среда имеет дисперсию первого порядка: $k(\omega) \approx k_0 + k'_0(\omega - \omega_0)$. Тогда:

$$E(+, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t') e^{-i(k_0 + k'_0(\omega - \omega_0))z} \cdot e^{i\omega(t-z)} dt' dz = e^{-i(k_0 - k'_0\omega_0)z} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[E_0(t') \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(-k'_0z + t - t')} dt' \right] dz = e^{-i(k_0 - k'_0\omega_0)z} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t') \cdot \delta(t' - (t - k'_0z)) dt' \rightarrow E(+, z) = e^{-i(k_0 - k'_0\omega_0)z} \cdot E_0(t - k'_0z) \rightarrow I(+, z) = I_0(t - k'_0z)$$

В среде с дисперсией первого порядка узкополос. свет. импульс с несущей частотой ω_0 распространяется без изменения формы с постоянной групповой скоростью ио: $v_0 = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{k'_0} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{\omega_0} = \text{const}$

$$\text{Возьмём произв.-ю от выраж.-я } k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) \rightarrow \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} (n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}) \rightarrow u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}} \rightarrow u(\omega) = \frac{v(\omega)}{1 + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega}}$$

и - групп. скорость
v - фаз. скорость



Возьмём произв.-ю ко k от $\omega = k(\omega) \cdot v(\omega)$

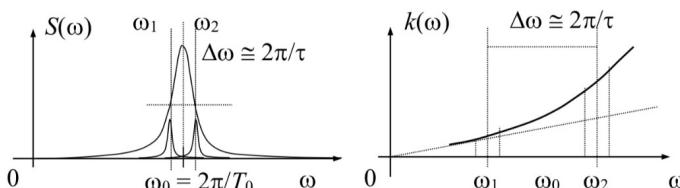
$$\left. \begin{aligned} u(\omega) &= v(\omega) + k(\omega) \frac{dv}{dk} \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned} \right\} u(\omega) = v(\omega) - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

формула Рэлея

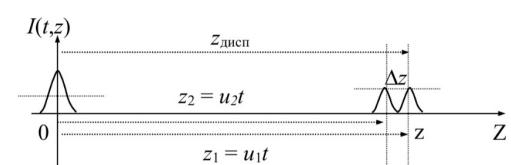
Дисперсионное расщепление волн. пакетов:

В линейных прогрессивных средах с дисперсией второго и более порядков имеет место дисперсионное групп. скоростей:

$$k(\omega) = k_0 + k'_0(\omega - \omega_0) + \frac{k''_0}{2} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \rightarrow u(\omega) = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{1}{k'_0 + k''_0(\omega - \omega_0) + \dots}$$



Рассмотрим два узкополос. волн. пакета с частотами ω_1 и ω_2 на краях частот. интервала $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ исход. свет. имп.-са. При этом длине волн. пакетов среда изви.-ся средой с дисперсией 1-го порядка.



Эти пакеты вновь наход.-ся вместе в начале коорд.-т, а затем распр.-ся с разн. групп. скоростями u_1 и u_2 . За время t они пройдут z_1 и z_2 соответв.-ко.

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{u_2} = \frac{u_1 - u_2}{u_2} t = \frac{u_1 - u_2}{u_2 u_1} z_1 = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) z_1 = (k'_1 - k'_2) z_1 \approx k''_0 \cdot \Delta\omega \cdot z_1 \approx \frac{2\pi k''_0}{c} z_1$$

Из-за такой задержки и/у пакетами находит увелич.-ся длительность исход. имп.-са примерно на ту же величину. Выберем расст.-е $z_{\text{дисп}}$ такое, чтобы задержка и/у пакетами от равнялась длит.-ти имп.-са τ в начале процесса, и наловьши его дисперсионной длиной имп.-са в дан. среде: $z_{\text{дисп}} = \frac{\tau^2}{2\pi k''_0}$ → тем короче исход. импульс, тем быстрее он расщепляется

Дисперсионная длина свет. импульса в среде - расст.-е вдоль направл.-я распространения свет. импульса в прогр. дисперг. среде, на кот. его длительность увеличивается вдвое.

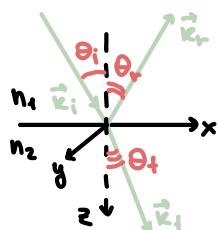
Дальше дисперсионная длина свет. импульса в среде - расст.-е $\gg z_{\text{дисп}}$, на кот. импульс "забывает" свою изначальную форму.

БИЛЕТ 29

Оптические явления на границе раздела изотроп. диэлектриков. Законы отражения и преломления. Формулы Френеля, полимеризацию отраж. и прел. волн. Член Брюстера.

Рассмотрим границу раздела двух изотроп. неметаллических диэлектриков: $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$, $n_1 = n_2 = 1$. Пусть на пов.-ти раздела сред нет ни свобод. зарядов, ни поверхк. токов проводимости: $\sigma = 0$, $\vec{J} = 0$

Законы отражение и преломление света:



Пусть на границу падает идущая волна. иллюстр. выше: $\vec{E} = \vec{A} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

$$\text{Обозначим } \vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_t$$

$$\text{Границ. условие: } \vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau} \rightarrow \vec{A}_{1\tau} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} + \vec{A}_{r\tau} e^{i(\omega t + \vec{k}_r \cdot \vec{r})} = \vec{A}_{t\tau} e^{i(\omega t + \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \rightarrow \omega_i = \omega_r = \omega_t$$

Для всех токов на границе: $\vec{r} = \vec{r}_\tau \in (0x)$ $\rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = (\vec{k}_n + \vec{k}_p) \vec{r}_\tau = \vec{k}_t \cdot \vec{r}_\tau \rightarrow \vec{k}_{it} = \vec{k}_{rt} = \vec{k}_{t\tau}$ - из тогд же гранич. усн. -

Вспомним, что $k_{jt} = k_j \cdot \sin \theta_j = k_0 \cdot n_j \cdot \sin \theta_j \rightarrow n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r = n_2 \sin \theta_t$

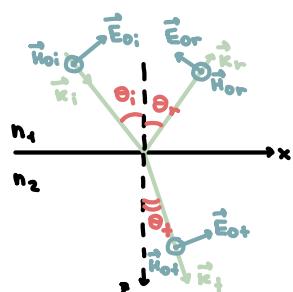
Такими образом:

- частоты падающей, отражённой и преломлённой волн равны
- волн. векторы падающей, отражённой и преломлённой волн лежат в одной плоскости с нормалью к пов.-ти раздела двух сред в т. падения
- угол падения равен углу отражения: $\theta_i = \theta_r$
- закон Снеллиуса: $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}$

Формулы Френеля:

Падающую волну представим в виде суперпозиции двух плоских волн с перп. -ми полимеризациами: E_p - в п. -ни. падение, E_s - перп. -ко п. -ни. падение

P-компонент:



$$\text{Границ. усн.-ие: } \vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$$

$$\vec{H}_{1\tau} = \vec{H}_{2\tau}$$

↓

$$E_{oi} \cos \theta_i - E_{or} \cos \theta_i = E_{ot} \cos \theta_t$$

$$H_{oi} + H_{or} = H_{ot}$$

Свойства плоск. волн:

$$\sqrt{\mu \epsilon_0} E_o = \sqrt{\mu M_0} H_0 \rightarrow H_0 = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{M_0}}$$

Тогда:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{oi} \cos \theta_i - E_{or} \cos \theta_i = E_{ot} \cos \theta_t \\ E_{oi} \cdot n_1 + E_{or} \cdot n_1 = E_{ot} \cdot n_2 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} t_p = \frac{E_{ot}}{E_{oi}} \rightarrow t_p = \frac{2 \cos \theta_t}{\cos \theta_t + \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} \cos \theta_i} \\ r_p = \frac{E_{or}}{E_{oi}} \rightarrow r_p = - \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{- коэф. пропускания} \\ \text{ко амплитуде} \end{array}$$

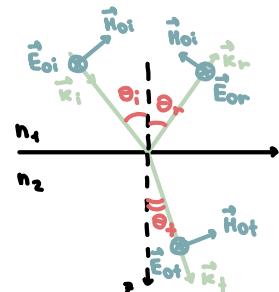
$$\begin{aligned} t_p &= \frac{E_{ot}}{E_{oi}} \rightarrow t_p = \frac{2 \cos \theta_t}{\cos \theta_t + \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} \cos \theta_i} && \text{- коэф. пропускания} \\ r_p &= \frac{E_{or}}{E_{oi}} \rightarrow r_p = - \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} && \text{- коэф. отражение} \end{aligned}$$

Если $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$, то коэффиц. отражения р-комп. -ти полимериз. света r_p заменяется.

