

Лекция 9

Глава III. Интерференция света

§6. Многоволновая интерференция.

6.1. Интерферометр Фабри-Перо. Формулы Эйри.
Пластина Люммера-Герке

Глава IV. Дифракция света

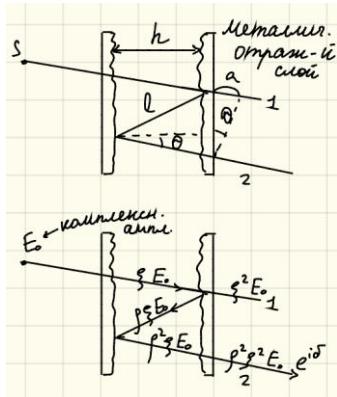
§1. Принцип Гюйгенса-Френеля и дифракционный интеграл Френеля

§2. Дифракция Френеля на круглом отверстии

§6. Многоволновая интерференция

Для того, чтобы увидеть ИК в многоволновой схеме интерференции, нужно добиться разделения входной волны на множество когерентных волн (например, делением амплитуд) и их наложения друг на друга.

6.1. Интерферометр (эталон) Фабри-Перо. Формулы Эйри



Частичное прохождение и отражение волн на поверхностях плоских пластин приводят к формированию на выходе из интерферометра нескольких лучей, которые затем собираются линзой в точку в фокальной плоскости (в случае точечного источника получаются концентрические кольца).

Разность хода между двумя соседними волнами (пусть $n = 1$):

$$\Delta' = 2l - a = 2l - 2l \sin \theta \sin \theta = \frac{2h}{\cos \theta} \cos^2 \theta = 2h \cos \theta,$$

разность фаз соседних волн:

$$\delta = k \tilde{\Delta} = 2kh \cos \theta.$$

Найдем зависимость интенсивности прошедшего излучения от δ : $I = I(\delta)$. Пусть E_0 - комплексная амплитуда падающего на эталон Фабри-Перо (ФП) поля,

$\xi = \frac{E_{\text{прош}}}{E_{\text{пад}}}$, $\rho = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}}$ - амплитудные коэффициенты прохождения и отражения при однократном прохождении/отражении пластины, соответственно. Тогда амплитуда прошедшего поля на выходе эталона ФП (см. нижний рис.):

$$E_{0\text{прош}} = \xi^2 E_0 + \rho^2 \xi^2 E_0 e^{i\delta} + \rho^4 \xi^2 E_0 e^{i2\delta} + \dots = \xi^2 E_0 (1 + \rho^2 e^{i\delta} + \rho^4 e^{i2\delta} + \dots) = \frac{\xi^2 E_0}{1 - \rho^2 e^{i\delta}}$$

Интенсивность прошедшего излучения, выходящего из интерферометра ФП:

$$I_{np} = \left\langle E_{npou}^2 \right\rangle_t = \left\langle \left(\frac{1}{2} E_{0npou} e^{i(\bar{k}\bar{r}-\omega t)} + \frac{1}{2} E_{0npou}^* e^{-i(\bar{k}\bar{r}-\omega t)} \right)^2 \right\rangle_t =$$

$$= \left\langle \frac{1}{4} E_{0npou}^2 e^{i(2\bar{k}\bar{r}-2\omega t)} \right\rangle_t + \left\langle \frac{1}{2} E_{0npou} E_{0npou}^* \right\rangle_t + \left\langle \frac{1}{4} E_{0npou}^{*2} e^{-i(2\bar{k}\bar{r}-2\omega t)} \right\rangle_t = \frac{E_{0npou} E_{0npou}^*}{2}$$

где учтено, что среднее значение быстро осциллирующих слагаемых мало. Подставляя выражение для E_{0npou} , где для простоты полагаем ξ и ρ действительными величинами, получаем:

$$\begin{aligned} I_{np} &= \frac{E_{0npou} E_{0npou}^*}{2} = \frac{\xi^4 E_0 E_0^* / 2}{1 - \rho^2 e^{i\delta} - \rho^2 e^{-i\delta} + \rho^4} = \frac{\xi^4 I_0}{1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos \delta} = \\ &= \frac{\xi^4 I_0}{1 + \rho^4 - 2\rho^2 [1 - 2 \sin^2(\delta/2)]} = \frac{\xi^4 I_0}{(1 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 \sin^2(\delta/2)} \Big|_{\xi^4 = (1 - \rho^2)^2} = \frac{I_0}{1 + 4\rho^2 \sin^2(\delta/2) / (1 - \rho^2)^2}, \end{aligned}$$

или

$$I_{np} = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\delta/2)} \text{ - формула Эйри для прошедшего излучения,}$$

где $R = \rho^2$ - энергетический коэффициент отражения (коэффициент отражения по интенсивности). Т.к. геометрия прошедшего и отраженного пучка не меняются, то $I_{np} + I_{omp} = I_0$, тогда формула Эйри для отраженного пучка:

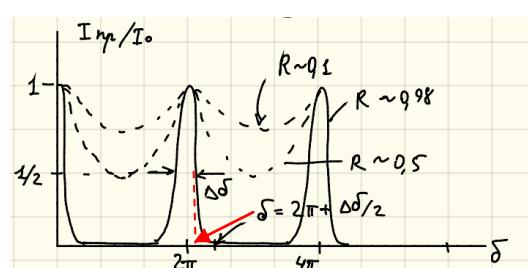
$$I_{omp} = I_0 - I_{np} = \frac{I_0 \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\delta/2)}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\delta/2)} = \frac{I_0}{1 + 1/\frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\delta/2)}$$

Из ф-лы Эйри получим условия максимума и минимума интенсивности прошедшего излучения.

$$I_{np \max} = I_0, \text{ если } \delta/2 = \pi m, \quad \delta = k\tilde{\Delta} = 2\pi m, \quad \tilde{\Delta} = 2h \cos \vartheta_m = m\lambda$$

$$I_{np \min |R \rightarrow 1} = 0, \text{ если } \delta/2 = (\pi/2)(2m+1), \text{ т.к. } \sin^2(\delta/2) \rightarrow 1, \text{ а } \frac{1}{(1-R)^2} \gg 1 \text{ при } R \rightarrow 1$$

Чем ближе $R \rightarrow 1$, тем резче зависимость $I_{np}(\delta)$ (см. рис.).



Оценим ширину интерференционных максимума $I_{np}(\delta)$ на полувысоте $\Delta\delta$ из формулы Эйри (см.рис.):

$$\frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{2} + \frac{\Delta\delta/2}{2} \right) = 1.$$

$$\text{Пусть } \Delta\delta \ll 1, \text{ тогда } \frac{4R}{(1-R)^2} \frac{\Delta\delta^2}{16} = 1 \Rightarrow \left| \Delta\delta = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \right|_{R \rightarrow 1} \rightarrow 0 .$$

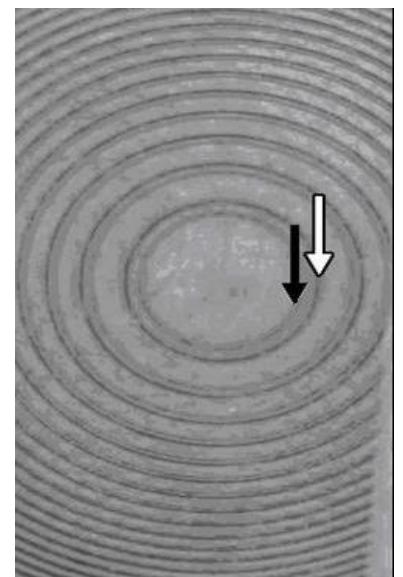
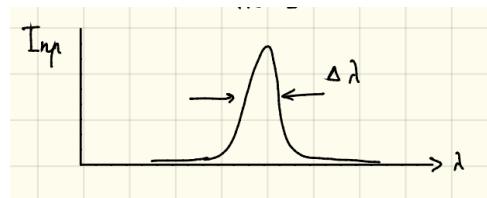
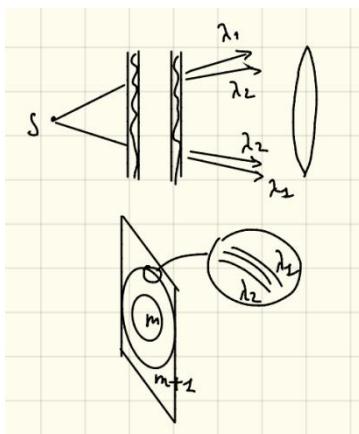
Оценим спектральную ширину интерференционного максимума $\Delta\lambda$ интерферометра ФП. Т.к. $\delta = 2hk \cos \vartheta$, то при $\vartheta = \text{const}$ получаем $\Delta\delta = \Delta(2hk \cos \vartheta)_{|\vartheta \ll 1} = 2h\Delta k = 2h(\Delta\lambda / \lambda^2)$ и

$$\left| \Delta\lambda = \frac{(1-R)}{\sqrt{R}} \frac{\lambda^2}{2\pi h} . \right.$$

Оценим величину

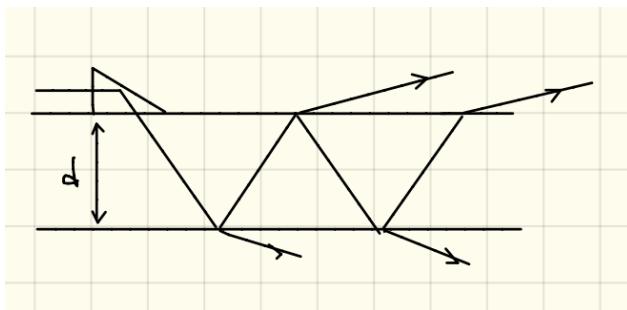
$$\left| \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \pi\sqrt{R} \frac{2h}{\lambda} \frac{1}{1-R} \sim \frac{2h}{\lambda} \frac{1}{1-R} \sim mN \sim 10^7 , \right.$$

где $2h/\lambda = m \sim 10^5$ - порядок интерференции, $1/(1-R) \sim N \sim 50$ - число интерферирующих волн. Чрезвычайно узкие интерференционные максимумы $\Delta\lambda \sim 10^{-7}\lambda$ позволяют с помощью интерферометра ФП различать близкие спектральные линии излучения.



Пластина Люммера-Герке

Аналогичным образом за счет деления амплитуды падающей волны реализуется многоволновая интерференция в пластинке Люммера-Герке, которая представляет собой плоскопараллельную пластинку из стекла или кварца. Излучение заводится под скользящим углом, близким к углу полного внутреннего отражения.



$$d \sim 0.5-1\text{cm}, \quad m = 2h/\lambda \sim 10^5, \quad R \sim 0.9, \quad N \sim 10$$

Глава IV. Дифракция света

§1. Принцип Гюйгенса-Френеля и дифракционный интеграл Френеля

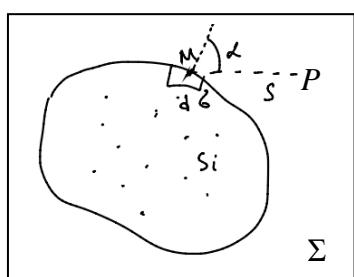
Опр. В первичном узком смысле *дифракция* – огибание волнами препятствий, в более широком – любое отклонение при распространении волн от законов геометрической оптики.

Принцип Гюйгенса-Френеля: любая точка волнового фронта волны является источником *вторичных сферических* волн, огибающая которых представляет собой фронт волны в последующие моменты времени (Гюйгенс, 1678). Эти источники вторичных волн *когерентны*, и вторичные волны *интерферируют* между собой (Френель, 1816).

Первое объяснение интерференции	1801	Томас Юнг
Термин «интерференция света»	1803	Томас Юнг
Принцип (построение) Гюйгенса	1678	Христиан Гюйгенс
Принцип Гюйгенса-Френеля	1816	Огюстен Жан Френель

Дифракционный интеграл Френеля

Интеграл Френеля – математическая запись феноменологического принципа Гюйгенса-Френеля. Поскольку в принципе Гюйгенса-Френеля речь идет о скалярных сферических волнах, запишем поле такой волны в виде:



$$E(r, t) = \frac{B_0}{r} e^{i(kr - \omega t)} + \frac{B_0^*}{r} e^{i(kr - \omega t)} = A(r)e^{-i\omega t} + A^*(r)e^{i\omega t},$$

где $A(r) = \frac{B_0}{r} e^{ikr}$ – быстро меняющаяся в пространстве ($\sim e^{ikr}$) комплексная амплитуда колебаний поля сферической волны.

Пусть $A(M)$ – амплитуда колебаний поля вторичных источников в т. M на замкнутой поверхности Σ , охватывающей источники S_i . Амплитуду поля сферической волны в т. P от вторичных источников с площади поверхности $d\sigma$ запишем в виде (см.рис.)

$$dA(M; P) = A(M)K(\alpha)d\sigma \frac{e^{iks}}{s},$$

где s – расстояние до т. P , α – угол между нормалью к поверхности в т. M и направлением на т. P , $K(\alpha)$ – коэффициент наклона. Тогда амплитуда колебаний поля в т. P от вторичных источников со всей поверхности Σ имеет вид:

$$A(P) = \int_{\Sigma} A(M) \frac{e^{iks}}{s} K(\alpha) d\sigma$$

- дифракционный интеграл Френеля.

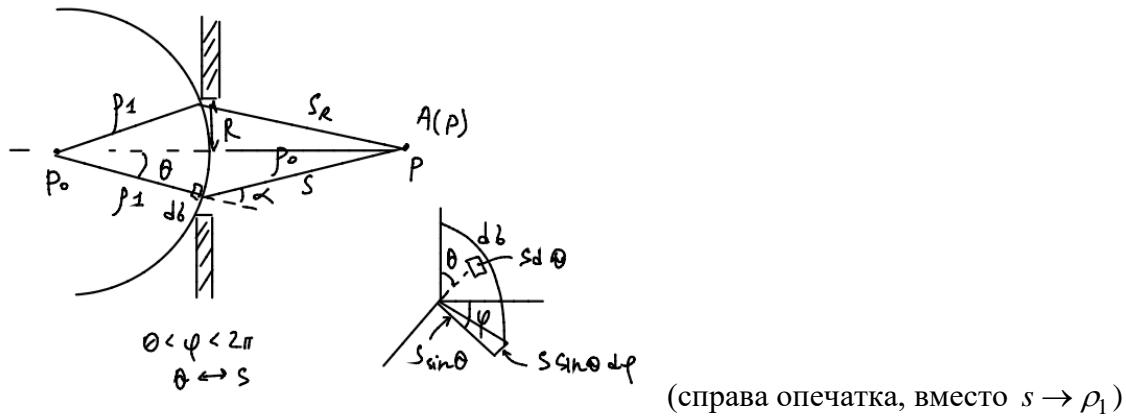
Коэффициент наклона $K(\alpha)$ в теории Френеля строго не выводится. Из соображений размерности предполагается, что $K(\alpha) \sim \lambda^{-1}$ и $K(\pi/2) = 0$. В строгой теории дифракции Кирхгофа показано, что $K(\alpha) \sim -i\lambda^{-1}$ и $K(\pi) = 0$.

§2. Дифракция Френеля на круглом отверстии

Используя интеграл Френеля решим задачу дифракции излучения на круглом отверстии. Найдем амплитуду поля от точечного источника P_0 на оси, перпендикулярной плоскости отверстия (см. рис.). Покажем, что в этом случае существуют некоторые кольцевые области на фронте волны, которые дают одинаковый вклад в $A(P)$, а также области, дающие вклад в $A(P)$ с противоположной фазой (зоны Френеля).

Исходя из гипотезы Френеля, что поле за экраном равно нулю, а в отверстии Σ_0 не отличается от падающего поля, запишем интеграл Френеля в виде:

$$A(P) = \frac{B_0 e^{ik\rho_1}}{\rho_1} \int_{\Sigma_0} \frac{e^{iks}}{s} K(\alpha) d\sigma.$$



Вычислим этот интеграл, используя сферическую систему координат. Найдем $d\sigma = d\sigma(s)$. Из правого рисунка хорошо видно, что

$$d\sigma = \rho_1 d\varphi \rho_1 \sin \vartheta d\vartheta.$$

По теореме косинусов (треугольник $PP_0d\sigma$) найдем связь $s = s(\vartheta)$:

$$\begin{aligned} s^2 &= \rho_1^2 + (\rho_1 + s_0)^2 - 2\rho_1(\rho_1 + s_0)\cos\vartheta, \\ \Rightarrow 2sds &= 2\rho_1(\rho_1 + s_0)\sin\vartheta d\vartheta \Rightarrow \sin\vartheta d\vartheta = \frac{sds}{\rho_1(\rho_1 + s_0)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$A(P) = \frac{B_0 K e^{ik\rho_1}}{\rho_1} \int_{\Sigma_0} \frac{e^{iks}}{s} \frac{\rho_1 d\varphi}{(\rho_1 + s_0)} s ds = \frac{B_0 e^{ik\rho_1}}{(\rho_1 + s_0)} 2\pi \int_{s_0}^{s_R} e^{iks} K ds.$$

Решим задачу в приближении $K(\alpha) \approx const$ (угол α мало изменяется), тогда

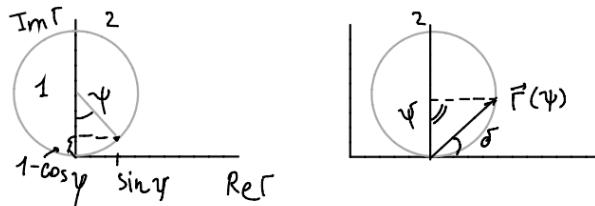
$$\begin{aligned}
A(P) &= \frac{2\pi KB_0 e^{ik\rho_1}}{\rho_1 + s_0} \frac{1}{ik} (e^{iks})|_{s_0} = \frac{2\pi KB_0}{k} \frac{e^{ik(\rho_1+s_0)}}{\rho_1 + s_0} i \left[1 - e^{ik(s_R-s_0)} \right] = Ci \left[1 - e^{ik(s_R-s_0)} \right] = \\
&= Ci \left(1 - e^{ik\tilde{\Delta}} \right) = Ci \left(1 - e^{i\psi} \right)
\end{aligned}$$

где $C = \frac{2\pi KB_0}{k} \frac{e^{ik(\rho_1+s_0)}}{\rho_1 + s_0}$ - не зависит от s_R , т.е. от разности хода $\tilde{\Delta} = s_R - s_0$ между лучами s_R и s_0 , $\psi(\tilde{\Delta}) = k\tilde{\Delta}$ - разность фаз между ними.

Проанализируем зависимость функции

$$i \left(1 - e^{i\psi} \right) \equiv \Gamma(\psi) = \sin \psi + i(1 - \cos \psi) = \operatorname{Re} \Gamma + i \operatorname{Im} \Gamma$$

от разности фаз ψ . Как видно из рисунков, комплексной функции $\Gamma(\psi)$



соответствует вектор $\vec{\Gamma}(\psi) = |\Gamma(\psi)| e^{i\delta}$ на комплексной плоскости, который вращается против часовой стрелки при увеличении угла ψ (правый рис.). Модуль функции $|\Gamma(\psi)|$ увеличивается до максимального значения, равного $|\Gamma_{\max}(\psi)| = 2$, если

$$\psi = \pi, 3\pi, \dots, (2m-1)\pi,$$

где $m = 1, 2, \dots$ Минимальное значения $|\Gamma_{\min}(\psi)| = 0$ достигается при

$$\psi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2m\pi.$$

Поскольку модуль амплитуды поля $|A(P)| \sim |\Gamma(\psi)|$, то, следовательно, амплитуда колебаний поля также осциллирует от максимального значения до 0 при увеличении разности фаз ψ . Т.к. $\psi = k\tilde{\Delta} = k(s_R - s_0)$, то максимальной амплитуде $A_{\max}(P)$ соответствуют значения

$$s_R^{\max} = s_0 + \frac{\psi_{\max}}{k} = s_0 + \lambda/2; s_0 + 3\lambda/2; \dots; s_0 + (2m-1)\lambda/2,$$

а минимальной амплитуде $A_{\min}(P) = 0$ - значения

$$s_R^{\min} = s_0 + \frac{\psi_{\min}}{k} = s_0 + \lambda; s_0 + 2\lambda; \dots; s_0 + m\lambda.$$

Таким образом, добавляя к s_0 величину кратную $\lambda/2$ (открывая отверстие на соответствующую величину) мы получаем $A(P)$ поочередно $A_{\max}(P)$ и 0.

Лекция 10

Глава IV. Дифракция света

§3. Метод зон Френеля. Число Френеля. Радиус и площадь зоны Френеля

§4. Графический метод векторных диаграмм

4.1. Спираль Френеля. Осцилляции интенсивности при удалении от отверстия.

Зонные пластиинки, линза

4.2. Дифракция на круглом экране. Пятно Пуассона

4.3. Дифракция на крае полубесконечного экрана. Спираль Корню. Дифракция на щели

4.4. Комплексная функция пропускания. Принцип дополнительности Бабине. Дифракция на проволоке

§3. Метод зон Френеля. Число Френеля. Радиус и площадь зон Френеля

Как было показано на прошлой лекции, при дифракции Френеля на круглом отверстии, добавление к s_0 величины кратной $\lambda/2$ (например, увеличение отверстия на соответствующую величину) приводит к поочередному изменению $A(P)$ от $A_{\max}(P)$ до 0. Рассмотрим это графически.

Построим концентрические сферы с центром в т. P и радиусами $s_0, s_0 + \lambda/2, s_0 + 2\lambda/2, \dots, s_0 + m\lambda/2$, которые разобьют сферическую поверхность Σ_0 на кольцевые зоны, называемые зонами Френеля (см.рис.). Разность фаз амплитуд $A(P)$ в т. P от соседних зон Френеля

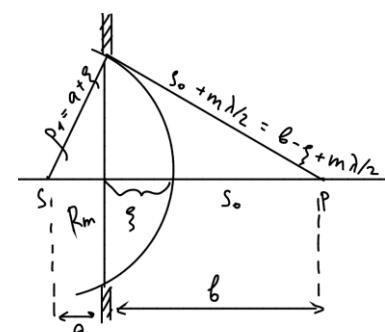
$$\Delta\psi = k\lambda/2 = \pi,$$

следовательно, меняется знак амплитуд $e^{i\Delta\psi} = e^{i\pi} = -1$. Если для т. P отверстие открывает нечетное число зон Френеля, то $A(P) = A_{\max}(P)$, если открыто четное число зон Френеля, то $A(P) = 0$.

Т.к. для двух соседних открытых зон $A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2, |A_1| = |A_2|$. Т.е. амплитуды волн, пришедших от соседних зон Френеля равны по величине и противоположны по знаку (сдвиг фаз на π).

Число m открытых для т. P зон Френеля называется *числом Френеля*.

Радиус и площадь зон Френеля



Вычислим радиус $R_m = R_m(a, b)$ m -ой зоны Френеля.

Пусть $\lambda, \xi = (\rho_1 - a) \ll a, b$. Из рис. видно, что:

$$\rho_1 = a + \xi, \quad s_0 = b - \xi,$$

Тогда из треугольников:

$$R_m^2 = (a + \xi)^2 - a^2 = (b - \xi + m\lambda/2)^2 - b^2.$$

Из последнего равенства следует уравнение

$$a^2 + 2a\xi + \xi^2 - a^2 = b^2 + \xi^2 + (m\lambda/2)^2 - 2b\xi - m\lambda\xi + mb\lambda - b^2.$$

Сокращая слагаемые и пренебрегая величинами второго порядка малости $[\xi^2, (m\lambda/2)^2, m\lambda\xi]$, получаем выражение для $\xi \approx m\lambda b / 2(a+b)$. Таким образом,

$$R_m^2 \approx 2a\xi = \frac{m\lambda ab}{a+b}.$$

Оценим радиус m -ой зоны Френеля. При $a=b=1\text{м}$, $\lambda=0.5 \cdot 10^{-6}\text{м}$ радиус равен $R_m = \sqrt{m} \sqrt{0.5 \cdot 10^{-6}/2} = \sqrt{m}/2 \text{мм}$, для первой зоны – 0.5 мм.

Важно отметить, что число зон Френеля, которое открывает данное отверстие для точки P зависит от удаленности т. P от отверстия, т.е. от величины b . Действительно, из предыдущей формулы следует, что при $a \rightarrow \infty$

$$R_m^2 = m\lambda b, \quad m = R_{\text{омб}}^2 / \lambda b \quad ,$$

а радиус первой зоны Френеля $R_1 = \sqrt{\lambda b}$.

Площадь m -ой зоны Френеля (площадь кольца)

$$\sigma_m = \pi R_m^2 - \pi R_{m-1}^2 = \pi \frac{\lambda ab}{a+b} = \text{const},$$

т.е. площади всех зон Френеля равны.

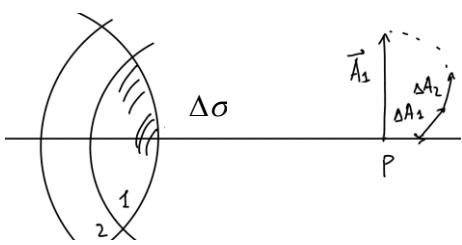
§4. Графический метод векторных диаграмм

4.1. Спираль Френеля. Осцилляции интенсивности при удалении от отверстия. Зонные пластиинки, линза

Т.к. амплитуда осцилляций поля $A(P) = \text{Re } A(P) + i \text{Im } A(P) = |A(P)| e^{i\delta}$ – комплексное число, то ему можно поставить в соответствие вектор на комплексной плоскости $\vec{A}(P) = \{\text{Re } A, \text{Im } A\}$. Модуль комплексного числа есть длина вектора



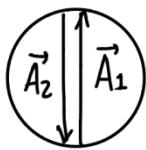
$|A(P)| = |\vec{A}(P)|$, а фаза δ – угол наклона вектора (см.рис.). Сумму двух комплексных чисел представляется как сумму векторов в комплексной плоскости.



