LINEARNA ALGEBRA

MATRIKE

1. SEŠTEVANJE in MNOŽENJE

$$A = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Def: $(m\times n)$ matrika je tabela $\mathbb{R}$ števil z m-vrsticami in n-stolpci!
- množico vseh matrik z m-vrsticami in n-stolpci označimo z $\mathbb{R}^{m\times n} = \mathbb{R}^{(m,n)} = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
- vrstica je matrika velikosti $(1\times n)$
- stolpec je matrika velikosti $(m\times 1)$
- $m=n \Rightarrow A$ je kvadratna matrika
- $O_{m\times n}$ je ničelna matrika (vsi njeni členi so enaki nič)
- identična matrika velikosti $(m\times m)$ [reda m] je kvadratna matrika z 1 na diagonali $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Def: Matriki A in B sta enaki, če sta iste velikosti in imata enake člene!

Def: Naj bosta $A=(a_{ij})_{m\times n}$ in $B=(b_{ij})_{m\times n}$. A in B morata biti enake velikosti!
1.) Potem je $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$!
2.) In razlika $A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$!

Lastnosti:
1.) $A+B=B+A$ (KOMUTATIVNOST)
2.) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ASOCIATIVNOST)
3.) $O_{m\times n}+A=A$ ($O_{m\times n}$ je enota za seštevanje)
4.) $\exists -A$ s.t. $A+(-A)=O_{m\times n}$ (za $\forall A$) (INVERZ za $\oplus$)

MNOŽENJE S SKALARJEM

Def: Naj bo $\alpha\in\mathbb{R}$. Potem je $(\alpha A)=(\alpha a_{ij})_{m\times n}$!

Lastnosti:
1.) $0\cdot A=O_{m\times n}$
2.) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ (DISTRIBUTIVNOST)
3.) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
4.) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$
5.) $1\cdot A=A$

TRANSPONIRANJE

Def: Če je $A=(a_{ij})_{m\times n}$, potem je $A^T=(a_{ji})_{n\times m}$! → TRANSPONIRANA MATRIKA ali TRANSPONIRANKA matrike A.
1.) $(A^T)^T=A$
2.) $(A+B)^T=A^T+B^T$
3.) $(\alpha A)^T=\alpha A^T$
4.) če je $A=A^T \Rightarrow A$ je SIMETRIČNA MATRIKA
5.) če je $A=-A^T \Rightarrow A$ je ANTI-SIMETRIČNA MATRIKA

MNOŽENJE MATRIK

Def: Naj bo $A=(a_{ij})_{m\times n}$ in $B=(b_{jk})_{n\times p}$! $A\cdot B=C=(c_{ik})_{m\times p}$; $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$
1.) $A\cdot B\neq B\cdot A$ (NI KOMUTATIVNO)
2.) $(A\cdot B)\cdot C=A(BC)$
3.) $\mathbb{1}_n\cdot A=A\cdot\mathbb{1}_n=A$ (ENOTA JE $\mathbb{1}_n$)
4.) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
5.) $\alpha(AB)=(\alpha A)\cdot B=A\cdot(\alpha B)$
6.) $(AB)^T=B^TA^T$ (!)

INVERZNA MATRIKA

Def: Inverzna matrika matrike A je A^{-1}, je takšna matrika, da velja $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=\mathbb{1}$!
Če obstaja A^{-1} s.t. $AA^{-1}=\mathbb{1} \Rightarrow A$ je OBRNLJIVA MATRIKA!
Matrika ima lahko kvečjemu en inverz. (ničelna matrika-O nima inverza)
1.) $\mathbb{1}_n^{-1}=\mathbb{1}_n$
2.) A obrnljiva $\Rightarrow A^{-1}$ obrnljiva in $(A^{-1})^{-1}=A$
3.) A in B obrnljivi $\Rightarrow A\cdot B$ obrnljiva $\Rightarrow (A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$
4.) A obrnljiva in $\alpha\neq 0 \Rightarrow (\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}\cdot A^{-1}$
5.) A obrnljiva $\Rightarrow (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

GAUSSOVA METODA (ELEMENTARNE VRSTIČNE OPERACIJE)

1.) VRSTICO LAHKO MNOŽIMO Z NE-NIČELNIM ŠTEVILOM!
2.) ENO VRSTICO LAHKO PRIŠTEJEMO DRUGI VRSTICI!
3.) DVE VRSTICI LAHKO MED SEBOJ ZAMENJAMO!

} elementarne vrstične operacije

$$\boxed{A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/9 & -1/9 & 5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & 2/9 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) = A^{-1}}$$

DETERMINANTA

Def: Determinanta kvadratne matrike reda-n, je $\mathbb{R}$-število z oznako $\det A$!

- Če je $A=(a)_{1\times 1}\in\mathcal{M}_{11}(\mathbb{R}) \Rightarrow \det A = a$ (det. matrike reda 1)
- Če je $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$ (det matrike reda 2)
- Če je $A=(a_{ij})_{n\times n} \Rightarrow \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_{ij}$ - RAZVOJ DET. PO i-TI VRSTICI!

1) Minor M_{ij} je determinanta matrike z odstranjenima i-to vrstico in j-tim stolpcem!
2) $k_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ je KOFAKTOR elementa a_{ij} v A!

Lastnosti:
1.) $\det A^T = \det A$!
2.) DET. ZGORNJE Δ MATRIKE $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \\ 0 & 0 & 0\dots & a_{nn}\end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$!
3.) Če ima matrika A ničelno vrstico je $\det A = 0$! (ali stolpec)
4.) Če sta v matriki A dve vrstici (ali stolpca) enaka je $\det A = 0$!
5.) Če v matriki zamenjamo dve vrstici (ali stolpca) se njena determinanta množi z (-1)!
6.) Če v matriki eno vrstico (ali stolpec) množimo s $\alpha\neq 0$ se determinanta množi z α!
7.) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ ... $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$!
8.) Če v matriki prištejemo skalarni večkratnik ene vrstice k drugi vrstici se determinanta ne spremeni!
9.) $\det(AB) = \det A\cdot\det B$!
10.) $\det(A^{-1}) = 1/\det A$!
11.) Vsaka matrika A je vrstično ekvivalentna (ima iste det) matriki A', ki ima na prvem mestu neničeln element kvečjemu v 1. vrstici, v vsaki naslednji vrstici pa ima na začetku vsaj eno ničlo več kot v prejšnji. (=zgornje trikotna matrika)

INVERZNA MATRIKA

The.: Naj bo A kvadratna matrika. Inverzna matrika A^{-1} obstaja natanko tedaj ko $\det A\neq 0$!

$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot B_A}$; kjer B_A je prirejenka (ali adjugiranka = adj A) $= (k_{ij})^T$; $k_{ij} = (i,j)$-ti kofaktor

Zgled: 1)
$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ $\quad k_{1,1} = (-1)^{1+1}\cdot 1 = 1$; $k_{1,2} = (-1)^{1+2}\cdot 0 = 0$; $k_{2,1} = -2$; $k_{22} = 1$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = A^{-1}$

2) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad$ 3.1) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

4) What can be said about ~~A~~ $\det A$ if:

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

Sistem lin. enačb z n-neznankami $x_1, x_2, \dots x_n$: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

lahko zapišemo $AX = b$, kjer je $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – MATRIKA KOEFICIENTOV SISTEMA

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – STOLPEC N-NEZNANK in $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – STOLPEC M DESNIH STRANI SISTEMA

CRAMARJEVO PRAVILO

The: Če je **A kvadratna matrika reda n in $\det A \neq 0$**, je sistem enolično rešljiv!

Rešitve so:

$$\boxed{x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \dots x_n = \frac{\det A_n}{\det A}}$$

kjer je $\det A_j$ determinanta matrike, ki jo dobimo tako, da v matriki A zamenjamo j-ti stolpec s stolpcem desnih strani!

Zgled: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \ b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 0 + 6 = \boxed{3}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_1 = -1 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-6) = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{3} = \boxed{1}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = 1 \cdot 6 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-12) = -6 \Rightarrow x_2 = \frac{-6}{3} = \boxed{-2}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_3 = 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-12) - 1 \cdot 6 = -12 \Rightarrow x_3 = \frac{-12}{3} = \boxed{-4}$$

GAUSSOVA ELIMINACIJSKA METODA

Naj bo sistem $AX = b$!

Če matriki A dodamo še stolpec b, dobimo matriko reda $m \times (n+1)$, ki ji pravimo RAZŠIRJENA MATRIKA sistema – $\tilde{A}$!

