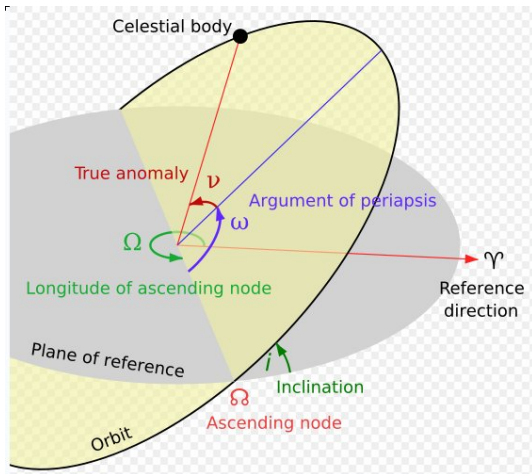


Wykład 3: Elementy orbity. Wyznaczanie pozycji obiektu na podstawie znanych elementów orbity.

9.03.2020

Elementy orbity



Rysunek: Elementy orbity: rozmiar wielkiej półosi, mimośród, nachylenie płaszczyzny orbity do płaszczyzny ekliptyki, długość węzła wstępującego, odległość perycentrum od węzła wstępującego, moment przejścia przez perycentrum

- ▶ a - wielka półoś orbity
- ▶ e - mimośród orbity
- ▶ i - nachylenie orbity do wyróżnionej płaszczyzny (dla orbit wokółsłonecznych jest to płaszczyzna ekliptyki)
- ▶ Ω - długość węzła wstępującego (dla orbit wokółsłonecznych odległość węzła wstępującego od punktu Barana)
- ▶ ω - odległość perycentrum od węzła wstępującego
- ▶ t_0 - moment przejścia przez perycentrum

W przypadku orbity parabolicznej mamy q - odległość w perycentrum, i , Ω , ω , t_0 ($e=1$).

W przypadku orbity hiperbolicznej mamy: a , e , i , Ω , ω , t_0 ($a < 0$, $e > 1$)

Inne elementy orbity:

- ▶ M - anomalia średnia na daną epokę
- ▶ $\pi = \tilde{\omega} = \omega + \Omega$ - długość peryhelium
- ▶ $L = M + \pi$ - średnia długość orbitalna

Przypadek orbity o małym mimośrodku.

W przypadku orbity o małym mimośrodku moment przejścia przez perycentrum jest niezbyt dobrze określony. Często w takiej sytuacji wprowadza się dodatkowe kąty:

- ▶ $\theta = \omega + \vartheta$ - argument szerokości
- ▶ $l_0 = \vartheta + \pi$ - prawdziwa długość orbitalna

Wyznaczanie współrzędnych równikowych równonocnych ciała o danych elementach orbity

Musimy znać współrzędne heliocentryczne równikowe Ziemi i współrzędne heliocentryczne równikowe obiektu, aby policzyć geocentryczne równikowe współrzędne obiektu.

- ▶ Współrzędne równikowe heliocentryczne Ziemi (ξ_Z, η_Z, ζ_Z).
W przybliżonych rachunkach można je obliczyć znając elementy orbitalne Ziemi. W praktyce obliczone w ten sposób współrzędne będą obarczone zbyt dużym błędem ze względu na obecność Księżyca. Po orbicie eliptycznej (zaburzanej przez perturbacje planetarne) porusza się barycentrum układu Ziemia - Księżyc. Powinniśmy skorzystać z roczników astronomicznych, lub odpowiednich stron internetowych (np. <http://ssd.jpl.nasa.gov>)
- ▶ Obliczenie współrzędnych równikowych heliocentrycznych obiektu. (ξ_p, η_p, ζ_p).
- ▶ Obliczenie równikowych geocentrycznych współrzędnych obiektu $x_p = \xi_p - \xi_Z, y_p = \eta_p - \eta_Z, z_p = \zeta_p - \zeta_Z$

Obliczamy współrzędne równikowe geocentryczne obiektu

- ▶ Odległość geocentryczna

$$\Delta_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$$

- ▶ deklinacja

$$\delta_p = \operatorname{asin} \left(\frac{z_p}{\Delta_p} \right)$$

- ▶ rektascensja

$$\alpha_p = \operatorname{acos} \left(\frac{x_p}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}} \right)$$

$$\alpha_p = \operatorname{asin} \left(\frac{y_p}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}} \right)$$

Wyznaczenie heliocentrycznych równonocnych współrzędnych obiektu odbywa się w dwóch niezależnych krokach.

- ▶ określenia jego położenia na orbicie
- ▶ policzenia potrzebnych elementów macierzy przejścia od układu związanego z orbitą ciała (oś x skierowana od Słońca do peryhelium, oś y skierowana od Słońca w kierunku $\vartheta = 90^\circ$), do układu równikowego heliocentrycznego (oś ξ skierowana od Słońca do punktu Barana, oś η skierowana od Słońca do punktu od rektascensji 6 h i deklinacji 0°).