Для вычисления амплитуд поля в центре экрана удобно разбить каждую зону Френеля на несколько малых i -ых кольцевых подзон с одинаковыми площадями $\Delta\sigma$ и складывать в т. P амплитуды $\Delta\vec{A}_i(P)$ от соответствующих подзон как комплексные числа (вектора в комплексной плоскости) с одинаковыми модулями $\Delta A_0(P)$ и разными фазами δ_i . Тогда

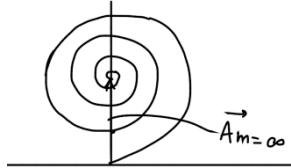
амплитуда в т. P

$$\Delta \vec{A}(P) = \sum_i \Delta \vec{A}_i(P),$$



где $\Delta A_i(P) = \Delta A_0(P)e^{i\delta_i}$. Для двух зон Френеля $\vec{A}_{l+2}(P) = \vec{A}_l(P) + \vec{A}_2(P) = 0$ (см. рис.).

Если учитывать зависимость $K = K(\alpha)$, то амплитуда поля, приходящего в точку P от каждой последующей зоны Френеля меньше, чем от предыдущей из-за увеличения угла наклона α . Это приводит к движению конца вектора $\vec{A}(P)$ не по окружности, а по спирали (спираль Френеля).



В случае полностью открытого экрана ($m = \infty$) расчетная амплитуда $\vec{A}_\infty(P)$ оказывается сдвинутой по фазе на $\pi/2$. Чтобы это исправить, необходимо повернуть вектор на угол $-\pi/2$, т.е. положить

$$K(\alpha) \sim e^{i(-\pi/2)} |K(\alpha)| = -i |K(\alpha)|.$$

В строгой теории дифракции Кирхгофа это выражение получается аналитически.

Как видно из спирали Френеля

$$A_\infty = \frac{1}{2} A_l \Rightarrow I_\infty = \frac{1}{4} I_l \Rightarrow I_l = 4I_\infty = 4I_0 ,$$

т.е. интенсивность в случае открытой одной зоны Френеля в 4 раза больше интенсивности падающего излучения I_0 (когда нет экрана). При приближении т. P к отверстию (рост m от 1 до $m \gg 1$) интенсивность осциллирует, изменяясь от $I_l = 4I_0$ до I_0 .

Зонные пластинки, френелевская линза

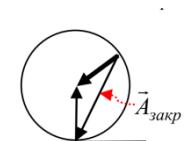
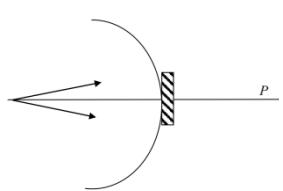
Как видно из спирали Френеля, если сложить амплитуды колебаний полей, например, только нечетных зон, а четные закрыть, то поля и интенсивности многократно увеличиваются, т.к. складываются в фазе (зонная пластина)

$$\vec{A}(P) = \vec{A}_1(P) + \vec{A}_3(P) + \dots + \vec{A}_N(P) \sim N A_l, \quad I(P) \sim N^2 4I_0 .$$

Если же дополнительно развернуть фазы амплитуд полей от всех четных зон на π , то получится оптимальная зонная пластина, или френелевская линза (все волны приходят в т. P в фазе как у собирающей линзы). Такая «плоская линза» формирует изображение.

4.2. Дифракция на круглом экране. Пятно Пуассона

Если диск закрывает некоторое количество зон Френеля, которые добавили бы в т. P амплитуду $\vec{A}_{закр}(P)$, то результирующая амплитуда за экраном имеет вид:



$\vec{A}(P) = \vec{A}_\infty(P) - \vec{A}_{закр}(P)$, где $\vec{A}_\infty(P)$ - амплитуда в случае отсутствия экрана (вертикальная стрелка на рис.).

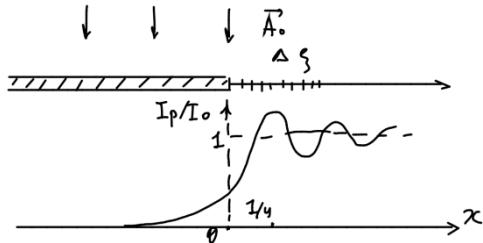
При увеличении радиуса экрана, вектор $-\vec{A}_{закр}(P)$

двигается по спирали Френеля и, следовательно, вектор $\vec{A}(P)$ всегда имеет ненулевую длину, если $m < \infty$. Таким образом, в центре дифракционной картины за экраном (в области геометрической тени) будет наблюдаться светлое пятно –

пятно Пуассона. Появление этого пятна не может быть объяснено в рамках геометрической оптики и является убедительным доказательством волновой природы света.

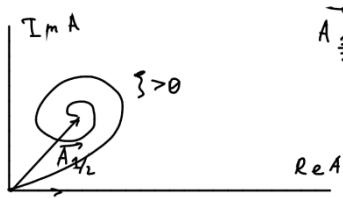
4.3. Дифракция на крае полубесконечного экрана. Спираль Корню. Дифракция на щели

При дифракции Френеля на краю полубесконечного экрана в пространственном распределении интенсивности появляются три закономерности (см. рис.):



1. Непосредственно за краем экрана $I_p(x=0) = \frac{1}{4} I_0$;
2. В области геометрической тени $I_p(x < 0) \neq 0$;
3. Наблюдаются осцилляции интенсивности на экране в области $x > 0$.

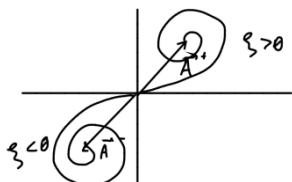
Воспользуемся графическим методом векторных диаграмм для качественного объяснения наблюдаемых эффектов. Пусть на экран падает волна с амплитудой \vec{A}_0 . Разобьем фронт волны справа от экрана ($\xi > 0$) на тонкие полосы шириной $\Delta\xi$. Складывая амплитуды



$\vec{A}_{1/2} \approx \sum \vec{\Delta A}_i$, пришедшие в т. P от каждой полосы $\Delta\xi_i$ в интервале от 0 до ξ , $\xi > 0$, получаем суммарную амплитуду в виде:

$$\vec{A}_p(\xi) = \sum_i \vec{\Delta A}_{ip}(\xi).$$

Соответствующая векторная диаграмма называется **спиралью Корню** (см.рис.). Обозначим амплитуду в случае полностью открытой справа полубесконечной области фронта волны (при $\xi > 0$) как

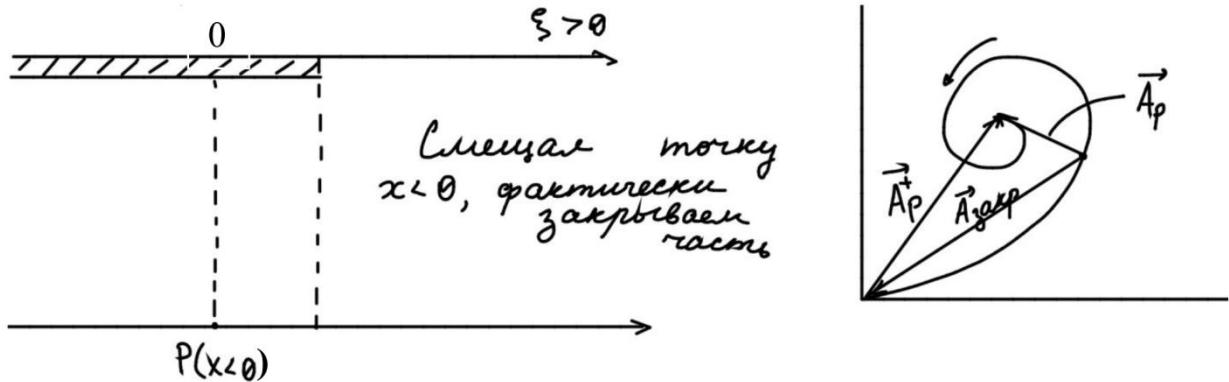


$\vec{A}_{1/2\infty} \equiv \vec{A}^+$. Если сдвигать экран влево и открывать область фронта волны при $\xi < 0$, то в диаграмме появится соответствующая дополнительная ветвь спирали Корню (см.рис.). Обозначим амплитуду в случае открытой слева полубесконечной области фронта волны (при $\xi < 0$) как $\vec{A}_{-1/2\infty} \equiv \vec{A}^-$.

1. Покажем, что $I_p(x=0) = I_0 / 4$.
В случае отсутствия экрана $\vec{A}(P) = \vec{A}^+ + \vec{A}^- = \vec{A}_0$. Т.к. $\vec{A}^+ = \vec{A}^- \Rightarrow 2\vec{A}^+ = \vec{A}_0 \Rightarrow I_p(x=0) = |\vec{A}^+|^2 = |\vec{A}_0|^2 / 4 = I_0 / 4$.

2. Покажем, что в области геометрической тени $I_p(x < 0) \neq 0$.

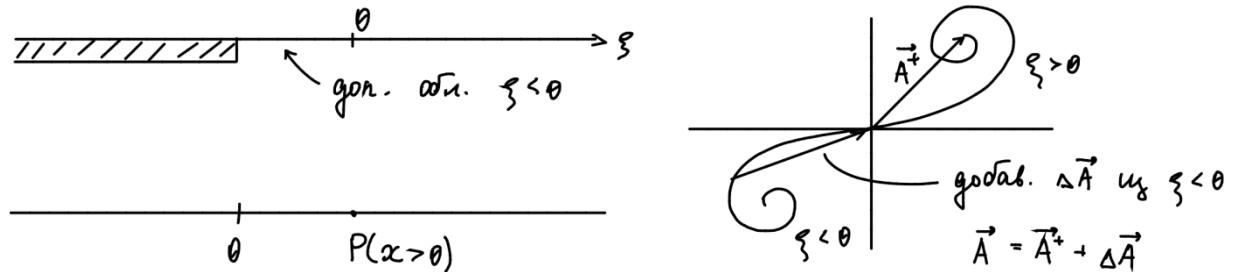
Сместя точку P в область $x < 0$, мы фактически закрываем для т. P часть фронта волны в области $\xi > 0$. Следовательно, на спирали Корню этому будет соответствовать



вектор $\vec{A}_P(x < 0) = \vec{A}^+ - \vec{A}_{закр}$, где $\vec{A}_{закр}$ - амплитуда от источников, которые закрыты для т. P частью экрана в области $\xi > 0$. Из правого рисунка видно, что при смещении точки наблюдения P в область $x < 0$ вектор $(-\vec{A}_{закр})$ движется по спирали Корню, а длина вектора \vec{A}_P монотонно убывает. Следовательно, интенсивность поля в области геометрической тени $I_P(x < 0)$ отлична от нуля и монотонно убывает.

3. Осцилляции интенсивности на экране в области $x > 0$.

Смещение точки P в область $x > 0$ эквивалентно добавлению для т. P части фронта волны из области $\xi < 0$, что соответствует появлению дополнительного вектора $\Delta\vec{A}$ на ветви $\xi < 0$ спирали Корню: $\vec{A}_P(x > 0) = \vec{A}^+ + \Delta\vec{A}(\xi < 0)$ (см.рис.).



Из правого рисунка видно, что при смещении точки наблюдения P в область $x > 0$ вектор $\Delta\vec{A}(\xi < 0)$ движется по спирали Корню, при этом длина суммарного вектора \vec{A}_P осциллирует. Следовательно, интенсивность поля справа от экрана $I_P(x > 0)$ также осциллирует.

Дифракция Френеля на щели

Качественно дифракция излучения на щели может быть описана как суперпозиция дифракционных картин от двух полубесконечных экранов: монотонное убывание интенсивности в области геометрической тени и осцилляции в центре картины (см. левый

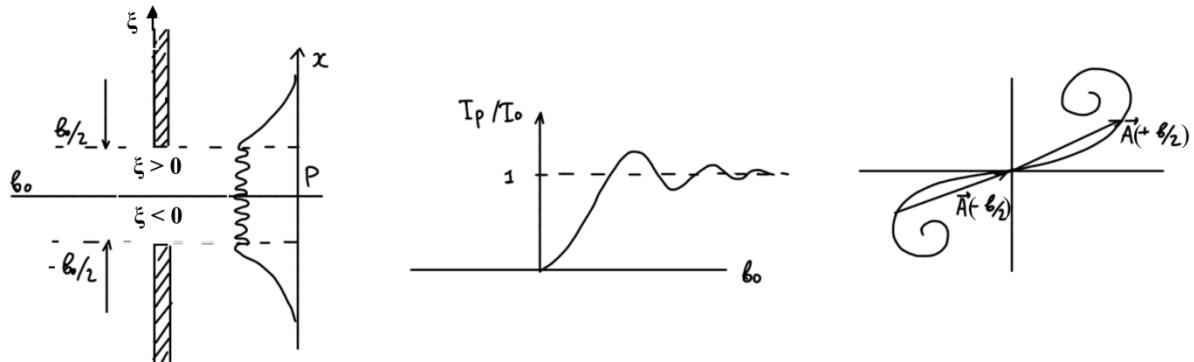
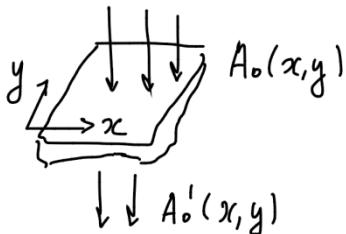


рис.). Зависимость интенсивности в центре дифракционной картины от ширины щели $I_P(b_0)$ (см. рис. в центре) легко описать с помощью спирали Корню. Увеличение ширины щели b_0 приводит к перемещению векторов $\vec{A}(-b_0/2; \xi < 0)$ и $\vec{A}(b_0/2; \xi > 0)$ по спирали Корню и к осцилляциям амплитуды и интенсивности в зависимости от ширины щели b_0 .

4.4. Комплексная функция пропускания. Принцип дополнительности Бабине. Дифракция Френеля на проволоке



Введем комплексную функцию пропускания $\tau(x, y)$ объекта, которая задает амплитуду поля за препятствием $A'_0(x, y) = \tau(x, y)A_0(x, y)$. Здесь

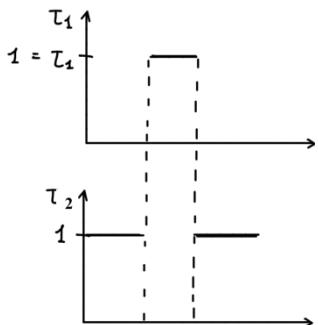
$$\tau(x, y) = \frac{A'_0(x, y)}{A_0(x, y)} - \text{комплексная функция пропускания,}$$

$A_0(x, y)$, $A'_0(x, y)$ - амплитуды падающего и прошедшего полей, соответственно.

Два объекта называются дополнительными, если сумма их функций пропускания равна единице:

$$\tau_1(x, y) + \tau_2(x, y) = 1.$$

Примером дополнительных объектов являются проволока $\tau_1(x)$ и щель $\tau_2(x)$ с одинаковыми поперечными размерами (см. рис.).



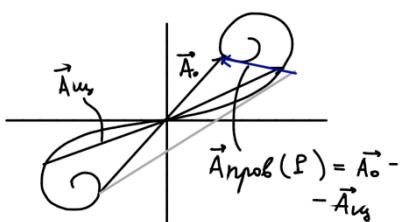
Используя интеграл Френеля, запишем амплитуду поля на экране, которая получается в результате сложения амплитуд при последовательном освещении 1-ого и 2-ого объектов.

$$\begin{aligned} A(P) &= A_{\tau_1}(P) + A_{\tau_2}(P) = \int_{\Sigma} A'_{01}(x, y) \frac{e^{iks}}{s} K(\alpha) d\sigma + \int_{\Sigma} A'_{02}(x, y) \frac{e^{iks}}{s} K(\alpha) d\sigma = \\ &= \int_{\Sigma} A_0 \tau_1(x, y) \frac{e^{iks}}{s} K(\alpha) d\sigma + \int_{\Sigma} A_0 \tau_2(x, y) \frac{e^{iks}}{s} K(\alpha) d\sigma = \\ &= \int_{\Sigma} A_0 [\tau_1(x, y) + \tau_2(x, y)] \frac{e^{iks}}{s} K(\alpha) d\sigma |_{\tau_1+\tau_2=1} = \int_{\Sigma} A_0 \frac{e^{iks}}{s} K(\alpha) d\sigma = A_0(P), \end{aligned}$$

или

$$A_{\tau_1}(P) + A_{\tau_2}(P) = A_0(P).$$

Это равенство отражает *принцип дополнительности Бабине*: сумма полей в каждой точке экрана от *последовательно* освещенных дополнительных объектов равна полю, наблюдаемому на экране при отсутствии объектов.



Используем принцип дополнительности Бабине и метод векторных диаграмм для определения амплитуды поля $\vec{A}_{nprov}(P)$ при дифракции на проволоке, если известна амплитуда поля при дифракции на щели $\vec{A}_{uq}(P)$. Т.к. объекты дополнительные, то $\vec{A}_{nprov}(P) = \vec{A}_0(P) - \vec{A}_{uq}(P)$. Как видно из рисунка, при изменении толщины проволоки

вектор $\vec{A}_{\text{пров}}(P)$ будет перемещаться по спирали, причем его длина всегда будет отлична от нуля пока ширина щели (соответственно, и толщина проволоки) $b_0 < \infty$. Это светлое пятно в центре дифракционной картины является аналогом пятна Пуассона.

Лекция 11

Глава IV. Дифракция света

§5. Понятие о теории дифракции Кирхгофа (1882г.)

- 5.1. Недостатки положений принципа Гюйгенса-Френеля
 - 5.2. Интегральная теорема Гельмгольца-Кирхгофа
 - 5.3. Дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа
 - 5.4. Ближняя и дальняя зоны дифракции. Дифракционная длина
 - 5.5. Дифракция в дальней зоне (дифр. Фраунгофера) как пространственное преобразование Фурье
- А. Дифракция на щели. Приближения Френеля и Фраунгофера
-

§5. Понятие о теории дифракции Кирхгофа (1882г.)

5.1. Недостатки положений принципа Гюйгенса-Френеля

Принцип Гюйгенса-Френеля является феноменологическим, он не выводится из первых принципов (уравнений Максвелла, которые исторически появились на 50 лет позже). Поэтому он не лишен недостатков:

- нет строгого вывода интеграла Френеля,
- отсутствует обоснование выбора выражения для коэффициента наклона $K(\alpha)$.

Более строго задачу дифракции позволяет решить теория Кирхгофа, основанная на уравнениях Максвелла.

5.2. Интегральная теорема Гельмгольца-Кирхгофа

Кирхгоф провел строгое решение задачи дифракции: определение величины светового поля в любой точке пространства при наличии препятствий распространению волны.

Математическая постановка задачи заключается в поиск решения волнового уравнения для поля с определенными граничными условиями, которые определяются источниками и препятствиями на некоторой замкнутой поверхности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta E(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \\ \text{граничные условия.} \end{array} \right.$$

Для случая гармонической волны

$$E(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} A(\vec{r}) e^{i\omega t} + \frac{1}{2} A^*(\vec{r}) e^{-i\omega t},$$

где $A(\vec{r})$ - комплексная быстроменяющаяся амплитуда колебаний поля в точке \vec{r} , из волнового уравнения следует уравнение Гельмгольца

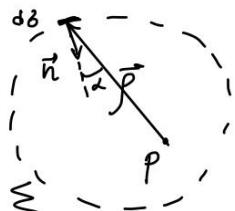
$$\Delta A(\vec{r}) + k^2 A(\vec{r}) = 0,$$

где $k = \omega/c$. Решением этого уравнения является, в частности, сферическая гармоническая функция

$$A(r) = B_0 \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Т.к. уравнение Гельмгольца является линейным, то любая линейная суперпозиция сферических функций также удовлетворяет уравнению Гельмгольца. В теории Кирхгофа реальное световое поле в данной точке представляется в виде суперпозиции сферических волн.

Сформулируем *теорему Гельмгольца-Кирхгофа*, которая задает математический алгоритм построения решения уравнения Гельмгольца с граничными условиями. Амплитуду поля в некоторой точке P можно вычислить, если известна амплитуда поля A_Σ и ее производная по направлению $\partial A / \partial \vec{n}$ на какой-либо замкнутой поверхности Σ , охватывающей точку P :



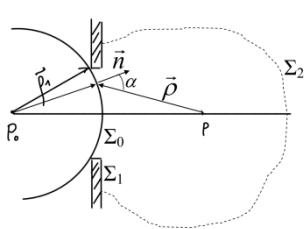
Здесь $\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} = G(\rho)$ - функция Грина для уравнения Гельмгольца.

Соответствующая производная по направлению запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) = \text{grad} \left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) \vec{n} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) \frac{\vec{\rho}}{|\rho|} \vec{n} = \left(-ik \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} - \frac{e^{-ik\rho}}{\rho^2} \right) \cos(\angle \vec{\rho}, \vec{n}) = -ik \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \cos(\angle \vec{\rho}, \vec{n})$$

5.3. Дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа

Решим задачу дифракции волны от точечного источника P_0 на круглом отверстии, используя теорему Гельмгольца. Пусть $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2$ - поверхность произвольной формы, охватывающая точку P , где Σ_0 и Σ_1 - поверхности в отверстии и за экраном, соответственно, Σ_2 отмечена пунктиром на рисунке.



$$\text{На } \Sigma_0: A_{\Sigma_0} = \frac{B_0}{\rho_1} e^{-ik\rho_1}; \left(\frac{\partial A}{\partial \vec{n}} \right)_{\Sigma_0} = (\text{grad} A)_{\Sigma_0} \vec{n} \approx -ik B_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \cos(\angle \vec{\rho}_1, \vec{n}).$$

$$\text{На } \Sigma_1 \text{ (за экраном): } A_{\Sigma_1} = 0; \quad \left(\frac{\partial A}{\partial \vec{n}} \right)_{\Sigma_1} = 0.$$

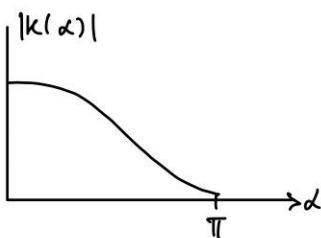
На Σ_2 : $A_{\Sigma_2} \neq 0$ и $\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_{\Sigma_1} \neq 0$, однако, при большом ρ (малом $1/\rho$) интеграл $\int_{\Sigma_2} \rightarrow 0$.

Подставляя полученные выражения в формулу для $A(P)$ в теореме Кирхгофа, получим

интеграл Френеля-Кирхгофа в случае падения на отверстие сферической волны $\frac{B_0}{\rho_1} e^{-ik\rho_1}$:

$$A(P) = \int_{\Sigma_0} \frac{B_0}{\rho_1} e^{-ik\rho_1} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \frac{1}{4\pi} \cdot ik [\cos(\angle \vec{\rho}_1, \vec{n}) - \cos(\angle \vec{\rho}, \vec{n})] d\sigma =$$

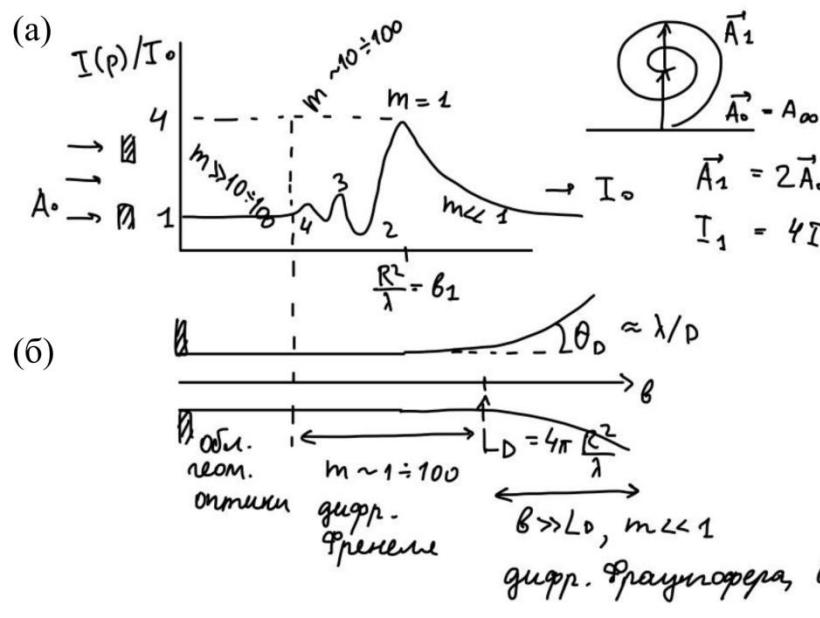
$$= \int_{\Sigma_0} \frac{B_0}{\rho_1 \rho} e^{-ik(\rho_1 + \rho)} i \underbrace{\frac{(\cos(\angle \vec{\rho}_1, \vec{n}) - \cos(\angle \vec{\rho}, \vec{n}))}{2\lambda}}_{K(\alpha)} d\sigma$$



Т.к. $\cos(\angle \vec{\rho}_1, \vec{n}) = 1$, $\cos(\angle \vec{\rho}, \vec{n}) = -\cos \alpha$, то коэффициент наклона $K(\alpha) = \frac{i(1 + \cos \alpha)}{2\lambda}$ равен нулю при $\alpha = \pi$, что не совпадает с гипотезой Френеля, в который полагалось, что $K(\alpha) = 0$ при $\alpha = \pi/2$. При $\alpha \ll 1$ величина $K(\alpha) = i/\lambda$.