Sistem rešujemo tako, da s pomočjo operacij, ki na rešitve sistema nimajo vpliva, spreminjamo enačbe, dokler niso zapisane v takšni obliki, iz katere lahko rešitev direktno preberemo!

Takšne operacije so:
1) enačbo lahko množimo z ne-ničelnim številom
2) eno enačbo lahko prištejemo drugi enačbi
3) dve enačbi lahko med seboj zamenjamo

Zgled: $\begin{rcases} x_1 - 3x_2 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 - x_5 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 6 \end{rcases} \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -6 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ V_2 + V_1 \\ V_3 - 2V_1 \\ V_4 + V_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} V_4 - 2V_3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 - x_4 = -1 \Rightarrow x_1 - 3x_2 - x_4 = -1 \\ \left.\begin{array}{l} x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_5 = 3 \Rightarrow x_5 = 1 \end{array}$$

REŠLJIVOST SISTEMA

Def: **RANG MATRIKE** A ($\text{rang } A$) je maksimalno število ne-ničelnih vrstic, ki jih dobimo z Gaussova eliminacijsko metodo!

→ Če je A matrika $m \times n$, je $\text{rang } A \leq \min\{m,n\}$

→ Če je A kvadratna $n \times n$ matrika, je $\text{rang } A = n$ natanko tedaj ko je $\det \neq 0$!

ZA RANG → LAHKO GLEDAŠ DETERMINANTE ⇒ MAX. VELIKOST NE-NIČELNE DET. = rang A !

The: **ROUCHE-CAPPELLI**

Naj bo $Ax=b$ sistem m-enačb z n-neznankami! $\tilde{A}$ - razširjena matrika tega sistema!

1.) sistem $Ax=b$ je rešljiv $\Longleftrightarrow \text{rang } A = \text{rang } \tilde{A}$

2.) sistem $Ax=b$ je ENOLIČNO rešljiv $\Longleftrightarrow \text{rang } A = \text{rang } \tilde{A} = n$

3.) $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A} = r < n \Longleftrightarrow$ sistem ima neskončno rešitev! $(n-r)$ neznank lahko poljubno izberemo, drugih r neznank pa je z njimi enolično določenih!

(REŠITEV SISTEMA JE $n-r$ PARAMETRIČNA)

Zgled:
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 - x_5 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 6 \end{cases} \Rightarrow \tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -6 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_5 = 1 \\ x_3 = t \Rightarrow x_4 = 1 - \frac{t}{2} \\ x_1 = s \Rightarrow x_2 = \frac{s}{3} + \frac{t}{6} \end{array}$$

HOMOGENI SISTEMI

HOMOGEN SIS. je sistem z NIČELNO DESNO STRANJO $(Ax = 0) \Longrightarrow \text{rang } A = \text{rang } \tilde{A}$

Torej je homogen sistem vedno rešljiv!

Eno rešitev ... $x = 0$ ... lahko uganemo. (TRIVIALNA REŠITEV)!

1.) $\text{rang } A = n$ (= število neznank) $\Longleftrightarrow$ SAMO ENA REŠITEV (SAMO TRIVIALNA)!

2.) $\text{rang } A < n \Longleftrightarrow$ SIS. IMA NESKONČNO REŠITEV!

KVADRATNI HOMOGENI SIS. - ima natanko eno rešitev (TRIVIALNO) $\Longleftrightarrow \det \neq 0$!

- ima neskončno rešitev $\Longleftrightarrow \det A = 0$!

Zgled:
$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{x_5 = t} \Rightarrow \boxed{x_4 = -t} \\ x_3 + t = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = -t} \\ x_1 + 2x_2 = -3t \Rightarrow \boxed{x_2 = s} \Rightarrow \boxed{x_1 = -3t - 2s} \end{array}$$

VEKTORSKI PROSTORI

Def: Naj bo V neprazna množica, na kateri je definirana binarna operacija seštevanja in za komutativen obseg O (npr. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) naj bo definirana operacija množenja s skalarjem!

$$\forall u, v \in V \Rightarrow u + v \in V \quad \text{in} \quad \forall u \in V, \lambda \in O \Rightarrow \lambda u \in V$$

Če velja:
- A1) $u + v = v + u$ (KOMUTATIVNOST)
- A2) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (ASOCIATIVNOST)
- A3) $\exists 0 \in V: u + 0 = 0 + u = u$ (ENOTA ZA SEŠTEVANJE)
- A4) $\forall u \in V, \exists -u \in V: u + (-u) = 0$ (INVERZ ZA SEŠTEVANJE)

} **ABELOVA GRUPA** za seštevanje

- S1) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
- S2) $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$
- S3) $(\alpha \beta) u = \alpha(\beta u)$
- S4) $1 \cdot u = u$ za $\forall u, v \in V; \alpha, \beta \in O$

je V **vektorski prostor** nad obsegom O in označimo ${}_O V$!

Elemente množice V imenujemo VEKTORJI!

Primeri:
1) ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, ${}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$, ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$

2) ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$

3) ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ - množica n-teric števil

5.) $V = {}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[x]$ - množica vseh polinomov $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ (stopnja $p(x) = n$) $a_n \neq 0$

$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m$ (stopnja $q(x) = m \Rightarrow b_m \neq 0$)

$n \leq m$; $(p+q)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \ldots + (a_n+b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \ldots + b_m x^m$

$(\alpha p)(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \ldots + \alpha a_n x^n$ (p.s. enota za seštev. je polinom nič (vsi koef. = 0))

6.) $\mathbb{R}_n[x]$ - množica polinomov stopnje $\leq n$ ... $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{stopnja } p(x) \leq n\}$

7.) $V = \{0\}$ - ničelni vektorski prostor ... najmanjši možen, ker $0 \in V$ za vsak vek. prostor

Lastnosti:
1) $u + v = u + w \Rightarrow v = w$
2) $0_{\mathbb{R}} \cdot v = 0_V$
3) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$
4) $(-1)u = -u$ (inverz od $u \in V$)
5) $\alpha \cdot u = 0_V \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{R}}$ ali $u = 0_V$

ps. $0_{\mathbb{R}}$ - nič v realnih številih
0_V - vektor nič

PODPROSTORI IN LINEARNE KOMBINACIJE

Def: Naj bo ${}_{\mathbb{R}}V$ vektorski prostor in naj bo $U \subseteq V$!
Če je U tudi sam vektorski prostor, ga imenujemo VEKTORSKI PODPROSTOR od V (oznaka $U \leq_{\mathbb{R}} V$)

Theo: Podmnožica $U \subseteq V$ je vektorski podprostor natanko tedaj, ko $\alpha u + \beta v \in U; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall u, v \in U$!

Primeri: Naj bo $V = \mathbb{R}^2$ in $U = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}\}$! ali je $U \leq_{\mathbb{R}} V$? mora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in $\forall u, v \in U \Rightarrow \alpha u + \beta v \in U$

$u = (x, -x)$; $v = (y, -y) \Rightarrow \alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta y, -\alpha x - \beta y) = (\alpha x + \beta y, -(\alpha x + \beta y)) \in U$ ✓

Naj bo $W = \{(1, x_2, x_3); x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ Ali je $W \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$? NE!

Naj bo A fiksna matrika v $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ in naj bo $U = \{X \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$! Ali je $U \leq_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ Da! ✓

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X_1, X_2 \in U \ldots (\alpha X_1 + \beta X_2)$ $A(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha AX_1 + \beta AX_2 = (\alpha X_1 + \beta X_2)A = \alpha X_1 A + \beta X_2 A$

Naj bo $U_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ -b & c & 3b+2c \end{pmatrix}; a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$ DA $U_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ b+c & 2a & a \end{pmatrix}; a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$ NE $U_3 = \left\{\begin{pmatrix} 3a-b & 0 & 0 \\ 3b & 2a-b & a \end{pmatrix}; a,b \in \mathbb{R}\right\}$ NE! kateri so $\leq \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

Def: Naj bo $v \in {}_{\mathbb{R}}V$! Vektor v je LINEARNA KOMBINACIJA vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, če obstajo skalarji $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, takšni, da $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$!
Pravimo tudi, da se v izraža kot LINEARNA KOMBINACIJA vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$!

Primeri: Ali vektor $v = (2,4) \in \mathbb{R}^2$ lahko zapišemo kot lin. komb. vektorjev $(2,1)$ in $(0,1)$? DA! $(2,4) = 1 \cdot (2,1) + 3 \cdot (0,1)$

Ali $v = (5,4,-2) \in \mathbb{R}^3$ l.komb. $\overbrace{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)}^{\text{ENOTSKI VEKTORJI}}$? DA!