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{\sin \theta_B}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_B)} = \tan \theta_B \rightarrow \tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}, \text{ где } \theta_B \text{ - угол Брюстера}$$

Если полимериз. плоск. волна падает на границу раздела под углом Брюстера, то отражённая волна будет полностью полимеризована в s-направлении, т.е. р-компонент не отразится

S-компонент:



$$\text{Границ. усн.-ие: } \vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$$

$$\vec{H}_{1\tau} = \vec{H}_{2\tau}$$

↓

$$E_{oi} + E_{or} = E_{ot}$$

$$H_{oi} \cos \theta_i - H_{or} \cos \theta_i = H_{ot} \cos \theta_t$$

Свойства плоск. волн:

$$\sqrt{\mu \epsilon_0} E_o = \sqrt{\mu M_0} H_0 \rightarrow H_0 = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{M_0}}$$

Тогда:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{oi} + E_{or} = E_{ot} \\ E_{oi} n_1 \cos \theta_i - E_{or} n_1 \cos \theta_i = E_{ot} n_2 \cos \theta_t \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{E_{ot}}{E_{oi}} \rightarrow t_s = \frac{2 \sin \theta_t \sin \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} && \text{- коэф. пропускания} \\ r_s &= \frac{E_{or}}{E_{oi}} \rightarrow r_s = - \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} && \text{- коэф. отражение} \end{aligned}$$

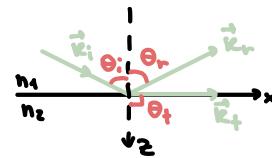
Две прозрачные среды ($n_1, n_2 \in \mathbb{R}$):

- на поб.-ной границе пока есть промежуточные волны, фаза падающей и промежуточной волн совпадают
- на поб.-ной границе разность фаз и/у падающей и отражённой волны зависит от параметризации поб. волны и показ.-щие преобразование при $n_2 > n_1 \quad \varphi_r - \varphi_i = \pm \pi$

БИЛЕТ ЗО

Оптические явления на границе раздела изотроп. диэлектриков. Формула Френеля, явление полного внутреннего отражения. Энергетические соотношения при проникновении и отражении света.

Явление полного внутреннего отражения:



При $n_2 < n_1$ существует угол полного внутрн. отражения θ_0 - наименьший угол падение, при кот. нет проникновенной волны во второй среде: $\sin \theta_0 = \frac{n_2}{n_1}$

На самом деле, волна всё же проходит во вторую среду - там она распространяется с затухающей амплитудой и не уносит с собой энергию. Каждый проникновение этой волны во вторую среду.

$$\left. \begin{aligned} E_t &= A_t e^{i(\omega t - k_t z)} = A_t e^{i(\omega t - k_t \cdot \sin \theta_t x - k_t \cos \theta_t z)} \\ \cos \theta_t &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \pm \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1^2}} \quad \left| \cos \theta_t = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_t - n_1^2}{n_1^2}} \right. \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} E_t &= A_t e^{-k_t \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_t - n_1^2}}{n_1} z} \cdot e^{i(\omega t - k_t \sin \theta_t x)} = A_t e^{-\frac{3}{2}z} \cdot e^{i(\omega t - k_t \sin \theta_t x)} \\ \text{При } \theta_t \geq \theta_0 \rightarrow \sin \theta_t \geq n &= \frac{n_2}{n_1} \end{aligned} \right\} \downarrow \Delta z = \frac{n}{k_t \sqrt{\sin^2 \theta_t - n_1^2}} - \text{шагами проникновения}$$

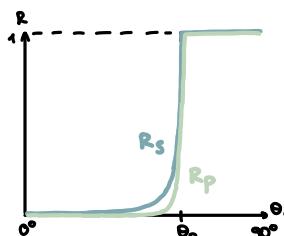
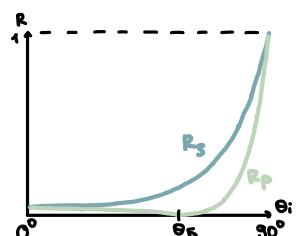
Энергетические соотношения при проникновении и отражении света:

Средний по времени вектор Умова-Пойнтинга равен произведению интенс.-ии волны на ед. вектор нормали: $\langle \vec{S} \rangle = \vec{I} \hat{n} = \epsilon_0 \epsilon_r \langle \vec{E} \rangle \hat{n} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu \mu_0}} \cdot \frac{1}{2} |A|^2 \hat{n}$

$$R = \left| \frac{S_{rn}}{S_{in}} \right| = \left| \frac{I_r \cdot \cos \theta_r}{I_i \cdot \cos \theta_i} \right| = \frac{|A_r|^2}{|A_i|^2} = |r|^2 \rightarrow R_p = |r_p|^2 \quad R_s = |r_s|^2 - \text{коэф. отражения по энергии}$$

$$T = \left| \frac{S_{tn}}{S_{in}} \right| = \left| \frac{I_t \cdot \cos \theta_t}{I_i \cdot \cos \theta_i} \right| = \frac{\sqrt{\epsilon_r} \cdot |A_t|^2 \cdot \cos \theta_t}{\sqrt{\epsilon_r} \cdot |A_i|^2 \cdot \cos \theta_i} = \frac{n_2}{n_1} \cdot |t|^2 \cdot \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \rightarrow T_p = \frac{n_2}{n_1} \cdot |t_p|^2 \cdot \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}; \quad T_s = \frac{n_2}{n_1} \cdot |t_s|^2 \cdot \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} - \text{коэф. пропускания по энергии}$$

По закону сохр.-и энергии: $S_{in} = S_{rn} + S_{tn} \rightarrow R + T = 1$



Распространение света в анизотропных средах. Материальные ур.-ные длии анизотропных сред. Головные диэлектрические оси кристалла, шавные длии. проницаемости. Свойства плюсовых волн в анизотроп. среде: ориентации посв. векторов, нормали и нут, фазовой и шуговой скоростей.

Оптические анизотропии - зависимость оптических свойств среды от направление

Диэлектрические свойства анизотроп. сред:

Длии анизотроп. сред: $P_i = \epsilon_0 \sum_j d_{ij} E_j$, где P_i - проекция \vec{P} на i -ю ось, а d_{ij} - тензор диэл. восприимчивости

Тогда: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \rightarrow D_i = \epsilon_0 E_i + \epsilon_0 \sum_j d_{ij} E_j \rightarrow D_i = \epsilon_0 \sum_j \epsilon_{ij} E_j$, где $\epsilon_{ij} = d_{ij} + d_{ji}$ - тензор диэл. прониц. длии, d_{ij} - симметрия Кронекера

Аналогично: $J_i = \sum_j \chi_{ij} H_j$ и $B_i = \mu_0 \sum_j M_{ij} H_j$, где χ_{ij} и M_{ij} - тензоры магнит. восприимч. и прониц. длии соответс.

Понятие закон изменения энергии э/и поля в произв. непаралл. шиной анизотроп. среде:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad | \cdot \vec{H} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad | \cdot \vec{E} \end{aligned} \rightarrow \vec{H} \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \text{rot } \vec{H} = -\vec{j} \vec{E} - (\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

$\frac{\partial w}{\partial t}$

Вместо, какое д.б. тензорные или. свойства ш/у векторами эл. поля и ш/у векторами маг. поля, чтобы в правой части ур.-е в скобках стояла скорость изм.-е обобщен. инт. энергии:

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E} \vec{D}}{2} + \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{D} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \vec{B} \right) \rightarrow \vec{E} \dot{\vec{D}} + \vec{H} \dot{\vec{B}} = \dot{\vec{E}} \vec{D} + \dot{\vec{H}} \vec{B}$$

Учитывая, что $D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j$, $B_i = \sum_j \mu_0 M_{ij} H_j$, получим: $\sum_{i,j} E_i \epsilon_{ij} E_j - \sum_{i,j} \vec{E}_j \epsilon_{ji} E_i + \sum_{i,j} H_i \mu_0 M_{ij} H_j - \sum_{i,j} \vec{H}_j \mu_0 M_{ji} H_i = 0$
 $\sum_{i,j} E_i \epsilon_{ij} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}) E_j + \sum_{i,j} H_i \mu_0 (\mu_0 M_{ij} - M_{ji}) H_j = 0$

↓
 $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ $M_{ij} = M_{ji}$ - тензоры д.б. симметричны

Тогда, воспользовавшись з. Диодуше-Ленга и тем, что $[\vec{E}, \vec{H}] = \vec{S}$, получаем: $\frac{\partial w}{\partial t} = -q - \text{div } \vec{S}$ - з.измен.е э/и энергии
подробнее в Билете 4

Т.к. тензор ϵ_{ij} симметричный, то длии среды можно найти оси, в кот. он диагонализируется - шавные длии. оси.