5.4. Ближняя и дальняя зоны дифракции. Дифракционная длина

Как было показано в лекции 10, при дифракции на круглом отверстии интенсивность излучения в центре дифракционной картины $I_p(b)$ изменяется в зависимости от расстояния b до отверстия. Нарисуем схематически эту зависимость [см. рис. (а)]. В области вблизи отверстия, где число Френеля велико $m = R^2/\lambda b \geq 10^2$, дифракционные волновые эффекты проявляются слабо, здесь выполняются законы геометрической оптики. При увеличении b число Френеля уменьшается вплоть до $m = 1$ ($b = R^2/\lambda$), наблюдаются френелевские осцилляции интенсивности, которые наглядно описываются спиралью Френеля. Эта пространственная область называется ближней зоной дифракции, или областью дифракции Френеля. При дальнейшем увеличении



$b \gg L_D$, где $L_D = 4\pi R^2 / \lambda$ - дифракционная длина, переходим в область, где $m \ll 1$. Это дальняя зона дифракции, или область дифракции Фраунгофера в плоских волнах. Здесь отсутствуют осцилляции интенсивности, но интенсивность начинает зависеть от угла распространения ϑ . На рис. (б) схематически показано, каким образом меняется форма пучка за отверстием. В областях геометрической оптики и дифракции Френеля форма пучка повторяет форму диафрагмы, тогда как в области дифракции Фраунгофера наблюдается дифракционная расходимость пучка под углом $\vartheta \sim \lambda / 2R$

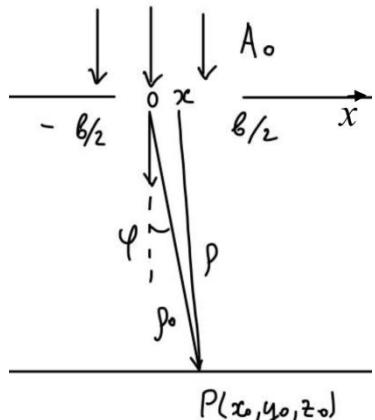
5.5. Дифракция в дальней зоне (дифр. Фраунгофера) как пространственное преобразование Фурье

Получим более строгую оценку дифракционной длины, которая характеризует область применимости приближения дальней зоны, или дифракции Фраунгофера. Покажем, что в дальней зоне формируется устойчивое угловое распределение поля пучка не зависящее от ρ (не меняющееся при дальнейшем распространении пучка), а угловая зависимость амплитуды поля от угла есть пространственное преобразование Фурье от функции распределения поля в отверстии.

A. Дифракция на щели. Приближения Френеля и Фраунгофера

Для простоты рассмотрим дифракцию на одномерном объекте (щели шириной b). Пусть на щель падает плоский фронт волны с амплитудой $A_0 = const$, за щелью амплитуда $A'_0 = A_0$ (см. рис.) и выполняется условие $b \ll L_y \ll \rho$, где ρ - расстояние от точки x щели до точки наблюдения $P(x_0, y_0, z_0)$ на экране, L_y - размер щели в направлении y ,

угол $\varphi \ll 1$. Запишем интеграл Френеля-Кирхгофа



$$A(P) = A(\varphi) = \frac{i}{\lambda} \int_{\text{Сущели}} A_0 \frac{e^{-ik\rho(x,y)}}{\rho(x,y)} dx dy.$$

Найдем зависимость $\rho = \rho(\rho_0, \varphi, x, y)$. Как видно из рис.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2 \Big|_{x_0^2 + z_0^2 = \rho_0^2} = \rho_0^2 - 2x_0 x + x^2 + f(y) \Rightarrow \\ \rho &= \rho_0 \sqrt{1 - \frac{2x_0 x}{\rho_0^2} + \frac{x^2}{\rho_0^2} + f'(y)} \Big|_{x \ll \rho_0} \approx \rho_0 \left(1 - \frac{x_0 x}{\rho_0^2} + \frac{x^2}{2\rho_0^2} + f''(y) \right) = \\ &= \left\{ \frac{x_0}{\rho_0} = \sin \varphi \right\} = \rho_0 - x \sin \varphi + \frac{x^2}{2\rho_0} + f''(y), \end{aligned}$$

где $f''(y)$ - функция только одной переменной y .

Оценим величину $1/\rho$ в интеграле Френеля-Кирхгофа. Т.к. $x, y \ll \rho_0$, то можно записать $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $\delta\rho \ll \rho_0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0 + \delta\rho} \approx \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) \approx \frac{1}{\rho_0}.$$

Тогда интеграл Френеля-Кирхгофа принимает вид:

$$A(\varphi) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ik\rho_0}}{\rho_0} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} e^{-ikf''(y)} dy \int_{-b/2}^{b/2} A'_0 e^{ik \left(x \sin \varphi - \frac{x^2}{2\rho_0} \right)} dx,$$

Амплитуда волны $A(\varphi)$ в направлении φ не будет осциллировать в зависимости от ρ_0 (как в случае дифракции Френеля), если в интеграле положить $\frac{kx^2}{2\rho_0} \ll 1$. Тогда получим

$$A(\varphi) \approx \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ik\rho_0}}{\rho_0} \beta \int_{-b/2}^{b/2} A'_0 e^{ikx} dx,$$

где $k_x = k \sin \varphi$, $\beta = \int_{-L_y/2}^{L_y/2} e^{-ikf''(y)} dy = const$ - результат интегрирования по переменной y .

Условие $\frac{kx^2}{2\rho_0} \ll 1$ является условие дальней зоны дифракции, или дифракции Фраунгофера.

Если оно не выполняется, то имеет место дифракция Френеля в ближней зоне. Его также можно записать в виде $\frac{kx^2}{2} \sim \frac{kD^2}{2} \equiv L_D \ll \rho_0$, где D - характерный размер отверстия, L_D - дифракционная длина.

Запишем амплитуду поля в отверстии в виде зависящей от x функции $A'_0 \rightarrow A'_0(x)$:

$$A_0(x) = \begin{cases} A_0 & \rightarrow |x| \leq b/2 \\ 0 & \rightarrow |x| > b/2 \end{cases}.$$

Тогда интеграл Френеля-Кирхгофа принимает вид:

$$A(\varphi) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ik\rho_0}}{\rho_0} \beta \int_{-\infty}^{+\infty} A'_0(x) e^{ikx} dx = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ik\rho_0}}{\rho_0} \beta A(k_x),$$

где $C' = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ik\rho_0}}{\rho_0} \beta$ не зависит от φ , а

$$A(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A'_0(x) e^{ikx} dx$$

- пространственное преобразование Фурье, или фурье-образ амплитуды $A'_0(x)$ поля в отверстии (пространственная спектральная амплитуда; пространственный спектр).

Таким образом, дифракция Фраунгофера в дальней зоне есть пространственное преобразование Фурье, т.к. амплитуды волн $A(\varphi)$ определяются пространственными спектральными амплитудами $A(k_x)$.

Лекция 12

Глава IV. Дифракция света

§5. Понятие о теории дифракции Кирхгофа (1882г.)

5.5. Дифракция в дальней зоне (дифр. Фраунгофера) как пространственное преобразование Фурье

В. Угловой спектр интенсивности пучка. Связь ширины спектра с попечерчными размерами пучка

§6. Дифракция Фраунгофера на пространственных структурах

6.1. Дифракция на щели и прямоугольном отверстии

6.2. Дифракция на круглом отверстии

6.3. Функция пропускания амплитудного и фазового объекта

6.4. Одномерная дифракционная решетка и ее «интерференционная» функция.

Положение и ширина главных дифракционных максимумов

§7. Анализ, преобразование и синтез световых полей

7.1. Дифракционная теория формирования изображения Аббе (1872 г.).

Пространственная фильтрация изображения, опыт Аббе-Портера (моделирование)

7.2. Специальные методы наблюдения фазовых объектов

А. Метод темного поля

Б. Метод фазового контраста

§5. Понятие о теории дифракции Кирхгофа (1882г.)

5.5. Дифракция в дальней зоне (дифр. Фраунгофера) как пространственное преобразование Фурье

В. Угловой спектр интенсивности пучка. Связь ширины спектра с попечерчными размерами пучка

На прошлой лекции было показано, что при дифракции Фраунгофера (в дальней зоне дифракции) угловая зависимость амплитуды дифрагированного поля $A(\varphi)$ определяется пространственным фурье-образом (спектральной пространственной амплитудой) $A(k_x)$ поля $A'_0(x)$ в отверстии

$$A(\varphi) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ik\rho_0}}{\rho_0} \beta \int_{-\infty}^{+\infty} A'_0(x) e^{ik_x \cdot x} dx = C' \beta \cdot A(k_x), \quad A(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A'_0(x) e^{ik_x \cdot x} dx.$$

Тогда интенсивность поля дифрагированной волны в дальней зоне запишется в виде:

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} A(\varphi) A^*(\varphi) = \frac{1}{2} |A(\varphi)|^2 = \frac{1}{2} |C' \beta|^2 |A(k_x)|^2.$$

Величина $I(\varphi) \sim |A(k_x)|^2$ называется *угловым спектром интенсивности пучка*. Ниже покажем, что ширина углового спектра пучка связана с поперечным размером пучка b_0 соотношением $\Delta\varphi = \lambda / b_0$.

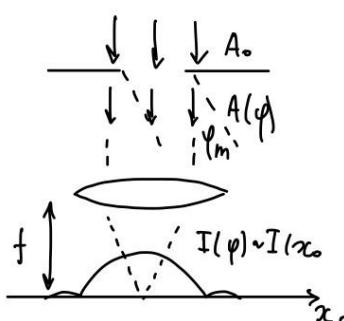
§6. Дифракция Фраунгофера на пространственных структурах

6.1. Дифракция на щели и прямоугольном отверстии

Получим аналитические выражения для угловых зависимостей амплитуды дифрагированного поля $A(\varphi)$ и спектра интенсивности пучка $I(\varphi)$ при дифракции Фраунгофера на щели.

$$\begin{aligned} A(\varphi) &= C' \beta \int_{-b_0/2}^{+b_0/2} A'_0 e^{ikx \sin \varphi} dx = C' \beta \frac{A'_0}{ik \sin \varphi} e^{ikx \sin \varphi} \Big|_{-b_0/2}^{+b_0/2} = C' \beta \frac{A'_0}{ik \sin \varphi} 2i \sin \left(k \sin \varphi \frac{b_0}{2} \right) = \\ &= C' \beta A'_0 b_0 \frac{\sin(k \sin \varphi b_0 / 2)}{k \sin \varphi b_0 / 2} = A(0) \operatorname{sinc} \left(\frac{k \sin \varphi b_0}{2} \right) \end{aligned}$$

где $A(0)$ - амплитуда волны при $\varphi = 0$ (см. рис.).



Соответствующий спектр интенсивности пучка:

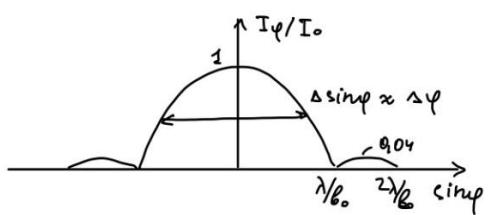
$$I(\varphi) = I(\varphi = 0) \operatorname{sinc}^2(k \sin \varphi \cdot b_0 / 2),$$

где $I(\varphi = 0)$ - интенсивность в центре дифракционной картины.

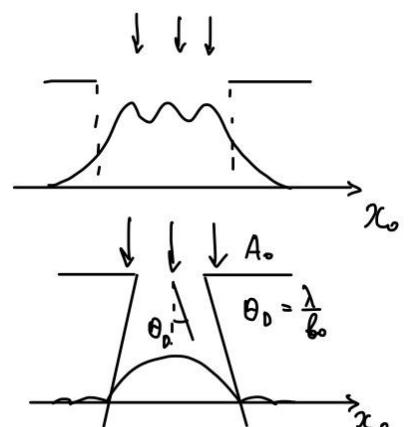
Как видно из приведенного ниже графика функции $I(\varphi)$, ее характерная угловая ширина $\Delta\varphi$ определяется положением первого минимума $k \sin(\Delta\varphi) \cdot b_0 / 2 = \pi$, т.е. ширина углового спектра пучка (угол дифракционной расходимости пучка)

$$\Delta\varphi = \lambda / b_0$$

обратно пропорциональна ширине пучка b_0 (ширине щели).



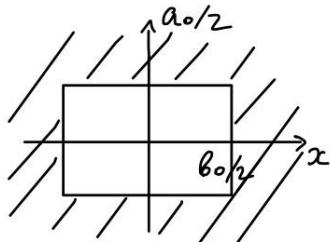
На правом рис. хорошо видны отличия дифракционных картин в случае дифракции Френеля в ближней зоне (верхняя панель; осцилляции в центральной области и монотонное затухание в области геометрической тени) и дифракции Фраунгофера в дальней зоне (нижняя



панель; отсутствуют осцилляции в центре дифракционной картины, есть осцилляции в области геометрической тени).

Дифракция Фраунгофера на прямоугольном отверстии

В случае 2D прямоугольного отверстия



$$\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \quad z_0 \gg x_0, y_0,$$

$$A(\varphi, \psi) \sim A(k_x, k_y), \text{ где } k_x = k \sin \varphi, k_y = k \sin \psi.$$

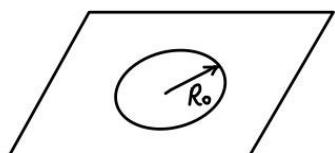
$$A(\varphi, \psi) = C' A'_0 \int_{-b_0/2}^{+b_0/2} \int_{-a_0/2}^{+a_0/2} e^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} dx dy = A(0) \operatorname{sinc} \frac{k \sin \varphi \cdot b_0}{2} \operatorname{sinc} \frac{k \sin \psi \cdot a_0}{2}.$$

Соответственно, интенсивность пучка в дальней зоне дифракции Фраунгофера:

$$I(\varphi, \psi) = I(0) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{k \sin \varphi \cdot b_0}{2} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{k \sin \psi \cdot a_0}{2} \right).$$

6.2. Дифракция на круглом отверстии

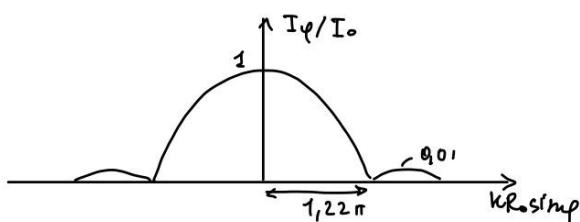
В случае дифракции Фраунгофера на круглом отверстии радиуса R_0 , угловая зависимость интенсивности дифрагированного излучения описывается функцией Бесселя первого порядка \mathcal{J}_1 :



$$I(\varphi) = I(0) \left[\frac{2\mathcal{J}_1(kR_0 \sin \varphi)}{kR_0 \sin \varphi} \right]^2.$$

Угловая ширина функции $I(\varphi)$ (см. рис. ниже) определяется из условия первого минимума: $kR_0 \sin \varphi_{\min} = 1,22\pi$. Таким образом,

угловая ширина дифрагирующего пучка (угол дифракционной расходности пучка) равен



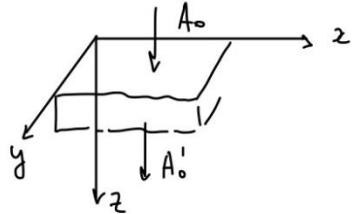
$$\Delta\varphi = \varphi_{\min} \approx 0.61 \frac{\lambda}{R_0} = 1,22 \frac{\lambda}{D}; \quad D = 2R_0.$$

6.3. Функция пропускания амплитудного и фазового объекта

Дифракционная решётка — любое устройство, обеспечивающее периодическую (одномерную, двумерную или трехмерную) модуляцию падающей волны по амплитуде или фазе, или одновременно по обеим величинам.

Дифракционная решетка является одним из основных элементов многих оптических приборов, например, спектральных приборов.

Введем понятия амплитудного и фазового объектов. Если функция пропускания объекта



$$\tau(x, y) = \frac{A'_0(x, y)}{A_0(x, y)}$$

является комплексной $\tau(x, y) = |\tau(x, y)| e^{i\Phi(x, y)}$, то в случае, если

$$\Phi(x, y) = 0, |\tau(x, y)| < 1,$$

объект называется амплитудным (например, чередование прозрачных и непрозрачных участков). Если же

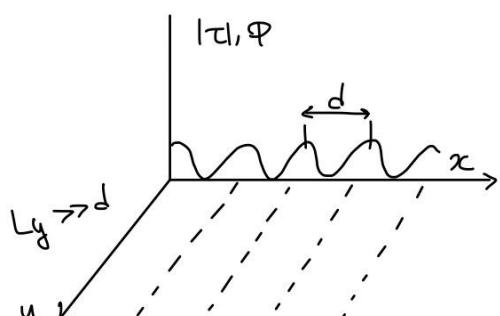
$$|\tau(x, y)| = 1, \Phi(x, y) \neq 0,$$

то объект называется фазовым (например, среда без поглощения, но с изменяющейся толщиной).

6.4. Одномерная дифракционная решетка и ее «интерференционная» функция.

Положение и ширина главных дифракционных максимумов

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на одномерной амплитудной дифракционной решетке. Ее функция пропускания является периодической и действительной функцией:



$$\tau(x) = \tau(x + d) = |\tau(x)|, \Phi(x, y) = 0,$$

d - период решетки, N - число штрихов решетки, $L = Nd$ - длина решетки.

Амплитуду колебаний поля в дальней зоне дифракции за дифракционной решеткой представим в виде суммы амплитуд от отдельных периодов решетки:

$$A(\varphi) = C' \beta \int_0^L A_0(x) \tau(x) e^{ik_x \cdot x} dx |_{A_0=const} = C' \beta A_0 \left(\int_0^d \tau(x) e^{ik_x \cdot x} dx + \int_d^{2d} \tau(x) e^{ik_x \cdot x} dx + \dots + \int_{(N-1)d}^{Nd} \tau(x) e^{ik_x \cdot x} dx \right)$$

Введем новую переменную x' : $x = x' + d$, тогда, поскольку $\tau(x) \neq \tau(x')$, $\tau(x'+d) = \tau(x')$, $dx = dx'$, получаем следующее выражение для интеграла в представленной выше сумме:

$$\int_d^{2d} \tau(x) e^{ik_x \cdot x} dx = \int_0^d \tau(x') e^{ik_x \cdot (x'+d)} dx' = e^{ik_x \cdot d} \int_0^d \tau(x') e^{ik_x \cdot x'} dx'.$$

Проводя подобное преобразование для всех остальных интегралов в сумме, получим:

$$A(\varphi) = C' \beta A_0 \int_0^d \tau(x) e^{ik_x \cdot x} dx \left(1 + e^{ik_x \cdot d} + e^{i2k_x \cdot d} + \dots + e^{i(N-1)k_x \cdot d} \right) = C' \beta A_0 \int_0^d \tau(x) e^{ik_x \cdot x} dx \frac{1 - e^{ik_x \cdot d \cdot N}}{1 - e^{ik_x \cdot d}},$$

где интеграл представляет собой пространственный фурье-образ функции пропускания $\tau(x)$ одного периода решетки.

Интенсивность дифрагированного поля записывается в виде произведения двух функций:

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} A(\varphi) A(\varphi)^* = I_1(\varphi) \frac{\sin^2(k_x \cdot d \cdot N / 2)}{\sin^2(k_x \cdot d / 2)} = I_1(\varphi) H(\varphi; N).$$

Функция $I_1(\varphi; \tau) = I_1(0) \left| \int_0^d \tau(x) e^{ik_x \cdot x} dx \right|^2$ соответствует интенсивности при дифракции излучения на одном периоде решетки (на одной щели) и зависит от функции пропускания $\tau(x)$ одного периода. Как показано выше, интенсивность при дифракции на одной щели

$$I_1(\varphi) = I_1(0) \operatorname{sinc}^2(k \sin \varphi \cdot b / 2),$$

где b - ширина щели. Нули этой функции соответствуют углам $k \sin \varphi_n b / 2 = n\pi$, т.е. $\sin \varphi_n = n\lambda / b$, $n = 1, 2, \dots$ (см. рис. ниже).

Функция

$$H(\varphi; N) = \frac{\sin^2(k_x \cdot d \cdot N / 2)}{\sin^2(k_x \cdot d / 2)}$$

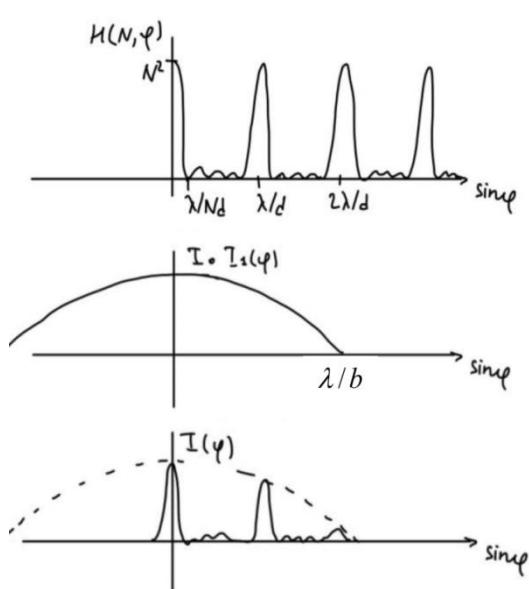
называется «интерференционным» множителем, она связана с многоволновой интерференцией излучения от различных периодов решетки. Функция $H(\varphi; N)$ не зависит от $\tau(x)$ и, соответственно, от типа дифракционной решетки, она определяется лишь параметрами решетки (d, N). Найдем максимальные и минимальные значения функции

$$H(\xi) = \frac{\sin^2 N\xi}{\sin^2 \xi}, \quad \xi = \frac{k_x \cdot d}{2}.$$

Максимум функции $H(\xi) = \left(\frac{\sin N\xi}{\sin \xi} \right)^2 = \left(\frac{N\xi}{\xi} \right)^2 = N^2$ достигается при $\xi = m\pi + \delta\xi$, где $\delta\xi \rightarrow 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$, т.е. при

$$\xi_m = \frac{k \sin \varphi_m d}{2} = m\pi.$$

Положение главных m -ых дифракционных максимумов (при нормальном падении излучения) определяется условием (см.рис.):



$$d \sin \varphi_m = m\lambda.$$

Добавочные минимумы возникают в нулях функции $H(\xi)$, т.е. при $N\xi = n\pi$; $n = 1, \dots, N-1$; $\xi \neq m\pi$. Таким образом, положение n -ого добавочного минимума задается условием:

$$\sin \varphi_n = \frac{\lambda}{Nd} n, \quad n = 1, \dots, N-1.$$

$$\text{Ширина главного максимума: } \Delta\varphi_{\max} \approx \frac{\lambda}{Nd} \sim \frac{1}{N}.$$

Результирующая функция интенсивности $I(\varphi)$ есть произведение функций $I_1(\varphi)$ и $H(\varphi; N)$ (см. нижний рис.).

§7. Анализ, преобразование и синтез световых полей

7.1. Дифракционная теория формирования изображения Аббе (1872 г.).

Пространственная фильтрация изображения, опыт Аббе-Портера (моделирование)

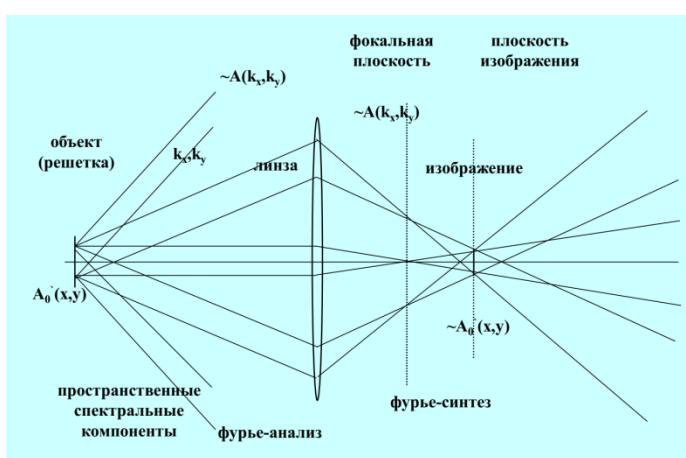
Аббе экспериментально обнаружил, что четкость изображения в микроскопе увеличивается при увеличении апертуры объектива (его диаметра). Причем это не связано с увеличением освещенности объекта.

Аббе впервые использовал волновую теорию света для объяснения процессов формирования оптического изображения в оптических приборах. Ранее использовалась только геометрическая оптика.

Согласно теории Аббе, процесс формирования оптического изображения можно разбить на два этапа (см.рис.).

1. Фурье-анализ волнового поля $A'_0(x, y)$ объекта, или формирование его фурье-образа $A(k_x, k_y)$. Фурье-образ формируется в дальней зоне при дифракции Фраунгофера. Использование линзы позволяет отобразить фурье-образ объекта в фокальной плоскости линзы в виде набора дифракционных максимумов.

