



Ответы к экзамену по ОПТИКЕ

Печатная версия

**1,2,3 потоки
49 вопросов**

2018

**Вопросы экзаменационных билетов по Оптике, 2018 г.
2 курс, 1 и 2 потоки; проф. Манцызов Б.И. и проф. Русаков В.С.**

1. Электромагнитная теория света. Уравнения Maxwella и материальное уравнение. Волновое уравнение. Принцип суперпозиции. Бегущие электромагнитные волны. Скорость света. Плоские и сферические волны. Комплексное представление гармонических волн.

2. Световые пучки и импульсы. Модели реальных световых волн. Квазиплоская гармоническая волна. Квазигармоническая волна. Случайно модулированные волны. Энергетика световых пучков и импульсов.

3. Волновое уравнение. Общее решение в виде плоских волн. Свойства плоских волн: ориентация и взаимосвязь полевых векторов. Поляризация света. Классификация состояний поляризации. Поляризация естественного света.

4. Поток и плотность потока энергии электромагнитной волны. Вектор Умова-Пойнтинга. Интенсивность света. Закон изменения энергии электромагнитного поля.

5. Плотность импульса электромагнитной волны. Давление световой волны на поверхность тела. Импульс фотона.

6. Метод спектрального описания волновых полей. Преобразования Фурье. Интеграл и коэффициенты Фурье. Комплексная спектральная амплитуда, спектральная плотность, спектры амплитуд и фаз, их свойства.

7. Свойства преобразования Фурье: соотношение между длительностью импульса и шириной спектра, смещение спектра по частоте. Теорема Планшереля. Примеры преобразования Фурье.

8. Спектральная плотность интенсивности: световой импульс, непрерывное стационарное излучение.

9. Интерференция света. Общая схема и уравнение двухволновой интерференции. Интерференция монохроматических волн: уравнение интерференции, порядок интерференции, функция видности, линейная и угловая ширины интерференционных полос.

10. Интерференция квазимонохроматического света. Условие интерференции. Спектральное описание, уравнение интерференции в частотном представлении. Функция видности, время и длина когерентности, максимальный порядок интерференции.

11. Интерференция квазимонохроматического света. Условие интерференции. Временное описание. Функция корреляции и ее свойства. Теорема Винера-Хинчина. Понятие о фурье-спектроскопии. Разрешающая способность фурье-спектрометра.

12. Пространственная когерентность. Уравнение интерференции. Функция видности, угол и радиус когерентности. Звездный интерферометр Майкельсона.

13. Основные схемы двухволновой интерференции. Метод деления волнового фронта и метод деления амплитуды. Характерные особенности методов. Примеры реализации методов. Интерференция при естественных условиях в тонких пленках.

14. Многоволновая интерференция. Уравнения многоволновой интерференции – формулы Эйри. Функция видности, ширина и резкость интерференционных полос. Интерференционный фильтр. Интерферометр Фабри-Перо. Пластиинка Люммера-Герке.

15. Дифракция света. Принцип Гюйгенса-Френеля и дифракционный интеграл Френеля. Теорема обратимости Гельмгольца. Принцип дополнительности Бабине.

16. Метод зон Френеля. Радиус и площадь зон Френеля. Число Френеля. Условие перехода от волновой к геометрической оптике. Дифракция света на круглом отверстии.

17. Метод векторных диаграмм. Спираль Френеля. Амплитудная и фазовая зонные пластиинки. Фокусы зонной пластиинки. Линза как оптимальная зонная пластиинка.

18. Дифракция света. Ближняя и дальняя зоны дифракции, дифракционная длина пучка. Дифракционная расходимость пучка в дальней зоне. Дифракция на круглом отверстии и круглом экране. Пятно Пуассона.

19. Дифракция света. Дифракция на щели и крае полубесконечного экрана и щели. Зоны Шустера, спираль Корню.

20. Дифракция света. Недостатки положений принципа Гюйгенса-Френеля. Понятие о теории дифракции Кирхгофа. Уравнение Гельмгольца и интегральная теорема Гельмгольца-Кирхгофа. Дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа. Приближения Френеля и Фраунгофера.

21. Дифракция света. Дифракция в дальней зоне как пространственное преобразование Фурье. Комплексная пространственная спектральная амплитуда. Разложение пучка по плоским волнам. Угловой спектр и его ширина.

22. Дифракция на одномерных периодических структурах. Функция (комплексный коэффициент) пропускания (отражения). Фактор многоволновой интерференции. Интерференционная функция. Угловая ширина главных максимумов. Амплитудная и фазовая решетки.

23. Спектральные приборы с пространственным разложением спектра. Характеристики спектральных приборов – аппаратная функция, область свободной дисперсии, предел разрешения, разрешающая способность. Призма. Дифракционная решетка.

24. Спектральные приборы с пространственным разложением спектра. Характеристики спектральных приборов – аппаратная функция, область свободной дисперсии, предел разрешения, разрешающая способность. Интерферометр Фабри-Перо. Интерферометр Майкельсона.

25. Основы дифракционной теории формирования изображений Аббе. Пространственная фильтрация изображения. Опыт Аббе-Портера. Специальные методы наблюдения фазовых объектов. Метод темного поля. Метод фазового контраста.

26. Роль дифракции в приборах, формирующих изображение. Предел разрешения и разрешающая способность оптического прибора: телескоп, микроскоп.

27. Запись и восстановление светового поля. Голография. Схемы голографической записи и восстановления. Двух- и трехмерные голограммы.

28. Дисперсия и поглощение света. Поляризуемость молекулы и вектор поляризации. Формула Лоренц-Лорентца. Классическая электронная теория дисперсии. Плазменная частота. Комплексный показатель преломления. Закон Бугера. Зависимости показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты.

29. Распространение светового импульса в диспергирующей среде. Фазовая и групповая скорости. Формула Рэлея. Дисперсионное расплывание волновых пакетов. Дисперсионная длина светового импульса.

30. Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Законы отражения и преломления. Формулы Френеля, поляризация отраженной и прошедшей волн. Угол Брюстера.

31. Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Формулы Френеля, явление полного внутреннего отражения. Энергетические соотношения при преломлении и отражении света.

32. Распространение света в анизотропных средах. Описание диэлектрических свойств анизотропных сред. Главные диэлектрические оси. Плоские электромагнитные волны в анизотропной среде. Структура световой волны, нормаль и луч, фазовая и лучевая скорости.

33. Распространение света в анизотропных средах. Главные скорости. Уравнение Френеля для фазовых скоростей. Свойства волн, распространяющихся в заданном направлении нормали.

34. Распространение света в анизотропных средах. Главные скорости. Уравнение Френеля для лучевых скоростей. Свойства волн, распространяющихся в заданном направлении луча.

35. Эллипсоид лучевых скоростей. Лучевая поверхность и ее сечения. Оптическая ось. Классификация анизотропных сред.

36. Оптические свойства одноосных кристаллов. Отрицательные и положительные кристаллы, сечения лучевых поверхностей. Главная плоскость, обычный и необычный лучи. Взаимная ориентация фазовой и лучевой скоростей. Двойное лучепреломление и поляризация света. Метод построения Гюйгенса.

37. Поляризационные приборы. Получение и анализ поляризованного света – явление дихроизма, поляроид и поляризационные призмы. Управление поляризацией света – компенсатор Бабине, оптические пластинки $\lambda/4$ и $\lambda/2$.

38. Наведенная анизотропия оптических свойств. Фотоупругость. Эффекты Покельса и Керра. Явление Коттон-Мутона.

39. Рассеяние света. Излучение точечного электрического диполя. Индикатриса рассеяния, поляризация рассеянного света. Закон Рэлея. Рассеяние Ми.

40. Молекулярное рассеяние света в газах и жидкостях. Элементы статистической теории рассеяния. Формулы Эйнштейна и Рэлея. Основные особенности молекулярного рассеяния.

41. Излучение света. Классическая осцилляторная модель атома. Оценка времени затухания. Естественная форма и ширина линии излучения.

42. Излучение ансамбля статистически независимых осцилляторов. Ударное и доплеровское уширение спектральной линии. Понятие об однородном и неоднородном уширении.

43. Основные представления о квантовой теории излучения света атомами и молекулами. Модель двухуровневой системы. Спонтанные и вынужденные радиационные переходы. Коэффициенты Эйнштейна. Взаимосвязь коэффициентов Эйнштейна. Формула Планка.

44. Многоуровневые системы. Энергетическая структура атомов, молекул и твердых тел. Явление люминесценции: определение и классификация, механизмы и свойства.

45. Резонансное усиление света. Линейные коэффициенты поглощения и усиления среды. Инверсная заселенность энергетических уровней. Воздействие светового потока на заселенность уровней. Получение инверсной заселенности с помощью трехуровневой системы. Зависимость коэффициента усиления от частоты.

46. Лазеры – устройство и принцип работы. Принципиальная схема лазера. Условия стационарной генерации. Продольные и поперечные моды колебания и излучения. Спектральный состав излучения лазера. Ширины линии излучения и полосы усиления, величина межмодового интервала. Одномодовый лазер. Примеры лазеров.

47. Нелинейные оптические явления. Поляризация среды в поле высокоинтенсивного лазерного излучения. Среды с квадратичной нелинейностью. Оптическое детектирование и генерация гармоник.

48. Нелинейные оптические явления. Поляризация среды в поле высокоинтенсивного лазерного излучения. Среды с кубической нелинейностью. Самофокусировка волновых пучков и генерация гармоник.

49. Геометрическая оптика. Кардинальные элементы оптической системы – узловые точки, главные и фокальные плоскости. Построение изображений с помощью кардинальных элементов.

Вопрос 1

1

Электромагнитная теория света. Уравнения Максвелла и материальное уравнение.
Волновое уравнение. Принцип суперпозиции. Бегущие электромагнитные волны.
Скорость света. Плоские и сферические волны. Комплексное представление гармонических волн.

Оптика – раздел физики, изучающий природу оптического излучения (света), его распространение и взаимодействие с веществом.

Свет – электромагнитная волна, для которой существует возможность сформировать изображение: 1) Ультрафиолетовый диапазон ($\lambda = 10 - 380$ нм)

2) Видимый диапазон ($\lambda = 380 - 780$ нм)

3) Инфракрасный диапазон ($\lambda = 780$ нм – 2 мм)

Уравнения Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{Закон электромагнитной индукции Фарадея} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} - \text{Теорема о циркуляции вектора } \vec{H} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho - \text{Теорема Гаусса для вектора } \vec{D} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 - \text{Теорема Гаусса для вектора } \vec{B} \end{array} \right.$$

E, D, H и B – напряжённость и индукция эл-го и маг-го полей соответственно.

Материальные уравнения: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{I})$

где $\epsilon_0 = 8,85 * 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}$ Гн/м

(Отражают связь между характеристиками электромагнитного поля в среде и откликом среды на воздействие поля)

Пусть среда электрически нейтральна ($\rho = 0$ и $j = 0$), тогда ур-ия Максвелла принимают вид: $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}$$

$$j = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ; \quad \rho = 0 \Rightarrow \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}}$$
 - волновое уравнение, где $\boxed{\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = c}$ - скорость э/м волны

Аналогичное волновое уравнение можно получить для вектора \vec{H} :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{H}}$$

Если записать оба векторных волновых уравнения в скалярном виде, то получим шесть одинаковых волновых уравнений вида:

$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{f}$, где под \vec{f} подразумевается любая из шести компонент $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ э/м поля. Функция f называется уравнением волны.

Принцип суперпозиции: вектор волны \vec{f} равен сумме векторов каждой волны в отдельности

$$\vec{f} = \sum_i \vec{f}_i$$

Электромагнитные волны распространяются независимо друг от друга (в условиях однородности и безграничности)

Бегущая волна – волна, которая при распространении в среде переносит энергию. Так же как и в случае упругой деформации, передача энергии от точки к точке в э/м волне связана с тем, что волны электрической и магнитной напряжённостей находятся в одной фазе.

Пусть функция f зависит лишь от сферической координаты $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, тогда $f = f(r, t)$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r} \left(\frac{x}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{x}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf)$. Пусть $\Psi = rf$, тогда $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}$. Решение этого волнового уравнения представляет собой суперпозицию волновых возмущений, движущихся навстречу друг другу:

$\Psi(r, t) = \Psi_1(t - r/c) + \Psi_2(t + r/c)$, где Ψ_1, Ψ_2 – произвольные функции.

Окончательное уравнение сферической волны принимает вид:

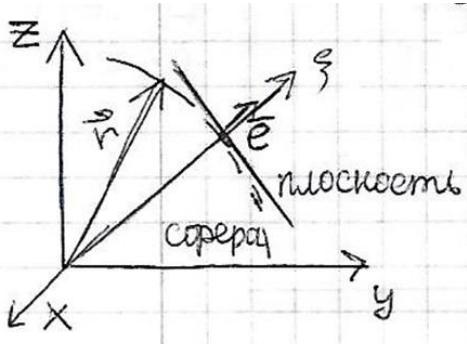
$$f(r, t) = \frac{\Psi_1(t - r/c)}{r} + \frac{\Psi_2(t + r/c)}{r}$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой сферическую волну, расходящуюся от начала координат, а второе – сходящуюся к началу координат. Важно отметить, что у расходящейся волны возмущение ослабевает обратно пропорционально пройденному волной расстоянию, а у сходящейся, наоборот, нарастает.

На больших расстояниях от начала координат фрагмент сферической волны

может быть представлен в виде плоской волны. Если ввести единичный нормальный вектор \vec{e} , то Φ -ия f постоянна на плоскости

$\vec{r} \cdot \vec{e} = \text{const}$ и зависит только от координаты $\xi = \vec{r} \cdot \vec{e}$, отсчитываемой вдоль направления нормали к плоскости. Поэтому уравнение такой волны должно



зависеть от координаты и времени следующим образом: $f(r, t) = f(\xi, t)$.

$$\text{Отсюда: } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \rightarrow f(\xi, t) = f_1\left(t - \frac{\xi}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{\xi}{c}\right)$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции.

Окончательно уравнение плоской волны принимает вид:

$$f(\vec{r}, t) = f_1\left(t - \frac{\vec{r}\vec{e}}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{\vec{r}\vec{e}}{c}\right)$$

Волновой фронт – поверхность, состоящая из точек пространства, в которых

$$f\left(t \mp \frac{r}{c}\right) = \text{const}$$
 в некоторый момент времени.

В отличие от сферической волны возмущение в плоской волне не изменяется с пройденным волной расстоянием.

Уравнение гармонической волны: $f(x, y, z, t) = A(x, y, z) \cos[\omega t - \varphi(x, y, z)]$

В оптике широко используется комплексное представление уравнения волны:

$$f = \frac{1}{2} [A e^{i(\omega t - \varphi)} + A e^{-i(\omega t - \varphi)}].$$

Если ввести комплексную амплитуду $\hat{A} = A e^{i\varphi}$, то получим комплексное представление гармонической волны:

$$f = \frac{1}{2} [\hat{A} e^{i\omega t} + \hat{A}^* e^{-i\omega t}]$$

Вопрос 2

Световые пучки и импульсы. Модели реальных световых волн. Квазиплоская гармоническая волна. Квазигармоническая волна. Случайно модулированные волны. Энергетика световых пучков и импульсов.

Изменение амплитуды или фазы во времени или пространстве означает вариацию интенсивности и носит название модуляции.

Плоских и монохроматических волн в реальности не существует. Реальные волны модулированы во времени и пространстве, а также ограничены.

Световой пучок – световая волна, модулированная в пространстве с масштабом модуляции, существенно превышающим длину волны ($d \gg \lambda \sim 0,5 * 10^{-6}$ см).

В оптическом диапазоне могут формироваться направленные пучки света, которые распространяются преимущественно вдоль одной оси. В поперечном направлении амплитуда быстро спадает от середины пучка к его периферии. Такие пучки создаются достаточно просто с использованием лазеров, генерирующих монохроматическое и направленное излучение.

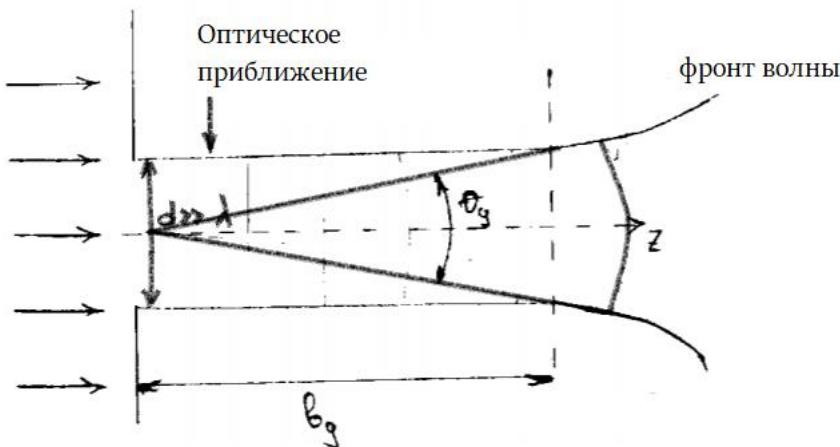
Пр. (вдоль оси z): $f(x, y, z, t) = A(x, y, z) \cos[\omega t - kz + \varphi_0(x, y, z)]$

Световой импульс – световая волна, модулированная во времени с масштабом модуляции, существенно превышающим период колебаний волны ($\tau \gg T \sim 10^{-15}$ с).

Многие источники света излучают световые вспышки. Эти вспышки делятся ограниченное время τ_0 и представляют собой электромагнитные импульсы.

Пр. (вдоль оси z): $f(x, y, z, t) = A\left(x, y, z, t - \frac{z}{c}\right) \cos[\omega t - kz + \varphi_0(x, y, z, t - \frac{z}{c})]$

Квазиплоская гармоническая волна – волна, фронт которой близок к плоскому в ограниченной области.



$$\theta_g \cong \frac{\lambda}{d}, \quad b_g = \frac{d^2}{4\lambda}$$

θ_g – угол дифракционного расширения

b_g – дифракционная длина пучка

d – выходная линейная пертура

При $z \ll b$ можно считать, что

пучок практически не расширяется, волновой фронт является плоскостью, перпендикулярной оси Z

При $z \gg b$ можно считать, что пучок сферический

Уравнение квазиплоской волны: $f(t, z) = a(x, y) \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$

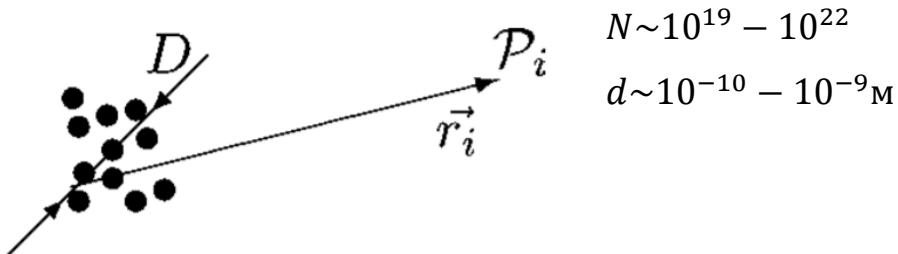
Отличие от плоской волны состоит в том, что $a = a(x, y)$ – волна модулирована.

Пусть в вышеприведённом примере волна генерируется лазером (время генерации $\tau \sim 10^{-11} - 10^{-12}$). Для оптического диапазона $T \sim 10^{-15}$. Очевидно, что $\tau \gg T$. При условиях $z \gg b$ и $d \gg \lambda$ волна является квазигармонической, её уравнение:

$$f(t, z) = a(t, x, y) \cos(\omega t - kz + \varphi_0(t))$$

Случайно модулированные волны:

Пусть имеется источник света размером D , состоящий из большого числа N «элементарных» источников, линейные размеры которых равны d . Примером «элементарных» источников могут быть атомы.



Очевидно, что $z_i \gg \frac{d_i^2}{4\lambda}$, следовательно, волну от каждого источника можно считать сферической.

$$f(t, x, y, z) = \sum_i \frac{a_i \cos(\omega t - kz_i + \varphi_{0i})}{r_i} = \frac{1}{r} \sum_i a_i \cos(\omega t - kz_i + \varphi_{0i}) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

$f(t, r) = \tilde{b} \cos(\omega t - kz + \tilde{\varphi}_0)$

Уравнение случайно моделированной плоской волны

См. вопрос 4 (про вектор У-П и интенсивность)

Рассмотрим описание квазиплоских волн (для пучков):

$$E(t, \vec{r}) = E_0(x, y) \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \quad I = \epsilon \epsilon_0 v \langle E^2(t, \vec{r}) \rangle = \frac{\epsilon \epsilon_0 v}{2} E_0^2(x, y)$$

Рассмотрим описание квазиплоских, квазигармонических волн (для импульсов):

$$E(t, \vec{r}) = E_0 \left(t - \frac{z}{v}, x, y \right) \cos(\omega t - kz + \varphi_0(t - \frac{z}{v})) \quad I = \frac{\epsilon \epsilon_0 v}{2} E_0^2(t - \frac{z}{v}, x, y)$$

Характеристики пучка P – мощность, σ – площадь поперечного сечения

$$P = \iint_{-\infty}^{+\infty} I dx dy = I_{\text{эфф}} \sigma \quad \text{где } I_{\text{эфф}} = \frac{P}{\sigma}$$

Характеристики импульса W – полная энергия, σ, τ – время существования

$$W = \oint_{-\infty}^{+\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} I dx dy dt = I_{\text{эфф}} \sigma \tau \quad \text{где } I_{\text{эфф}} = \frac{W}{\sigma \tau} \quad \text{и } P = \frac{W}{\tau}$$

Вопрос 3

Волновое уравнение. Общее решение в виде плоских волн. Свойства плоских волн: ориентация и взаимосвязь полевых векторов. Поляризация света. Классификация состояний поляризации. Поляризация естественного света.

Электромагнитная теория света базируется на системе уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases} \leftarrow (1)$$

В нашем случае $\rho = 0$; $\vec{j} = 0$ недостающие векторные уравнения, устанавливающие связь между векторами, называются материальными уравнениями среды. В общем виде: $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$; $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$; $\vec{j} = \vec{j}(\vec{E})$. В нашем случае: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$; $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Волновое уравнение - полностью определяет состояние поля:

Возможность распространения волн в вакууме легко доказывается выводом волнового уравнения как для вектора \vec{E} , так и для вектора \vec{H} . Применим операцию **rot** к обеим частям уравнения (1) и учтем, что для произвольного вектора A справедливо: $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Тогда

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = \text{rot rot } \vec{E} = \text{rot } \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right).$$

Изменим порядок дифференцирования по времени и координатам и учтем $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$; $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$. Тогда

$$\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Т.к. $\text{div } \vec{D} = 0 = \epsilon_0 \text{div } \vec{E}$, то $\text{grad div } \vec{E} = 0$

Окончательно имеем:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta \vec{E}} \quad \text{— волновое уравнение}$$

$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$ — скорость распространения эл/м волны в вакууме

ВУ справедливо для $f = E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f$$

Вопрос 3

Общее решение в виде плоских волн:

Бегущая волна - волна, которая при распространении в среде переносит энергию. Так же как и в случае упругой деформации, передача энергии от точки к точке в эл/м волне связана с тем, что волна эл. и магнитн. Напряженностей находится в 1ой фазе.

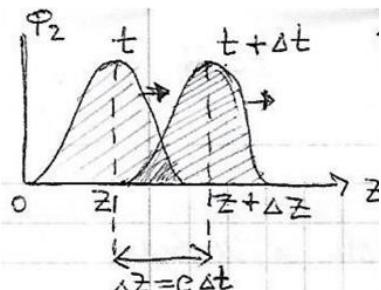
$$\text{Плоские волны: } \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{Пусть } \Phi = \Phi(z, t). \quad \text{Тогда } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad \text{Замена: } \xi = z - ct; \eta = z + ct$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + c \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{aligned} \right. | \cdot c \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{aligned} \times \\ & \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi = 0 \end{aligned}$$

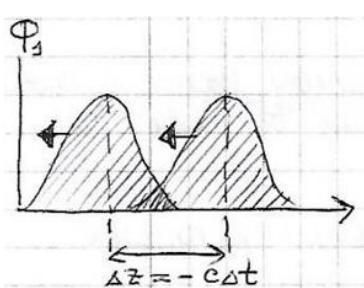
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \Psi(\eta); \quad \Phi = \int \Psi(\eta) d\eta = \Phi_1(\eta) + \Phi_2(\xi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(z, t) = \Phi_1(z + ct) + \Phi_2(z - ct)}$$



Функция $\Phi_2(z - ct)$ описывает волну произвольной формы, движущуюся со скоростью c в направлении положительных значений оси Z . В процессе движения значение Φ_2 в каждой точке волны и форма волны не изменяются.

$$z - ct = (z + \Delta z) - c(t + \Delta t)$$



Функция $\Phi_1(z + ct)$ описывает волну произвольной формы, движущуюся со скоростью c в направлении отрицательных значений оси Z . Значение Φ_1 в каждой точке волны и форма волны не изменяются.

$$z + ct = (z - \Delta z) + c(t - \Delta t)$$

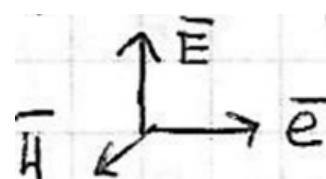
Значение функции Φ для фиксированных z и t является постоянным на плоскости, \perp оси z . Поэтому такие волны называются плоскими.

Сферическая и плоская волны являются абстракциями, поскольку не существуют в природе. Волны реальных источников могут быть представлены в виде суперпозиции либо сферических, либо плоских волн.

Свойства плоских волн: ориентация и взаимосвязь полевых векторов:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}\left(t \mp \frac{\vec{r}\vec{e}}{c}\right); \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}\left(t \mp \frac{\vec{r}\vec{e}}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\epsilon_0} \vec{e} \times \vec{E} = \sqrt{\mu_0} \vec{H} \\ \sqrt{\mu_0} \vec{e} \times \vec{H} = \sqrt{\epsilon_0} \vec{E} \end{cases}$$



Вопрос 3

В плоской бегущей волне:

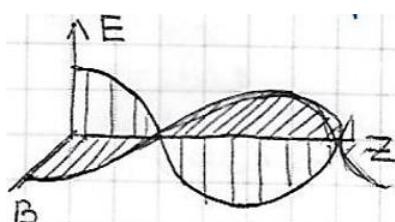
- 1) векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{e} взаимно перпендикулярны волна является поперечной.
(выполняется и для сферической волны=> сферическая волна также является поперечной)
- 2) эти векторы образуют правую тройку векторов.
- 3) величины напряженностей эл. и магнитн. полей изменяются во времени синхронно, достигая одновременно max и min значений

Поляризация света:

Эл/м волны являются поперечными, и их свойства зависят от ориентировки векторов и, характеризуемой понятием поляризации.

Классификация состояний поляризации:

- Линейная поляризация



Если в процессе распространения волны вектор лежит в 1 и той же плоскости, параллельной направлению распространения волны, то волны называются линейно поляризованными.

Плоскость (\mathbf{E}, \mathbf{z}) - плоскость колебаний

- Суперпозиция линейно поляризованных волн

(в 1 направлении с одинаковой частотой)

$$\{E_{1X}(z, t) = E_{10} \sin(\omega t - kz); \quad E_{1Y} = E_{1Z} = 0 \quad (1)$$

$$\{E_{2Y}(z, t) = E_{20} \sin(\omega t - kz + \delta); \quad E_{2X} = E_{2Z} = 0 \quad (2) \quad \delta - \text{сдвиг фаз между колебаниями}$$

(1). колебания \mathbf{E} в плоскости XZ

(2). в плоскости YZ

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Перепишем уравнение (2) в виде $E_Y = E_{2Y}(z, t) = E_{20}[\sin(\omega t - kz) \cos \delta + \sin \delta \cos(\omega t - kz)]$;

$$\text{Из (1)} \sin(\omega t - kz) = \frac{E_X}{E_{10}}.$$

Тогда

$$E_Y = E_{20} \frac{E_X}{E_{10}} \cos \delta + E_{20} \sqrt{1 - \left(\frac{E_X}{E_{10}}\right)^2} \sin \delta$$

$$E_Y - E_{20} \frac{E_X}{E_{10}} \cos \delta = E_{20} \sqrt{1 - \left(\frac{E_X}{E_{10}}\right)^2} \sin \delta \quad | : E_{20} \text{ и возводим в квадрат}$$

$$\left(\frac{1}{E_{20}}\right)^2 \left(E_Y - \frac{E_{20}E_X}{E_{10}} \cos \delta\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{E_X}{E_{10}}\right)^2\right) \sin^2 \delta \quad ...$$

Вопрос 3

Окончательно имеем:

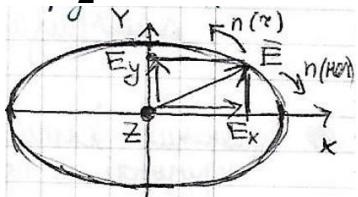
$$\left(\frac{E_Y}{E_{20}}\right)^2 + \left(\frac{E_X}{E_{10}}\right)^2 - 2 \frac{E_X}{E_{10}} \cdot \frac{E_Y}{E_{20}} \cos \delta = (\sin \delta)^2$$

1. $\cos \delta = 0; \quad \sin \delta = \pm 1$

$$\left(\frac{E_X}{E_{10}}\right)^2 + \left(\frac{E_Y}{E_{20}}\right)^2 = 1$$

- 1) $E_{10} \neq E_{20} \Rightarrow$ **уравнение эллипса** с центром в начале координат и осями вдоль осей системы координат

$$\delta = \frac{\pi}{2} + 2\pi; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$



(эллиптическая поляризация в частном случае,
когда главные оси эллипса коллинеарны
направлениям колебаний E)

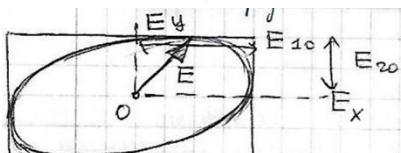
наблюдение за вращением вектора E со стороны, в которой движется волна

- a) n -четн (по часовой)- правая эллиптически поляризованная волна
- b) n -нечетн (против часовой)- левая

- 2) $E_{10} = E_{20} \Rightarrow$ **окружность**- волна с циркулярной/круговой поляризацией

- a) Левая поляризация
- b) Правая поляризация

2. $\cos \delta \neq 0, \quad \sin \delta \neq 1$ Эллипс.



Его главные оси не совпадают с осями координат.
Max и Min значения составляющих $E_X = \mp E_{10}$ и $E_Y = \mp E_{20}$. Эллипс вписан в прямоугольник с оронами $2E_{10}$ и $2E_{20}$ с центром в начале координат.

(эллиптическая поляризация в общем случае)

Вопрос 3

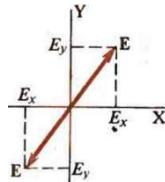
3. $\cos \delta = \mp 1$; $\sin \delta = 0$. Вырожденный случай эллиптической поляризации

Линейно поляризованная волна является предельным случаем эл/м-ой поляризованной волны.

$$\left(\frac{E_Y}{E_{20}}\right)^2 + \left(\frac{E_X}{E_{10}}\right)^2 \mp 2 \frac{E_X}{E_{10}} \cdot \frac{E_Y}{E_{20}} = \left(\frac{E_Y}{E_{20}} \mp \frac{E_X}{E_{10}}\right)^2 = 0$$

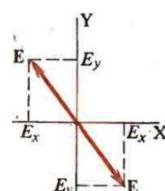
1) $\cos \delta = +1$;

$$\frac{E_Y}{E_{20}} - \frac{E_X}{E_{10}} = 0$$



2) $\cos \delta = -1$

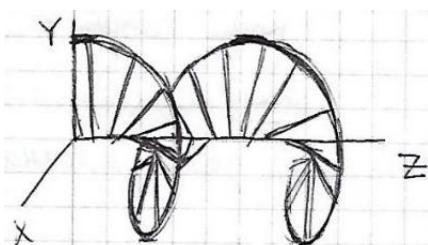
$$\frac{E_Y}{E_{20}} + \frac{E_X}{E_{10}} = 0$$



- Число независимых поляризаций

Эл/м волна с любой поляризацией может быть представлена в виде суперпозиции 2-х линейно поляризованных волн, плоскости колебаний электрического вектора которых взаимно перпендикулярны.

- ➔ Эл/м волны обладают 2мя независимыми состояниями поляризации.
- Изменение вектора напряженности в пространстве при эллиптической и круговой поляризациях.



Для фиксированного момента времени множество точек, образуемых вектором, лежит на винтовой линии.
(Рис. Изменение вектора в пространстве в фиксированный момент времени при круговой поляризации волн.)

Поляризация естественного света:

В каждый момент времени векторы E , H , N хотя и остаются взаимно перпендикулярными, но направления векторов E , H беспорядочно изменяется с течением времени. Естественный свет обладает осевой симметрией относительно направления его распространения. Осевая симметрия сохраняется для смеси естественного света с поляризованным (частично поляр.).

Вопрос 4

Поток и плотность потока энергии электромагнитной волны. Вектор Умова-Пойнтинга. Интенсивность света. Закон изменения энергии электромагнитного поля.

Поток и плотность потока энергии электромагнитной волны. Вектор Умова-Пойнтинга.

Световая волна переносит энергию.

Поток энергии - количественная характеристика переноса энергии, характеризуется вектором Умова-Пойнтинга.

Посчитаем поток энергии, переносимой плоской волной через сечение, ориентированное перпендикулярно направлению распространения волны (в данном случае в направлении оси Oz).

Нам известно из предыдущих курсов, что объемная плотность энергии электромагнитного поля равна

$$u = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)$$

где u - плотность энергии; $\varepsilon_0 = 8.85 * 10^{-12} \text{ Ф/м}$, $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}$ – электрическая и магнитная постоянные; E , H – напряженности электрического и магнитного полей;

Для определенности примем, что волна плоскополяризована ($\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x$; $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y H_y$).

Учитывая, что

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Через заштрихованную поверхность площади σ за время Δt будет перенесена энергия, заключенная в параллелепипеде длиной $c\Delta t$

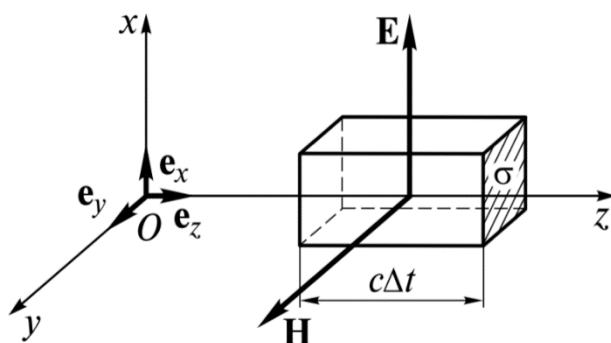
$$\Delta W = u\sigma c\Delta t = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sigma \Delta t$$

Поскольку для плоской волны верно следующее: $\sqrt{\varepsilon_0} E_x = \sqrt{\mu_0} H_y$,

то последнее выражение можно преобразовать

$$\Delta W = \varepsilon_0 E_x^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sigma \Delta t = E_x H_y \sigma \Delta t$$

Количество энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно распространению волны, определяется вектором Умова-Пойнтинга.



Вопрос 4

В рассматриваемом случае этот вектор имеет одну компоненту вдоль оси Oz , которая равна

$$S_z = \frac{\Delta W}{\sigma \Delta t} = E_x H_y$$

В общем случае выражение для вектора Умова-Пойнтинга (векторное произведение – произведение модулей на синус угла между ними. Синус в данном случае выделяет часть, падающую на площадку, нормально).

$$\boxed{\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]}$$

Если волна гармоническая, то $E_x = A \cos[\omega t - kz]$; $H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_x = c \epsilon_0 E_x$;

Тогда $S_z = c \epsilon_0 A^2 \cos^2[\omega t - kz]$

Интенсивность света:

Интенсивностью волны называют среднее за период значение плотности потока энергии (вектора Умова-Пойнтинга).

$$\boxed{I = \langle S_z \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S_z dt = \frac{1}{2} c \epsilon_0 A^2}$$

где A – амплитуда значения напряженности электрического поля (В/м)

Интенсивность I измеряется в ваттах на квадратный метр (Вт/м²).

Иногда в оптике опускают коэффициент $\frac{1}{2} c \epsilon_0$ и считают $I = A^2$, тогда интенсивность определяется в «нестандартных» единицах.

Закон изменения энергии электромагнитного поля:

Найдем закон изменения энергии электромагнитного поля.

Два уравнения Максвелла

$$rot \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t}; \quad rot \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t};$$

Выражение для объемной плотности энергии электромагнитного поля

$$u = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H})$$

Домножим скалярно левую и правую части первого уравнения Максвелла на \mathbf{H} , а второго уравнения на \mathbf{E}

Вопрос 4

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{H} \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t}; \quad \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t};$$

Затем вычтем одно из другого

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{j} \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t} + \mu_0 \mathbf{H} \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t} = -\operatorname{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = -\operatorname{div} \mathbf{S}$$

Здесь учтено, что

$$\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\operatorname{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 = \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{j} \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t} + \mu_0 \mathbf{H} \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t} = \\ &= \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{j} \mathbf{E} + \frac{\delta}{\delta t} \frac{1}{2} (\varepsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H} \mathbf{H}) = \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{j} \mathbf{E} + \frac{\delta u}{\delta t}; \end{aligned}$$

Теорема Пойнтинга или Закон изменения энергии электромагнитного поля

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{j} \mathbf{E} + \frac{\delta u}{\delta t} = 0$$

Вопрос 5

Плотность импульса э/м волны. Давление световой волны на поверхность тела.

Импульс фотона.

Вместе с энергией волна переносит импульс. При падении света на мат. тело этот импульс (целиком или частично) передается телу. В соответствии со вторым ЗН свет действует на тело с некоторой силой, оказывая тем самым световое давление.

Теория светового давления.

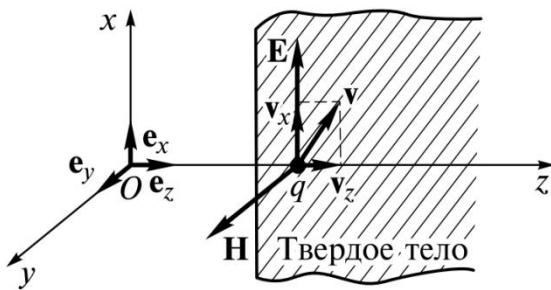
$$E = h\nu$$

$$I = ncE = nch\nu$$

$$nch\nu = \frac{1}{2}cE_0A^2$$

n – среднее число фотонов в единице объема

$$\text{Амплитуда волны } A = \sqrt{\frac{2nch\nu}{E_0}}$$



Световое давление – результат действия пондеромоторных сил со стороны э/м поля на движущиеся заряды в материальном теле. При воздействии электрического поля на частицу с зарядом q , входящую в состав атома, она приобретает скорость $v_x \vec{e}_x$. Магнитное поле, воздействуя на движущуюся частицу, начинает ее «заталкивать» внутрь тела. У частицы появляется и вторая компонента скорости $v_z \vec{e}_z$. Через полпериода изменяется направление векторов E , H , и $v_x \vec{e}_x$ на противоположные, но магнитное поле «заталкивает» по-прежнему частицу вдоль оси Oz внутрь тела. Это и является причиной светового давления.

Мгновенное значение силы Лоренца

$$\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v}_x\vec{B} = qE_x\vec{e}_x + q(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z)B_y\vec{e}_y$$

Средняя за период сила Лоренца, действующая на этот заряд

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t \vec{f}(t) dt = q \left\langle E_x \right\rangle \vec{e}_x - q \left\langle v_z B_y \right\rangle \vec{e}_x + q \left\langle v_x B_y \right\rangle \vec{e}_z$$

Очевидно $\langle E_x \rangle = 0$, Можно положить $\langle v_z B_y \rangle = v_z \langle B_y \rangle = 0$, поскольку за период колебаний v_z , направленная всегда вдоль положительного направления оси Oz, изменяется незначительно, в то время как B_y является быстро осциллирующей функцией.

Таким образом, вектор средней силы направлен вдоль оси Oz и равен

$$\langle f \rangle = q \langle v_x B_y \rangle e_z$$

Электрическое поле совершает работу над зарядом. Мощность силы f равна энергии W , передаваемой от волны к заряду в единицу времени.

$$\frac{dW}{dt} = fv = qE_x v_x = cq v_x B_y$$

$$\text{Учтено, что } E_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_y = cB_y$$

Вопрос 5

Усредняя по времени можно записать

$$\langle f \rangle = \frac{1}{c} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle e_z$$

При переходе к единице площади среднее значение силы можно заменить давлением, а среднее значение энергии в единицу времени – интенсивностью

$$p = \frac{I}{c}$$

Эта формула получена в предположении, что импульс волны полностью передается мат. телу. При падении на частично отражающую поверхность давление увеличивается, поскольку часть импульса волны уносится в обратном направлении. Поэтому давление света будет зависеть от коэф. R для интенсивности

$$p = \frac{I}{c} (1 + R)$$

При падении на идеально зеркальную поверхность R=1 давление увеличится вдвое по сравнению с $p = \frac{I}{c}$

Но давление численно равно среднему импульсу, передаваемому волной единице площади за единицу времени

$$p = \frac{d}{dt} K$$

Поэтому импульс K, переносимый волной за конечное время равен

$$K = \frac{1}{c} \int I(t) dt$$

Импульс фотона

$$K = \frac{1}{c} n c h v t$$

Этот импульс равен сумме импульсов отдельных фотонов, число которых $n c t$

$$P_\phi = \frac{h v}{c}$$

Импульс фотона равен его энергии, деленной на скорость света, и сонаправлен с вектором скорости фотона.

Фотон обладает энергией, импульсом, эл. зарядом и моментом импульса.

Он не имеет массы, эл. заряда, эл. дипольного и магнитного моментов. Его время жизни в вакууме не ограничено, поэтому фотон устойчив и самопроизвольно не распадается.

Согласно теории, относительный импульс объекта нулевой массы покоя, движущегося со скоростью света

$$p = \frac{w}{c} - \text{импульс}$$

$$p = \frac{w}{c} - \text{плотность импульса}$$

$$pc = w s = wv = EH \rightarrow p = \frac{[E \cdot H]}{c^2}$$

$$p(\text{давл}) = \langle w \rangle$$

Вопрос 6

Метод спектрального описания волновых полей. Преобразования Фурье. Интеграл и коэффициенты Фурье. Комплексная спектральная амплитуда, спектральная плотность, спектры амплитуд и фаз, их свойства.

Метод позволяет описать действие произвольной по своей структуре волны на некоторую неоднородную среду с помощью представления исходной волны в виде совокупности плоских гармонических (эталонных) волн. В основе метода лежит принцип суперпозиции и преобразование Фурье. Метод работает только для сред с линейным откликом.

Если функция $f(t)$ интегрируема в каждом конечном интервале и существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$, то эта функция представима в виде интеграла Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega$$

Коэффициенты Фурье: $a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$, $b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$

Спектральная амплитуда: $f(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$

Спектральная фаза $\varphi(\omega)$ определяется так:
$$\begin{cases} \cos(\varphi(\omega)) = a(\omega)/f(\omega) \\ \sin(\varphi(\omega)) = b(\omega)/f(\omega) \end{cases}$$

Комплексная спектральная амплитуда: $\hat{f}(\omega) = a(\omega) - ib(\omega) = f(\omega)e^{-i\varphi(\omega)}$

Спектральная плотность: $|\hat{f}(\omega)|^2 = f^2(\omega)$

Прямое преобразование Фурье: $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

Обратное преобразование Фурье: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

Свойства:

1. Комплексно сопряженная спектральная амплитуда равна: $\hat{f}^*(\omega) = \hat{f}(-\omega)$, поскольку $a(\omega)$ — четная функция, $b(\omega)$ — нечетная.
2. Если $f(t)$ — четная функция, то $b(\omega) = 0$, $\hat{f}(\omega) = a(\omega)$, $f(\omega) = |\hat{f}(\omega)| = |a(\omega)|$, $|\hat{f}(\omega)|^2 = a^2(\omega)$, $\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, a(\omega) > 0 \\ \pi, a(\omega) < 0. \end{cases}$
3. Если $f(t)$ — нечетная функция, то $a(\omega) = 0$, $\hat{f}(\omega) = -ib(\omega)$, $f(\omega) = |\hat{f}(\omega)| = |b(\omega)|$, $|\hat{f}(\omega)|^2 = b^2(\omega)$, $\varphi(\omega) = \begin{cases} +\pi/2, b(\omega) > 0 \\ -\pi/2, b(\omega) < 0. \end{cases}$

Вопрос 7

Свойства преобразования Фурье: соотношение между длительностью импульса и шириной спектра, смещение спектра по частоте. Теорема Планшереля. Примеры преобразования Фурье.

Суперпозиция импульсов:

$$\text{Пусть } F(t) = \sum_j \alpha_j f_j(t) \text{ где } \alpha_j = \text{const}(t)$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_j \alpha_j f_j(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_j \alpha_j f_j(i\omega)$$

т.е. фурье-образ линейной комбинации функций равняется той же самой линейной комбинации фурье-образов этих функций.

Смещение импульса по времени:

$$\text{Пусть } F(t) = f(t \pm t_0)$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \pm t_0) e^{-i\omega t} dt = \left\{ \begin{array}{l} t \pm t_0 = \tau \\ dt = d\tau \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} e^{\pm i\omega t_0} d\tau = e^{\pm i\omega t_0} f(i\omega)$$

$$= F(i\omega) e^{-i\Phi(t)}$$

Получаем $F(\omega) = f(\omega)$ и $|F(i\omega)|^2 = |f(i\omega)|^2$

$$\Phi(t) = \varphi(t) \pm \omega t_0,$$

т.е. в случае сдвига по времени все спектральные характеристики остаются теми же самыми, за исключением фазы.