Def: Naj bo $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ množica vektorjev vek. pr. V in naj bo W množica vseh linearnih kombinacij vektorjev iz S! Tedaj je W LINEARNA OGRINJAČA ali LUPINA vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$!
Oznaka $W = \mathcal{L}(S) = \langle S \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \text{span}(S)$.

Primeri: $\mathcal{L}((1,0,0),(0,1,0)) = \{(a,b,0); a,b \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3) = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

$\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$; $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \Rightarrow \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha + \beta x + \gamma x^3; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

Theo: 1) Linearna lupina $\mathcal{L}(S) \leq_{\mathbb{R}} V$! Seveda če $S \subseteq V$!
2) $\mathcal{L}(S)$ je najmanjši vektorski podprostor od V, ki vsebuje vektorje iz S!

Zgl: $\mathcal{L}(\{0\}) = \{0\}$

$\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = \mathcal{L}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ in $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(E_{ij}; i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$

LINEARNA NEODVISNOST

Def: 1.) Množica $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ vektorjev vektorskega prostora V je **LINEARNO NEODVISNA** (l.n.), če ima ničelna linearna kombinacija vektorjev iz S samo trivialno rešitev!

$S=\{v_1,\dots,v_n\}$ l.n. $\Longleftrightarrow \alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=\underbrace{\vec{0}}_{\text{vektor nič}} \Rightarrow \alpha_1=\dots=\alpha_n=\underbrace{0}_{\text{nič iz obsega } (\mathbb{R} \text{ ali } \mathbb{C})}$

2) S je **LINEARNO ODVISNA** (l.o.), če obstajajo taki skalarji $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$, ne vsi enaki nič, da je $\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=\vec{0}$!

Primer: 1) Ali so vektorji $v_1=(2,-1,0,3)$, $v_2=(1,2,5,1)$, $v_3=(7,-1,5,8)$ lin. odvisni?

$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=0 \Longleftrightarrow$
$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1+\alpha_2+7\alpha_3&=0 \Rightarrow \alpha_1=3\alpha_2\\ -\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3&=0\\ 5\alpha_2+5\alpha_3&=0 \Rightarrow \alpha_3=-\alpha_2\\ 3\alpha_1+\alpha_2+8\alpha_3&=0 \end{aligned}\right\}$$

stolpci so koeficienti vektorja

ko poskusiš vse enačbe dobiš $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0 \Rightarrow$ l.n.

drugi način je, da poiščeš rang matrike sistema ... dobiš rang $=3$

$\{v_1,v_2,\dots v_n\}$ lin. neodv. .. $\Leftrightarrow$ rang$\left(\begin{bmatrix} v_1\end{bmatrix}\dots\begin{bmatrix} v_n\end{bmatrix}\right)=n$!

če rang $<n \Leftrightarrow$ lin. odvisni

2) set of one vektor $\{v\}$ je l.n. $\Leftrightarrow v\neq 0$!

Theo: 1) Če množica $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ vsebuje vektor $\vec{0}$, potem je linearno odvisna!

2) Naj bo $\mathcal{U}=\mathcal{L}(v_1,v_2,\dots,v_n)$ - linearna lupina, in naj bo v_j linearna kombinacija vektorjev $v_1,v_2\dots v_{j-1},v_{j+1}\dots v_n$ (vsi ostali vektorji brez v_j). $\Rightarrow$ Potem je $\mathcal{U}=\mathcal{L}(v_1,v_2,\dots,v_{j-1},v_{j+1},\dots,v_n)$ - spet vsi ostali vektorji brez v_j!

BAZA IN DIMENZIJA VEKTORSKEGA PROSTORA

Def: Naj bo $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ množica vektorjev vektorskega prostora V!
Množica B je **BAZA** vektorskega prostora V natanko tedaj, ko velja:

1) B je linearno neodvisna!
2) $V=\mathcal{L}(B)$ - celoten vektorski prostor je linearna lupina od B! $\forall v\in V;\ \exists!\,\alpha_1,\dots,\alpha_n: v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$

Elemente baze imenujemo **BAZNI VEKTORJI**!

Primer: 1.) $B=\{\overbrace{(1,0,\dots,0)}^{e_1},\overbrace{(0,1,\dots,0)}^{e_2},\dots,\overbrace{(0,0,\dots,1)}^{e_n}\}$ je STANDARDNA BAZA v $\mathbb{R}^n$!

2.) $\mathbb{R}_n[x]$ - vek. pr. polinomov stopnje $\leq n$ ... standardna baza je $B=\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$!

3.) za matrike $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ je standardna baza $B=\left\{E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$!

4) ali je $B=\{v_1=(0,1,1), v_2=(0,1,2), v_3=(2,0,-1)\}$ baza za $\mathbb{R}^3$? ... ali $\forall v\in V=\mathbb{R}^3: \underbrace{v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3}$ razvoj vektorja v po bazi B!
... sistem je enolično rešljiv $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&0\\1&2&-1\end{pmatrix}\neq 0$ ... dobimo $\det=2\neq 0 \Rightarrow$ B JE BAZA ZA $\mathbb{R}^3$!

Theo: 1.) Vsak vektor $v\in V$ ima natanko en razvoj po bazi B! - vsak vektor ima enoličen razvoj po bazi!

Theo: Naj bosta $B_1=\{v_1,\dots,v_n\}$ in $B_2=\{u_1,\dots,u_m\}$ dve bazi v $_{\mathbb{R}}V$! Potem je $m=n$.

Def: Število vektorjev v bazi imenujemo **DIMENZIJA** vektorskega prostora V! ... $\dim_{\mathbb{R}} V=n$

Primeri: 1.) $\dim\{\vec{0}\}=0$

2) $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n=n$

3) $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_n[x]=n+1$

4) $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[x]=\infty$

5) $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})=m\cdot n$

6) $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}=1$ in $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=2 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n=2n$

7) Naj bo $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ in naj bo $\mathcal{U}=\{X\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\mid AX=XA\}$ podprostor od $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$! Izračunaj $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{U}=$?

naj bo $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \Rightarrow AX=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\0&0\end{pmatrix}$ in $XA=\begin{pmatrix}a&a\\c&c\end{pmatrix}$ ... $XA=AX \Rightarrow c=0$ in $b+d=a \Rightarrow X=\begin{pmatrix}a&b\\0&a-b\end{pmatrix}$

za eno možno bazo dobim $A_1'=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ in $A_2'=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$ P.S. tudi $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ in $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ je baza!

P.S. vidimo da $\mathcal{U}=\mathcal{L}(A_1,A_2)$ ... pokazati moramo še, da sta A_1 in A_2 linearno neodvisna $\Rightarrow$ je baza! (TKO JE PRAV!)

8) Naj bo $\mathcal{M}_{2,2}^S(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$ ... => A je simetrična matrika! Dokaži $\mathcal{M}_{2,2}^S(\mathbb{R}) \leq \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$! dim=?

- podprostor: $A, B \in \mathcal{M}_{2,2}^S$; $(\alpha A + \beta B)^T = (\alpha A)^T + (\beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T = \alpha A + \beta B \in \mathcal{M}_{2,2}^S$ => je podprostor!

če so že lin. neodvisne je baza!

- dimenzija : $A = A^T \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aA_1 + bA_2 + cA_3 \Rightarrow \mathcal{M}_{2,2}^S = \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3)$ ... $\dim \mathcal{M}_{2,2}^S = 3$

ali so A_1, A_2, A_3 lin. neodvisne? ... $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0_{2,2} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$?... dobiš da so neodvisne => so BAZA

9) $S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot X = 0;\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\}$ – $AX = b$ -> pogoji, ki povezujejo koor. ... mora biti $b = 0$ (drugače ni vek. pros.)

$\dim_{\mathbb{R}} S = n - \text{rang}(A)$ – dim. podprostora je dim. originalnega pr. – rang matrike koeficientov.

Theo: Naj bo V končno dimenzionalen vektorski prostor! ($\dim V < \infty$)

1.) če je $U = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_e)$ neničelni vektorski pod-prostor od V, potem v množici $\{v_1, v_2, \dots, v_e\}$ obstaja podmnožica, ki je baza za U!