Тогда в системе коорд.-т этих осей:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \rightarrow D_I = \epsilon_0 \epsilon_I E_I$$

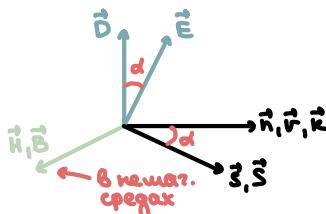
$I = x, y, z$ - шавные длии. оси
 ϵ_I - шавные длии. проницаемости среды
 $n_I = \sqrt{\epsilon_I}$ - шавные показ. длии преобразование

Свойства плюсовых волн в анизотроп. среде:

Пусть в среде отсутствуют свободн. заряды и токи провод.-и: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. Тогда ур.-е Максвелла:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{D} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{n} \vec{D} = 0 \\ \vec{n} \vec{B} = 0 \\ [\vec{n}, \vec{E}] = \nu \vec{B} \\ [\vec{n}, \vec{H}] = -\nu \vec{D} \end{cases}$$

Из этих ур.-ий и материальных
ур.-ий можно получить взаимное
расположение векторов в пр.-ве



д.уров анизотропии

Введём вектор под названием нут: $\vec{s} = \frac{\vec{S}}{|S|}$ - единичный вектор, указ. напр.-е переноса энергии в волне

Скорость световой волны по нормали - фазовая скорость: $v = v \cdot \vec{n} \rightarrow \vec{v} = \frac{\omega}{k} \vec{n}$

Вектор Умова-Койнинга: $\vec{S} = S \cdot \vec{s} = \frac{W}{d\sigma \cdot dt} \vec{s} = \frac{w dV}{d\sigma \cdot dt} \vec{s} = \frac{w \cdot d\sigma \cdot v_s d\sigma}{d\sigma \cdot dt} \vec{s} = w v_s \vec{s} = w \vec{v}_s \rightarrow \vec{v}_s = \frac{\vec{S}}{w}$ - шугевая скорость

Обобщ. плотность энергии: $w = \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} = \frac{\vec{E} [\vec{n}, \vec{H}]}{2v} + \frac{\vec{H} [\vec{n}, \vec{E}]}{2v} = \frac{\vec{n} [\vec{E}, \vec{H}]}{v} = \frac{\vec{n} \vec{s}}{v} \rightarrow v = \frac{\vec{n} \vec{s}}{w} = \vec{n} \vec{v}_s \rightarrow v = v_s \cos \alpha$

БИЛЕТ 32

Распространение света в анизотропных средах. Главные скорости. Ур-ние Френеля для фазовых скоростей. Свойства волн, распространяющихся в дисперсионных нормах.

$$\left\{ \begin{array}{l} [\vec{n}, \vec{E}] = v \vec{B} \\ [\vec{n}, \vec{n}] = -v \vec{D} \end{array} \right. \rightarrow v \vec{D} + \frac{[\vec{n}, [\vec{n}, \vec{E}]]}{v \mu_0} = 0 \rightarrow \mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{E}) - \vec{E} = 0 \quad (1)$$

Пусть напр.-ть эл. поля \vec{E} в з/и волне направлена вдоль шавной оси 2 кристалла $\rightarrow \vec{E} = \{0, 0, E_z\} \rightarrow \vec{D} = \{0, 0, \chi_0 \chi_2 E_z\}$

$$\text{Тогда } \mu_0 v_z^2 D_z - E_z = 0 \rightarrow v_z^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_0 \chi_2} = \frac{c^2}{n_z^2} \rightarrow v_z = \frac{c}{n_z} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}}$$

и аналогично: $v_x = \frac{c}{n_x} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}}$ $v_y = \frac{c}{n_y} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}}$

Главные скорости - фаз. скорости, дис. кот. \vec{E} напр. вдоль шав. оси

Запишем (1) в проекции на шав. ось: $\mu_0 v^2 D_I + n_I(\vec{n} \cdot \vec{E}) - E_I = 0 \rightarrow \chi_0 \mu_0 \chi_I v^2 E_I + n_I(\vec{n} \cdot \vec{E}) - E_I = 0 \rightarrow E_I \left(\frac{v^2}{v_I^2} - 1 \right) + n_I(\vec{n} \cdot \vec{E}) = 0$

Умножим на n_I , поделим на $\frac{v^2}{v_I^2} - 1$ и возводим сумму до I: $\sum_I \frac{n_I^2(\vec{n} \cdot \vec{E})}{v_I^2 - v^2} + \sum_I E_I n_I = 0 \rightarrow \sum_I \frac{n_I^2}{v_I^2 - v^2} = 0$ - ур-ние Френеля для фаз. скоростей

Это ур-ние имеет только два корня: v^2 и v''^2 . Т.е. в дисперсионной среде могут распространяться только две волны с двумя скоростями. При этом значение этих скоростей неизвестно даже и сред. шав. скоростями и ш/у них. и сред. шав. скоростями.

$$\text{Домножим (1) скалярно на } \vec{D}: \mu_0 v^2 D^2 - \vec{E} \cdot \vec{D} = 0 \rightarrow v^2 = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{\mu_0 D^2} = \frac{\sum_I E_I D_I}{\mu_0 D^2} \rightarrow v^2 = \sum_I v_I^2 \frac{D_I^2}{D^2}$$

Раз. скорость однозначно опред. се шав. скоростями среды и ориентацией эл. индукции, т.е. $v = v\left(\frac{D}{D}\right)$

Запишем (1) для v' и v'' :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 v'^2 \vec{D}' + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{E}') - \vec{E}' = 0 \\ \mu_0 v''^2 \vec{D}'' + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{E}'') - \vec{E}'' = 0 \end{array} \right| \cdot \vec{D}'' \rightarrow \mu_0 \vec{D}' \vec{D}'' (v'^2 - v''^2) - \vec{E}' \vec{D}'' + \vec{E}'' \vec{D}' = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \mu_0 \vec{D}' \vec{D}'' (v'^2 - v''^2) = 0 \rightarrow \vec{D}' \vec{D}'' = 0 \\ \vec{E}' \vec{D}'' = \sum_I E'_I \chi_0 \chi_I E''_I = \vec{E}'' \vec{D}' \end{array} \right\}$$

Ориентации эл. индукции двух волн, кот. расп. се в анизотр. среде в дисперсионных нормах, всегда взаимно перп. нн

Распространение света в анизотропных средах. Эллипсоид волни. периметр, или эллипсоид фаз. скоростей. (оптика индикатриса)

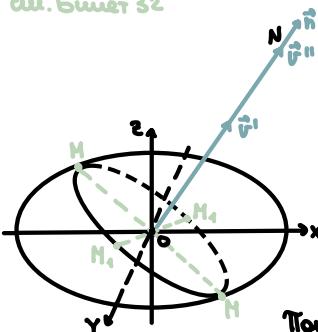
$$v^2 = \sum_i v_i^2 \frac{D_i^2}{D^2} \rightarrow \sum_i \frac{v_i^2}{v^2} \cdot \frac{D_i^2}{D^2} = 1 \rightarrow \text{замена переменных: } I = \frac{1}{v} \cdot \frac{D_i}{D} \rightarrow \left(\frac{x}{1/v_x} \right)^2 + \left(\frac{y}{1/v_y} \right)^2 + \left(\frac{z}{1/v_z} \right)^2 = 1$$

см. Билет 32

эллипсоид фаз. скоростей

$$\text{т.к. } \frac{1}{v_z} = \frac{\sqrt{c}}{c}$$

см. Билет 32



Получаем этого эллипсоида ради квадр. корню из шав. дин. пропицаемостей, делённик на скорость света, и совпадают по направлению с главными дин. осами.

Если провести сечение эллипса, проходя через т.О, перп.ко произвольно выбранному направлению мориации, то оно будет предст. собой эллипс, направление шав. осей которого указывает направления колебаний векторов \vec{v}' и \vec{v}'' .

Показатель преломления света, распростран.-ся в этом направлении равен длине полуоси OM или OM', а фаз. скорости v' и v'' обратно пропорц. к длины полуосей OM и OM', соотв.-но.

БИЛЕТ 34

Распространение света в анизотропных средах. Гибкие скорости. Ур.-ние Френеля для поглощенных скоростей. Свойства волн, распространяющихся в диф. напр.-ии шуг.

$$\begin{cases} [\vec{n}, \vec{E}] = v \vec{B} \\ [\vec{n}, \vec{H}] = -v \vec{D} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} [\vec{s}, [\vec{n}, \vec{E}]] = v [\vec{s}, \vec{B}] \\ [\vec{s}, [\vec{n}, \vec{H}]] = -v [\vec{s}, \vec{D}] \end{cases} \text{ (1)} \rightarrow \begin{cases} \vec{n}(\vec{s}\vec{E}) - \vec{E}(\vec{s}\vec{n}) = -\vec{E} \cdot \cos\alpha = v [\vec{s}, \vec{B}] \\ \vec{n}(\vec{s}\vec{H}) - \vec{H}(\vec{s}\vec{n}) = -\vec{H} \cdot \cos\alpha = -v [\vec{s}, \vec{D}] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{E} = -v_s [\vec{s}, \vec{B}] \\ \vec{H} = v_s [\vec{s}, \vec{D}] \end{cases} \rightarrow \vec{E} = -\mu_0 v_s^2 [\vec{s}, [\vec{s}, \vec{D}]]$$

В рез.-не получим: $\frac{1}{\mu_0 v_s^2} \vec{E} + \vec{s}(\vec{s}\vec{D}) - \vec{D} = 0$. По аналогии с фаз. скоростями также получаем: $\frac{\vec{s}}{2} \frac{s_x^2 v_z^2}{v_x^2 - v_z^2} = 0$ - ур.-ние Френеля для погл. шуг. скоростей

Аналогично выраж.-ю для фаз. скоростей: $\frac{1}{v_s^2} = \sum_{\pm} \frac{1}{v_{\pm}^2} \cdot \frac{E_{\pm}^2}{E^2}$ Арг. скорость зависят от ориентации \vec{E} относительно шуг. дин. осей и шуг. скоростей среды: $v_s = v_s(\frac{\vec{E}}{E})$

Ур.-ие Френеля есть только две корни: v_s' и v_s'' . Это значит, что в диф. напр.-ии шуг. могут распространяться только две волны с поглощенным скоростями v_s' и v_s'' , векторы \vec{E}' и \vec{E}'' которых перп. на.