Изменение масштаба времени:

$$\text{Пусть } F(t) = f(\alpha t) \text{ где } \alpha = \text{const}(t)$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_j f(\alpha t) e^{-i\omega t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \alpha t = \tau \\ t = \frac{d\tau}{\alpha} \end{array} \right\} = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega \frac{\tau}{\alpha}} d\tau = \frac{1}{\alpha} f(i \frac{\omega}{\alpha})$$

где $F(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} f(\frac{\omega}{\alpha})$ -спектральная амплитуда

и $|F(\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2} |f(i \frac{\omega}{\alpha})|^2$ -спектральная плотность

$$\Phi(\omega) = \varphi\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) + \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ \pi, & \alpha < 0 \end{cases}$$

Вопрос 7

2

Соотношение между длительностью импульса и шириной спектра:

$$\Delta\omega = \frac{1}{\Delta t} - \text{ширина спектра}; \quad \Delta t = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt}{f(t=0)} - \text{определение длительности импульса};$$

$$\Delta\omega = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega)d\omega}{f(i\omega = 0)}$$

$$\Delta\omega\Delta t = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega)d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega)d\omega} = 2\pi \Rightarrow \Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

в случае конкретного определения длительности и ширины спектра

Смещение спектра по частоте:

$$F(t) = f(t)\cos(\omega_0 t), \quad \tau \gg T_0, \quad \Delta\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \Delta\omega \ll \omega_0$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} (f(i(\omega - \omega_0)) + f(i(\omega + \omega_0))) \\ \approx \frac{1}{2} f(i(\omega - \omega_0))$$

$$F(\omega) \approx \frac{1}{2} f(i(\omega - \omega_0))$$

$$|F(\omega)|^2 \approx \frac{1}{4} |f(i(\omega - \omega_0))|^2$$

Теорема Планшереля: Утверждает, что сумма (или интеграл) квадрата функции равна сумме (или интегралу) квадрата результата преобразования.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(i\omega)|^2 d\omega$$

$$\text{Доказательство: } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega)e^{-i\omega t} d\omega \right) dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f^*(i\omega)e^{-i\omega t} d\omega dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)F^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(i\omega)|^2 d\omega$$

Также можно сказать, что преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению изображений функций, составляющих свертку, и наоборот.

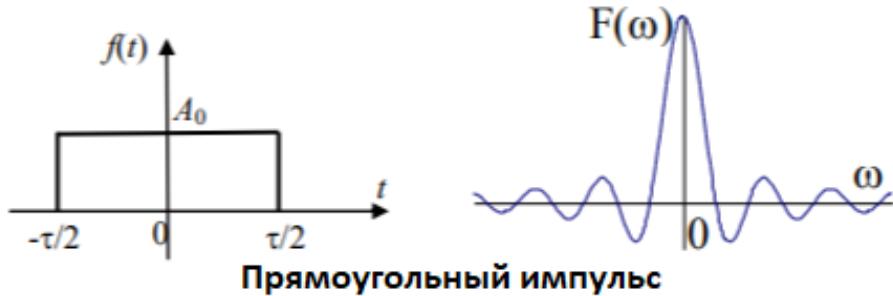
Примеры преобразования Фурье:

Прямоугольный импульс:

$$f(t) = \begin{cases} A_0, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

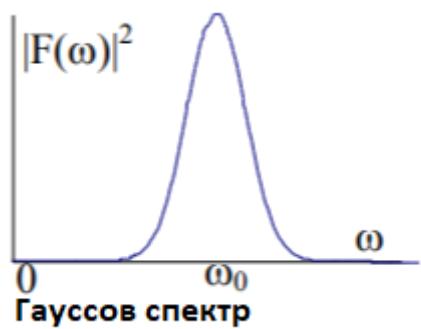
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A_0 \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{A_0 e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A_0 (e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2})}{-i\omega} =$$

$$= \frac{-A_0 2i \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{-i\omega} = A_0 \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



Гауссов спектр:

$$f(t) = A_0 e^{-t^2/\tau^2} \cos(\omega_0 t)$$



Вопрос 8

1

Спектральная плотность интенсивности: световой импульс, непрерывное стационарное излучение.

Спектральная плотность интенсивности - интенсивность, приходящуюся на единичный интервал частот.

Мы можем применить интеграл Фурье к описанию спектральных характеристик света:

Световой импульс $I = \langle S \rangle = \langle E^2(t) \rangle$:

Пусть τ - длительность светового импульса, тогда $I = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau E^2(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)|^2 dt$; воспользуемся теоремой Планшереля (7 вопрос) и получим

$$I = \frac{1}{\tau} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |E(i\omega)|^2 d\omega = \int_0^{+\infty} S(\omega) d\omega$$

Где $S(\omega) = \frac{|E(i\omega)|^2}{\pi\tau}$ – спектральная плотность интенсивности светового импульса.

$$dI = S(\omega) d\omega$$

Непрерывное стационарное излучение:

(Непрерывное – значит началось гораздо раньше, и закончилось гораздо позже времени наблюдения; Стационарное – время разрешения (τ_p) прибора много больше чем время модуляции сигнала(τ))

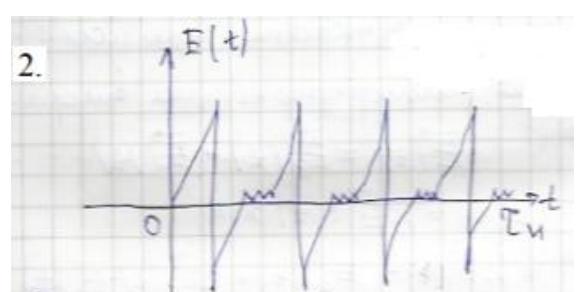
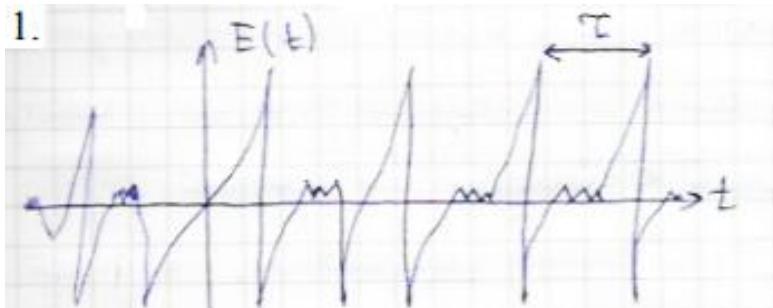
Возьмем время наблюдения $\tau_H > \tau_p$. Допустим у нас есть какое-либо непрерывное стационарное излучение(рис.1). Возьмем часть этого излучения от 0 до τ_H (Рис.2). Для такого участка

$$I = \lim_{\tau_H \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_H} \int_0^{\tau_H} E_H^2(t) dt$$

Если E_H вне интервала от 0 до τ_H тогда мы можем расширить пределы интегрирования; также применим теорему Планшереля:

$$I = \lim_{\tau_H \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_H \pi} \int_0^{+\infty} |E_H(i\omega)|^2 d\omega$$

Таким образом $I = S(\omega) d\omega$, где $S(\omega) = \lim_{\tau_H \rightarrow \infty} \frac{|E_H(i\omega)|^2}{\tau_H \pi}$



Вопрос 9

1

Интерференция света. Общая схема и уравнение двухволновой интерференции.
Интерференция монохроматических волн: уравнение интерференции, порядок интерференции, функция видности, линейная и угловая ширины интерференционных полос.

Интерференция – оптическое явление, в котором при наложении световых пучков интенсивность света на экране не равна сумме интенсивностей каждого из пучков света. При этом возникает система темных и светлых полос, называемая интерференционной картиной.

Пусть в некоторую точку приходят две гармонические волны, напряженности поля в которых изменяются по закону:

$$\bar{E}_1(t) = \bar{E}_{10}(t) \cos(\omega_1 t); \\ \bar{E}_2(t) = \bar{E}_{20}(t) \cos(\omega_2 t + \varphi);$$

В соответствии с принципом суперпозиции напряженность результирующей волны будет равна их сумме. Для интенсивности результирующей волны, пропорциональной усредненному по времени квадрату напряженности, имеем:

$$I \sim \langle (\bar{E}_1(t) + \bar{E}_2(t))^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2\langle \bar{E}_1(t)\bar{E}_2(t) \rangle \sim I_1 + I_2 + 2\langle \bar{E}_1(t)\bar{E}_2(t) \rangle$$

Слагаемое $2\langle \bar{E}_1(t)\bar{E}_2(t) \rangle$ называют **интерференционным членом**. Он обращается в нуль, если:

- 1) Плоскости поляризации обеих волн взаимно перпендикулярны;
- 2) Частоты колебаний ω_1 и ω_2 не равны друг другу. В этих случаях говорят, что волны не когерентны (не интерферируют) и интенсивность результирующей волны равна сумме интенсивностей падающих волн.

Пусть обе волны имеют одинаковые частоты и одинаково линейно поляризованы. В комплексной форме записи получим:

$$E_1(t) = A_1 * e^{i\omega t} + \text{к. с. и } E_2(t) = A_2 * e^{i(\omega t + \varphi)} + \text{к. с.} = A_2 e^{i\varphi} * e^{i\omega t} + \text{к. с.}$$

A_1 и $A_2 e^{i\varphi}$ – комплексные амплитуды волн, φ – разность фаз между волнами

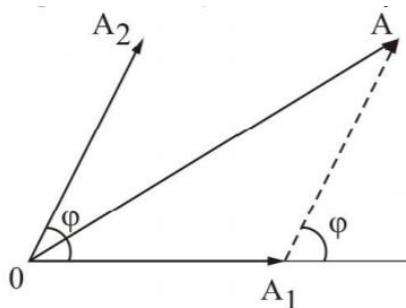
Найдем амплитуду результирующей волны с помощью векторной диаграммы (рис. 1). По теореме косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi - \underline{\text{уравнение интерференции}}$$

Вопрос 9

2



Если интенсивности обеих волн одинаковы, то $I = 2I_0(1 + \cos\varphi)$

Таким образом, интенсивность в точке наблюдения зависит исключительно от разности фаз между волнами.

Рис. 1. Сложение комплексных амплитуд двух гармонических волн

Интерференция монохроматического света. Схема Юнга.

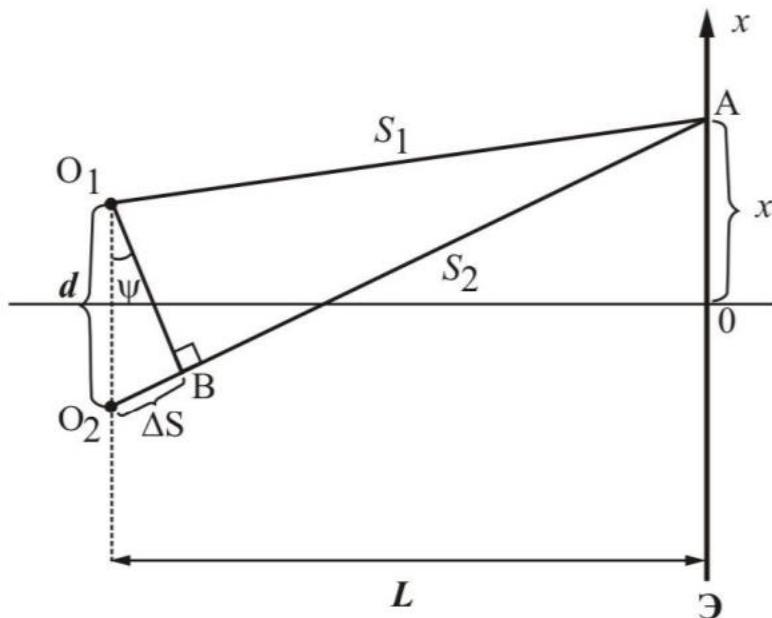


Рис. 2. Интерференционная схема Юнга

В классической схеме Юнга точечный монохроматический источник света находится перед непрозрачным препятствием с двумя точечными отверстиями, расположенными в точках O_1 и O_2 . Эти отверстия становятся точечными монохроматическими источниками (длина волны λ , интенсивность каждого I_0), расположенными на расстоянии d друг от друга. Экран для наблюдения удален от источников на расстояние $L \gg d$. Найдем разность хода $\Delta s = s_2 - s_1$ между лучами от источников в зависимости от координаты x на экране, используя теорему Пифагора.

$$s_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2$$

Аналогично для s_2

$$s_2^2 - s_1^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 = 2xd$$

С другой стороны,

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 - s_1)(s_2 + s_1) = 2L\Delta s$$

Вопрос 9

Разность хода $\Delta s = \frac{xd}{L}$, а разность фаз $\varphi = k\Delta s = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xd}{L}$

Таким образом, интенсивность на экране задается формулой $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{xd}{L})$

Если интенсивности обеих волн одинаковы, то $I = 2I_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{xd}{L}))$

Максимум интенсивности $I_{max} = 4I_0$ при разности фаз $\varphi = 2\pi n$, разности хода $\Delta s = \lambda n$

Минимум интенсивности $I_{min} = 0$ при разности фаз $\varphi = 2\pi(n + \frac{1}{2})$, разности хода $\Delta s = \lambda(n + \frac{1}{2})$

$n=0,1,2,\dots$ - **порядок интерференции**.

На экране наблюдаются интерференционные полосы, расстояние между которыми Δx можно найти из соотношения $\lambda = \frac{\Delta x d}{L}$, (изменение разности хода при переходе от любого максимума к соседнему равно λ): $\Delta x = \frac{\lambda L}{d}$ - **ширина интерференционной полосы**

$$\text{Угловая ширина} - \theta = \frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda}{d}$$

Для характеристики четкости интерференционной картины вводится понятие **видности**:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

откуда

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1} = 2 \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \ll 1$$

Это означает, что при интерференции двух волн с существенно различными интенсивностями видность картины значительно ухудшается даже в случае монохроматических источников.

Вопрос 10

Интерференция квазимохроматического света. Условие интерференции.

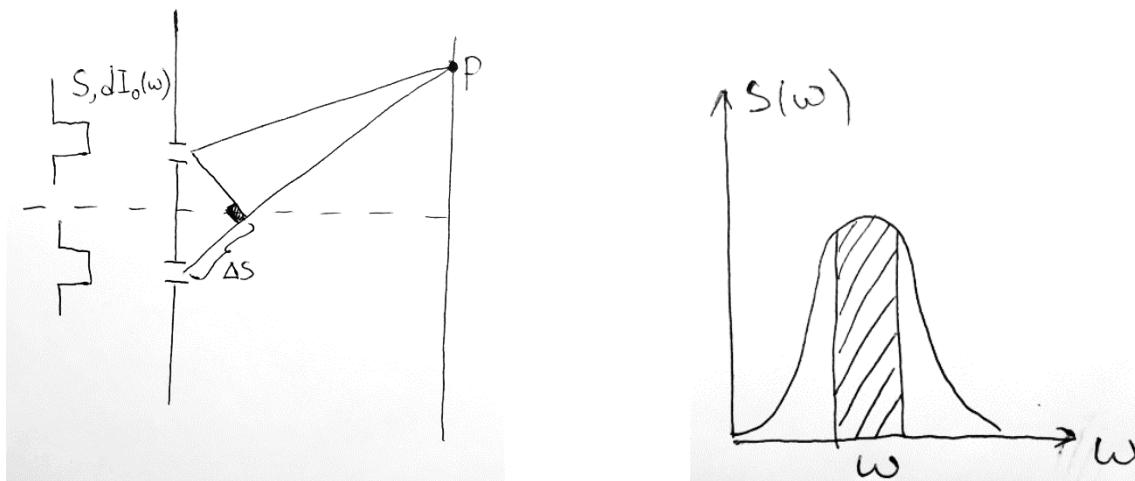
Спектральное описание, уравнение интерференции в частотном представлении.

Функция видности, время и длина когерентности, максимальный порядок интерференции.

Квазимохроматическим светом называется свет, у которого ширина спектра $\Delta\omega \ll \omega$, где ω - характерная частота волны (центр спектра). Интерферируют волны на одинаковых частотах, значит, интерференционная картина есть результат для волн одной частоты, а в случае квазимохроматического импульса в интерф. картине будут складываться интенсивности картин от разных частот.

Уравнение интерференции в частотном представлении

$dI_0(\lambda) = S(\omega)d\omega$ - интенсивность, пришедшая в точку Р от одной щели на частоте ω .



Интенсивность от 2-х щелей:

$$dI(\omega, \Delta s) = 2dI_0(\omega)(1 + \cos(k\Delta s)) = \left[k = \frac{\omega}{c} \right] = 2S(\omega)d\omega(1 + \cos\left(\frac{\omega}{c}\Delta s\right))$$

Полная интенсивность в точке Р от волн на всех частотах

$$I(\Delta s) = 2I_0 + 2 \int_0^{\infty} S(\omega)\left(1 + \cos\left(\frac{\omega}{c}\Delta s\right)\right)d\omega - \text{уравнение интерференции}$$

для квазимохроматического источника со спектральной плотностью $S(\omega)$

Получим интерференционное слагаемое в случае излучения с прямоугольным спектром.

Вопрос 10

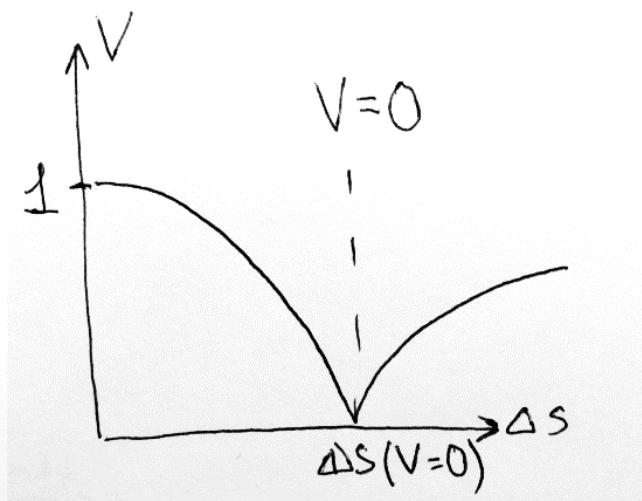
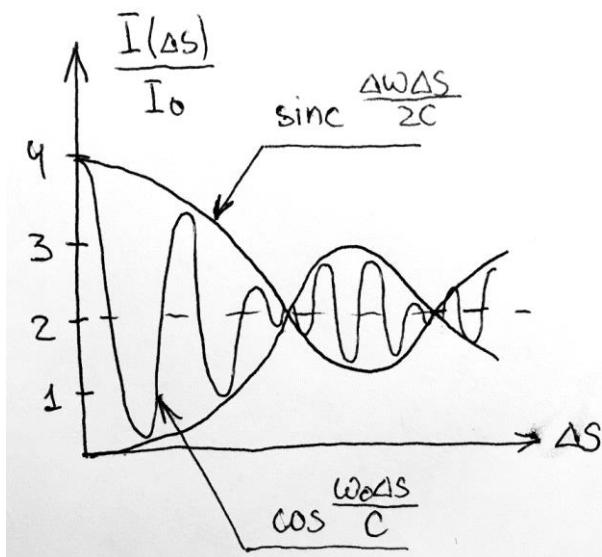
$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 \cos\left(\frac{\omega \Delta s}{c}\right) d\omega = \frac{S_0}{c} \sin\left(\frac{\omega \Delta s}{c}\right) \Big|_{\omega_1}^{\omega_2} = \frac{2S_0}{c} \sin\left(\frac{\omega \Delta s}{2c}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 \Delta s}{c}\right)$$

$$= S_0 \Delta \omega * \frac{\sin\left(\frac{\Delta \omega \Delta s}{2c}\right)}{\left(\frac{\Delta \omega \Delta s}{2c}\right)} \cos\left(\frac{\omega_0 \Delta s}{c}\right)$$

$$I(\Delta s) = 2I_0 \left(1 + \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta \omega \Delta s}{2c}\right]\right) \cos\left(\frac{\omega_0 \Delta s}{c}\right)$$

Функция видности в этом случае: $V = \left|\operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta \omega \Delta s}{2c}\right]\right|$

$\operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta \omega \Delta s}{2c}\right]$ – медленно меняющаяся функция (огибающая)



Разность хода, при которой видность обращается в ноль первый раз, называется **длиной когерентности** излучения

$$\Delta s(V=0) = l_{\text{kog}}$$

$$V = 0 \rightarrow \frac{\Delta \omega \Delta s}{2c} = \pi \rightarrow l_{\text{kog}} = \frac{2\pi c}{\Delta \omega} = \frac{c}{\Delta \vartheta} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$$

$$l_{\text{kog}} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$$

Время когерентности, соответственно – $t_{\text{kog}} = \frac{l_{\text{kog}}}{c}$

Вопрос 10

3

Максимальный порядок интерференции

Полное размывание картины произойдет, когда расстояние между максимумами m -го порядка для крайних длин волн диапазона станет равным ширине интерференционной полосы Δx (ширину Δx можно считать одинаковой для всего диапазона $\Delta\lambda$). В этом случае максимум m -го порядка для длины волны λ_2 – совпадет с максимумом $(m+1)$ -го порядка для длины волны λ_1

$$(m + 1)\lambda_1 = m\lambda_2$$

$$m(\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda_1$$

$$m = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda}$$

Вопрос 11

Интерференция квазимохроматического света. Условие интерференции.

Временное описание. Функция корреляции и ее свойства. Теорема Винера-Хинчина.

Понятие о фурье-спектроскопии. Разрешающая способность фурье-спектрометра.

Интерференция света – широкий круг явлений, в которых при наложении световых пучков происходит пространственное перераспределение энергии излучения, вследствие чего результирующая $I \neq \sum$ интенсивностей отдельных пучков, при этом в разных точках пространства возникают устойчивое во времени чередующиеся усиление и ослабление амплитуды колебаний результирующей волны (интерференционные полосы).

Интерференция квазимохроматического света. Условие интерференции:

КМХ излучение – излучение, удовлетворяющее условию: $\frac{\langle \lambda \rangle}{\delta \lambda} \gg 1$

КМХ свет можно представить как суперпозицию МХ волн, частоты которых расположены в узком диапазоне.

Волны с различными частотами не интерферируют, поэтому для нахождения ИК (инт картины) необходимо записать распределение интенсивности для каждой частоты и просуммировать (проинтегрировать) по всем частотам.

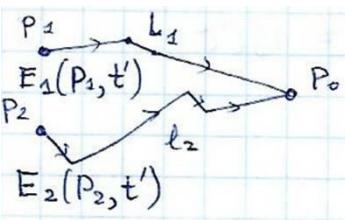
Рассмотрим схему Юнга с источниками, излучающими в узком спектральном

$$\text{диапазоне } \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \leq \lambda \leq \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$$

По мере удаления от центра для тах различных длин волн расходятся. Полное размытие картины произойдет, когда расстояние между тах крайних длин волн диапазона = ширине интерференционной полосы Δx (одинаковой для всех $\Delta\lambda$).

$$\Delta s = \left(\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \right) m = \left(\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \right) (m - 1) \Rightarrow m_{max} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$$

Временное описание:



Если напряженность поля источника во времени меняется по закону $E(t)$ так, что

$$E_1(t) = E(t - \Delta t) \quad t_i = L_i/c \\ E_2(t) = E(t - \Delta t + \tau)$$

Δt – время прохождения волны от S через S1 к т. Р

$$\tau = \frac{r_1 - r_2}{c} \text{ время задержки}$$

в P_0 существует интерференция лучей. полная напряженность в т. P_0 :

$$E(P_0, t) = \alpha_1 E_1 \left(P_1, t - \frac{L_1}{c} \right) + \alpha_2 E_2 \left(P_2, t - \frac{L_2}{c} \right)$$

α_i

– постоянные, определяющие изменения характеристик волн при переходе от $P1, P2$ к

Тогда

$$I(P_0) = \langle Re \vec{E} \cdot Re \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} |\alpha_1|^2 \cdot Re \langle |\vec{E}_1|^2 \rangle + \frac{1}{2} |\alpha_2|^2 \cdot Re \langle |\vec{E}_2|^2 \rangle + |\alpha_1 \alpha_2| \cdot Re \langle E E^* \rangle$$

Вопрос 11

Мы рассматриваем стационарные процессы => среднее значение не зависит от t :

$$\frac{1}{2} \langle E_1 \left(P_1, t - \frac{L_1}{c} \right) \cdot E_1^* \left(P_1, t - \frac{L_1}{c} \right) \rangle = \frac{1}{2} \langle E_1(P_1, t) \cdot E_1^*(P_1, t) \rangle = I_1(P_1);$$

$$\frac{1}{2} \langle E_2 \left(P_2, t - \frac{L_2}{c} \right) \cdot E_2^* \left(P_2, t - \frac{L_2}{c} \right) \rangle = I_2(P_2);$$

$$\langle E_1 \left(P_1, t - \frac{L_1}{c} \right) \cdot E_2^* \left(P_2, t - \frac{L_2}{c} \right) \rangle = \boxed{\langle E_1(P_1, t) \cdot E_2^*(P_2, t + \tau) \rangle} = B_{12}(\tau)$$

— основная величина, характеризующая частичную когерентность. Описывает взаимную когерентность световых колебаний в точках P_1, P_2 в моменты времени, разделенные промежутком τ .

Если $P_1=P_2$, то $B_{11}(\tau) = \langle E_1(P_1, t) \cdot E_1^*(P_1, t + \tau) \rangle$

$$\boxed{I(P_0) = |\alpha_1|^2 \cdot I_1(P_0) + |\alpha_2|^2 \cdot I_2(P_0) + |\alpha_1 \alpha_2| \cdot \operatorname{Re}(B_{11}(\tau))}$$

Функция корреляции:

Взаимосвязь между значениями функции в 1ой точке в различные моменты времени описывается автокорреляционной функцией.

Для стационарной случайной величины: $f_1 = f(t); f_2 = f(t + \tau)$; τ — фиксированная величина

Простейшей статистической характеристикой случайной величины является ее среднее значение:

$$\langle f(t) \rangle_a = \langle f_1 \rangle; \quad \langle f(t + \tau) \rangle_a = \langle f_2 \rangle$$

a — среднее по ансамблю = мат.ожиданию по множеству реализаций от $f(t)$ и $f(t + \tau)$

Для стационарного процесса: $\langle f_1 \rangle = \langle f_2 \rangle = \langle f \rangle$

Взаимосвязь значений f в моменты времени, разделенные интервалом τ , описывается автокорреляционной функцией:

$$B_{11}(\tau) = \langle [f(t) - \langle f \rangle] \cdot [f(t + \tau) - \langle f \rangle] \rangle_a$$

$$B_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 - \langle f \rangle)(f_2 - \langle f \rangle) \cdot p(f_1 f_2) \cdot df_1 df_2;$$

p — плотность вероятности того, что $f(t) = f_1; f(t + \tau) = f_2$

ее свойства:

1. $B(\tau = 0) = I_0$ (среднему значению квадрата $f(t)$)

2. симметрична относительно 0:

$$B(-\tau) = \langle E(t)E(t - \tau) \rangle = \{ \text{переобозначаем } t = t_1; (t - \tau) = t_2 \}$$

$$= \langle E_0(t + \tau) \cdot E_0(t) \rangle = B(\tau)$$

3. $B(\tau > \tau_k) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$

Вопрос 11

Теорема Винера-Хинчина:

Важное значение автокорреляционной функции обуславливается, в частности, ее связью со спектром мощности, которая устанавливается т.В-Х:

Спектр мощности является образом фурье автокорреляционной функции,
А автокорреляционная функция является образом спектра мощности.

Т. В-Х позволяет находить спектр мощности, если известна автокорреляционная функция, которая может быть измерена экспериментально.

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{B(\tau)}{I_0}$$

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\tau) \cdot d\omega \quad (1)$$

Понятие о фурье-спектроскопии:

Интеграл (1) может быть растолкован как разложение четной функции $B(\tau)$ по частотам, в котором фурье-амплитудой является $S(\omega)$. следовательно

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos(\omega\tau) \cdot d\tau$$

На этом преобразовании основана фурье-спектроскопия. Для экспериментального определения спектральной плотности интенсивности $S(\omega)$ используют интерференционную схему. Измеряют интерферограмму $I(\tau)$, определяют функцию автокорреляции по формуле

$$I(\tau) = \overline{E_{1+2}^2} = I_0 + I_0 + 2\overline{E(t)E(t+\tau)}, \quad B(\tau) = \overline{E(t)E(t+\tau)}$$

Тогда

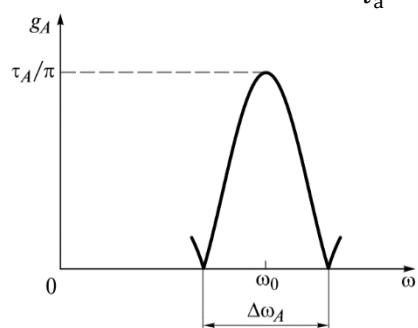
$$B(\tau) = \frac{I(\tau)}{2} - I(0)$$

Разрешающая способность фурье-спектрометра:

Спектрометр вносит аппаратные искажения. Главное из них связано с ограниченностью перемещения подвижного зеркала.

Аппаратная функция g_A -отклик прибора на одной частоте ω_0

Ширина аппаратной функции $\Delta\omega_a$ – определяет разрешающую способность фурье-спектрометра. $\Delta\omega_a = \frac{2\pi}{\tau_a}$



В спектроскопии разрешающая способность определяется как отношение частоты ω_0 к минимальной разности частот $\Delta\omega_{min}$:

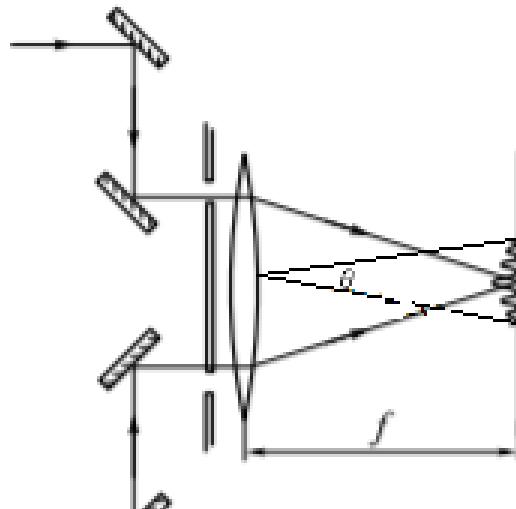
$$R = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{min}} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_{min}}$$

Билет №12

Рассматриваем когерентность поля в разных точках пространства. Простран-



a)



б)

Рис. 1. а) схема Юнга для протяженного источника, б) Звездный интерферометр Майкельсона.

ственная когерентность связана с положением в пространстве. Протяженный источник D - суперпозиция некогерентных независимых между собой точечных источников на частоте $\Delta = \Delta_\xi + \Delta_x = \frac{\xi d}{L} + \frac{xd}{l}$ интенсивность от элемента dy в точке ξ :

1) через одну щель:

$$dI_0 = \frac{I_0}{D} dy, \text{ тогда } dI(\xi, y) = 2dI_0(1 + \cos(k\Delta))$$

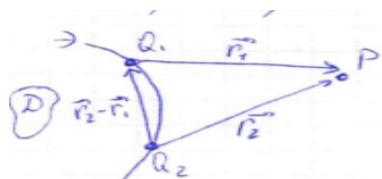
2) Интенсивность от источника D в точке ξ :

$$I(\xi) = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{2I_0}{D} \left(\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} dy + \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \cos(k(\Delta\xi + \Delta y)) dy \right) = 2I_0 \left(1 + \frac{\cos k\Delta\xi}{\frac{kDd}{L}} 2 \sin \frac{kDd}{2L} \right)$$

$$\text{Значит, } I(\xi) = 2I_0 \left(1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{kDd}{2L} \right) \cos \frac{k\xi d}{L} \right)$$

Радиус когерентности $r_{\text{ког}}$ - расстояние между щелями d , при котором первый раз видность обращается в ноль, $r_{\text{ког}} = \frac{\lambda L}{D}$

Угол когерентности- угловой размер источника, если $d = r_{\text{ког}}$, $\theta_{\text{ког}} = \frac{D}{L} = \frac{\lambda}{r_{\text{ког}}}$ С помощью интерферометра майкельсона можно измерять размеры двойных звезд. $\Delta x = \frac{\lambda f}{l} \theta = \frac{\Delta x}{f} = \frac{\lambda}{l}$ При увеличении угла картина сместится когда две интерферограммы наложатся друг на друга. $\theta_{\text{ког}} = \frac{\theta}{2}$ Пространственная когерентность.
Пусть Q_1, Q_2 - точки волнового поля, $B_{12}(\tau) = \langle E_1(Q_1, t + \tau) E_2(Q_2, t) \rangle$ - корреляционная функция, тогда если корреляция полей E_1, E_2 в точках Q_1, Q_2 зависит от взаимного расположения Q_1, Q_2 , то когерентность пространственная. Расстояние, на котором пропадает корреляция- радиус когерентности ебат. Если функция корреляции зависит лишь от времени, то когерентность временная 1)если только пространственная когерентность, то источник монохром., протяж. 2) если только времененная, то точечный, немонохроматичный, 3) если функция корреляции не зависит от времени и то приращений радиус-векторов, то точечный монохроматический



Вопрос 13

1

Основные схемы двухволной интерференции. Метод деления волнового фронта и метод деления амплитуды. Характерные особенности методов. Примеры реализации методов. Интерференция при естественных условиях в тонких пленках.

Схемы двухволной интерференции.

Чтобы осуществить двухлучевую интерференцию, необходимо иметь две монохроматические (или квазимонохроматические) волны одинаковой частоты. Так как изготовить два различных источника когерентных волн невозможно, то приходится разделять фронт или амплитуду одного, получая тем самым когерентные волны.

Схемы двухволной интерференции

Деление волнового фронта

Деление амплитуды

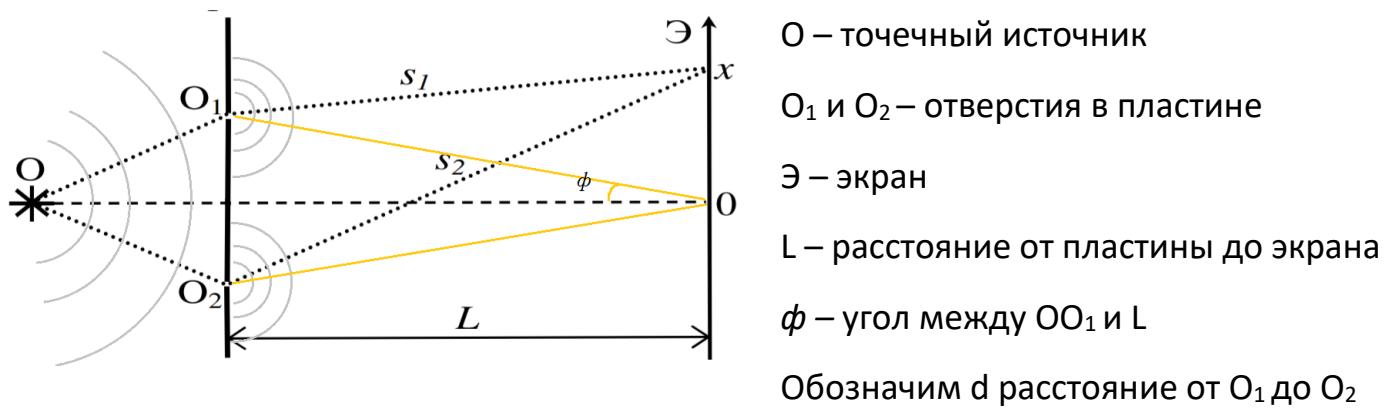
Метод деления волнового фронта

В данных схемах выделяются фрагменты волнового фронта. Далее эти фрагменты рассматриваются, как вторичные источники когерентных волн, в результате чего наблюдается интерференция.

Примеры:

Схема Юнга:

Точечный источник, перед которым находится пластина с двумя отверстиями. За пластиной расположен экран на расстоянии много большем, чем расстояние между отверстиями.



Найдем разность хода волн от вторичных источников, т.е. $|S_1 - S_2|$.

По теореме Пифагора:

$$S_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2; \quad S_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2;$$

Вопрос 13

2

$$S_2^2 - S_1^2 = 2dx = (S_2 - S_1)(S_2 + S_1);$$

Учтем, что $L \gg d$, поэтому $S_2 + S_1 \approx 2L$. В итоге получаем:

$$S_2 - S_1 = \Delta S = \frac{S_2^2 - S_1^2}{S_2 + S_1} = \frac{2dx}{2L} = x \frac{d}{L}; \quad \operatorname{tg}\phi = \frac{d/2}{L} \approx \phi, \text{ тк угол очень мал};$$

Введем угол α (угол между «желтыми прямыми») – угол сходимости лучей. Важно отметить, что при $x = 0$, $\Delta S = 0$. В данном случае $\alpha = 2\phi = 2 \frac{d}{2L} = \frac{d}{L}$;

Разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k(S_2 - S_1) = k\Delta S$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

В итоге получаем:

$$\boxed{\Delta S = x \frac{d}{L} = x\alpha} \quad \boxed{\Delta\varphi = kx \frac{d}{L} = kx\alpha}$$

Найдем расположения максимумов и минимумов, а также ширину интерференционной полосы (расстояние между двумя ближайшими максимумами/минимумами)

Условие максимума: $\Delta S_{max} = m\lambda$, где $m = 0, 1, 2, 3 \dots$ (четное число полудлин волн)

Минимума: $\Delta S_{min} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$, где $m = 0, 1, 2, 3 \dots$ (нечетное число полудлин волн)

Следовательно, координата максимума x_{max} и ширина полосы Λ :

$$\boxed{x_{max} = \frac{\Delta S_{max}}{\alpha} = \frac{m\lambda}{\alpha}; \quad \Lambda = x_{max_{m+1}} - x_{max_m} = \frac{(m+1)\lambda}{\alpha} - \frac{m\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{\alpha}}$$

Аналогично можно получить выражение для x_{min}

Бипризма Френеля

Бипризма – двойная призма, формирующая две волны, исходящие из мнимых изображений S_1 и S_2 источника S .

Для бипризмы выполняется: $\boxed{\frac{\vartheta}{2} = \alpha(n - 1)}$

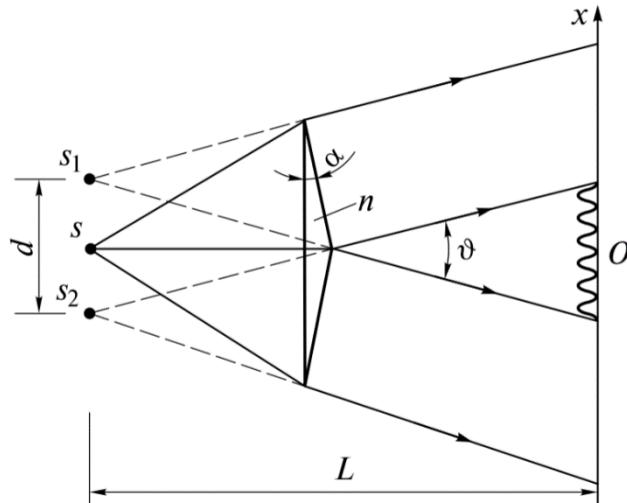
где α – преломляющий угол бипризмы (очень мал, порядка одной минуты)

$\frac{\vartheta}{2}$ – угол отклонения лучей относительно главной оси

n – показатель преломления материала призмы

Вопрос 13

3



Как и в схеме Юнга основные величины определяются расстоянием между источниками (в данном случае мнимыми), расстоянием от источников до экрана или углом сходимости лучей.

В данном случае угол сходимости лучей равен $2\frac{\vartheta}{2} = \vartheta$

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{d/2}{L}; \rightarrow \vartheta = 2\alpha(n - 1) \approx \frac{d}{L};$$

Аналогично схеме Юнга получаем

$$x_{max} = \frac{m\lambda}{\vartheta}; \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\vartheta}$$

$$\Delta S = x\vartheta$$

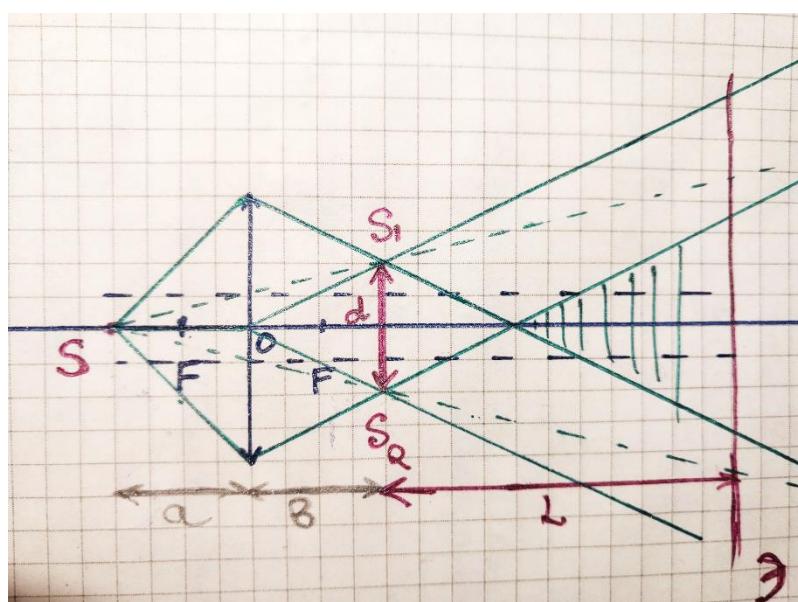
$$\Delta\varphi = x\vartheta$$

Билинза Бийе:

Билинза – плоская собирающая линза, из которой вырезали диаметральный слой и сдвинули две половинки линзы до соприкосновения.

Ее особенность заключается в том, что фокус для каждой из половинок сместится вниз или вверх на величину равной половине толщины вырезанного слоя. Далее изображение точечного источника строится отдельно для каждой половины по правилам геометрической оптики. В результате получатся два изображения, которые и будут являться вторичными источниками когерентных волн.

Действуем аналогично схеме Юнга.



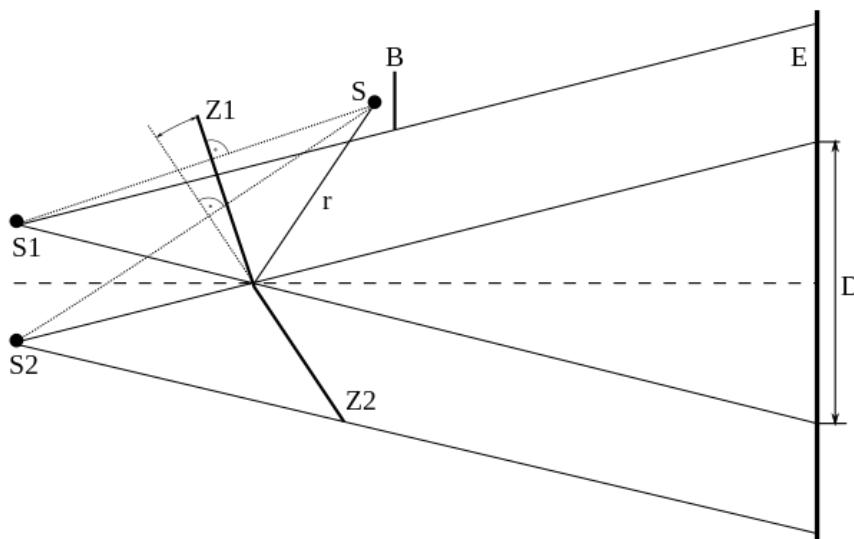
S_1 и S_2 – изображения источника S

F – фокус линзы

L – расстояние от линзы до экрана

d - расстояние между S_1 и S_2

Бизеркала



Все аналогично схеме Юнга, но нужно учесть несколько фактов.

S_1, S_2, S – лежат на одной окружности с центром в точке пересечения зеркал (имеется в виду точке пересечения линии, по которой пересекаются зеркала и плоскостью наблюдения) и радиусом r (рисунок)

Угол ϕ между зеркалами мал

Из геометрических соображений получаем

$d = 2\varphi r; \quad L = r + l$, где l – расстояние от точки пересечения зеркал до экрана;

$$x_{max} = m\lambda \frac{d}{L} = m\lambda \frac{2\varphi r}{r+l}; \quad \Lambda = \lambda \frac{2\varphi r}{r+l}$$

$$\Delta S = x \frac{2\varphi r}{r+l}$$

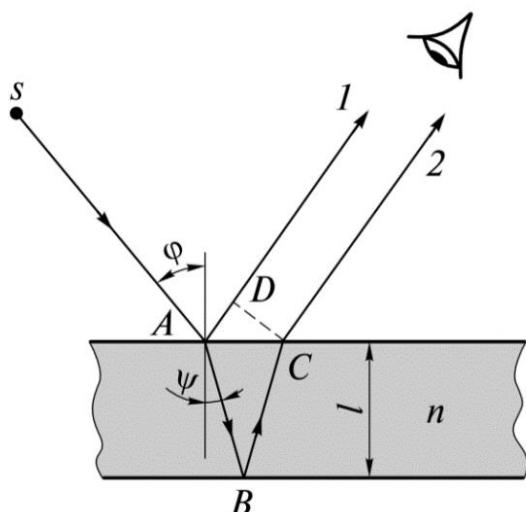
$$\Delta\varphi = x \frac{2\varphi r}{r+l}$$

Метод деления амплитуды

В данных схемах две интерферирующие волны создаются при отражении падающей волны от двух поверхностей, в результате чего происходит деление амплитуды и амплитуда каждой из интерферирующих волн меньше амплитуды исходной волны.

Примеры:

Тонкие пленки - Полосы равного наклона



Поскольку разность хода интерферирующих волн порядка толщины пластиинки l , то длина когерентности l_k должна быть больше этой толщины.

Оптическая разность хода между волнами 1 и 2

$$\Delta = (AB + BC)n - AD \pm \frac{\lambda_0}{2}$$

Вопрос 13

где n – показатель преломления материала пластики, слагаемое $\pm \frac{\lambda_0}{2}$ учитывает набег фазы $\pm\pi$ при отражении (волна меняет направление на «противоположное»)

Если толщина пластиинки в месте падения равна l , а угол падения φ

$$\Delta = \frac{2l}{\cos\psi} n - 2l \tan\psi \sin\varphi \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2l \cos\psi n \pm \frac{\lambda_0}{2}$$

Здесь учтен закон преломления: $\sin\varphi = n \sin\psi$

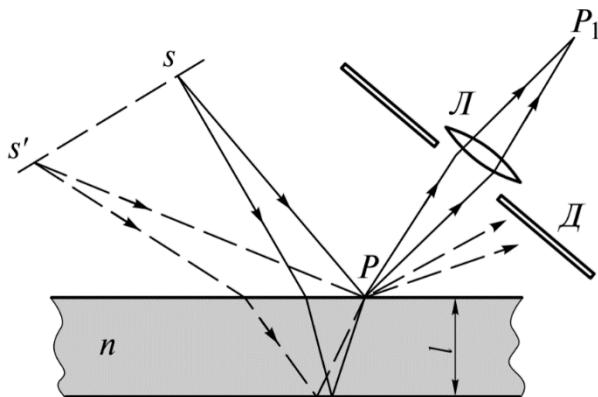
Из условия максимума

$$\Delta = \frac{2l}{\cos\psi} n - 2l \tan\psi \sin\varphi \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2l \cos\psi n \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0$$

В данном случае $l = const$, а угол ψ может изменяться, поэтому на экране будет интерференционная картина, представляющая собой семейство линий, для которых $\cos\psi = const$ и удовлетворяет условию максимума. Поэтому эти линии называют полосами равного наклона. Для их наблюдения экран отодвигают на как можно дальше от пластиинки. Поэтому говорят, что линии равного наклона локализованы на бесконечности.

Отметим, что поперечные размеры источника практически не влияют на качество интерференционной картины, поскольку экран находится далеко от пластиинки.