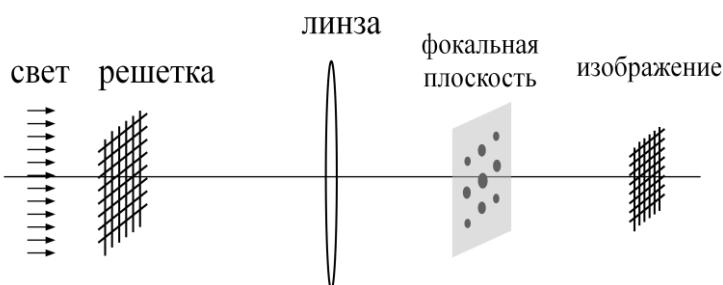
2. На втором этапе осуществляется фурье-синтез изображения $A'_0(x, y)$ на экране.



Изображение появляется на экране в результате интерференции волн вторичных источников, находящихся в фокальной плоскости линзы. Чем больше вторичных источников участвует в формировании изображения, тем оно будет четким, ближе к самому объекту.

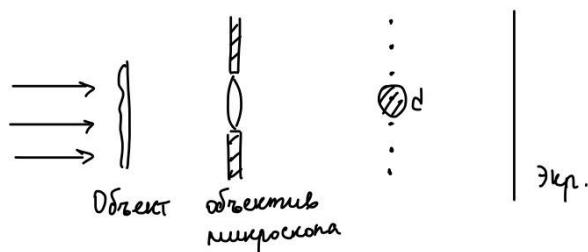
Закрывая часть пространственных спектральных компонент в фокальной плоскости линзы маской можно изменить фурье-

образ объекта и, следовательно, осуществить *пространственную фильтрацию изображения*, изменить изображение объекта. Схема опыта Аббе-Портера:



7.2. Специальные методы наблюдения фазовых объектов

С помощью изменения пространственного спектра излучения можно увеличить контрастность изображения фазовых объектов, например, слабо поглощающих свет тонких срезов тканей, клеток и т.п.



А. Метод темного поля

В отсутствие диска d наблюдается яркий белый экран с почти однородной засветкой (от фокального пятна линзы). Если закрыть центральный дифракционный максимум диском d (см.рис.), то на экране возникает «темное поле», на котором отчетливо видна структура фазового объекта.

Объясним качественно это явление с точки зрения теории Аббе.

Функция пропускания фазового объекта $\tau(x, y) = e^{i\Phi(x, y)} |_{\Phi \ll 1} \approx (1 + i\Phi)$. Амплитуда поля за объектом $A'_0 = A_0\tau$, тогда интенсивность $I = \frac{1}{2} |A'_0|^2 = \frac{1}{2} |\tau A'_0|^2 \sim I_0 + I_0\Phi^2$. При малом контрасте фазового объекта ($\Phi \ll 1$) интенсивность засветки на экране I_0 (без объекта) существенно превышает интенсивность, которая отображает структуру объекта $I_0\Phi^2 \ll I_0$.

Проведем пространственную фильтрацию изображения. Пространственный фурье-образ объекта за объективом микроскопа

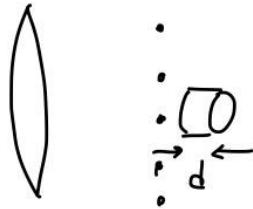
$$\begin{aligned} A(k_x, k_y) &= \int_{\Sigma} A_0 \tau(x, y) \cdot e^{ik_x \cdot x + ik_y \cdot y} dx dy = \\ &= \int_{\Sigma} A_0 (1 + i\Phi(x, y)) \cdot e^{ik_x \cdot x + ik_y \cdot y} dx dy = \int_{\Sigma} A_0 \cdot e^{ik_x \cdot x + ik_y \cdot y} dx dy + \int_{\Sigma} A_0 i\Phi(x, y) \cdot e^{ik_x \cdot x + ik_y \cdot y} dx dy. \end{aligned}$$

состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое не содержит информации об объекте, а лишь об ограниченной поверхности объектива Σ , по которой идет интегрирование. Если закрыть этот «нулевой» дифракционный максимум в центре фокальной плоскости линзы, то изменится фурье-образ в фокальной плоскости:

$$\tilde{A}(k_x, k_y) = \underbrace{\int_{\Sigma} A_0 \cdot e^{ik_x \cdot x + ik_y \cdot y} dx dy}_{\tilde{\tau}(x, y)} + \int_{\Sigma} A_0 i\Phi(x, y) \cdot e^{ik_x \cdot x + ik_y \cdot y} dx dy.$$

Новому фурье-образу будет соответствовать новая измененная функция пропускания $\tilde{\tau}(x, y) = i\Phi(x, y)$ (вместо $\tau = (1 + i\Phi)$). Новая амплитуда поля объекта $\tilde{A}_{ob} = A_0\tilde{\tau} = A_0i\Phi$, а интенсивность $\tilde{I}_{ob} = I_0\Phi^2$ уже не содержит слагаемого, соответствующего сильной засветке I_0 , которая снижает контраст изображения объекта.

Б. Метод фазового контраста



Существует другой метод увеличения контраста изображения путем изменения на $\pi/2$ фазы нулевого дифракционного максимума. Разместим за нулевым максимумом прозрачный диск, приводящий к сдвигу фазы поля на $\pi/2$:

$$A(\varphi = 0) \rightarrow e^{ikd} A(\varphi = 0) = e^{i\pi/2} A(\varphi = 0) = iA(\varphi = 0).$$

Тогда новый пространственный фурье-образ объекта имеет вид:

$$\tilde{A}(k_x, k_y) = \int_{\Sigma} A_0 e^{i\pi/2} \cdot e^{ik_x \cdot x + ik_y \cdot y} dx dy + \int_{\Sigma} A_0 i\Phi \cdot e^{ik_x \cdot x + ik_y \cdot y} dx dy = \int_{\Sigma} A_0 (i + i\Phi) \cdot e^{ik_x \cdot x + ik_y \cdot y} dx dy$$

Новая амплитуда поля объекта на экране $\tilde{A}_0 = A_0 i(1 + \Phi)$, а интенсивность $\tilde{I}_0 = |A_0 i(1 + \Phi)|^2 = I_0(1 + 2\Phi + \Phi^2)$ включает складываемое меньшего порядка малости $\Phi \gg \Phi^2$, что увеличивает контраст изображения.

Лекция 13

Глава IV. Дифракция света

§7. Анализ, преобразование и синтез световых полей

7.3. Роль дифракции в приборах, формирующих изображение. Предел разрешения, разрешающая сила

 А. Микроскоп

 Б. Телескоп

7.4. Запись и восстановление светового поля. Голография (Габор 1948, Лейт 1964)

7.5. Дифракционные, интерференционные и дисперсионные спектральные приборы

7.6. Разрешающая способность спектральных приборов

Глава V. Распространения света в веществе

§1. Дисперсия и поглощение света

1.1. Поляризация молекулы и поляризация среды. Формула Клаузиуса-Моссоти

§7. Анализ, преобразование и синтез световых полей

7.3. Роль дифракции в приборах, формирующих изображение. Предел разрешения, разрешающая сила

Для оптических систем, формирующих изображение, *предел разрешения (ПР)* – это минимальное расстояние между двумя точками объекта (l_{\min}), изображение которых можно разрешить (различить).

Разрешающая сила - величина обратная ПР, $R = 1/l_{\min}$, является мерой способности прибора разрешать две соседние точки предмета.

A. Микроскоп

a) Когерентное освещение объекта

Пусть l - характерный размер объекта, r_0 - радиус линзы объектива микроскопа, a - расстояние от объекта до объектива, n - показатель преломления среды, $\lambda = \lambda_0 / n$ - длина волны излучения в среде. Угол дифракционной расходимости излучения за объектом $\sin \theta_D = \lambda / l$ равен угловой ширине пространственного спектра излучения, дифрагировавшего на объекте. Именно в этом угловом интервале распространяется основная часть спектральных компонент со значительными амплитудами $A(k_x, k_y)$. Согласно теории Аббе, чем больше спектральных компонент попадает в объектив микроскопа, тем четче будет изображение. Эксперимент показывает, что изображение объекта l_{\min} будет достаточно четким, если в объектив (под углом $\sin \varphi = r_0 / a$) попадают

как минимум спектральные компоненты из угловой области порядка ширины пространственного спектра $\sin \vartheta_D = \lambda / l_{\min}$:

$\sin \varphi \geq \sin \vartheta_D = \lambda / l_{\min}$. Тогда

$$l_{\min} = \frac{\lambda}{\sin \varphi} = \frac{\lambda_0 a}{n r_0}.$$

Таким образом, существует дифракционный предел для размера объекта, изображение которого можно четко получить в микроскопе: $l_{\min} \sim \lambda$.

a) Самосветящийся объект

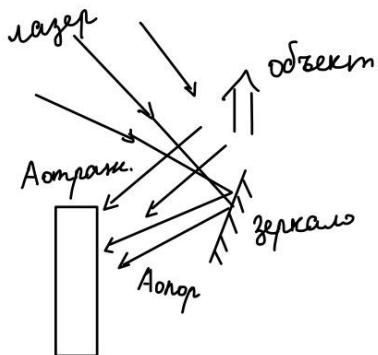
Аналогичный дифракционный предел имеет место и в случае, когда ограничение минимального размера разрешаемого объекта связано с ограничением размера фокального пятна линзы. Действительно, из-за дифракции Фраунгофера на круглом отверстии, которое задается радиусом линзы r_0 , излучение испытывает дифракционную расходимость под углом дифракции $\vartheta_D = 1.22\lambda / 2r_0$. Поэтому размер фокального пятна линзы имеет конечный размер, равный $r_f = f \vartheta_D = f 1.22\lambda / 2r_0$, где f - фокусное расстояние линзы. Т.к. минимальный угловой размер разрешенного объекта $\psi = l_{\min} / a$ равен углу дифракции, то из $\psi = l_{\min} / a = \vartheta_D = 1.22\lambda / 2r_0$ получаем $l_{\min} = 1.22\lambda_0 a / 2nr_0 \sim \lambda$.

Б. Телескоп

В телескопе можно различить два точечных объекта, если их изображение в фокальной плоскости линзы смешены не менее, чем на размер фокального пятна r_f . Таким образом, минимальный разрешенный угловой размер объекта $\varphi_{\min} = \vartheta_D = 1.22\lambda / 2r_0$. Для телескопа с $2r_0 = 1m$ величина $\varphi_{\min} = \vartheta_D = 1.22 \cdot 10^{-6} m / 1m \sim 10^{-6} rad$ (звездный интерферометр Майкельсона позволяет определить $\varphi_{\min} \sim 2 \cdot 10^{-7} rad$).

7.4. Запись и восстановление светового поля. Голография (Габор 1948, Лейт 1964)

В обычной фотографии на фотопластинке фиксируется только часть информации о световом поле – пространственное распределение интенсивности, а информация о пространственном распределении фазы отсутствует. *Голография* – это такой процесс записи светового поля, при котором записывается информация и о модуле и о фазе поля. Для этого нужно сфотографировать не само световое поле, идущее от объекта, а картину интерференции этого поля с когерентной опорной волной. Т.к. вид интерференционной картины зависит не только от амплитуд, но и от фаз интерферирующих волн, то на



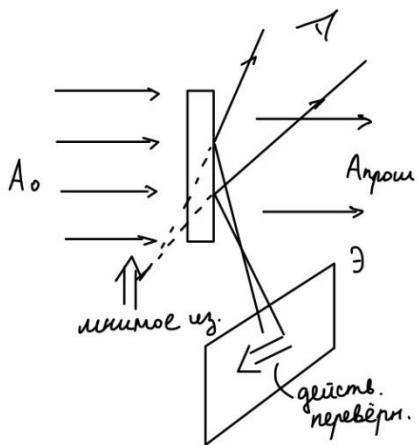
голограмме оказывается записанной вся информация о объектной волне. Восстановление изображения объекта происходит при дифракции опорной волны на голограмме.

Поле в плоскости голограммы $A = A_{ob} + A_{on}$, где A_{ob} - поле отраженное от объекта, A_{on} - опорная волна, отраженная от зеркала. Интенсивность интерференционной картины:

$$I(x, y) = AA^* = (A_{ob} + A_{on})(A_{ob}^* + A_{on}^*) = \\ = |A_{ob}|^2 + |A_{on}|^2 + A_{on}A_{ob}^* + A_{on}^*A_{ob}$$

Последние два слагаемых содержат информацию о фазе объектной волны.

Восстановление поля объектной волны. Опорный пучок дифрагирует на голограмме, возникают дифрагированные волны, одна из которых точно повторяет по своей структуре объектную волну, восстанавливает световое поле объекта.



Голограмма представляет собой амплитудный объект с функцией пропускания, зависящей от интенсивности записанного поля

$$\tau(x, y) = 1 - \alpha I(x, y),$$

где величина $\alpha I(x, y)$ определяет почернение голограммы в каждой точке. Подставляя в эту формулу выражение для интенсивности, получим амплитуду колебаний поля за голограммой:

$$A'_0 = A_{on} \tau(x, y) = A_{on} [1 - \alpha I(x, y)] = A_{on} - \alpha A_{on} A_{on}^* A_{ob} + \dots$$

Одно из слагаемых в сумме содержит амплитуду объектной волны A_{ob} .

7.5. Дифракционные, интерференционные и дисперсионные спектральные приборы

Спектральные приборы служат для анализа спектрального состава излучения. Спектральные приборы с пространственным разделением компонент спектра бывают:

а) дифракционными (дифракционная решетка)

$$d \sin \varphi_m(\lambda) = m\lambda;$$

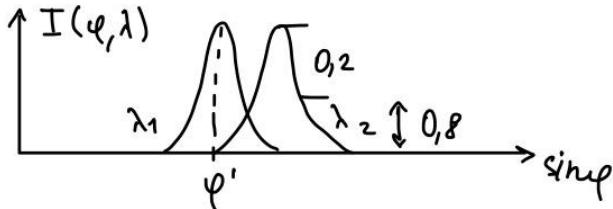
б) интерференционными (интерферометр Фабри-Перо)

$$2h \cos \varphi_m(\lambda) = m\lambda;$$

в) дисперсионными (призма, см.рис.ниже)

$$\sin \varphi(\lambda) = n(\lambda) \sin \alpha .$$

7.6. Разрешающая способность спектральных приборов



Разрешающая способность $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, где $\Delta\lambda$ - разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии разрешимы.

Критерий Рэлея: две линии разрешимы,

если под определённым углом наблюдения φ'

$$I_{\max}^{(\lambda_1)}(\varphi') = I_{\min}^{(\lambda_2)}(\varphi') .$$

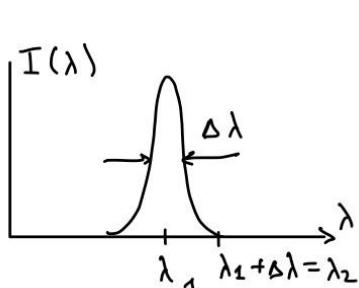
1. Дифракционная решетка, $\varphi' = \text{const}$

$$\max : d \sin \varphi'_{\lambda_1 \max} = m\lambda_1$$

$$\min : d \sin \varphi'_{\lambda_2 \min} = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda_2 \rightarrow \sin \varphi'_{\lambda_1 \max} = \sin \varphi'_{\lambda_2 \min} \rightarrow m\lambda_1 = (m + 1/N)\lambda_2 \rightarrow m\Delta\lambda = \lambda/N ,$$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \sim 10^5 \div 10^6, \quad m \sim 2 \div 5, \quad N = 600 \frac{\text{шт}}{\text{мм}} \cdot 15 \text{мм} \sim 10^4 .$$

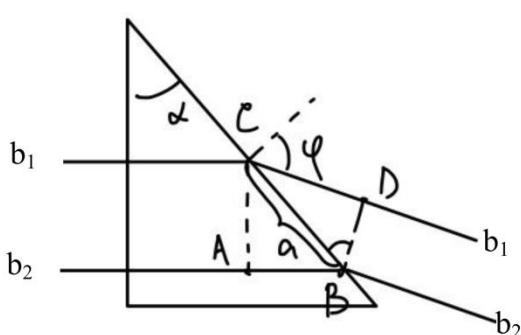
2. Интерферометр Фабри-Перо (см. лекцию про многоволновую интерференцию)



$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \pi \sqrt{R_{om}} \frac{2h}{\lambda} \frac{1}{1-R_{om}} \sim 10^7$$

при $R_{om} \approx 0,98$, $h = 5 \text{ см}$, $\varphi' = \text{const}$. Интерферометр ФП позволяет анализировать очень близкие спектральные линии.

3. Призма



Пространственно ограниченный выходящий пучок света дифрагирует (дифракционно расширяется аналогично дифракции света на щели). Из-за дисперсии, $n(\lambda)$, под одним и тем же углом φ будет наблюдаться максимум интенсивности света на одной длине волны, λ_1 , и минимум – на другой, λ_2 . Оценим эту разность длин волн $\Delta\lambda$.

Оптическая разность хода для волн на краях b_1 и b_2 пучка b_1b_2 в направлении под углом φ запишется в виде (см.рис.)

$$\tilde{\Delta} = AB \cdot n(\lambda) - CD = AB \cdot n(\lambda) - a \sin \varphi = a \sin \alpha \cdot n(\lambda) - a \sin \varphi = 0,$$

$$\varphi = \text{const}.$$

Оптическая разность хода, соответствующая условию максимума и минимума интенсивности пучка в направлении под углом φ для длин волн λ_1 и λ_2 определяется выражениями:

$$\begin{aligned} \max I(\lambda_1, \varphi): \tilde{\Delta} = a \sin \alpha \cdot n(\lambda_1) - a \sin \varphi = 0 \\ \min I(\lambda_2, \varphi): \tilde{\Delta} = a \sin \alpha \cdot n(\lambda_2) - a \sin \varphi = \lambda_2 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$a \sin \alpha \cdot \Delta n(\lambda) = \lambda, \quad \Delta n = n(\lambda_2) - n(\lambda_1), \quad R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{\Delta n(\lambda)}{\Delta \lambda} L \sim 10^3 \text{ cm}^{-1} 10 \text{ cm} = 10^4.$$

Глава V. Распространение света в веществе

Законы распространения света в веществе (поглощение, дисперсия $n(\omega)$, преломление и отражение, рассеяние, нелинейные эффекты) описываются процессами взаимодействия излучения с веществом, «атомы» которого в рамках классической физики хорошо описываются моделью Лоренца – классическая осцилляторная модель «атома». В этой модели «атом» представляет собой нейтральную частицу, в которой электрон может совершать гармонические колебания, т.е. является гармоническим осциллятором (осцилляторная модель Лоренца).

Такая электронная теория взаимодействия света с веществом основана на классическом рассмотрении, поэтому она ограничена, поскольку физические свойства наночастиц (атомов, молекул) адекватно можно описать только с помощью квантовой механики. Однако в рамках классической полуфеноменологической теории взаимодействия света с веществом можно объяснить целый ряд явлений, возникающих при распространении света в веществе.

Уже из вида волнового уравнения для изотропной среды ($\vec{E} \parallel \vec{P}$)

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \vec{E}_{tt} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{P}_{tt}$$

[$c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$; $\vec{j} = 0$; $\rho = 0$; $\mu = 1$] ясно, что определяющую роль в описании процессов взаимодействия излучения с веществом играет оптический отклик молекул на воздействие светового поля – их поляризуемость. Действительно, производная \vec{P}_{tt} является источником переизлученных в среде волн, а поляризация \vec{P} , дипольный момент единицы объема среды, определяется дипольным моментом молекул.

§1. Дисперсия и поглощение света

1.1. Поляризуемость молекулы и поляризация среды. Формула Клаузиуса-Моссоти и Лоренц-Лоренца

Найдем связь макропараметра, диэлектрической проницаемости $\varepsilon(a)$, с микропараметром a - поляризуемостью молекулы.

В случае линейного взаимодействия излучения со средой, когда среднее макроскопическое поле в среде $E \ll E_{am}$, где $E_{am} \sim 10^9 B/m$ - внутриатомное поле, средняя макроскопическая поляризация среды \vec{P} линейно связана с макроскопическим полем соотношением

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E},$$

где χ - диэлектрическая восприимчивость среды. Тогда волновое уравнение имеет вид:

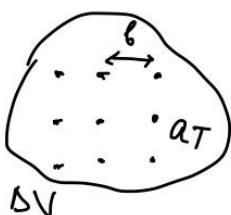
$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \vec{E}_{tt} = \frac{\chi}{c^2} \vec{E}_{tt},$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \vec{E}_{tt} = 0,$$

где $n^2 = \varepsilon = 1 + \chi$, ε - диэлектрическая проницаемость. Индукция электрического поля $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$.

Запишем среднюю макроскопическую поляризацию среды $\vec{P}(\vec{r})$ через сумму дипольных моментов \vec{P}_i отдельных молекул в объеме ΔV вблизи некоторой точки \vec{r}

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{m_{\Delta V}} \vec{P}_i = N \vec{P}_i,$$



где $b^3 \ll \Delta V \ll \lambda^3$, b - характерное расстояние между молекулами (порядка 1-10 нм), $m_{\Delta V}$ - число молекул в объеме усреднения ΔV , $N = m_{\Delta V} / \Delta V$ - средняя концентрация молекул в точке \vec{r} . Предполагается, что все \vec{P}_i в объеме ΔV одинаковые. Средняя поляризация $\vec{P}(\vec{r})$ одинаковая в любой точке в области $\Delta V \ll \lambda^3$ (см. рис.).



Лекция 14

Глава V. Распространения света в веществе

§1. Дисперсия и поглощение света

- 1.1. Поляризуемость молекулы и поляризация среды. Формула Клаузиуса-Моссотти
 - 1.2. Комплексный показатель преломления и закон Бугера. Комплексная поляризуемость (компл. формула Клаузиуса-Моссотти)
 - 1.3. Классическая электронная теория дисперсии. Дисперсионная формула Лорентц-Лоренца
 - 1.4. Зависимость показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты
 - 1.5. Дисперсионная формула Зелмеера
 - 1.6. Экспериментальное наблюдение нормальной (Ньютона 1672) и аномальной (Леру 1861) дисперсий
 - 1.7. Распространение светового импульса в диспергирующей среде. Групповая скорость
 - A. Формула Рэлея
 - B. Дисперсионное расплывание волновых пакетов. Дисперсионная длина. (Солитоны. Сжатие чирпированных импульсов)
-

§1. Дисперсия и поглощение света

1.1. Поляризуемость молекулы и поляризация среды. Формула Клаузиуса-Моссотти

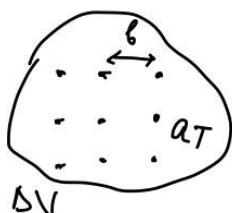
Запишем дипольный момент молекулы, наведенный локальным полем \vec{E}_l :

$$\vec{P}_i = \epsilon_0 a \vec{E}_l.$$

Тогда, как показано в предыдущей лекции, средняя макроскопическая поляризация среды

$$\vec{P}(\vec{r}) = N(\vec{r}) \vec{P}_i = N(\vec{r}) \epsilon_0 a \vec{E}_l,$$

где a - поляризуемость молекулы (электронная поляризуемость, возникающая из-за смещения электронной плотности под действием поля \vec{E}_l , т.е. из-за поляризации смещения); N - средняя концентрация молекул в точке \vec{r} .



\vec{E}_l - локальное микроскопическое поле, действующее на молекулу в данной точке \vec{r} , оно отличается от среднего (по объему

пространства порядка ΔV , $b^3 \ll \Delta V \ll \lambda^3$) макроскопического поля $\vec{E} \neq \vec{E}_l$. Поле \vec{E} рассчитывается из макроскопического волнового уравнения, где стоит средняя макроскопическая поляризация \vec{P} , однако на масштабе порядка межатомных расстояний $\sim b$ реально средней однородной поляризации среды не существует, а есть дискретная сумма полей соседних с данной молекулой диполей. Таким образом, чтобы рассчитать величину локального поля \vec{E}_l , необходимо от среднего макроскопического поля в среде \vec{E} отнять поле, $-\vec{P}/3\epsilon_0$, однородно поляризованного шара с поляризацией \vec{P} и прибавить рассчитанное микроскопически поле $\vec{E}_{\text{расc.микро}}$ от соседних диполей:

$$\vec{E}_l = \vec{E} - \left(-\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) + \vec{E}_{\text{расc.микро}}.$$

В случае твердотельных структур с кубической симметрией решетки, а также жидкостей и газов, поле $\vec{E}_{\text{расc.микро}} = 0$. Поэтому локальное поле связано со средним макроскопическим полем соотношением:

$$\vec{E}_l = \vec{E} - \left(-\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) + 0 = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

Из этого соотношения для полей можно найти связь макроскопических параметров среды χ и ϵ и микроскопической поляризуемости молекулы a .

А) Для разреженных газов

$$\left| \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right| \ll |\vec{E}| \Rightarrow \vec{E}_l \approx \vec{E}, \text{ тогда } \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \Big|_{P=Np_i} = N \epsilon_0 a \vec{E}_l \Big|_{E_l=E} = \epsilon_0 a N \vec{E} \Rightarrow ,$$

$$\chi = aN \Rightarrow \epsilon = 1 + aN, \quad n^2 = 1 + aN.$$

Оценка: $N \sim 10^{25} \text{ м}^{-3}$, $\epsilon - 1 \sim 10^{-4}$ $\Rightarrow a \sim 10^{-29} \text{ м}^3$.