Macierze obrotu

Gdy mamy współrzędne heliocentryczne w płaszczyźnie orbity ciała (z osią x skierowaną od Słońca do peryhelium) x, y (dla interesującego nas obiektu $z=0$), to za pomocą kolejnych obrotów układu współrzędnych możemy przejść do układu heliocentrycznego równikowego.

- ▶ obrót o kąt $-\omega$ w płaszczyźnie orbity ciała ($z = \text{const}$), oś x' skierowana od Słońca do węzła wstępującego

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) & 0 \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ obrót o kąt $-i$ wokół osi x' , osie $x' y''$ znajdują się w płaszczyźnie ekliptyki.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\sin(i) \\ 0 & \sin(i) & \cos(i) \end{pmatrix}$$

Macierze obrotu c. d.

- ▶ obrót o kąt $-\Omega$ wokół osi Z, nowa oś X skierowana jest od Słońca do punktu Barana.

$$\begin{pmatrix} \cos(\Omega) & -\sin(\Omega) & 0 \\ \sin(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ obrót o kąt $-\epsilon$ wokół osi X, osie η i ζ znajdują się w płaszczyźnie równikowej

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ 0 & \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix}$$

Przejście od układu heliocentrycznego w płaszczyźnie orbity
 obiektu $\odot xyz$ do heliocentrycznego w płaszczyźnie równikowej
 $\odot \xi \eta \zeta$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$P_x = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i$$

$$Q_x = -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i$$

$$R_x = \sin \Omega \sin i$$

$$P_y = (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \cos \epsilon - \sin \omega \sin i \sin \epsilon$$

$$Q_y = (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \cos \epsilon - \cos \omega \sin i \sin \epsilon$$

$$R_y = \cos \Omega \sin i \cos \epsilon - \cos i \sin \epsilon$$

$$P_z = (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \sin \epsilon + \sin \omega \sin i \cos \epsilon$$

$$Q_z = (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \sin \epsilon + \cos \omega \sin i \cos \epsilon$$

$$R_z = -\cos \Omega \sin i \sin \epsilon + \cos i \cos \epsilon$$

Orbital elements:

2013 EQ4

Epoch 2013 Apr. 18.0 TT = JDT 2456400.5

Earth MOID = 0.0579 AU

MPC

M	2.47154		(2000.0)	P	Q
n	0.28604850	Peri.	41.72451	-0.93921289	+0.34057603
a	2.2812678	Node	158.07219	-0.33768708	-0.89348191
e	0.5563733	Incl.	6.68016	-0.06202078	-0.29274228
P	3.45	H	22.9	G 0.15	U 8

Residuals in seconds of arc

130303	G96	0.1-	0.0	130303	I93	0.4+	0.2-	130304	H21	0.0	0.1+
130303	G96	0.0	0.0	130303	240	0.2-	0.1-	130304	H21	0.2+	0.2+
130303	G96	0.1+	0.0	130303	240	0.2+	0.1+	130304	H21	0.4+	0.0
130303	G96	0.1+	0.0	130303	240	0.1-	0.9-	130304	J95	0.0	0.1+
130303	I93	0.4-	0.4+	130304	H21	0.2+	0.1+	130304	J95	0.0	0.1-
130303	I93	0.1-	0.2-	130304	H21	0.2-	0.2+				
130303	240	0.5-	0.2+	130304	H21	0.1+	0.0				

Rysunek: Przykład elementów orbitalnych podawanych dla planetoid w telegramach MPC

Ephemeris:

2013 EQ4		a,e,i = 2.28, 0.56, 7						q = 1.0120		
Date	TT	R. A. (2000)		Decl.		Delta	r	Elong.	Phase	V
2013 02 03		08 41	57.2	+06 02	52	0.3084	1.2888	167.9	9.2	21.5
...										
2013 02 18		08 31	48.2	+10 29	47	0.2153	1.1894	156.9	19.0	20.9
...										
2013 02 26		08 27	52.0	+14 52	55	0.1749	1.1422	148.0	27.3	20.6
...										
2013 03 04		08 27	07.4	+19 33	50	0.1479	1.1104	141.0	34.2	20.4
2013 03 05		08 27	16.7	+20 29	43	0.1437	1.1054	139.8	35.4	20.4
2013 03 06		08 27	32.2	+21 28	37	0.1395	1.1005	138.5	36.6	20.3
...										
2013 03 12		08 31	52.7	+28 37	12	0.1161	1.0736	131.1	44.2	20.1
...										
2013 03 20		08 51	34.9	+42 44	09	0.09004	1.0445	120.6	55.2	19.8
...										
2013 04 04		14 38	48.8	+73 09	19	0.07155	1.0143	99.5	76.5	19.9