Полосы равной толщины



Если точка Р находится вблизи поверхности пластиинки, то интерференционная картина будет состоять из линий равной толщины.

Условие максимума интенсивности

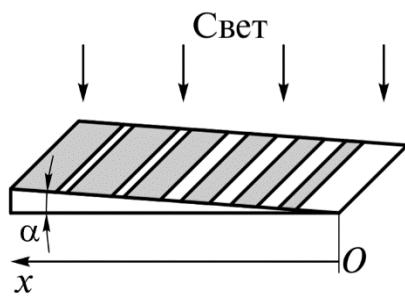
$$\Delta = 2l \cos\psi n \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0$$

В данном случае $\psi = const$, а толщина l может изменяться, поэтому максимумы будут иметь

вид линий, проходящих через те участки поверхности, где толщина пластиинки одинакова и удовлетворяет условию максимума. Поэтому эти линии называют полосами равной толщины, и они локализованы на поверхности пластиинки

Вопрос 13

Эти полосы можно наблюдать на поверхности стеклянного клина при нормальном падении света. Преломляющий угол α этого клина мал. Толщина клина $l = \alpha x$, где x – координата отсчитываемая от вершины клина



При нормальном падении $\psi = 0$

Поэтому положение максимумов определяется из условия

$$2\alpha x_{max}n - \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0, \text{ где } m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

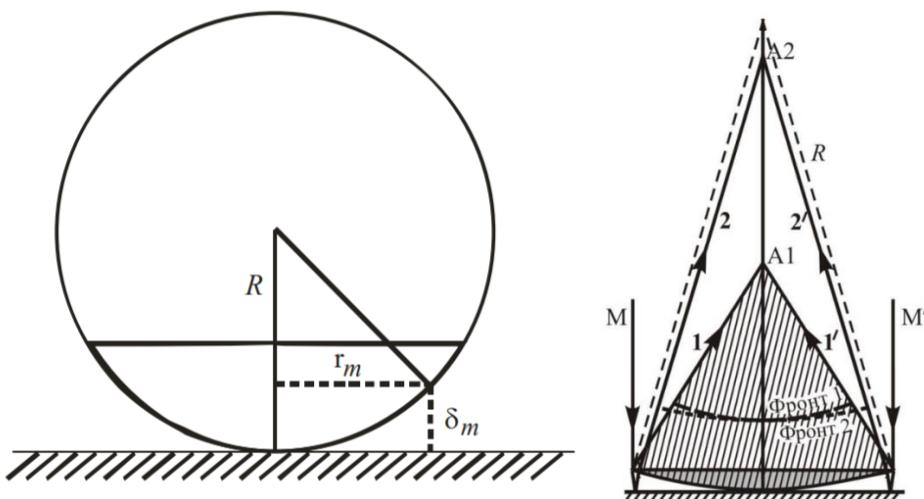
При освещении клина квазимонохроматическим светом с увеличением порядка m полосы расширяются и при $m_{max} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$ перекрываются. В этом месте толщина клина $l = \alpha x_{max} \approx \frac{l_k}{2n}$

Кольца Ньютона

Кольца Ньютона – это кольцевые полосы (полосы равной толщины), образующиеся при отражении света от двух поверхностей воздушной прослойки, расположенной между плоской поверхностью стеклянной пластины и соприкасающейся с ней выпуклой линзой малой кривизны. Толщина воздушной прослойки постепенно увеличивается от центра к краям.

Волна ММ' нормально падает на плоскую поверхность плосковыпуклой линзы и частично отражается от нее (на рисунке не показано). На сферической поверхности линзы волна испытывает как отражение, так и преломление.

Отраженная волна 1-1' после прохождения плоской поверхности линзы сфокусируется в точке А1. Преломленная волна, пройдя воздушный промежуток, сначала отразится от плоской стеклянной пластины, а затем, вновь преломившись на сферической поверхности линзы, сформирует вторую отраженную волну 2-2', которая сфокусируется в точке А2. Интерференционная картина наблюдается в области наложения обеих отраженных волн 1-1' и 2-2' (область интерференции).



Вопрос 13

7

разность хода Δ между волнами на поверхности линзы будет примерно равна удвоенной толщине δ воздушной прослойки: $\Delta = 2\delta$

Произведем расчет радиуса r_m m -го кольца Ньютона в отраженном свете.

$$R^2 - (R - \delta_m)^2 = r_m^2; \quad 2R\delta_m - \delta_m^2 = r_m^2; \quad \delta_m^2 \rightarrow 0 \quad 2R\delta_m = r_m^2;$$

В итоге получаем

$$\delta_m = \frac{r_m^2}{2R}$$

Для нахождения оптической разности хода необходимо учесть изменение фазы второй волны на π при отражении от оптически более плотной среды, что соответствует дополнительной разности хода $\frac{\lambda}{2}$

$$\boxed{\Delta_{\text{опт}} = 2\delta n + \frac{\lambda}{2}}$$

Далее применяем описанные ранее условия минимума и максимума для разности хода.

Для темных полос

$$\Delta_{\text{опт}} = 2\delta_m + \frac{\lambda}{2} = (2m + 1)\frac{\lambda}{2} = 2\frac{r_m^2}{2R} + \frac{\lambda}{2}; \Rightarrow \frac{r_m^2}{R} = m\lambda;$$

Окончательно получаем

$$\boxed{r_m^{\text{темн}} = \sqrt{m\lambda R}}$$

Обратим внимание, что в центре интерференционной картины (в отраженном свете) наблюдается темное пятно, т.к. хотя толщина воздушного промежутка и равна нулю, но оптическая разность хода равна $\frac{\lambda}{2}$

Аналогично можно получить радиусы светлых колец $\boxed{r_m^{\text{свет}} = \sqrt{(2m + 1)R \frac{\lambda}{2}}}$

Вопрос 14

1

Многоволновая интерференция. Уравнения многоволновой интерференции – формулы Эйри. Функция видности, ширина и резкость интерференционных полос. Интерференционный фильтр. Интерферометр Фабри-Перо. Пластиинка Люммера-Герке.

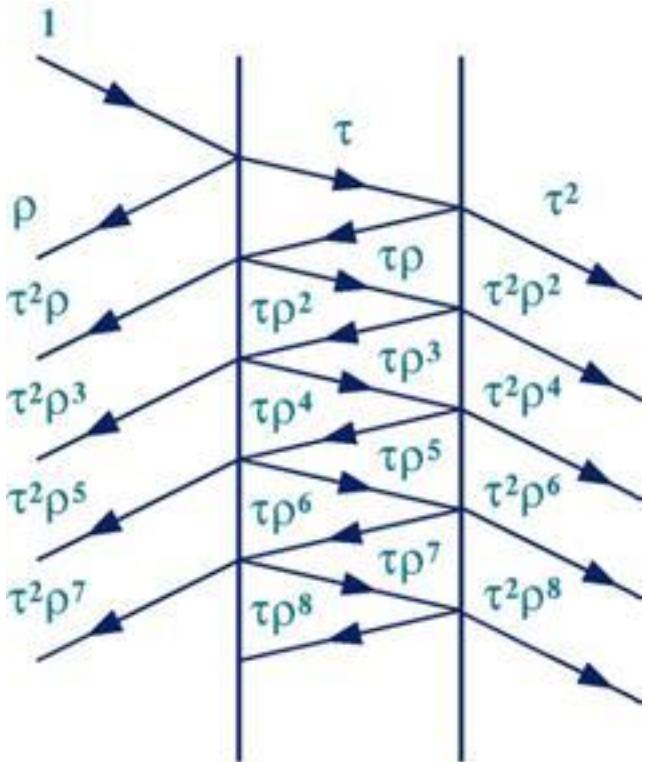
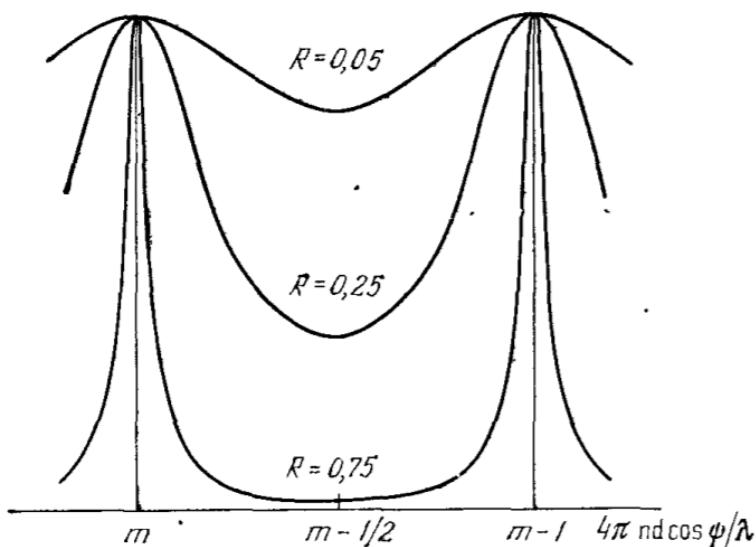


Рис.2.8



Пусть на плоскопараллельную пластинку падает луч света (1). Когда коэффициент отражения от границы сред близок к единице, мы можем рассматривать многоволновую интерференцию. τ и ρ – коэффициенты пропускания и отражения по амплитуде. T и R – коэффициенты пропускания и отражения по интенсивности. $T = \tau^2$, $R = \rho^2$, $T + R = 1$. Формулы Эйри выражают зависимости интенсивностей прошедшей $I_{\text{пр}}$ и отраженной $I_{\text{отр}}$ волн от разности фаз Φ между двумя соседними вышедшими лучами:

$$I_{\text{пр}} = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(\frac{\Phi}{2})},$$

$$I_{\text{отр}} = I_0 \frac{4R\sin^2(\Phi/2)}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(\frac{\Phi}{2})}$$

Распределение интенсивности существенно изменяется при увеличении коэффициента отражения R , в особенности когда этот коэффициент приближается к единице.

Резкость интерференционных полос характеризуется их полушириной. Для полос в проходящем свете полушириной называется расстояние между точками, лежащими по обе стороны максимума, в которых интенсивность составляет половину максимальной величины I_B .

В окрестности максимума m -го порядка Φ представимо в виде $\Phi = m\pi + \varphi$. Тогда в формуле для интенсивности прошедшей волны Φ можно заменить на φ . Ввиду малости φ ту же формулу можно переписать так: $I_{\text{пр}} = \frac{I_B}{1+R\varphi^2/(1-R)^2}$.

Вопрос 14

2

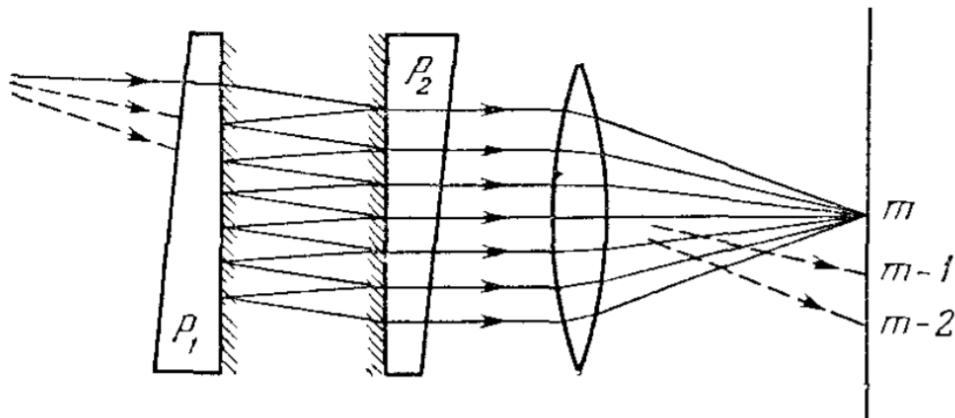
Если $R\varphi^2/(1-R)^2 = 1$, то $I_B = \frac{1}{2}I_{B_0}$. Следовательно, полуширина определяется выражением $\delta\Phi_{\text{пр}} = 2\varphi = 2\frac{1-R}{\sqrt{R}}$, $\delta\Phi_{\text{отр}} = 2\pi - \delta\Phi_{\text{пр}}$

Резкость интерференционных полос: $F_{\text{пр}} = \frac{2\pi}{\delta\Phi_{\text{пр}}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$, $F_{\text{пр}} = \frac{2\pi}{\delta\Phi_{\text{отр}}} \approx 1$

Функция видности: $V_{\text{пр}} = \frac{2R}{1+R^2}$, $V_{\text{отр}} = 1$

Интерференционный фильтр отражает одну и пропускает другую часть спектра падающего излучения благодаря явлению многолучевой интерференции в тонких диэлектрических пленках.

Интерферометр Фабри-Перо состоит из стеклянных или кварцевых пластинок P_1 и P_2 , между которыми обычно находится воздух. Плоские поверхности пластинок покрыты высокоотражающими слоями. Расстояние между зеркалами h обычно составляет 1–100 мм, а в специальных эталонах доходит до 1 м. Поэтому порядки интерференции $m \approx 2h/\lambda$ очень высоки. Ввиду малости угла ψ условие главного интерференционного максимума $2h\cos\psi = m\lambda$ можно записать в виде $h(2 - \psi^2) = m\lambda$. Отсюда находим угловую дисперсию: $D_\psi = \frac{d\psi}{d\lambda} = -\frac{m}{2h\psi} = -\frac{1}{\lambda\psi}$

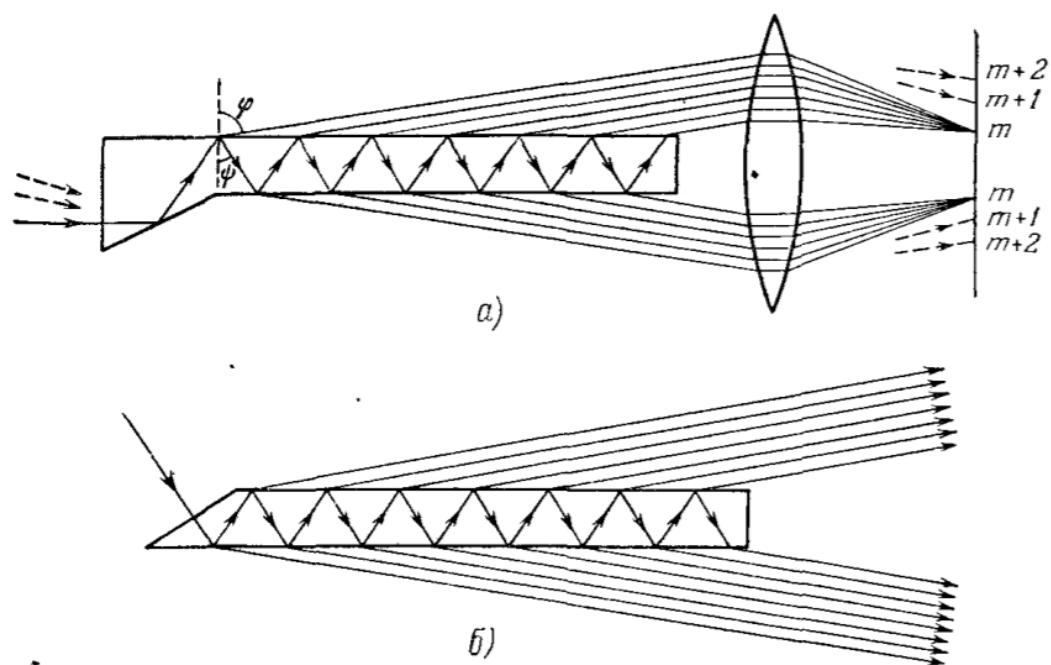


Преимущества: высокая угловая дисперсия и большая светосила.

Интерференционная картина — кольца.

Пластинка Люммера-Герке представляет собой плоскопараллельную пластинку из очень однородного стекла или плавленного кварца толщиной от 3 до 10 мм и длиной до 30 см. Направление падающих лучей подбирается таким, чтобы угол падения на границе стекло-воздух был близок к предельному углу полного внутреннего отражения. Тогда коэффициент отражения мало отличается от единицы. В пластинке Люммера-Герке наблюдаются интерференционные полосы равного наклона. Условие интерференционного максимума m -го порядка: $2h\cos\psi = m\lambda$, где ψ — угол преломления, h — толщина пластинки. Число интерферирующих пучков по одну сторону пластинки: $N = L/(2htan\psi)$, L — длина пластинки. А т.к. свет падает под почти предельным углом, то $N = \frac{L}{2h}\sqrt{n^2 - 1}$. Р.С. Угол полного внутреннего отражения

$$\psi_{\text{пво}} = \arcsin(n)$$



Вопрос 15

Дифракция света. Принцип Гюйгенса-Френеля и дифракционный интеграл Френеля. Теорема обратимости Гельмгольца. Принцип дополнительности Бабине.

Дифракция света:

Это совокупность физических явлений, обусловленных волновой природой света, наблюдаемых при распространении ограниченных в пространстве пучков света, а также в среде с резко выраженной оптической неоднородностью (например, при прохождении через отверстия в экранах, вблизи границ непрозрачных тел и т.п.). В более узком смысле этого слова под дифракцией понимают: огибание светом различных препятствий; проникновение волны в область геометрической тени; т.е. отклонение от законов геометрической оптики.

Гюйгенс предложил следующее построение: Каждая точка волнового фронта принимается за источник вторичных сферических волн, распространяющихся во все стороны, при волновой фронт в любой последующий момент времени есть огибающая этих вторичных волн. Френель дополнил принцип Гюйгенса утверждением, что в любой момент времени световое поле в рассматриваемой точке есть результат интерференции вторичных волн. Это сочетание получило название принципа Гюйгенса–Френеля, который позволяет количественно описать дифракционные явления.

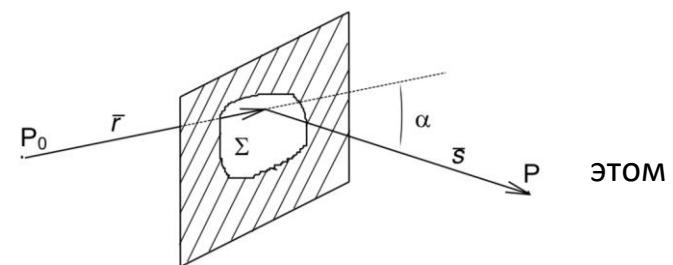


Рис. 1. Схема наблюдения дифракционных явлений.

Пусть на пути сферической монохроматической световой волны, исходящей из точечного источника P_0 , находится плоский непрозрачный объект с отверстием Σ , размеры которого велики по сравнению с длиной волны (рис. 1). В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля напряженность поля в точке P за объектом определяется суперпозицией волн от вторичных источников, расположенных в плоскости отверстия Σ . При этом амплитуда и фаза вторичных сферических волн, приходящих в точку P , зависят как от расстояния r (от источника P_0 до соответствующих участков объекта на поверхности Σ), так и от расстояния s (от этих участков до точки P).

В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля комплексная амплитуда поля $U(P)$ может быть найдена с помощью дифракционного интеграла Френеля:

$$U(P) = \iint_{\Sigma} \frac{A e^{ikr}}{r} \cdot \frac{e^{iks}}{s} \cdot K(\alpha) \cdot dS$$

где λ - длина волны; $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число; α - угол между векторами r и s ; $K(\alpha)$ - коэффициент, описывающий зависимость амплитуды вторичных волн от угла α между направлениями распространения падающей и вторичных волн; dS - элемент площади в плоскости отверстия Σ ;

Вопрос 15

А – константа, задаваемая мощностью излучения от источника P_0 ; интегрирование ведется по поверхности Σ отверстия в объекте.

В этой формуле множитель Ae^{ikr}/r описывает сферическую волну, распространяющуюся из точки P_0 до некоторого вторичного источника, расположенного на поверхности Σ , множитель $\exp(iks)/s$ – сферическую волну, идущую от вторичного источника до точки наблюдения P .

В общем случае комплексная амплитуда поля $U(P)$ может быть найдена с помощью интегральной формулы Френеля-Кирхгофа:

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{e^{iks}}{s} \cdot (\cos\theta_0 - \cos\theta) \cdot ds$$

где θ_0 и θ – углы, образованные векторами \underline{r} и \underline{s} с вектором нормали в поверхности Σ . Таким образом,

$$K(\alpha) = -\frac{i}{2\lambda} (\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

Наиболее интересным для рассмотрения является случай, когда характерный линейный размер отверстия мал по сравнению с расстояниями r и s от точек P_0 и P до объекта. В этом случае как множитель $K(\alpha)$, так и множитель $\frac{1}{rs}$ незначительно изменяются при интегрировании по отверстию Σ и основную роль в вычислении дифракционной картины по формуле Френеля играет интеграл от быстро осциллирующего множителя вида $\exp[ik(r+s)]$. Разложение в ряд этого множителя позволяет существенно упростить формулу Френеля. Явления, описываемые в рамках такого приближения, носят название дифракции Френеля, или дифракции в ближней зоне. При $r \rightarrow \infty$ фронт падающей волны можно считать плоским. Если $s \rightarrow \infty$, то и вторичные волны, распространяющиеся под некоторым углом α к первоначальному направлению, образуют плоский волновой фронт. Дифракционные явления, наблюдаемые при этих условиях, носят название дифракции Фраунгофера, или дифракции в дальней зоне.

Отметим, что формула Френеля – Кирхгофа симметрична относительно источника и точки наблюдения. Это означает, что точечный источник, находящийся в P_0 , производит в P такое же действие, какое производил бы точечный источник равной интенсивности, помещенный в P . Этот вывод иногда называют теоремой взаимности (или теоремой обратимости) Гельмгольца.

До сих пор мы предполагали, что свет на пути от источника до точки P не встречает других поверхностей, кроме дифракционного экрана: в таком случае падающие волны сферические. Легко распространить этот анализ и на более сложные случаи, когда форма волны не столь проста. И тогда мы опять подучим, что выводы теории Кирхгофа по существу эквивалентны предсказаниям, сделанным на основе принципа Гюйгенса – Френеля, при условии, что в каждой точке волнового фронта

Вопрос 15

3

радиусы его кривизны велики по сравнению с длиной волны света, а углы достаточно малы.

Из предыдущих рассуждений можно сразу же вывести заключение о распределении света, дифрагировавшего на дополнительных друг другу экранах, т. е. на экранах, у которых отверстия одного точно совпадают с непрозрачными частями другого и наоборот. Пусть $U_1(P)$ и $U_2(P)$ — комплексные возмущения, когда только одни из экранов помещен на пути между источниками и точкой наблюдения P . Тогда, поскольку U_1 и U_2 можно представить в виде интегралов по отверстиям, а отверстия в дополнительных экранах располагаются так, что полностью «открывают» весь волновой фронт, то

$$U = U_1 + U_2$$

Это так называемый принцип Бабине.

Из принципа Бабине можно вывести два заключения:

- 1) Если $U_1 = 0$, то $U_2 = U$, т. е. в точках, где интенсивность при наличии одного экрана равна нулю, в присутствии лишь другого экрана она будет такой же, как и в отсутствие экранов.
- 2) Далее, если $U = 0$, то $U_1 = -U_2$ т. е. в точках, где U равно нулю, фазы U_1 и U_2 различаются на π , а интенсивности $I_1 = |U_1|^2$ и $I_2 = |U_2|^2$ одинаковы.

Так, например, если точечный источник изображается хорошо корректированным объективом, распределение света U в плоскости изображений повсюду равно нулю, за исключением мест, находящихся в непосредственной близости от изображения O источника. Если дополнительные экраны поместить на пути между источником и изображением, то $I_1 = I_2$ всюду, за исключением мест близ O .

Метод зон Френеля. Радиус и площадь зон Френеля. Число Френеля. Условие перехода от волновой к геометрической оптике. Дифракция света на круглом отверстии.

Зоны Френеля:

Вначале рассчитаем зоны Френеля. Для этого окружим точку P_0 сферой радиусом $\rho_1 = a$ (рис. 11.3). Пусть точка P расположена на расстоянии b от поверхности сферы. Мысленно циркулем, одна ножка которого находится в точке P , проведем по поверхности сферы окружности. Соответствующие расстояния между ножками циркуля равны $b + \frac{\lambda}{2}, b + 2\frac{\lambda}{2}, \dots, b + m\frac{\lambda}{2}$. Тогда сфера будет разделена на кольцевые области, называемые зонами Френеля.

При интегрировании по поверхности $k\rho_1 = ka = const$, произведение $k\rho$ будет изменяться на величину π при переходе от центра первой зоны (точки O) к ее краю (точке 1), затем при переходе от точки 1 к точке 2 и т.д.

Рассчитаем радиус r_m и площадь σ_m m -й зоны. Радиус r_1 первой зоны определяется, как следует из рис. 11.3, из уравнений

$$a^2 - (a - \delta)^2 = r_1^2 = (b + \frac{\lambda}{2})^2 - (b + \delta)^2$$

Поскольку $b \gg \lambda$, можно пренебречь величиной $\lambda^2/4 \ll \lambda b$ в правом части формулы. В результате получаем

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}}\lambda$$

Площадь первой зоны

$$\sigma_1 = \pi r_1^2 = \frac{\pi ab}{a+b} \lambda$$

Заменив λ на $m\lambda$, получим выражение для внешнего радиуса m -й зоны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}$$

Площадь m -й зоны равна площади кольца

$$\sigma_m = \pi(r_m^2 - r_{m-1}^2) = \sigma_1$$

Таким образом, радиусы зон увеличиваются $\sim \sqrt{m}$, а площади всех зон одинаковы.

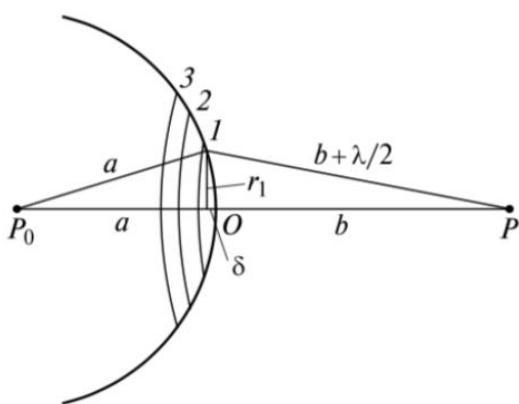


Рис. 11.3

Вопрос 16

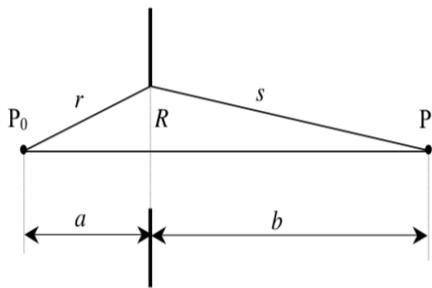


Рис. 1.4. К выводу формулы для радиуса зон Френеля

Последнее означает, что различие вкладов зон в дифракционный интеграл обусловлено только разными расстояниями $\rho_m = b + m \frac{\lambda}{2}$ — и углами наклона φ_m .

Если для т. Р отверстие открывает нечетное число зон Френеля, то амплитуда волны в т. Р будет максимальна, если же открыто четное число зон Френеля, то амплитуда равна нулю.

Разность хода до точки Р для крайнего и центрального лучей:

$$\Delta s_R = (r + s) - (a + b) = \frac{R^2}{2a} + \frac{R^2}{2b} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Разность фаз между крайним и центральным лучами пропорциональна квадрату радиуса отверстия:

$$\psi_R = k \cdot \Delta s_R = \frac{kR^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi R^2}{2\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \pi \frac{R^2}{R_1^2} = \pi \frac{S}{S_1}$$

Выполним еще одно построение. Разобьем первую зону Френеля на m подзон так, чтобы разность фаз $d\psi_R$ между лучами, идущими от границ каждой подзоны, была равна

$$d\psi_R = \frac{\pi}{m}$$

Из (8) следует, что $d\psi \sim d(R^2) = R \cdot dR$, то есть площади всех подзон одинаковы.

Построим векторную диаграмму для нахождения амплитуды поля в точке Р. Вклады от 1-й, 2-й, ... подзон отображаются векторами \underline{OA}_1 , $\underline{A}_1\underline{A}_2$, ..., $\underline{A}_{m-1}\underline{O}_1$, которые имеют одну и ту же длину и повернуты друг относительно друга на один и тот же угол $d\psi_m$. При увеличении m ломанная $OA_1A_2\dots A_{m-1}O_1$ все больше будет походить на дугу окружности.

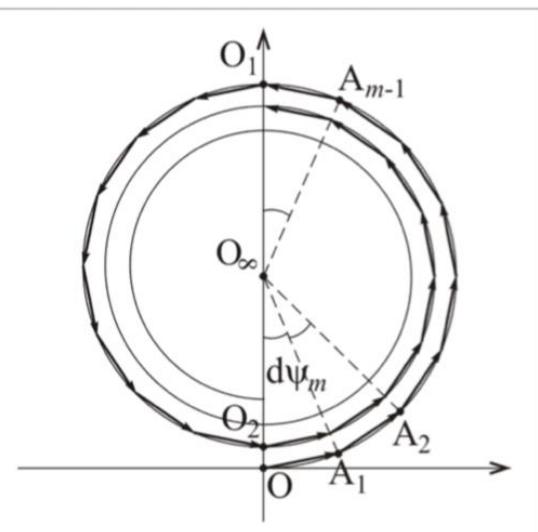


Рис. 1.5. Построение векторной диаграммы для нахождения амплитуды светового поля в точке Р

Проводя аналогичные рассуждения для второй зоны, получим вторую ломаную, которая замкнула бы первую, если бы амплитуды складываемых элементарных векторов действительно были бы равны. Однако следует помнить о коэффициенте $K(\chi)$, который учитывает зависимость амплитуды излучаемых вторичных волн от угла χ между лучом, идущим от источника P_0 к вторичному источнику, и лучом, идущим от

Вопрос 16

вторичного источника к точке наблюдения Р. Так как коэффициент $K(\chi)$ монотонно уменьшается с ростом угла χ то коней ломаной, соответствующей второй зоне, попадает не в т. О. и в близкую к ней т. O_2 . Таким образом, оклад от второй тоны характеризуется вектором O_1O_2 , который по длине примерно равен вектору OO_2 , но направлен в противоположную сторону. В результате вклад в $U(P)$ от первой и второй зон Френеля пропорционален длине малого вектора OO_2 .

Учитывая третью, четвертую и все последующие зоны, получим векторную диаграмму в виде скручивающейся спирали $OO_1O_2\dots O_\infty$, где точка O_∞ , совпадает с

центром спирали (вектор OO_∞ соответствует случаю, когда препятствие отсутствует и открыты все зоны Френеля). Полученную спираль называют спиралью Френеля. Как видно из рис. 1.5, вектор OO_∞ , в два раза меньше вектора OO_1 . Следовательно, если для точки Р открыта только первая зона Френеля, то напряженность поля в центре экрана будет в два раза больше, чем в отсутствие препятствия. А так как интенсивность пропорциональна квадрату напряженности электрического поля, то для интенсивностей отношение будет равно четырем.

Число Френеля (волновой параметр): Основными параметрами, существенно определяющими характер дифракционных явлений, являются: длина волны λ , размер отверстия b , расстояние до плоскости или до точки наблюдения z . Тот или иной характер дифракционных явлений зависит от значения волнового параметра.

$$p = \frac{\sqrt{\lambda z}}{b}$$

$p \ll 1$ - область геометрической оптики

$p \gg 1$ - область дифракции Фраунгофера

$p \approx 1$ - область дифракции Френеля

Дифракция на круглом отверстии:

Если сферическая волна падает на экран с круглым отверстием r_0 , то амплитуда волны в точке Р на оси отверстия зависит от числа открытых зон Френеля.

При фиксированном положении источника число открытых зон изменяется с расстоянием b . Оно определяется из условия

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda} = r_0$$

$$\text{Следовательно } m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

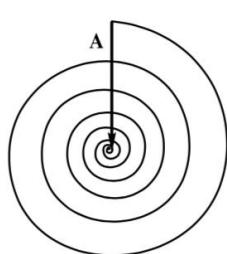


Рис. 11.7

Вопрос 16

При перемещении точки Р вдоль оси амплитуда возмущения будет периодически изменяться, достигая максимума при нечетном m и минимума — при четном m . Абсолютный максимум достигается на расстоянии b , когда $m = 1$. В этом случае (см. рис. 11.7)

$$A_{max} = A_1 = 2A = 2 \frac{C}{a + b}$$

Соответственно интенсивность полны повышается в четыре раза по сравнению с интенсивностью волны в отсутствие экрана.

Можно считать, что экран с отверстием подобен линзе. Он формирует изображение источника в точке Р, для которой $m = 1$. Если эту формулу переписать в виде

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\lambda}{r_0^2}$$

то это выражение аналогично формуле линзы, у которой фокусное расстояние $f = r_0^2 / \lambda$. При $r_0 = 0.5$ мм и $\lambda = 500$ нм $f = 50$ см.

Экран с отверстием вместо объектива использовался в *фотокамере обскура*. На фотопластинке или матовой пластинке получалось изображение предмета, однако качество этого изображения было хуже, чем при использовании объектива. Это связано с тем, что изображение каждой точки фотографируемого предмета на обработанной фотопластинке представляет собой семейство концентрических колец со светлым пятном в центре при четном m и темным пятном при нечетном m .

Вопрос 17

Метод векторных диаграмм. Спираль Френеля. Амплитудная и фазовая зонные пластиинки. Фокусы зонной пластиинки. Линза как оптимальная зонная пластиинка.

Метод векторных диаграмм. Спираль Френеля:

$$\widehat{\vec{A}}(\mathbf{P}) \Rightarrow \vec{A}(\mathbf{P})$$

$$|\widehat{\vec{A}}(\mathbf{P})| = |\vec{A}(\mathbf{P})|$$

$$A(r) = |A(r)|e^{i\varphi(r)}$$

$$\varphi(r) = -kr + \varphi_0 \text{ - набег фазы}$$

$$\{A_j(r)\} \rightarrow \{\vec{A}_s(r)\} - Im A$$

$$\sum_j \alpha_j A_j(r) = \sum_j \alpha_j \vec{A}_j(r)$$

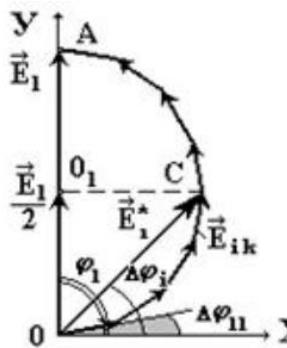
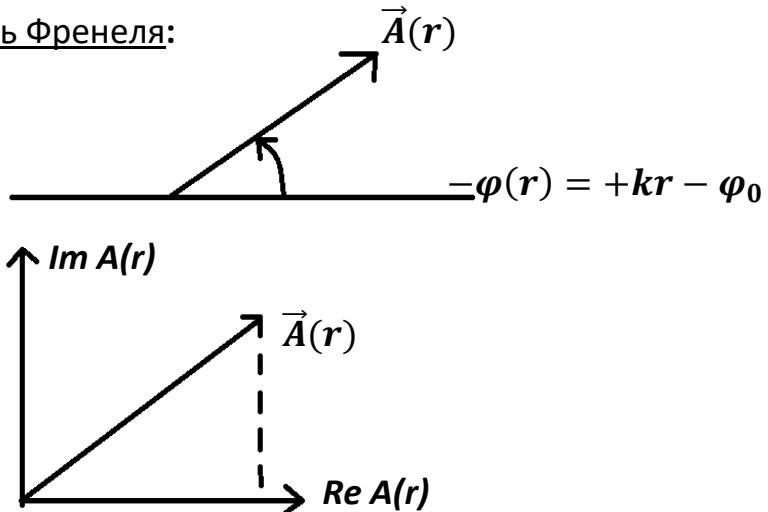


Рис. 8.3

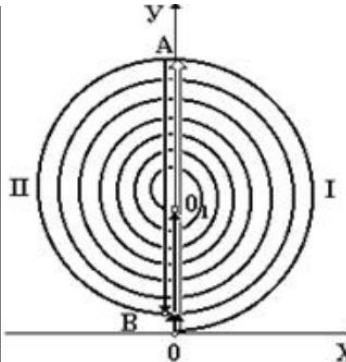


Рис. 8.4

Амплитуды и фазы световых волн (колебаний) в задачах на дифракцию с использованием зон Френеля можно найти графически. Все зоны разбивают еще на ряд равных по амплитуде участков. Каждый из них отличается от соседнего участка по фазе на величину $\varphi = p/N$, где N - число частей, на которые разбита одна зона. Колебания на краю зон отличаются по фазе на p . Результирующая амплитуда волны каждой зоны

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$$

где E_i - амплитуда i -го участка зоны. Колебание, возбуждаемое каждым участком первой зоны, будем характеризовать вектором E_{11} , который направлен под углом $\varphi_{11} = \frac{p}{N}$, например, к оси X (рис. 8.3).

Колебания второго участка изобразим таким же вектором, но направленным под углом φ_{21} к первому вектору и т. д. В результате построения всей векторной диаграммы для одной зоны вектор, представляющий колебание последнего участка зоны, своим концом замкнет многоугольник в т. А. (на рис. 8.3 зона состоит из $N = 8$ участков).

Вопрос 17

2

Следовательно, вектор $E_1 = OA$ - амплитуда результирующего колебания всей первой зоны I, а результирующая фаза $j_1 = \pi/2$. На рис. 8.3 вектором $\vec{E}_l^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{E}_l$ изображена амплитуда колебания, возбуждаемой от открытой половины первой зоны. Ее фаза $\varphi = \pi/4$. При распространении неограниченной волны вся бесконечная совокупность зон дает векторную диаграмму, в пределе переходящую в спираль (рис. 8.4). Амплитуда результирующего колебания $E = OO_1 = E_1/2$, а ее фаза $j = \pi/2$. Например, при открытых двух зонах, вектор ОА даст амплитуду волны первой зоны I, а вектор АВ - второй зоны II). Эти векторы направлены противоположно, поэтому их результирующая амплитуда равна вектору ОВ(рис. 8.4). Метод векторных диаграмм для нахождения амплитуд и фаз удобен при решении задач, когда имеет место перекрытие непрозрачным экраном ряда или части зон. Метод расчета освещенности за системой экранов с использованием зон Френеля положен в основу теории зонных пластинок.

Амплитудная и фазовая зонные пластиинки:

Если на стеклянную пластинку нанести концентрические темные кольца, закрывающие либо только четные, либо только нечетные зоны Френеля, то получится зонная пластиинка.

Колебания от четных и нечетных зон Френеля находятся в противофазе и, следовательно, взаимно ослабляют друг друга. Если поставить на пути световой волны зонную пластиинку, то интенсивность света в точке наблюдения резко возрастет. Еще большего эффекта можно достичь, не перекрывая четные (нечетные) зоны, а изменяя фазу их колебаний на π . Это можно осуществить с помощью прозрачной пластиинки, толщина которой в местах, соответствующим четным и нечетным зонам, отличается на определенную величину. Такая пластиинка называется фазовой. По сравнению с перекрывающей зоны амплитудной пластиинкой, фазовая дает дополнительно увеличение амплитуды в 2 раза, а интенсивности света - в 4.

Фокусы зонной пластиинки. Линза как оптимальная зонная пластиинка:

Если сместить точку наблюдения вдоль или поперек оси SP, соединяющей источник и точку наблюдения, то условие зонной пластиинки нарушится, и интенсивность света резко уменьшится. Как видим, зонная пластиинка работает как линза, давая в точке Р изображение точечного источника, находящегося в точке S. Для расчета фокусного расстояния зонной пластиинки воспользуемся формулой для вычисления радиусов зон Френеля.

$$R_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}} \quad a \rightarrow \infty; b \rightarrow f_0 \quad \sqrt{m\lambda f_0} \Rightarrow f_0 = \frac{R_m^2}{m\lambda}$$

При приближении точки наблюдения к пластиинке зоны Френеля уменьшаются, при удалении -увеличиваются. Если расстояние $b = f_0$ уменьшить в $(2k+1)$ раз, то каждая зона пластиинки будет содержать в себе $(2k+1)$ новых зон Френеля (поскольку m

Вопрос 17

увеличивается в то же число раз) и будет наблюдаться локальное увеличение интенсивности. Тем самым, максимумы будут обнаружены на расстояниях $f_k = \frac{f_0}{2k+1}$, где $k=0,1,2\dots$

Линза – оптимальная зонная пластинка, у которой световые возмущения в точке наблюдения (в месте изображения точечного источника, а в случае плоской падающей волны - в фокусе) от всех элементарных зон находятся в одинаковой фазе. Поэтому для линзы на векторной диаграмме выпрямляются полуокружности, соответствующие зонам Френеля.

Вопрос 18

1

Дифракция света. Ближняя и дальняя зоны дифракции, дифракционная длина пучка. Дифракционная расходимость пучка в дальней зоне. Дифракция на круглом отверстии и круглом экране. Пятно Пуассона.

Дифракция света – совокупность явлений, обусловленных волновой природой света и наблюдаемых при распространении света в среде с резко выраженной оптической неоднородностью (экраны с дырами и на краях). ИЛИ Д.с. – любые отклонения от законов геометрической оптики законов распространения света.

Ближняя и дальняя зона дифракции:

Радиус m -той зоны Френеля задаётся формулой $R_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}} = \sqrt{m\lambda l}$, где $l = \frac{ab}{a+b}$ при падении на экран параллельного пучка $a = \infty$ и $l = b$, $R_m = \sqrt{m\lambda b}$, выражая m получаем: $m = N = \frac{R_N^2}{\lambda b}$, где N – число Френеля – число открытых экраном зон. Тогда:

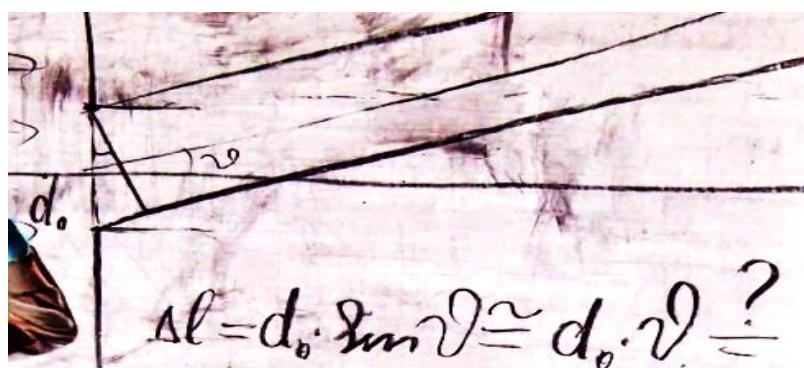
$$N = \begin{cases} N < 1, & \text{приближение Фраунгофера, дифракция в дальней зоне} \\ N \sim 1, & \text{приближение Френеля, дифракция в ближней зоне} \\ N \gg 1, & \text{приближение геометрической оптики.} \end{cases}$$

Иногда, при $a \rightarrow \infty$, кладут $N = 1$ и рассматривают дифракционную длину пучка $b_d = \frac{R_0^2}{\lambda}$, R_0 – Радиус отверстия. b_d – расстояние от сечения пучка, где он квазиплоский, и при котором, сечение совпадает с первой зоной Френеля. Тогда разделение на приближение принимает такой вид:

$$b: \begin{cases} b \gg b_d, & \text{дальняя зона, приближение Фраунгофера} \\ b \approx b_d, & \text{область дифракции Френеля, ближняя зона} \\ b_d \gg b \gg 0, & \text{зона геометрической оптики.} \end{cases}$$

Дифракционная расходимость пучка в дальней зоне:

Рассмотрим падение плоской волны на экран с отверстием (для удобства выкладок, с щелью, ширины d_0). И зададимся вопросом о поведении пучка за щелью. На малом расстоянии, действует приближение геометрической оптики, значит ширина и интенсивность пучка, вблизи отверстия не меняется. Рассмотрим теперь большие



расстояния, выберем направление распространения крайних пучков углом ϑ : тогда, разность хода крайних пучков: $\Delta l = d_0 \sin \vartheta \cong d_0 \vartheta$ Найдём направление, при котором эти пучки на бесконечности себя погасят.

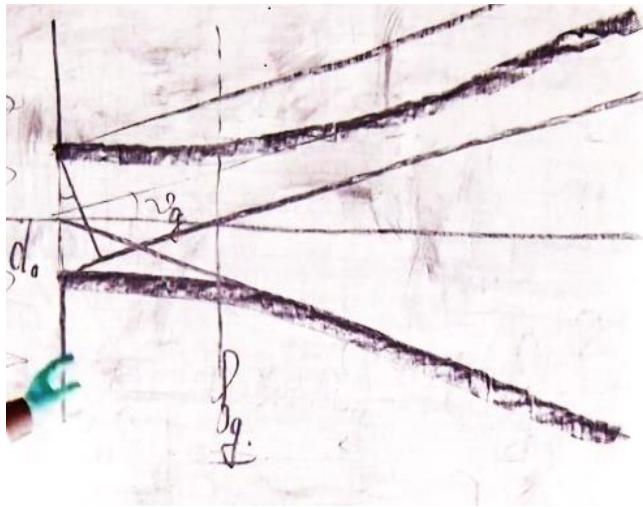
Вопрос 18

2

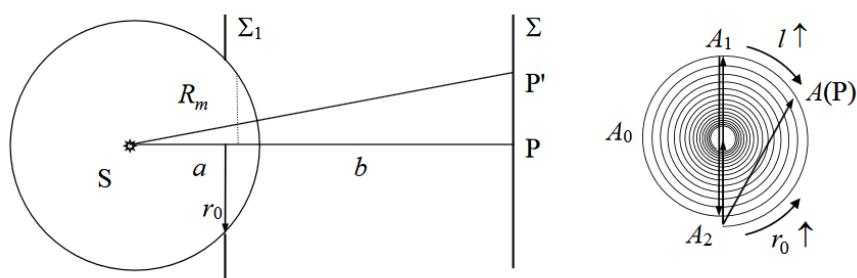
Разобьём все вторичные источники по парам, так, что расстояние между ними будет

$\frac{d_0}{2}$, например верхняя точка и центральная.

Тогда она погасят друг друга, если разность хода будет равна $\lambda/2$, тогда разность хода для крайних источников $\Delta l = \lambda$, в таком случае $\vartheta = \vartheta_d$ называется углом дифракционной расходимости. $\vartheta_d \cong \frac{\lambda}{d_0}$. Тогда на больших расстояниях пучок локализован приблизительно в угле $\pm\vartheta_d$ и общая картинка получается:



Дифракция на круглом отверстии и круглом экране:



Круглое отверстие.