Б) Для сжатых газов, жидкостей, кубических кристаллов

Т.к. в этом случае $\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$, то выражая поляризацию \vec{P} через микропараметр a , $\vec{P} = \epsilon_0 N a \vec{E}_l = \epsilon_0 N a \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$, и через макропараметр χ , $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$, получим соотношение $3\chi = Na(\chi + 3)$, или $3(\epsilon - 1) = Na(\epsilon + 2) \Rightarrow$:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Na}{3}$$

- формула Краузиуса-Моссотти. Если в этой формуле, используя электронную теорию Лоренца, явно записать частотную зависимость $a = a(\omega)$, то получим дисперсионную формулу Лорентц-Лоренца (см. ниже).

Оценка для H₂O: $n = 1.33$, $(n^2 - 1)/(n^2 + 2) = 0.2$, $N = 3.3 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ $\Rightarrow a \sim 2 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$

1.2. Комплексный показатель преломления и закон Бугера. Комплексная поляризуемость (комплексная формула Клаузиуса-Моссотти)

Получим волновое уравнение с комплексным показателем преломления n_k и определим физический смысл величины n_k . Перейдем в волновом уравнении

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \vec{E}_{tt} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{P}_{tt}$$

к комплексным полю \vec{E}_k и поляризации \vec{P}_k , используя соотношения:

$\vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{E}_k + \kappa.c.)$, $\vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{P}_k + \kappa.c.)$, $\vec{P}_k = \epsilon_0 \chi_k \vec{E}_k$, где χ_k - коэффициент пропорциональности между комплексной поляризацией и комплексным полем. Тогда для \vec{E}_k волновое уравнение имеет вид:

$$\Delta \vec{E}_k - \frac{n_k^2}{c^2} \vec{E}_{ktt} = 0,$$

где n_k - комплексный показатель преломления, $n_k^2 = \epsilon_k = 1 + \chi_k$, ϵ_k - коэффициент пропорциональности между комплексной индукцией и комплексным полем: $\vec{D}_k = \epsilon_0 \epsilon_k \vec{E}_k$.

Выясним, каков физический смысл величин $\operatorname{Re} n_k$ и $\operatorname{Im} n_k$? Найдем решение волнового уравнения в виде гармонической волны:

$$\vec{E}_k = \vec{E}_{0k} e^{i(k_k z - \omega t)}.$$

Подстановка решения в волновое уравнение приводит к следующему дисперсионному соотношению $k_k = k_k(\omega)$:

$$k_k = \frac{\omega}{c} n_k.$$

Обозначим $n_k \equiv n + i n''$, где $n \equiv \operatorname{Re} n_k$, $n'' \equiv \operatorname{Im} n_k$. Решение для комплексного поля волны, распространяющейся вдоль оси z , запишется в виде:

$$\vec{E}_k = \vec{E}_{0k} e^{-\frac{\omega n'' z}{c}} e^{i\left(\frac{\omega}{c} n z - \omega t\right)},$$

где $\omega/c = k_0$ - волновое число в вакууме; $(\omega/c)n = k_0n = k$ - волновое число в среде; следовательно, $n = \operatorname{Re} n_\kappa$ - традиционный показатель преломления среды, определяющий величину фазовой скорости:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k_0 n} = \frac{c}{n}.$$

Из решения для поля \vec{E}_k видно, что мнимая часть комплексного показателя преломления $n'' \equiv \operatorname{Im} n_\kappa$ определяет экспоненциальное затухание амплитуды $\vec{E}_{0\kappa} e^{-\frac{\omega}{c} n'' z}$ волны по мере ее распространения вдоль оси z . Таким образом, мнимая часть показателя преломления n'' описывает *поглощение излучения в среде*. Интенсивность волны будет затухать по закону Бугера:

$$I(z) = \frac{1}{2} \vec{E}_k \vec{E}_k^* = I_0 e^{-\alpha z},$$

где I_0 - интенсивность при $z=0$; $\alpha = 2(\omega/c)n'' = 2k_0n''$ - коэффициент поглощения среды.

Запишем формулу Клаузиуса-Моссотти в комплексных функциях, чтобы затем получить частотную зависимость $n_\kappa = n_\kappa(\omega)$ для описания дисперсионных свойств среды.

Введем комплексные величины: макроскопическое поле \vec{E}_k , макроскопическую поляризацию среды \vec{P}_κ , локальное поле \vec{E}_{lk} , наведенный полем дипольный момент молекулы \vec{P}_{ik} и поляризуемость молекулы a_κ , используя следующие соотношения: $\vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{E}_k + \kappa.c.)$, $\vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{P}_\kappa + \kappa.c.)$, $\vec{E}_l = \frac{1}{2}(\vec{E}_{lk} + \kappa.c.)$, $\vec{P}_i = \frac{1}{2}(\vec{P}_{ik} + \kappa.c.)$, $\vec{P}_{ik} = \epsilon_0 a_\kappa \vec{E}_{lk}$.

Из равенств

$$\begin{cases} \vec{P}_\kappa = N \vec{P}_{ik} = N \epsilon_0 a_\kappa \vec{E}_{lk} = N \epsilon_0 a_\kappa \left(\vec{E}_k + \frac{\vec{P}_\kappa}{3\epsilon_0} \right), \\ \vec{P}_\kappa = \epsilon_0 \chi_\kappa \vec{E}_k, \end{cases}$$

несложно получить комплексную формулу Клаузиуса-Моссотти:

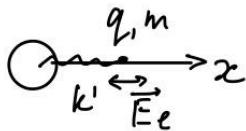
$$\frac{\epsilon_\kappa - 1}{\epsilon_\kappa + 2} = \frac{n_\kappa^2 - 1}{n_\kappa^2 + 2} = \frac{Na_\kappa}{3}.$$

1.3. Классическая электронная теория дисперсии. Дисперсионная формула Лоренца-Лоренца

Рассчитаем частотную зависимость $a_\kappa = a_\kappa(\omega)$, используя классическую электронную теорию Лоренца взаимодействия излучения с веществом. Далее, используя

комплексную формулу Клаузиуса-Моссотти, получим частотную зависимость $n_\kappa = n_\kappa(\omega)$ (дисперсионную формулу Лоренц-Лоренца), которая описывает дисперсию.

С микроскопической точки зрения распространение света в среде происходит следующим образом. Под действием поля световой волны в молекулярной среде индуцируются диполи, совершающие *вынужденные колебания с частотой световой волны*. Эти диполи являются источниками вторичных волн. Поле в среде есть суперпозиция поля падающей волны и поля, излученного диполями.



В классической осцилляторной модели Лоренца, «атом» представляет собой осциллирующий в локальном электрическом поле E_l заряд q с массой m (электрон). Уравнение классического затухающего осциллятора запишем в виде $m\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + k'x = qE_l$, или

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m} E_l,$$

где γ - коэффициент затухания осциллятора, ω_0 - собственная частота колебаний осциллятора.

Введем дипольный момент электрона-осциллятора $P_i = qx$, тогда уравнение для дипольного момента принимает вид:

$$\ddot{P}_i + \gamma\dot{P}_i + \omega_0^2 P_i = \frac{q^2}{m} E_l .$$

Будем искать решение уравнения в комплексных функциях. Подставляя $P_i = (1/2)(P_{ik} + \text{к.с.})$ и $E_l = (1/2)(A_{lk}e^{-i\omega t} + \text{к.с.})$, где A_{lk} - амплитуда колебаний комплексного локального поля, получаем уравнение для комплексного дипольного момента

$$\ddot{P}_{ik} + \gamma\dot{P}_{ik} + \omega_0^2 P_{ik} = \frac{q^2}{m} A_{lk} e^{-i\omega t} .$$

Его решение ищем в виде $P_{ik} = P_{i0}e^{-i\omega t}$, где P_{i0} - амплитуда комплексная дипольного момента осциллятора. Подставляя $P_{ik} = P_{i0}e^{-i\omega t}$ в уравнение, получаем $(-\omega^2 + \omega_0^2 - i\gamma\omega)P_{i0}e^{-i\omega t} = (q^2/m)A_{lk}e^{-i\omega t}$. Таким образом, дипольный момент

$$P_{ik} = \frac{q^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} E_{lk} .$$

С другой стороны (см. выше) $P_{ik} = \epsilon_0 a_\kappa(\omega) E_{lk}$. Тогда, комплексная поляризуемость запишется в виде

$$a_\kappa(\omega) = \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} .$$

Подставляя эту величину в формулу Клаузиса-Массотти

$$\frac{\varepsilon_k(\omega)-1}{\varepsilon_k(\omega)+2} = \frac{n_k^2(\omega)-1}{n_k^2(\omega)+2} = \frac{Na_k(\omega)}{3},$$

получаем дисперсионную формулу Лорентц-Лоренца:

$$\frac{\varepsilon_k(\omega)-1}{\varepsilon_k(\omega)+2} = \frac{n_k^2(\omega)-1}{n_k^2(\omega)+2} = \frac{Nq^2}{3\varepsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)},$$

которая описывает закон дисперсии, т.е. зависимость показателя преломления от частоты излучения, $n_k = n_k(\omega)$.

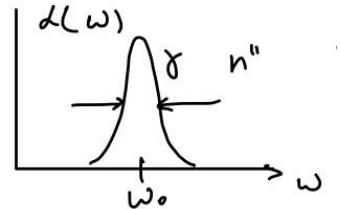
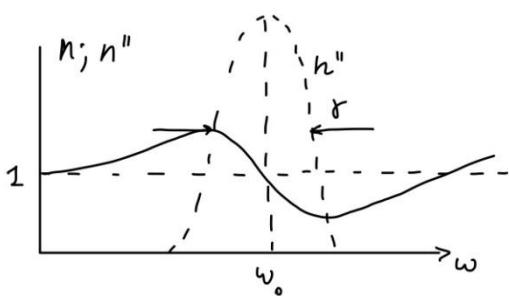
1.4. Зависимость показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты

Проведем анализ формулы Лорентц-Лоренца в простейшем случае разреженных газов, когда $n_k \approx 1$, $n_k^2 - 1 = (n_k - 1)(n_k + 1) \approx 2(n_k - 1)$, $n_k^2 + 2 \approx 3$. Из формулы Лорентц-Лоренца, реальная и мнимая части показателя преломления, $n_k(\omega) = n(\omega) + in''(\omega)$, запишутся в виде:

$$n(\omega) = 1 + \frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \quad n''(\omega) = \frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Из графика для мнимой части комплексного показателя преломления $n''(\omega)$ (левый рис., штриховая кривая) видно, что максимумы $n''(\omega)$ и наблюдаются на резонансной

частоте $\omega = \omega_0$. Максимум коэффициента поглощения $\alpha(\omega) = 2k_0 n''(\omega)$ (правый рис.) также соответствует $\omega = \omega_0$. Отметим, что в реальном масштабе $n'' \ll 1$.



На графике показателя преломления $n(\omega)$ (левый рис., сплошная линия) можно видеть две области: нормальной и аномальной дисперсий.

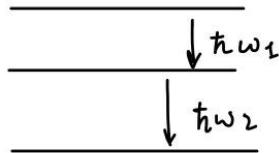
$\frac{dn}{d\omega} > 0$ – область нормальной дисперсии (поглощение n'' мало),

$\frac{dn}{d\omega} < 0$ – область аномальной дисперсии (поглощение n'' велико).

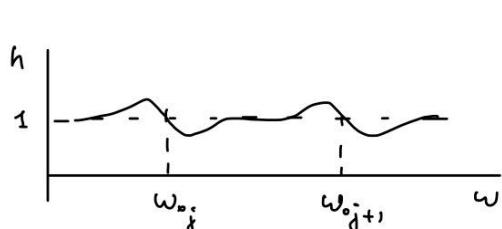
В области частот $\omega < \omega_0$, $n > 1 \Rightarrow$ фазовая скорость $v_\phi = c/n < c$,

при $\omega > \omega_0$, $n < 1 \Rightarrow$ фазовая скорость $v_\phi = c/n > c$.

1.5. Дисперсионная формула Зелмеера



В эксперименте с реальными атомами и молекулами в спектрах излучения и поглощения наблюдается набор собственных частот осциллятора ω_{0j} (см. рис.). Соответствующая дисперсионная формула Зелмеера имеет вид

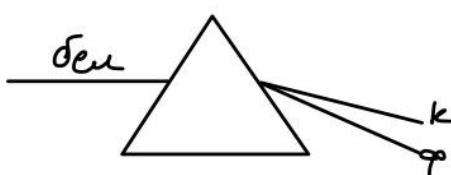


$$n_k(\omega) = 1 + \frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - i\gamma_j \omega},$$

где f_j - сила осциллятора, характеризующая вклад колебаний на частоте ω_{0j} в $n_k(\omega)$. Величина f_j строго рассчитывается в квантово-механической теории.

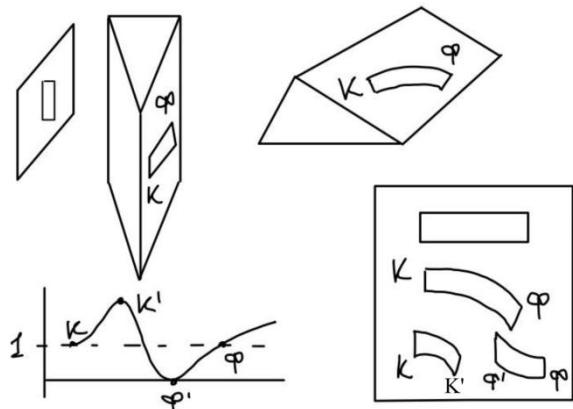
1.6. Экспериментальное наблюдение нормальной (Ньютон 1672) и аномальной (Леру 1861) дисперсий

1). Первый опыт по наблюдению нормальной дисперсии был выполнен Ньютона в 1672г. (см.рис). Как следует из теории Лоренца, прозрачные оптические материалы (вдали от полос поглощения) должны обладать нормальной дисперсией, $dn/d\omega > 0$, т.е. показатель преломления должен увеличиваться с увеличением частоты, что и наблюдалось экспериментально: волны фиолетовой части спектра преломляются больше, чем красные



световые волны.

2). Существование аномальной дисперсии, $dn/d\omega < 0$, в области поглощения также подтверждено экспериментально (Леру 1861). В призме с парами иода фиолетовые лучи преломляются меньше красных.



На рис. представлена схема метода скрещенных призм для наблюдения аномальной дисперсии (Кундт). В случае, если материал второй (правой) призмы обладает нормальной дисперсией, фиолетовый край спектра наклонен ниже красного края. Вблизи линии поглощения (область аномальной дисперсии) излучение на красном крае линии поглощения, K' (см.рис.), преломляется сильнее, чем излучение на фиолетовом крае линии

поглощения, Φ' . Это приводит к характерному пространственному искривлению спектра. Разрыв спектра объясняется сильным поглощением излучения на резонансной частоте.

1.7. Распространение светового импульса в диспергирующей среде. Групповая скорость

$$\begin{array}{c} \vec{k}_1, \omega_1 \\ \hline \vec{k}_2, \omega_2 \\ \hline z \end{array}$$

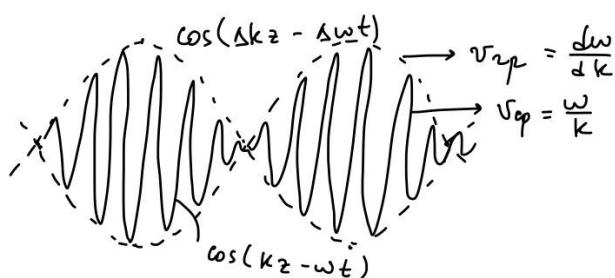
Покажем, что скорость распространения огибающей амплитуды волнового пакета, или групповая скорость импульса, определяется величиной дисперсии: $v_{gp} = d\omega / dk$.

Для простоты рассмотрим суперпозицию двух гармонических монохроматических волн (k_1, ω_1 и k_2, ω_2), распространяющихся в одном направлении вдоль оси z (см. рис.) в среде с дисперсией, или диспергирующей среде. Суммарное поле волн

$$E = E_0 \cos(k_1 z - \omega_1 t) + E_0 \cos(k_2 z - \omega_2 t) = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}z - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \cos(kz - \omega t),$$

где $\Delta k = k_2 - k_1$; $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$; $k = (k_1 + k_2)/2$. Далее преобразуем поле волны к виду

$$E = 2E_0 \cos\left[\frac{\Delta k}{2}\left(z - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)\right] \cdot \cos(kz - \omega t).$$



Медленно изменяющаяся в пространстве и во времени огибающая амплитуд суммарной волны,

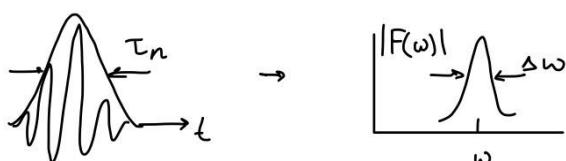
$$2E_0 \cos\left[\frac{\Delta k}{2}\left(z - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)\right],$$

распространяется со скоростью $v_{gp} = \Delta\omega / \Delta k$. Это есть скорость распространения точки постоянной огибающей амплитуды (см.рис., пунктирная линия). Действительно,

$$\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{\Delta k}{2} \left(z - \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t \right)}_{const} \right] = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$$

Быстро осцилирующая часть волны, $\cos(kz - \omega t)$, распространяется с фазовой скоростью $v_\phi = \omega / k$, отличной от групповой скорости:

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk} \neq v_\phi = \frac{\omega}{k}$$



Поскольку оптический импульс длительностью τ представляет собой волновой пакет со спектральной шириной

$\Delta\omega \sim 1/\tau$, т.е. суперпозицию гармонических волн с различными частотами, то несложно показать, что огибающая амплитуд импульса, или просто импульс, распространяется в среде с групповой скоростью, она же – скорость распространения энергии импульса. В общем векторном виде групповая скорость записывается как градиент ω в k -пространстве:

$$\vec{v}_{ep} = \frac{d\omega}{dk} = \text{grad}_k \omega(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \vec{e}_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \vec{e}_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \vec{e}_z.$$

A. Формула Рэлея

Найдем связь групповой и фазовой скоростей, формулу Рэлея, в диспергирующей среде.

$$\frac{1}{v_{ep}} = \frac{dk}{d\omega} = \left| \frac{dk_0 n(\omega)}{d\omega} \right|_{k_0 = \frac{\omega}{c}} = \frac{n(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega} = \frac{1}{v_\phi} + \frac{\omega}{c} \frac{\partial n}{\partial \omega} = \frac{1}{v_\phi} + \frac{\omega}{v_\phi n} \frac{\partial n}{\partial \omega},$$

$$v_{ep} = \frac{v_\phi}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega}}$$

- *формула Рэлея.* Из формулы видно, что в случае нормальной дисперсии $\partial n / \partial \omega > 0 \Rightarrow v_{ep} < v_\phi$.

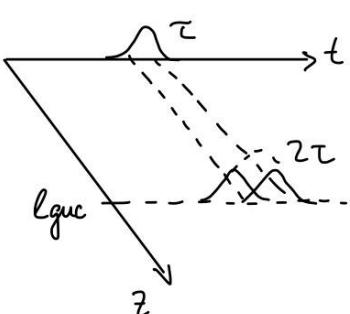
Зам.1. Формула Рэлея в каноническом виде записывается следующим образом:

$$v_{ep} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dv_\phi k(\omega)}{dk} = v_\phi + k \frac{dv_\phi}{dk} = v_\phi - \lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda}.$$

Зам.2. В резонансных поглощающих и усиливающих средах (в случае аномальной дисперсии) световой импульс сильно искажается, поэтому понятие групповой скорости в этих случаях нужно использовать очень аккуратно. В противном случае можно получить «сверхсветовое» распространение энергии, нарушение принципа причинности и другие ошибочные результаты.

Б. Дисперсионное расплывание волновых пакетов. Дисперсионная длина

Если в среде величина групповой скорости зависит от частоты, $v_{ep} = v_{ep}(\omega) = d\omega/dk$. (дисперсия групповой скорости, или дисперсия второго порядка), то различные спектральные компоненты импульса будут распространяться с различными $v_{ep}(\omega)$. Поэтому импульс испытывает дисперсионное расплывание при распространении в диспергирующие среды. Характерная длина, на которой длительность импульса τ



увеличивается в два раза называется дисперсионной длиной, l_{duc} (см рис.).

Оценим дисперсионную длину. По определению,

$\frac{l_{duc}}{v_{ep}(\omega_2)} - \frac{l_{duc}}{v_{ep}(\omega_1)} = \tau$. Используя выражение для групповой скорости, запишем это равенство в виде:

$$\frac{l_{duc}}{v_{ep}(\omega_2)} - \frac{l_{duc}}{v_{ep}(\omega_1)} = \left[\frac{l_{duc}}{\frac{d\omega}{dk}} \right]_{\omega_2} - \left[\frac{l_{duc}}{\frac{d\omega}{dk}} \right]_{\omega_1} = \tau \Rightarrow l_{duc} \left(\left[\frac{dk}{d\omega} \right]_{\omega_2} - \left[\frac{dk}{d\omega} \right]_{\omega_1} \right) = \tau.$$

Поделим левую и правую части правого равенства на $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, тогда: $l_{duc} \frac{d^2k}{d\omega^2} \approx \tau \frac{1}{\Delta\omega}$. Т.к. спектральную ширину импульса можно оценить как $\Delta\omega \sim 1/\tau$, то получим, что величина дисперсионной длины зависит от параметра дисперсии второго порядка, $\frac{d^2k}{d\omega^2}$, и квадратично зависит от длительности импульса:

$$l_{duc} \approx \tau^2 / \frac{d^2k}{d\omega^2}.$$

Чем короче импульс, тем быстрее он расплывается. Так, в стекле для импульса с длительностью $\tau \sim 1 \text{ пс} = 10^{-12} \text{ с}$ на длине волны $\lambda \sim 1 \text{ мкм}$ дисперсионная длина $l_{duc} \sim 15 \text{ м}$

Лекция 15

Глава V. Распространения света в веществе

§2. Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков

- 2.1. Законы отражения и преломления света. Полное внутреннее отражение.
 - 2.2. Формулы Френеля
 - 2.3. Изменение фазы при отражении. Нормальное и скользящее падения. Эффект Брюстера
 - 2.4. Энергетические соотношения при преломлении и отражении света
-

§2. Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков

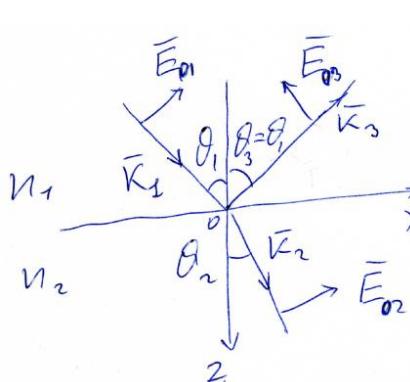
Отражение света на границе раздела диэлектриков, например, отражение от воды или стекла, - часто встречающееся в повседневной жизни оптическое явление. В этой лекции мы рассмотрим физические причины и основные закономерности появления преломления и отражения на границе раздела диэлектриков.

2.1. Законы отражения и преломления света. Полное внутреннее отражение.

Теоретически задача прохождения и отражения световой волны через границу диэлектриков решается с использованием граничных условий для полей \vec{E} и \vec{H} - равенства тангенциальных компонент полей на границе.

Пусть на границу раздела двух изотропных однородных диэлектриков с показателями преломления n_1 и n_2 падает под углом θ_1 плоская монохроматическая линейно поляризованная волна

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)}$$



с волновым вектором \vec{k}_1 и амплитудой \vec{E}_{01} (см.рис.). Необходимо найти: 1) направления распространения проходящей и отраженной волн, т.е. волновые векторы \vec{k}_2, \vec{k}_3 ; 2) амплитуды $\vec{E}_{02}, \vec{E}_{03}$ и поляризации проходящей и отраженной волн \vec{E}_2, \vec{E}_3 , соответственно.

Запишем граничные условия для полей \vec{E}_i :

$$E_{1\tau}(\vec{r}, t) + E_{3\tau}(\vec{r}, t) = E_{2\tau}(\vec{r}, t),$$

где $E_{1\tau}(\vec{r}, t)$ - проекции векторов полей \vec{E}_i , $i=1,2,3$, на плоскость $\{x, y\}$, или тангенциальные проекции полей. Т.к. граничные условия должны выполняться в любой точке границы, в том числе и в точке $\vec{r}=0$, то при $\vec{r}=0$ граничные условия запишутся в виде:

$$E_{01\tau}e^{-i\omega_1 t} - E_{03\tau}e^{-i\omega_3 t} = E_{02\tau}e^{-i\omega_2 t},$$

где E_{0it} - тангенциальные проекции амплитуд полей, ω_i - частоты волн. Знак «-» соответствует отрицательной проекции амплитуды \vec{E}_{03} на ось x (см.рис.). Т.к. это линейная суперпозиция гармонических функций, то равенство может выполняться в любой момент времени только при равенстве показателей экспонент, следовательно, *частоты равны*

$$\omega = \omega_2 = \omega_3.$$

Найдем направления волновых векторов. Поскольку все частоты волн равны, то в точке $z=0$ должно выполняться граничное условие вида

$$E_{01\tau}e^{i(k_{1x}x+k_{1y}y)} - E_{03\tau}e^{i(k_{3x}x+k_{3y}y)} = E_{02\tau}e^{i(k_{2x}x+k_{2y}y)}.$$

Это равенство выполняется в любой точке (x, y) только при равенстве показателей экспонент, тогда:

$$\begin{aligned} k_{1x} &= k_{2x} = k_{3x}, \\ k_{1y} &= k_{2y} = k_{3y}. \end{aligned}$$

Отсюда следует *равенство тангенциальных компонент волновых векторов трех волн*:

$$k_{1\tau} = k_{2\tau} = k_{3\tau},$$

а также, что *все волновые векторы $\vec{k}_{1,2,3}$ лежат в одной плоскости – плоскости падения* волны \vec{E}_1 , т.е. плоскости $\{\vec{e}_n \vec{k}_1\}$, где \vec{e}_n - единичный вектор нормали к границе сред.