2) če je množica vektorjev $\{v_1, \dots, v_e\}$ lin. neodv., potem v V obstajajo taki vektorji $v_{e+1}, \dots, v_n$, da je $\{v_1, v_2, \dots v_e, v_{e+1}, \dots v_n\}$ baza za V!

Zgled: 1.) V množici $\mathcal{M} = \{1, 1+x, \cancel{1-x}, \cancel{1+x+x^2}, 1-x^2\}$ poiščite kako bazo za $U = \mathcal{L}(\mathcal{M})$! ni to edina možnost.

vidimo $(1+x+x^2) = (-1)\cdot(1-x^2) + 1\cdot(1+x) + 1\cdot(1)$ in $(1-x) = (-1)\cdot(1+x) + 2\cdot(1)$ => baza $B = \{1, 1+x, 1-x^2\}$ => $\dim U = 3$!

Lahko pa tako: $p_1 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$ -> vidimo, da rank = 3 – tiste stolpce, ki si uporabil za neničelno det., tisti so bazni vektorji!

2) Dopolnite do baze prostora $\mathbb{R}^3$ množico $S = \{u_1, u_2\}$, kjer je $u_1 = (1,2,3)$ in $u_2 = (-2,1,0)$!

Theo: Naj bo V vektorski prostor, $\dim V = n$! In množica $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subseteq V$! Naslednje trditve so enakovredne:

1) B je baza za V

2) $\forall v \in V$ ima natanko en razvoj po bazi B; $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$! Tedaj so

3) skalarji v_i koordinate vektorja v, glede na bazo B.

$[v]_B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ je koordinatni vektor od v, glede na bazo B!

3) B je maksimalna lin. neod. množica vek. pros. V! Kar pomeni, da je B lin. neod. in vsaka končna podmnožica vek. pr. V, ki vsebuje B, lin. odvisna

4) B je minimalna linearna lupina vek. pr. V, kar pomeni, da je B linearna lupina za V in vsaka prava podmnožica množice B ni lin. lup. za V!

Zgled: 1.) Poiščite koordinatni vektor za $v = (10, 5, 0)$ glede na dano bazo, če je:

a) B_1 standardna baza za $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow [v]_{B_1} = (10, 5, 0)$

b) $B_2 = \{(1,-1,1), (0,1,2), (3,0,-1)\} \Rightarrow [v]_{B_2} = (-2, 3, 4)$

P.S. ali pa det (rang) $= 1 + k^2 \neq 0$ za $\forall k \in \mathbb{R}$

2) Naj bojo vektorji $v_1 = (1, k, 1, 0)$, $v_2 = (-k, 1, -1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 2, 1)$ iz $\mathbb{R}^4$! dobiš da je mogoče samo če $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$!

a) Dokažite, da je množica $\{v_1, v_2, v_3\}$ lin. neod. za $\forall k \in \mathbb{R}$! $\Rightarrow \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}: \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0,0,0,0)$ ...

b) Najdite $k \in \mathbb{R}$, tako, da je $v = (1, 1, -2, -1) \in \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$! $\Rightarrow$

DIMENZIJA PODPROSTORA

Theo: Naj bo $\mathcal{U}$ vektorski podprostor končno razsežnega vek. prostora V! Tedaj velja:

1) $\dim \mathcal{U} \leq \dim V$
2) $\dim \mathcal{U} = 0 \iff \mathcal{U} = \{0\}$
3) $\dim \mathcal{U} = \dim V \iff \mathcal{U} = V$

Theo: Naj bosta $\mathcal{U}_1$ in $\mathcal{U}_2$ vektorska podprostora od V! Potem je:

1) njun presek $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ tudi vektorski podprostor od V
2) njuna vsota $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in \mathcal{U}_1, u_2 \in \mathcal{U}_2\}$ tudi vektorski podprostor od V

Če je $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{0\}$, potem vsoto $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ imenujemo DIREKTNA VSOTA! Oznaka $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$!
Če je $V = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$, potem lahko vsak vektor $v \in V$ na samo en način izrazimo kot vsoto $v = u_1 + u_2$; $u_1 \in \mathcal{U}_1$ in $u_2 \in \mathcal{U}_2$! Velja $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \mathcal{L}(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2)$!

Zgled: 1) Naj bo $\mathcal{U}_1 = \{(x,0);\ x \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^2$ in $\mathcal{U}_2 = \{(0,y);\ y \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^2$!

$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{(0,0)\}$

$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \mathcal{L}(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2) = \mathbb{R}^2 \implies \mathbb{R}^2 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \implies \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ enolično izrazimo kot $(x,y) = \underset{\mathcal{U}_1}{(x,0)} + \underset{\mathcal{U}_2}{(0,y)}$

2) $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}^{S}_{n,n}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}^{PS}_{n,n}(\mathbb{R})$; $\mathcal{M}^{S}_{n,n}$ – SIMETRIČNE MATRIKE ($A = A^T$); $\mathcal{M}^{PS}_{n,n}$ – ANTI-SIMETRIČNE MATRIKE ($A = -A^T$)

→ da je direktna vsota, moramo pokazat, da je vsota, in da je presek samo ničelna matrika!

i) $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}^{S}_{n,n}(\mathbb{R}) + \mathcal{M}^{PS}_{n,n}(\mathbb{R})$ in ii) $\mathcal{M}^{S}_{n,n} \cap \mathcal{M}^{PS}_{n,n} = \{0\} \to A \in$ (presek) $\implies A = A^T$ in $A = -A^T \implies A^T = -A^T \implies A^T = A = 0$ (matrika 0)

$\Leftarrow \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \exists A_1 \in \mathcal{M}^{S}_n(\mathbb{R})$ in $\exists A_2 \in \mathcal{M}^{PS}_n(\mathbb{R})$ tako da: $A = A_1 + A_2$

izberemo $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T)$ $\left[A_1^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = A_1 \checkmark\right]$ in $A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T)$ $\left[A_2^T = \ldots = -A_2\right] \checkmark$

Theo: (DIMENZIJSKA ENAKOST) Za $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \leq V$ velja $\dim(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) = \dim \mathcal{U}_1 + \dim \mathcal{U}_2 - \dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$!

Naloga: Naj bosta $\mathcal{U}_1 = \mathcal{L}(u_1, u_2)$ in $\mathcal{U}_2 = \mathcal{L}(u_3, u_4)$, kjer so $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,2,-1)$, $u_3 = (2,2,1)$, $u_4 = (0,0,1)$ v $\mathbb{R}^3$!
Izračunajte $\dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ in najdite bazo za $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$!

$\dim \mathcal{U}_1 = \text{rang}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = 2$; $\dim \mathcal{U}_2 = \text{rang}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = 2$; $\dim(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) = \text{rang}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \implies \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \mathbb{R}^3$!

$\implies \dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = 2 + 2 - 3 = \underline{1} \implies$ baza ima samo 1 element!

$\implies \forall v \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \implies v = \alpha u_1 + \beta u_2 = \gamma u_3 + \delta u_4 \implies$ SIS. ENAČB za $\alpha, \beta, \gamma, \delta \implies v = (\gamma/2, 2\gamma, \gamma) \implies$ BAZA $B = \{(1/2, 2, 1)\}$

Naloga 2: Naj bosta $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ in $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$!
Izračunaj $\dim(U \cap V)$! Ali je $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$?

za U: $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ in $2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \implies x_3 = x_2 - 2x_1 \implies (x_1, x_2, x_2 - 2x_1) = x_1 \cdot (1, 0, -2) + x_2 \cdot (0, 1, 1) \implies \dim U = 2$ (BAZA za U)

za V: $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ in $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ in $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ ... rešiš sistem ... $\implies$ BAZA za V: $(3, 1, -4) \implies \dim V = 1$

za $U + V$: $\dim(U + V) = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ ... izračunaš det... $= 1 \implies$ rang $= 3 \implies \dim(U + V) = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \implies U + V = \mathbb{R}^3$

... presek $= \{0\} \implies \mathbb{R}^3 = U \oplus V$!

PREHOD NA NOVO BAZO

V vektorskem prostoru imamo dve bazi $B=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ in $B'=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$!
Denimo da poznamo razvoj vektorjev iz V po bazi B (STARA BAZA)!
Kako potem izračunamo razvoj vektorjev iz V po bazi B' (NOVA BAZA)?

Za $v\in V$, naj bo $v=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j$ razvoj po bazi B in $v=\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i$ razvoj po bazi B'!
Sedaj pa razvijemo vektorje iz baze B' po bazi B!
$v_1=\sum\gamma_{1j}u_j\,;\ v_2=\sum\gamma_{2j}u_j,\ \dots,\ v_n=\sum\gamma_{nj}u_j$!

