

检查床运动数学建模

September 19, 2023

蒙进朗

目标

建立检查床坐标系，对检查床表平面进行数学建模，获取检查床表平面上所有点空间坐标 $P(\rho, \varphi, \theta)$

预设条件

1. 简化检查床为矩形，床宽为W，床长为L
2. 取原点 $O(0, 0, 0)$ 作为检查床起始状态正中心
3. 以原点 $O(0, 0, 0)$ 作为球坐标系的圆心
4. 相机理想平面为 $z = C$
5. 相机真实平面为 $Ax + By + Cz = KC$
6. 检查床步进方向为 $\theta = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$
7. 检查床 离相机理想平面 距离为 H
8. 检查床 离相机真实平面 距离为 H'

安装时校验方案

1. 由于相机安装时几乎不可能处于理想平面状态，因此采用以下方法进行安装时校正：
2. 使相机安装时与初始状态时的床正中心在垂直于地面方向上处于同一直线
3. 物理测量初始状态时的床正中心到相机的物理距离，认为该距离就是检查床 离相机理想平面 距离 H
4. 拍一张深度照片，获取初始状态时的床正中心到相机的深度距离，认为该距离就是检查床 离相机真实平面 距离 H' ，同时获取床四个顶点的高度 $H_A H_B H_C H_D$ ，得到四个点

$$P_A(-\frac{L}{2}, \frac{W}{2}, H_A) \quad P_B(-\frac{L}{2}, -\frac{W}{2}, H_B) \quad P_C(\frac{L}{2}, \frac{W}{2}, H_C) \quad P_D(\frac{L}{2}, -\frac{W}{2}, H_D)$$

不难看出，可以想象为一个斜面的四棱柱，然后求斜面的法向量 $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \overrightarrow{P_A P_D} \otimes \overrightarrow{P_B P_C}$

5. $\eta = \arccos(\frac{H'}{H})$ 为相机偏移角

安装时校验算法

1. 不妨设此时床步进距离为StepLength，床离地高为BedHeight，则床中心点坐标在直角坐标系下为 $P(\text{StepLength}, 0, \text{BedHeight})$
则点P到 相机真实平面 的距离为

$$H' = \frac{\left\| \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{StepLength} \\ 0 \\ \text{BedHeight} \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