Все выводы после (1) в точности повторяют выводы в Билете 32, если сделать замены: $\vec{n} \rightarrow \vec{s}$, $\vec{B} \leftrightarrow \vec{E}$, $\mu_0 v^2 \rightarrow \frac{1}{\mu_0 v_s^2}$, $\mu_0 v_{\pm}^2 \rightarrow \frac{1}{\mu_0 v_{\pm}^2}$

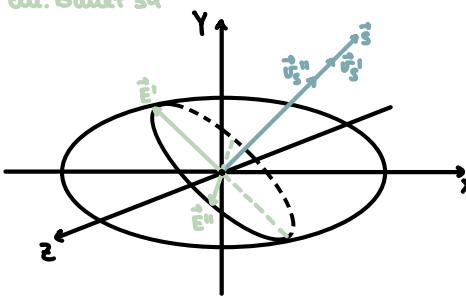
БИЛЕТ 35

Эллипсоид шуплерских скоростей. Оптическая ось. Лучевые поверхности и её сечение. Классификация анизотроп. сред.

$$\frac{1}{v_x^2} = \sum \frac{1}{v_i^2} \cdot \frac{E_i^2}{E^2} \rightarrow \sum \frac{v_x^2}{v_i^2} \cdot \frac{E_i^2}{E^2} = 1 \rightarrow \text{замена переменных: } I = v_s \frac{E_i}{E} \rightarrow \left(\frac{x}{v_x} \right)^2 + \left(\frac{y}{v_y} \right)^2 + \left(\frac{z}{v_z} \right)^2 = 1$$

см. билет 34

Эллипсоид шупл. скоростей



Понуходи этого эллипса равны шавные скорости среды и соправлены с шав. дин. осами X, Y и Z.

В сечении шуп. эллипса, перп.-ной шуп. S, образ.-се эллипс, вдоль шав. осей кого-рого направления E' и E'', а его шавные понуходи равны модулем соотв. шуплерских скоростей v_x' и v_y''

Оптическая ось - направление в среде, перпендикулярное плоскости кругового сечения эллипса шуп. скоростей.

Всем шупам вдоль оптич. оси соотв.-ет одна и та же шуплерская скорость, а векторы E могут меняться в шоб. напр.-ми, перп.-ной шуп.

Классификация анизотроп. сред:

• $v_x \neq v_y \neq v_z$ - двухосный кристалл (среда)

• $v_x = v_y \neq v_z$ - одноосный кристалл (среда) - эллипсоид шуп. скоростей превращ.-се в эллипс вращение, кот. имеет только одну оптич. ось.

• $v_x = v_y = v_z$ - изотропный кристалл (среда)

Лучевые поверхности и её сечение:

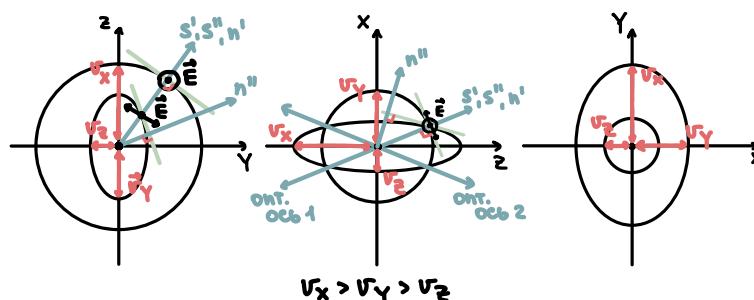
Вспомнишися ур.-ии Френеля для шуп. скоростей: $\sum \frac{S_x^2 v_x^2}{v_i^2 - v_s^2} = 0$

Зададим коорд.-ты точки в шав. осах, сделав замену переменных: $I = v_s S_x$, $\vec{R} = v_s \vec{S}$, $|\vec{R}| = R = v_s$

$$\sum \frac{I^2 v_x^2}{v_i^2 - R^2} = 0 \quad \text{- уравнение шуп. пов.-ти}$$

Лучевые поверхности - поверхность, до кот. доходит свет. возбуждение из дан. точки среды да фикс. интервалом времени.

Фронт волны для каждой точки шуп. пов.-ти - плоскость, касат.-ная к шуп. пов.-ти в этой точке. Т.е. шуп. пов.-ть - пов.-ть равной фазы для волны, распростран.-се во всех напр.-ях и её можно считать их отображающей в дан. момент времени.



\vec{n} - нормаль - напр.-ние движ.-я фронта волны

\vec{s} - шуп - напр.-ние переноса энергии

К самому первому рисунку:

Если волна расп.-са вдоль оси Y, то возможна комбинация вдоль осей X и Z \rightarrow отмечаем на оси Y скорости $v_x > v_z$

Если волна расп.-са вдоль оси Z, то возможна комбинация вдоль осей X и Y \rightarrow отмечаем на оси Z скорости $v_x > v_y$

На поверх.-ни, соотв.-щей v_x E' изменяется вдоль оси X, а на другой пов.-ти - в на.-ти YZ потому что эллипс с комбинации v_x и v_y

Можно видеть, что $\alpha' = \angle(\vec{s}, \vec{n}') = 0$, а $\alpha'' = \angle(\vec{s}, \vec{n}'') \neq 0$

Аналогично для двух других рисунков

Оптические свойства односстных кристаллов. Отрицательные и положительные кристаллы, склонение лучевых поверхностей. Гибкая плоскость, обыкновенный и необыкновенный шубы. Взаимное расположение фаз. и шуб. скоростей. Двойное лучепреломление и полимергации света. Метод построения Гюйгенса.

Односстный кристалл - кристалл, для кот. две главные скорости распространения волн равны: $v_0 = v_x = v_y \neq v_z = v_e$

Для односстного кристалла:

- одна оптическая ось, совпадающая с осью вращения - главной дисперсионной осью, для кот. дисперсия пропорциональна отдельным
- эллипсоид шуб. скоростей - эллипсоид вращения
- лучевые поверхности - совокупность сфер и эллипсоидов, внес. друг в друга

Гибкая плоскость - плоскость, образованная шубами и оптической осью

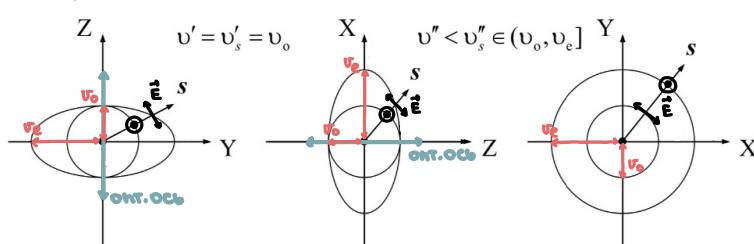
Обыкновенный шуб - шуба, вектор напряжения эллипса, по оси которого перпендикулярен главной плоскости - ему соответствует шуба новая в виде сферы.

Для обыкновенного шуба фаз. и шуб. скорости совпадают: $\vec{v}' = \vec{v}_s = v_0 \hat{s}$ ($\hat{n}_0 = \hat{s}_0 = \hat{s}$, $d_0 = 0$)

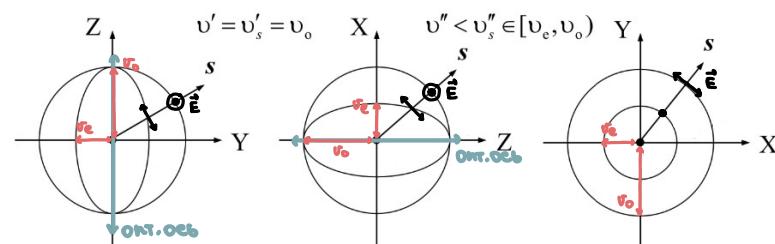
Необыкновенный шуб - шуба, вектор напряжения эллипса, по оси которого нелиней в главной плоскости - ему соответствует шуба новая в виде эллипсоида вращения.