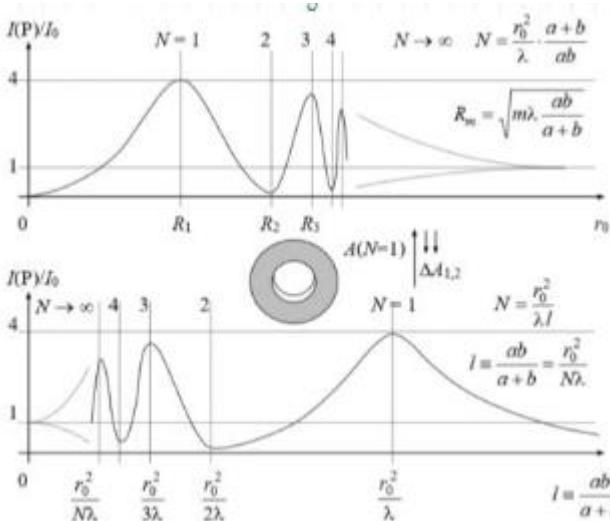
Если сферическая волна попадает на экран с круглым отверстием R_0 , то амплитуда волны в т. Р. на оси отверстия зависит от числа (N) открытых зон Френеля. При постоянном

положении источника $N = \frac{R_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$. При перемещении т. Р вдоль оси амплитуда

волны А будет периодически изменяться, достигая максимумов при $N = (2n + 1), n \in \mathbb{N}$ и минимумов при $N = 2n, n \in \mathbb{N}$. Напомню, что амплитуда волны связана с интенсивностью так: $I(P) \sim |A(P)|^2$. Абсолютный максимум достигается при $N = 1$, и $A(P) = A_1 = 2A$, где A –

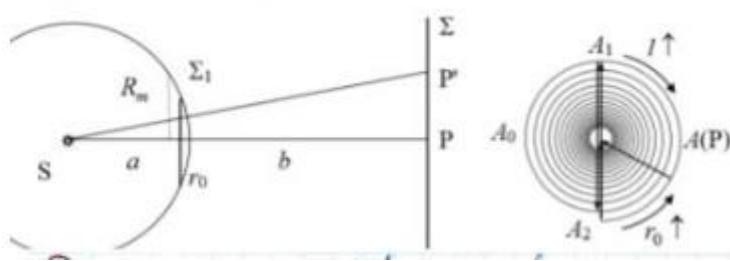
амплитуда в отсутствии экрана, $\Rightarrow I = 4I_0$

На картинах приведены некоторые зависимости интенсивности от размера отверстия r_0 и приведённой длины l .



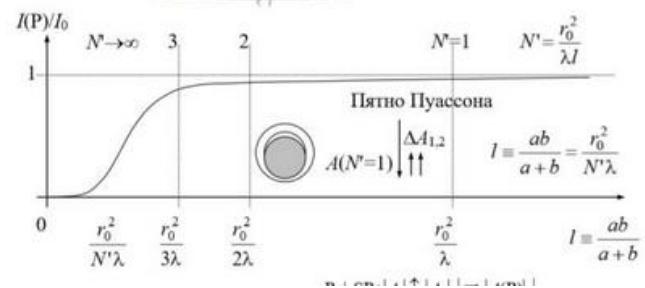
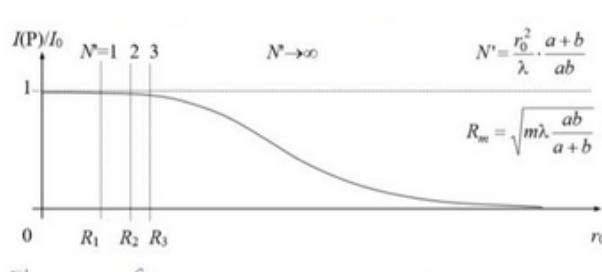
Вопрос 18

Дифракция на круглом экране. Пятно Пуассона:



Если на пути волны поставить круглый непрозрачный диск радиуса r_0 , то при рассмотрении соответствующей спирали Френеля, вектор будет не выходить из нулевой зоны и приходить в m -тую, в зависимости от

того, сколько их там открыто экраном, а наоборот выходить из m -той и закачиваться в центре спирали. Зависимости интенсивности от радиуса диска, при фиксированном l и интенсивности от l при постоянном размере экрана приведены ниже.



Пятно Пуассона – предсказанное Френелем и найденное Пуассоном светлое пятно в области геометрической тени, при освещении круглого экрана.

Вопрос 19

1

Дифракция света. Дифракция на щели и крае полубесконечного экрана и щели. Зоны Шустера, спираль Корню.

Дифракция на щели:

Плоская монохроматическая волна падает на нормально на Щ(бесконечно длинная щель шириной b). За щелью расположена линза L , в фокальной плоскости экран \mathcal{E} . Наличие линзы равносильно расположению экрана на бесконечном расстоянии от объекта. В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля каждая точка волнового фронта, достигающего плоскости, где расположена щель, является источником вторичных сферических волн. Тогда лучи, идущие от всех этих вторичных источников под некоторым углом φ к первоначальному направлению, образуют плоский волновой фронт и собираются в фокальной плоскости линзы.

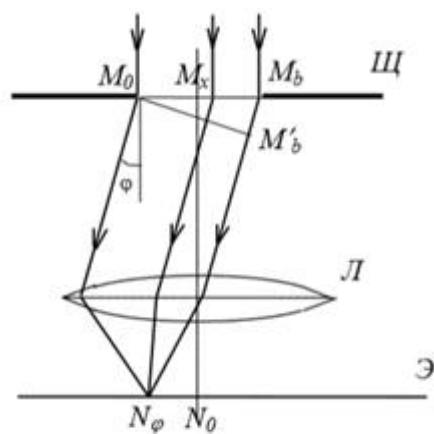


Рис. 3. Дифракция Фраунгофера на одной щели

$$\Delta = b * \sin\varphi$$

$$d\psi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta dx$$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} b * \sin\varphi$$

$$A_0 = R\psi; A_\varphi = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$A_\varphi = A_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b \sin\varphi}{\lambda}\right); \quad I \sim A_\varphi^2$$

Условие минимума: $b * \sin\varphi = m\lambda$

Дифракция от полубесконечного экрана:

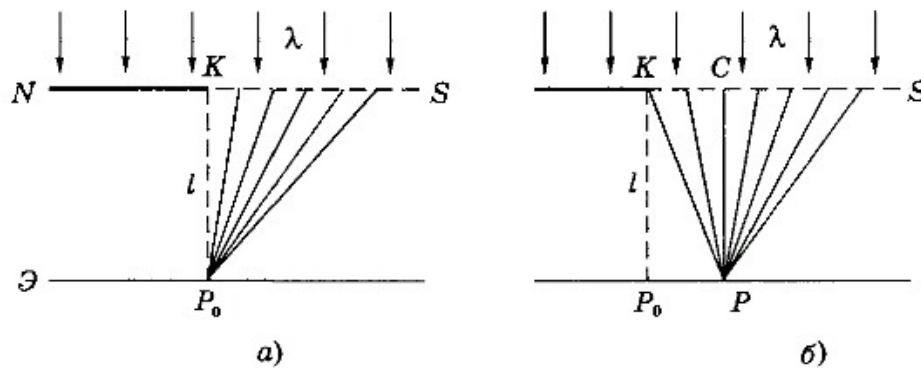


Рис. 5.11

Дифракция от прямолинейного края полуплоскости. Пусть на экран \mathcal{E} падает нормально плоская монохроматическая волна длины λ . Расположим перед экраном на расстоянии l от него непрозрачную полуплоскость N с прямолинейным краем

Вопрос 19

2

(рис. 5.11). Если бы свет распространялся прямолинейно, то на экране Э мы наблюдали резкую тень от края этой полу平面 (точка P_0 на рисунке). В действительности же из-за волнового характера света на экране Э образуется сложная дифракционная картина.

Для расчета этой картины воспользуемся принципом Гюйгенса-Френеля. В данном случае в качестве интересующей нас волновой поверхности S возьмем ту открытую ее часть, которая продолжает непрозрачную полу平面. Соответствующие расчеты были проведены аналитически Френелем, получены результаты в виде так называемых интегралов Френеля, и задача, таким образом, была решена.

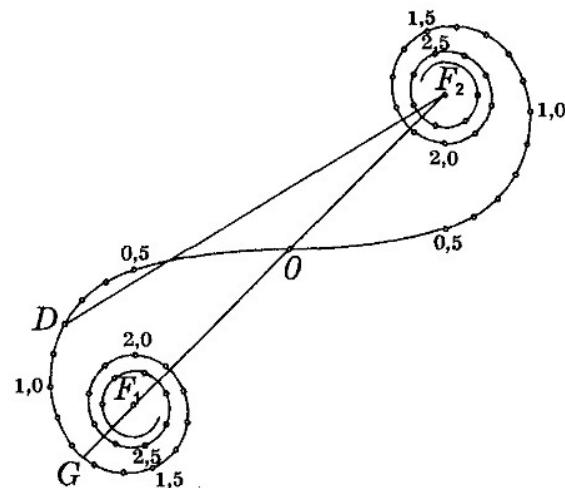
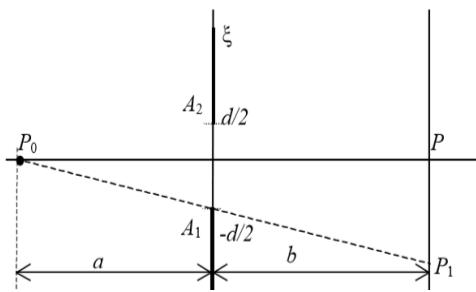
Мы не будем воспроизводить здесь этот расчет и ограничимся лишь интерпретацией его и полученного результата с помощью векторной диаграммы. Это наиболее простой и наглядный метод, открывающий к тому же весьма эффективные практические применения. Из соображений симметрии ясно, что дифракционная картина на экране Э будет зависеть только от расстояния до границы геометрической тени - точки P_0 на рис. 5.11, т. е. светлые и темные полосы должны быть параллельны прямолинейному краю К непрозрачной полу平面 N.

Говоря далее об амплитуде колебаний в точке Р на экране, мы будем иметь в виду, что это относится ко всем точкам прямой, проходящей через точку Р и параллельной краю полу平面.

Сpirаль Корню:

Решение

Схема эксперимента показана на рис. 4.21 (P_0 – источник света, P – центр дифракционной картины, A_1 и A_2 – границы щели, P_1 – граница геометрической тени на экране, ξ – координаты точек в плоскости щели).



Для нахождения амплитуды поля в т. Р, как

Рис. 5.13

и при рассмотрении дифракции на круглом отверстии, разобьем щель на равные по площади подзоны в виде узких бесконечно длинных полосок одинаковой ширины $\Delta\xi$.

В этом случае векторы, характеризующие вклад каждой подзоны в комплексную амплитуду поля т. Р, будут иметь одинаковую длину, однако разность фаз для соседних подзон уже не будет одной и той же, как это было при расчете дифракции на круглом отверстии. Эта разность фаз будет практически равна нулю для подзон, близких к центру щели, и растет по мере удаления от него. В результате векторная

Вопрос 19

диаграмма принимает вид спирали Корню. С ее помощью достаточно просто рассчитать не только дифракцию на щели, но и на краю экрана, проволоке.

Задается с помощью интегралов Френеля:

$$C(\omega) = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau$$

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau$$

где ω – параметр спирали

Каждой точке спирали Корню соответствует определенное значение параметра S , пропорционального x . Значение S также пропорционально длине спирали Корню. Аналогично для C относительно y .

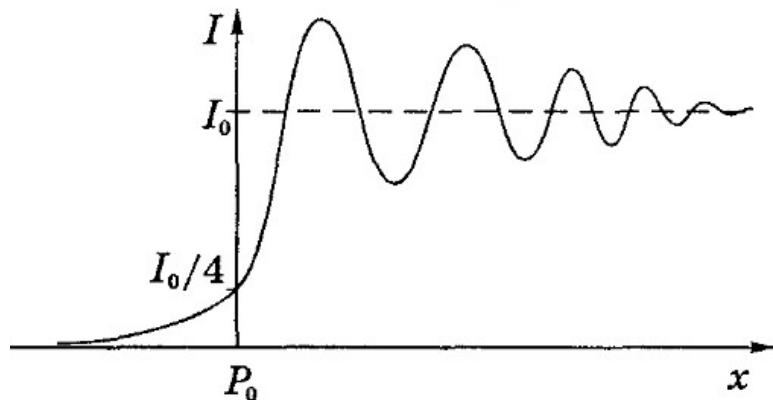
Так как спираль образует векторы, соответствующие вкладам от соответствующих подзон, то длина участка спирали от начала координат до любой ее точки

пропорциональна ε в плоскости щели. То есть $\omega(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \varepsilon$

Пользуясь спиралью Корню, можно легко получить распределение интенсивности в зависимости от x . Т.к в точке P_0 :

$$\overrightarrow{OF_2} = 1/2 \overrightarrow{F_1 F_2} \Rightarrow I_{P_0} = \frac{I_0}{4};$$

Если смотреть на рисунок спирали, то можно сказать, что при перемещении точки наблюдения влево точка D перемещается вправо по спирали Корню, и наоборот. Таким образом, можно получить схематичный график изменения интенсивности в зависимости от точки наблюдения.



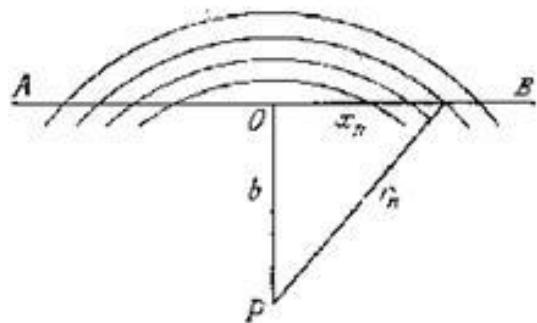
Вопрос 19

4

Зоны Шустера:

В некоторых задачах(например, дифракция на прямоугольной щели) разбиение волнового фронта на кольца, как в случае с зонами Френеля, нецелесообразно. Нужно искать другой путь. Рассмотрим плоский волновой фронт АВ. Проведём

цилиндрические коаксиальные поверхности, ось которых проходит через точку Р,



$$aR = b; b + \frac{\lambda}{2}; b + 2 * \frac{\lambda}{2} \dots$$

$$r_n^2 = b^2 + x_n^2; r_{n-1}^2 = b^2 + x_{n-1}^2 \Rightarrow$$

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = r_n^2 - r_{n-1}^2 = (r_n - r_{n-1})(r_n + r_{n+1}) \approx b\lambda$$

$$\text{Имеем: } x_1 = \sqrt{b\lambda}, x_2 = \sqrt{2b\lambda}, \dots$$

$$\text{Размер полосок в этом случае: } d_1 = \sqrt{b\lambda}, \quad d_2 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{b\lambda}, \dots$$

Вопрос 20

1

Дифракция света. Недостатки положений принципа Гюйгенса - Френеля. Понятие о теории дифракции Кирхгофа. Уравнение Гельмгольца и интегральная теорема Гельмгольца - Кирхгофа. Дифракционный интеграл Френеля - Кирхгофа. Приближения Френеля и Фраунгофера.

Дифракция света - это совокупность физических явлений, обусловленных волновой природой света, наблюдаемых при распространении ограниченных в пространстве пучков света, а также в среде с резко выраженной оптической неоднородностью (например, при прохождении через отверстия в экранах, вблизи границ непрозрачных тел и т.п.). В более узком смысле этого слова под дифракцией понимают: огибание светом различных препятствий; проникновение волны в область геометрической тени; т.е. отклонение от законов геометрической оптики.

Недостатки положений принципа Гюйгенса – Френеля:

Принцип Гюйгенса – Френеля не позволяет получить выражение для коэффициента $K(\alpha)$, входящего в интеграл Френеля. Кроме того, фаза волны, приходящей в точку наблюдения в отсутствии препятствия, отличается на $\frac{\pi}{2}$ от фазы волны, идущей от вторичного источника, расположенного строго на оси. Это хорошо видно на спирали Френеля, там первый мини-вектор выходящий из нуля, составляет прямой угол с вектором из нуля в центр (случай отсутствия экрана).

В предположении Френеля $K(\alpha)$ просто появился как гипотеза, Френель же и предположил, что при $\alpha = 0$ достигается максимум, при $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ он равен 0 и он непрерывно уменьшается.

Интеграл Френеля (тот, что будем сейчас уточнять):
$$A(P) = \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} K(\alpha) d\sigma,$$
 где Σ_0 – светящаяся поверхность, A_{Σ_0} – амплитуда на ней, ρ – расстояние от точки поверхности до т. Р. $K(\alpha)$ – коэффициент наклона, α – угол дифракции.

Понятие о теории дифракции Кирхгофа:

Указанные неприятности разрешаются в теории дифракции Кирхгофа, основанной на преобразовании волнового уравнения с заданными условиями на границе в уравнение Гельмгольца (то бишь к уравнению вида: $(\Delta + k^3)U = 0$, Δ – оператор Лапласа) для комплексной амплитуды (не зависящей от времени), если U удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то она может быть комплексной амплитудой некоторой волны. Кроме того, используется интегральная теорема Кирхгофа – Гельмгольца (о ней ниже), позволяющая найти поле в некоторой точке Р, если известна комплексная амплитуда поля и её производная по нормали на какой-либо поверхности, охватывающей точку Р.

Иначе говоря, в теории Френеля как вторичные источники берутся точки замкнутой поверхности, окружающий источник излучения, а по Кирхгофу, напротив, нужно брать поверхность вокруг точки наблюдения.

Опосля преобразований получается дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа:

Вопрос 20

$$A(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{\Sigma} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{iks}}{s} d\sigma$$

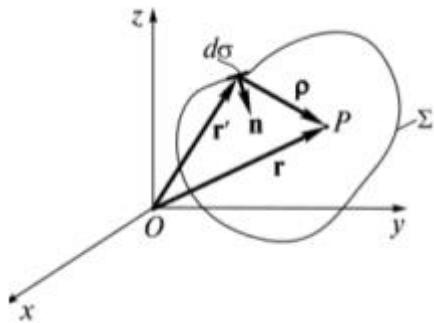
Где θ, θ_0 – углы, между векторами \vec{s} и \vec{r} с нормалью к плоскости отверстия. Тогда получается, что $K = K(\theta_0, \theta) = -\frac{i}{2\lambda} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$.

Уравнение Гельмгольца и интегральная теорема Гельмгольца – Кирхгофа:

Уравнение волны выглядит так: $\frac{\partial^2 \hat{E}(t, \vec{r})}{\partial t^2} = \nu^2 \Delta \hat{E}(t, \vec{r})$. \hat{E} - комплексное представление напряжённости поля. Для монохроматических волн $\hat{E}(t, \vec{r}) = A(\vec{r})e^{i\omega t}$, После подстановки и преобразований ($k = \frac{\omega}{\nu}$) получается:

$$(\Delta + k^2)A(\vec{r}) = 0$$

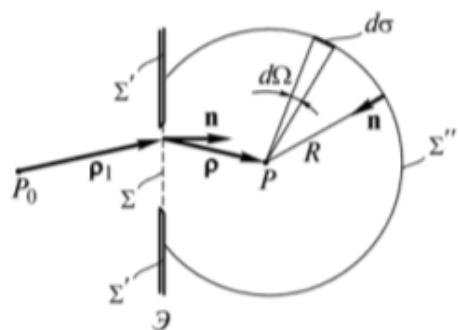
Это уравнение Гельмгольца. Решение этого уравнения удовлетворяет МАТЕМАТИЧЕСКОЙ интегральной теореме Гельмгольца – Кирхгофа.



Рассмотрим точку P – это точка наблюдения.

\vec{n} – внутренняя нормаль, остальное на рисунке. Тогда можно записать (из теоремы Гельмгольца – Кирхгофа) следующее:

$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(A_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) \Big|_{\Sigma} - \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \frac{\partial A_{\Sigma}}{\partial n} \Big|_{\Sigma} \right) d\sigma$$



Дифракционный интеграл Френеля – Кирхгофа:

Рассмотрим вот такую картинку. R – любая сколь угодно большая величина. P – точка наблюдения.

$$\text{Тогда } \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) = \frac{-ike^{-ik\rho} - e^{-ik\rho} \partial \rho}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial n} =$$

$$= -\frac{ike^{-ik\rho}}{\rho} \left(1 + \frac{1}{ik\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial n}, \text{ и в силу оптического}$$

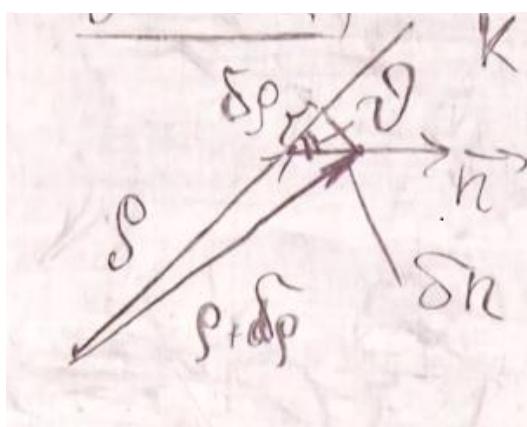
$$\text{приближения } \rho \gg \lambda \text{ т.к. } \frac{1}{k\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\rho} \ll 1$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) = -\frac{ike^{-ik\rho}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial n} \frac{\partial \rho}{\partial n} - \text{ определяется по картинке слева и равен } \cos \vartheta, \quad \vartheta - \text{ угол между}$$

расстоянием от точки наблюдения до физически

далеко от него. То есть:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) = -\frac{ik}{\rho} e^{-ik\rho} \cos \vartheta.$$



В предположении, что наличие экрана не сказывается на поле в тех точках, которые

Вопрос 20

$$\Sigma_0: A_{\Sigma_0} = A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}; \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma_0} = \frac{\partial}{\partial n} \left(A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \right) = -\frac{ik}{\rho_1} e^{-ik\rho_1} \cos \vartheta_1, \quad \rho_1 \gg \lambda$$

$\Sigma_1: A_{\Sigma_1} = 0; \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma_1} = 0$; и на поверхности, которая осталась: считаем, что она столь далеко, что там также нет поля.

Получаем

$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_0} \left(A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \left(-\frac{ik}{\rho} e^{-ik\rho} \cos \vartheta \right) + ik \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \cos \vartheta_1 \right) d\sigma$$

учитывая $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$A(P) = \iint_{\Sigma_0} A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \frac{i}{2\lambda} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta) d\sigma$$

Единственное отличие от Френеля в том, что К зависит не от одного, а от двух углов.

$K(\vartheta_1, \vartheta) = \frac{i}{2\lambda} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta)$. Если Σ_0 – фронт волны, то $\vartheta_1 = 0, \vartheta = \pi - \varphi$ и

$$K(\vartheta_1, \vartheta) = K(\varphi) = \frac{i}{2\lambda} (1 + \cos \varphi)$$

Приближения Френеля и Фраунгофера:

Из-за того, что экспоненты меняются быстро, а К почти не изменяется при больших ро:

$$A(P) \cong \overline{K(\vartheta_1, \vartheta)} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma$$

при параксиальных пучках $\vartheta_1 \cong 0, \vartheta \cong 180^\circ \Rightarrow \overline{K(\vartheta_1, \vartheta)} \cong \frac{i}{\lambda}$

тогда $A(P) \cong \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma$.

При решении задач с помощью этого интеграла нужно выделить два предельных случая. Рассмотрим дифракцию волны точечного источника на экране с круглым отверстием радиуса r_0 , точки Р₀ и Р лежат на оси, на расстояниях $a, b > r_0$. При интегрировании ρ_1 и ρ меняются в следующих пределах:

$$a \leq \rho_1 \leq \rho_{10} = a + \frac{r_0^2}{2a}$$

$$a \leq \rho \leq \rho_0 = b + \frac{r_0^2}{2b}$$

Вопрос 20

$\frac{r_0^2}{2a}$ и $\frac{r_0^2}{2b}$ малые зазоры между сферами. $\rho_1 \rho \cong const$, но в числителе интеграла экспоненты могут сильно меняться при малых изменениях ρ . если

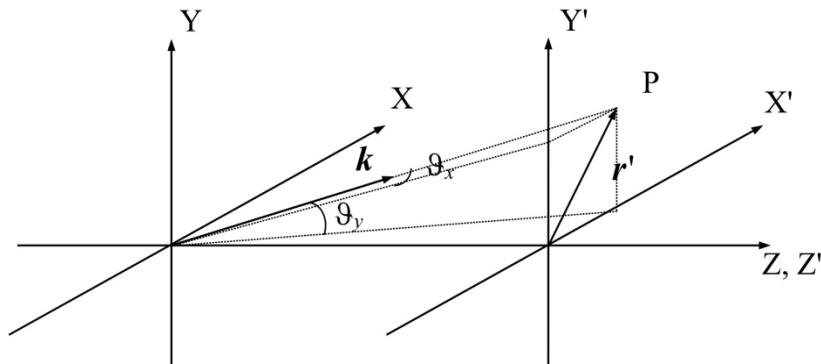
$a, b \ll \frac{r_0^2}{\lambda} = L_0$ – дифракционная длина, экспоненты многократно осциллируют и тогда на отверстии помещается большое число зон Френеля. Такое приближение носит название приближения Френеля.

При $a, b \gg L_0$, экспоненты осциллируют слабо, следовательно, помещается малое число хон Френеля и это приближение Фраунгофера,

Вопрос 21

Дифракция света-это круг явлений, заключающихся в отклонении от законов геометрической оптики при распространении света в среде, обусловленном волновой природой света.

Дифракция в дальней зоне как пространственное преобразование Фурье: сначала напомним, что ближняя и дальняя зоны дифракции- это области, где расстояние b от



щели до экрана соответственно меньше или больше дифракционной длины пучка $b_d = \frac{r_0^2}{\lambda}$ (λ - длина волны).

Обозначим компоненты волнового числа k : $k_{x,y} = k * \sin \theta_{x,y}$.

Пусть $f(t)$ - некая функция времени; ее комплексная амплитуда равна $f(iw)=\int_{[-inf, +inf]}(f(t)*e^{-iwt}dt)$

Соответственно сама функция $f(t)$ равна $f(t)=(1/2\pi)\int_{[-inf, +inf]}(f(iw)*e^{iwt}dw)$.

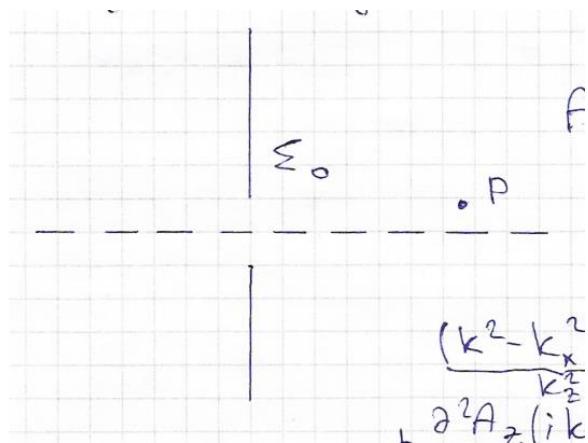
Теперь проведем однозначное соответствие: $t \rightarrow x, y$ $w \rightarrow k_x, k_y$. Тогда получим:

$A_s(x,y)*\exp[i(k_x x + k_y y)] = A(ik_x, ik_y)$ – пространственная спектральная амплитуда (s означает «сигма»- светящуюся поверхность вокруг источника излучения).

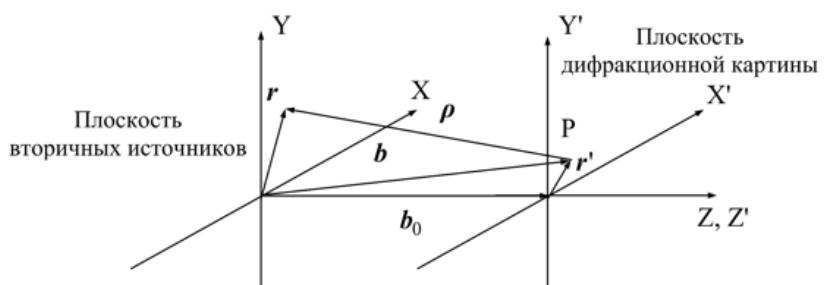
По аналогии с $f(t)$ комплексная амплитуда $A_s(x,y)$ равна

$$A_s(x,y)=(1/2\pi)^2 * \int \int_{[-inf, +inf]} (A_s(ik_x, ik_y) * \exp[-i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y).$$

Разложение пучка по плоским волнам:



тельности Бабине.



Приближение Френеля – $|r - r'| \ll b_0$, $b_0 \sim b_d = \frac{r_0^2}{\lambda}$:

Вопрос 21

Пусть щель расположена в плоскости Oxy, ось Oz направлена вправо;

$$A_{z(x,y)} = \left(\frac{1}{2\Pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} A_{s(ik_x, ik_y)} \exp[-i(k_{xx} + k_{yy})] dk_x dk_y;$$

$A_z = \left(\frac{1}{2\Pi}\right)^2 \text{int int}[-\inf, +\inf] (A_{s(ik_x, ik_y, z)} \exp[-i(k_{xx} + k_{yy})] dk_x dk_y)$; льзуемся уравнением Гельмгольца: $(\Delta + k^2)A(x, y, z) = 0$;

$$(k^2 - k_x^2 - k_y^2)A_s(ik_x, ik_y, z)e^{-i(k,r)} + [d^2(A_z(ik_x, ik_y, z))/dz^2]*e^{-i(k,r)} = 0$$

$$A_s(ik_x, ik_y, z) = A_s(ik_x, ik_y) * \exp[-ik_z z];$$

$A(x, y, z) = (1/2\Pi)^2 * \text{int int}[-\inf, +\inf] (A_s(ik_x, ik_y) * \exp[-i(k,r)] dk_x dk_y)$; - уравнение плоской волны. Отметим, что вектор r - это радиус-вектор точки на светящейся поверхности относительно центра этой поверхности - начала координат О.

Угловой спектр и его ширина: запишем интенсивность в наблюдаемой точке Р:

$I(P) = (1/2\Lambda^2 b^2) * |A_s(ik_x, ik_y)|^2$; данный модуль называется пространственной спектральной плотностью (угловым спектром).

Про угловую ширину: если диапазон частот равен dw, длительность импульса dt, справедливо соотношение: $dt * dw = 2\Pi$;

Проведем однозначное соответствие: $t \rightarrow x, y$, $w \rightarrow k_x, k_y$, $dt \rightarrow l_x, l_y$ - поперечные размеры пучка, $dw \rightarrow dk_x, dk_y$ - ширины углового спектра.

$d(k_{x,y}) = d(k * \sin\theta_{x,y}) = k * \cos\theta_{x,y} * d\theta_{x,y} \rightarrow k * \cos\theta_{x,y} d\theta_{x,y} * l_{x,y} = 2\Pi \rightarrow d\theta_{x,y} = \Lambda / \cos\theta_{x,y} d\theta_{x,y} * l_{x,y} = \Lambda / l_{x,y}$ - угловая ширина.

Вопрос: Дифракция на одномерных периодических структурах. Функция (комплексный коэффициент) пропускания (отражения). Фактор многоволновой интерференции. Интерференционная функция. Угловая ширина главных максимумов. Амплитудная и фазовая решетки.

Дифракция Фраунгофера на периодических структурах. Среди многочисленных дифракционных явлений особое место занимает дифракция на периодических структурах. При распространении (отражении) плоской волны через одно- или двухмерные структуры возмущение в (12.33) приобретает периодическую модуляцию амплитуды и фазы в плоскости Oxy . В результате в угловом спектре $|U_\Sigma(k_x, k_y)|^2$ появляются ярко выраженные пространственные частоты. Дифракционные максимумы, соответствующие этим частотам, будут узкими и интенсивными.

В этом легко убедиться, направив луч лазерной указки наклонно на поверхность CD-диска. От его поверхности будут отражаться в разных направлениях несколько световых лучей. Эти направления будут совпадать с направлениями на дифракционные максимумы.

Поскольку положение дифракционных максимумов зависит от длины волны, дифракция может быть использована для спектрального анализа света. Кроме того, при известной длине волны по положению максимумов можно сделать заключение о периодах пространственной модуляции и тем самым исследовать саму периодическую структуру.

Дифракционные решетки. *Дифракционной решеткой* является любое устройство, обеспечивающее периодическую модуляцию вдоль одного направления амплитуды и фазы падающей волны. На рис. 13.1 решетка схематично изображена в виде прозрачной пластиинки с периодически меняющейся толщиной вдоль оси Ox .

При падении на решетку плоской волны возмущение на ее поверхности

$$U(x, y) = U_0 e^{-ik_e \alpha x - ik_e \beta y}. \quad (13.1)$$

Модуляционные свойства решетки задаются комплексной функцией

$$\text{Комплексная функция пропускания (отражения)} \quad t(x) = \frac{U_\Sigma(x, y)}{U(x, y)} = |t(x)| e^{-i\Phi(x)}, \quad (13.2)$$

где $U_\Sigma(x, y)$ — возмущение, проходящее через решетку.

Функция (13.2) периодическая:

$$t(x) = t(x + d). \quad (13.3)$$

Величина d называется *периодом решетки*. Число N таких периодов (штрихов) обычно велико: $10^2 < N < 10^4$. Многие решетки отражают свет. В этом случае функция $t(x)$ будет описывать модуляцию волны при отражении.

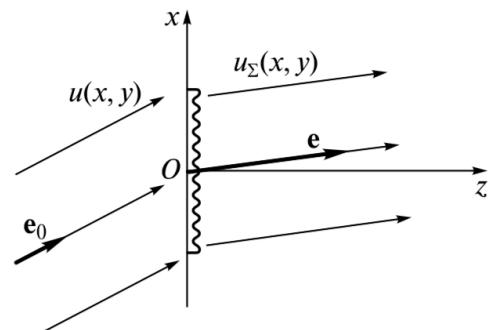


Рис. 13.1

Переходя в (13.7) к интенсивности, получим

$$I(P) = \frac{1}{2} |U(P)|^2 = I_1(P) \left(\frac{\sin \frac{kpdN}{2}}{\sin \frac{kpd}{2}} \right)^2 = I_1(P) H\left(N, \frac{kpd}{2}\right). \quad (13.8)$$

Здесь

$$I_1(P) = \frac{I_0 L_2^2}{\lambda^2 b^2} \left| \int_0^d t(x) e^{ikpx} dx \right|^2 \quad (13.9)$$

— интенсивность при дифракции на одном штрихе решетки,

$$H\left(N, \frac{kpd}{2}\right) = \left(\frac{\sin \frac{kpdN}{2}}{\sin \frac{kpd}{2}} \right)^2 \quad (13.10)$$

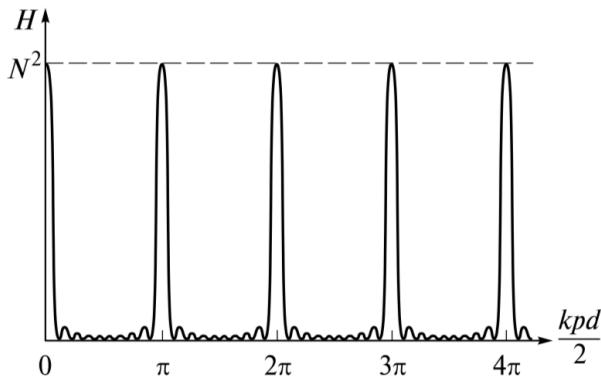


Рис. 13.2

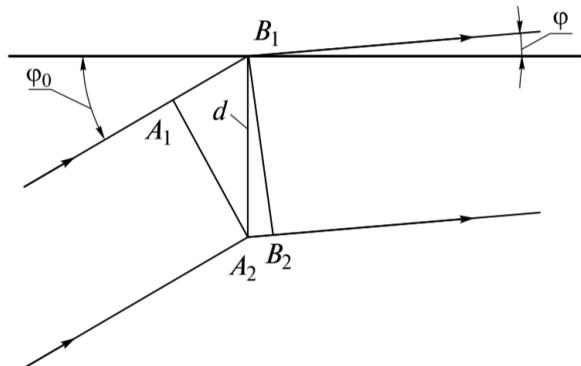


Рис. 13.3

— функция взаимодействия, описывающая интерференцию N волн, дифрагировавших на всех штрихах решетки. Ее график при $N = 10$ представлен на рис. 13.2.

Главные максимумы этой функции ($H_{\max} = N^2$) реализуются при

$$\frac{kpd}{2} = m\pi, \quad \text{или} \quad d(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = m\lambda, \quad (13.11)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — порядок дифракции.

Условие (13.11) означает, что разность хода $A_1B_1 - A_2B_2$ между парой лучей, разнесенных на расстояние d в плоскости решетки, равна целому числу длин волн (рис. 13.3).

В этом случае волны, дифрагировавшие от разных штрихов, складываются в фазе, и суммарное возмущение возрастает в N раз, а интенсивность — в N^2 раз.

Минимумы образуются при

$$\frac{kpdN}{2} = n\pi, \quad \text{или} \quad Nd(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = n\lambda, \quad (13.12)$$

где $n = \pm 1, \pm 2, \dots \pm (N-1), \pm (N+1), \pm (N+2), \dots$

Между двумя соседними максимумами находятся $(N - 1)$ минимумов. Чем больше число периодов, тем больше минимумов, и тем уже и выше главные максимумы.

Условие (13.12) означает, что разность хода между лучами, разнесенными на расстояние Nd , равна целому числу длин волн, за исключением $n = \pm N, \pm 2N, \dots$, когда появляются главные максимумы. Интерферирующие волны от цепочки источников в направлениях, определяемых из (13.12), гасят друг друга.

Спектральные характеристики решеток. Поскольку главные максимумы узкие, при небольшом изменении длины волны можно зафиксировать их смещение. Поэтому решетки широко используются для спектрального анализа. Рассмотрим важнейшие спектральные характеристики решеток.

Аппаратная функция. Как отмечалось ранее, аппаратная функция характеризует отклик прибора на монохроматическое возмущение. При спектральном анализе каждой длине волны, в соответствии с (13.11), приписывается угловая (или линейная) координата.

Пусть для спектрального анализа используется m -й порядок дифракции. При освещении монохроматическим светом с длиной волны λ_0 на экране, где фиксируется дифракционная картина, будет «размазанная» полоса, ширина которой пропорциональна угловой ширине m -го максимума функции H . Положение середины этой полосы определяется условием

$$p_m d = d(\sin \varphi_m - \sin \varphi_0) = m\lambda_0. \quad (13.13)$$

Вблизи координаты $k p_m d / 2$ функцию H можно представить в виде

$$H_m = N^2 \left[\frac{\sin \frac{Nk_0(p - p_m)d}{2}}{\frac{Nk_0(p - p_m)d}{2}} \frac{\frac{k_0(p - p_m)d}{2}}{\sin \frac{k_0(p - p_m)d}{2}} \right]^2 \approx N^2 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{Nk_0(p - p_m)d}{2} \right], \quad (13.14)$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda_0$; $\operatorname{sinc} \left[\frac{k_0(p - p_m)d}{2} \right] \approx 1$.

Используя (13.11) и (13.13), можно записать

$$H_m = N^2 \operatorname{sinc}^2 \left[\pi m N \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \right]. \quad (13.15)$$

Введем дифракционную аппаратную функцию

$$g_A(\lambda - \lambda_0) = \frac{1}{\Delta\lambda_A} \operatorname{sinc}^2 \left(\pi \frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_A} \right). \quad (13.16)$$

Здесь

$$\Delta\lambda_A = \frac{\lambda_0}{mN} \quad (13.17)$$

— ширина аппаратной функции. Тогда

$$H_m = N^2 \Delta\lambda_A g_A(\lambda - \lambda_0). \quad (13.18)$$

Разрешающая способность. Если спектр анализируемого света состоит из двух спектральных линий одинаковой интенсивности, но с разными длинами волн λ_{01} и λ_{02} , то

$$H_m = N^2 \Delta\lambda_A [g_A(\lambda - \lambda_{01}) + g_A(\lambda - \lambda_{02})]. \quad (13.19)$$

При $\lambda_{02} - \lambda_{01} = \Delta\lambda_A$ максимум функции $g_A(\lambda - \lambda_{02})$ совпадает с первым минимумом функции $g_A(\lambda - \lambda_{01})$, как это показано на рис. 13.4.

В этом случае «проседание» функции H_m в середине достигает 20 %. Наличие двух максимумов при таком контрасте вполне уверенно фиксируется как визуально, так и с использованием фотодетекторов. На этом основан *критерий Рэлея*, согласно которому минимальная разность длин волн, которую можно измерить с помощью решетки, равна

$$\Delta\lambda_{\min} = \Delta\lambda_A = \frac{\lambda_0}{mN}. \quad (13.20)$$

Если $\lambda_{02} - \lambda_{01} \geq \Delta\lambda_{\min}$, то решетка разделяет линии. В соответствии с определением разрешающая способность (см. также (8.40))

$$R = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_{\min}} = mN. \quad (13.21)$$

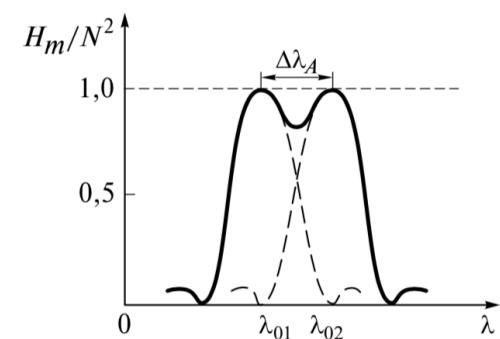


Рис. 13.4

Как и у интерферометра Фабри—Перо (см. (10.26)), разрешающая способность равна произведению порядка m на число интерфирирующих лучей (число периодов).

Нужно отметить условность критерия Рэлея, поскольку в современном эксперименте возможно разрешение значительно более близких спектральных линий, когда провал функции H_m менее 5 %.

Этот критерий можно сформулировать в общем виде, удобном для оценки разрешающей способности различных спектральных приборов. Пусть в направлении, задаваемом углом φ , для длины волны λ_1 формируется дифракционный максимум m -го порядка:

$$Nd(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = Nm\lambda_1, \quad (13.22)$$

а для длины волны λ_2 ближайший минимум:

$$Nd(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = Nm\lambda_2 + \lambda_2. \quad (13.23)$$

Полагая $\Delta\lambda_{\min} = \lambda_2 - \lambda_1$, $\lambda_2 \approx \lambda_0$, получаем для разрешающей силы выражение (13.21).

Таким образом, критерий Рэлея можно сформулировать следующим образом: *изменение разности хода между крайними лучами дифрагированной волны при изменении длины волны на величину $\Delta\lambda_{\min}$ должно быть равно целой длине волны λ_0 .*

Если падающий свет характеризуется некоторой спектральной плотностью $S(\lambda) = I_0 g(\lambda)$ ($g(\lambda)$ — контур спектральной линии), то вместо (13.19) имеем

$$H_m = N^2 \Delta\lambda_A \int g_A(\lambda - \lambda_0) g(\lambda_0) d\lambda_0 = N^2 \Delta\lambda_A g'(\lambda), \quad (13.24)$$

где

$$g'(\lambda) = \int g_A(\lambda - \lambda_0) g(\lambda_0) d\lambda_0 \quad (13.25)$$

— искаженный контур спектральной линии (см. также (8.42)). Измеряя $g'(\lambda)$, можно восстановить истинный контур $g(\lambda)$.

Угловая и линейная дисперсия. Угловая дисперсия D_ϕ характеризуется изменением углового положения дифракционного максимума при изменении длины волны. Она получается из (13.11):

$$D_\phi = \frac{\delta\phi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \phi}. \quad (13.26)$$

В спектральных приборах с пространственным разложением спектра дифракционная картина регистрируется в фокальной плоскости собирающей линзы (*камерного объектива*), устанавливаемой позади решетки. Каждой длине волны λ ставится в соответствие линейная координата l . Изменение этой координаты при изменении длины волны характеризуется *линейной дисперсией*

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda} = D_\phi f_2, \quad (13.27)$$

где f_2 — фокусное расстояние камерного объектива. Поскольку D_ϕ и D_l зависят от ϕ , зависимость координаты от длины волны $l(\lambda)$ является нелинейной функцией.

Область свободной дисперсии. Дифракционные максимумы, принадлежащие к разным длинам волн, могут перекрываться в некотором m -м порядке. Если спектр излучения занимает диапазон длин волн $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, то условие перекрытия запишется в виде

$$d(\sin \phi - \sin \phi_0) = (m + 1)\lambda_1 = m\lambda_2. \quad (13.28)$$

Здесь $(m+1)$ -й максимум для λ_1 «наезжает» на m -й максимум для λ_2 . Величина

$$\Delta\lambda_{\max} = (\lambda_2 - \lambda_1)_{\max} = \frac{\lambda_1}{m} \approx \frac{\lambda_0}{m} \quad (13.29)$$

называется *областью свободной дисперсии*. Здесь λ_0 — средняя длина волны. С этой величиной мы уже встречались при изучении интерферометра Фабри — Перо. На практике максимумы мешающих порядков устраняются либо предварительным сужением ширины спектра (например, светофильтром), либо применением фотодетекторов, нечувствительных к ненужной области спектра.

Амплитудные дифракционные решетки. Первые решетки, изготовленные немецким физиком Й. Фраунгофером во второй половине XIX в., были выполнены из очень тонкой проволоки, навитой на два параллельных винта. Позднее ученым с помощью делительной машины прочерчивал штрихи на золотой пленке, нанесенной на стеклянную пластинку. При прохождении света эти решетки модулировали амплитуду волны. Если d_1 — ширина прозрачного штриха (щели), то в пределах штриха $t(x) = 1$ и

$$U_1(P) = \frac{i}{\lambda} U_0 L_2 \frac{e^{-ikb}}{b} \int_0^{d_1} 1 \cdot e^{ikpx} dx = \frac{i}{\lambda} U_0 L_2 \frac{e^{-ikb}}{b} d_1 e^{\frac{ikpd_1}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{kpd_1}{2}\right). \quad (13.30)$$

Тогда

$$I_1(P) = \frac{I_0(L_2 d_1)^2}{\lambda^2 b^2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kpd_1}{2}\right) = I(0) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kpd_1}{2}\right). \quad (13.31)$$

С учетом (13.31) на рис. 13.5 показано распределение интенсивности (13.8) для решетки с шириной штриха $d_1 = d/5$ и числом штрихов $N = 10$.

В дифракционной картине появились *главные минимумы*, определяемые из условия

$$\frac{kpd_1}{2} = q\pi, \text{ или } d_1(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = q\lambda, \quad (13.32)$$

где $q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

В этих направлениях разность хода между крайними лучами в пределах одной щели равна целому числу длин волн, поэтому все волны, идущие от одной щели, гасят друг друга.

Наиболее яркие дифракционные максимумы соответствуют низшим порядкам. Это позволяет наблюдать дифракционную картину даже от источника белого света. На рис. 13.1 цв. вкл. показана дифракционная картина от источника белого света. В центре расположена белая (ахроматическая) полоса, поскольку положение нулевого максимума для всех длин волн одинаковое.