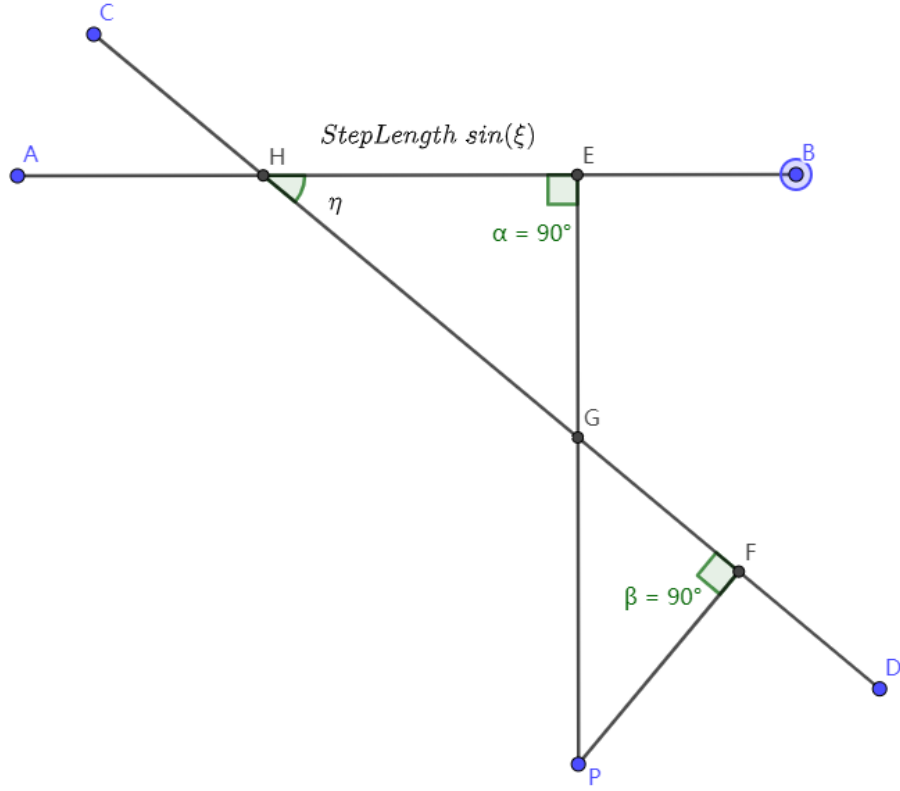


Figure 1: AB为理想平面投影，CD为真实平面投影

2. 如图1所示，点P到 **相机理想平面** 的距离分为两部分 $l_1 = \overline{PG}$ 以及 $l_2 = \overline{GE}$

作向量 $\vec{e} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 它是过 **理想平面** 与 **真实平面** 所交直线垂直XOY的平面法向量

床运动方向与 \vec{e} 夹角: $\xi = \left(\frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 用于将步进距离投影到 \overline{AB} 上

第一部分长度: $l_1 = \frac{H'}{\cos(\eta)}$

第二部分长度: $l_2 = \text{StepLength} \cdot \sin(\xi) \cdot \tan(\eta)$

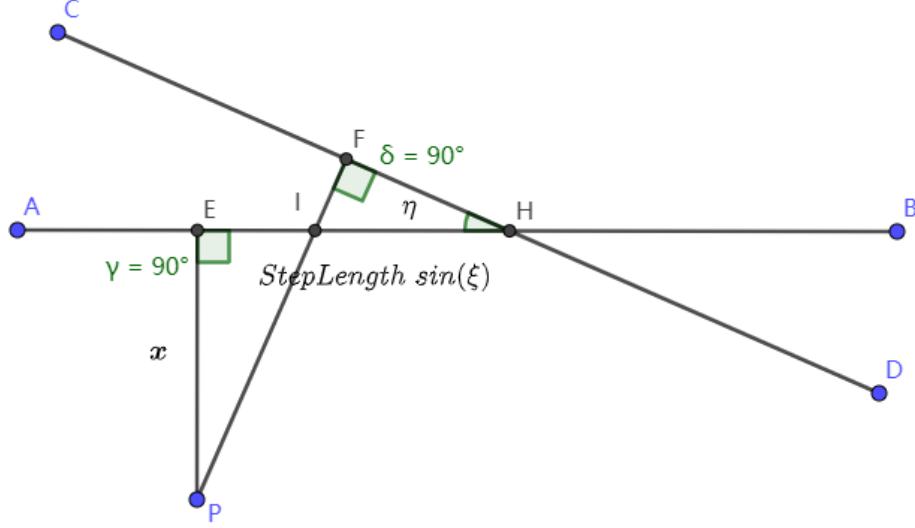


Figure 2: AB为理想平面投影，CD为真实平面投影

3. 如图2所示，点P到 **相机理想平面** 的距离分为两部分计算:

假设所求为x，则可列方程 $H = \frac{x}{\cos(\eta)} - (\text{StepLength} - x \tan(\eta)) \sin(\eta)$

解出x后，结合图1，可得

$$H = \begin{cases} \frac{H'}{\cos(\eta)} - \text{StepLength} \cdot \tan(\eta) \cdot \sin(\xi) & \xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{H'}{\cos(\eta)} + \text{StepLength} \cdot \tan(\eta) \cdot \sin(\xi) & \xi \in [-\frac{\pi}{2}, -\pi] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

遍历床平面算法

为了遍历整个床的所有点，需要考虑步进StepLength后 φ 与 ρ 的变化，以及当 θ 发生改变后， ρ 的变化，而 θ 的变化范围与窗宽W有关，即需要寻找映射：

$$\begin{aligned} \text{StepLength} &\mapsto \varphi \mapsto \rho \\ W &\mapsto \theta \mapsto \rho \end{aligned}$$

等价于寻找 $\rho(\text{StepLength}, W)$

• 先求 $\varphi(\text{StepLength})$

显然， $\varphi = \arctan\left(\frac{\text{StepLength}}{C-H}\right)$

• 再求 $\rho(\varphi)$

1. 床中心到原点的距离为 $D \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(C-H)^2 + \text{StepLength}^2}$