Выберем систему координат таким образом, чтобы $k_{1y} = k_{2y} = k_{3y} = 0$, тогда из $k_{1x} = k_{3x} \Rightarrow k_{1x} = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \vartheta_1 = k_{3x} = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \vartheta_3 \Rightarrow$ угол падения равен углу отражения $\vartheta_1 = \vartheta_3$ - *закон отражения света*.

Закон преломления света

Пусть для простоты $k_{iy} = 0$, тогда из $k_{1x} = k_{2x}$ и $k_{1x} = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \vartheta_1, k_{2x} = \frac{\omega}{c} n_2 \sin \vartheta_2 \Rightarrow$

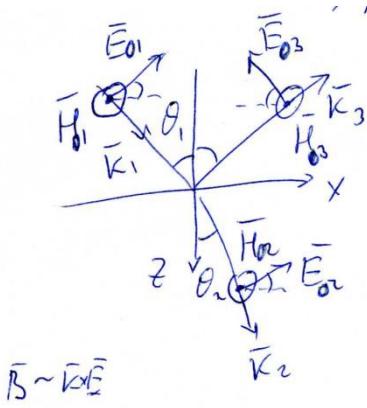
$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{n_2}{n_1} - \text{закон преломления света (Снеллиус, 1621).}$$

Если свет падает из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду, $n_1 > n_2$, то из формулы Снеллиуса видно, что существует угол падения $\vartheta_1 \equiv \vartheta_{n.\text{omp.}}$, $\sin \vartheta_{n.\text{omp.}} = n_2 / n_1$ - угол полного внутреннего отражения, такой, что при $\vartheta_1 > \vartheta_{n.\text{omp.}}$ преломленный луч отсутствует, т.к. не выполняется условие $\sin \vartheta_2 < 1$. Интенсивность отраженной волны $I_3 = I_1$, наблюдается *полное внутреннее отражение*.

2.2. Формулы Френеля [зависимости $\vec{E}_2(\vec{E}_1)$, $\vec{E}_3(\vec{E}_1)$]

Соотношения для амплитуд полей падающей, прошедшей и отраженной волн ($\vec{E}_{01,02,03}$) получим из граничных условий для полей \vec{E} и \vec{H} . Поля каждой из плоско-

поляризованных волн можно представить в виде



$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}, \quad \vec{H} = \vec{H}_{\parallel} + \vec{H}_{\perp}$$

- суммы компонент полей, лежащих в плоскости падения (\parallel) и перпендикулярно (\perp) плоскости падения.

Рассмотрим сначала случай Р-поляризованной волны, или ТМ-волны (см.рис.), когда

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{H} = \vec{H}_{\perp}.$$

Зам. Направления амплитуд полей \vec{E}_{0i} на рисунке выбраны таким образом, чтобы все векторы \vec{E}_{0i} были «слева» от векторов \vec{k}_i , тогда все векторы $\vec{H}_{0i} \sim \vec{k} \times \vec{E}_{0i}$ направлены в одну сторону.

Из граничных условий $E_{01\parallel} + E_{03\parallel} = E_{02\parallel}$, при $k_y = 0$, следует соотношение:

$$E_{01\parallel} \cos \vartheta_1 - E_{03\parallel} \cos \vartheta_1 = E_{02\parallel} \cos \vartheta_2. \quad (1)$$

Из граничный условий для магнитного поля $H_{01\perp} + H_{03\perp} = H_{02\perp} \Rightarrow$

$$H_{01\perp} + H_{03\perp} = H_{02\perp} \quad (2)$$

Используя соотношения $E_{\parallel} = vB_{\perp} \Rightarrow E_{\parallel} = (c/n)\mu_0 H_{\perp} \Rightarrow H_{\perp} = c\varepsilon_0 \cdot n E_{\parallel}$, запишем граничное условие (2) в виде:

$$n_1 E_{01\parallel} + n_1 E_{03\parallel} = n_2 E_{02\parallel}. \quad (3)$$

Поделим уравнения (1) и (3) на $E_{01\parallel} \cos \vartheta_1$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{E_{03\parallel}}{E_{01\parallel}} = 1 - \frac{E_{02\parallel}}{E_{01\parallel}} \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1}, \\ n_1 + n_1 \frac{E_{03\parallel}}{E_{01\parallel}} = n_2 \frac{E_{02\parallel}}{E_{01\parallel}}. \end{cases} \quad (4)$$

Решение для *амплитудного коэффициента пропускания* имеет вид

$$\tau_{\parallel} = \frac{E_{02\parallel}}{E_{01\parallel}} = \frac{2}{\frac{n_2}{n_1} + \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1}} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_2 \cos \vartheta_1 + n_1 \cos \vartheta_2} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2}$$

- формула Френеля для *коэффициента пропускания* τ_{\parallel} *P-поляризованного света*.

Из системы (4) находим соответствующий *амплитудный коэффициент отражения*:

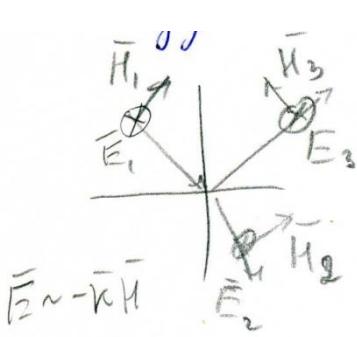
$$\rho_{\parallel} = \frac{E_{03\parallel}}{E_{01\parallel}} = \frac{n_2}{n_1} \frac{E_{02\parallel}}{E_{01\parallel}} - 1 = \frac{2n_2 \cos \vartheta_1}{n_2 \cos \vartheta_1 + n_1 \cos \vartheta_2} - 1 = \frac{n_2 \cos \vartheta_1 - n_1 \cos \vartheta_2}{n_2 \cos \vartheta_1 + n_1 \cos \vartheta_2} = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\operatorname{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$

- формула Френеля для ρ_{\parallel} *P-поляризованного света*.

Коэффициент отражения по интенсивности для *P-поляризованного света* равен

$$R_{\parallel} = \frac{|E_{03\parallel}|^2}{|E_{01\parallel}|^2} = \rho_{\parallel}^2.$$

В случае S-поляризованной волны, или TE-волны (см.рис.),



вектор поля $\vec{E} = \vec{E}_{\perp}$ ориентирован нормально к плоскости падения, а вектор поля $\vec{H} = \vec{H}_{\parallel}$ - в плоскости падения. Аналогично тому, как делалось выше, используя соответствующие граничные условия для E_{τ} и H_{τ} , получим формулы Френеля для *амплитудных коэффициентов пропускания*, τ_{\perp} , и *отражения*, ρ_{\perp} , *S-поляризованного света*

$$\tau_{\perp} = \frac{E_{02\perp}}{E_{01\perp}} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)},$$

$$\rho_{\perp} = \frac{E_{03\perp}}{E_{01\perp}} = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} = -\frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}.$$

Коэффициент отражения по интенсивности для S-поляризованного света равен

$$R_{\perp} = \frac{|E_{03\perp}|^2}{|E_{01\perp}|^2} = \rho_{\perp}^2.$$

2.3. Изменение фазы при отражении. Нормальное и скользящее падение. Эффект Брюстера

1. Из формулы для ρ_{\perp} следует, что при $\vartheta_1 > \vartheta_2$, т.е. при $n_1 < n_2$, величина $\rho_{\perp} < 0$. Таким образом, знаки амплитуд полей $E_{03\perp}$ и $E_{01\perp}$ противоположны – *скакок фазы отраженной волны* на π при отражении S-поляризованной волны от оптически более плотной среды.

2. При *нормальном падении*, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$, \Rightarrow

$$\rho_{\parallel} = -\rho_{\perp} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}.$$

Для стекла, $n_2 = 1.5$, $R = 4\%$. Для воды $n_2 = 1.33$, $R = 2\%$. При *скользящем падении*, $\vartheta_1 \rightarrow \pi/2$, $\rho_{\perp} = \rho_{\parallel} \rightarrow -1$ ($R_{\perp} = R_{\parallel} \rightarrow 1$) – отражение максимально при скользящем падении.

3. *Закон Брюстера* (экспериментально открыт в 1815).

Если сумма углов $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi/2$, то в формуле Френеля для ρ_{\parallel} величина $\operatorname{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \rightarrow \infty \Rightarrow \rho_{\parallel}, R_{\parallel} \rightarrow 0$. Таким образом, при падении излучения под углом Брюстера, $\vartheta_1 = \pi/2 - \vartheta_2 = \vartheta_B$, P-поляризованный свет не отражается от границы раздела диэлектриков – закон Брюстера.

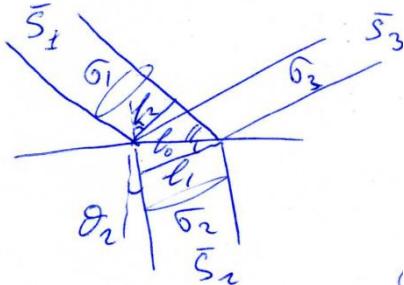
$$\text{T.k. } \sin \vartheta_2 = \cos \vartheta_B \Rightarrow n_1 \sin \vartheta_B = n_2 \cos \vartheta_B \Rightarrow \operatorname{tg} \vartheta_B = n_2 / n_1.$$

Если неполяризованный свет падает под углом Брюстера, то P-поляризованная часть поля с амплитудой $E_{0\parallel}$ отражаться не будет. Отраженный свет окажется линейно поляризованным нормально к плоскости падения. Это один из способов получения поляризованного света.

2.4. Энергетические соотношения при преломлении и отражении света

Важно помнить, что при отражении/преломлении света *сохраняется* не интенсивность света, а *мощность*: энергия света, упавшего на поверхность в единицу

времени, \mathcal{P}_1 [Дж/сек] , равна сумме энергий прошедшего (преломленного), \mathcal{P}_2 , и отраженного, \mathcal{P}_3 , света в единицу времени:



где $\mathcal{P}_i = \int_{\sigma_i} \vec{S}_i d\vec{\sigma}_i$ – мощности i -ых световых пучков (см.рис.), \vec{S}_i - вектора Умова-Пойнтинга, σ_i - площади пучков, $i = 1, 2, 3$.

Как изменяются интенсивности I_i при отражении/прохождении света, как связаны коэффициенты отражения и прохождения по интенсивности? По определению интенсивность

$$I = \langle S \rangle = v \epsilon_0 \epsilon |E_0|^2 / 2 = c \epsilon_0 n |E_0|^2 / 2,$$

I [Дж/м² сек] – средняя плотность потока энергии, или плотность мощности [Вт/м²]. Если интенсивности I_i однородны по поперечному сечению пучка, то $\mathcal{P}_i = I_i \sigma_i \Rightarrow$

$$I_1 \sigma_1 = I_2 \sigma_2 + I_3 \sigma_3.$$

Т.к. $\sigma_1 = \sigma_3$, то справедливо следующее соотношение для интенсивностей:

$$I_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} I_2 + I_3.$$

Отсюда следует, что $1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{I_2}{I_1} + \frac{I_3}{I_1} \Rightarrow$

$$R + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} T = 1,$$

где R, T - коэффициенты отражения и прохождения по интенсивности, соответственно. В случае прямоугольного сечения пучка $\sigma_2 / \sigma_1 = l_2 l_\perp / l_1 l_\perp = \cos \vartheta_2 / \cos \vartheta_1 \Rightarrow$

$$R + \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1} T = 1.$$

В случае падения излучения под углом Брюстера $\vartheta_1 = \vartheta_B$, $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi/2 \Rightarrow \vartheta_2 = \pi/2 - \vartheta_B \Rightarrow$

$$\frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1} \Big|_{\vartheta_1 = \vartheta_B} = \frac{\cos(\pi/2 - \vartheta_B)}{\cos \vartheta_B} = \tan \vartheta_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

Таким образом, если $\vartheta_1 = \vartheta_B$, то коэффициенты отражения и прохождения связаны соотношением:

$$R + \frac{n_2}{n_1} T = 1.$$

Зам. При $I_1 = I_{\parallel} \Rightarrow R_{\parallel} = 0 \Rightarrow T = T_{\parallel} = n_1 / n_2 |_{n_2 > n_1} < 1$. Это не противоречит закону сохранения энергии, т.к. из-за изменения сечения пучка при преломлении, $\sigma_2 > \sigma_1$, уменьшается интенсивность проходящего пучка $I_2 < I_1$, но мощность пучков не изменяется: $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.

Лекция 16

Глава V. Распространения света в веществе

§3. Распространение света в анизотропных средах

3.1. Описание диэлектрических свойств анизотропных сред. Материальное уравнение, главные оси кристалла и главные диэлектрические проницаемости. Главные скорости

3.2. Плоские электромагнитные волны в анизотропной среде

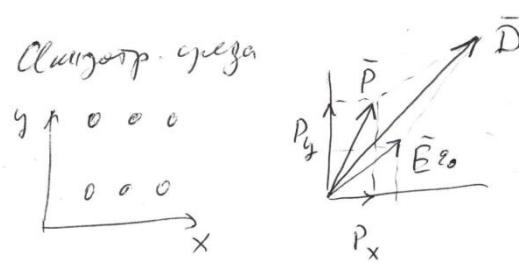
- A. Ориентация векторов $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{k}, \vec{S}$ в световой волне. Нормаль и луч волны, фазовая и групповая скорости
 - B. Уравнение Френеля для фазовых скоростей. Главные скорости. Скорости и поляризации собственных волн в кристалле
 - C. Оптическая индикатриса, или эллипсоид волновых нормалей
-

§3. Распространение света в анизотропных средах

3.1. Описание диэлектрических свойств анизотропных сред. Материальное уравнение, главные оси кристалла и главные диэлектрические проницаемости. Главные скорости

Оптическая анизотропия – зависимость оптических свойств среды от направления колебания вектора электрического поля волны (поляризации волны) и от направления распространения волны.

Оптическая анизотропия есть следствие анизотропии отклика среды (поляризации \vec{P}) на воздействие поля световой волны (\vec{E}), что приводит к несовпадению направлений



векторов \vec{P} и \vec{E} , а следовательно, и векторов $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ и \vec{E} (см. рис.). По этой причине в материальных уравнениях для анизотропных сред (обычно кристаллических) векторы связаны не константами χ и ϵ , как в изотропных средах, а тензорами $\hat{\chi}$ и $\hat{\epsilon}$. Математически тензор описывает поворот вектора в пространстве.

Вектор поляризации анизотропной среды запишем в виде $\vec{P} = \epsilon_0 \hat{\chi} \vec{E}$, где i -ые компоненты вектора есть $P_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j$, χ_{ij} - компоненты тензора диэлектрической восприимчивости, $i = 1, 2, 3$. Тогда *материальное уравнение* имеет вид:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \hat{\chi} \vec{E} = \epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E},$$

где $\hat{\varepsilon}$ - тензор диэлектрической проницаемости; компоненты вектора индукции

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} E_j + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j;$$

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \chi_{ij}$$

- компоненты тензора диэлектрической проницаемости; δ_{ij} - символ Кронекера (1, если $i = j$, и 0, если $i \neq j$).

Материальное уравнение удобно записать в матричной форме:

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix},$$

где $\hat{\varepsilon}$ - симметричный тензор второго ранга (по числу индексов), $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ из-за независимости компонент E_j . Из линейной алгебры известно, что для симметричного тензора всегда можно найти систему координат, в которой тензор будет иметь диагональный вид:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Тогда можно записать: $D_x = \varepsilon_0 \varepsilon_x E_x$, $D_y = \varepsilon_0 \varepsilon_y E_y$, $D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_z E_z$. Такие оси называются главными осями кристалла, или *главными осями диэлектрической проницаемости*, а соответствующие величины ε_i - *главными диэлектрическими проницаемостями*. Соответствующие скорости $a_i = c / \sqrt{\varepsilon_i} = c / n_i$ называются *главными скоростями волн* в кристалле.

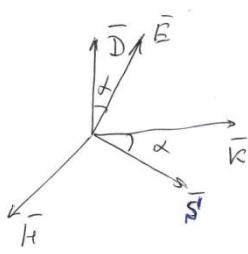
Классификация кристаллов

1. $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ - изотропный кристалл, например, кубической симметрии.
2. $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ - одноосный кристалл.
3. $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ - двуосный кристалл.

3.2. Плоские гармонические электромагнитные волны в анизотропной среде

A. Ориентация векторов $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{k}, \vec{S}$ в световой волне. Нормаль и луч волны, фазовая и групповая скорости

Найдем ориентации векторов $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{k}, \vec{S}$ световой волны в анизотропной среде. Для гармонических волн из уравнений Максвелла следуют соотношения, связывающие векторы $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H} \sim e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$:

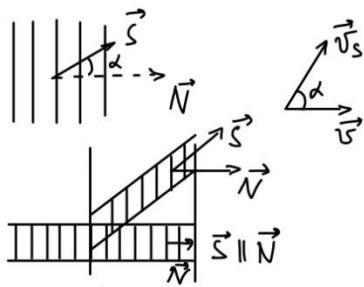


$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{H}; \quad \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D} \Rightarrow \vec{D} \perp \vec{k}, \vec{H}; \quad \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k}, \vec{E}.$$

Вектор Пойнтинга: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \Rightarrow \vec{S} \perp \vec{E}, \vec{H}$. На рисунке показана *относительная ориентация векторов $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{k}, \vec{S}$* с учетом того, что $\vec{B} \parallel \vec{H}$ и существует угол анизотропии α между векторами \vec{E}, \vec{D} и векторами \vec{k}, \vec{S} . Из рисунка видно, что:

- 1) векторы $\vec{D}, \vec{E}, \vec{k}, \vec{S}$ лежат в одной плоскости $\perp \vec{H}$;
- 2) $\vec{D} \perp \vec{k}, \vec{E} \perp \vec{S}$;
- 3) в анизотропной среде плоская волна не является поперечной, т.к. $\vec{k}\vec{E} \neq 0$.

Введем два единичных вектора:



$\vec{N} = \vec{k} / |\vec{k}|$ - нормаль к фронту волны (вектор нормали волны), или *направление волнового вектора фазовой скорости* волны $\vec{v} = \vec{N} \cdot (\omega/k)$;

$\vec{s} = \vec{S} / |\vec{S}|$ - лучевой вектор (луч) волны, единичный вектор в направлении вектора Пойнтинга \vec{S} указывает направление распространения энергии волны, или «лучевой» (групповой) скорости $\vec{v}_s = \vec{s} |\vec{v}_s|$

Из верхнего рисунка видно, что т.к. направления векторов \vec{D} и \vec{E} не совпадают, то следовательно, направления распространения фазового фронта волны (\vec{N}) и энергии волны (луча; \vec{s}) также не совпадают: $\vec{N} \cdot \vec{s} = \cos \alpha$ Найдем соотношения модулей фазовой, \vec{v} , и групповой, \vec{v}_s , скоростей волны. Запишем проекцию \vec{v}_s на направление \vec{N} :

$$\vec{N} \cdot \vec{v}_s = \vec{N} \cdot \vec{S} v_s = v_s \cos \alpha.$$

С другой стороны, по определению групповой скорости в направлении \vec{N} , $d\omega/dk$, её проекция в этом направлении запишется в виде:

$$\vec{N} \frac{d\omega}{dk} = \vec{N} \frac{dkv}{dk} = \vec{N} \frac{dk}{dk} v + \cancel{\vec{N} k} \frac{dv}{dk} = v,$$

где учтена малость материальной дисперсией $dv/dk \approx 0$, а также соотношение $\frac{dk}{dk} = \frac{\partial k}{\partial k_x} \vec{e}_x + \frac{\partial k}{\partial k_y} \vec{e}_y + \frac{\partial k}{\partial k_z} \vec{e}_z = \frac{\vec{k}}{\sqrt{k^2}} = \vec{N}$, т.к. $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Таким образом, получаем следующее соотношение для модулей скоростей:

$$v_s \cos \alpha = v .$$

Как будет показано ниже, важной особенностью распространения волны в анизотропной среде является зависимость скоростей волны (\vec{v} и \vec{v}_s) от направления ее распространения и от поляризации волны.

Б. Уравнение Френеля для фазовых скоростей. Главные скорости. Скорости и поляризации собственных волн в кристалле

Найдем зависимость величины модуля фазовой скорости v от её направления, т.е. от направления вектора нормали \vec{N} в среде: $v = v(N_x, N_y, N_z)$.

Из уравнений Maxwella следует:

$$\operatorname{rot} \vec{H}: \quad [\vec{k} \times \vec{H}] = -\omega \vec{D} \Rightarrow \vec{D} = -\frac{1}{v} [\vec{N} \times \vec{H}], \text{ где учтено } \vec{k} = \vec{N}k, \quad v = \omega/k.$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}: \quad [\vec{k} \times \vec{E}] = \omega \vec{B} \Rightarrow \frac{1}{v} [\vec{N} \times \vec{E}] = \mu_0 \vec{H} .$$

Подставляем выражение для \vec{H} в первую формулу для \vec{D} , получаем:

$$\vec{D} = -\frac{1}{\mu_0 v^2} [\vec{N} \times [\vec{N} \times \vec{E}]] = -\frac{1}{\mu_0 v^2} [\vec{N}(\vec{N}\vec{E}) - \vec{E}] = \frac{1}{\mu_0 v^2} [\vec{E} - \vec{N}(\vec{N}\vec{E})] . \quad (1)$$

Распишем компоненты вектора \vec{D} :

$$D_x = \frac{1}{\mu_0 v^2} [E_x - N_x (\vec{N}\vec{E})]_{\substack{\text{в главных осах} \\ D_x = \epsilon_0 \epsilon_x E_x}} = \frac{1}{\mu_0 v^2} \left[\frac{D_x}{\epsilon_0 \epsilon_x} - N_x (\vec{N}\vec{E}) \right], \quad \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2 \Rightarrow$$

$$D_x = \frac{N_x (\vec{N}\vec{E}) / \mu_0}{\frac{c^2}{\epsilon_x} - v^2}, \quad D_y = \frac{N_y (\vec{N}\vec{E}) / \mu_0}{\frac{c^2}{\epsilon_y} - v^2}, \quad D_z = \frac{N_z (\vec{N}\vec{E}) / \mu_0}{\frac{c^2}{\epsilon_z} - v^2} .$$

$$\text{T.к. } \vec{D} \perp \vec{N} \Rightarrow D_x N_x + D_y N_y + D_z N_z = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{N_x^2}{a_x^2 - v^2} + \frac{N_y^2}{a_y^2 - v^2} + \frac{N_z^2}{a_z^2 - v^2} = 0 .$$

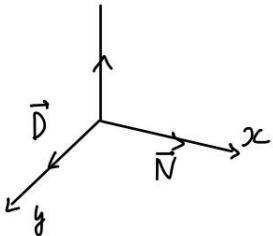
где $a_i^2 = \frac{c^2}{\epsilon_i}$; $a_i = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_i}} = \frac{c}{n_i}$ - главные скорости, n_i - главные показатели преломления,

$i = x, y, z$. Это уравнение Френеля для фазовых скоростей (поверхность нормалей),

позволяющее найти фазовую скорость v волны в зависимости от направления нормали \vec{N} : $v = v(N_x, N_y, N_z)$.

Выясним физический смысл главных скоростей a_i . Пусть волна (нормаль) направлена вдоль оси x , тогда $\vec{N} = N_x \vec{e}_x; N_y, N_z = 0$ (см. рис.). Т.к. $\vec{D} \perp \vec{N}$, то пусть вектор \vec{D} направлен вдоль оси y , $\vec{D} = D_y \vec{e}_y$, тогда из соотношения $D_y(a_y^2 - v^2) \sim N_y = 0$ следует, что при $D_y \neq 0$, фазовая скорость равна главной скорости $v = a_y$. Таким образом, главная

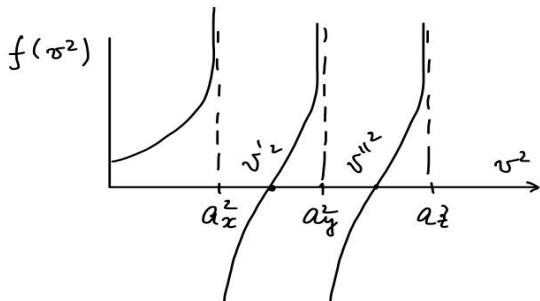
скорость есть скорость распространения волны, у которой вектор индукции направлен по соответствующей главной оси кристалла.



Оценим графически решения уравнения Френеля. Пусть для определенности выполняется условие $a_x < a_y < a_z$. График функции левой части уравнения Френеля

$$f(v^2) = \sum_{i=x,y,z} \frac{N_i}{a_i^2 - v^2}$$

представлен на рисунке. Нули функции $f(v^2) = 0$ соответствуют решению уравнения



Френеля. Видно, что существует два решения: v' и v'' . Следовательно, в заданном направлении \vec{N} могут распространяться волны (*собственные волны в кристалле*) с двумя различными фазовыми скоростями v' и v'' : $a_x \leq v' \leq a_y \leq v'' \leq a_z$.