Фазовые решетки. Пользуясь алмазным резцом, Фраунгофер наносил параллельные штрихи и на поверхность стекла. При прохождении света такая решетка уже модулировала преимущественно фазу волны.

Значительных успехов в изготовлении решеток достиг американский физик Г. Роуланд. С помощью гравировальной машины он изготовил решетку шири-

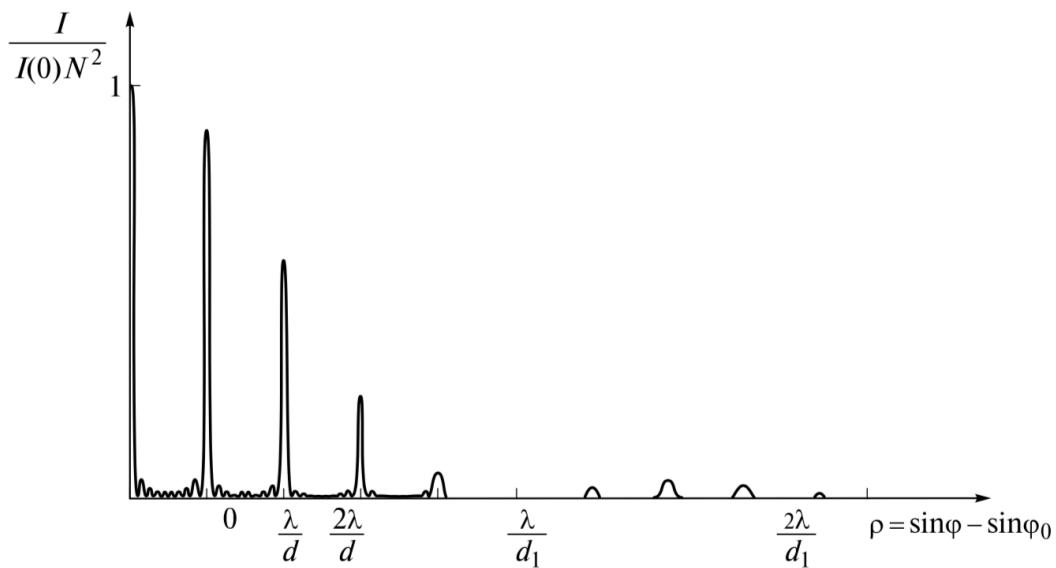


Рис. 13.5

ной $L_2 = 15$ см, на которой прорезал штрихи длиной $L_1 = 10$ см с периодичностью $1/d = 800$ штрих/мм. В 1882 г. он изобрел вогнутую дифракционную решетку, что позволило отказаться от двух линз в спектральных приборах (см. далее).

Если первые решетки гравировались на стекле или отполированном металле, то позднее появились решетки со штрихами, нанесенными на слой напыленного алюминия. Современные отражательные решетки имеют штрихи определенного профиля, позволяющего направить большую часть света в один или два порядка. На рис. 13.6 показан профиль решетки, при отражении от которой максимальное значение $I_1(P)$ соответствует направлению зеркального отражения $\phi = \phi_0 + 2\alpha$, для которого порядок интерференции $m > 1$.

На рис. 13.2 цв. вкл. представлена фотография дифракции луча аргонового лазера. Луч падает слева направо на поверхность наклоненного CD-диска, представляющего собой по сути отражательную фазовую дифракционную решетку с расстоянием между дорожками в несколько длин световой волны. При дифракции формируется ряд световых пучков, распространяющихся в направлениях главных дифракционных максимумов. При увеличении порядка дифракции (против часовой стрелки) возрастает угол между спектральными компонентами (соответствующими разным продольным модам) лазерного излучения.

Для видимой части спектра нарезают алюминиевые покрытия на полированной стеклянной поверхности с периодичностью 600 или 1200 штрих/мм. Для УФ-диапазона используют дюралюминий, медь, нержавеющую сталь и др. Для ИК-диапазона, где длина волны большая, $1/d = 1 - 10$ штрих/мм. Решетки, работающие в один-два порядка, называются *эшелеттами*.

Разрешающая сила решетки достигает величины $R \sim 10^5$. Еще большую силу имеют *эшели*. Эшели подобны изображенной на рис. 13.6 решетке, однако свет падает под большими углами ϕ_0 нормально к узкой ступеньке. Этим достигаются высокие порядки дифракции ($m \sim 10^3$). Эшель с длиной $L_2 = 25$ см и $d = 0,25$ мм имеет $N = 10^3$ штрихов и $R = 10^6$. Эшели используются в различных диапазонах для исследования сверхтонкой структуры спектров, где требуется высокая разрешающая способность.

Любопытно отметить, что процесс изготовления решеток занимает много времени. Например, для типичной решетки с $L_1 = 10$ см, $L_2 = 15$ см при $1/d = 10^3$ штрих/мм, резец должен нарезать $N = 1,5 \cdot 10^5$ штрихов, проходя при этом путь $L_1 N = 15$ км! Если время нарезания одного штриха принять равным 5 с, то процедура займет 9 сут!

Обычно при нарезке штрихи слегка различаются по профилю и не строго параллельны. Это приводит к затуманиванию (снижению контраста) картины. Если же имеется систематическая ошибка в периоде следования штрихов, то в картине появляются дополнительные линии, называемые *духами*. Эти линии иногда трудно отличить от настоящих спектральных линий.

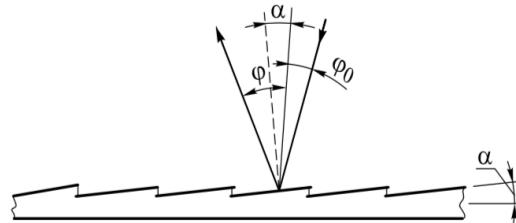


Рис. 13.6

Пусть исследуемый объект представляет собой идеальный кристаллический образец, характеризуемый кристаллической решёткой, узлы которой описываются трансцендентными векторами вида: $\vec{T} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}$, где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - базисные векторы; u, v, w - произвольные целые числа. Для упрощения расчётов обсуждаемый образец кристалла рассматривается в форме параллелепипеда. Угловые ряды, направлениями вдоль базисных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ содержит N_1, N_2, N_3 узлов соответственно. Следует, рассмотриваемый кристаллический образец содержит $N = N_1 N_2 N_3$ узлов.

$$L = \frac{\sin^2(N_1 \Psi_1)}{\sin^2 \Psi_1} \cdot \frac{\sin^2(N_2 \Psi_2)}{\sin^2 \Psi_2} \cdot \frac{\sin^2(N_3 \Psi_3)}{\sin^2 \Psi_3} - \frac{\text{интерференционное}}{\text{фундамент.}} \quad (71)$$

$$\text{здесь } \Psi_1 = \frac{\pi}{\lambda} (\vec{a} \vec{b} \vec{a}); \Psi_2 = \frac{\pi}{\lambda} (\vec{a} \vec{b} \vec{b}); \Psi_3 = \frac{\pi}{\lambda} (\vec{a} \vec{b} \vec{c}).$$

$$S \Psi_m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m^2 \lambda^2}{d^2}}} \cdot \frac{2\lambda}{Nd} - \text{умеральная ширина главных максимумов.}$$

Вопрос 23

Спектральные приборы с пространственным разложением спектра. Характеристики спектральных приборов – аппаратная функция, область свободной дисперсии, предел разрешения, разрешающая способность. Призма. Дифракционная решетка.

Спектральный прибор — оптический прибор для пространственного разложения светового поля на монохроматические составляющие с помощью угловой дисперсии.

Аппаратная функция I(P) - «отклик» прибора на монохроматическое излучение — регистрируемая интенсивность светового поля в зависимости от обобщенной координаты точки наблюдения P.

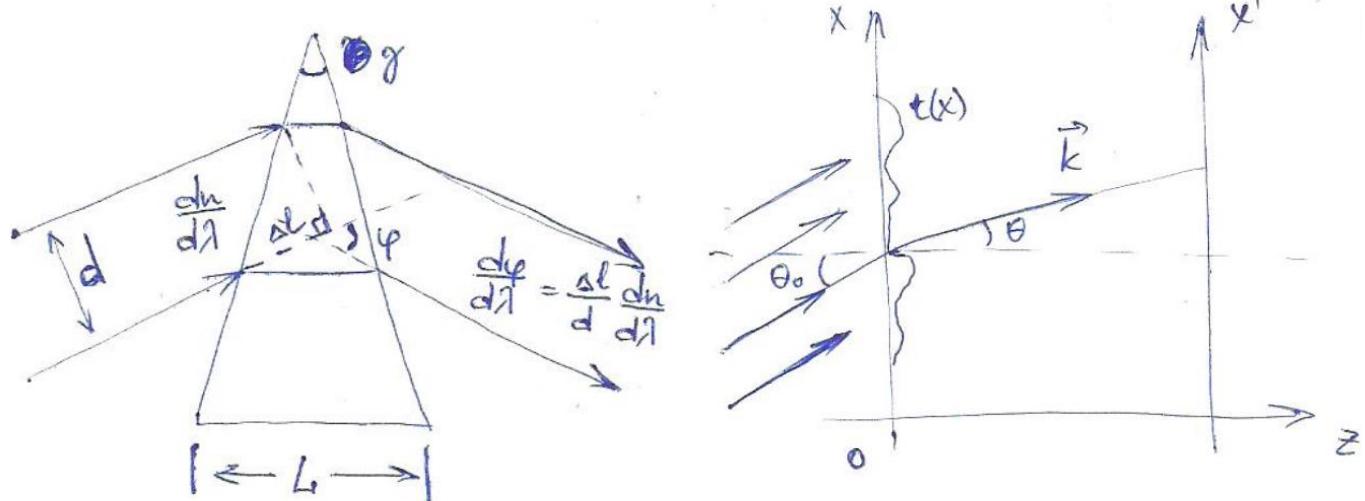
Область (свободной) дисперсии, дисперсионная область $\Delta\lambda$ — максимальный интервал длин волн, при котором возможна работа прибора (получение разрешённой дифракционной или интерференционной картины). Максимальный интервал длин волн, исследуемой спектральным прибором.

Пределом разрешения $\delta\lambda$ — минимальная разность длин волн двух спектральных линий, которые разрешает спектральный прибор.

Разрешающая способность (сила) — $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ отношение характерной длины λ исследуемого излучения к пределу разрешения $\delta\lambda$.

Угловая дисперсия $D_\vartheta = \frac{d\vartheta}{d\lambda}$ — скорость изменения угловой координаты ϑ максимума регистрируемой интенсивности с изменением длины волны.

Призма.



Аппаратная функция:

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{d^2}{\lambda b} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{k \sin(\vartheta - \varphi)}{2} d \right)$$

Вопрос 23

Область дисперсии:

$$\Delta\lambda \sim \infty$$

Угловая дисперсия:

$$D_\vartheta = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\Delta l}{d} \frac{dn}{d\lambda}$$

Предел разрешения: $\delta\lambda = \frac{\delta\vartheta}{|D_\vartheta|} = \frac{\lambda}{\Delta l \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|}$

Разрешающая способность: $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \Delta l \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| R_{max} = L \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$

Дифракционная решетка.

Аппаратная функция:

$$I(\vartheta) = I_1 \frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2 \delta}, \text{ где}$$

$$\delta = k \frac{\sin\vartheta - \sin\vartheta_0}{2} d = k \frac{\Delta(\vartheta)}{2}$$

Порядок дифракции:

$$m = \frac{d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)}{\lambda}$$

Область дисперсии:

$$\Delta\lambda = \frac{1}{m}$$

Предел разрешения: $\delta\lambda = \frac{1}{Nm}$ Угловая дисперсия: $D_\vartheta = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m}{dcos\vartheta}$

Разрешающая способность: $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$

$$R_{max} = Nm_{max} = N \frac{d}{l} = \frac{L}{l}$$

Вопрос 24

Спектральные приборы с пространственным разложением спектра. Характеристики спектральных приборов - аппаратная функция, область свободной дисперсии, предел разрешения, разрешающая способность. Интерферометр Фабри-Перо. Интерферометр Майкельсона.

Спектральный прибор – оптический прибор для пространственного разложения светового поля на монохроматические составляющие (в частотный спектр) с помощью угловой дисперсии.

Аппаратная функция $I(P)$ – "отклик" прибора на монохроматическое излучение – регистрируемая интенсивность светового поля в зависимости от обобщенной координаты точки наблюдения P .

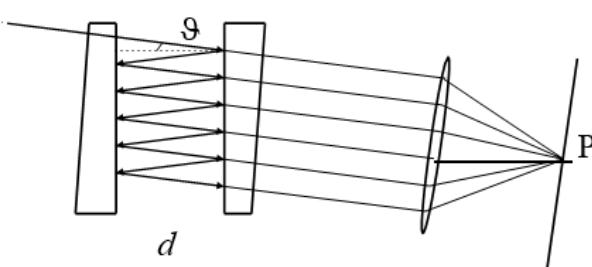
Область свободной дисперсии, дисперсионная область $\Delta\lambda$ – максимальный интервал длин волн, при котором возможна работа прибора (получение разрешенной дифракционной или интерференционной картины). Максимальный интервал длин волн, исследуемый спектральным прибором.

Предел разрешения $\delta\lambda$ – минимальная разность длин волн двух спектральных линий, которые разрешает спектральный прибор.

Разрешающая способность (сила) \mathcal{R} = $\frac{\lambda}{\delta\lambda}$ – отношение характерной длины волны λ исследуемого излучения к пределу разрешения $\delta\lambda$.

Угловая дисперсия $D\vartheta$ = $\frac{d\vartheta}{d\lambda}$ – скорость изменения угловой координаты ϑ максимума регистрируемой интенсивности с изменением длины волны.

Интерферометр Фабри-Перо



Это спектральный многолучевой интерференционный прибор с высокой разрешающей способностью. Он представляет собой совокупность двух плоских зеркальных поверхностей, размещенных строго параллельно друг другу.

ϑ -угол к оси резонатора под которым падает волна

Аппаратная функция-формула Эйри:

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \left(\frac{\Phi(\vartheta)}{2} \right)}$$

Где R , T - коэффициенты отражения и пропускания по интенсивности

(энергетические коэф.). $\Phi(\vartheta)$ -дополнительный набег фазы, $\Phi(\vartheta) = \frac{4\pi d}{\lambda} \cos\vartheta$.

Условие максимумов- $\Phi(\vartheta) = m2\pi \rightarrow m = \frac{2dcos\vartheta}{\lambda}$ (m -порядок интерференции).

Дисперсионная область- $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{2d \cos\vartheta}$. Резкость $\delta = 2 \frac{1-R}{\sqrt{R}}$.

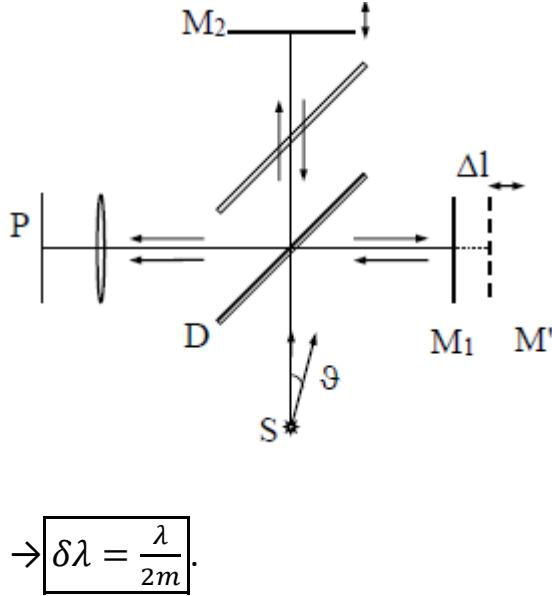
Вопрос 24

Предел разрешения- $\frac{d\Phi}{d\lambda} \delta\lambda = \delta \rightarrow \boxed{\delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \cdot \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}}.$

Разрешающая способность- $\boxed{\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = m \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}}.$

Угловая дисперсия- $\boxed{D = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = -\frac{m}{2dsin\vartheta} = -\frac{ctg\vartheta}{\lambda}}.$

Интерферометр Майкельсона:



$$\rightarrow \boxed{\delta\lambda = \frac{\lambda}{2m}}.$$

Аппаратная функция- уравнение двухволновой интерференции:

$$\boxed{I(\vartheta) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta(\vartheta))}$$

$$\Delta(\vartheta) = 2\Delta l \cos\vartheta$$

Условие максимумов- $2\Delta l \cos\vartheta = m\lambda \rightarrow m = \frac{2\Delta l \cos\vartheta}{\lambda}$ (порядок интерференции)

Область свободной дисперсии-

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda \rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}}$$

Предел разрешения- $m(\lambda + \delta\lambda) = (m + \frac{1}{2})\lambda$

Разрешающая способность- $\boxed{\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = 2m}.$

Угловая дисперсия- $\boxed{D = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = -\frac{m}{2\Delta l \sin\vartheta} = -\frac{1}{\lambda \operatorname{tg}\vartheta}}$

Интерферометр Майкельсона имеет две конфигурации:

1) Зеркала интерферометра установлены строго перпендикулярно друг другу:

Интерференционная картина имеет вид концентрических колец (полос равного наклона) при небольшом различии в плоскостности зеркал в плечах интерферометра.

2) Зеркала интерферометра установлены под углом друг к другу:

Картина имеет вид полос равной толщины, ориентация которых зависит от величины отклонения угла падения пучков лучей на зеркала.

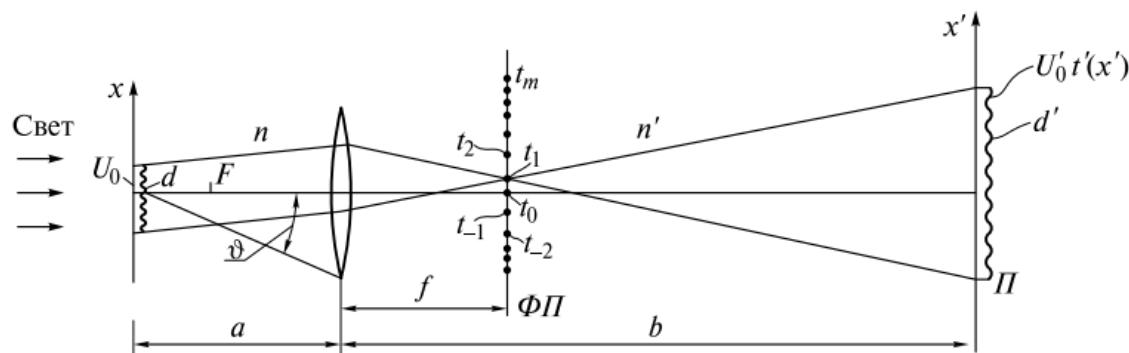
Основы дифракционной теории формирования изображений Аббе.

Пространственная фильтрация изображения. Опыт Аббе-Портера. Специальные методы наблюдения фазовых объектов. Метод темного поля. Метод фазового контраста. Теория Аббе.

Теория Аббе:

Пусть наблюдаемым объектом будет дифракционная решетка, освещаемая плоской волной. Если амплитуда падающей волны $U_0 = \text{const}$, а функция пропускания решетки $t(x)$, то сразу после решетки амплитуда $U_\Sigma(x) = U_0 t(x)$. В плоскости изображений Π формируется возмущение $U' t'(x')$, $x' = \frac{xb}{a}$. При отсутствии искажений функция $t'(x')$ в увеличенном масштабе повторяет $t(x)$.

Первичное изображение – цепочка максимумов в фокальной плоскости ФП



Вторичное изображение – изображение, описываемое возмущением $U' t'(x')$

Элемент фокальной плоскости, где расположен максимум, может рассматриваться как точечный источник. Амплитуда в максимумах пропорциональна Фурье-Амплитуде функции $t(x)$:

$$t_m = t(k_{xm}) = \left(\frac{2\pi}{d}m\right) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad d - \text{период решетки}$$

Интерференция волн приводит к образованию увеличенного изображения решетки в плоскости Π . Чтобы $t'(x')$ была подобна $t(x)$ необходимо обеспечить интерференцию волн от всех источников. Однако из-за предельного угла ϑ максимумы высших порядков будут “отрезаться”. Чем меньше период решетки, тем больше углы дифракции и тем больше максимумов отрезается. Если d настолько мало, что остается только один максимум t_0 , то $U' t'(x') = \text{const}$ – информация о переодичности $t(x)$ будет потеряна. При сохранении кроме t_0 , t_1 и t_{-1} , в плоскости изображения получится схема интерференционных полос Юнга с периодом $d' = \frac{db}{a}$

Вопрос 25

2

Минимальное значение d при котором формируется изображение в виде полос Юнга:

$$d = \frac{\lambda_0}{n \sin \theta}$$

Теория Аббе имеет многочисленные применения. Можно искусственно манипулировать дифракционными максимумами в фокальной плоскости (осуществлять пространственную фильтрацию углового спектра) для изменения изображения. Это актуально для фазовых объектов (слабо модулирующих амплитуду падающей волны), такой объект практически не различим в микроскоп. Для таких объектов применяют специальные методы наблюдения.

Метод фазового контраста.

Функция пропускания $t(x) = 1 - i\Phi(x) = \sqrt{1 + \Phi^2(x)}e^{-i\Phi(x)}$

$\Phi(x) = \Phi(x + d)$ – вещественная функция пропускания. Если $|\Phi| \ll 1$, то амплитудная модуляция невелика по сравнению с фазовой $|t| = \sqrt{1 + \Phi^2}$. Это означает. Что в плоскости изображения будет лишь однородный светлый фон.

Периодическую функцию $t(x)$ разложим по пространственным частотам $k_{xm} = \frac{2}{d}m$, кратным основной частоте, в ряд Фурье:

$t(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_m \exp(i \frac{2\pi m}{d} x)$ очевидно. Что $t_0=1$, $t_{-m}=t_m^*$, Поскольку Φ - вещественная функция. $*$ - комплексное сопряжение.

Если в фокальной плоскости поместить тонкую прозрачную пластинку пластинку, вызывающую у источника t_0 отставание или опережение фазы на $\pi/2$, то первичное изображение будет соответствовать модифицированной (измененной) функции пропускания.

$$t_{mod}(x) = e^{\pm i\pi/2} - i\Phi(x) = \pm i + i\Phi(x)$$

$$|t_{mod}(x)|^2 = (1 \pm \Phi(x))^2 = 1 \pm 2\Phi(x)$$

$I'(x') \sim |t'_{mod}(x')|^2 \sim |t_{mod}(x)|^2 = 1 \pm 2\Phi(x)$ – интенсивность в плоскости изображения

Изменение фазы в плоскости наблюдаемого объекта превращается в изменение интенсивности в плоскости изображения. При отставании фазы в нулевом порядке (знак +) области с большей оптической толщиной кажутся ярче на фоне средней освещенности, а при опережении – темнее.

Метод темного поля. Если поместить в фокальной плоскости непрозрачную маленькую пластинку, закрывающую t_0 , то

$$t_{mod}(x) = -i\Phi(x)$$

Вопрос 25

3

$$I'(x') \sim |t_{mod}(x)|^2 = \Phi^2(x)$$

Изменение интенсивности будут такими же малыми, однако более заметными, поскольку средняя освещенность отсутствует.

Роль дифракции в приборах, формирующих изображение. Предел разрешения и разрешающая способность оптического прибора: телескоп, микроскоп.

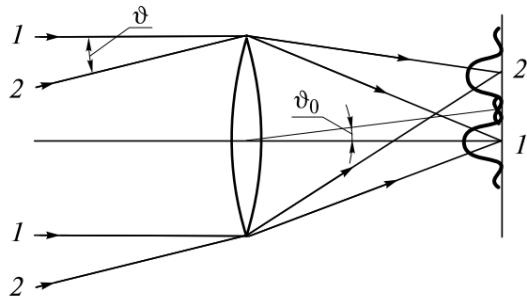
Оптические приборы, формирующие изображения. Основными элементами в таких приборах являются линзы (собирающие и рассеивающие) и зеркала (вогнутые и выпуклые). При падении плоской волны на линзу в ее фокальной плоскости формируется дифракционная картина Эйри.

$$\underline{\text{Угловой размер диска Эйри}} \quad \vartheta_0 = \frac{0,61\lambda}{r_0}$$

Аналогичная картина будет и в фокальной плоскости сферического вогнутого зеркала радиуса r_0 . Чем больше радиус объектива, тем выше разрешающая сила. При увеличении радиуса диафрагмы постепенно улучшается разрешающая сила.

Дифракция позволяет сфокусировать параллельный пучок лишь в пятно конечных размеров, при этом минимальный размер пятна практически равен длине волны. Это обстоятельство накладывает ограничение на предельные возможности оптических приборов.

Телескоп:



Первые телескопы состояли из двух линз: объектива и окуляра. Ход лучей от двух удаленных объектов 1 и 2 через объектив показан на рисунке. В фокальной плоскости объектива формируются две картины Эйри, которые перекрываются.

Для того, чтобы разрешить два объекта необходимо, чтобы угол ϑ удовлетворял условию $\vartheta \geq \vartheta_0 = \frac{0,61\lambda}{r_0}$

Разрешающая способность телескопа - минимальное угловое расстояние между точечными объектами, напр., звездами, которые можно различить в телескоп раздельно.

В настоящее время широкое распространение получили телескопы-рефлекторы. Такой телескоп имеет первичное зеркало Z_1 и вторичное Z_2 . Пучок света последовательно отражаясь от этих зеркал, с помощью вспомогательного зеркала Z_3 попадает на фотодетектор.

Для увеличения диаметра первичное зеркало может состоять из множества сегментов. Эти сегменты могут слегка перемещаться, чтобы компенсировать искажения фазового фронта пучка света. Такое зеркало называется адаптивным

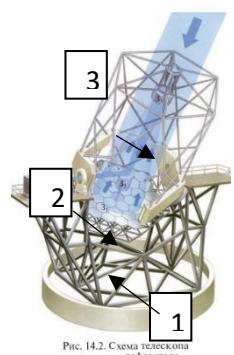


Рис. 14.2. Схема телескопа рефлектора.

Вопрос 26

2

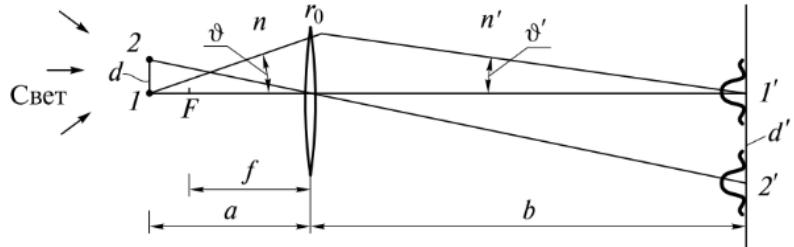
Микроскоп:

Микроскоп состоит из объектива и окуляра, основное увеличение достигается за счет объектива. Из-за дифракции света на объективе существует ограничение снизу на минимальный размер объектов, которые можно наблюдать в микроскоп. Этот размер зависит от условий освещения.

$$\text{Когерентное освещение } d = \frac{0,77\lambda}{nsin\vartheta}$$

$$\text{Некогерентное излучение } d = \frac{0,61\lambda}{nsin\vartheta}$$

$nsin\vartheta$ – числовая апертура.



Когерентное освещение не повышает пространственное разрешение микроскопа. Уменьшения d в несколько раз можно достичь лишь увеличением числовой апертуры, заполняя пространство слева от объектива иммерсионной жидкостью с большим показателем преломления.

Вопрос 27

1

Запись и восстановление светового поля. Голография. Схемы голографической записи и восстановления. Двух- и трехмерные голограммы.

Основная идея голографии- фотографируется не само объектное световое поле, идущее от светящегося объекта, а картина интерференции этого поля с когерентной опорной волной.

Голограмма - картина интерференции объектной и опорной волн, записанная на фотопластинку.

Схема записи светового поля

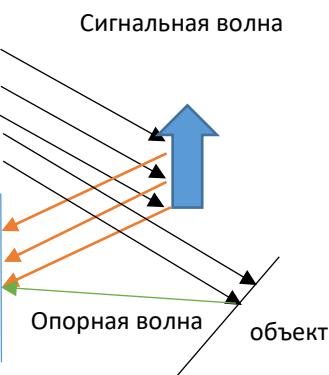
Амплитуда светового поля в плоскости фотопластиинки

$$A = A_{\text{об}} + A_{\text{оп}}$$

Распределение интенсивности

$$I(x, y) = \frac{1}{2} |A(x, y)|^2 = \frac{1}{2} |A_{\text{об}} + A_{\text{оп}}|^2$$

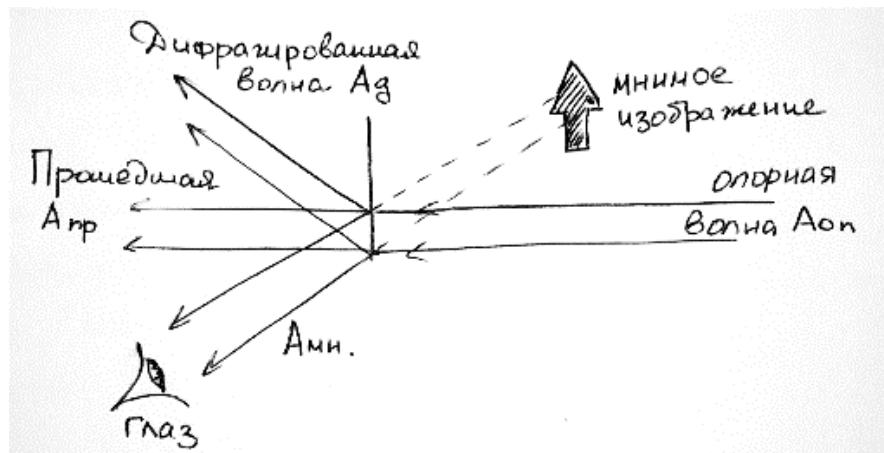
$$I = I_{\text{об}} + I_{\text{оп}} + \frac{1}{2} A_{\text{об}} A_{\text{оп}}^* + \frac{1}{2} A_{\text{об}}^* A_{\text{оп}}$$



Распределение интенсивности фиксируется на фотопластиинке

Для восстановления светового поля голограмму освещают опорной волной.

В результате дифракции опорной волны на голограмме возникает несколько световых волн, одна из которых повторяет поле предметной волны.



В зависимости от геометрической конфигурации светочувствительной среды. В которой зарегистрирована интерференционная картина, различают двухмерные и трехмерные голограммы.

Двумерная голограмма- относится к тому случаю, когда толщина фотоматериала h много меньше пространственного периода регистрируемой интерференционной картины от суперпозиции объектной и опорной волн. Отображающие свойства двумерной голограммы ограничены. В частности, она неоднозначно восстанавливает

волновое поле излучения объекта: кроме истинной объектной волны $A_{об}$ и соответствующего ей истинного изображения объекта в этом случае восстанавливается сопряженная дифрагированная волна A_d и соответствующее ей сопряженное изображение. Источник S с помощью которого восстанавливается изображение должен быть строго монохроматичным , поскольку двумерная голограмма восстановит все, соответствующие разным λ изображения , и, как следствие , результирующее изображение будет сильно размазано поскольку падающая волна не будет обладать достаточной степенью временной когерентности.

Трехмерная голограмма- голограмма, у которой толщина h много больше пространственного периода регистрируемой интерференционной картины от суперпозиции объектной и опорной волн. Она однозначно восстанавливает волновое поле объекта, сопряженная волна отсутствует. Особенностью трехмерной голограммы является также способность воспроизводить не только фазу и амплитуду записанного на ней излучения, но и его спектральный состав. Если такую голограмму восстановить источником излучения со сплошным спектром (например лампой накаливания), то она сама «выберет» из сплошного спектра те составляющие, участвовавшие в записи. Свойство спектральной селективности трехмерной голограммы обусловленно интерференцией волн. Отраженных трехмерной последовательностью пучностей, зарегистрированной на голограмме стоячей волны.Эти волны складываются синфазно и взаимно усиливают друг друга только для одной монохроматической составляющей той, которая экспонировалась голограмма при записи. Так как любая светочувствительная среда имеет конечную толщину, то все голограммы фактически трехмерны.

Дисперсия и поглощение света. Поляризуемость молекулы и вектор поляризации. Формула Лоренц-Лорентца. Классическая электронная теория дисперсии. Плазменная частота. Комплексный показатель преломления. Закон Бугера. Зависимости показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты.

1.1 Материальные уравнения среды

В оптическом диапазоне $\mu = 1$, так как характерный размер структуры вещества на несколько порядков меньше длины волны λ . Материальное уравнение для магнитного поля: $B = \mu_0 H$. Если напряженность поля E меньше напряженности E_a характерного внутриатомного поля ($E < E_a = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^2} \approx 10^{11} \text{ В/м}$), то материальные уравнения приобретают вид:

$$D_i(t, r) = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^\infty \epsilon_{ij}(t', r') E_j(t - t', r - r') dr'; \quad (1)$$

$$J_i(t, r) = \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^\infty \sigma_{ij}(t', r') E_j(t - t', r - r') dr', \quad (2)$$

где ϵ_{ij} , σ_{ij} - комплексные компоненты тензора диэлектрической проницаемости и электрической проводимости.

1.2 Частотная и пространственная дисперсия

Рассмотрим распространение в среде плоской монохроматической волны напряженностью

$$E(r, t) = E_0 \exp[i(\omega t - kr)]. \quad (3)$$

Запишем уравнение напряженности в материальные уравнения (1) и (2)

$$D_i(t, r) = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij}(\omega, k) E_{0j} \exp[i(\omega t - kr)], \quad (4)$$

$$J_i(t, r) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\omega, k) E_{0j} \exp[i(\omega t - kr)], \quad (5)$$

где

$$\epsilon_{ij} = \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^\infty \epsilon_{ij}(t', r') \exp[-i(\omega t - kr)] dr', \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} = \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^\infty \sigma_{ij}(t', r') \exp[-i(\omega t - kr)] dr' \quad (7)$$

-фурье-амплитуды компонент тензоров σ_{ij} , ϵ_{ij} , которые зависят от частоты ω и волнового вектора k . Эти зависимости отражают наличие частотной и пространственной дисперсий.

Частотная дисперсия проявляется, когда частота волны близка к собственным частотам колебаний атомных осцилляторов.

Пространственная дисперсия наблюдается длина волны λ сопоставима с размером пространственной структуры (размер атома). Это видно из $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{d}$, где d

- размер пространственной структуры.

1.3 Распространение монохроматической волны в изотропной среде с частотной дисперсией

Пусть частота волны - ω , электрическая проницаемость $\epsilon = \epsilon(\omega)$, проводимость $\sigma = \sigma(\omega)$. Уравнения Максвелла:

$$\text{rot } (H) = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E; \quad (8)$$

$$\text{rot } (E) = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}; \quad (9)$$

$$\text{div } (\epsilon \epsilon_0 E) = \rho; \quad (10)$$

$$\text{div } (\mu_0 H) = 0. \quad (11)$$

В однородной среде электрическая проницаемость и проводимость не зависят от координаты, поэтому плотность свободных зарядов $\rho = 0$, а уравнение (10) превращается в $\text{div } (E) = 0$. Применим к уравнению (9) операцию **rot**.

$$\text{rot } (\text{rot } (E)) = \text{grad } (\text{div } (E)) - \Delta(E) = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}; \quad (12)$$

$$\Rightarrow \text{div } (E) = 0 \Rightarrow \quad (13)$$

$$\Delta(E) = \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad (14)$$

Воспользуемся уравнением (8), подставив его в (14) (предварительно продифференцировав по времени t):

$$\Delta E - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

где $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$. Данное уравнение отличается от волнового ($\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \Delta E$) наличием электрической проницаемости и дополнительного члена, вызванного наличием проводимости. Решение:

$$E(z, t) = E_0 \exp[i(\omega t - kz)]. \quad (16)$$

Это плоская волна, распространяющаяся вдоль оси OZ в положительном направлении. Подставляя решение (16) в полученное волновое уравнение (15) найдем связь для k и ω :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right). \quad (17)$$

Это соотношение называется **дисперсионным**. ϵ и σ - величины комплексные. $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$, $\sigma = \sigma' + i\sigma''$. ϵ' , σ' называются активными составляющими диэлектрической проницаемости и проводимости. ϵ'' , σ'' называются реактивными составляющими диэлектрической проницаемости и проводимости. Из-за подобной структуры колебания E и плотности тока J сдвинуты по фазе относительно колебаний H . Подставим эти выражения в уравнение (17):

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[(\varepsilon' + \frac{\sigma''}{\varepsilon_0 \omega}) - i \left(\frac{\sigma'}{\varepsilon_0 \omega} - \varepsilon'' \right) \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}_k, \quad (18)$$

где $\tilde{\varepsilon}_k$ - это **комплексная эффективная диэлектрическая проницаемость**, корень из которой это комплексный показатель преломления: $n_k = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_k}$, а волновое число записывается в виде:

$$k = \frac{\omega}{c} (n - i\chi). \quad (19)$$

Действительная и мнимая часть комплексного показателя преломления:

$$n^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left[\varepsilon' + \frac{\sigma''}{\varepsilon_0 \omega} \right]^2 + \left[\frac{(\sigma' - \varepsilon'' \varepsilon_0 \omega)^2}{\varepsilon_0 \omega^2} \right]} + \varepsilon' + \frac{\sigma''}{\varepsilon_0 \omega} \right), \quad (20)$$

$$\chi^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left[\varepsilon' + \frac{\sigma''}{\varepsilon_0 \omega} \right]^2 + \left[\frac{(\sigma' - \varepsilon'' \varepsilon_0 \omega)^2}{\varepsilon_0 \omega^2} \right]} - \varepsilon' - \frac{\sigma''}{\varepsilon_0 \omega} \right). \quad (21)$$

Подставим уравнение (19) для волнового числа в решение (16) и сделаем соответствующие преобразования:

$$E(z, t) = E_0 \exp\left(-\frac{\chi \omega}{c} z\right) \exp\left(i\omega(t - \frac{zn}{c})\right). \quad (22)$$

Величина n называется показателем преломления и определяет фазовую скорость: $v = c/n$. Величина χ определяет уменьшение амплитуды и называется показателем поглощения. Из уравнения для амплитуды следует, что интенсивность убывает по закону:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}. \quad (23)$$

Это и есть закон Бугера-Ламберта-Бера. α - коэффициент поглощения.

1.4 Поляризуемость молекулы

Под действием поля молекула приобретает осциллирующий дипольный момент

$$p_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 a_{ij} E_{effj}, \quad (24)$$

где a_{ij} - компонента тензора диэлектрической восприимчивости, или поляризуемости молекулы, являющейся в общем случае анизотропной. Этот тензор может быть комплексным, что обозначает наличие затуханий, а его величину можно оценить, воспользовавшись моделью молекулы в виде проводящего шара радиуса r_0 . Такой шар

Вопрос 28

будет обладать дипольным моментом:

$$p = \epsilon_0 4\pi r_0^3 E, \quad (25)$$

тогда $|a_{ij}| \approx 4\pi r_0^3$.

Ну а теперь выведем формулу Лоренц-Лоренца. Известный факт, что поляризуемость диэлектрика определяется дипольным моментом \mathbf{P} единицы его объема. Это вектор поляризации. N - число молекул в объеме.

$$P_i = \sum_{l=1}^N p_{il} = N \langle p_i \rangle, \quad (26)$$

где $\langle p_i \rangle$ средняя проекция дипольного момента молекулы. Для газа:

$$\langle p_i \rangle = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \langle a_{ij} \rangle E_{effj} = \epsilon_0 \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{3} E_{effi}. \quad (27)$$

Получаем для \mathbf{P} выражение, подставляя (27) в (26):

$$P_i = \epsilon_0 Na E_{effi}, \quad (28)$$

где a - средняя поляризуемость молекулы. Для кристалла вид будет таков:

$$P_i = \epsilon_0 N \sum_{j=1}^3 a_{ij} E_{effj}. \quad (29)$$

Определим макроскопические характеристики среды: поляризуемость ϕ и диэлектрическую проницаемость ϵ . Пользуясь соотношениями:

$$P = \epsilon_0 \phi E; D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 (1 + \phi) E = \epsilon \epsilon_0 E. \quad (30)$$

Тогда получаем $\phi = Na$; $\epsilon - 1 = Na$. Для плотных газов, жидкостей, некоторых кристаллов: $E_{eff} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$, т.е. поле, действующее на молекулу, больше поля E на величину $\frac{P}{3\epsilon_0}$, определяющую напряженность поля соседних поляризованных молекул. Это поле называется полем Лоренца. В уравнение (28) для \mathbf{P} подставим выражение для E_{eff} :

$$P_i = \epsilon_0 Na \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right). \quad (31)$$

Сделал математические преобразование, выкладки которых я опущу, получим формулу Лоренц-Лоренца:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{Na}{3}. \quad (32)$$

1.5 Основы электронной теории дисперсии

Данная теория базируется на рассмотрении воздействия светового поля на оптический электрон в атоме, обладающий осциллирующим дипольным моментом $p(t) = ex(t)$. В электромагнитном поле $E_{eff}(t) = E_0 e^{i\omega t}$ он совершает вынужденные колебания, уравнение которых:

$$m\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + kx = eE_0 e^{i\omega t}, \quad (33)$$

где m, e - масса и заряд электрона; k - коэффициент "упругой силы"; Γ - коэффициент, описывающий силу радиационного трения. Переходим к дипольному моменту:

$$\ddot{p} + 2\delta\dot{p} + \omega_0^2 p = \frac{e^2}{m} E_0 e^{i\omega t}. \quad (34)$$

Решение:

$$p(t) = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega} E_0 e^{i\omega t}. \quad (35)$$

Вспомним уравнение (27) для средней поляризуемости. Получим

$$a(\omega) = \frac{e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}. \quad (36)$$

А формула Ленц-Ленца приобретает вид:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}. \quad (37)$$

1.6 Плазменная частота

Рассмотрим случай разряженного газа. $E_{eff} = E$, а $|\varepsilon| = 1$. Эти данные и разложение комплексного показателя преломления подставим в уравнение (37). Получим два выражения:

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}; \quad (38)$$

$$\chi = \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0} \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}. \quad (39)$$

Данные величины сильно изменяются, когда ω приближается к ω_0 . В этой области частот можно сделать определенные приближения:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = 2\omega_0(\omega_0 - \omega); \quad (40)$$

$$2\delta\omega = 2\delta\omega_0; \quad (41)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 = 4\omega_0^2[(\omega_0 - \omega)^2 + \delta^2]. \quad (42)$$

Величина $\frac{Ne}{m\varepsilon_0}$ имеет размерность $[c^{-1}]$, поэтому введем новое обозначение:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne}{m\varepsilon_0}. \quad (43)$$

Данная величина называется плазменной частотой. Уравнения (38) и (39) примут вид:

$$n = 1 + \frac{\frac{\omega_p^2}{4\omega_0\delta} \frac{\omega_0 - \omega}{\delta}}{\frac{(\omega_0 - \omega)^2}{\delta^2} + 1}; \quad (44)$$

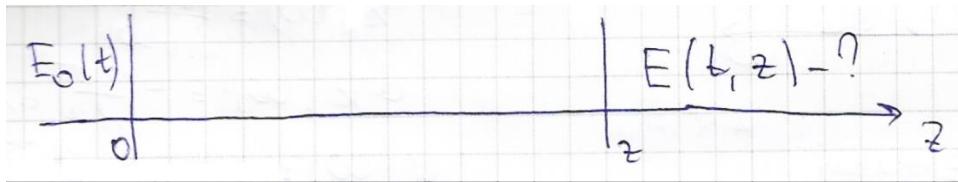
$$\chi = \frac{\frac{\omega_p^2}{4\omega_0\delta}}{\frac{(\omega_0 - \omega)^2}{\delta^2} + 1}. \quad (45)$$

Область частот, где показатель преломления n увеличивается с частотой ω называется **областью нормальной дисперсии**. В этой области показатель поглощения χ мал. Область, где n уменьшается с ω , называется **областью аномальной дисперсии** и показатель поглощения χ сильно возрастает.

Вопрос 29

Распространение светового импульса в диспергирующей среде. Фазовая и групповая скорости. Формула Рэлея. Дисперсионное расплывание волновых пакетов. Дисперсионная длина светового импульса.

Распространение импульса:



Три этапа решения:

1. Фурье-анализ входного импульса $E_0(t)$:

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \text{ где } E_0(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

2. Преобразование спектральных компонент входного импульса $E_0(t)$:

$$E(i\omega, z) = E_0(i\omega) e^{-ik(\omega)z}$$

3. Фурье-синтез импульса на выходе:

$$E(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(i\omega, z) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty + \infty} E_0(t') e^{-ik(\omega)z} e^{i\omega(t-t')} dt' d\omega$$

Типы сред:

1. $k_o' \gg 1/2k_o'' (\omega - \omega_o)$ – диспергирующие среды 1-ого порядка

2. $k_o' \sim 1/4k_o'' (\omega - \omega_o)$ – 2-ого порядка

$$k(\omega) \cong k_o + k_o'(\omega - \omega_o) + 1/2k_o''(\omega - \omega_o)^2$$

Фазовая и групповая скорости. Формула Релея.

Групповая скорость распространения узкополосного импульса с диспергирующей среде 1-ого порядка – скорость движения огибающей; скорость переноса импульса к энергии.

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} u(\omega)$$

$$\frac{d}{d\omega} k(\omega) = \frac{1}{c} (u(\omega) + \omega \frac{du}{d\omega})$$

$$u(\omega) = \frac{c}{u(\omega) + \omega \frac{du}{d\omega}} = \frac{v(\omega)}{1 + \frac{\omega}{u(\omega)} \frac{du}{d\omega}}$$

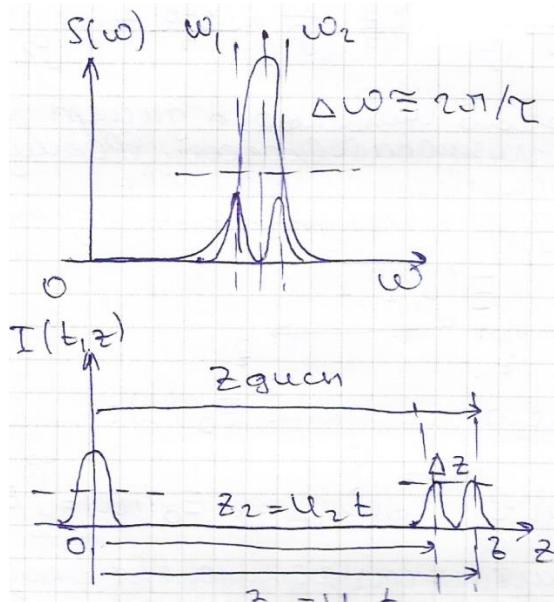
$u(\omega) \leq v(\omega)$
$u(\omega) \leq c$

Вопрос 29

$$\frac{du}{d\omega} > 0 \text{ для прозрачной дисперг. среды.}$$

Дисперсионное расплывание волновых пакетов.