Для необыкновенного шуба фаз. и шуб. скорости не совпадают: $v'' < v_s'' \in (v_0, v_e)$ или $v'' > v_s'' \in [v_e, v_0]$ ($\hat{n}_e \neq \hat{s}_e = \hat{s}$, $d_e \neq 0$)

Отрицательный кристалл: $v_0 = v_x = v_y < v_z = v_e$ иначе ск. именит



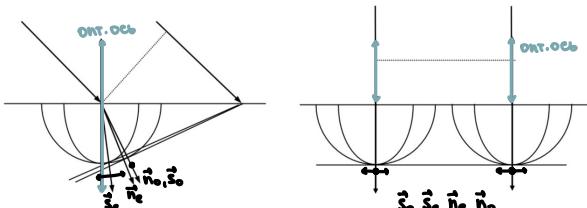
Положительный кристалл: $v_0 = v_x = v_y > v_z = v_e$ иначе ск. именит



Двойное лучепреломление - явление возникновения двух преломлений, линейно и взаимно перпендикулярных к плоским волнам при падении на новую анизотроп. среду из плоской произв. по нормали волны.

Рассмотрим характерные случаи построения Гюйгенса при переходе света из изотроп. среды в анизотропную: **для односстного кристалла**.

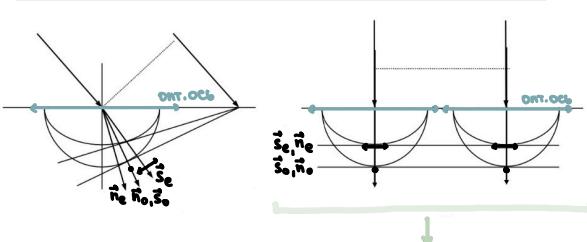
• Оптическая ось перпендикулярна новой плоскости кристалла:



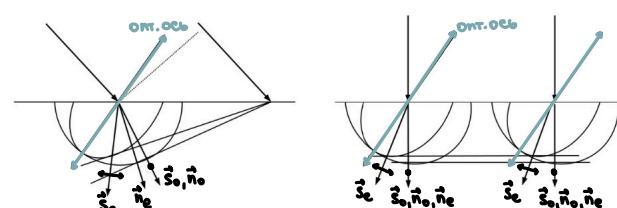
Когда световой шуба уже достиг поверхности, правый шуба еще находится на некот. расстоянии от этой поверхности. За это время, пока он будет идти до новой плоскости, вокруг точки входа нового шуба возникнет шуба новой поверхности.

Восстановите касательную к обеим новым плоским из точек входа правого шуба. Напр. \vec{s}_0 - точка касания с новой плоскостью, \vec{s}_e - с эллипсоидом. Кормушки не направлены перпендикулярно этим касательным.

• Оптическая ось параллельна новой плоскости кристалла:



• Оптическая ось под углом к новой плоскости кристалла:



Закон Этьена-Луи-Майяна:

$$E_0 = E \sin \theta \rightarrow I_0 = I \sin^2 \theta$$

$$E_e = E \cos \theta \rightarrow I_e = I \cos^2 \theta$$

θ - угол между направлением Е и нормалью к новой плоскости и оптической осью

Полемизационные приборы. Понижение и анализ полемиз. света - явление дихроизма, полемоид и полемизод. призмы.

Управление полемизацией света, оптич. пластинки "½" и "¼"

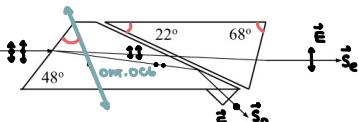
Дихроизм - зависимость поглощения света от направления его полемизации.

Полемоид - дихроичные пластинки, при прокомпенсии кот. один из лучей в раз.-не полемизированные сильно ослабляется, а другой выходит идентично полемизованными. турмалин, герапатит

Полемизодор/анализатор - полемоид, использ. для понижения/анализа полемиз. света.

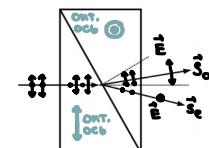
Полемизационные призмы - комбинации кристаллов, оставшающие один полемиз. луч на выходе

- Призма Никола: две призмы из исландского шпата CaSiO_3 с конусами бензодиоксида мышьяка. Угол наклона подбирается такой, чтобы для обычн. луча наблюдалось полное внутр. отражение.



Двухконтролирующая призма - комбинация кристаллов, оставшающая оба полемиз. луча на выходе

- Призма Уильсона-Хайда-Воннастона: два кристалла из исланд. шпата с перп. орт. оси.

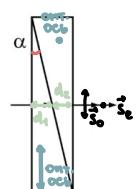


Компенсатор - пластина, вдоль кот. непрерывно меняется разность фаз выход. лучей

Компенсаторы использ.-ся для анализа эллиптических полемиз. света, т.к. они позволяют узкать разность фаз двух компонент полемизаций, путём её компенсации.

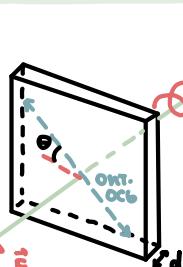
- Компенсатор Бабине: такие кварц. кристаллы с узкой дисперсией и перп. орт. осью. Разность фаз возникает из-за разности толщин: луч, обыкновенный свет, становится необыкн. справа и наоборот

$$\Delta = (n_e d_1 + n_o d_2) - (n_o d_1 + n_e d_2) = (n_e - n_o)(d_1 - d_2) \rightarrow \Delta\varphi = K \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_e - n_o)(d_1 - d_2)$$



Оптические пластинки - пластины из анидотрон. кристаллов, внос.-е зад. оптич. разность хода для обычн. и необыкн. лучей

• Четвертьволновая пластина:

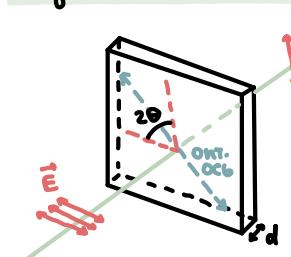


Толщина четвертьволн. пластики такова, что разность хода составляет $\lambda/4$:

$$\Delta = (n_e - n_o)d = \frac{\lambda_0}{4} \rightarrow \Delta\varphi = K_0 \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_e - n_o)d = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, идентично полемиз. свет преобразуется в свет с круговой ($\Theta=45^\circ$) или эллиптической ($\Theta \neq 45^\circ$) полемизацией. Если же $\Theta=90^\circ$, то напр.-кие или. полемизации меняются на перп.-ные.

• Полуволновая пластина:



Толщина полуволн. пластики такова, что разность хода составляет $\lambda/2$:

$$\Delta = (n_e - n_o)d = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \Delta\varphi = K_0 \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o)d = \pi$$

Таким образом, напр.-кие полемизации или. полемиз. света поворач.-ся на 2Θ или меняются напр.-кие вращения круговой (эллиптич.) полемизаций.

БИЛЕТ 38

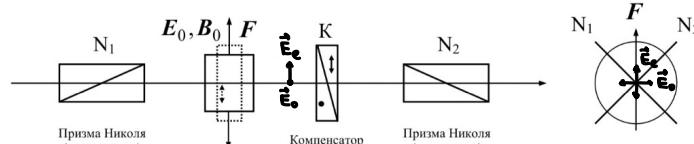
Кавердинные анидотропные оптические свойства. Фотоупругость. Эффекты Покельса и Керра. Движение Коттон-Мутона.

Механо-/электро-/магнито-оптические эффекты - изменение оптических констант - к среде под внешн. мех./эл./маг. воздействием

Для наблюдения этих эффектов образцы помещают между двумя скрещенными никелевыми, которые в случае отсутствия облучения или эффекта не пропускают свет. Такие же образцы используют компенсатор.

Воздействие	Эффект	Тип эффекта
Механическое	Фотоупругость	Линейный (поперечный)
Электрическое	Покельса	Линейный (поперечный)
	Керра	Квадратичный (поперечный)
Магнитное	Коттон-Мутона	Квадратичный (поперечный)
	Зеемана	Расщепление (прод. и попереч.)
	Фарадея	Линейный (продольный)

• **Фотоупругость** - возникновение оптической анидотропии под действием механических. Известны смертвением давлени-тии динам. принципа Ф-ва от деформации и проявляется в виде двойного изгибающим и дихроизма.



Мера возникшей оптической анидотропии - разность между показ.-числами преоценивания для неоднин. $n_e = (\vec{E}_e \parallel \vec{F})$ и однин. $n_o = (\vec{E}_o \perp \vec{F})$ волн:

$$n_e - n_o = \Delta n(\omega) = \delta(\omega) \frac{F}{S} = \delta(\omega) \sigma$$

$$\Delta \Psi(\omega) = k_0(\omega) \cdot \Delta n(\omega) \cdot c = \frac{2\pi \delta(\omega) \sigma}{\lambda_0(\omega)}$$

Т.о., бегущий свет окрашивается пластины из-за завис-тии $\Delta \Psi$ от ω и распределение мех. напряжений внутри неё.