2. $\varphi = \frac{D \sin(\varphi) - l_{\text{offset}}}{D \cos(\varphi)} \quad l_{\text{offset}} \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$

3. $\rho = \sqrt{D^2 - 2Dl_{\text{offset}} \sin(\varphi) + l_{\text{offset}}^2}$

从而求得 $\rho(\text{StepLength})$

• 先求 $\theta(W)$

1. $\theta = \arctan\left(\frac{w_{\text{offset}}}{D \sin(l_{\text{offset}})}\right) \quad w_{\text{offset}} \in [-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}], \quad l_{\text{offset}} \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$

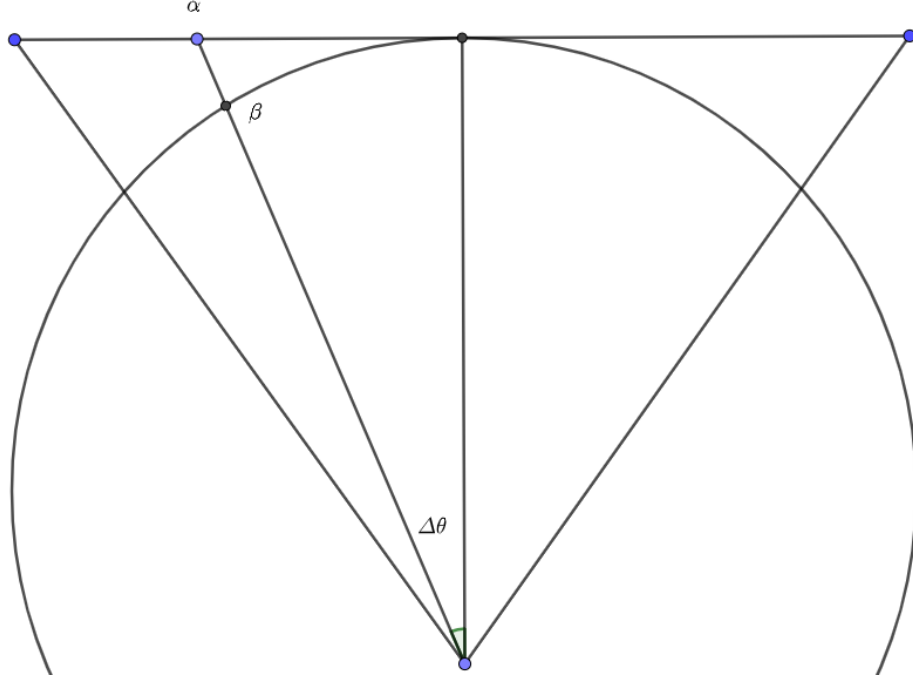


Figure 3: 圆弧为球坐标系投影到 XOY 平面的轨迹，三角形为床到XOY平面的投影

结合图3，只需要知道变动 $\Delta\theta$ 后 $\overline{\alpha\beta}$ 的长度即可

$$1. \rho = D \sin(l_{\text{offset}}) \left(\frac{1}{\cos(w_{\text{offset}})} - 1 \right) \quad w_{\text{offset}} \in \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2} \right], \quad l_{\text{offset}} \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right]$$

从而求得 $\rho(\text{StepLength}, W)$

建立动态球坐标系

现在 ρ, φ, θ 都可以被 $L, W, \text{StepLength}, H$ 表示，但是为了表示在床平面上移动，可以把球坐标系改写为：

$$\begin{cases} x = D \sin(\varphi) \cos(\theta) + \rho \cos(w_{\text{offset}}) & w_{\text{offset}} \in \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2} \right] \\ y = D \sin(\varphi) \sin(\theta) + \rho \sin(w_{\text{offset}}) & w_{\text{offset}} \in \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2} \right] \\ z = D \cos(\varphi) \end{cases}$$

待完成部分

- 对相机畸变校正，保证安装校验的预设条件中的第8条成立
- 1. 方案1，按照网格校正，但每次需要转坐标系做预处理，网上有成熟方案
- 2. 方案2，将错就错，将畸变因子加入坐标系设计，需要针对Gemini2双目结构光深度数据计算方式设计，算法设计难度较高
- 3. 数学模型的优化方案，可以把原点设在床的尾部，然后更改 $l_{\text{offset}} \in [0, L]$ 即可