Формула Релея:



$$\omega = k(\omega)v(\omega)$$

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v(\omega) + k(\omega) \frac{dv}{dk}$$

$$k(\omega) = \frac{2\pi}{\lambda(\omega)}$$

$$dk(\omega) = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$$

$$u(\omega) = v(\omega) + \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda^2 dv}{2\pi d\lambda} \right)$$

$$u(\omega) = v(\omega) - \lambda(\omega) \frac{dv}{d\lambda}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{u_2} = \frac{u_1 - u_2}{u_2} t = \frac{u_1 - u_2}{u_2 u_1} z_1 = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) z_1 = (k'_2 - k'_1) z_1 \cong k_0'' \Delta \omega z_1 \cong \frac{2\pi k_0''}{\tau} z_1$$

Из-за такой задержки между пакетами начнет увеличиваться длительность примерно на ту же величину.

Здисп такое, что $\Delta t = \tau$ в начале процесса.
$$Z_{\text{дисп}} = \frac{\tau^2}{2\pi k_0''}$$

Дисперсионная длина светового импульса в среде – расстояние вдоль направления распространения светового импульса в прозрачной диспергирующей среде, на котором его длительность увеличивается вдвое.

Вопрос 30

Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Законы отражения и преломления. Формулы Френеля, поляризация отраженной и прошедшей волн. Угол Брюстера.

Плоская линейно-поляризованный волна: $\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_1 e^{i(w_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})}$ падает на плоскую границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 под углом θ_1 (угол между волновым вектором \vec{k}_1 и нормалью к границе раздела).

Плоскость поляризации падающей волны (в которой лежат векторы \vec{E}_1 и \vec{k}_1) ориентирована под углом α_1 к плоскости падения: $\vec{E}_1 = \vec{E}_1^s + \vec{E}_1^p$, $E_1^s = E_1 \sin \alpha_1$ (\perp пл-ти падения), $E_1^p = E_1 \cos \alpha_1$ (\parallel пл-ти падения).

В общем случае падающая волна порождает две другие волны:

отраженную — $\vec{E}_0(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(w_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})}$ и преломленную — $\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_2 e^{i(w_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})}$.

Границные условия выполняются 1) в любой момент времени и 2) в любой точки границы: $E_{\text{сверху}} \tau = E_{\text{снизу}} \tau$ или $E_{1\tau} e^{i(w_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + E_{0\tau} e^{i(w_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})} = E_{2\tau} e^{i(w_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})}$.

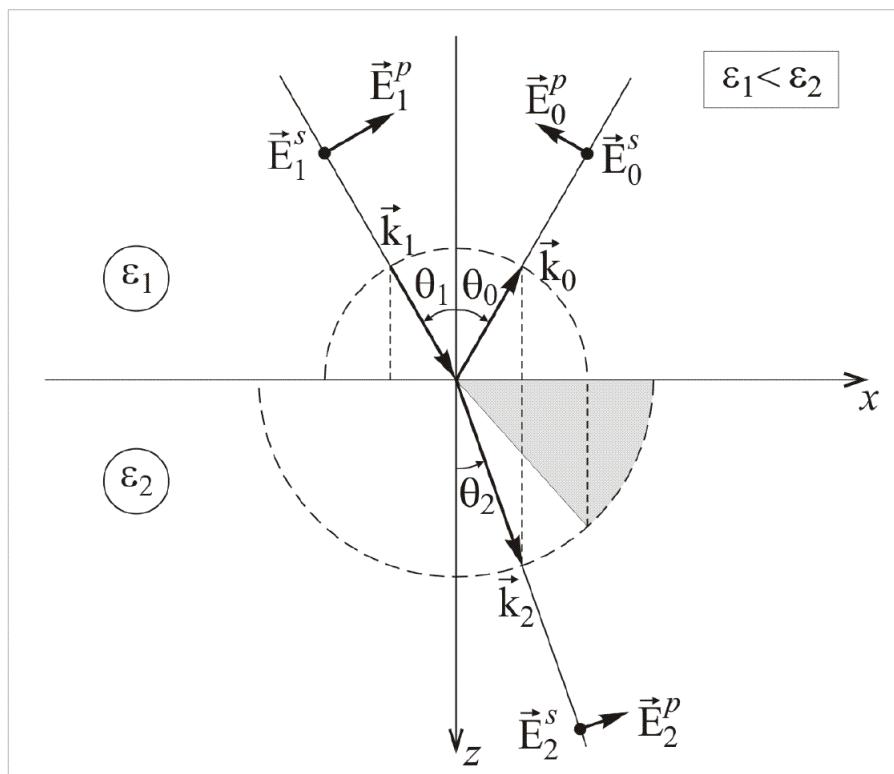
Из 1) следует, что $w_1 = w_0 = w_2$, т. е. *частоты падающей, отраженной и преломленной волн равны*.

Из 2) следует $\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}_0 \cdot \vec{r} = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} \Rightarrow k_{1\tau} = k_{0\tau} = k_{2\tau} \Rightarrow k_1 \sin \theta_1 = k_0 \sin \theta_0 = k_2 \sin \theta_2 \Rightarrow k n_1 \sin \theta_1 = k n_1 \sin \theta_0 = k n_2 \sin \theta_2$, т. е.

1. * Волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела двух сред в точке падения.

2. Угол падения равен углу отражения: $\theta_1 = \theta_2$.

3. Закон Снеллиуса: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$.



Вопрос 30

Границные условия: $D_{2n} = D_{1n}$, $B_{2n} = B_{1n}$, $E_{2\tau} = E_{1\tau}$, $H_{2\tau} = H_{1\tau}$.

Свойства плоских волн: $[\vec{n}\vec{E}] = \nu\vec{B}$, $[\vec{n}\vec{H}] = -\nu\vec{D}$, $\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$.

Материальные уравнения: $\vec{D}_i = \epsilon_0\epsilon_i\vec{E}_i$, $\vec{B}_i = \mu_0\mu_i\vec{H}_i$ $i = 1, 2$.

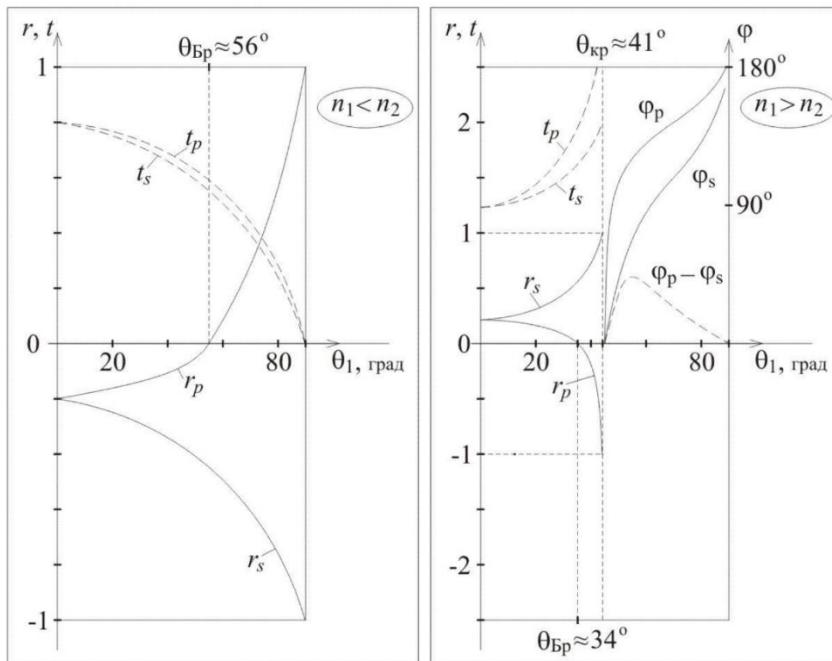
Из этих условий и с учетом закона Снеллиуса получают формулы Френеля для коэффициентов отражения r и пропускания t по амплитуде(!):

$$r_s \equiv \frac{E_0^s}{E_1^s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (\text{при отриц. разность фаз } \pi)$$

$$r_p \equiv \frac{E_0^p}{E_1^p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad (\text{при отриц. разность фаз } \pi)$$

$$t_s \equiv \frac{E_2^s}{E_1^s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$t_p \equiv \frac{E_2^p}{E_1^p} = \frac{2n_2 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$



Эффект Брюстера – явление полной поляризации (\perp плоскости падения) отраженной волны при $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ или при угле падения, равном углу Брюстера ($r_p = 0$):

$$r_p = 0 \rightarrow \tan \theta_{бр} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \theta_{бр} = \arctg \left(\frac{n_2}{n_1} \right).$$

Степень поляризации преломленного света: $\Delta_2 = \frac{I_2^s - I_2^p}{I_2^s + I_2^p}$, отраженного $\Delta_1 = \frac{I_1^s - I_1^p}{I_1^s + I_1^p}$.

Для прозрачных сред (n_1 и n_2 – вещественны). На поверхности раздела двух сред (пока есть прошедшая волна) **фазы** падающей и прошедшей волн совпадают, между падающей и отраженной волн зависят от поляризации падающей волны и показателей преломления.

Вопрос 31

Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Формулы Френеля, явление полного внутреннего отражения. Энергетические соотношения при преломлении и отражении света.

См. вопрос 30

При $n_2 < n_1$ существует **угол полного внутреннего отражения** $\theta_{\text{кр}}$ – наименьший угол падения, при котором нет преломленной волны во второй среде:

$$n_1 \sin \theta_{\text{кр}} = n_2 \rightarrow \theta_{\text{кр}} = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right).$$

$$\text{Т. к. волновой вектор } k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \sqrt{k_2^2 - k_{1x}^2} = \frac{w}{c} \sqrt{n_2^2 - (n_1 \sin \theta_1)^2},$$

$$\text{то при } \theta_1 > \theta_{\text{кр}}: \quad k_{2z} = \pm i \frac{w}{c} \sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2} = \pm i k''_{2z} \quad \text{и} \quad \vec{k}_2 = k_{1x} \vec{e}_x - i k''_{2z} \vec{e}_z.$$

Тогда $\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_2 e^{-k''_{2z} z} e^{i(wt - k_{1x} x)}$, т. о. при **полном внутреннем отражении** преломленная волна существует и является плоской (бежит вдоль границы с фазовой скоростью $v_{2x} = w/k_{1x}$) и неоднородной (амплитуда экспоненциально затухает вглубь среды).

$$\text{Глубина проникновения } \Delta z = \frac{1}{k''_{2z}} = \frac{c}{w \sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2}}.$$

Закон сохранения энергии: $S_{0n} = S_{1n} + S_{2n}$. Тогда

$$\begin{aligned} R &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_{0n}}{S_{1n}} = \frac{I_0 \cos \theta_1}{I_1 \cos \theta_1} = \frac{n_1 E_0^2 \cos \theta_1}{n_1 E_1^2 \cos \theta_1} = r^2 \\ T &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_{2n}}{S_{1n}} = \frac{I_2 \cos \theta_2}{I_1 \cos \theta_1} = \frac{n_2 E_2^2 \cos \theta_2}{n_1 E_1^2 \cos \theta_1} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t^2 \end{aligned}$$

Из формул Френеля получается $R + T = 1$ – закон сохранения энергии.

$$\text{При нормальном падении: } R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2, \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2}.$$

Вопрос 32

Распространение света в анизотропных средах. Описание диэлектрических свойств анизотропных сред. Главные диэлектрические оси. Плоские электромагнитные волны в анизотропной среде. Структура световой волны, нормаль и луч, фазовая и лучевая скорости.

1. Основные особенности распространения света в анизотропной среде

- 1) Фазовая и лучевая $\vec{V}_s = V \vec{S}$ скорости распространения волны в общем случае равны по модулю ($V = V_s \cos \alpha$) и не совпадают по направлению ($\vec{n} \vec{s} = \cos \alpha$).
- 2) Модули фазовой \vec{V} и лучевой \vec{V}_s скоростей распространения волны зависят только от ориентации векторов эл. поля волны относительно главных диэлектрических осей кристалла - $V \left(\frac{\vec{D}}{D} \right)$, $V_s \left(\frac{\vec{E}}{E} \right)$.
- 3) В данном направлении нормали \vec{n} могут распространяться только две линейно поляризованные волны в общем случае с разными по модулю фазовыми скоростями - V', V'' , векторы эл. индукции которых взаимно перпендикулярны ($\vec{D}' \perp \vec{D}''$).
- 4) В данном направлении луча \vec{S} могут распространяться только две линейно поляризованные волны в общем случае с разными по модулю лучевыми скоростями V'_s, V''_s , векторы эл. поля которых взаимно перпендикулярны ($\vec{E}' \perp \vec{E}''$).

$$2. P_i = \epsilon_0 \sum_j \kappa_{ij} E_j$$

$$\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$D_i = \epsilon_0 E_i + \epsilon_0 \sum_j \kappa_{ij} E_j = \epsilon_0 \sum_j (\delta_{ij} + \kappa_{ij}) E_j = \epsilon_0 \sum_i \epsilon_{ij} E_j$$

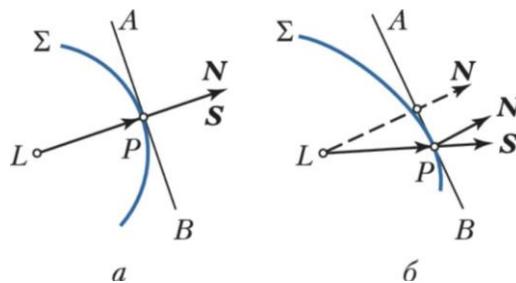
$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$$

Главные диэлектрические оси кристалла = главные направления кристалла = собственные оси тензора: $\{x, y, z\} = I$.

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}, \quad \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z\} - \text{главные диэлектрические проницаемости}$$

$$D_i = \epsilon_0 \epsilon_i E_i \quad I = \{x, y, z\}$$

3. Плоские э/м волны в анизотропной среде



Нормаль (бинормаль) N и луч (бирадиаль) S волны в изотропной (а) и анизотропной (б) средах.

Вопрос 32

Луч - прямая, вдоль которой происходит распространение энергии волны

Свет – поток фотонов. С точки зрения волновой оптики световая волна – это процесс колебания электрического и магнитного полей, распространяющихся в пространстве. Световые волны поперечны.

$$\vec{n}\vec{D} = 0$$

$$\vec{n}\vec{B} = 0$$

$$[\vec{n}\vec{E}] = V\vec{B}$$

$$[\vec{n}\vec{H}] = -V\vec{D}$$

Рассматриваем не магнитоактивные среды $\mu \approx 1$.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

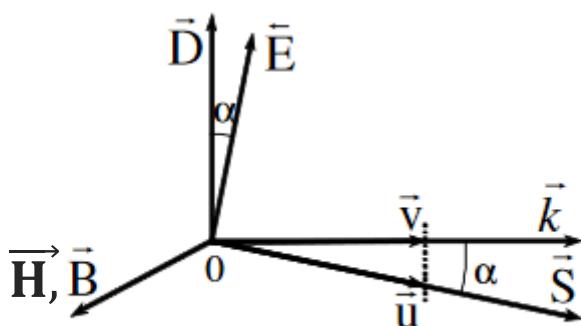


Рис. 6. Взаимная ориентация векторов при распространении световой волны в анизотропной среде

α – угол анизотропии

Перенос энергии осуществляется в направлении:

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$$

Лучевая скорость – скорость переноса энергии (импульса) плоской э/м волны. Лучевая скорость в кристалле по определению показывает направление движения энергии световой волны, то есть, совпадает по направлению с вектором Пойнтинга.

Фазовая скорость — скорость движения поверхности постоянной фазы.

$$\vec{V}_s = V_s \vec{S} - \text{лучевая}$$

$$V = V_s \cos \alpha - \text{фазовая}$$

+33 Вопрос

Вопрос 33

Распространение света в анизотропных средах. Главные скорости. Уравнение Френеля для фазовых скоростей. Свойства волн, распространяющихся в заданном направлении нормали.

Анизотропные кристаллы.

Под оптической анизотропией понимают различие оптических свойств среды в зависимости от направления распространения в ней света и от поляризации этого света. Оптическая анизотропия проявляется, в частности, в двойном лучепреломлении света и во вращении плоскости поляризации.

Если анизотропный кристалл поместить в однородное электрическое поле (например, в заряженный конденсатор), то возникающая в кристалле поляризованность \vec{P} (и, следовательно, индукция \vec{D}), вообще говоря, могут не совпадать по направлению с вектором \vec{E} . Можно выбрать систему координат такую, что связь между \vec{D} и \vec{E} запишется через тензор диэлектрической проницаемости ϵ_i в виде:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

Диагональные компоненты $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ тензора диэлектрической проницаемости называют его главными значениями или главными диэлектрическими проницаемостями анизотропной среды, а направления осей соответствующей системы координат – главными направлениями среды (кристалла). Таким образом, в общем случае векторы \vec{D} и \vec{E} не коллинеарны.

Как известно, в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ скорость v распространения электромагнитной волны одинакова по всем направлениям и равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{n},$$

где $n = \sqrt{\epsilon}$ - показатель преломления среды. В анизотропной среде скорость волны будет зависеть и от направления распространения, и от состояния ее поляризации.

Пусть, к примеру, в кристалле вдоль главного направления, совпадающего с осью Oz, распространяется волна, поляризованная вдоль оси Ox, т.е. вектор \vec{E} имеет только одну ненулевую компоненту E_x . В соответствии с (1) для такой волны вектор \vec{D} будет сонаправлен с \vec{E} :

$$D_x = \epsilon_0 \epsilon_x E_x,$$

а ее скорость распространения равна

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}} = \frac{c}{n_x}.$$

Вопрос 33

Если в том же направлении будет распространяться волна, поляризованная вдоль оси Oy , то ее скорость будет равна $v_y = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}} = \frac{c}{n_y}$.

Если же плоскость поляризации волны образует с осью Ox некоторый угол $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то ее представляют как суперпозицию двух линейно поляризованных (вдоль осей Ox и Oy) волн, каждая из которых распространяется со своей скоростью. Таким образом, в результате прохождения такой волны через анизотропный кристалл толщиной d между волнами, поляризованными во взаимно ортогональных направлениях, возникнет оптическая разность хода, равная

$$\Delta s = d \cdot (n_x - n_y),$$

Это приведет к появлению разности фаз, равной

$$\phi = k \cdot \Delta s = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot (n_x - n_y),$$

и состояние поляризации волны может измениться (см. рис. 5).

Аналогичные рассуждения можно провести и для случаев распространения волны вдоль других главных направлений. Таким образом, в анизотропном кристалле существуют три скорости

$$v_x = \frac{c}{n_z}, \quad v_y = \frac{c}{n_y}, \quad v_z = \frac{c}{n_z},$$

называемые главными скоростями распространения волны (подчеркнем: это не проекции скорости на соответствующие оси, а скорости распространения волн, поляризованных в данных направлениях!!!).

Ситуация существенно усложняется, если волна распространяется в произвольном направлении, не совпадающем с главным. Прежде всего, отметим, что в кристалле возникают две разные скорости: фазовая (указывает направление распространения поверхности постоянной фазы - фронта волны) и лучевая (указывает направление распространения энергии). Фазовая скорость \vec{v} сонаправлена с волновым вектором \vec{k} , который образует правую тройку с векторами \vec{D} и \vec{E} (рис. 6). Лучевая скорость \vec{u} сонаправлена с вектором Умова-Пойнтинга \vec{S} , который образует правую тройку с векторами \vec{E} и \vec{B} . Угол α между направлениями скоростей точно такой же, как и между векторами \vec{E} и \vec{D} .

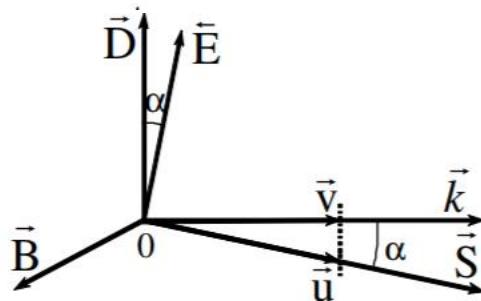


Рис. 6. Взаимная ориентация векторов при распространении световой волны в анизотропной среде

Вопрос 33

В произвольном случае пучок света, падающий на границу вакуум (воздух) – анизотропный кристалл, распадается на два пучка, поляризованных во взаимно-ортогональных направлениях. При этом каждый из них обладает своими фазовыми (\vec{v}_1 и \vec{v}_2) и лучевыми (\vec{u}_1 и \vec{u}_2) скоростями, не совпадающими в общем случае по величине и направлению. Такое расщепление исходного пучка на два наблюдается даже в случае нормального падения на границу раздела. Это явление называют ***двойным лучепреломлением***.

Можно показать, что если все три значения главных скоростей различны ($v_x \neq v_y \neq v_z \neq v_x$), то что в таком кристалле существуют два направления, при распространении вдоль которых не происходит ни двулучепреломления, ни изменения состояния поляризации. Такие направления называются ***оптическими осями*** кристалла, а сам кристалл называется ***двоосным***.

Если две главные скорости одинаковы (например, $v_x \neq v_y = v_z$), то существует одно направление распространения (а именно ось Ox), для которого не происходит изменения состояния поляризации волны. Такой кристалл называется ***одноосным***. В дальнейшем будем рассматривать только одноосные кристаллы.

В одноосном кристалле любом направлении, не совпадающем с оптической осью, могут распространяться две волны, поляризованные во взаимно ортогональных направлениях. Одна из них, называемая ***обыкновенной***, независимо от направления распространяется с одной и той же скоростью $v_o = v_y = v_z$. Она поляризована перпендикулярно ***плоскости главного сечения***, образованной оптической осью и направлением распространения.

Скорость распространения второй волны, называемой ***необыкновенной***, зависит от направления распространения и лежит в диапазоне v_o до $v_e = v_x$. Если $v_o < v_e$, то кристалл называют отрицательным, если $v_o > v_e$, то положительным. Необыкновенная волна поляризована в плоскости главного сечения.

Рисунок 7 иллюстрирует двулучепреломление, возникающее при нормальном падении пучка естественного света на положительный анизотропный кристалл, оптическая ось которого образует угол β с нормалью к границе раздела. Данное построение носит название ***построения Гюйгенса***. Отметим основные моменты данного построения (подробнее см. в литературе).

+32 вопрос

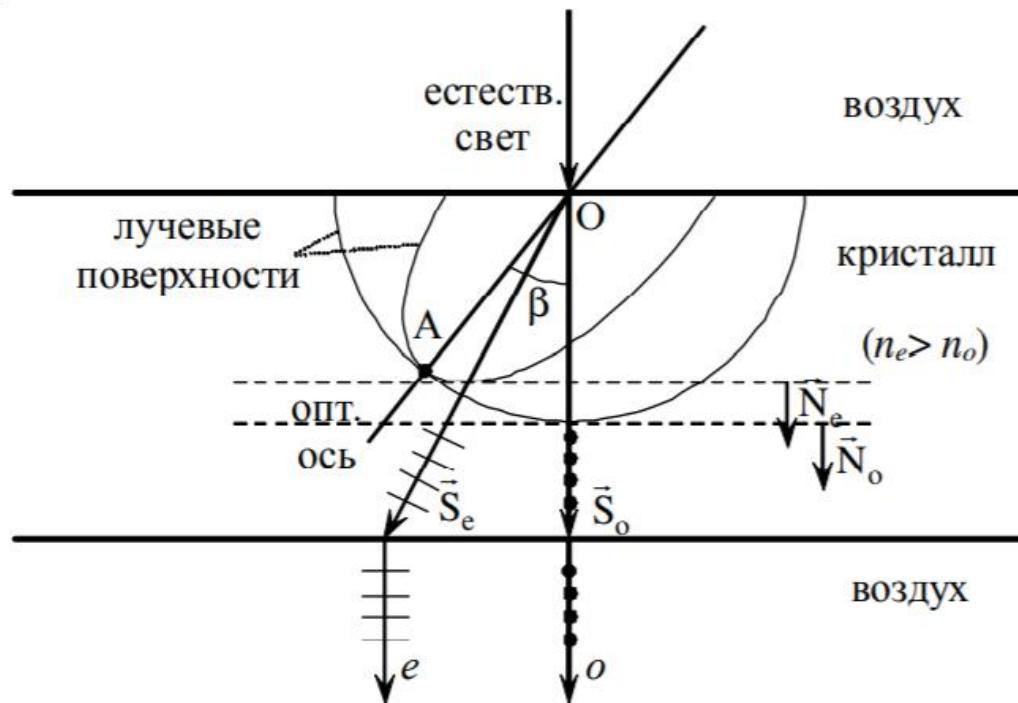


Рис. 7. Построение Гюйгенса для случая нормального падения пучка естественного света на положительный анизотропный кристалл.

Вопрос 34

Распространение света в анизотропных средах. Главные скорости. Уравнение Френеля для лучевых скоростей. Свойства волн, распространяющихся в заданном направлении луча.

Большинство кристаллов оптически анизотропные, т.е. их оптические свойства в разных направлениях не одинаковы.

Основные особенности распространения света в анизотропных средах:

- 1) Фазовая ($\vec{v} = v\vec{n}$) и лучевая ($\vec{v}_s = v\vec{s}$) скорости распространения волны в общем случае не равны по модулю ($v = v_s \cos \alpha$) и не совпадают по направлению ($\vec{n}\vec{s} = \cos \alpha$)
- 2) Модули фазовой и лучевой скоростей распространения волны зависят только от ориентации векторов эл. поля волны относительно главных диэлектрических осей кристалла - $v \left(\frac{\vec{D}}{D} \right), v_s \left(\frac{\vec{E}}{E} \right)$. (Главные диэл. оси – такие координатные оси, в которых тензор $\hat{\epsilon} = (\epsilon_{ij})$ имеет диагональный вид)
- 3) В данном направлении нормали \vec{n} могут распространяться только две линейно поляризованные волны в общем случае с разными по модулю фазовыми скоростями – v', v'' , векторы эл. индукции которых взаимно перпендикулярны ($D' \perp D''$)
- 4) В данном направлении луча \vec{s} могут распространяться только две линейно поляризованные волны в общем случае с разными по модулю лучевыми скоростями v'_s, v''_s , векторы эл. поля которых взаимно перпендикулярны ($E' \perp E''$)

В анизотропных средах вектор \vec{D} не совпадает по направлению с вектором E . Направление распространения волны задаётся вектором \vec{n} (нормаль), а направление переноса световой энергии – вектором \vec{s} (луч).

Пусть в анизотропной среде распространяется волна с напряжённостью эл. поля $\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{A} \exp \left[i\omega(t - \frac{\vec{r}\vec{n}}{c} n_0) \right]$, где n_0 – показатель преломления.

Векторы \vec{D}, \vec{E} и \vec{n} лежат в одной плоскости. Вектор \vec{H} перпендикулярен этой плоскости. Векторы \vec{D}, \vec{H} и \vec{n} образуют правую тройку векторов. Вектор \vec{E} , в общем случае, образует с вектором \vec{D} угол анизотропии θ .

См. билет 32 (там немного подробнее)

Главные скорости – нормальные скорости распространения волн, у которых электрический вектор параллелен диэлектрической оси.

$$\begin{cases} [\vec{n}\vec{E}] = v\vec{B} \\ [\vec{n}\vec{H}] = -v\vec{D} \end{cases}$$

$$v\vec{D} + \frac{1}{\mu_0 v} [\vec{n}[\vec{n}\vec{E}]] - \vec{E} = 0$$

$$\mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n}(\vec{n}\vec{E}) - \vec{E}(\vec{n}\vec{n}) = 0 \Rightarrow \mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n}(\vec{n}\vec{E}) - \vec{E} = 0 \quad - \quad (1)$$

Пусть векторы \vec{E} и \vec{D} направлены вдоль оси z

$$D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_z E_z; D_{x,y} = 0; E_{x,y} = 0$$

$$\mu_0 v_z^2 D_z + 0 - E_z = 0 \Rightarrow v_z^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_z} = \frac{c^2}{\varepsilon_z} \Rightarrow v_z = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}} = \frac{c}{n_z}$$

$$\text{Аналогично } v_x = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}} = \frac{c}{n_x} \text{ и } v_y = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}} = \frac{c}{n_y}$$

v_x, v_y, v_z – главные скорости оптической анизотропной среды

$$v_I = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_I}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_I}} = \frac{c}{n_I}$$

Запишем уравнение (1) в проекции на главные диэлектрические оси:

$$\mu_0 v^2 D_I + n_I (\vec{n} \vec{E}) - E_I = 0; \quad \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_I v^2 E_I + n_I (\vec{n} \vec{E}) - E_I = 0$$

$$-n_I (\vec{n} \vec{E}) + \left(1 - \frac{v^2}{v_I^2}\right) E_I = 0$$

$$\sum_I \frac{n_I^2 (\vec{n} \vec{E})}{1 - \frac{v^2}{v_I^2}} - \sum_I n_I E_I = 0$$

$$\sum_I \frac{n_I^2 \frac{v^2}{v_I^2}}{1 - \frac{v^2}{v_I^2}} = 0 \quad \sum_I \frac{n_I^2}{1 - \frac{v^2}{v_I^2}} = 0$$

$$\mu_0 v^2 D^2 - \vec{E} \vec{D} = 0 \quad v^2 = \sum_I \frac{E_I D_I}{\mu_0 D^2} = v_I^2 \left(\frac{D_I}{D}\right)^2$$

$$\text{Пусть } \mu_0 v'^2 \vec{D}' + \vec{n} (\vec{n} \vec{E}') - \vec{E}' = 0 \text{ и } \mu_0 v''^2 \vec{D}'' + \vec{n} (\vec{n} \vec{E}'') - \vec{E}'' = 0$$

$$\text{Тогда } \mu_0 v'^2 \vec{D}' \vec{D}'' - \vec{E}' \vec{D}'' = 0 \text{ и } \mu_0 v''^2 \vec{D}'' \vec{D}' - \vec{E}'' \vec{D}' = 0$$

$$\vec{E}' \vec{D}'' = \sum_I (E'_I \varepsilon_0 \varepsilon_I) E''_I = \sum_I D'_I E''_I = \vec{E}'' \vec{D}' \Rightarrow \mu_0 (v''^2 - v'^2) \vec{D}' \vec{D}'' = 0$$

Значит: при $v' \neq v'' \quad (D', D'') = 0$

$$[\vec{S}[\vec{n}\vec{E}]] = \nu[\vec{S}\vec{B}] = \vec{n}(\vec{S}\vec{E}) - \vec{E}(\vec{S}\vec{n}) = -\vec{E}(\vec{S}\vec{n}) = \nu[\vec{S}\vec{B}]$$

$$[\vec{S}[\vec{n}\vec{H}]] = -\nu[\vec{S}\vec{D}] = \vec{n}(\vec{S}\vec{H}) - \vec{H}(\vec{S}\vec{n}) = -\vec{H}(\vec{S}\vec{n}) = -\nu[\vec{S}\vec{D}]$$

$$\{\nu = \nu_s \cos \alpha\} \Rightarrow \vec{E} = -\nu_s [\vec{S}\vec{B}]$$

$$\vec{H} = \nu_s [\vec{S}\vec{D}]$$

$$\vec{E} = -\mu_0 \nu_s^2 [\vec{S}[\vec{S}\vec{D}]] \quad \frac{\vec{E}}{\mu_0 \nu_s^2} = -[\vec{S}[\vec{S}\vec{D}]]$$

$$\frac{1}{\mu_0 \nu_s^2} \vec{E} + \vec{s}(\vec{S}\vec{D}) - \vec{D} = 0$$

Аналогично для фазовых скоростей $n \Rightarrow s$, $D \Leftrightarrow E$, $\mu_0 v^2 \Rightarrow \frac{1}{\mu_0 \nu_s^2}$ ($\mu_0 v_I^2 \Rightarrow \frac{1}{\mu_0 \nu_I^2}$)

$$\mu_0 v^2 \vec{D} + \vec{n}(\vec{n}\vec{E}) - \vec{E} = 0$$

В результате для лучевых скоростей получим

$$\boxed{\sum_I \frac{S_I^2 \nu_I^2}{\nu_I^2 - \nu_s^2} = 0} \text{ — уравнение Френеля для лучевых скоростей}$$

$$\frac{1}{\nu_s^2} = \sum_I \frac{1}{\nu_I^2} \left(\frac{E_I}{E} \right)^2$$

Свойства:

Если $\nu_s'' \neq \nu_s'$, то $(\vec{E}', \vec{E}'') = 0$ (Вывод выше)

Вопрос 35

Эллипсоид лучевых скоростей. Лучевая поверхность и ее сечения. Оптическая ось. Классификация анизотропных сред.

Воспользуемся взаимосвязью модуля лучевой скорости v_s и ориентации напряженности поля \vec{E} относительно главных диэлектрических осей кристалла

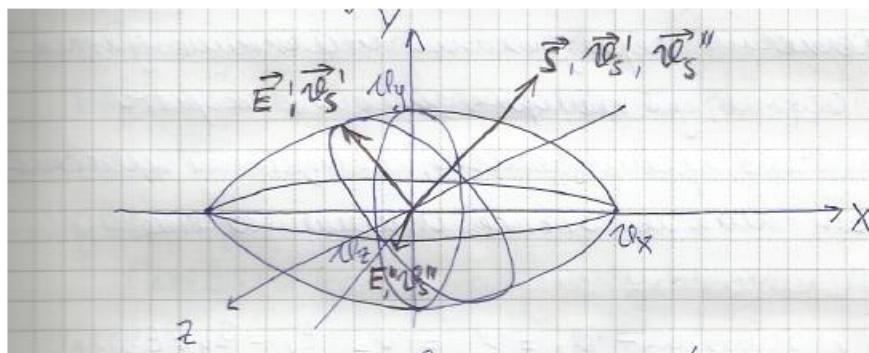
$$\frac{1}{v_s^2} = \sum_I \frac{1}{v_I^2} \left(\frac{E_I}{E} \right)^2, \quad 1 = \sum_I \frac{1}{v_I^2} \left(\frac{E_I}{E} \right)^2$$

Зададим координаты точки поверхности в главных осях, сделав замену переменной:

$$X_I = v_s \frac{E_I}{E}, \quad \vec{R} = v_s \frac{\vec{E}}{E} \text{ в направлении}$$

$\vec{E} - \vec{R} = |\vec{R}| = v_s$ и в результате получим уравнение поверхности

$$\left(\frac{x}{v_x} \right)^2 + \left(\frac{y}{v_y} \right)^2 + \left(\frac{z}{v_z} \right)^2 = 1$$



Эллипсоид лучевых скоростей (эллипсоид Френеля) – эллипсоид, главные оси которого совпадают с главными диэлектрическими осями x, y, z кристалла, а главные полуоси равны главным скоростям v_x, v_y и v_z распространения в среде. В сечении лучевого эллипсоида, перпендикулярном лучу \vec{s} , образуется эллипс, вдоль главных осей которого направлены напряженности \vec{E}' и \vec{E}'' двух волн, переносящие энергию вдоль \vec{s} , а его главные полуоси равны модулям соответствующих лучевых скоростей v_s' и v_s'' этих волн.

Классификация анизотропных сред:

Оптическая ось – направление в кристалле(среде), перпендикулярная плоскости кругового сечения эллипсоида лучевых скоростей.

Всем лучам вдоль оптической оси соответствует одна и та же лучевая скорость, а векторы напряженности электрического поля \vec{E} могут колебаться в любом направлении, перпендикулярном лучу.

1) Двухосный кристалл $-v_x \neq v_y \neq v_z (\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z; u_x = u_y \neq u_z)$

Эллипсоид лучевых скоростей – эллипсоид вращения вокруг оси, для которой главная скорость отлична от остальных(X). При этом имеется только одна оптическая ось, совпадающая с осью вращения.

Вопрос 35

2) Изотропный кристалл - $v_x = v_y = v_z (\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z)$

Эллипсоид лучевых скоростей – сфера. Все направления оптически эквивалентны и кристалл оптически изотропен.

Лучевая поверхность:

Воспользуемся уравнением Френеля для лучевых скоростей

$$\sum_I \frac{S_I^2 v_I^2}{v_I^2 - v_s^2} = 0$$

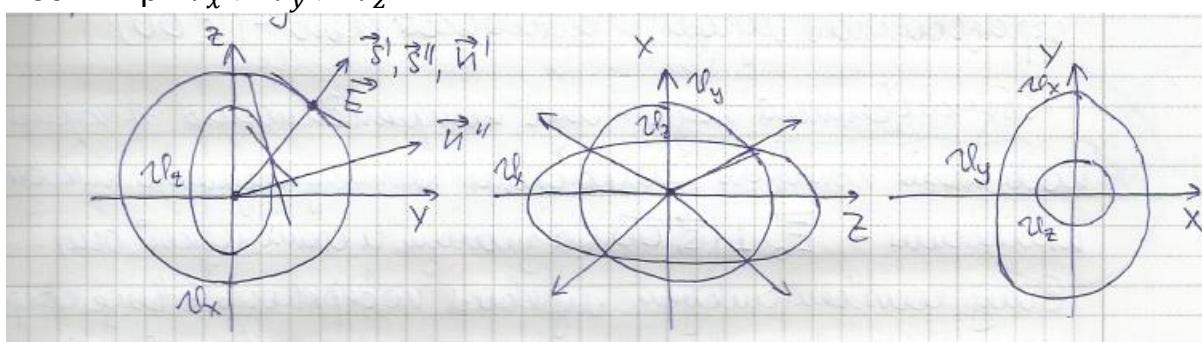
Зададим координаты точки поверхности в главных осях, сделав замену переменных:

$$X_I = v_s S_I, \vec{R} = v_s \vec{S} = \vec{v_s}, R = |\vec{R}| = v_s$$

В результате получим уравнение лучевой поверхности:

$$\sum_I \frac{X_I^2 v_I^2}{v_I^2 - R^2} = 0$$

Лучевая(волновая) поверхность – поверхность, до которой доходит световое возбуждение из данной точки среды за фиксированный интервал времени. Это двух оболочечная самопересекающаяся поверхность. В общем случае в каждом направлении из начала координат лучевая поверхность встречается два раза. Главные координаты плоскости пересекают лучевую поверхность по эллипсу и окружности. При $v_x > v_y > v_z$:



Фронт волны для каждой точки лучевой поверхности (волны с заданным лучом) – плоскость, касательная к лучевой поверхности в этой точке.

Вопрос 36

Оптические свойства одноосных кристаллов. Отрицательные и положительные кристаллы, сечения лучевых поверхностей. Главная плоскость, обыкновенный и необыкновенный лучи. Взаимная ориентация фазовой и лучевой скоростей. Двойное лучепреломление и поляризация света. Метод построения Гюйгенса.

Одноосный кристалл.

Одноосный кристалл (среда) – кристалл (среда), для которого две главные скорости распространения волн равны:

Для одноосного кристалла имеется:

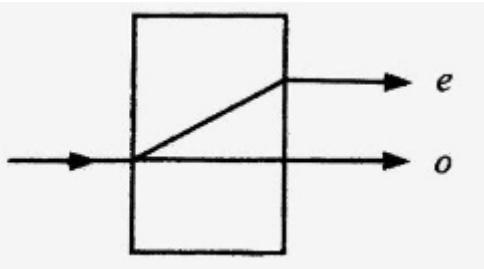
- одна оптическая ось, совпадающая с осью вращения – главной диэлектрической осью, для которой диэлектрическая проницаемость отлична от остальных.
- эллипсоид лучевых скоростей – эллипсоид вращения.
- лучевая поверхность – совокупность сферы и эллипсоида вращения, вписанные друг в друга.

Главная плоскость (главное сечение) – плоскость, образованная лучом и оптической осью – $(\vec{S}, \overrightarrow{OO})$.

Двойное лучепреломление или двулучепреломление – эффект расщепления в анизотропных средах луча света на две составляющие. Если луч света падает перпендикулярно к поверхности кристалла, то на этой поверхности он расщепляется на два луча. Первый луч продолжает распространяться прямо, и называется **обыкновенным**, второй же отклоняется в сторону, и называется **необыкновенным**.

Второе определение:

Двойное лучепреломление – явление возникновения при падении на поверхность анизотропной среды плоской произвольно поляризованной волны двух преломленных линейно и взаимно перпендикулярно поляризованных плоских волн.



Обыкновенный луч – луч, напряженность эл. поля которого направлена перпендикулярна главной плоскости - $\vec{E}_0 \perp (\vec{S}, \overrightarrow{OO})$ (а значит и оптической оси).

Ему соответствует лучевая поверхность в виде сферы. Фазовая и лучевая скорости равны $V_0 = V_x = V_y$ и не зависят от направления.

Вопрос 36

Необыкновенный луч – луч, вектор напряженности эл. поля которого лежит в главной плоскости - $\vec{E}_e \parallel (\vec{S}, \vec{OO})$. Ему соответствует лучевая поверхность в виде эллипсоида вращения. Фазовая и лучевая скорости не равны $V \neq V_s$ ($V < V_s$) и зависят от угла между лучом и оптической осью, меняясь при этом от $V_0 = V_x = V_y$ до $V_e = V_z$.

В одноосной оптической среде:

-для обыкновенного луча лучевая и фазовая скорости совпадают по величине и направлению и не зависят от направления -

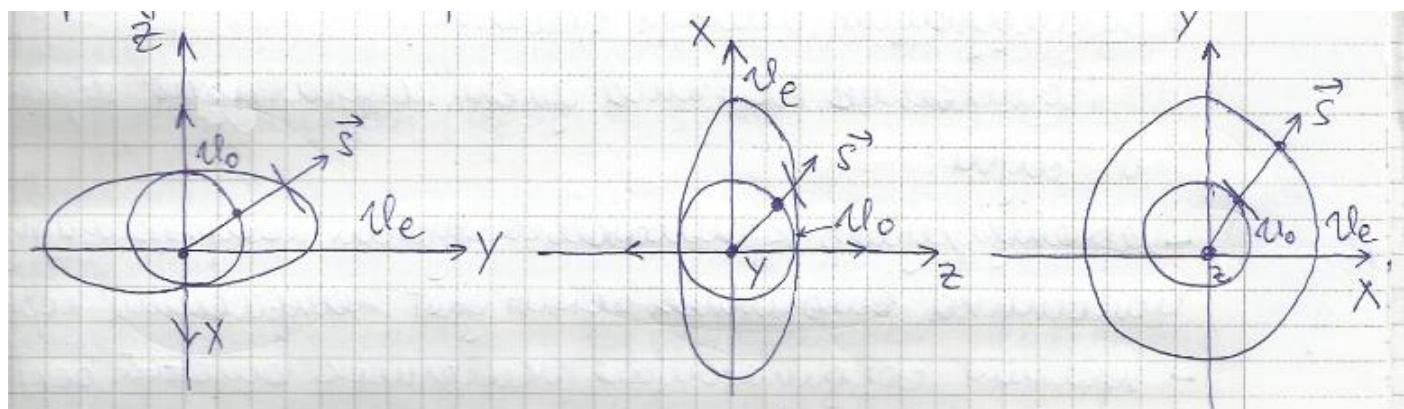
$$\alpha_0 = 0, \vec{n}_0 \vec{S}_0 = 0$$

-для необыкновенного луча они не совпадают и зависят от направления -

$$\alpha_e \neq 0, \vec{n}_e \vec{S}_e = \cos \alpha_e.$$

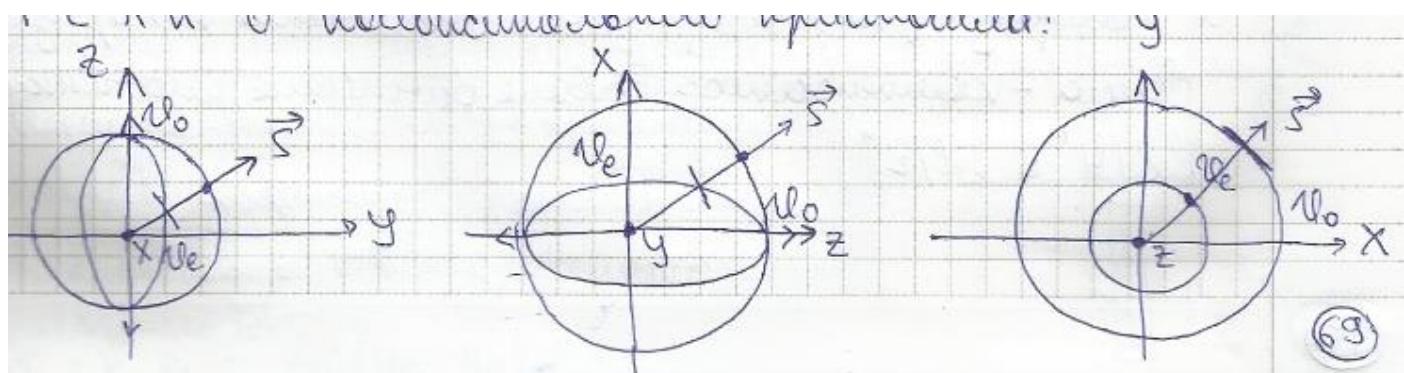
Отрицательный кристалл - $V_0 = V_x = V_y < V_z = V_e$ ($n_0 = n_x = n_y > n_z = n_e$ эллипсоид Френеля вытянут вдоль оси вращения Z ; лучевая сфера вписана в сплющенный вдоль оси Z лучевой эллипсоид вращения. (Исландский шпат – CaCO_3)

Главные сечения лучевой поверхности одноосного отрицательного кристалла:



Положительный кристалл - $V_0 = V_x = V_y > V_z = V_e$ ($n_0 = n_x = n_y < n_z = n_e$); эллипсоид Френеля сплюснут вдоль оси Z ; лучевая сфера охватывает вытянутый вдоль оси Z лучевой эллипсоид вращения. (Кварц – SiO_2)

Главные сечения лучевой поверхности одноосного положительного кристалла:



Вопрос 36

Метод построения Гюйгенса

Основные положения:

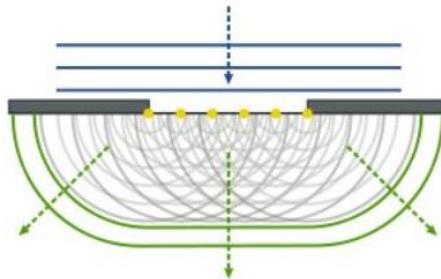
- 1) Каждая точка, до которой доходит возбуждение, становится источником вторичных волн, несущих световое возбуждение (возникает лучевая поверхность).
- 2) Огибающая вторичных волн (касательная поверхность к лучевой поверхности) определяет фронт волны в последующий момент времени.

Построение Гюйгенса дает направления нормали и луча:

- Перпендикуляр к огибающей лучевой поверхности из источника вторичной волны дает направление нормали,
- Прямая, соединяющая источник вторичной волны с точкой касания огибающей с лучевой поверхностью, дает направление луча.

Принцип Гюйгенса-Френеля.