Dobimo $v=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}u_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\gamma_{ij}\right)u_j \Longrightarrow \alpha_j=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\gamma_{ij}$!

Označimo: RAZVOJ PO BAZI B $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, RAZVOJ PO BAZI B' $[v]_{B'}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$, PREHODNA MATRIKA MED B in B' $P_{B\to B'}=\begin{array}{c}\begin{matrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{n1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \gamma_{1n} & \gamma_{2n} & \cdots & \gamma_{nn}\end{pmatrix}\end{array}$

v stolpce zapišemo izraze za bazne vektorje B', glede na bazo B

in zapišemo v matrični obliki kot:

$$[v]_B=P_{B\to B'}\cdot[v]_{B'}$$

Zgled: 1) Poiščite razvoj polinoma $p(x)=1+2x+3x^2$ glede na bazo $B'=\{1,\ 1+x,\ 1+x+x^2\}$!
$\Rightarrow B=$ stara baza $=$ standardna baza $=\{1,x,x^2\}$!
$\Rightarrow [p]_B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\quad P_{B\to B'}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ \dots\ [p]_B=P_{B\to B'}\cdot[p]_{B'}\Rightarrow[p]_{B'}=P_{B\to B'}^{-1}\cdot[p]_B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}}$!

2) Dokažite, da je $B_1=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ baza za $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ in poiščite razvoj vek. $\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$ glede na B_1!
$B=\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ standardna baza, $\dim\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})=4$!
$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=E_{11}+E_{12}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ ... naredimo matriko $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(\because)=-2\neq0$
$\Rightarrow$ ker je $\det=-2\neq0$ je rang $=4\Rightarrow$ je linearno neodvisna $\Rightarrow$ je baza!
$[v]_B=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix};\ P_{B\to B'}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow[v]_{B_1}=P_{B\to B'}^{-1}\cdot[v]_B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1/2&-1/2&1/2&-1/2\\-1/2&1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}}$!

Theo: Prehodna matrika $P_{B\to B'}$, je vedno obrnljiva in inverzna matrika $(P_{B\to B'})^{-1}=P_{B'\to B}$!

Theo: Če je $P_1=P_{B\to B'}$ in $P_2=P_{B'\to B''}$, potem je $P_2\cdot P_1=P_{B\to B''}$!

Zgled: Razvoj vektorja u po bazi $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ je $[u]_B=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$! Poiščite razvoj po bazi $B'=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$!
Lažje je, če vpeljemo še standardno bazo $B_s=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$!
Dobimo:
$P_{B^s\to B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ in $P_{B^s\to B'}=\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}$ ter $[u]_{B'}=P_{B\to B'}[u]_B$ in $P_{B\to B'}=P_{B'\to B^s}\cdot P_{B^s\to B}=P^{-1}_{B^s\to B'}\cdot P_{B^s\to B}\dots$
$\Rightarrow[u]_{B'}=\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-3\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}7\\-8\end{pmatrix}}$ ✓

EVKLIDSKI PROSTORI

Def: Naj bo V realni vektorski prostor! Preslikava $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ je SKALARNI PRODUKT

1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ SIMETRIČNOST
2) $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$ LINEARNOST V 1. FAKTORJU
3) $\langle u, u \rangle \geq 0$ za $\forall u \in V$ in $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$

Zgled: 1.) V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^n$ imamo skalarni produkt $\langle u, v \rangle = u \cdot v$; $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ in $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ tedaj $\langle u, v \rangle = u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$!

2.) V vektorskem prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ definiramo preslikavo $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ s predpisom $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x)\, dx$!
Preverimo lastnosti 1.), 2.) in 3.) iz definicije in vidimo, da je skalarni produkt!

Def: Naj bo V kompleksni vektorski prostor! Preslikava $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ je SKALARNI PRODUKT

1.) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$!
2) $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$
3) $\langle u, u \rangle \geq 0$ za $\forall u \in V$ in $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$

Iz 1.) in 2.) dobimo za linearnost v 2. faktorju : $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle + \overline{\beta} \langle u, w \rangle$!

Def: S predpisom $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ definiramo NORMO (dolžino) vektorja v! Potem:

1.) $\|v\| \geq 0$ in $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$
2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ ABSOLUTNA HOMOGENOST
3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ TRIKOTNIŠKA NEENAKOST
4) Če sta vektorja u in v pravokotna (ORTOGONALNA) oz. $\langle u, v \rangle = 0$, potem velja Pitagorov izrek: $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
5) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ CAUCHY-SCHWARTZ NEENAKOST
6) Označimo s φ kot med vektorjema u in v! Tedaj: $\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$

Def: Množica neničelnih vektorjev $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je ORTOGONALNA, če je $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ za vsak par indeksov $i \neq j$!
Množica vektorjev $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je ORTONORMALNA, če je ORTOGONALNA in velja $\|v_i\| = 1$ za $\forall i = 1 \dots n$!

Theo: Vsak končno razsežen vektorski prostor ima ORTO-NORMIRANO BAZO!

Naj bo $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ baza za ${}_{\mathbb{R}}V$, $(\dim V = n)$! Postavimo $e_1' = v_1$, $e_1 = \frac{e_1'}{\|e_1'\|}$ …
… $e_2' = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1$ in $e_2 = e_2' / \|e_2'\|$ …
… $e_3' = v_3 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1$ in $e_3 = e_3' / \|e_3'\|$ … itd. ← Postopek imenujemo GRAMM-SCHMIDTOV ALGORITEM
Množica vektorjev $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ je ORTO-NORMIRANA BAZA

Zgled: 1.) Uporabimo G-S algoritem na bazi $\{v_1, v_2, v_3\}$ za $\mathbb{R}^3$, kjer so $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,0,1)$!

$e_1' = v_1$; $\|e_1'\| = \sqrt{2} \Rightarrow e_1 = e_1' / \|e_1'\| = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$e_2' = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = (0,1,1) - \langle (0,1,1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \rangle \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

$\|e_2'\| = \sqrt{3/2} \Rightarrow e_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$

$e_3' = v_3 - \langle v_3, e_2 \rangle \cdot e_2 - \langle v_3, e_1 \rangle \cdot e_1 = \dots (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ $\quad e_3 = e_3' / \|e_3'\| = \dots = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

2) D.N. G-S algoritem na bazi $B = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$

3.) V $\mathbb{R}_2[x]$ je skalarni produkt definiran kot $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x)\, dx$! Poišči kakšno orto-normirano bazo za $\mathbb{R}_2[x]$!

$e_1' = 1$; $\|e_1'\| = 1 \Rightarrow e_1 = e_1' / \|e_1'\| = 1$

$e_2' = x - \langle x, 1 \rangle \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$; $\|e_2'\| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow e_2 = e_2' / \|e_2'\| = \sqrt{3}(2x - 1)$

$e_3' = x^2 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2 - \langle x^2, 1 \rangle \cdot 1 = \dots = x^2 - x + 1/6$

Vaje: 1) Naj bojo $v_1=(1,2,3,4)$, $v_2=(2,2,2,6)$, $v_3=(0,2,4,4)$, $v_4=(1,0,-1,2)$, $v_5=(2,3,0,1)$!
Naj bosta $U=\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)$ in $V=\mathcal{L}(v_4,v_5)$. Najdite ortonormirano bazo za $U\cap V$!

$\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V-\dim(U+V)$

$\dim U = \text{rang}\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&2\\3&2&2\\4&6&4\end{pmatrix}=3$; $\dim V=\text{rang}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\-1&0\\2&1\end{pmatrix}=2$; $\dim(U+V)=\text{rang}\begin{pmatrix}\dots\end{pmatrix}=4 \Rightarrow \dim(U\cap V)=\underline{1}$

$U=\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3$ in $V=\mathcal{L}(v_4,v_5)=\beta_1v_4+\beta_2v_5$ ... REŠIŠ SISTEM in dobiš $\alpha_1=-\alpha_2=-\beta_2$; $\alpha_3=\beta_1=0$!

$\Rightarrow$ torej je vektor $(v_1-v_2-v_5)$ baza za $U\cap V$!