• **Эффект Покельса** - явление возникновения двойного изгибающего при наложении внешн. эл. поля. Возникает из-за анигармонизма движения свобод. зарядов в кристалле. Кабинет. -се только в кристаллах без центра симметрии.

Классич. электрон. теория + модель анигарм. осцил-ра: $\vec{E}_0 \parallel \vec{E}(t), E_0 \gg E(t) + (-kx - \beta x^2)$

$$E_0 \rightarrow \Delta \omega_0^2 = \frac{2pq}{\omega_0^2 m^2} E_0 \rightarrow n_e - n_o = \Delta n = \Delta \eta = \frac{\omega_n^2}{2n(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \cdot \frac{2pq}{\omega_0^2 m^2} = \delta(\omega) \cdot E_0$$

Т.о., без внешн. эл. поля никели не пропускают свет, а при его наложении начинают пропускать. получается модулятор света

• **Эффект Керра** - явление изменения показ.-числа преоценивания пропорц.-но квадрату напр.ти прилож.-го внешн. поля. Возникает из-за комбинации и переориентации ионов - эффект усиливается при увеличении конц.-ции.

$$n_e - n_o = \Delta n(\omega) = \delta(\omega) \cdot E_0^2 \rightarrow \Delta \Psi(\omega) = \frac{2\pi E_0^2 e \delta(\omega)}{\lambda_0(\omega)}$$

$$\frac{\delta(\omega)}{\lambda_0(\omega)} = B(\omega) - \text{постоянная Керра}$$

$B > 0$ для ненеодн. ионов

$B < 0$, $B > 0$ для одн. ионов

Т.е. тоже самое, что и эффект Покельса, но квадратич. зависимость и наблюдалась в центрально-симметричных кристаллах.

Вместо $-\beta x^2$ наблюдалась $-\beta x^3$

• **Движение Коттон-Мутона** - возникает в попереч. маг. полях из-за переориентации ионов, обладающих маг. моментами

$$n_e - n_o = \Delta n(\omega) = \delta(\omega) B_0^2 \rightarrow \Delta \Psi(\omega) = \frac{\delta(\omega) 2\pi B_0^2 e}{\lambda_0(\omega)}$$

То же, что и эффект Керра для одн. ионов

Излучение света. Классические осцилляторные модели атома. Излучение тончного эн. диполя. Оценка времени затухания. Естественная форма и ширина импульса излучения.

Классические осцилляторные модели атома:

Предположим, что в атоме есть один эл. заряд. Тогда эл. дип. момент: $\vec{p}(t) = q \vec{x}(t)$, где q -заряд эл.на, $\vec{x}(t)$ -его полож.-е отк.-но центра

Рассмотрим электрон как затух. гарм. осциллятор: $m\ddot{x} = -k\dot{x} - \gamma\ddot{x}$, где $-k\dot{x}$ -издат.силы, $-\gamma\ddot{x}$ -сила трения, введ. для описания излуч.я света

Тогда: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\ddot{x} = 0$, где $\delta = \gamma/2m$ -коэф. радиц. затухания, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ -собств. частота колебл.-й эл.-на в атоме

Решая ур.-ние двин.-е при $\delta < \omega_0$, получим закон движения: $\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0 [-\delta e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \omega e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)]$$

Тогда, усреднив эти выражения за период колебл.-й T : $\begin{cases} \langle x^2(t) \rangle_T = \langle x_0^2 \cdot e^{-2\delta t} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \rangle_T \approx \frac{1}{2} x_0^2 e^{-2\delta t} \\ \langle \dot{x}^2(t) \rangle_T \approx \frac{1}{2} x_0^2 e^{-2\delta t} (\delta^2 + \omega^2) = \frac{1}{2} x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t} \end{cases}$

Таким образом: $\langle W_k \rangle_T = \langle \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \rangle_T = \frac{1}{4} m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t} \rightarrow \langle W_k \rangle_T = \frac{1}{4} k x_0^2 e^{-2\delta t}$ -кинет. энергия атом. осциллятора

$$\langle W_p \rangle_T = \langle \frac{1}{2} k x^2 \rangle_T \rightarrow \langle W_p \rangle_T = \frac{1}{4} k x_0^2 e^{-2\delta t} \text{ - потенц. энергия атом. осциллятора}$$

Тогда: $\langle W \rangle_T = \langle W_k \rangle_T + \langle W_p \rangle_T = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\delta t} = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t} = W_0 e^{-2\delta t} \rightarrow \langle W \rangle_T = W_0 e^{-\frac{2\delta t}{\tau}}$ -полная энергия атом. осциллятора

т.е. полная энергия осциллятора со временем экспоненциал.-но затухает с коэффи-ом затухания 2δ .

Введен времена затухания атом. осциллятора: $\tau = \frac{1}{\delta}$ - время, за кот. амплитуда колебаний уменьш.-ся в e раз. При этом врем. уменьш.-е полн. энергии осциллятора в e раз - врем. импульса атома в возбужд. состоянии - равно: $\Delta t = \frac{\pi}{\omega}$

$$\text{Мощность рассеяния: } J = -\frac{d\langle W \rangle}{dt} = 2\delta \frac{m \omega_0^2 x_0^2}{2} e^{-2\delta t} \quad \left. \begin{array}{l} \tau = \frac{1}{\delta} \\ \tau = \frac{12 \pi \epsilon_0 c^3 m}{q^2 \omega_0^2} \end{array} \right\}$$

С др. стороны: $J \approx \frac{\omega_0^2 q^2 x_0^2 e^{-2\delta t}}{6\pi \epsilon_0 c^3 \cdot 2}$ см. Билет 40

Естественная форма и ширина импульса излучения:

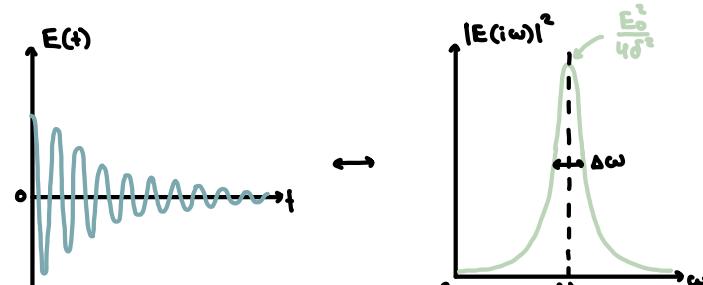
учит, что $\delta \sim 10^8 \text{ с}^{-1}$, а $\omega_0 \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$

В соотв.-ии с законом двин.-е атом. осциллятора: $\vec{p}(t) = \vec{x}(t) \rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \rightarrow \vec{p}(t) \approx -\omega_0 \vec{p}_0 e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

Напрям. -ть эл. поля излучающей осцилляторами $E(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} [\vec{p}, [\vec{r}, \vec{p}]] \rightarrow \vec{E}_0(t) \approx \vec{E}_0 e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

Как было показано, в случае свободогатух. колебл.-й спектр. плотность: $|E(i\omega)|^2 = \left(\frac{E_0}{2\delta} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta} \right)^2}$

$L \left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta} \right)$ - ф. -шире Лоренца



Ширина на половине высоты: $\Delta\omega = 2\delta = \frac{2}{\tau} = \frac{1}{\Delta t} \rightarrow \Delta\omega \cdot \Delta t = 1$

БИЛЕТ ЧО

Рассеяние света. Рассеяние толстыми эн. диполями. Индикатриса рассеяния, пошеридована рассеянного света. Закон Рэнона. Понятие о шонекулине. рассеянии света в газах и жидкостях. Рассеяние Ми.

частич. пошеридование, измнен. -е интенс. -ти, частоты, пошер.-ции

Рассеяние света - возникновение свет. потоков на оптических прозр. неоднородностях среды.

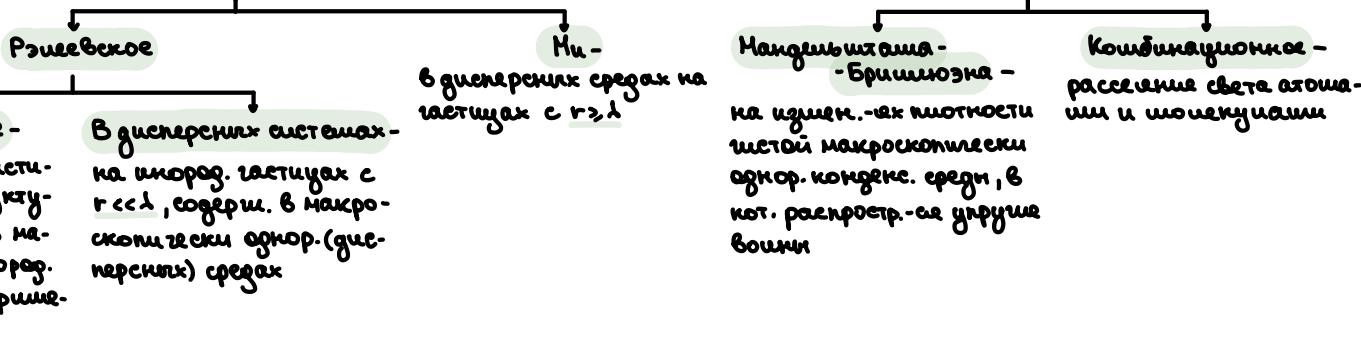
Оптич. неоднородности - включение непрозр. частиц и физикохим. акт. свойств. среди β, γ, E, P

Процесс рассеяния состоит в замещении шонекулии или частицы энергией у распред.-ся волны и последующем излучении всей или части этой энергии.