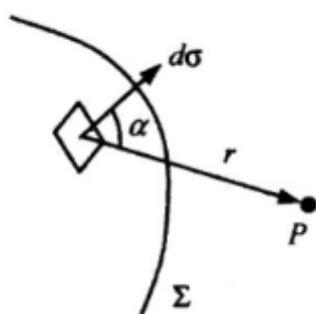
Каждый элемент волнового фронта является центром возмущения, порождающего вторичные сферические волны, в результате интерференции которых формируется результирующее световое поле в каждой точке пространства.



Количественная формулировка принципа Гюйгенса-Френеля.

Пусть имеется стационарное волновое поле $S(\vec{r}, t) = A(\vec{r})e^{-i\omega t}$. Заметим, что функция $A(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta A + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$



Вопрос 36

Результирующая волна в точке P получается суммированием волн, проходящих от всех точек волнового фронта:

$$A(P) = \int_{\Sigma} K(\alpha) A_{\Sigma} \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma,$$

где $d\sigma$ – выделенная малая площадка, на которой амплитуда волны равна A_{Σ}

$K(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{i\lambda}$ – множитель, учитывающий ориентацию площадки по отношению к направлению на точку P . Эта формула дает приближенное решение уравнения Гельмгольца с граничным условием $A(\vec{r})|_{\Sigma} = A_{\Sigma}$ и называется интегралом Френеля, или дифракционным интегралом.

Вопрос 37

1

Поляризационные приборы. Получение и анализ поляризационного света - явление дихроизма, поляроид и поляризационные призмы. Управление поляризацией света-компенсатор Бабине, оптические пластинки « $\lambda/4$ » и « $\lambda/2$ »

Зависимость поглощения от поляризации света - явление дихроизма. В отношении дихроизма кристаллы могут быть одноосными и двуосными.

Поляроид - дихроичная пластина, при прохождении которой один из лучей в результате поглощения сильно ослабляется, а другой выходит линейно поляризованным.

В основе - явление дихроизма - зависимость поглощения света от направления поляризации. Кристаллы турмалина и герапатита.

Поляризатор - поляроид, использующийся для получения поляризованного света.

Поляризационная призма - комбинация кристаллов оставляющая один поляризованный луч на выходе.

Аналитор - поляроид, использующийся для анализа поляризованного света.

Призма Николя - две призмы из Исландского шпата $CaCO_3$ ($n_o > 1,658 > n_e = 1,486$), канадского бальзама ($n_o > n = 1,55 > n_e$)

Двоякопреломляющая призма - комбинация кристаллов, оставляющая оба поляризованных луча на выходе. (два клина $CaCO_3$)

Компенсатор Бабине (тонкие кварцевые клины, вырезанные так, что оси их ориентированы под прямым углом друг к другу. С $\alpha \ll 1$ ($SiO_2 n_o = 1,543 < n_e = 1,552$))

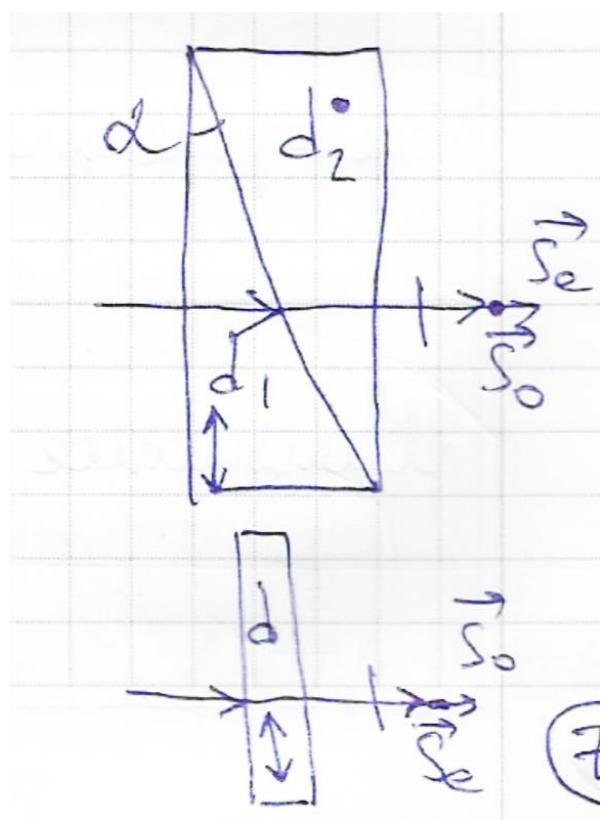
$$\Delta = (n_e d_1 + n_0 d_2) - (n_0 d_1 + n_e d_2) = (n_e - n_0)(d_1 - d_2)$$

$$\Delta\phi = k_o \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_o} (n_e - n_0)(d_1 - d_2)$$

Для полного анализа эллиптически - поляризованного света надо знать разность фаз двух взаимно перпендикулярных компонент любого направления. Для этой цели служат приборы, способные скомпенсировать до нуля (или дополнить до π) любую разность фаз. Такие приборы называются компенсаторами. Свет, проходящий в разных местах через компенсатор, получает ту или иную добавочную разность хода между двумя компонентами колебаний светового вектора в зависимости от разности толщин клиньев в данном месте.

Оптические пластинки - пластины из оптически анизотропных кристаллов, вносящие заданную разность хода для необыкновенного и обыкновенного лучей:

$$\Delta = (n_e - n_0)d \text{ и } \Delta\phi = k_o \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_o} (n_e - n_0)d$$



Вопрос 37

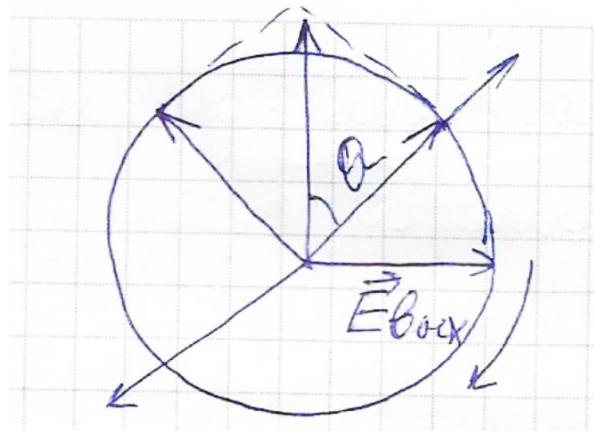
2

$\lambda/4$: Пластиинка в четверть волны:

$$\Delta = (n_e - n_o)d = \frac{\lambda_o}{4}$$

$$\Delta\phi = k_o \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_o} (n_e - n_o)d = \frac{\pi}{2}$$

Линейная поляризация \Leftrightarrow циркулярная –
 $\theta = 45^\circ$ (эллиптическая – $\theta \neq 45^\circ$)
поляризация

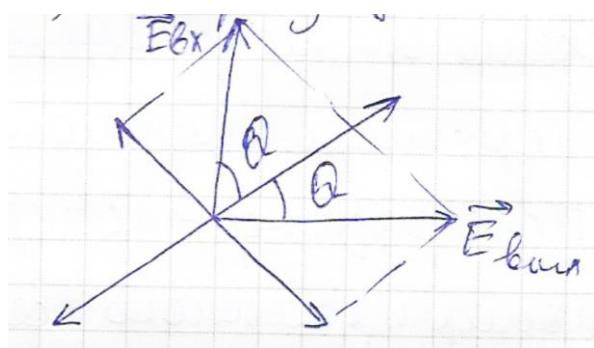


$\lambda/2$: Пластиинка в полволны:

$$\Delta = (n_e - n_o)d = \frac{\lambda_o}{2}$$

$$\Delta\phi = k_o \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_o} (n_e - n_o)d = \pi$$

Поворот линейной поляризации на 2θ или
изменение направления вращения
плоскости поляризации в циркулярно-
(эллиптически) поляризованной волне



Вопрос 38

1

Наведенная анизотропия оптических свойств. Фотоупругость. Эффекты Поккельса и Керра. Явление Коттон-Мутона.

Механо-(электро-, магнито-) оптические эффекты - изменение оптических характеристик среды под внешним механическим (электрическим, магнитным) воздействием

Воздействие	Тип эффекта	Эффект
Механическое	Линейный (поперечный)	Фотоупругость
Электрическое	Линейный (поперечный)	Поккельса
	Квадратичный (поперечный)	Керра
Магнитное	Квадратичный (поперечный)	Коттона-Мутона
	Расщепление (продольный и поперечный)	Зеемана
	Линейный (продольный)	Фарадея

1. Фотоупругость - линейный механооптический эффект, пьезооптический эффект — возникновение оптической анизотропии в первоначально изотропных твёрдых телах (в том числе полимерах) под действием механических напряжений. Фотоупругость является следствием зависимости диэлектрической проницаемости вещества от деформации и проявляется в виде двойного лучепреломления и дихроизма, возникающих под действием механических нагрузок. Фотоупругость обусловлена деформацией электронных оболочек атомов и молекул и ориентацией оптически анизотропных молекул либо их частей. Мера возникшей оптической анизотропии - разность главных показателей преломления для необыкновенной $n_e(E_e \parallel F)$ и обычной $n_o(E_o \perp F)$ волн.

$$n_e - n_o = \Delta n(\omega) = \gamma(\omega) \frac{F}{S} = \gamma(\omega) \sigma (\gamma > 0, \gamma < 0)$$

где σ - механическое напряжение

(смена знака $\sigma \rightarrow$ смена знака $\Delta n(\omega)$)

$$\Delta\phi = k_o(n_e - n_o)l = \frac{2\pi}{\lambda_o(\omega)}(n_e - n_o)l = \frac{2\pi}{\lambda_o(\omega)}\Delta n(\omega)l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_o(\omega)}2\pi\sigma l$$

где $\gamma(\omega)$ - постоянная Брюстера, для стекол $\gamma(\omega) = 10^{-12} - 10^{-11} M^2/H$

Механизм - направленная механическая деформация тела

Белый свет \Rightarrow окрашивание из-за зависимости набегающей разности фаз $\Delta\phi$ от частоты и распределения напряжения внутри образца.

2. Эффект Поккельса - линейный электрооптический эффект. Явление возникновения двойного лучепреломления в оптических средах при наложении постоянного или переменного электрического поля.

Вопрос 38

Механизм эффекта - ангармонизм (Свойство колебаний, обусловленное их отклонением от гармонического) движения связанных зарядов в кристалле. Классическая электронная теория, модель ангармонического осциллятора

$$(-kx - \beta x^2), E \parallel E_o, E_o \gg E(t):$$

$$E_o \Rightarrow \Delta\omega_o^2 = \frac{2\beta q}{\omega_o^2 m^2} E_o \Rightarrow \Delta n(\omega),$$

$$n_e - n_0 = \Delta n(\omega) = -\frac{\omega^2 n}{2n(\omega_o^2 - \omega^2)^2} \frac{2\beta q}{\omega_o^2 m^2} E_o = \gamma(\omega) E_o$$

Линейный оптический эффект наблюдается только в кристаллах, не обладающих центром симметрии, в силу линейности при изменении направления поля эффект должен менять знак, что невозможно в центрально-симметричных телах.

3. Эффект Керра - квадратичный электрооптический эффект в центрально-симметричных средах. Явление изменения значения показателя преломления оптического материала пропорционально квадрату **напряжённости** приложенного электрического поля.

$$(-kx - \beta x^3), E \parallel E_o, E_o \gg E(t):$$

$$n_e - n_0 = \Delta n(\omega) = \gamma(\omega) E_o^2$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_o(\omega)} (n_e - n_0) l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_o(\omega)} 2\pi E_o^2 l = B(\omega) 2\pi E_o^2 l$$

$$\text{где } B(\omega) = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_o(\omega)} - \text{ постоянная Керра}$$

Механизм - поляризация и ориентация анизотропных молекул. Под воздействием внешнего постоянного или переменного электрического поля в среде может наблюдаться двойное лучепреломление, вследствие изменения поляризации вещества.

Для полярных $B > 0$, $B < 0$, для неполярных $B > 0$. Эффект Керра определяется свойствами молекул и, следовательно, усиливается с повышением концентрации молекул.

С повышением температуры постоянная Керра падает из-за дезориентирующего действия температуры на дипольные моменты.

4. Явление Коттон-Мутона - квадратичный магнитооптический эффект в поперечном магнитном поле, явление возникновения под действием магнитного поля в оптически изотропных средах двойного лучепреломления.:

$$n_e - n_0 = (\gamma(\omega) B_o^2 (\gamma) \sim 10^{-8} T \lambda^{-2})$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_o(\omega)} (n_e - n_0) l = \frac{\gamma(\omega)}{\lambda_o(\omega)} 2\pi B_o^2 l = c(\omega) 2\pi B_o^2 l$$

Механизм - ориентация анизотропных молекул, обладающих μ . При распространении света поперек вектора индукции магнитного поля поляризация остается линейной, то есть наблюдается обычное двойное лучепреломление, в отличие от эффекта Фарадея: при распространении света вдоль магнитного поля возникают две волны, поляризованные по кругу и имеющие разные показатели преломления, то есть наблюдается двойное круговое лучепреломление.

Этот эффект очень мал.

Вопрос 39

Рассеяние света. Излучение точечного электрического диполя. Индикатриса рассеяния, поляризация рассеянного света. Закон Рэлея. Рассеяние Ми.

Рассеяние света – возмущение (в общем случае частичное поглощение и изменение интенсивности, частоты, поляризации) световых полей на оптических пространственных неоднородностях среды

Оптические неоднородности – включения инородных частиц и флюктуации оптических свойств среды. Процесс рассеяния света состоит в заимствовании молекулой или частицей энергии у распространяющейся в среде волны и последующем излучении всей или части этой энергии.

Упругое рассеяние - $W_{\text{рас}} = W_{\text{пад}}$; сохраняются фазовые соотношения между падающей и рассеянной волнами – когерентное рассеяние.

Неупругое рассеяние - $W_{\text{рас}} \neq W_{\text{пад}}$; фазовый сбой- некогер. рассеяние.

Стоково рассеяние – $W_{\text{рас}} < W_{\text{пад}}$, Антистоково – наоборот.

Рассеяние света:

1) Упругое, $W_{\text{рас}} = W_{\text{пад}}$, когерентные :

a) Рэлеевское (упругое когерентное рассеяние света на оптических неоднородностях, размеры которых $r \ll \lambda$)

- Молекулярное
- В дисперсных системах (на инородных частицах ($r \ll \lambda$) сод. в макроскоп. однородной (дисперсной) среде

b) Ми (упругое рассеяние в дисперсных системах на частицах с $r \geq \lambda$)

2) Неупругое $W_{\text{рас}} \neq W_{\text{пад}}$, некогер

a) Рассеяние Мандельштама – Бриллюэна – неупругое рассеяние на колебаниях решётки. $r \sim \lambda$

b) Комбинационное (рамановское) рассеяние – неупругое рассеяние на атомных колебаниях в молекуле. $r \ll \lambda$

Дисперсные системы – системы, состоящие из множества мелких частиц (дисперсная фаза), расположенных в однородной среде (дисперсной среде)

Индикатриса рассеяния – пространственная диаграмма зависимости интенсивности $I(r, \Omega)$ рассеянного света от телесного угла Ω (направления) рассеяния на данном расстоянии r от рассеивателя.

Элементарный рассеиватель:

$$I(\theta) = \langle E^2 \rangle = \frac{w^4 p^2 \sin^2(\theta)}{(4\pi\epsilon c^2 r)^2}$$

Обсудим состояние поляризации рассеянного света.

Предположим, что пучок параллельных лучей естественного света распространяется в рассеивающей среде по оси ОХ. В плоскости УОZ вектор Е м.б. ориентирован произвольным образом. Однако его всегда можно представить как совокупность составляющих E_y и E_z . Также ориентированы и дипольные излучатели вторичных волн. Будем регистрировать вторичные волны, распространяющиеся

Вопрос 39

2

перпендикулярно к направлению распространения исходного пучка. Свет, рассеянный под прямым углом к исходному пучку, оказывается плоско поляризованным.

Закон Рэлея:

Если размеры неоднородностей малы по сравнению с длиной волны, то

интенсивность рассеянного света оказывается: $I \sim w^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}$

Вопрос 40

1

Молекулярное рассеяние света в газах и жидкостях. Элементы статистической теории рассеяния. Формулы Эйнштейна и Рэлея. Основные особенности молекулярного рассеяния.

Основная идея: атомы и молекулы вещества (и их совокупности) под воздействием падающего на них излучения становятся источниками вторичного излучения

Рассеяние света — рассеяние электромагнитных волн видимого диапазона при их взаимодействии с веществом. При этом происходит изменение пространственного распределения, частоты, поляризации оптического излучения, хотя часто под рассеянием понимается только преобразование углового распределения светового потока.

Процесс рассеяния света состоит в заимствовании молекулой или частицей энергии у распространяющейся в среде электромагнитной волны и излучении этой энергии в телесный угол, вершиной которого является молекула или частица (из Матвеева)

Характер рассеяния зависит от соотношения между длиной волны и размером частиц.

Если линейные размеры частицы меньше, чем $\frac{1}{15}$ длины волны, то рассеяние называется **релеевским**.

При больших размерах частиц говорят о **рассеянии Ми**

Рэлеевское рассеяние — когерентное рассеяние света без изменения длины волны (называемое также упругим рассеянием) на частицах, неоднородностях или других объектах, когда частота рассеиваемого света существенно меньше собственной частоты рассеивающего объекта или системы. (рассеяние света на объектах, размеры которых меньше его длины волны)

Молекулярное рассеяние — релеевское рассеяние света на тепловых статистически независимых флуктуациях оптических свойств макроскопически однородной среды, не содержащей примесей. *Флуктуация оптических свойств возникает из-за тепловых флуктуаций плотности, концентрации компонентов, локальных электрических полей и ориентации анизотропных молекул*



Вопрос 40

2

Упругое рассеяние – рассеяние, при котором частота рассеянного света равна частоте падающего света. При этом сохраняются фазовые соотношения между падающей и рассеянной волнами, они остаются когерентными – наблюдается **когерентное рассеяние света**

Статистическая теория рассеяния:

- размеры оптических неоднородностей малы по сравнению с длиной волны света
- положение каждой области неоднородности не зависит от положений других областей
- взаимодействием областей неоднородности можно пренебречь

Основная причина статистических (тепловых) флюктуаций оптических свойств – флюктуация плотности среды. При этом будет флюктуировать и диэлектрическая

$$\text{проницаемость среды } \varepsilon = \varepsilon(\rho, T): \boxed{\Delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \Delta T}$$

Поскольку при постоянной плотности показатель преломления зависит от температуры слабо, то $\Delta\varepsilon \cong \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho$

Будем считать, что флюктуации оптических свойств возникают в основном благодаря только флюктуациям плотности в объемах $\{V_j\}$. Рассеяние обусловлено наличием флюктуации электрического дипольного момента этих выделенных объемов:

$$\boxed{p_{V_j} = V_j \mathbf{P} = V_j \varepsilon_0 (\varepsilon_j - 1) \mathbf{E}_0}. \text{ В силу флюктуации меняется диэлектрическая проницаемость: } \varepsilon_j = \varepsilon + \Delta\varepsilon_j$$

$$\text{Тогда меняется и вектор поляризации: } \boxed{\Delta p_{V_j} = V_j \varepsilon_0 \Delta\varepsilon_j \mathbf{E}_0 = V_j \varepsilon_0 \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho_j \mathbf{E}_0}$$

Рассеяние на молекулах каждой оптической неоднородности упруго и когерентно. Напряженность электрического поля рассеянного света на неоднородности равна сумме напряженностей полей света, рассеянного каждой молекулой:

$$E_j = \frac{\omega^2}{4\pi r \varepsilon_0 c^2} \Delta p_{V_j} \sin\varphi = -E_0 \frac{\omega^2}{4\pi r c^2} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho_j V_j \sin\varphi; \quad I_j = \langle E_j^2 \rangle = I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi r c^2)^2} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 \overline{(\Delta\rho_j V_j)^2} \sin^2\varphi;$$

Поскольку $\rho_j = \frac{m_j}{V_j}$, то при малых флюктуациях: $\frac{\Delta\rho_j}{\rho_j} = -\frac{\Delta V_j}{V_j}$; и $\overline{(\Delta\rho_j V_j)^2} = \overline{(\rho_j \Delta V_j)^2} \cong \rho_j \overline{(\Delta V_j)^2}$; Следовательно,

$$\boxed{I_j \cong I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi r c^2)^2} \left(\rho \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 \overline{(\Delta V_j)^2} \sin^2\varphi;}$$

Вопрос 40

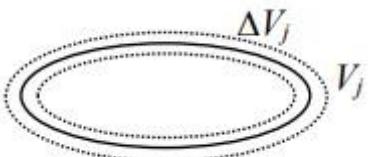
3

Рассеяние на совокупности областей оптической неоднородности не когерентно и интенсивность рассеянного света равна сумме интенсивностей света, рассеянного отдельными областями. В результате при рассеянии на статистически независимых тепловых флуктуациях плотности в совокупности объемов $\{V_j\}$ получим:

$$I = \sum_j I_j \cong I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi r c^2)^2} \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T^2 \sum_j \overline{(\Delta V_j)^2} \sin^2 \varphi;$$

Формулы Эйнштейна и Рэлея.

Формула Эйнштейна для рассеяния света в жидкостях и плотных газах.



Пусть выделенный объем жидкости или газа флюкутирует **при данной температуре** на малую величину ΔV_j . Тогда в первом приближении:

$$\left(\frac{\Delta P_j}{\Delta V_j} \right) \cong \alpha_j - const < 0; \text{Работа сил давления при}$$

флюкутации будет равна:

$$\Delta A_j = \int_{\bar{V}_j}^{\bar{V}_j + \Delta V_j} (\bar{P} + \Delta P_j) dV = \int_0^{\Delta V_j} (\bar{P} + \alpha_j \Delta V_j) d(\Delta V_j) = \bar{P} \Delta V_j + \frac{\alpha_j}{2} (\Delta V_j)^2;$$

Адиабатический процесс: $\Delta Q_j = \Delta U_j + \Delta A_j = 0$; Теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы для термодинамической системы в состоянии равновесия: $\overline{\Delta U_j} = -\overline{\Delta A_j} = -\overline{\bar{P} \Delta V_j} - \frac{\alpha_j}{2} \overline{(\Delta V_j)^2} = -\frac{\alpha_j}{2} \overline{(\Delta V_j)^2} = \frac{1}{2} kT \overline{(\Delta V_j)^2} = -\frac{kT}{\alpha_j}$; В то же время по определению **изотермическая сжимаемость** $\beta_T = -\frac{1}{V_j} \left(\frac{\partial V_j}{\partial P_j} \right)_T$, следовательно:

$$\alpha_j \cong \left(\frac{\Delta P_j}{\Delta V_j} \right)_T \cong -\frac{1}{V_j \beta_T}. \text{ Таким образом: } \overline{(\Delta V_j)^2} = V_j \beta_T kT \quad \text{и} \quad \sum_j \overline{(\Delta V_j)^2} = V \beta_T kT$$

В результате для интенсивности рассеянного света в случае жидкостей и плотных газов получим формулу Эйнштейна:

$$I = I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi r c^2)^2} \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T^2 V \beta_T kT \sin^2 \varphi$$

Для жидкостей интенсивность рассеянного света примерно в 50 раз меньше, чем для газов. Это объясняется меньшими флюкутациями в жидкости, чем в газе из-за меньшей изотермической сжимаемости β_T .

Вопрос 40

4

Формула Рэлея:

В случае идеальных газов воспользуемся уравнением его состояния: $P_j V_j = N_j kT$, тогда:

$\beta_T \equiv -\frac{1}{V_j} \left(\frac{\partial V_j}{\partial P_j} \right)_T = \frac{1}{V_j} N_j kT \frac{1}{P_j^2} = \frac{1}{P_j}$, $\beta_T kT = \frac{kT}{P_j} = \frac{V_j}{N_j} \cong \frac{1}{N}$, где N_j - число молекул (атомов) в объёме V_j , N - средняя концентрация молекул, одинаковая по всем объёмам V_j . Воспользуемся выражением для диэлектрической проницаемости газа: $\epsilon - 1 = N\beta = N_A \frac{\rho}{\mu} \beta$; $\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} = \rho N_A \frac{1}{\mu} \beta = \epsilon - 1 = n^2 - 1 \cong 2(n - 1)$, где β – поляризумость молекулы. В результате получим формулу Рэлея для рассеяния света в газе:

$$I = I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi r c^2)^2} 4(n - 1)^2 \frac{V}{N} \sin^2 \varphi$$

Важнейшие особенности молекулярного рассеяния

Индикаторы интенсивности рассеянного света в случае поляризованного падающего света – как у элементарного рассеивателя:

- линейно поляризованное излучение – $I(r, \psi, \varphi) \sim \sin^2 \varphi$
- естественная поляризация – $I(r, \psi, \varphi) \sim \frac{1 + \cos \varphi_z}{2}$

Поляризация рассеянного света:

- от изотропных молекул – как у элементарного рассеивателя: $P(\varphi_z) \equiv \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{I_{\perp} + I_{\parallel}} = \frac{\sin^2 \varphi_z}{1 + \cos^2 \varphi_z}$

- от анизотропных молекул наблюдается деполяризация света, её характеризуют коэффициентом деполяризации γ :

Коэффициент деполяризации γ – отношение интенсивности рассеянного света под углом рассеяния $\varphi_z = \frac{\pi}{2}$ с поляризацией вдоль направления падающей волны к интенсивности рассеянного света с поляризацией поперёк этого направления: $\gamma = \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}}$ ($\varphi_z = \frac{\pi}{2}$)

В газах $\gamma \sim 10^{-2}$, а в жидкостях $\gamma \sim 0.1 \div 1$. Измерения коэффициента деполяризации позволяют делать заключения относительно анизотропии молекул и делать выводы относительно ее структуры. Для этого особо пригодны измерения в парах и газах, ибо в жидкой фазе сильны межмолекулярные взаимодействия, увеличивающие степень деполяризации.

Закон Рэлея – $I \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}$ – как у элементарного рассеивателя. Это объясняет голубой цвет неба и красное заходящее солнце.

Вопрос 40

5

Критическая опалесценция - явление возрастания интенсивности рассеянного излучения вблизи критической температуры – температуры, при которой плотности (а также давления) насыщенного пара и жидкости, находящиеся в динамическом равновесии, становятся одинаковыми. Вблизи этой температуры возрастают сжимаемость вещества $\beta_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ и производная $\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T$. Вблизи критических точек фазовых переходов интенсивность флуктуаций значительно возрастает, и размеры областей неоднородностей становятся сравнимыми с длиной волны света, что приводит к резкому усилению рассеяния света средой – критической опалесценции, осложненной явлением переизлучения.

Селективное по частоте рассеяние интенсивность рассеянного излучения / возрастает вблизи собственных частот элементарного рассеивателя $\omega \sim \omega_0$, поскольку при этом возрастает показатель преломления n , а значит и $I \sim (n - 1)^2$

Вопрос 41

Излучение света. Классическая осцилляторная модель атома. Оценка времени затухания. Естественная форма и ширина линии излучения.

Классическая осцилляторная модель атома:

Для остроты положим, что в атоме есть всего один оптический электрон. По определению электрического дипольного момента $\vec{p}(t) = q\vec{x}(t)$ где $x(t)$ - смещение электрона относительно ядра.

Рассмотрим электрон в атоме, как затухающий гармонический осциллятор (атомный осциллятор), колебания которого описываются классическим уравнением движения $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx$

Уравнение движения электрона $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Закон движения электрона $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$

Затухание колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$

При $\delta \ll \omega$ $\langle x^2(t) \rangle_T = \langle x_0^2 e^{-2\delta t} \cos^2(\omega t + \varphi_0) \rangle \cong \frac{1}{2} x_0^2 e^{-2\delta t}$

$\dot{x}(t) = x_0 e^{-\delta t} (-\delta \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega \sin(\omega t + \varphi_0))$

$\langle \dot{x}^2(t) \rangle_T \cong \frac{1}{2} x_0^2 e^{-2\delta t} (\delta^2 + \omega^2) = \frac{1}{2} x_0^2 \omega^2 e^{-2\delta t}$

Кинетическая энергия атомного осциллятора

$$\langle W_k \rangle = \langle \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \rangle = \frac{1}{4} m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t} = \frac{1}{4} k x_0^2 e^{-2\delta t}$$

Потенциальная энергия атомного осциллятора

$$\langle W_\Pi \rangle = \langle \frac{1}{2} k x^2 \rangle = \frac{1}{4} k x_0^2 e^{-2\delta t}$$

Полная энергия

$$\langle W \rangle = \langle W_\Pi \rangle + \langle W_k \rangle = \omega_0 e^{-2\delta t}$$

Средняя мощность потерь атомного осциллятора

$$\langle P \rangle_T = \langle \frac{dW}{dt} \rangle_T = -2\delta\omega_0 e^{-2\delta t} = -\delta m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t}$$

$$\begin{aligned} I &= \oint I(r, \theta) d\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varepsilon_0 c \frac{w^4}{(4\pi e_0 c r^2)^2} p^2(t) \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &\cong \frac{w_0^4}{12\pi e_0 c^3} q^2 x_0^2 e^{-2\delta t} \end{aligned}$$

Вопрос 41

Приравнивая, получим:

$$\delta = \frac{w_0^2}{12\pi e_0 mc^3} q^2$$

Время радиационного затухания

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{12\pi e_0 mc^3}{w_0^2 q^2}$$

$$\text{Время жизни атома в возбужденном состоянии } \Delta t = \frac{\tau}{2} = \frac{6\pi e_0 mc^3}{w_0^2 q^2}$$

$$2. \vec{p}(t) = q\vec{x}(t) = p_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \vec{E}(t, r) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2 r} [\vec{n}[\vec{n} \ddot{p}(t - \frac{r}{c})]]$$

$$\vec{p}(t) = -w_0^2 p_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad E(t) = E_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$f(t) = f_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t), \omega_0 \gg \delta$$

$$|f(iw)|^2 = \left(\frac{f_0}{2\delta}\right)^2 L\left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta}\right)$$

$$\text{Где L – функция Лоренца } L(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Delta\omega = 2\delta = \frac{1}{\Delta t} = \frac{w_0^2 q^2}{6\pi e_0 mc^3}$$

$$|E(iw)|^2 = \left(\frac{E_0}{\Delta\omega}\right)^2 L\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega/2}\right)$$

Лоренцева форма линии образуется при естественных условиях излучения, когда единственным фактором, влияющим на излучение осциллятора, является радиационное затухание. Эта форма – естественная форма линии излучения, а $\Delta\omega$ – естественная ширина линии излучения

Оценка времени затухания:

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{12\pi e_0 mc^3}{w_0^2 q^2} = 2,3 * 10^{-8} c$$

Билет № 42

Ударное уширение Пусть вероятность столкновения в единицу времени α не зависит от времени. Если $P(t)$ - вероятность отсутствия столкновения до момента времени t , при этом в начальный момент времени столкновения не было ($P(0)=1$), то: $P(t+dt) = P(t)(1 - \alpha dt)$, $dP = -P(t)\alpha dt$, $P(t) = e^{-\alpha t}$. Вероятность того, что не было столкновения до момента времени t и в следующий интервал времени dt произойдет столкновение, то есть плотность вероятности столкновения в момент времени t : $P(t)dt = P(t)\alpha dt$, $P(t) = \alpha e^{-\alpha t}$

Среднее время между столкновениями τ_0 будет:

$$\tau_0 = \bar{t} = \int_0^\infty tae^{-\alpha t} dt = \alpha \int_0^\infty te^{-\alpha t} dt = \alpha \left(t \left(-\frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} dt \right) = \frac{1}{\alpha}$$

Вероятность столкновения в интервале времени $[\xi, \xi + d\xi]$: $P(\xi)d\xi = (\frac{1}{\tau_0})e^{-\frac{\xi}{\tau_0}}d\xi$

$$\tau >> \tau_0 : E(t) = E_0 e^{i(\omega_0 t + \phi_0)}$$

KCA: $E(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{t_0}^{t_0+\xi} E_0 e^{i(\omega_0 t - \omega t + \phi_0)} dt = E_0 e^{i((\omega_0 - \omega)t_0 + \phi_0)} e^{i(\omega_0 - \omega) \frac{\xi}{2}} \frac{2 \sin((\omega_0 - \omega) \frac{\xi}{2})}{i(\omega_0 - \omega)}$

Спектральная интенсивность: $|E(i\omega)|^2 = 4E_0^2 \frac{\sin^2((\omega_0 - \omega) \frac{\xi}{2})}{(\omega_0 - \omega)^2}$

$g_L(\omega) \propto \frac{1}{\tau_0} \int_0^\infty |E(i\omega)|^2 \exp(-\frac{\xi}{\tau_0} d) d\xi = \frac{1}{\tau_0} \int_0^\infty \frac{\sin^2((\omega_0 - \omega) \frac{\xi}{2})}{(\omega_0 - \omega)^2} \exp(-\frac{\xi}{\tau_0}) d\xi = \frac{1}{2} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\frac{1}{\tau_0})^2}$, где $g_L(\omega)$ - нормированная функция, описывающая в оптике лоренцевый контур спектральных линий. Как видим, ударное уширение характеризуется лоренцевой формой линии с шириной: $\Delta\omega_L = \frac{2}{\tau_0}$

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 n}}, \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kt}{\pi m}}$$

$$\tau_0 = \frac{\langle l \rangle}{\langle v \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 n}} \langle v \rangle = \frac{\sqrt{mkt}}{4\sqrt{\pi d^2 p}} \quad \text{Ударное уширение} \quad \Delta\omega_L = \frac{2}{\tau} = \frac{8\sqrt{\pi}d^2 p}{\sqrt{mkt}}$$

Доплеровское уширение спектральной линии Излучающий осциллятор участвует в тепловом движении. Тогда в соответствии с эффектом Доплера, излучаемая им частота не равна частоте покоящегося атома. ЗСЭ и ЗСИ в возбужденном (2) и основном (1) состояниях: $E_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = E_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + h\omega$ – энергия испущенного фотона, $m\bar{v}_2 = m\bar{v}_1 + \bar{h}\bar{k}$ – импульс испущенного фотона,

$$h(\omega_0 - \omega) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$m^2v_1^2 = m^2v_2^2 - 2mh\bar{v}_2\bar{k} + h^2k^2$$

$h(\omega_0 - \omega) = \frac{h^2k^2}{2m} - hv_2\bar{k}$. Вдоль оси z: $\omega - \omega_0 = \frac{h\omega^2}{2mc^2} - \frac{\omega v_{2z}}{c}$ Для комнатной температуры и типичных масс атомов: $\frac{h\omega}{2mc^2}(10^{-9}) \ll \frac{v_{2z}}{c}(10^{-5})$. Частота излучения атома и проекция его скорости v_{2z} линейно связаны (продольный эффект Доплера): $\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v_{2z}}{c}} \approx \omega_0(z + \frac{v_{2z}}{c})$

Распределение Максвелла: $\omega(v_{2z})dv_{2z} \propto \exp(-\frac{mv_z^2}{2kt})dv_{2z}, \omega \approx \omega_0(1 + \frac{v_{2z}}{c}), d\omega = \frac{\omega_0}{c}dv_{2z}$

$$g_D(\omega)d\omega = \omega(v_{2z})dv_{2z}, g_D(\omega)d\omega \propto \exp(-\frac{mc^2(\omega - \omega_0)^2}{2kt\omega_0^2}d\omega) = \exp(-(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega/2}m^2))d\omega$$

как видим, ударное уширение характеризуется гауссовой формой линии с шириной на половине высоты распределения: $\Delta\omega_G = \omega_0 \sqrt{\frac{8ktm^2}{mc^2}} \propto \sqrt{T}$

Однородный ансамбль осцилляторов - ансамбль, в котором осцилляторы имеют одинаковые собственные частоты колебаний. Однородно уширенная спектральная линия - спектральная линия однородного ансамбля осцилляторов, равная суперпозиции спектральных линий отдельных осцилляторов. Однородная ширина $\Delta\omega$ характеризует спектр колебаний с одинаковыми собственными частотами. Причины- одинаковость квантовых состояний атомов или молекул, однородность изотопного или химического состава среды.

Неоднородный ансамбль осцилляторов - ансамбль, в котором осцилляторы имеют разные собственные частоты. Неоднородно уширенная спектральная линия - спектральная линия неоднородного ансамбля осцилляторов, равная суперпозиции спектральных линий отдельных осцилляторов. Неоднородная ширина $\Delta\omega$ характеризует спектр колебаний ансамбля осцилляторов с разными собственными частотами. Причины- различие квантовых состояний атомов или молекул, неоднородность изотопного или химического состава среды, хаотическое тепловое движение частиц и т.п.

Вопрос 43

Основные представления о квантовой теории излучения света атомами и молекулами. Модель двухуровневой системы. Спонтанные и вынужденные радиационные переходы. Коэффициенты Эйнштейна. Взаимосвязь коэффициентов Эйнштейна. Формула Планка.

1-й постулат Бора : атомная система может находиться только в особых стационарных или квантовых состояниях, каждому из которых соответствует определенная энергия E_n .

2-й постулат Бора (правило частот): при переходе атома из одного стационарного состояния с энергией E_n в другое стационарное состояние с энергией E_m излучается или поглощается квант, энергия которого равна разности энергий стационарных состояний

В пределах квантового размера (длины волны фотона с энергией равной $E_n - E_{n+1}$) атомная система не может иметь квантовых состояний с одинаковой энергией. (из принципа Паули)

Линейчатый спектр поглощения и испускания характерен для одноатомных газов и примесных атомов в веществе в конденсированном состоянии.

Полосатый спектр - для многоатомных газов и примесных молекул в веществе в конденсированном состоянии.

Непрерывный спектр (разрешенные и запрещенные зоны) - для атомов и молекул в конденсированном состоянии.

Вопрос 43

Рассмотрим упрощенную модель изучаемой атомной системы, которая взаимодействует с внешним электромагнитным полем. Рассмотрим два энергетических уровня с энергиями E_1 и E_2 , причем $E_2 > E_1$, между которыми происходит изучаемый оптический переход, характеризуемый частотой $\nu_{12} = \nu_{21} = (E_2 - E_1)/h$, где $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Будем считать энергетические уровни E_1 и E_2 бесконечно узкими и невырожденными.

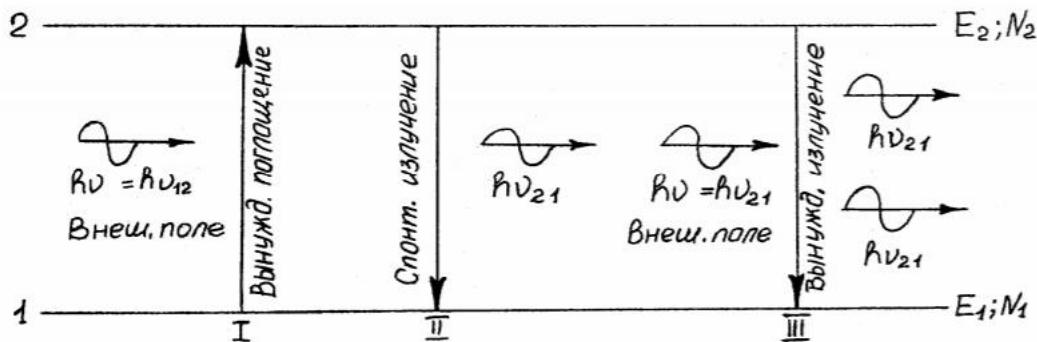


Рис. 1. Элементарные процессы в двухуровневой атомной системе

Пусть плоская электромагнитная волна частоты ν проходит через слой вещества, представляющего **двухуровневую систему**. Пусть N_1 – число атомов в единице объема вещества, находящихся на нижнем уровне E_1 , а N_2 – на верхнем уровне E_2 .

В результате взаимодействия электромагнитной волны (т.е. световых квантов с энергией $h\nu$) с атомами вещества будут происходить изменения ее интенсивности, обусловленные указанными выше элементарными процессами. Рассмотрим эти процессы.

1. Резонансное поглощение фотонов частоты $\nu = \nu_{12} = (E_2 - E_1)/h$, при котором атомы переходят с нижнего уровня E_1 на верхний – в возбужденное состояние с энергией E_2 . Скорость этого процесса характеризуется числом переходов в единицу времени (в расчете на 1 м^3). Она пропорциональна числу невозбужденных атомов N_1 и спектральной объемной плотности ρ_ν энергии падающей волны частоты ν , приходящейся на частоту перехода ν_{12} :

$$\frac{dN_{1\text{nor}}}{dt} = B_{12} N_1 \rho_\nu, \quad (6)$$

где $B_{12} [\text{Дж}^{-1}\text{м}^3\text{с}^{-2}]$ – **коэффициент Эйнштейна для поглощения**, $B_{12} \rho_\nu$ – вероятность вынужденного перехода, отнесенная к единице времени.

2. Спонтанное излучение фотонов с частотой ν_{21} атомами, при которых они самопроизвольно переходят из возбужденного состояния E_2 на уровень E_1 . Число этих переходов (в расчете на 1 м^3) в единицу времени пропорционально населенности N_2 верхнего уровня и равно:

Вопрос 43

3

$$\frac{dN_{2\text{сп}}}{dt} = A_{21}N_2, \quad (7)$$

где $A_{21}[\text{с}^{-1}]$ – *коэффициент Эйнштейна, характеризующий вероятность спонтанных переходов в единицу времени* в расчете на один атом на верхнем уровне N_2 и имеет смысл величины обратной среднему времени жизни возбужденного состояния атома.

Так как эти переходы происходят вследствие внутренних причин и статистически независимы, каждый атом излучает квант света в произвольном направлении, с произвольной начальной фазой и поляризацией. В результате этого спонтанное излучение носит тепловой (“шумовой”) характер и по отношению к внешнему электромагнитному полю будет **некогерентным**.

3. Вынужденное или индуцированное излучение фотонов с частотой $v_{21} = v$, при котором атомы переходят из возбужденного состояния E_2 в состояние E_1 под действием *внешнего светового поля*. Число этих переходов в единицу времени (в расчете на 1м^3) пропорционально населенности N_2 верхнего уровня и спектральной плотности электромагнитного поля ρ_v и будет равно:

$$\frac{dN_{2\text{вын}}}{dt} = B_{21}N_2\rho_v, \quad (8)$$

где $B_{21} [\text{Дж}^{-1}\text{м}^3\text{с}^{-2}]$ – *коэффициент Эйнштейна для вынужденного излучения*; $(B_{21}\rho_v)$ – вероятность индуцированного перехода с излучением фотона, отнесенная к единице времени.

Важной особенностью вынужденных переходов является то, что излучаемый под действием внешнего поля квант полностью когерентен с внешним полем, т.е. имеет ту же частоту, фазу, поляризацию и распространяется по тому же направлению. Таким образом вынужденное излучение является когерентным по отношению к внешнему полю.

2.2.1.Кинетические уравнения, коэффициенты Эйнштейна

В силу статистической независимости указанных процессов можно составить так называемые кинетические уравнения, описывающие изменение населенностей рассматриваемых двух уровней во времени. Для этого запишем *балансные уравнения*, характеризующие общее изменение населенностей уровней 1 и 2:

$$dN_1 = dN_{2\text{сп}} + dN_{2\text{вын}} - dN_{1\text{пог}}, \quad (9)$$

$$dN_2 = dN_{1\text{пог}} - dN_{2\text{сп}} - dN_{2\text{вын}}. \quad (10)$$

Из них, учитывая (6), (7), (8), получим **кинетические уравнения**:

$$dN_1 = \{(A_{21} + \rho_v B_{21})N_2 - B_{12}\rho_v N_1\}dt, \quad (11)$$

$$dN_2 = \{B_{12}\rho_v N_1 - (A_{21} + \rho_v B_{21})N_2\}dt. \quad (12)$$

Вопрос 43

Вероятностные коэффициенты Эйнштейна A_{21} , B_{21} , B_{12} не являются независимыми. Соотношение между ними можно найти из рассмотрения случая, когда атомная система будет находиться в термодинамическом равновесии с внешним электромагнитным полем [1-7]. В этом случае:

1) населенности уровней остаются неизменными, т.е. $dN_1 = 0$ и $dN_2 = 0$, вследствие чего из кинетических уравнений (11) или (12) имеем:

$$(A_{21} + \rho_v B_{21})N_2 = B_{12}\rho_v N_1; \quad (13)$$

2) распределение атомов по уровням энергии подчиняется закону Больцмана, имеющего (для невырожденных уровней) вид:

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{hv}{kT}\right), \quad (14)$$

где k – постоянная Больцмана;

3) спектральная плотность равновесного излучения ρ_v определяется формулой Планка:

$$\rho_v = \frac{8\pi hv^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hv}{kT}} - 1}. \quad (15)$$

Решая (13) и (14) относительно ρ_v , получаем:

$$\rho_v = \frac{A_{21}/B_{21}}{\left(B_{12}/B_{21}\right) \cdot e^{\frac{hv}{kT}} - 1}. \quad (16)$$

Термодинамическое равновесие может быть установлено для любой температуры, в том числе для $T \rightarrow \infty$. Поэтому, сравнивая асимптотики формул (15) и (16), получаем:

$$B_{12} = B_{21}, \quad (17)$$

$$A_{21} = \frac{8\pi hv^3}{c^3} \cdot B_{21} \quad (18)$$

Коэффициент A_{21} , как отмечено выше, имеет смысл величины, обратной среднему времени жизни возбужденного состояния атома.

- Формула Планка для спектрально-объемной плотности энергии излучения абсолютно черного тела:

$$u_\omega d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega, \quad (3.5)$$

где T – температура этого тела.

Вопрос 44

Многоуровневые системы. Энергетическая структура атомов, молекул и твердых тел. Явление люминесценции: определение и классификация, механизмы и свойства.

Энергетическая структура атомов молекул и твердых тел:

а) Атомов – линейчатая (серии Лаймана, Бальмара, Пашена, ...)

$$W_n = -\frac{(z-a)^2}{n^2} Rhc$$

$$\hbar W_{nm} = W_n - W_m = Rhc \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

n – главное квантовое число, R=10973731 м⁻¹ – постоянная Ридберга, a – константа экранирования

б) Молекул – линейчато-полосатая

Три типа переходов – электронные, колебательные и вращательные

Энергия колеб. движения $w_v = \hbar\omega_v \left(v + \frac{1}{2} \right)$, v = 0,1,2 ... – колеб квант число, ω – частота колебания

Энергия вращ. Движ $W_r = \frac{L_r^2}{2J} = \frac{\hbar^2 r(r+1)}{2J}$, J – момент энержии, r – вращ квант число

в) Твердых тел – полосатая

Люминесценция – квантовый неравновесный процесс спонтанного излучения при энергетических переходах, происходящих после возбуждения веществ в газообразном (в атомах и молекулах) жидким и твердом состояниях.