A. U. Tomatic _____ (C) Copyright 2013 MPC

M.P.E.C. 2013-E17

Rysunek: Przykład efemeryd podawanych dla planetoid w telegramach MPC

2014-Mar-02 00:00	22	50	20.52	-07	23	33.0	-26.76	-10.59	0.99102541190763	0.4208307
2014-Mar-07 00:00	23	08	58.43	-05	28	05.4	-26.76	-10.59	0.99225672045807	0.4331207
2014-Mar-12 00:00	23	27	25.87	-03	30	49.8	-26.76	-10.59	0.99353435933434	0.4528267
2014-Mar-17 00:00	23	45	45.39	-01	32	33.3	-26.75	-10.59	0.99487612250585	0.4766859
2014-Mar-22 00:00	00	03	59.87	+00	25	59.5	-26.75	-10.59	0.99628416173533	0.4969390
2014-Mar-27 00:00	00	22	12.23	+02	24	04.5	-26.75	-10.59	0.99773184328321	0.5026649
2014-Apr-01 00:00	00	40	24.95	+04	20	56.5	-26.74	-10.59	0.99917274703806	0.4940339
2014-Apr-06 00:00	00	58	40.04	+06	15	49.2	-26.74	-10.59	1.00058603337500	0.4857826
2014-Apr-11 00:00	01	16	59.54	+08	07	58.3	-26.74	-10.59	1.00198478959991	0.4840065
2014-Apr-16 00:00	01	35	25.72	+09	56	41.7	-26.73	-10.59	1.00338596554154	0.4867234
2014-Apr-21 00:00	01	54	00.94	+11	41	18.8	-26.73	-10.59	1.00479162080182	0.4848468
2014-Apr-26 00:00	02	12	47.35	+13	21	09.2	-26.73	-10.59	1.00617016907948	0.4670009
2014-May-01 00:00	02	31	46.25	+14	55	31.1	-26.73	-10.59	1.00747722050987	0.4375268
2014-May-06 00:00	02	50	58.31	+16	23	42.8	-26.72	-10.59	1.00869906244095	0.4096615
2014-May-11 00:00	03	10	23.97	+17	45	04.6	-26.72	-10.59	1.00984988282123	0.3886152
2014-May-16 00:00	03	30	03.59	+18	58	59.5	-26.72	-10.59	1.01094954677436	0.3734024
2014-May-21 00:00	03	49	57.43	+20	04	53.1	-26.72	-10.59	1.01200093727058	0.3524511
2014-May-26 00:00	04	10	05.16	+21	02	13.3	-26.71	-10.59	1.01296928064611	0.3158157
2014-May-31 00:00	04	30	25.33	+21	50	30.1	-26.71	-10.59	1.01381706287144	0.2710811
2014-Jun-05 00:00	04	50	55.81	+22	29	17.5	-26.71	-10.59	1.01453802398719	0.2293229
2014-Jun-10 00:00	05	11	34.23	+22	58	14.5	-26.71	-10.59	1.01514957463814	0.1958505
2014-Jun-15 00:00	05	32	18.20	+23	17	05.6	-26.71	-10.59	1.01567700343291	0.1698274

Rysunek: Geocentryczne równikowe współrzędne Słońca według

<http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>

Współrzędne x, y ciała w określonym momencie znajdujemy z równań opisujących związki pomiędzy anomalią średnią a anomalią mimośrodową (dla elipsy i hiperboli) bądź czasem i anomalią prawdziwą (dla paraboli).

jeżeli jako moment t_0 określimy przejście przez perycentrum to otrzymamy równanie Bakera

$$tg\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \frac{1}{3}tg^3\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\mu\gamma}{\sqrt{2}q^{3/2}}(t - t_0)$$

Zależność anomalii średniej od anomalii mimośrodowej dla elipsy (równanie Keplera)

$$\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{1/2} a^{-3/2}(t - t_0) = M = E - e \sin E$$

Zależność anomalii średniej od mimośrodowej dla hiperboli

$$\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{1/2} |a|^{-3/2}(t - t_0) = M = e \sinh(F) - F$$

Równania te można rozwiązywać metodą kolejnych iteracji np. metodą Newton'a- Raphson'a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ponieważ szukamy miejsca zerowego, to w pierwszym przybliżeniu

$$f(E_n) = (E_n - E_{n+1})f'(E_n),$$

czyli

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n}{f'(E_n)}$$

Jako E_0 możemy podstawić $E_0 = M + e \sin M$, a

$$f'(E_n) = 1 - e \cos E_n$$

Dla niewielkich wartości e ta metoda powinna być bardzo szybko zbieżna dla równania Keplera.

Związki pomiędzy anomalią prawdziwą a anomalią mimośrodową dla elipsy:

$$\cos \vartheta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}$$

$$\operatorname{tg}(\vartheta) = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{\cos E - e}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg}\left(\frac{E}{2}\right)$$

Związek pomiędzy anomalią prawdziwą a anomalią mimośrodową dla hiperboli. Wprowadzamy następujące oznaczenia:
 $a + r = a \cdot e \cdot \cosh(f)$ czyli $r = a(e \cosh(f) - 1)$, $x = |a| \cdot \cosh(f)$ i
 $\cosh(f) = 1/\cos(F)$. Wtedy:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg}\left(\frac{F}{2}\right) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tgh}\left(\frac{f}{2}\right)$$