Упругое - частота рассеянного света ω_p равна частоте пад. света $\omega_p = \omega_p$
безр.-ся фаз. соотн.-кии и/у пад. и расс. волниами - **рассеяние когерентное**

Некогерентное - $\omega_p \neq \omega_p$, некогерентное
(стоксово: $\omega_p < \omega_p$, антистоксово: $\omega_p > \omega_p$)



Дисперсные системы - системы, состоящие из множества мелких частиц, распределенных в однород. (дисперсной) среде:

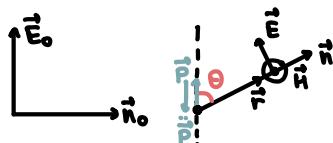
- тонкодисперсные (высокодисперсные, комодисперсные) - $10^9 \leq r \leq 10^7$ м, интенс. броуновское движение частиц **шумоголь, аэрозоль**
- 粗одисперсные - $r \geq 10^7$ м - суспензии, эмульсии, пары, туманы, пыль, дым, пар

Индикатриса рассеяния - простр. диаграмма завис.-ти интенс.-ти рассеянного света от завис. угла рассеяния на дист. -ии от рассеивателя: $I(r, \Omega)$

Полное сечение рассеяния - отношение полн. потока энергии рассеяния света к интенс. -ти пад. излучения:

$$\sigma = \frac{I}{I_0} = \int_0^{4\pi} \frac{I(r, \Omega) r^2 d\Omega}{I_0} = \int_0^{4\pi} d\sigma, \text{ где } d\sigma - \text{дифференциальное сечение рассеяния}$$

Излучение элементарного рассеивателя:



Пусть исход. волна в вакууме или пошеридована. Расс. некую систему зарядов, кот. не обладают эн. дип. моментом до воздействия эн. поля волны. При воздействии на это поля возникает эн. дип. момент $\vec{p} = \vec{e}_0 \times \vec{E}_0$, направленный как напр. эн. поля \vec{E}_0 . Пусть $r \ll \lambda$

Рассмотрим точку, задаваемую векторами \vec{r} относительно рассеивателя. Ед. вектор \hat{n} указ. напр.-ии расс. волны. Пусть $r \gg \lambda$

из ур.-й Максвелла: $\vec{H}(t, \vec{r}) = -\frac{1}{4\pi c^2 r} [\vec{n}, \vec{p}(t - \frac{r}{c})]$ $\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi c^2 r} [\vec{n}, [\vec{n}, \vec{p}(t - \frac{r}{c})]]$
 $[\vec{n}, \vec{p}] = -v \vec{D} \rightarrow \vec{D} = -\frac{1}{c} [\vec{n}, \vec{p}] = \chi_0 \vec{E}$

Пусть расс. волна гармоническая. Тогда: $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos(\omega t)$ $\rightarrow \vec{p} = -\omega_0 \vec{p}_0 \cos(\omega t) = -\omega_0 \vec{p} \rightarrow \vec{p} \perp \vec{n}$

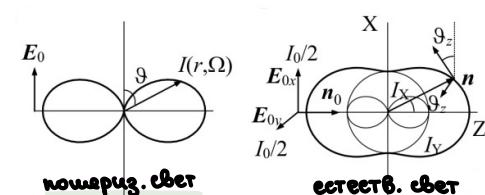
Понятно, что \vec{n} напр.-на „на нас“, $\vec{E} \perp \vec{n}$, $\vec{E} \perp \vec{p} \rightarrow \vec{E}$ всегда лежит в пл.-ти векторов \vec{E}_0 и \vec{n}

Тогда в проекции на плоскость: $E(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi c^2 r} \vec{p}(t) \sin \theta \rightarrow I(r) = \frac{1}{(4\pi c^2 r)^2} \cdot \langle \vec{p}^2 \rangle \cdot \sin^2 \theta \rightarrow I(r) = \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2} \cdot \langle p^2 \rangle \cdot \sin^2 \theta$ - закон Рэнона

Т.о., индикатриса рассеяния эн. поля пад. или пошерид. волны аксиально симметрична вдоль напр.-ии напр.-ти \vec{E}_0

Если пад. свет естественный: $I(\vec{n}) = I_x(\theta_x) + I_y(\theta_y) \sim \frac{\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y}{2} = \frac{1 + \cos^2 \theta_x}{2} = I(\theta_x)$

Т.е. индикатриса рассеяния естеств. света аксиально симм.-на вдоль напр.-ии пад. волны \vec{n}_0



Из вида индикатрисы рассеяния для естеств. света можно сделать вывод о том, что естеств. свет, расс. под некот. умом к наклону пучку, становится частично поляризованным на рисунке видно, что при каких-то углах I_0 и I_k нет

Степень поляризации: $P(\theta_2) = \frac{\sin^2 \theta_2}{1 + \cos^2 \theta_2}$, где $\theta_2 = \angle(\vec{n}, \vec{n}_0)$

Пол. поток энергии расс. волни: $J = \iint I(\theta) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I(\theta) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\omega^4 P^2 r^2}{(4\pi \epsilon_0 c^2 r)^2} \sin^3 \theta d\varphi d\theta = \frac{\omega^4 P^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$

Интенс. волни бываю найдена с точностью до констант $\epsilon_0 \epsilon_0 c = \epsilon_0 c$, поэтому: $J = \frac{\omega^4 P^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$

Монокроматическое рассеяние: резонансное (упругое, $r \ll \lambda$) рассеяние света на телах статистически нейтральные. физичущиеся от. св. в макроскопически однород. среды, не содержит пришлой.

Основные положения:

- размеры оптических неоднородностей шары по сравн. с длиной волни света
- положение на оптических неоднородностях не давит от положений др. областей
- взаимодействием оптических неоднородностей можно пренебречь

Основные принципы статистич. телес. физичущий от. св. в средах - физичущий потоки среды. При этом будет физичущийся и физичущий поток $\Phi = \Phi(g, T)$: $\Delta \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial g}\right)_T \Delta g + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_g \Delta T \approx \left(\frac{\partial \Phi}{\partial g}\right)_T \Delta g$

Динамика и потоки газов: $I = I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial g}\right)_T^2 V \beta_T k T \sin^2 \theta$ - формула Эйнштейна $\beta_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ - изотерм. сжим. -

Динамика газов: $I = I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2} \cdot 4(n-1)^2 \frac{V}{N} \sin^2 \theta$ - формула Рэлея n -показ. пропорциональность N -сред. конц. частиц молекул

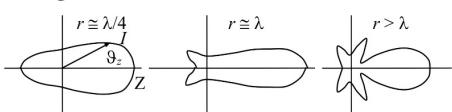
Особенности молек. рассеяния:

- Индикатриса рассеяния:** мин. поляриз. свет - $I(\alpha) \sim \sin^2 \theta$, естеств. свет - $I(\alpha) \sim \frac{1 + \cos^2 \theta_2}{2}$ как у эллип. рассеяния
- Поляризация расс. света:** изотроп. молекулы - $P(\theta_2) = \frac{\sin^2 \theta_2}{1 + \cos^2 \theta_2}$, анизотроп. молекулы - деполяризация при $\theta_2 = \pi/2$
- Закон Рэлея:** $I \sim \omega^4$ как у эллип. рассеяния
- Критическое определение -** явление возраст. - я интенс. - я расс. света волни крит. темп. при из-за возраст. - я физичущий и соответственно возраст. - я β_T
- Селективное по частоте рассеяние -** интенс. - я расс. света возрастает волни собств. частот эллип. рассеяния $\omega \sim \omega_0$, т.к. $I \sim (n-1)^2$

Рассеяние Ми: упругое рассеяние на содержащемся в макроскопически однород. среде макроскопических частиц с макр. размерами $r \gg \lambda$

Особенности рассеяния Ми:

- Индикатриса рассеяния:**



- Рассеянный свет частично поляризован** даже при неполяриз. под. свете.
- Сильное затухание интенс. - я расс. света** от длины волни.