Люминесценция представляет собой избыток над тепловым излучением тела и продолжается в течение времени t, значительно превышающего период световых колебаний. Вещество, на которое оказывается энергетическое воздействие, должно находиться в с состоянии, близком к равновесному.

При сильном отклонении от равновесного состояния говорить о тепловом излучении или люминесценции не имеет смысла.

Излучение некогерентно, поскольку длительность между энергетическим воздействием и испусканием фотона больше периода световой волны.

В природе – северное сияние, свечение насекомых, минералов.

Способ возбуждения	Вид люминесценции
Электромагнитное излучение УФ- и видимого спектрального диапазона	Фотолюминесценция
Поток электронов (катодные лучи)	Катодолюминесценция
Поток ионов щелочных металлов в вакууме	Ионолюминесценция
Рентгеновское излучение	Рентгенолюминесценция
Радиоактивное излучение	Радиолюминесценция
Тепловая энергия	Термо/кандолюминесценция
Ультразвук	Сонолюминесценция
Механическое воздействие	Триболюминесценция
Энергия химических реакций	Хемилюминесценция

Вопрос 44

2

Длительность свечения

- 1) Флуоресценция $t \leq 10^{-8}$
- 2) Фосфоресценция $t > \sim 10^{-8}$

Свойства люминесценции

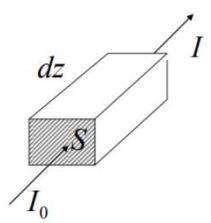
Правило Стокса-Лоннеля – спектр люминесценции в целом и его максимум всегда сдвинуты по сравнению со спектром поглощения и его максимума в сторону длинных волн.

При спонтанной люминесценции успевает наступить термодинамическое равновесие по колебательным степеням свободы. В этом случае спектр люминесценции не зависит от длины волны возбуждающего света и ширина спектра люминесценции определяется шириной нижней энергетической полосы, образованной набором уровней, соответствующих различным колебательным состояниям и одному электронному состоянию.

Вопрос 45

Резонансное усиление света. Линейные коэффициенты поглощения и усиления среды. Инверсная заселенность энергетических уровней. Воздействие светового потока на заселенность уровней. Получение инверсной заселенности с помощью трехуровневой системы. Зависимость коэффициента усиления от частоты.

Рассмотрим взаимодействие света с резонансной частотой ω с системой двухуровневых атомов



$$dV = dzS$$

$n_{1,2}$ - концентрация атомов на нижнем (1) верхнем (2) уровнях

$$n = n_1 + n_2$$

$$dN_i = n_i dV \quad - \text{число атомов в объеме } dV$$

Испускаемая и поглощаемая мощность излучения в объеме dV :

$$dP_{21}^{cn} = \hbar\omega A dN_2,$$

$$dP_{21}^{вын} = \hbar\omega B\rho dN_2,$$

$$dP_{12}^{вын} = \hbar\omega B\rho dN_1.$$

$$dS(w)\sigma = (P_{nm}^{cn} + P_{nm}^{вн} + P^n)\sigma dz - \text{полнная мощность в объеме}$$

$$dS(w) = (a_{nm}(w)N_n + b_{nm}(w)N_n u(w) - b_{nm}(w)N_m u(w) h w d z)$$

$$S(w) = v u(w) = \frac{h w}{v} S(w) \left(\frac{a_{nm} N_n v}{S(w)} + b_{nm} N_n - b_{nm} N_m \right) dz = -\alpha_{nm}(w) S(w, z) dz$$

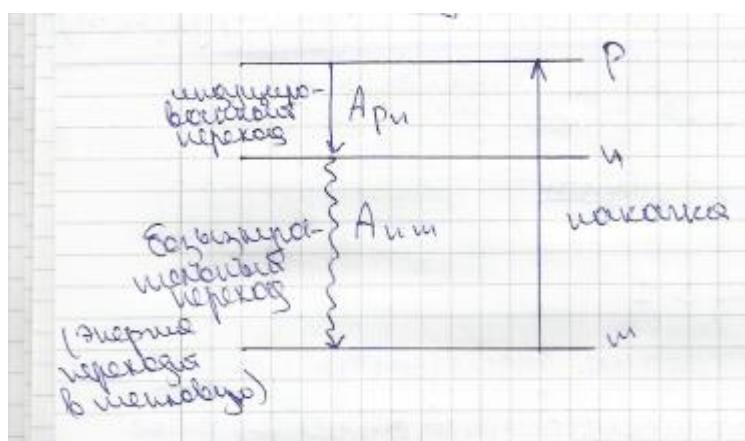
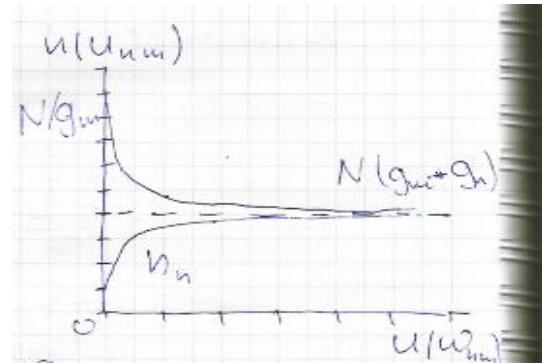
$$\alpha_{nm} = \frac{h w}{v} (b_{nm} N_m - b_{nm} N_n)$$

$$S(w, z) = S_0(w) e^{-\alpha_{nm}(w)z}, \alpha_{nm}(w) = \frac{h w}{v} b_{nm} g_n \left(\frac{b_{nm} g_m N_m}{b_{nm} g_n g_m} - \frac{N_n}{g_n} \right) = \frac{h w}{v} b_{nm} g_n (n_m - n_n)$$

$$n_{m,n} = \frac{N_{m,n}}{g_{m,n}} - \text{относительная заселенность}$$

$$\beta_{n,m} = -\alpha_{nm}(w) = \frac{h w}{v} b_{nm} g_n (n_n - n_m) -$$

коэффициент усиления среды. Среда для которой $n_n > n_m$ называется активной (среда с инверсной заселенностью)



$$N_{n,m} = \frac{N}{z} g_{n,m} \exp \left(-\frac{W_{n,m}}{kT} \right)$$

$$\frac{n_m}{n_n} = \exp \left(\frac{h w_{n,m}}{kT} \right) > 1$$

$N = N_n + N_m = \text{const}$ - полная концентрация атомов в среде

Вопрос 45

$$\frac{dN_n}{dt} = -A_{nm}N_n + B_{nm}N_m u(w_{n,m}) - B_{nm}N_n u(w_{n,m}) = 0$$

$$A_{nm}N_n + B_{nm}N_n u(w_{n,m}) = B_{nm}N_m u(w_{n,m})$$

$$A_{nm}N_n + B_{nm}N_n u(w_{n,m}) = B_{nm}(N - N_n)u(w_{n,m})$$

$$N_n = \frac{B_{nm}u(w_{n,m})}{A_{nm}N_n + (B_{nm} + B_{mn})u(w_{nm})} N$$

При увеличении спектральной плотности интенсивности $S(w) = vu(w)$ и с учетом соотношения $B_{mn}g_m = B_{nm}g_n$ получим:

$$N_n \rightarrow \frac{B_{mn}}{[(B)_{nm} + B_{mn}]} N = N \frac{g_n}{g_n + g_m} \quad N_m \rightarrow N \frac{g_m}{g_n + g_m} \text{ следовательно } n_n = \frac{N_n}{g_n} \rightarrow \frac{N}{g_n + g_m}$$

$$n_m = \frac{N_m}{g_m} \rightarrow \frac{N}{g_n + g_m}$$

Трёхуровневая система:

С E_p на E_n до тех пор, пока их населенности не сравняются, тогда процесс усиления прекратится. E_n постоянно опустошается и скорость опустошения не меньше скорости заселения за счет излучательных переходов $A_{pn}g_p > A_{nm}g_n$

Лазеры – устройство и принцип работы. Принципиальная схема лазера. Условия стационарной генерации. Продольные и поперечные моды колебания и излучения. Спектральный состав излучения лазера. Ширины линии излучения и полосы усиления, величина межмодового интервала. Одномодовый лазер. Примеры лазеров.

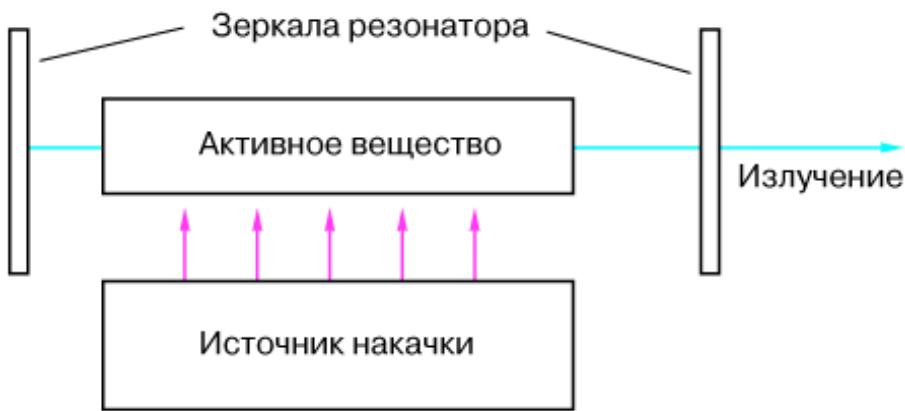
Лазеры - устройство и принцип работы:

LASER - Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation. Усиление света путём вынужденного излучения.

Источники света, атомы которых излучают волны согласованно, т.е. с одинаковыми частотами, фазами, поляризацией и направлением распространения – оптические квантовые генераторы или лазеры. Работают на принципе индуцированного излучения.

Падает фотон с энергией $\hbar\omega = E_2 - E_1$, где E_1 и E_2 – энергетические уровни атома. В зависимости от расположения уровней запись описывает либо поглощение либо излучение фотона. Индуцировано излученный фотон характеризуется той же частотой, фазой, поляризацией и направлением распространения. Это и используется в лазерах.

Принципиальная схема:



Активное вещество/активная среда - рабочая среда с инверсной заселенностью уровнями.

Источник накачки/система накачки - источник энергии для создания и поддержания активной среды.

Зеркала/оптический резонатор - обратная связь для генерации.

При подаче излучения определенной частоты устройством накачки в активной среде возникает избыток возбужденных атомов. Спонтанные фотоны, возникающие внутри активной среды, взаимодействуют с возбужденными атомами и в конечном счете инициируют мощную лавину вынужденно испущенных фотонов, которая и образует лазерный луч. За счет отражения от, допустим, двух зеркал оптического резонатора увеличивается плотность вынужденного излучения и формируется его направление. Лазерный луч выходит в виде параллельного пучка света из резонатора через выходное окно/зеркало, частично пропускающее световое излучение.

Накачка ==> Инверсная Заселенность ==> Спонтанное Излучение ==> Вынужденное Излучение ==> Усиление Света ==> Обратная Связь ==> Генерация Света

Условия стационарной генерации:

Элементарный цикл – два последовательных прохождения через активную среду и соотв. отражения от зеркал.

Баланс амплитуд - условие усиления для возникновения генерации:

$$\frac{S(\omega)}{S_0} = R_1 R_2 e^{\beta(\omega)2L} > 1 \quad (1)$$

где R_i – коэф. отражения зеркал (по энергии), L – длина резонатора.

Баланс фаз – условие цикличности для генерации:

$$2L = m \cdot l_m \quad (2)$$

Длительность импульса τ определяется временем нахождения системы в условиях генерации и зависит от момента времени выхода системы из этих условий вследствие изменения инверсной заселенности ($\beta(\omega) \downarrow$) или уменьшения добротности (увеличение потерь - $\beta_{nor} \uparrow$).

Добротность системы Q - отношение запасённой в системе энергии W к потере энергии δW за один период T_m световых колебаний.

$$W = W\sigma L \quad (3)$$

$$\Delta W = \left(\frac{W\sigma L}{2} \right) * (1 - R_1 + R_1 * (1 - R_2)) * \left(\frac{T_m v}{2L} \right) = \left(\frac{W\sigma L}{2} \right) * (1 - R_1 R_2) * \left(\frac{1}{m} \right) \quad (4)$$

$Q = \frac{W}{\Delta W} = \frac{2m}{1 - R_1 R_2} = \frac{2m}{1 - e^{-2f}} \approx \frac{m}{f} = \frac{m}{\beta_{nor}^2}$ где σ - площадь поперечного сечения лазерного пучка.

$T = 2L/v$ - продолжительность цикла.

Продольные и поперечные моды колебания и излучения:

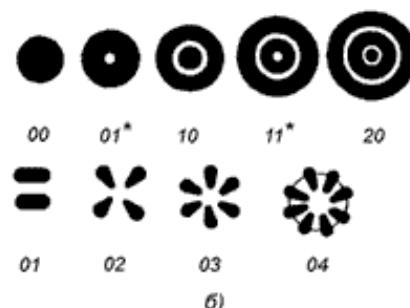
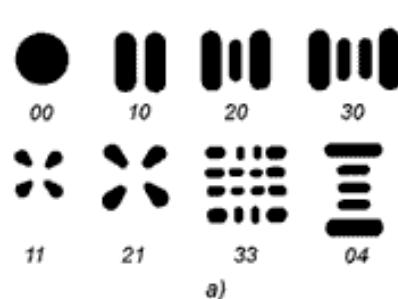
Стационарность и цикличность порождают стоячие и бегущие волны.

Стоячая волна - суперпозиция гармонических волн, мод колебаний.

Продольные моды $-(0, 0, m_z)$ - в плоскости XOY нет узлов:

$$k_{mz} = \frac{2\pi}{\lambda_{mz}} = \frac{m_z \pi}{L}; \quad \omega_{mz} = k_{mz} v = \frac{m_z \pi v}{L};$$

Поперечные моды - $m_x, m_y \neq 0$ – число узлов в плоскости XOY



Много всяких мод (поперечные с прямоугольной и осевой симметрией):

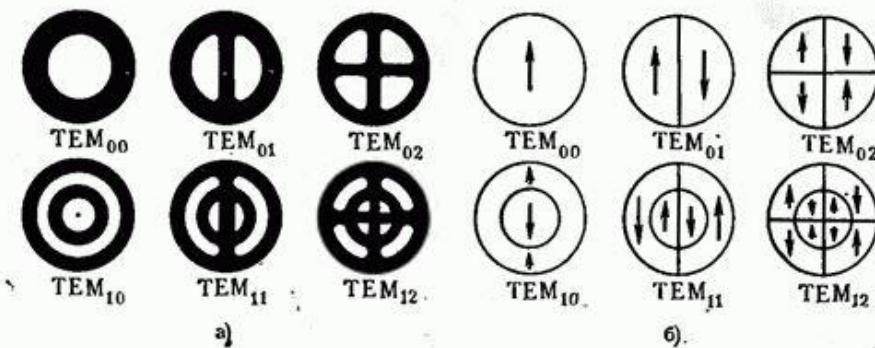
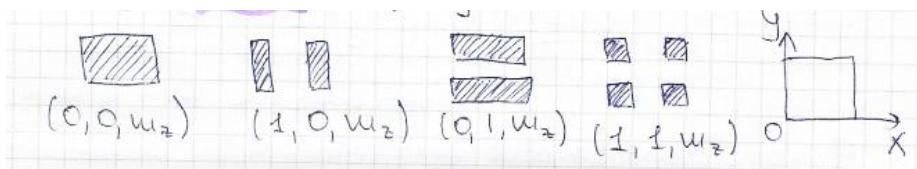


Рис. 2.7



Спектральный состав излучения лазера:

Спектр излучения лазера является монохроматическим, т. е. имеет очень узкую спектральную ширину, но он так же имеет сложную структуру.

Ширина спектральной линии зависит от нескольких причин, главные из которых: – конечная ширина энергетических уровней, участвующих в излучении и определяемая квантовым принципом неопределенности, связанным со временем пребывания атомов неона в возбужденном состоянии, – уширение линии связанное с постоянным движением возбужденных частиц в разряде под воздействием электрического поля (так называемый эффект Доплера). С учетом этих факторов ширина линии равна примерно двум десяти тысячам ангстрема. Для таких узких линий в расчетах удобнее использовать ее ширину в частотной области.

Линия выходит вполне монохроматической по сравнению со всем спектром излучения неона, но назвать это когерентным излучением еще нельзя. Для получения когерентного излучения в лазере используется оптический резонатор (интерферометр).

Во многих случаях важно не только общее количество энергии, излучаемой источником за одну секунду, то есть интенсивность света, но и его спектральный состав, то есть спектр. Спектром называется интенсивность света, приходящаяся на каждый интервал длин волн то есть спектральная светимость, в зависимости от длины волны. Если свет монохроматический, то его спектр имеет вид узкого всплеска. Такой спектр можно получить от лазера. Обычные источники света (лампы накаливания, Солнце) излучают сплошной спектр.

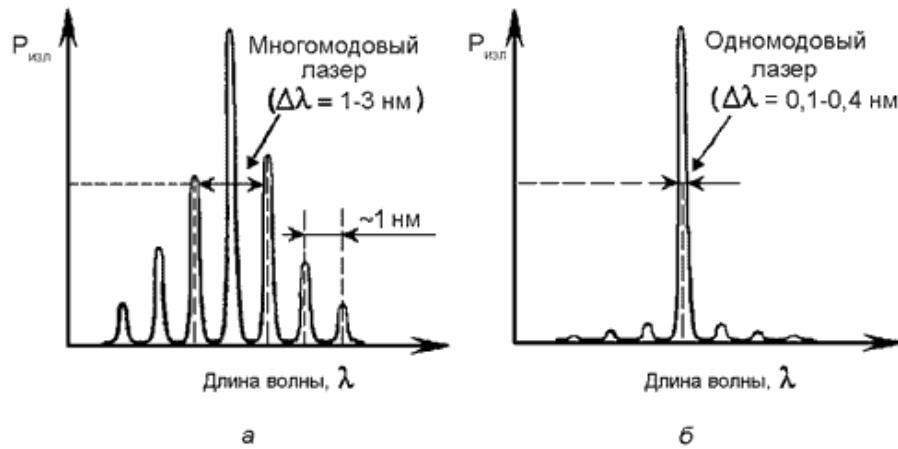


Figure 4: а спектр-то вот он

Ширины линии излучения и полосы усиления, величина межмодового интервала:

Ширина линий излучения – $\delta\omega$ ($\sim 1/\tau \sim 10^8 c^{-1}$).

Ширина межмодового интервала – $\Delta\omega_z = \pi\nu/L (\approx 10^9 c^{-1})$.

Полоса усиления – $[\omega_n; \omega_k]$.

Ширина полосы усиления – $\Delta_{us} = [\omega_n - \omega_k] (\approx 10^{10} - 10^{14})$.

Форма и ширина линейного коэффициента усиления $\beta_{lin}(\omega)$ определяются спектральной линией с учетом уширений.

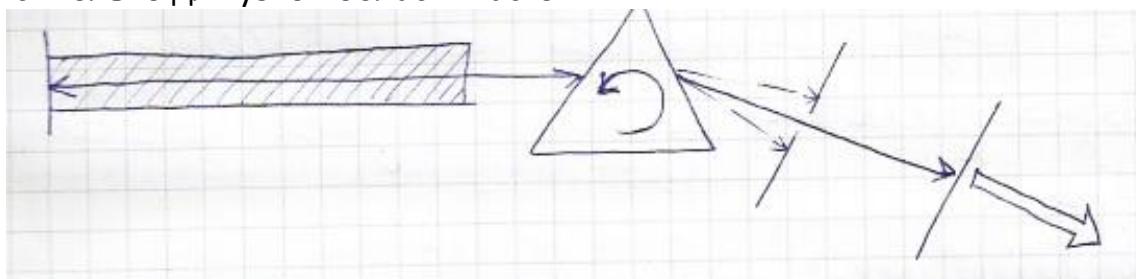
Число генерируемых мод:

$$N = \frac{\omega_k - \omega_n}{\Delta\omega_z} = \frac{\Delta\omega_{us}}{\Delta\omega_z} \quad (5)$$

Ширина линий излучения ($\delta\omega$) определяется длительностью излучения τ .
 $(\delta\omega) \sim 1/\tau$.

Одномодовый лазер:

Внутри резонатора поставлен частотный фильтр – дисперсионный элемент (призма/дифракционная решетка/др.) и диафрагма. Преодолимый порог генерации β_{por} создаётся только для узкой области частот.



Примеры лазеров:

- Газовые: активная среда – газы, по которым пускают электрический ток. Не-Не – наиболее распространённый. CO₂ - один из самых мощных лазеров с непрерывным излучением на начало 21 века (вообще смесь CO₂, He и Ne, иногда с H₂ и Xe).

- Твердотельные: активная среда – твердое тело(кристалл или стержень с ионами примеси), накачиваемое мощным потоком света от лампы накачки. Большой энергией обладает YAG (итрий-аллюминиевый гранат) с имплантированными Nd³⁺. Первым был рубиновый.

- Полупроводниковые: активная среда – полупроводниковые кристаллы. Квантовые переходы происходят между разрешенными зонами. Наиболее распространены (по способу накачки) инжекционные (инъекция носителей тока через p-n переход или гетеропереход).

- Жидкостные на красителях: активная среда – сложные органические соединения. Широко используемый краситель - родамин 6G. Высокая эффективность преобразования энергии волны накачки в энергию генерируемой получается при использовании в кач-ве растворителя этанола.

- Волоконные: активная среда – Nd, Yb, Er, Ho, Tm.

Вопрос 47

1

Нелинейные оптические явления. Поляризация среды в поле высокоинтенсивного лазерного излучения. Среды с квадратичной нелинейностью. Оптическое детектирование и генерация гармоник.

Нелинейные оптические явления:

Нелинейная оптика-это раздел физики, который изучает явления взаимодействия света и вещества, которые протекают по-разному в зависимости от интенсивности света. В этом разделе физики рассматриваются вещества, у которых имеется нелинейная зависимость вектора поляризации от вектора напряженности электрического поля световой волны. Для большинства веществ такая нелинейность может наблюдаться лишь при очень высоких интенсивностях света. Такие интенсивности достигаются при помощи лазеров. Взаимодействие или процесс называются линейными, если их вероятность пропорциональна первой степени интенсивности излучения. Если же эта степень больше единицы, они называются нелинейными.

Нелинейная оптика изучает целый ряд физических явлений, таких как генерация оптических гармоник, выпрямление света, вынужденное рассеяние 2 света, самофокусировка световых пучков.

Поляризация среды в поле высокоинтенсивного лазерного излучения:

Взаимодействие световой волны с веществом описывается вектором поляризации P . В линейной оптике поляризация связана линейно с напряженностью электрического поля E световой волны

$$P = \chi E$$

Где χ - диэлектрическая восприимчивость

Удерживающая электрон около положения равновесия сила $f(x) = -m\omega_0^2 x$ подчиняется закону Гука лишь при малых x . в общем случае

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + (x^2/2!)f''(0) + (x^3/3!)f'''(0) + \dots$$

Электрическая поляризация среды в сильном поле:

$$P(t) = \epsilon_0(kE(t) + \chi E^2(t) + \xi E^3(t) + \dots) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + \dots$$

где k – линейная (оптическая) восприимчивость, χ – нелинейная восприимчивость второго порядка, ξ – нелинейная восприимчивость третьего порядка.

Разложение в ряд по отношению $\lambda E^2/kE \sim \xi E^3/\lambda E^2 \sim E/E_{est}$

Можно записать формулу поляризованности следующим образом:

$$P(t) = \epsilon_0 A \cos \omega t - kA^2 \cos^2 \omega t - kz + \xi A^3 \cos^3 \omega t - kz + \dots = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + \dots$$

Далее по слагаемым что и кого из себя представляет:

- 1) Постоянное (статическое) электрическое поле, обусловленное первым слагаемым (выпрямление или детектирование).
- 2) Световую волну частоты ω - первая гармоника.
- 3) Световую волну частоты 2ω - вторая гармоника.

Вопрос 47

- 4) Световую волну частоты 3ω - третья гармоника
 5) Также возможна генерация гармоник высшего порядка.

Среды с квадратичной нелинейностью:

При определенных условиях, одним из которых является высокая когерентность излучения, волна может претерпеть значительные нелинейные искажения и, в частности, преобразоваться в волну второй гармоники. Появление второй гармоники связано с квадратичным членом в разложении поляризации P по степеням электрического поля световой волны.

$$P(t) = \epsilon_0(kE(t) + \chi E^2(t)) = P_1(t) + P_2(t).$$

Квадратичной нелинейностью обладают кристаллы, у которых отсутствует центр симметрии (KDP , $LiNbO_3$ итд). Они обладают электрооптическими свойствами и являются пьезоэлектриками (связь деформации с индуцированным зарядом).

Оптическое детектирование и генерация гармоник:

Волна поляризованности и ЭМ волна взаимно обуславливают друг друга.

из Максвелла: $\text{rot}(\text{rot}(E)) + 1/c^2 \delta^2 E / \delta t^2 + \mu_0 \delta^2 P / \delta t^2 = 0$

Генерация волн с новыми частотами происходит при условиях пространственного синхронизма. Условие фазового синхронизма:

$$k_1 + k_2 = k_3$$

Для удвоения частоты выглядит так:

$$n(\omega_1) = n(2\omega_1)$$

Угол между оптической осью нелинейного кристалла и волновыми векторами взаимодействующих волн называют углом фазового (волнового, пространственного) синхронизма.* там какая-то дичь про тензоры, не пугайся, но если интересно - чекай МАТЬвеева*

Оптическое детектирование – выпрямление высокочастотного светового поля:

$$U(t) \sim \sigma(t) \sim \langle P(t) \rangle \sim \langle E^2(t) \rangle \sim E_0^2(t) = I(t)$$

Генерация второй гармоники:

Генерация второй гармоники (также называется удвоением частоты или сокращенно ГВГ) является нелинейно-оптическим процессом, в котором фотоны взаимодействуют с нелинейным материалом, эффективно "объединяясь" для формирования новых фотонов с удвоенной энергией, и, следовательно, с удвоенной частотой и длиной волны в половину меньшей начальной. Это особый случай сложения частот излучения.

Для гармонических колебаний поля световой волны $E = E_0 \cos \omega t$ получим из вышеуказанной формулы поляризацию на удвоенной частоте:

$$P = \chi E^2 = \chi E_0^2 \cos \omega t^2 = \frac{\chi E_0^2}{2} + \frac{\chi E_0^2 \cos(2\omega t)}{2}$$

Вопрос 47

3

Первое слагаемое в этом выражении не зависит от времени. С ним связано так называемое оптическое детектирование. При прохождении через нелинейную среду интенсивной световой волны в среде возникает статическая поляризованность, создающая постоянное однородное электрическое поле. Этот эффект вполне аналогичен выпрямлению переменного тока и находит применение в детекторах мощных световых пучков. В детекторе проходного типа измеряется напряжение, возникающее на обкладках конденсатора нанесенных на боковые грани нелинейного кристалла, при прохождении сквозь него лазерного импульса.

Второе слагаемое гармонически меняется во времени с удвоенной частотой основной волны ($\omega_2=2\omega$). С ним связана генерация второй гармоники в нелинейной среде.

Вторая гармоника представляет собой наложение двух волн одной и той же частоты $\omega_2=2\omega$ (вынужденной волны $\cos(2\omega t-2kz)$ и свободно распространяющейся волны $\cos(2\omega t-k_2 z)$). Обе волны распространяются в одном и том же направлении, но с разными фазовыми скоростями. Поэтому по мере их движения будет меняться разность фаз между ними, возникает характерное в таких случаях явление биений.

Вопрос 48

Нелинейные оптические явления. Поляризация среды в поле высокоинтенсивного лазерного излучения. Среды с кубичной нелинейностью. Самофокусировка волновых пучков и генерация гармоник.

Нелинейные оптические явления. (матвеев. Гл11, стр328)

При достаточно больших напряженностях электрического поля волны проявляется нелинейный характер зависимости поляризованности от напряженности.

Нелинейная поляризованность.

Уравнение движения упругосвязанного электрона, находящегося под действием электрического поля $E = E_0 e^{i\omega t}$, имеет вид:

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = eE$$

Удерживающая электрон около положения равновесия сила $f(x) = -m\omega_0^2 x$ подчиняется закону Гука лишь при не слишком больших. При больших наблюдаются отступления от закона Гука и колебания становятся нелинейными.

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots$$

Для описания движения электрона в поле световой волны с учетом нелинейности можно записать

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} = eE + f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = -m\omega_0^2$$

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = eE + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots \text{ — ангармонический осциллятор.}$$

Его колебания- ангармонические колебания. Ясно, что для них зависимость $x(E)$ в линейном случае выраженная формулой (1) усложняется и не будет линейной.

$$x = \frac{e}{m} \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (1)$$

Поэтому поляризованность (2), которую удобно представить в виде $P = N|e|x$ перестает быть линейной функцией от E .

(2) (матвеев. Гл3, стр89 для Гл11, стр328)

Поэтому зависящая от частоты и изменяющаяся по времени поляризованность равна

$$P = Np = e^2 NE / [m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)], \quad (15.13a)$$

где N — концентрация электронов с собственной частотой колебаний ω_0 . Запишем (15.13a) в виде

$$P = \epsilon_0 \chi^{(1)} E, \quad (15.13b)$$

$$\text{где } \chi^{(1)} = e^2 N / [m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)] \quad (15.13c)$$

— комплексная диэлектрическая восприимчивость (линейная)

Вопрос 48

Поляризация среды в поле высокоинтенсивного лазерного излучения: (РУСАКОВ. ГЛ-6)

1. Поляризация среды в поле высокоинтенсивного лазерного излучения

Электрическая поляризация среды в сильном поле:

$$P(t) = \epsilon_0 (\kappa E(t) + \chi E^2(t) + \xi E^3(t) + \dots) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + \dots,$$

κ – линейная (оптическая) восприимчивость,

χ – нелинейная восприимчивость второго порядка,

ξ – нелинейная восприимчивость третьего порядка.

$$\text{Разложение в ряд по отношению } \frac{\chi E^2}{\kappa E} \sim \frac{\xi E^3}{\chi E^2} \sim \frac{E}{E_{\text{ат}}}.$$

$$\text{Оценка: } E_{\text{ат}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze}{r_{\text{ат}}^2} \cong 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{20 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{10^{-20}} \cong 3 \cdot 10^{12} \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t - kz),$$

$$P(t) = \epsilon_0 (\kappa E_0 \cos(\omega t - kz) + \chi E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) + \xi E_0^3 \cos^3(\omega t - kz) + \dots).$$

Среды с кубичной нелинейностью: (АЛЕШКЕВИЧ. Л-23)

Как отмечалось ранее, при распространении высокоинтенсивных волн, генерируемых лазерами, могут возникать новые оптические явления, которые невозможно было наблюдать до изобретения лазеров.

В поле таких волн связь между векторами **D** и **E** становится *нелинейной*. Поскольку $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, поляризуемость среды **P** нелинейным образом зависит от напряженности **E**. Феноменологически эту зависимость можно представить в виде ряда

$$P(E) = \epsilon_0 \alpha E + \epsilon_0 \chi_2 E^2 + \epsilon_0 \chi_3 E^3 + \dots, \quad (23.1)$$

где α – линейная восприимчивость; χ_2 и χ_3 – квадратичная и кубичная нелинейные восприимчивости соответственно.

Нелинейные эффекты в средах с кубичной нелинейностью. Если в среде, для которой $\chi_2 = 0$, распространяется мощная световая волна, то поляризация среды

$$P = \epsilon_0 \alpha E + \epsilon_0 \chi_3 E^3. \quad (23.28)$$

Для удобства возведения в третью степень и дальнейшего анализа представим поле **E** в виде

$$E(z, t) = A \cos(\omega t - kz) = \frac{1}{2} \hat{A} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \hat{A}^* e^{-i\omega t}, \quad (23.29)$$

где $A = Ae^{-ikz}$ – комплексная амплитуда, звездочка означает комплексное сопряжение.

поляризация среды на частоте ω :

$$P = \epsilon_0 \alpha E + \epsilon_0 \frac{3}{8} \chi_3 A^2 E,$$

Из равенства $D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 \epsilon E$ следует, что диэлектрическая проницаемость равна

Вопрос 48

$$\epsilon = 1 + \alpha + \frac{3}{8} \chi_3 A^2$$

зависит от интенсивности волны

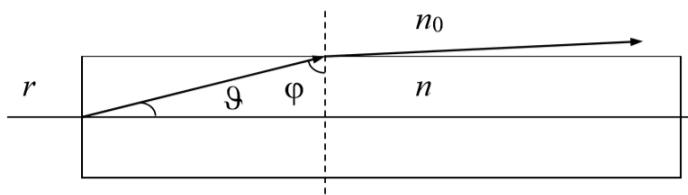
Вычислим показатель преломления среды:

где $n_0 = 1 + \alpha$.

$$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{n_0 + \frac{3}{8} \chi_3 A^2} \approx n_0 + \frac{3}{16} \frac{\chi_3}{n_0} A^2.$$

Самофокусировка волновых пучков и генерация гармоник: (РУСАКОВ. ГЛ-6)

Самофокусировка волновых пучков ($n_2 > 0$).



Полное внутреннее отражение

$$\cos \vartheta_{\text{п}} = \sin \varphi_{\text{п}} = \frac{n_0}{n} = \frac{n_0}{n_0 + n_2 E_0^2}, \quad 1 - \frac{1}{2} \vartheta_{\text{п}}^2 \cong 1 - \frac{n_2 E_0^2}{n_0}, \quad \vartheta_{\text{п}}^2 \cong 2 \frac{n_2 E_0^2}{n_0}$$

$$\text{Дифракционное расширение пучка радиуса } r - \vartheta_{\Delta} = 0.61 \frac{\lambda}{r} = 0.61 \frac{\lambda_0}{r \cdot n_0}$$

1. $\vartheta_{\Delta} > \vartheta_{\text{п}}$ – **расширение пучка** (при $P < P_{\text{пор}}$).
2. $\vartheta_{\Delta} \cong \vartheta_{\text{п}}$ – **самоканализование светового пучка** (при $P = P_{\text{пор}}$).
3. $\vartheta_{\Delta} < \vartheta_{\text{п}}$ – **самофокусировка** (при $P > P_{\text{пор}}$).

Пороговая мощность $P_{\text{пор}}$ определяется из условия $\vartheta_{\Delta} \cong \vartheta_{\text{п}}$:

$$P_{\text{пор}} = I_{\text{п}} \pi r^2 = \epsilon_0 \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} \pi r^2 = \frac{\pi \epsilon_0 c}{4 n_2} (0.61 \lambda_0)^2 (\sim 1 \text{ кВт}).$$

Генерация третьей гармоники (1963 г.).

$$E_{\text{изл}}(t) \sim \ddot{P}_1 + \ddot{P}_3 = \epsilon_0 \kappa \omega^2 E_0 \cos(\omega t - kz) + \frac{9}{4} \epsilon_0 \xi \omega^2 E_0^3 \cdot \cos(3\omega t - 3kz).$$

Вопрос 49

1

Геометрическая оптика. Кардинальные элементы оптической системы- узловые точки, главные и фокальные плоскости. Построение изображений с помощью кардинальных элементов.

При практическом рассмотрении вопросов формирования изображений в оптических системах большая часть результатов может быть получена на основе представлений геометрической оптики. Одним из основных понятий геометрической оптики является понятие луча света как линии, вдоль которой распространяется энергия оптического излучения. Среда, в которой распространяется свет, характеризуется абсолютным показателем преломления n , равным отношению скорости распространения света в вакууме с к фазовой скорости распространения света в среде v : $n = c/v$.

Основными законами геометрической оптики являются:

1. **Закон прямолинейного распространения света:** в однородной среде свет распространяется по прямым линиям (отступление от закона — явление дифракции).
2. **Закон независимости световых пучков:** распространение всякого светового пучка в среде не зависит от наличия других пучков (отступление от закона - явление интерференции).
3. **Закон отражения света от поверхности раздела двух сред:** падающий и отраженный лучи света лежат в одной плоскости с нормалью к границе раздела двух сред в точке падения, называемой *плоскостью падения*, причем угол падения равен углу отражения.
4. **Закон преломления света на границе раздела прозрачных сред:** падающий и преломленный лучи лежат в плоскости падения, причем для угла падения α_1 и угла преломления α_2 справедливо соотношение:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

где n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления света соответственно первой и второй оптически однородных и изотропных сред.

Законы геометрической оптики могут быть получены из уравнений Максвелла, если длину волны излучения устремить к нулю.

Источник света представляется как совокупность светящихся точек, каждая из которых является вершиной расходящегося пучка лучей, называемого *гомоцентрическим*, т.е. имеющим общий центр. Если свет от точечного источника после прохождения оптической системы вновь собирается в одной точке, то эту точку называют *точечным* или *стигматическим* изображением источника. Две точки (источник и его изображение) называются *сопряженными* точками данной оптической системы. Вследствие обратимости хода световых лучей источник и его изображение можно поменять местами. Изображение называется *действительным*, если лучи действительно пересекаются в точке. Если пересекаются не сами лучи, а их продолжения, проведенные в направлении, противоположном направлению распространения света, то такое изображение называют *мнимым*.

Линия, проходящая через центры кривизны обеих сферических поверхностей линзы, называется *главной оптической осью*. Точка пересечения главной оптической оси с плоскостью, в которой расположена тонкая линза, называется *оптическим центром* линзы. Любой луч, проходящий через оптический центр тонкой линзы, не испытывает

Вопрос 49

2

преломления и не меняет направления распространения. Любая линия, проходящая через оптический центр линзы, называется *оптической осью линзы (побочной оптической осью)*.

Рассмотрим оптическую систему, состоящую из одной тонкой линзы. Пусть свет от источников падает на линзу слева. Тогда полупространство слева от плоскости линзы (т.е. откуда идут лучи) называют *пространством источников (или предметов)*, справа — *пространством изображений*.

Если на линзу направить пучок лучей, параллельных главной оптической оси, то после прохождения линзы все лучи собираются в одной точке, называемой *главным фокусом линзы*. Фокус линзы может быть как действительным, так и мнимым. *Фокусным расстоянием F линзы* называется расстояние от центра линзы до ее фокуса. Фокусное расстояние сферической линзы можно найти по формуле:

$$\frac{1}{F} = (n_{21} - 1) * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны сферических поверхностей линзы; n_{21} — относительный показатель преломления материала линзы, равный отношению абсолютных показателей преломления материала линзы и окружающей среды. При этом, если поверхность линзы выпуклая, то $R > 0$, если вогнутая, то $R < 0$, а если плоская, то $R = \infty$. Линза, у которой фокусное расстояние положительно, называется *собирающей*, линза с отрицательным фокусным расстоянием называется *рассевающей*. Таким образом, при $n_{21} > 1$, если обе поверхности линзы — выпуклые, то $F > 0$ (линза собирающая), если вогнутые, то $F < 0$ (линза рассевающая). Если одна из поверхностей выпуклая, а вторая — вогнутая, то линза в зависимости от соотношения радиусов кривизны может быть как собирающей, так и рассевающей. Каждая тонкая линза имеет два главных фокуса, находящихся на одинаковом расстоянии от центра линзы.

В заднем фокусе линзы собираются лучи (для собирающей линзы) или их продолжения (для рассевающей линзы) в случае, когда источник света действительный и находится на бесконечном расстоянии от линзы. Иными словами, задний фокус является сопряженной точкой для бесконечно удаленной точки в пространстве источников.

Аналогично, передний фокус сопряжен с бесконечно удаленной точки в пространстве изображений. Таким образом, для собирающей линзы задний фокус находится в пространстве изображений (действительный), а для рассевающей линзы — в пространстве источников (мнимый).

Плоскость, перпендикулярная главной оптической оси и находящаяся от центра линзы на расстоянии, равном $|F|$, называется фокальной плоскостью линзы. Таких плоскостей две — передняя и задняя. Если на линзу вдоль какой-либо ее оптической оси направить параллельный пучок света, то все лучи или их продолжения собираются в точке пересечения этой оси с фокальной плоскостью линзы (соответственно, передней или задней).

Вводится также понятие оптической силы линзы D как величины, обратной фокусному расстоянию F , выраженному в метрах: $D = 1/F$. Оптическая сила измеряется в диоптриях. Для собирающих линз $D > 0$, для рассевающих $D < 0$. В рамках

Вопрос 49

3

геометрической оптики ограничиваются, как правило, рассмотрением центрированных систем и параксиальных лучей. Система называется **центрированной**, если центры кривизны всех сферических поверхностей расположены на одной прямой, т.е. главные оптические оси всех линз совпадают. **Параксиальными** называются лучи, образующие малые углы с главной оптической осью и нормалями к преломляющим поверхностям системы. Для идеальных центрированных систем можно доказать, что любой источник в виде **плоскости, прямой или точки** будет давать изображение также в виде соответственно **плоскости, прямой или точки**, за исключением источников в фокальной плоскости. Для тонкой линзы справедлива следующая формула, называемая **формулой тонкой линзы**:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

где a — расстояние от источника до линзы, b — расстояние от линзы до изображения. Величины a и b могут быть как положительными, так и отрицательными. Если источник и его изображение являются действительными, т.е. источник расположен в пространстве источников, а изображение — соответственно в пространстве изображений, то $a>0$ и $b>0$. Если же источник или его изображение — мнимые, то и соответствующие значения a или b отрицательны.

Способы построения изображения в линзах

При построении изображения точечного источника, получаемого с помощью линзы, необходимо провести как минимум два не совпадающих друг с другом луча, идущих от этого источника, тогда точка пересечения лучей (или их продолжений) даст положение изображения (действительного или мнимого). Обычно используют те лучи, направление распространения которых после прохождения линзы известно. Для таких лучей можно сформулировать следующие правила:

- 1) луч, параллельный главной оптической оси, после преломления в собирающей (рассевающей) линзе пройдет через ее задний (передний) фокус;
- 2) луч, идущий через оптический центр линзы в любом направлении, не испытывает преломления и пройдет без изменения направления;
- 3) луч, проходящий через передний (задний) фокус собирающей (рассевающей) линзы, пойдет параллельно главной оптической оси;
- 4) луч, параллельный какой-либо оптической оси собирающей (рассевающей) линзы, пройдет через точку пересечения этой оси с задней (передней) фокальной плоскостью.

Вопрос 49

ПРИМЕРЫ: На рисунке для собирающей и рассеивающей линз приведены схемы построения изображения двух точечных источников A и B , один из которых (B) находится на главной оптической оси. На каждом из лучей, идущих от источников, указан номер одного из выше перечисленных правил, в соответствии с которым он построен. Для источника A проведены только лучи 1–3, которые пересекаются в одной точке. Для источника B , расположенного на главной оптической оси, лучи 1–3 совпадают с этой осью, поэтому для нахождения изображения следует воспользоваться правилом 4. Для этого следует провести от источника произвольный луч (луч 4), пересекающий плоскость линзы в точке B_0 , затем провести параллельный ему луч, проходящий через центр линзы (на данных рисунках этот луч совпадает с лучом 2). Точка пересечения этого луча с фокальной плоскостью (на рисунках обозначена B_f) и будет той точкой, в которой соберутся все лучи, параллельные лучу 2, в том числе и луч 4. Соединяя точку B_f с точкой B_0 , получим, что точка пересечения этой прямой с главной оптической осью и даст положение изображения B .

Построения для собирающей и рассеивающей линз, **когда мнимый источник A находится в пространстве изображений**. Для построения изображения проведем через точку A два луча, один из которых параллелен главной оптической оси, а второй проходит через центр линзы (соответственно лучи 1 и 2). Используя правила 1 и 2, можно найти положение изображения точки A . Из рис. 4 видно, что в случае собирающей линзы изображение будет действительным, а в случае рассеивающей — мнимым). Выше уже отмечалось, что для протяженного источника в виде отрезка прямой линии изображением является также отрезок прямой, поэтому для его нахождения достаточно построить изображения двух крайних точек источника, а затем соединить их прямой.

Если прямолинейный источник расположен параллельно

плоскости линзы, то и его изображение также будет параллельным этой плоскости. Отношение поперечных размеров изображения и источника называют **увеличение системы**. Нетрудно получить, что для увеличения d справедлива формула: $d=b/a$

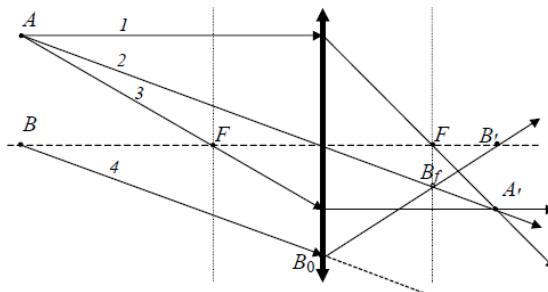


Рис. 2. Построение изображения в случае собирающей линзы

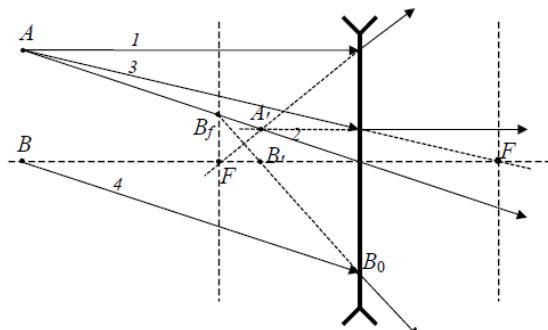


Рис.3. Построение изображения в случае рассеивающей линзы

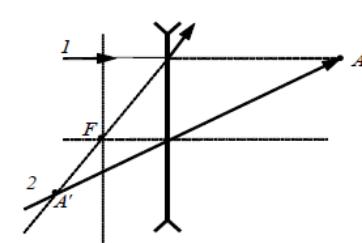
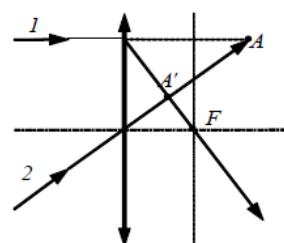


Рис. 4. Построение изображения в случае мнимого источника для собирающей и рассеивающей линзы: A — мнимый источник, A' — изображение, F — фокус линзы

Для вас старались

Антон Уваров	Андрей Попов
Павел Кудрявцев	Юлия Мелкозёрова
Дмитрий Жилкин	Иван Павлеев
Варя Харитонова	Василий Боков
Александр Комин	Илья Целковой
Николай Пак	Денис Иванов
Света Пантелеева	Лена Коннова
Антон Мурашко	Лиза Карнозова
Илья Обухов	Михаил Михайлов
Настя Фефлер	Таня Башинская
Арсений Коновалов	Михаил Бандурист
Павел Слон	Алиса Диценко
Артем Лысенко	Сергей Огнев
Марк Туровецкий	Дарья Кузнецова