Выясним, как поляризованы соответствующие собственные волны, т.е. как ориентированы вектора индукции \vec{D}' и \vec{D}'' ,

относительно друг друга?

Умножим скалярно уравнение (1) для \vec{D}', \vec{E}' на \vec{D}'' , а уравнение для \vec{D}'', \vec{E}'' - на \vec{D}' :

$$\vec{D}'' \vec{D}' = \frac{1}{\mu_0 v'^2} (\vec{D}'' \vec{E}' - 0),$$

$$\vec{D}' \vec{D}'' = \frac{1}{\mu_0 v''^2} (\vec{D}' \vec{E}'' - 0),$$

где учтено, что $\vec{D} \perp \vec{N}$. Вычтем второе уравнение из первого:

$$(\vec{D}' \vec{D}'') (v'^2 - v''^2) \mu_0 = \vec{D}'' \vec{E}' - \vec{D}' \vec{E}'' \Big|_{\text{в гл. осях } D_i = \epsilon_0 \epsilon_i E_i} = \sum_i \epsilon_0 \epsilon_i E''_i E'_i - \sum_i \epsilon_0 \epsilon_i E'_i E''_i = 0,$$

так как $v' \neq v'' \Rightarrow \vec{D}' \vec{D}'' = 0 \Rightarrow \vec{D}' \perp \vec{D}''$ - векторы ортогональны.

Вывод: в общем случае в выбранном направлении нормали волны \vec{N} могут распространяться только две волны (собственные волны в кристалле) с различными v' и v'' , имеющие взаимно ортогональные ориентации векторов индукции \vec{D}' и \vec{D}'' . Других волн, которые бы распространялись в этом направлении не существует.

В. Оптическая индикатриса, или эллипсоид волновых нормалей

Выше мы показали, что векторы \vec{D}' и \vec{D}'' ортогональны, однако, их направления в пространстве остаются неизвестными. Определим направления поляризаций \vec{D}' и \vec{D}'' , а также соответствующие величины показателей преломления $n' = c/v'$ и $n'' = c/v''$ для собственных волн, распространяющихся в направлении \vec{N} , т.е. с заданным направлением фазовой скорости.

Из формулы (1) получим зависимость n от направления вектора \vec{D} , т.е. от направляющих косинусов D_i/D . Умножим формулу (1) скалярно на \vec{D} :

$$D^2 = \frac{1}{\mu_0 v^2} \left[\vec{D} \cdot \vec{E} - (\vec{D} \cdot \vec{N})(\vec{N} \cdot \vec{E}) \right] \Big|_{\vec{D} \perp \vec{N}} = \frac{1}{\mu_0 v^2} \vec{D} \cdot \vec{E}.$$

В главных осях $E_i = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_i} D_i$, где ϵ_i - главные диэлектрические проницаемости, тогда

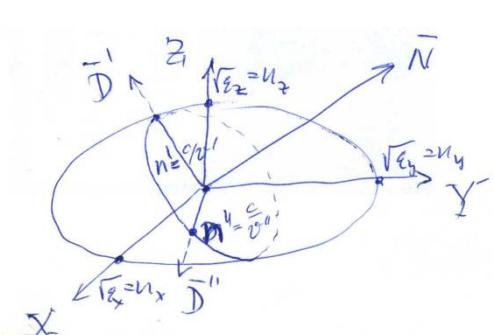
$$D^2 = \frac{1}{\mu_0 v^2} \sum_i \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_i} D_i^2, \quad \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}, \quad \frac{c^2}{v^2} = n^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n^2} = \sum_i \frac{1}{\epsilon_i} \left(\frac{D_i}{D} \right)^2$$

- зависимость показателя преломления n от направления вектора \vec{D} , $n = n(D_i)$. Умножим это выражение на n^2 , тогда в переменных

$$X = n \frac{D_x}{D}, \quad Y = n \frac{D_y}{D}, \quad Z = n \frac{D_z}{D}$$

это уравнение запишется в виде уравнения эллипсоида (эллипсоида волновых нормалей, или оптической индикатрисы):



$$\frac{X^2}{\epsilon_x} + \frac{Y^2}{\epsilon_y} + \frac{Z^2}{\epsilon_z} = 1, \text{ или } \frac{X^2}{n_x^2} + \frac{Y^2}{n_y^2} + \frac{Z^2}{n_z^2} = 1,$$

где главные полуоси эллипсоида равны главным показателям преломления $n_i = \sqrt{\epsilon_i}$ (см. рис.). Главные оси эллипсоида совпадают с главными

осами кристалла. Расстояние от центра эллипсоида до его поверхности

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = n^2$$

определяет значение n для определенного направления вектора \vec{D} .

Выберем некоторое направление нормали волны \vec{N} (нормали к фазовому фронту волны, или направление фазовой скорости), тогда сечение эллипсоида перпендикулярное \vec{N} представляет собой эллипс (см. рис.), вдоль осей которого направлены векторы индукции \vec{D}' и \vec{D}'' двух собственных волн (здесь не доказывается). Полуоси эллипса равны величинам соответствующих показателей преломления n' и n'' , которые определяют фазовые скорости волн $v' = c/n'$ и $v'' = c/n''$, т.е. фазовые скорости v', v'' обратно пропорциональны длинам полуосей эллипса.

Таким образом, оптическая индикатриса позволяет определить направления векторов \vec{D}', \vec{D}'' и величины n', n'' (v', v'') для собственных волн в зависимости от направления распространения фазового фронта волны \vec{N} . Этот эллипсоид несложно построить, используя экспериментально измеренные величины главных показателей преломления n_i .

Лекция 17

Глава V. Распространения света в веществе

§3. Распространение света в анизотропных средах

3.3. Уравнение Френеля для лучевых скоростей

3.4. Эллипсоид лучевых скоростей. Оптическая ось. Классификация кристаллов (одноосный, двуосный)

3.5. Лучевая поверхность

3.6. Оптические свойства одноосных кристаллов

А. Главная плоскость, обыкновенная и необыкновенная волны, отрицательные и положительные кристаллы и их лучевые поверхности

Б. Двойное лучепреломление и поляризация света. Метод построения Гюйгенса

3.7. Поляризационные приборы

А. Четверть- и полуволновые оптические пластинки

3.3. Уравнение Френеля для лучевых скоростей

На прошлой лекции из уравнений Maxwella мы получили формулу (1) для вектора индукции $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{N}, v)$ волны, распространяющейся в направлении нормали \vec{N} с фазовой скоростью v . Аналогично, из уравнений Maxwella несложно получить формулу (см. дополнительный материал в конце конспекта), связывающую поле $\vec{E} = \vec{E}(\vec{D}, \vec{s}, v_s)$ с лучевой скоростью v_s и единичным лучевым вектором \vec{s} , задающим направление распространения энергии волны:

$$\vec{E} = \mu_0 v_s^2 \left[\vec{D} - \vec{s}(\vec{s}\vec{D}) \right]. \quad (2)$$

Т.к. $\vec{E} \perp \vec{s} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{s} = 0 \Rightarrow E_x s_x + E_y s_y + E_z s_z = 0$, умножая скалярно (2) на \vec{s} , получаем следующее *уравнение Френеля для лучевых скоростей* v_s :

$$\frac{a_x^2 s_x^2}{a_x^2 - v_s^2} + \frac{a_y^2 s_y^2}{a_y^2 - v_s^2} + \frac{a_z^2 s_z^2}{a_z^2 - v_s^2} = 0,$$

где $a_i = c/n_i$ - главные скорости, n_i - главные показатели преломления, $i = x, y, z$. Из этого уравнения следует, что каждому направлению распространения энергии (луча) $\vec{s} = \{s_x, s_y, s_z\}$ соответствуют две собственные волны с лучевыми скоростями v'_s, v''_s и векторами полей $\vec{E}' \perp \vec{E}''$. Уравнение Френеля описывает лучевую поверхность (см. ниже).

3.4. Эллипсоид лучевых скоростей. Оптическая ось. Классификация кристаллов (одноосный, двуосный)

Из формулы (2) получим зависимость величины лучевой скорости v_s от направления вектора \vec{E} (от направляющих косинусов E_i / E). Умножим (2) скалярно на \vec{E} :

$$\begin{aligned} E^2 = \mu_0 v_s^2 \left[\vec{E} \vec{D} - (\vec{E} \vec{s})(\vec{s} \vec{D}) \right] \Big|_{\vec{E} \perp \vec{s}} &= \mu_0 v_s^2 \vec{E} \vec{D} \Big|_{\text{есл. ось } D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i} = \\ &= \mu_0 v_s^2 \sum_i \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i^2 \Big|_{\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2, c^2/\varepsilon_i = a_i^2} = v_s^2 \sum_i \frac{E_i^2}{a_i^2}. \end{aligned}$$

Отсюда выражение для лучевой скорости v_s как функции от направления вектора \vec{E} имеет вид:

$$\frac{1}{v_s^2} = \sum_i \frac{1}{a_i^2} \left(\frac{E_i}{E} \right)^2.$$

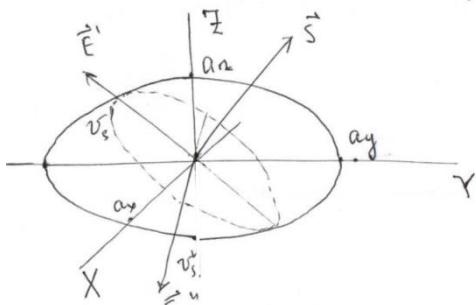
В декартовой системе координат в переменных

$$X = v_s \frac{E_x}{E}; \quad Y = v_s \frac{E_y}{E}; \quad Z = v_s \frac{E_z}{E}$$

это уравнение запишется в виде уравнения эллипсоида лучевых скоростей (или эллипсоида Френеля):

$$\frac{X^2}{a_x^2} + \frac{Y^2}{a_y^2} + \frac{Z^2}{a_z^2} = 1.$$

Главные оси эллипсоида совпадают с главными осями кристалла, а главные полуоси равны главным скоростям $a_i = c / \sqrt{\varepsilon_i}$. Расстояние от центра эллипсоида до его поверхности равно v_s :



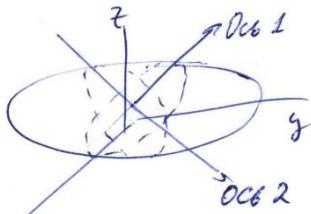
$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2} = v_s.$$

Выберем направление луча \vec{s} . В сечении эллипса, перпендикулярном \vec{s} , образуется эллипс, вдоль осей которого направлены напряженности \vec{E}' и \vec{E}'' двух собственных волн в кристалле (здесь не доказывается), а его полуоси равны величинам соответствующих лучевых скоростей v'_s и v''_s .

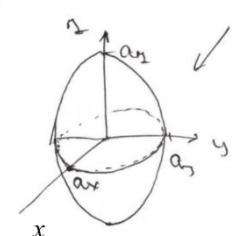
Таким образом, с помощью эллипса Френеля можно найти направления полей \vec{E}' и \vec{E}'' , а также величины групповых скоростей v'_s и v''_s собственных волн в кристалле для выбранного направления луча \vec{s} .

Оптическая ось – направление в кристалле (традиционно обозначается как OO'), перпендикулярное плоскости кругового сечения эллипса лучевых скоростей. Как видно из рисунка, если луч направлен вдоль оптической оси, $\vec{s} \parallel OO'$, то $v'_s = v''_s$, а направление вектора \vec{E} может быть любым. Иными словами, всем лучам (с любым

направлением поляризации поля \vec{E}), направленным вдоль оптической оси соответствует одно и то же значение лучевой скорости, а векторы \vec{E} могут колебаться в любом направлении перпендикулярном лучу.



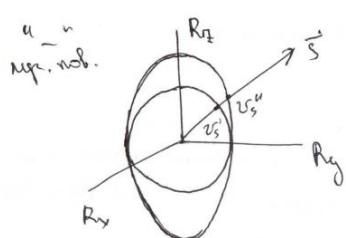
Из аналитической геометрии известно, что в общем случае у эллипсоида с $a_x \neq a_y \neq a_z$ существуют два круговых сечения, следовательно, у кристалла существуют две оптические оси (двоосный кристалл: $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$).



Если $a_x = a_y \neq a_z$ (т.е. $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$), то кристалл называется одноосным ($OO' \parallel \vec{e}_z$). В данном примере эллипсоид Френеля является эллипсоидом вращения относительно оси z (см.рис.).

3.5. Лучевая поверхность

Лучевая поверхность качественно отличается от эллипса лучевых скоростей. Она строится следующим образом. Пусть из данной точки во всех направлениях \vec{s} распространяются лучи с соответствующими скоростями v_s . Тогда поверхность, до которой доходит энергия волны (луч) за единичный промежуток времени, есть лучевая поверхность. Формально это поверхность 4-ого порядка (двуполостная), задаваемая уравнением Френеля для лучевых скоростей, которое записывается в координатах



$R_i = s_i v_s$ (см.рис.). Поскольку $R^2 = \sum_i R_i^2 = \sum_i s_i^2 v_s^2$, то

уравнение Френеля, умноженное на v_s^2 , принимает вид:

$$v_s^2 \times \sum_i \frac{a_i^2 s_i^2}{a_i^2 - v_s^2} = 0 \Rightarrow \sum_i \frac{a_i^2 R_i^2}{a_i^2 - R^2} = 0.$$

Расстояние R от начала координат до лучевой поверхности (точка пересечения поверхности с прямой в направлении \vec{s}) равно лучевой скорости в данном направлении \vec{s} , $R = v_s$. В любом направлении двуполостная лучевая поверхность встречается два раза, что соответствует существованию двух скоростей v'_s и v''_s распространения луча в любом направлении.

Например, для одноосного кристалла лучевая поверхность есть суперпозиция сферы и эллипса (см. рис. выше), поэтому сечение лучевой поверхности всегда эллipse и окружность.

3.6. Оптические свойства одноосных кристаллов

A. Главная плоскость, обыкновенная и необыкновенная волны, отрицательные и положительные кристаллы и их лучевые поверхности

В одноосном кристалле:

- Попарно равны два значения главных диэлектрических проницаемостей, главных показателей преломления и главных скоростей

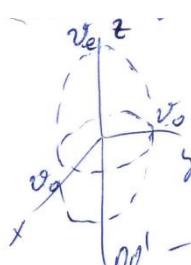
$$\epsilon_x = \epsilon_y \equiv \epsilon^{(0)}, \quad \epsilon_z \equiv \epsilon^{(e)};$$

$$n_x = n_y \equiv n_0, \quad n_z \equiv n_e;$$

$$a_x = a_y \equiv v_0, \quad a_z \equiv v_e; \quad v_o = c/n_0, \quad v_e = c/n_e - \text{главные скорости обыкновенного}$$

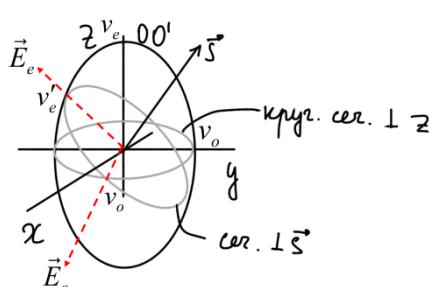
(ordinary) и необыкновенного (extraordinary) лучей.

- Эллипсоид лучевых скоростей – эллипсоид вращения.



Главная плоскость (главного сечения) – плоскость, образованная лучом и оптической осью.

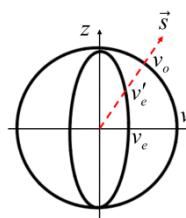
3) Существуют *обыкновенная* и *необыкновенная* волны, распространяющиеся с разными лучевыми скоростями и по-разному поляризованные.



В обычной волне поле $\vec{E}_0 \perp$ главной плоскости (см.рис.), лучевая скорость равна главной скорости, $v_s = v_0 = c/n_0$, и не зависит от направления \vec{s} (аналогично изотропной среде). В случае пренебрежения дисперсией, фазовая скорость равна групповой, $v = v_s = v_0 = c/n_0$. Лучевая поверхность – сфера.

Необыкновенная волна: поле \vec{E}_e лежит в главной плоскости; лучевая скорость v'_e зависит от направления \vec{s} , фазовая скорость не равна лучевой, $v' \neq v'_e$. Если главные скорости $v_0 < v_e$ ($n_e - n_0 < 0$ – *отрицательный кристалл*, как на рис.), то $v_0 < v'_e \leq v_e$. Если же $v_0 > v_e$ ($n_e - n_0 > 0$ – *положительный кристалл*), то $v_0 > v'_e \geq v_e$. Лучевая поверхность для необыкновенного луча – эллипсоид вращения. Важный частный случай: если $\vec{s} \perp OO'$, то $v'_s = v' = v_e = c/n_e$ – лучевая скорость необыкновенного луча равна главной скорости.

Примеры.



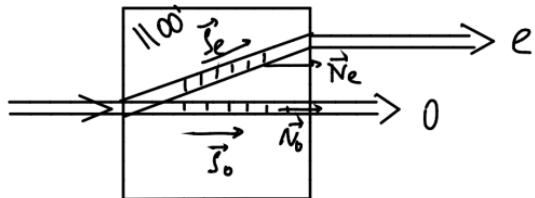
Положительный кристалл: кварц SiO_2 , $n_e = 1.552 > n_0 = 1.543$, $n_e - n_0 > 0$.

На рис. слева – сечение лучевой поверхности для положительного кристалла.

Отрицательный кристалл: исландский шпат CaCO_3 , $n_e = 1.486 < n_o = 1.658$, $n_e - n_o < 0$.

Б. Двойное лучепреломление и поляризация света. Метод построения Гюйгенса

При взаимодействии света с анизотропным кристаллом в эксперименте наблюдается явление *двулучепреломления*. Световой пучок, падающий, например, нормально на кристалл под углом к оптической оси, расщепляется в среде на два пучка – обычновенный, « o », и необыкновенный, « e »,



которые выходят в различных точках кристалла (см.рис.). Поля пучков поляризованы взаимно ортогонально, $\vec{E}_0 \perp \vec{E}_e$. При вращении кристалла вокруг нормали к кристаллу, необыкновенный пучок вращается вокруг обычновенного. Из

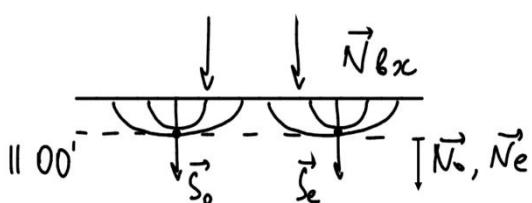
рисунка видно, что обычновенный пучок распространяется как в изотропной среде, не преломляется при нормальному падении. Он формируется обычновенной волной в кристалле, направления нормали \vec{N} и луча \vec{s}_o совпадают. Энергия необыкновенного пучка распространяется в среде вдоль луча \vec{s}_e (лучевой скорости) под углом анизотропии к направлению нормали \vec{N}_e (волнового вектора). Этот световой пучок формируется необыкновенной волной.

Чтобы определить направления лучей \vec{s}_o и \vec{s}_e удобно обратиться к *методу построения Гюйгенса*, в котором используются *поверхности лучевых скоростей* для обычновенной и необыкновенной волн. Построение Гюйгенса выполняется в три этапа:

- 1) каждая точка среды, до которой доходит возбуждение, становится источником вторичных волн – обычновенной и необыкновенной. Строим лучевые поверхности для этих волн;
- 2) огибающая вторичных волн, т.е. касательная поверхность к лучевым поверхностям, являются фронтом волны (поверхностью нормалей; фазовая скорость \vec{v} нормальна к этому фронту волны);
- 3) направление луча \vec{s} совпадает с направлением от источника вторичной волны в точку касания лучевой поверхности с огибающей (фронтом волны).

Рассмотрим примеры построения Гюйгенса при нормальном падении излучения на одноосный кристалл в случаях трех различных ориентаций оптической оси OO' .

- 1) Оптическая ось OO' ориентирована нормально к поверхности кристалла. В этом случае

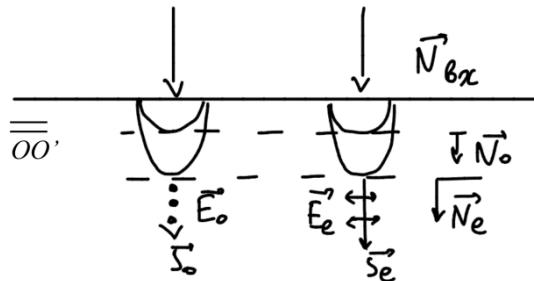


распространение волны в среде происходит вдоль оптической оси, поэтому существует только обыкновенная волна, а направления векторов нормали и луча обыкновенной волны совпадают, $\vec{N}_o \parallel \vec{s}_o$. На рисунке сплошными

линиями изображены сечения лучевых поверхностей для обычновенной (окружность) и необыкновенной (эллипс) волн. Штриховой линией показан фронт волны. Формально

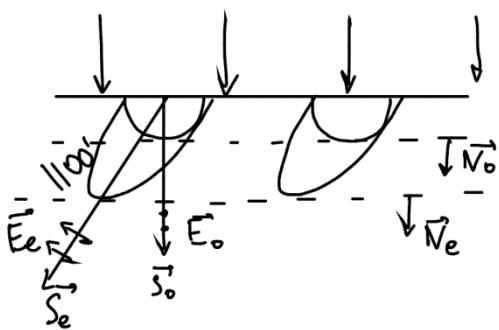
построенный фронт необыкновенной волны, а также векторы \vec{N}_e и \vec{s}_e необыкновенной волны совпадают с обычной волной.

2) Оптическая ось OO' ориентирована вдоль входной поверхности кристалла. Нормали



\vec{N}_o и \vec{N}_e совпадают. Совпадают также направления \vec{s}_o и \vec{s}_e , однако поля \vec{E}_0 и \vec{E}_e поляризованы ортогонально и модули лучевых скоростей, равные главным скоростям, v_o и v_e , отличаются. Отметим, что магнитные поля волн также ортогональны $\vec{H}_o \perp \vec{H}_e$.

3) Оптическая ось OO' наклонена относительно входной поверхности кристалла. Здесь



нормали к фронтам волн, \vec{N}_o и \vec{N}_e , по-прежнему совпадают, однако лучи обычной и необыкновенной волн, \vec{s}_o и \vec{s}_e , не совпадают. Причем, для обычной волны $\vec{s}_o \parallel \vec{N}_o$, а у необыкновенной волны луч \vec{s}_e наклонен к вектору \vec{N}_e под углом анизотропии. Поляризации полей \vec{E}_0 и \vec{E}_e ортогональны. В

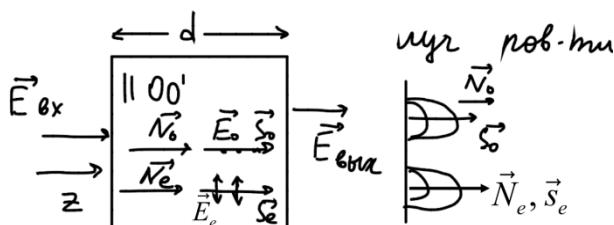
этом случае наблюдается эффект двулучепреломления.

3.7. Поляризационные приборы

A. Четверть- и полуволновые оптические пластинки

Оптическая пластина – пластина из анизотропного материала, вносящая заданную оптическую разность хода для обычной и необыкновенной волн.

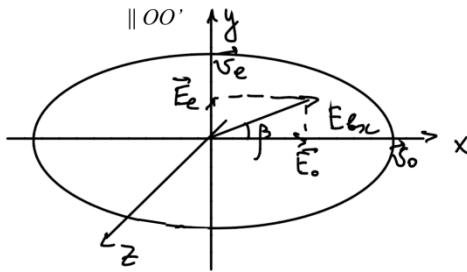
Определим, каким образом будет поляризовано поле $\vec{E}_{\text{вых}}$ на выходе оптической



пластины в зависимости от её толщины d , если на неё нормально (вдоль оси z , см. рис.) падает линейно поляризованный свет $\vec{E}_{ex} = \vec{E}_{ex}^{(0)} \cos(kz - \omega t)$ с амплитудой поля $\vec{E}_{ex}^{(0)}$.

Внутри среды возникает две волны – обыкновенная с амплитудой поля $E_{ex}^{(0)} \cos \beta$, ориентированной ортогонально оптической оси OO' (т.е. вдоль оси x , см. нижний рис.), и необыкновенная с амплитудой поля $E_{ex}^{(0)} \sin \beta$, ориентированной вдоль оптической оси OO' (т.е. вдоль оси y). Здесь β – угол наклона вектора падающего поля. Представим выходное поле на поверхности $z = d$ как суперпозицию полей обыкновенной и необыкновенной волн:

$$\vec{E}_{\text{вых}} = \vec{e}_x E_{\text{ex}}^{(0)} \cos \beta \cos(kn_0 d - \omega t) + \vec{e}_y E_{\text{ex}}^{(0)} \sin \beta \cos(kn_e d - \omega t),$$



где $\vec{e}_{x,y}$ единичные векторы вдоль осей, n_0, n_e - главные показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн. Введем обозначения для проекций выходного поля:

$$E_x = \vec{e}_x \vec{E}_{\text{вых}} = a \cos(\varphi_0 - \omega t),$$

$$E_y = \vec{e}_y \vec{E}_{\text{вых}} = b \cos(\varphi_e - \omega t) = b \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi - \omega t),$$

где $a = E_{\text{ex}}^{(0)} \cos \beta$; $b = E_{\text{ex}}^{(0)} \sin \beta$; $\varphi_0 = kn_0 d$; $\varphi_e = kn_e d$; $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_0 = kd\Delta n$; $k = 2\pi / \lambda_{\text{вак}}$ - волновой вектор в вакууме. В общем случае поляризация поля на выходе из пластинки является эллиптической, но оси эллипса не совпадают с главными осями кристалла. Рассмотрим два важных частных случая поляризации при определенных значениях разности фаз волн $\Delta\varphi$ (толщин пластиинки).