2) Naj bo $U=\{p\in\mathbb{R}_3[x]\ /\ p(2)=0\}$ a) Ali je $U\leq\mathbb{R}_3[x]$ b) $\dim U=$? c) Ali je $B=\{p_1=x^3-4x,\ p_2=x^3-x^2-x-2,\ p_3=x^2-6x+8\}$ baza za U?

a) Ali $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ in $\forall p,q\in U \Rightarrow \alpha p+\beta q\in U$ ... $(\alpha p+\beta q)(2)=\alpha \overset{0}{p(2)}+\beta \overset{0}{q(2)}=0$ ✓ Torej je podprostor $\mathbb{R}_3[x]$

b) $U=\{p=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \mid a_0+2a_1+4a_2+8a_3=0\} \Rightarrow \dim U=3$ ($\dim U=\dim\mathbb{R}_3[x]-\dim$(ena hom. enačba))

c) da je B baza, mora najprej biti $B\in U$ in nato še linearno neodvisni.

linearno neodvisni $\Rightarrow \text{rang}(p_1|p_2|p_3)=\text{rang}\begin{pmatrix}0&-2&8\\-4&-1&-6\\0&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}=3$ ... vidimo da $\det\neq0 \Rightarrow \text{rang}=3$ ✓

3) Naj bosta $B=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ in $C=\{1,x-3,(x-3)^2,(x-3)^3,(x-3)^4\}$!

a) dokaži, da je C baza za $\mathbb{R}_4[x]$!

b) poiščite prehodno matriko iz C v B!

c) zapišite polinom $p(x)=x^4-x^3+3x-1$ po bazi C!

P.S.: lahko rešiš tudi z uporabo Taylor formule: $p(x)=\sum_0^{n-1}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\dots=\sum_{i=0}^{4}\frac{p^{(i)}(3)}{i!}(x-3)^i=\dots$

$=\_\_\_\cdot 1+\_\_\_\cdot(x-3)+\_\_\_\cdot(x-3)^2+\_\_\_\cdot(x-3)^3+\_\_\_\cdot(x-3)^4$

LINEARNE TRANSFORMACIJE

Def: Naj bosta U in V vektorska prostora nad $\mathbb{R}$! Preslikava iz U v V, $T:U\to V$, je LINEARNA TRANSFORMACIJA, če velja:

1) ADITIVNOST: $T(u_1+u_2)=T(u_1)+T(u_2)$

2) HOMOGENOST: $T(\alpha u)=\alpha\cdot T(u)$; ali ekvivalentno:

1)+2): $T(\alpha u_1+\beta u_2)=\alpha T(u_1)+\beta T(u_2)$

Zgled: 1) Ničelna transformacija: $T:U\to U$; $T(u)=\vec{0}$, za $\forall u\in U$

2) Identična transformacija: $T:U\to U$; $T(u)=u$; $\forall u\in U$

3) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$; $T(x,y)=(2x-y,-x+y,3x+2y)$ ... 1) $T(\alpha u)=T(\alpha x,\alpha y)=(2\alpha x-\alpha y,-\alpha x+\alpha y,3\alpha x+2\alpha y)=\alpha T(x,y)$ ✓
2) $T(x_1+x_2,y_1+y_2)=\dots=T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)$ ✓ JE LIN. TR. ✓

4) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$; $T(x,y,z)=(x+z,x-y+1)$ ... ni lin. tr. zaradi $+1$ v drugi komponenti!

5) $T:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_{n+1}[x]$; $T(p(x))=x\cdot p(x)$ ... 1)+2) $T(\alpha\cdot p+\beta q)=\alpha T(p)+\beta T(q)$? DA! $\Rightarrow$ JE LIN. TR. ✓

6) $T:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_{n-1}[x]$; $T(p(x))=p'(x)$ - ODVOD ... 1)+2) ... $T(\alpha p+\beta q)=\alpha p'+\beta q'=\alpha T(p)+\beta T(q) \Rightarrow$ JE LIN. TR. ✓

7) $T:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $T(A)=A^T$ ... $T(\alpha A+\beta B)=(\alpha A+\beta B)^T=\alpha A^T+\beta B^T=\alpha T(A)+\beta T(B) \Rightarrow$ JE LIN. TR. ✓

8) $T:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$; $T(A)=\det A$ ... NI LIN. TR.

LASTNOSTI: 1) $T(\vec{0})=\vec{0}$

2) $T(-u)=-T(u)$

3) Naj bo $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ baza za vektorski prostor V! Potem je linearna transformacija $T:V\to W$ natanko določena, če poznamo slike baznih vektorjev!

Pf 3): $\forall x\in V$, $x=\sum_{i=1}^n x_iv_i \Rightarrow T(x)=T\left(\sum_i^n x_iv_i\right)\underset{\text{ker je } T \text{ linearna}}{=}\sum_i^n x_i\cdot\overbrace{T(v_i)}^{\text{slike baznih vektorjev}}$

Zgled: Naj bo $B=\{v_1, v_2, v_3\}$ baza za $\mathbb{R}^3$, kjer so $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,1,0)$, $v_3=(1,0,0)$!
Naj bo $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ lin. tr. tako, da je $T(v_1)=(1,0)$, $T(v_2)=(2,-1)$, $T(v_3)=(4,3)$! Izračunaj $T(2,-3,5)$!

1. način): $(2,-3,5)=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_1=5, \alpha_2=-8, \alpha_3=\cancel{10}\,5$
$\Rightarrow T(2,-3,5)=5\cdot T(v_1)-8\cdot T(v_2)+5\cdot T(v_3)=\ldots=(9,23)$ ✓

2. način): $(x_1,x_2,x_3)=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=x_1, \alpha+\beta=x_2, \alpha=x_3 \Rightarrow \alpha=x_3, \beta=x_2-x_3, \gamma=x_1-x_2$
$T(x)=x_3\cdot T(v_1)+(x_2-x_3)\cdot T(v_2)+(x_1-x_2)\cdot T(v_3)=\ldots=(x_3+2x_2-2x_3+4x_1-4x_2, -x_2+x_3+3x_1-3x_2)=$
$=(4x_1-2x_2-x_3, 3x_1-4x_2+x_3)=\ldots=(9,23)$ ✓

JEDRO IN SLIKA LINEARNE TRANSFORMACIJE

Def: Naj bo $T:U\to V$ linearna transformacija!
- $\mathrm{Ker}\,T=\{u\in U \mid T(u)=\vec{0}\}$ ... JEDRO ali KERNEL
- $\mathrm{Im}\,T=\{v\in V \mid \exists u\in U: T(u)=v\}$ SLIKA

Theo: 1.) $\mathrm{Ker}\,T\leq U$ ... jedro je podprostor od U!
2.) $\mathrm{Im}\,T\leq V$ ... slika je podprostor od V!
P.S.: Ker je $T(\vec{0})=\vec{0} \Rightarrow \vec{0}\in \mathrm{Ker}\,T \Rightarrow$ jedro vsebuje vedno vsaj vektor $\vec{0}$!

Zgled: 1) Naj bo $T:U\to U$ ničelna transformacija $\Rightarrow T(u)=\vec{0}$ za $\forall u\in U$!
... $\mathrm{Ker}\,T=U$ ... $\mathrm{Im}\,T=\{\vec{0}\}$

2) Naj bo $T:U\to U$ identična lin. tr. $\Rightarrow T(u)=u$ za $\forall u\in U$!
... $\mathrm{Ker}\,T=\{\vec{0}\}$ ... $\mathrm{Im}\,T=U$

3) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$; $T(x,y,z)=(x-y, z, y-x)$
... $\mathrm{Ker}\,T=\{(x,y,z) \mid x=y, z=0\}=\{(x,x,0); x\in\mathbb{R}\}=\mathcal{L}((1,1,0)) \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\,T=1$
... $\mathrm{Im}\,T=\{(x-y, z, y-x); x,y,z\in\mathbb{R}\}=\mathcal{L}((1,0,-1),(-1,0,1),(0,1,0))$ ... dva vektorja v $\mathcal{L}(\ldots)$ sta linearno odvisna ($\det=0$) $\Rightarrow \dim \mathrm{Im}\,T=2$! ... baza za sliko $B=\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ ... če uporabimo še Gramm-Schmidtov algoritem, da dobimo orto-normirano bazo, dobimo $B'=\{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}),(0,1,0)\}$