Завис. - я $P(\theta_2)$ наименее симметрична

• **Периодический характер затухания интенс. - я по умру и по откосу $r/\lambda \rightarrow$ ореол, радиус, замиг и т.п.**

Процесс рассеяния Ми: большая облачка, непрозрачность тумана, кедо серает к горизонту

Основные принципы отражения Ми от рассеяния Рэлея:

- **Влияние перенесения первич. волни эллип. рассеяниями одной частицы**
- **различие в фазах излучения эллип. рассеяниями из-за расс. - я между ними и завис. - я этих фаз от напр. - я расс. - я**

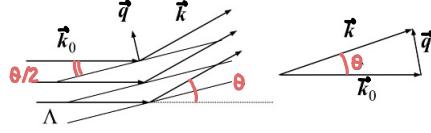
БИЛЕТ ЧI

Непрерывное рассеяние света. Рассеяние Рамана (комбинационное) и Мандельштама-Брилиозна.

и думали он погиб...

Рассеяние Мандельштама-Брилиозна: непрерывное рассеяние на изменении плотности толстой макроскопически однородной среды, в кот. распред.-ие упругие волны.

Коррелированные функции упругих плотности можно рассмотреть как совокупность упругих волн, распределенных в среде во всех направлениях и со всеми возможными частотами ω и фазами. Этими волнами соответствуют гармоническое распределение оптической плотности среди волнистого света в времени. В результате возникает дифракция света на упругих волнах - рассеяние с изменением частоты дифракционного света.



Пусть в среде распределены монохроматические волны с частотой ω_0 и волновыми векторами k_0 :

$$E_0 = E_0 \cos(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})$$

Эта волна встречает упругую волну с частотой ω и волновыми векторами \vec{q} :

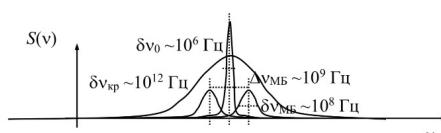
$$\delta E = \delta E_0 \cos(\omega t + \vec{q} \cdot \vec{r})$$

Тогда максимум дифракционного света будет виден в направлении, отвечающем углу Брэгга-Вульфа: $2\Lambda \sin \frac{\theta}{2} = \lambda_0 \rightarrow 2k_0 \sin \frac{\theta}{2} = q$

Это верно при условии вектора синхронизма: $k = \omega_0 / \lambda \approx k_0 = \omega_0 / \lambda_0 \gg q = \omega / \lambda$

Тогда: $\frac{\omega}{\omega_0} = 2 \frac{V}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2}$ - формула Мандельштама-Брилиозна $\omega_0 = k_0 V$, $\lambda = V/U$

Амплитуда рассеяния света, дифрагированного на упругих волнах на нек. угле θ : $E(t) \sim E_0(t) \cdot \delta(t) \sim \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(\omega t) = \frac{\cos((\omega_0 - \omega)t) + \cos((\omega_0 + \omega)t)}{2}$



Появляются, в рассеянном свете длины волны наблюдаются два сдвигомастита: стоксов - с частотой $\omega_0 - \omega$ и антистоксов - с частотой $\omega_0 + \omega$. Эти сдвигомаститы называются компонентами Мандельштама-Брилиозна.

Две когерентные упругие волны с частотой ω существуют две рассеянные волны под углами $\pm \theta$ с частотами $\omega_0 \pm \omega$. При этом под бóльшим углом наблюдается большее когерентное смещение компонент Н-Б. $\Delta \omega_{NB} = \pm \omega$

Эффект Рамана

Комбинационное рассеяние: непрерывное рассеяние света ионизующими (атомами, ионами)

Классическое представление:

т.к. шкаляются от св. волны ионизующим

Амплитуда рассеяния света модулируется гармоникой внутренними колебаниями с частотой ω_i :

$$E(t) \sim [1 + \alpha \cos(\omega_i t)] \cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{2} [\cos((\omega_0 - \omega_i)t) + \cos((\omega_0 + \omega_i)t)]$$

Квантовое представление:

Процесс рассеяния света можно рассматривать как процесс рассеяния фотонов с энергией $\hbar \omega_0$ и $\hbar \omega$:

В случае неупругого столкновения фотонов частота рассеяния света комбинируется из частоты падающего света и частоты ω_i ; внутренних колебаний: $\hbar \omega = \hbar \omega_0 \pm \hbar \omega_i \rightarrow \omega = \omega_0 \pm \omega_i$

Законыомерности комбинационного рассеяния:

стоксова и антистоксова

• в спектре рассеяния света наблюдаются сдвигомаститы, сопровождающиеся сдвигомаститами падающего света $\hbar \omega \pm \hbar \omega_i$

• число сдвигомаститов, разности частот спектральных линий и сдвигомаститов, характер их изменения не зависит от частот спектральных линий и характера падающего света

Изучение ансамбль статистически независ. осцилляторов. Ударное и доплеровское уширение спектр. линии. Понятие об однородном и неоднородном уширении.

Будем рассмотреть ансамбль из большого числа атомов ($N \sim 10^{17}$ в cm^3). Эти атомы участвуют в темп. движении и взаимодействуют между собой. В процессе соударений процесс изм. -ия атома останавливается. Частота соударений может достигать 10^{10} - 10^{11} раз в сек. \rightarrow характ. время изм. $\sim 10^{-11}$ с

Уширение спектр. линии:

• Ударное уширение:

Важно при колич. темп.-ре и корис. движении среднее время между столкновениями $\tau_0 \sim 10^{-11}$ с. Оценка времени деградации естеств. излучения атом. осциллятора дает $\tau \sim 10^{-8}$ с. Тогда за время изм. -ия атом претерпевает $\sim 10^3$ соударений.

Весь процесс изм. -ия разбивается на акты изм. -ия продолжит. -ю τ_0 . Т.к. ширина линии изм. -ия обратно пропорц. на времени излучения, то из-за соударений ширина линии в расши. излучения будет примерно в 10^3 раз больше естеств. ширины линии изм. -ия.

В расши. излучения спектр изм. -ия будет пропорц. ф-ции Лоренца: $w(\omega) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (1/\tau_0)^2}$

Т.е. форма спектр. линии такая же как у естеств. излучения - лоренцева - но с другой шириной

Т.е. ударное уширение характеризуется лоренцевой формой линии с шириной $\Delta\omega_L = \frac{2}{\tau_0}$

τ_0 и $\Delta\omega_L$ можно вычесть, используя выражение для средн. длины свобод. пробега: $\langle v \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 n}}$ - и средн. модуль скорости молекул: $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, где d - газокинет. диаметр молекул, n - их концентрация, k - конст. Больцмана, T - температура, m - масса молекул.

$$\text{Тогда: } \tau_0 = \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle} \rightarrow \tau_0 = \frac{\sqrt{mkT}}{4\sqrt{\pi}d^2 p}, \text{ а } \Delta\omega_L = \frac{8\sqrt{kT}d^2 p}{\sqrt{mkT}}$$

• Доплеровское уширение:

Пусть изм. осциллятор участвует в темп. движении. Тогда в соотв.-ии с эффектом Доплера он будет излучать на частоте, отличной от частоты изм. -ия покоящегося атома.

Вспомогавшие ЗСЭ и ЗСИ в основном и возбужд. состояниях атома, можно посчитать частоты излучения и проекции скорости осциллятора: $\omega = \frac{\omega_0}{1 - v_z/c} \rightarrow \omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{v_z}{c}\right)$ - проекционный эффект Доплера устранено, что $\frac{1}{2m} \ll \frac{v_z}{c}$

Две атомы с проекциями скоростей в инт.-не $(v_z, v_z + dv_z)$: $w(v_z) dv_z \sim e^{-\frac{mv_z^2}{2kT} dv_z}$ - распр.-е Максвелла

Учитывая лин. связь ω и v_z , можно записать: $w(\omega) d\omega = w(v_z) dv_z \rightarrow w(\omega) d\omega \sim e^{-\frac{m^2(\omega - \omega_0)^2}{2kT}} d\omega = e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta\omega_D^2}} d\omega$

Т.е. доплеровское уширение характеризуется гауссовой формой линии с шириной $\Delta\omega_D = \omega_0 \sqrt{\frac{8kT \ln 2}{m c^2}}$

Понятие об однородном и неоднородном уширении:

Однородный ансамбль осцилл.-ров - ансамбль, в кот. осцилл. имеют одинак. собств. частоты

Однородное уширение спектр. линии - спектр. линии однород. ансамбля осцилл.-ров, равные суперпозиции спектр. линий отдельных осцилл.-ров.

Формы спектр. линий ансамблей и отдель. осцилл.-ров совпадают

Причины: однократность квант. состояний атомов и молекул, однород.-ть изотоп. или хим. состава среды, темп. движения газов и т.п.

Пример: естественное и ударное уширение

Неоднородный ансамбль осцилл.-ров - ансамбль, в кот. осцилл. имеют различные собств. частоты.

Неоднородное уширение спектр. линии - спектр. линии неоднород. ансамбля осцилл.-ров, равные суперпозиции спектр. линий отдельных осцилл.-ров.

Формы спектр. линий ансамблей и отдель. осцилл.-ров отличаются

Причины: различие квант. состояний атомов или молекул, неоднород.-ть изотоп. или хим. состава среды, темп. движения газов и т.п.

Пример: доплеровское, изотопическое, времязавис. -ое уширение