1). Пластинка “ $\lambda/4$ ”. Пусть $\Delta\varphi = (2\pi / \lambda_{\text{вак}})d\Delta n = \pi/2 \Rightarrow d\Delta n = \lambda_{\text{вак}}/4$ - оптическая разность хода. Тогда $\cos(\varphi_0 + \Delta\varphi - \omega t) = -\sin(\varphi_0 - \omega t) \Rightarrow$

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1$$

- уравнение эллипса с полуосями a и b , оси эллипса совпадают с главными осями кристалла. Таким образом, линейно поляризованное излучение преобразуется в эллиптически поляризованное (циркулярно поляризованное при $a = b$).

2). Пластинка “ $\lambda/2$ ”. Пусть $\Delta\varphi = (2\pi / \lambda_{\text{вак}})d\Delta n = \pi \Rightarrow d\Delta n = \lambda_{\text{вак}}/2$ - оптическая разность хода. Тогда $\cos(\varphi_0 + \pi - \omega t) = -\cos(\varphi_0 - \omega t) \Rightarrow$

$$\frac{E_x}{a} + \frac{E_y}{b} = 0$$

- уравнение прямой. Выходное излучение остается линейно поляризованным, но плоскость поляризации поворачивается на угол 2β .

Дополнительный материал. Вывод формулы (2).

Выведем формулу (2), связывающую поле $\vec{E} = \vec{E}(\vec{D}, \vec{s}, v_s)$ с лучевой скоростью v_s и единичным лучевым вектором \vec{s} .

Из уравнений Максвелла для гармонической волны следуют соотношения:

$$\operatorname{rot} \vec{H} : \quad \left[\vec{k} \times \vec{H} \right] = -\omega \vec{D}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} : \quad \left[\vec{k} \times \vec{E} \right] = \omega \vec{B}.$$

Умножим их векторно на \vec{s} :

$$-\left[\vec{s} \times \left[\vec{k} \times \vec{H} \right] \right] = \omega \left[\vec{s} \times \vec{D} \right] \Rightarrow -\left[\vec{k}(\vec{s}\vec{H}) - \vec{H}(\vec{s}\vec{k}) \right] = -\left[0 - \vec{H}(\vec{s}\vec{k}) \right] = \omega \left[\vec{s} \times \vec{D} \right],$$

$$\left[\vec{s} \times \left[\vec{k} \times \vec{E} \right] \right] = \omega \mu_0 \left[\vec{s} \times \vec{H} \right] \Rightarrow \vec{k}(\vec{s}\vec{E}) - \vec{E}(\vec{s}\vec{k}) = 0 - \vec{E}(\vec{s}\vec{k}) = \omega \mu_0 \left[\vec{s} \times \vec{H} \right].$$

Исключаем \vec{H} , подставляя $\vec{H}(\vec{s}\vec{k}) = \omega \left[\vec{s} \times \vec{D} \right]$ из равенства в первой строке – во вторую:

$$-\vec{E}(\vec{s}\vec{k}) = \frac{\omega^2 \mu_0}{\vec{s}\vec{k}} \left[\vec{s} \times \left[\vec{s} \times \vec{D} \right] \right] \Rightarrow$$

$$\vec{E} = -\frac{\omega^2 \mu_0}{(\vec{s}\vec{k})^2} \left[\vec{s} \times \left[\vec{s} \times \vec{D} \right] \right] \Big|_{\vec{s}\vec{k} = \frac{\omega \vec{s} \vec{v}}{v} = \frac{\omega}{v} \cos \alpha = \frac{\omega}{v_s}} = \mu_0 v_s^2 \left[\vec{D} - \vec{s}(\vec{s}\vec{D}) \right].$$

Лекция 18

Глава V. Распространения света в веществе

§3. Распространение света в анизотропных средах

3.7. Поляризационные приборы

Б. Поляризационная призма Николя (1828), двоякопереломляющая призма (призма Волластона)

В. Дихроичные пластинки (поляроиды)

3.8. Наведенная анизотропия оптических свойств

А. Фотоупругость

Б. Эффекты Поккельса и Керра

В. Явление Коттона-Мутона

§4. Рассеяние света

4.1. Упругое рассеяние: рэлеевское на малых частицах, молекулярное рассеяние

4.2. Рассеяние Ми

4.3. Неупругое рассеяние

3.7. Поляризационные приборы

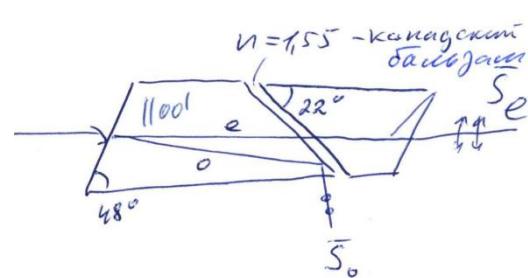
Б. Поляризационная призма Николя (1828), двоякопереломляющая призма (призма Волластона)

Поляризационная призма – комбинация кристаллов, оставляющая один поляризованный луч на выходе.

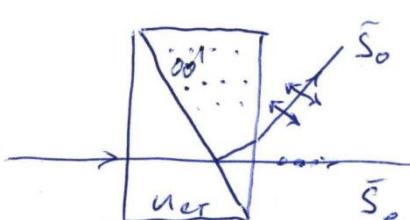
В *призме Николя* (см. рис.) используется два двулучепреломляющих кристалла исландского шпата (показатели преломления $n_e = 1.486$, $n_o = 1.658$), разделенных слоем

канадского бальзама (с показателем преломления $n = 1.55$, $n_e < n < n_o$). Кристаллы шпата вырезанный под определенными углами таким образом, чтобы обыкновенная волна попадала на слой канадского бальзама под углом, соответствующим полному внутреннему отражению для обыкновенной волны, поскольку

$n = 1.55 < n_o = 1.658$. Необыкновенная волна испытывает лишь преломление в слое канадского бальзама, т.к. $n_e = 1.486 < n = 1.55$. Таким образом, в прямом направлении необыкновенного луча выходит только плоско поляризованная необыкновенная волна.



В *двоеклеромляющей призме* (призме Волластона) используется комбинация стекла (изотропного материала) и исландского шпата (см.рис.). Поскольку показатели преломления стекла и необыкновенной волны в шпатае почти совпадают,



$n_{cr} = 1.490 \approx n_e = 1.486$, то необыкновенная волна на границе стекло/шпат не преломляется, а обыкновенная волна испытывает преломление и выходит из призмы в другом направлении.

В. Дихроичные пластиинки (поляроиды)

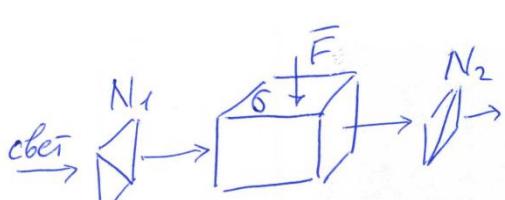
Дихроизм – оптический эффект зависимости поглощения среды от направления поляризации света.

Дихроичные пластиинки, или поляроиды, - поляризаторы света на основе эффекта дихроизма. В таких пластиинках один из пучков света в результате поглощения сильно ослабляется, а другой выходит линейно поляризованным. Например, в двулучепреломляющем кристалле турмалина поглощается обыкновенная волна (длина поглощения ~ 1 мм).

3.8. Наведенная анизотропия оптических свойств

Механо- (электро-, магнито-) оптические эффекты – это оптические эффекты, связанные с изменением оптических свойств среды под влиянием внешнего механического (электрического, магнитного) воздействий.

A. Фотоупругость (механооптический эффект) - наведенная оптическая анизотропия при механических деформациях (Зеебек, 1813). Наведенная оптическая ось соправлена с направлением деформирующей силы \vec{F} (см.рис.).

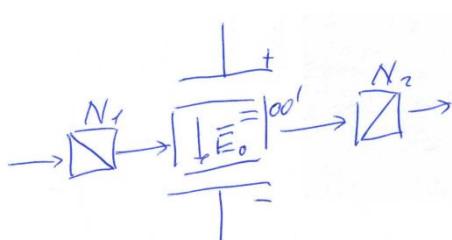


$$\Delta n = n_e - n_o = \gamma \frac{F}{\sigma}, \quad \gamma = \gamma(\lambda), \quad \frac{F}{\sigma} - \text{нормальное напряжение, вызванное деформацией.}$$

При падении белого света на прозрачное тело в схеме со скрещенными поляроидами (N_1, N_2) происходит окрашивание образца. Окраска в данной точке образца зависит от напряжения в этой точке.

Б. Эффект Поккельса

- линейный электрооптический эффект: $\Delta n = n_e - n_o = \gamma E_0, \quad \gamma = 10^{-11} - 10^{-10} \text{ м/В.}$



Наведенная оптическая анизотропия возникает вследствие смещения положения равновесия осцилирующего электрона при наложении внешнего электрического поля \vec{E}_0 (см.рис.). Из-за ангармонизма колебаний электрона происходит изменение его собственной частоты колебаний ω_0 : $\Delta(\omega_0^2) \sim E_0$. Как

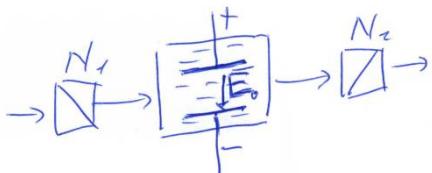
было показано ранее (см. лекцию про дисперсию), в диспергирующей среде показатель преломления зависит от ω_0 : $n^2 = n^2(\omega_0^2) = 1 + \frac{\xi}{\omega_0^2 - \omega^2}$, где ξ не зависит от частоты. Тогда

$2n\Delta n = \frac{-\zeta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \Delta(\omega_0^2)$, и т.к. $\Delta(\omega_0^2) \sim E_0 \Rightarrow \Delta n \sim E_0$. Наведенная оптическая ось соправлена с внешним наложенным электрическим полем (на рис. указана собственная оптическая ось анизотропного кристалла).

Эффект Покельса наблюдается только в анизотропных кристаллах, структура которых не обладает центром симметрии (чтобы существовал ангармонизм колебаний электронов), например, в кристаллах, активно используемых в нелинейной оптике: KDP (KH_2PO_4) - дигидрофосфат калия и LiNbO_3 - ниобат лития. Эффект Покельса безынерционен, время релаксации порядка 10^{-10} сек. Такое быстрое изменения анизотропных оптических свойств среды позволяет использовать эффект Покельса для быстрого изменения интенсивности проходящего света $I(t)$ в скрещенных поляризаторах (модуляторы интенсивности света, оптические затворы).

Эффект Керра

- квадратичный электрооптический эффект: $\Delta n = \gamma E_0^2$, $\gamma = 10^{-21} - 10^{-20} \text{ м}^2/\text{В}^2$.



Появление оптической анизотропии (оптической оси вдоль приложенного внешнего поля \vec{E}_0) объясняется поляризацией изотропных и ориентацией анизотропных молекул среды (газов, жидкостей, твердых тел с центром симметрии) вдоль поля \vec{E}_0 . Ячейки Керра, как и эффект Покельса, используются как высокоскоростные модуляторы света и оптические затворы.

В. Явление Коттона-Мутона

- квадратичный магнитооптический эффект в поперечном магнитном поле. Оптически изотропное вещество во внешнем магнитном поле приобретает свойства одноосного кристалла

$$\Delta n = \gamma B_0^2, \gamma \sim 10^{-8} \text{ Тл}^{-2}.$$

Анизотропия оптических свойств среды создается за счет ориентации в магнитном поле с индукцией B_0 анизотропных молекул, обладающих собственным магнитным моментом.

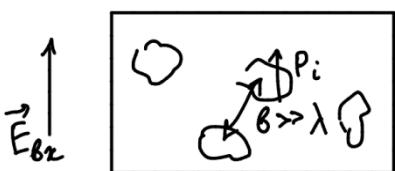
§4. Рассеяние света

Рассеяние света – изменение пространственного распределения интенсивности оптического излучения, его частоты или поляризации при взаимодействии излучения с веществом. Рассеяние бывает упругим (без изменения частоты рассеянного света, т.е. без изменения энергии фотона $\hbar\omega$), например, рэлеевское и рассеяние Ми, и неупругим – с изменением частоты (например, рамановское и Мандельштама-Бриллюэна).

Любая среда состоит из дискретных малых частиц – молекул, наночастиц и т.п.. Однако, если расстояние между этими частицами $b \ll \lambda$, то средняя по объему ΔV

поляризация среды $\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{m_{\Delta V}} \vec{P}_i$ (см. лекцию 13) однородна, т.е. среда является

оптически однородной, $\epsilon = \text{const}$. Здесь $b^3 \ll \Delta V \ll \lambda^3$, $m_{\Delta V}$ - число частиц в объеме усреднения. Излучение в такой однородной среде распространяется в одном направлении, и рассеяние в стороны не происходит.



Если же в среде существуют малые неоднородности (пыль, туман, флуктуации плотности, примеси и т.п.) на большем расстоянии друг от друга, $b > \lambda$, то среда перестает быть оптически однородной и при распространении излучения возникает его рассеяние.

4.1. Упругое рассеяние: рэлеевское на малых частицах, молекулярное рэлеевское рассеяние

Физически малая частица, поляризованный в электрическом поле, представляет собой точечный диполь. Падающий на такую частицу свет вызывает вынужденные осцилляции наведенного дипольного момента частицы с частотой падающего поля. Осциллирующий точечный диполь переизлучает (рассеивает) падающий свет – *рэлеевское рассеяние* (см. излучение точечного диполя в лекции 4).

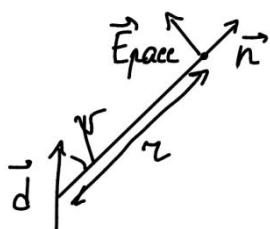
В теории рассеяния Ми есть параметр, определяющий «малость» частицы. Если набег фазы волны при прохождении в частице с характерным размером $D = 2r_0$ мал, т.е. $kD = (2\pi/\lambda)2r_0 \ll 1$, или $r_0/\lambda \ll 1/4\pi \approx 0.1$, то такая частица считается малой. Таким образом, у малой частицы $r_0 \ll 0.1\lambda$.

Найдем интенсивность света $I_{pac} = I_{pac}(\lambda)$, рассеянного малой диэлектрической частицей (точечным диполем). Пусть на частицу падает линейно поляризованная волна с колебаниями поля на частице

$$\vec{E}_0 = \vec{A}_0 \cos \omega t.$$

Наведенный дипольный момент частицы

$$\vec{d}(t) = \epsilon_0 a \vec{E}_0 = \vec{d}_0 \cos \omega t$$



осциллирует на частоте падающего поля ω и переизлучает рассеянное поле \vec{E}_{pac} (см.рис.), здесь a - поляризуемость частицы.

Из выражения для $\vec{d}(t)$ следует, что $\ddot{d} \sim \ddot{E}_0 \sim \omega^2 E_0$. Поле излучающего диполя имеет вид (см. лекцию 4):

$$E_{pac} \sim \frac{\sin \psi}{r} \ddot{d}(t) \sim \frac{\sin \psi}{r} \omega^2 E_0.$$

Тогда интенсивность рассеянной волны

$$I_{pac} = \langle S_n \rangle \sim \langle E_{pac}^2 \rangle \sim \frac{\sin^2 \psi}{r^2} \omega^4 \langle E_0^2 \rangle \sim \omega^4 \frac{\sin^2 \psi}{r^2} I_0,$$

или

$$I_{pac} \sim \frac{1}{\lambda^4} \frac{\sin^2 \psi}{r^2} I_0 \sim \frac{1}{\lambda^4} I_0$$

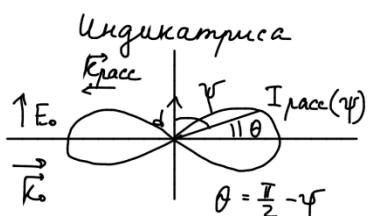
- закон рассеяния Рэлея (интенсивность рассеянного излучения сильно возрастает, как $1/\lambda^4$, при уменьшении длины волны).

Таким образом, при рэлеевском рассеянии в случае линейно поляризованной падающей волны, рассеянный свет:

- поляризован линейно,

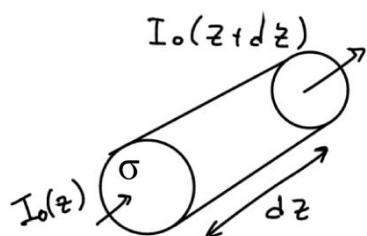
- интенсивность $I_{pac} \sim \frac{1}{\lambda^4} I_0$,

- интенсивность $I_{pac} \sim \sin^2 \psi I_0$ анизотропна по направлению (см. рис.).



Максимальное рассеяние наблюдается в направлении нормали к дипольному моменту, $I_{pac}(\psi = \pi/2) = \max$ (угол рассеяния $\theta = \pi/2 - \psi = 0$). В направлении колебаний диполь не излучает, $I_{pac}(\psi = 0) = 0$.

Оценим, как изменяется интенсивность падающего излучения при распространении в среде с рэлеевским рассеянием, $I_0 = I_0(z)$ (см. рис.).



Средняя мощность излучения одним осциллирующим диполем (одной частицей) во всех направлениях

$$\langle \mathcal{P} \rangle \sim \langle \ddot{d}^2 \rangle \sim \omega^4 I_0 \Rightarrow \langle \mathcal{P} \rangle = \alpha \omega^4 I_0,$$

где α - коэффициент пропорциональности. Тогда изменение энергии распространяющегося излучения в результате рассеяния в объеме $dV = \sigma dz$ в единицу времени запишется в вид:

$$\sigma[I_0(z + dz) - I_0(z)] = \sigma dI_0(z) = -\langle \mathcal{P} \rangle N \sigma dz = -\alpha \omega^4 I_0 N \sigma dz,$$

где N - концентрация рассеивающих частиц, $N \sigma dz$ - число рассеивающих частиц в объеме dV . Введем величину $\gamma = \alpha \omega^4 N$ и перепишем уравнение для интенсивности как

$$dI_0(z) = -\gamma I_0 dz.$$

Отсюда получим экспоненциальный закон убывания интенсивности света при распространении в среде с рэлеевским рассеянием:

$$I_0(z) = I_0(z = 0) e^{-\gamma z},$$

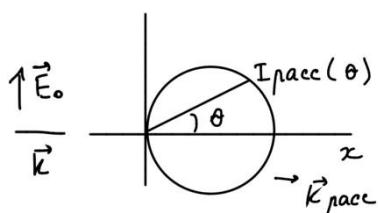
где $\gamma = \alpha \omega^4 N \sim N / \lambda^4$ - коэффициент рассеяния.

Молекулярное рэлеевское рассеяние

Рэлеевское рассеяние на малых частицах в атмосфере объясняет голубой цвет неба. Действительно, из спектра солнечного света более интенсивно рассеивается высокочастотная его часть. Поэтому, чем меньше концентрация частиц пыли и других рассеивающих частиц в атмосфере, тем меньше рассеяние и, таким образом, цвет неба высоко в горах должен быть черным. Однако это не так. Рэлей предположил, а Смолуховский (1908) и Эйнштейн (1910) позже показали, что коэффициент рассеяния $\gamma \sim N / \lambda^4$ связан с рассеянием на флуктуациях концентрации молекул в газе. Тепловые флуктуации концентрации молекул в малых объемах среды $\Delta V \ll \lambda^3$ приводят к флуктуациям показателя преломления (микроскопические неоднородности), вызывающие рассеяние подобно малым частицам примеси – *молекулярное рэлеевское рассеяние*.

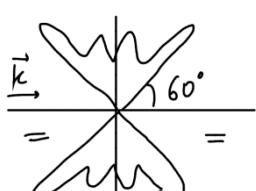
4.2. Рассеяние Ми

Другим практически важным примером является *рассеяние Mi* (1908) на относительно больших частицах с характерным размером $r_0 \geq 0.1\lambda$ (туман, коллоидные растворы и т.п.). Индикатриса рассеяния в этом случае сильно изрезана и зависит как от размера частиц r_0 , иак и от разности показателей преломления частицы и среды



$\Delta n = n_{част} - n_{среда}$. На первом рисунке слева представлена индикатриса рассеяния линейно поляризованной волны света на сферических частицах с $r_0 = 0.13\lambda$, $n_{част} = 1.25$ в воздухе. Видно, что в отличие от рэлеевского рассеяния рассеянное излучение направлено только вперед, рассеяния назад не происходит.

Индикатриса рассеяния на втором рисунке соответствует б`ольшим размерам частиц $r_0 = 0.64\lambda$. График кардинально отличается от графика на первом рисунке.



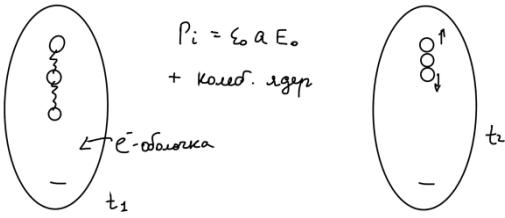
Отсутствует рассеянное излучение вперед, т.е. интенсивность падающего на такую среду излучения быстро затухает. Таким образом, для увеличения рассеяния вперед необходимо уменьшить параметр r_0 / λ , т.е. увеличить λ . Именно поэтому в противотуманных фарах автомобилей используется длинноволновое излучения (желтое), а запрещающий сигнал светофора – красный.

4.3. Неупругое рассеяние

В качестве примеров неупругого рассеяния, при котором изменяется частота рассеянного света, рассмотрим рассеяния Рамана (комбинационное) и Мандельштама-Бриллюэна.

При *рамановском рассеянии* в спектре рассеянного света появляются комбинированные частоты: $\omega_{pac} = \omega_0 \pm \omega_j$, где ω_0 частота падающего света, ω_j - частоты

собственных тепловых колебаний ядер атомов в молекуле (или в кристаллической решетке твердого тела). С классической



точки зрения появление дополнительных частот объясняется дополнительной слабой модуляцией величины дипольного момента молекулы P_i , наведенного внешним падающим

излучением $E_0 = A_0 \cos(\omega_0 t)$, на частотах собственных колебаний ядер атомов в молекуле ω_j . На рисунке схематически показано, каким образом колебания ядер (круги) приводят к изменению дипольного момента молекулы - со временем периодически изменяется пространственное распределение положительного заряда ядер в молекуле.

Величина дипольного момента молекулы в этом случае запишется в виде:

$$P_i = \epsilon_0 [a_0 + a_j(\omega_j t)] A_0 \cos(\omega_0 t),$$

где a_0 ; $a_j(\omega_j t) = a_{j0} \cos(\omega_j t)$ - поляризуемости молекулы, связанные со смещением электронной плотности на частоте ω_0 и колебаниями ядер на частоте ω_j , соответственно. Представляя косинусы в комплексной форме, запишем поляризацию среды $P = NP_i$ в виде:

$$\begin{aligned} P = N\epsilon_0 a_0 A_0 \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) + N\epsilon_0 a_{j0} \frac{1}{2} (e^{i\omega_j t} + e^{-i\omega_j t}) A_0 \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) = \\ = \epsilon_0 \chi_0 \frac{1}{2} A_0 (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) + \epsilon_0 \chi_j \frac{1}{4} A_0 (e^{i(\omega_0 + \omega_j)t} + e^{i(\omega_0 - \omega_j)t} + \text{k.c.}) \end{aligned}$$

где N - концентрация молекул, $\chi_0 = Na_0$, $\chi_j = Na_{j0}$. Из этого выражения видно, что помимо поляризации на частоте ω_0 , в среде возникает поляризация на комбинированных частотах $\omega = \omega_0 \pm \omega_j$, следовательно, и рассеяние излучения будет происходить на тех же частотах: $\omega_{pac} = \omega_0$; $\omega_0 \pm \omega_j$. С квантовой точки зрения происходит рассеяние фотона на возбужденных ($\hbar\omega_{pac} = \hbar\omega_0 + \hbar\omega_j$) и невозбужденных ($\hbar\omega_{pac} = \hbar\omega_0 - \hbar\omega_j$) молекулах.

Поскольку модуляция дипольного момента мала, $a_j(\omega_j t) \ll a_0$, то и интенсивность комбинационного рассеяния невелика, $I_{pac} \sim 10^{-6} I_0$.

Рассеяние Мандельштама-Бриллюэна (в жидкости и в твердом теле) – это рассеяние света на звуковой волне, т.е. на неоднородностях показателя преломления, которые возникают в среде из-за изменения давления, а, следовательно, из-за изменения концентрации частиц в звуковой волне. Изменения показателя преломления происходит периодически с частотой звуковой волны Ω_{se} , поэтому появляется модуляция поляризации среды на той же частоте. Аналогично описанному выше, это приводит к появлению в спектре рассеянного излучения дополнительных компонент на частотах $\omega = \omega_0 \pm \Omega_{se}$. В жидкости спектр рассеянного излучения представляет собой триплет (

ω_0 , $\omega_0 \pm \Omega_{se}$), а в твердом теле спектр более сложный из-за существования поперечных акустических волн. В анизотропном кристалле может существовать до 24 компонент тонкой структуры в спектре рассеянного излучения.