4) Naj bo $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ lin. tr. določena s predpisom $T(1,2)=(1,0,1)$, $T(-1,0)=(0,1,1)$!
Izračunaj $\mathrm{Ker}\,T$, $\mathrm{Im}\,T$, $\dim(\mathrm{Ker}\,T)$, $\dim(\mathrm{Im}\,T)$ in $T(v)$, kjer je $v=(2,1)$!
... dobiš $\mathrm{Ker}\,T=\{(0,0)\}$; $\dim(\mathrm{Ker}\,T)=0$; $\mathrm{Im}\,T=\mathcal{L}(\overset{T(e_1)}{(0,-1,-1)},\overset{T(e_2)}{(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1)})$; $\dim(\mathrm{Im}\,T)=2$; $T(v)=(\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{2},-1)$
P.S. vedno je $\mathrm{Im}\,T=\mathcal{L}(T(e_1),T(e_2),\ldots,T(e_n))$

Theo: 1) Linearna transformacija $T:U\to V$ je INJEKTIVNA $(T(u)=T(v)\Rightarrow u=v)$ natanko tedaj, ko je $\mathrm{Ker}\,T=\{\vec{0}\}$!
2) Linearna transformacija $T:U\to V$ je SURJEKTIVNA ($\mathrm{Im}\,T=V$) natanko tedaj, ko je $\mathrm{Im}\,T=V$!
3) $\dim U=\dim(\mathrm{Im}\,T)+\dim(\mathrm{Ker}\,T)$!
4) Če je T BIJEKTIVNA (= INJEKTIVNA + SURJEKTIVNA), potem je $\dim U=\dim V$!
5) Če je $\dim U=\dim V$, potem je T INJEKTIVNA $\Leftrightarrow$ T SURJEKTIVNA

Zgled: $T:\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$; $T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=-3$, $T\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=-1$, $T\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=0$! $\mathrm{Ker}\,T=?$ $\mathrm{Im}\,T=?$
standardna baza $B=\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, dobimo:
$T(E_{11})=-3$; $T(E_{12}+E_{21})=T(E_{12})+T(E_{21})=-1$; $T(E_{11}+E_{21})=T(E_{11})+T(E_{21})=0=T(E_{22}) \Rightarrow$
$\Rightarrow T(E_{11})=-3$, $T(E_{12})=-4$; $T(E_{21})=3$; $T(E_{22})=0$
tako dobimo:
$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=aT(E_{11})+bT(E_{12})+cT(E_{21})+dT(E_{22})=-3a-4b+3c \ldots \Rightarrow a=\tfrac{1}{3}(-4b+3c)$$
$\Rightarrow \mathrm{Ker}\,T=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\vec{0}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\tfrac{1}{3}(-4b+3c)&b\\c&d\end{pmatrix}; b,c,d\in\mathbb{R}\right\}\Rightarrow$

$\dim U=\dim \mathrm{Ker}+\dim \mathrm{Im}$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\,T=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-4/3&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ ... $\dim(\mathrm{Ker}\,T)=3 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\,T)=1$ ... vemo pa $\mathrm{Im}\,T\leq\mathbb{R}$ in $\dim\mathbb{R}=1 \Rightarrow \mathrm{Im}\,T=\mathbb{R}$! $\Rightarrow T$ je SURJEKTIVNA

Theo: 1) Naj bosta $T_1: U \to V$ in $T_2: V \to W$ linearni transformaciji! Potem je tudi KOMPOZITUM (produkt) $T_2 \circ T_1: U \to W$ linearna transformacija!

2) Naj bo $T: U \to V$ obrnljiva linearna transformacija (T je bijektivna), potem je tudi njen inverz $T^{-1}: V \to U$ linearna transformacija!

LINEARNI TRANSFORMACIJI PRIREJENA MATRIKA

Naj bo $T: U \to V$ linearna transformacija! Izberimo bazi $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ za U in $B_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$ za V!
Vemo, da je T natanko določena, če poznamo slike baznih vektorjev $T(u_1), \dots, T(u_n)$!
Razvijmo te vektorje po bazi B_2:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2 + \dots \alpha_{1m} v_m \\ T(u_2) &= \alpha_{21} v_1 + \alpha_{22} v_2 + \dots \alpha_{2m} v_m \\ &\vdots \\ T(u_n) &= \alpha_{n1} v_1 + \alpha_{n2} v_2 + \dots \alpha_{nm} v_m \end{aligned}$$

Koeficienti razvoja tvorijo matriko $M_{B_1 B_2}(T)$!

$$M_{B_1 B_2}(T) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$ ... matrika prirejena lin. transformaciji T, glede na bazi B_1 in B_2!

Theo: $\operatorname{rang} M_{B_1 B_2}(T) = \dim(\operatorname{Im} T)$ ... rang prirejene matrike je enak dimenziji slike!

Zgl.: 1) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $T(x,y) = (x+2y, x-y, 2x-3y)$ ... poiščemo lin. tr. prirejeno matriko glede na standardni bazi:
$B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, $B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
$T(1,0) = (1,1,2)$ in $T(0,1) = (2,-1,3) \implies M_{B_1B_2}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$! $\dim(\operatorname{Im} T) = \operatorname{rang} M_{B_1B_2}(T) = 2 \implies \dim(\operatorname{Ker} T) = 0$ (T INJEKTIVNA)

2) $T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$; $T(a+bx+cx^2) = (a+c, b-a-c)$ ... standardni bazi $B_1 = \{1, x, x^2\}$ in $B_2 = \{e_1, e_2\}$

$$\implies \left.\begin{aligned} T(1) &= (1,-1); \\ T(x) &= (0,1); \\ T(x^2) &= (1,-1) \end{aligned}\right\} \implies M_{B_1B_2}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3) D.N. $T: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$; $T(p) = p'$! Poišči lin. tr. prirejeno matriko, glede na standardni bazi!

Theo: 1) Če sta $T_1: U \to V$ in $T_2: V \to W$ linearni transformaciji in so B_1 baza za U, B_2 baza za V in B_3 baza za W, potem je $M_{B_1B_3}(T_2 \circ T_1) = M_{B_2B_3}(T_2) \cdot M_{B_1B_2}(T_1)$

2) Naj bo $T: U \to V$ linearna transformacija in $\dim U = \dim V$!
Potem je T bijektivna (~~IZOMORFIZEM~~) natanko tedaj, ko je $M_{B_1B_2}(T)$ obrnljiva!
Velja $(M_{B_1B_2}(T))^{-1} = M_{B_2B_1}(T^{-1})$!

Vaje: 1) Poišči T^{-1} in $M_{B_1B_2}(T^{-1})$, kjer sta B_1 in B_2 standardni bazi:

a) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $T(a,b,c) = (b+c, a+c, a+b)$ D.N.

b) $T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$; $T(a+bx+cx^2) = (a+b+c, b+c, c)$ D.N.

c) $T: \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$; $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c, b+c, c, d)$ ... $B_1 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, $B_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$$\implies M_{B_1B_2}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies M_{B_2B_1}(T^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies T^{-1}: \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

$$\implies T^{-1}(v_1, v_2, v_3, v_4) = v_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + v_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 & v_2 - v_3 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \implies \operatorname{Ker}(T^{-1}) = \dots = \{(0,0,0,0)\}$$

2) Izračunaj $\operatorname{Ker}(S \circ T)$, kjer sta $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ in $S: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ linearni transformaciji:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "S\circ T"'] & \mathbb{R}^4 \arrow[r, "S"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$T(a,b,c) = (a+b, c+b, a+c, b-a)$ in $S(a,b,c,d) = (a+b, c-d)$!

$$\dots M_{B_1B_3}(S \circ T) = M_{B_2B_3}(S) \cdot M_{B_1B_2}(T) = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies$$

$\implies S \circ T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ in $(S \circ T)(a,b,c) = (a+2b+c, 2a-b+c)$ ... $\operatorname{Ker}(S \circ T) = \{(a,b,c) \mid a+2b+c = 2a-b+c = 0\} = \dots$
$\dots = \{(3b, b, -5b); b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((3,1,-5)) \implies \dim(\operatorname{Ker}(S \circ T)) = 1 \implies \dim(\operatorname{Im}(S \circ T)) = 2 = \operatorname{rang} M_{B_1B_3}(S \circ T)$!

P.S. za $\operatorname{Im}(S \circ T)$ napišeš stolpce iz prirejene matrike v lin. lupino ... $\operatorname{Im}(S \circ T) = \mathcal{L}((1,2),(2,-1),(1,1))$ ... vendar

LASTNE VREDNOSTI IN LASTNI VEKTORJI

Def.: Naj bo dana matrika $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ – KVADRATNA MATRIKA
Kompleksno število α imenujemo LASTNA VREDNOST za A, če obstaja tak neničeln vektor $v \in \mathbb{C}^n$, da je $A \cdot v = \alpha \cdot v$!
Vektor v imenujemo LASTNI VEKTOR za A pri LASTNI VREDNOSTI α!
Velja:

$$A \cdot v = \alpha \cdot v \Longleftrightarrow (A - \alpha I_n) \cdot v = 0$$ ... homogen sistem enačb, katerega matrika je $(A - \alpha I_n)$

Množica $V_\alpha = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Av = \alpha v\}$ je vektorski pod-prostor in V_α imenujemo LASTNI POD-PROSTOR za A pri lastni vrednosti α! V_α je množica lastnih vektorjev pri lastni vrednosti α skupaj z vektorjem $\vec{0}$!

Homogeni sistem $(A - \alpha I_n) \cdot v = \vec{0}$ ima neničelno rešitev natanko tedaj, ko matrika $(A - \alpha I_n)$ ni obrnljiva $\Longleftrightarrow \det(A - \alpha I_n) = 0$!

Polinom stopnje n $p_A(\alpha) = \det(A - \alpha I_n)$ v spremenljivki α imenujemo KARAKTERISTIČNI POLINOM matrike A!

Posledica: Kompleksno število α je LASTNA VREDNOST za A natanko tedaj, ko je α ničla KARAKTERISTIČNEGA POLINOMA!

Zgled: Poiščite lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje za matrike:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D.N.

a) KARAKTERISTIČNI POLINOM $p_A(\alpha) = \det(A - \alpha I_2) = \det\begin{pmatrix} 2-\alpha & -1 \\ -4 & 2-\alpha \end{pmatrix} = (2-\alpha)^2 - 4 = \alpha^2 - 4\alpha = \alpha(\alpha - 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ničli sta $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 4$ ...
ALGEBRAIČNA VEČKRATNOST $m_a(\alpha_1) = 1$ in $m_a(\alpha_2) = 1$
Algebraična večkratnost lastne vrednosti α je njena stopnja v karakterističnem polinomu!
Pripadajoča LASTNA VEKTORJA v_1 in v_2 morata rešiti enačbi $Av_1 = \vec{0}$ in $Av_2 = 4v_2$! $\Longleftrightarrow (A - 4I_2)v_2 = \vec{0}$

$\alpha_1 = 0$: $Av_1 = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 & \Rightarrow y = 2x \\ -4x + 2y = 0 /:(-2) & \text{– drugi je enak kot prvi} \end{cases}$ $m_g(\alpha_1) = 1$

$\Rightarrow V_{\alpha_1 = 0} = \{(x, 2x);\ x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,2)) \Rightarrow v_1 = (1,2)$ LASTNI VEKTOR ... $\dim V_{\alpha_1 = 0} = 1$ (GEOMETRIČNA VEČKRAT.)

P.S. GEOMETRIČNA VEČKRATNOST $m_g(\alpha) = n - \text{rang}(A - \alpha I_n)$

$\alpha_2 = 4$: $(A - 4I_2) \cdot v_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 & \Rightarrow y = -2x \\ -4x - 2y = 0 /:2 \end{cases}$

$\Rightarrow V_{\alpha_2 = 4} = \{(x, -2x);\ x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,-2)) \Rightarrow v_2 = (1,-2)$ ... $\dim V_{\alpha_2 = 4} = 1 = m_g(\alpha_2)$

Opomba:
1) $0 < m_g(\alpha) \leq m_a(\alpha)$
2) vsota lastnih vrednosti = sled(A) ... $\sum \alpha_i = \text{sled}(A) = \text{tr}(A)$
3) $p_A(0) = \det A$
4) vsota algebraičnih večkratnosti $= n$ ... $\sum m_a(\alpha) = n$

b) $p_A(\alpha) = \det\begin{pmatrix} -\alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 + 1 \Rightarrow$ LASTNI VREDNOSTI $\alpha_1 = i$ $(m_a(\alpha_1) = 1)$ in $\alpha_2 = -i$ $(m_a(\alpha_2) = 1)$

$\alpha_1 = i$: $V_{\alpha_1} = \{v \in \mathbb{C}^2 \mid (A - iI_2) \cdot v = \vec{0}\} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ix - y = 0 & \Rightarrow y = -ix \\ x - iy = 0 /\cdot(-i) \end{cases}$

$\Rightarrow V_{\alpha_1} = \{(x, -ix);\ x \in \mathbb{C}\} = \mathcal{L}((1, -i)) \Rightarrow m_g(\alpha_1) = 1$

$\alpha_2 = -i$: $V_{\alpha_2} = \{v \in \mathbb{C}^2 \mid (A + iI_2) \cdot v = \vec{0}\} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ix - y = 0 & \Rightarrow y = ix \\ x + iy = 0 /\cdot(i) \end{cases}$

$\Rightarrow V_{\alpha_2} = \{(x, ix);\ x \in \mathbb{C}\} = \mathcal{L}((1, i)) \Rightarrow m_g(\alpha_2) = 1$

c) $p_A(\alpha) = \det\begin{pmatrix} 3-\alpha & 2 & 4 \\ 2 & -\alpha & 2 \\ 4 & 2 & 3-\alpha \end{pmatrix} = (3-\alpha)^2(-\alpha) + 16 + 16 + 16\alpha - 4(3-\alpha) - 4(3-\alpha) = \ldots = -(1+\alpha)^2(\alpha - 8)$

$\Rightarrow$ LASTNE VREDNOSTI $\alpha_1 = -1$ $(m_a(\alpha_1) = 2)$ in $\alpha_2 = 8$ $(m_a(\alpha_2) = 1)$

$\alpha_1 = -1 : \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x + y + 2z = 0 \Rightarrow y = -2x - 2z$

$V_{\alpha_1} = \{(x, -2x-2z, z);\ x, z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,-2,0),(0,-2,1)) \Rightarrow \dim V_{\alpha_1} = m_g(\alpha_1) = 2$

$\alpha_2 = 8 : \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ... z Gaussovo metodo ... $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 2y$ in $x = 2y$

$V_{\alpha_2} = \{(2y, y, 2y);\ y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\overbrace{(2,1,2)}^{v_3}) \Rightarrow \dim V_{\alpha_2} = 1 = m_g(\alpha_2)$

P.S.: Pojme lastna vrednost, lastni vektor in karakteristični polinom definiramo tudi za linearne preslikave $T: V \to V$ (ENDOMORFIZMI)

PODOBNI MATRIKI

Def: Dve kvadratni matriki (enake velikosti) A in B sta PODOBNI, če obstaja taka obrnljiva matrika P, da velja $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$! Označimo: $A \sim B$

Theo: Podobne matrike imajo isti rang, determinanto, sled, karakteristični polinom in iste lastne vrednosti!

Zgled:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ... $B = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Theo: Dve matriki A in $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, ki predstavljata isto linearno preslikavo $T: {}_{\mathbb{C}}V \to {}_{\mathbb{C}}V$ glede na dve različni bazi, sta podobni matriki!

$M_{B'B'}(T) = P^{-1} \cdot M_{BB}(T) \cdot P$, kjer $P = P_{B \to B'}$ prehodna matrika med bazo B in B'!

Vaje: Naj bo $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lin. preslikava ... $T(a,b,c) = (2a-b, b+c, c-3a)$!

a) Poišči $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$, $\dim(\operatorname{Ker} T)$ in $\dim(\operatorname{Im} T)$

b) B-standardna baza za $\mathbb{R}^3$ in $B' = \{f_1, f_2, f_3\}$; $f_1 = (1,1,0)$, $f_2 = (1,0,1)$, $f_3 = (0,1,0)$ ... poišči $M_{BB}(T)$ in $M_{B'B'}(T)$

c) Poišči obrnljivo matriko P tako, da je $M_{B'B'}(T) = P^{-1} \cdot M_{BB}(T) \cdot P$!

$\operatorname{Ker} T = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3 \Rightarrow T$ je IZOMORFIZEM ... $\dim(\operatorname{Ker} T) = 0$, $\dim(\operatorname{Im} T) = 3$

$M_{BB}(T) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{B' \to B} = P_{B \to B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ in tako dobimo

$M_{B'B'}(T) = P_{B' \to B} \cdot M_{BB}(T) \cdot P_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$!

DIAGONALIZACIJA

Def: Množico vseh lastnih vrednosti matrike $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ imenujemo SPEKTER matrike A! Označimo s $\sigma(A)$!

Theo: Naj bodo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ <u>različne</u> lastne vrednosti matrike A in $v_1, v_2, \ldots, v_k$ pripadajoči lastni vektorji. Potem so vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_k$ LINEARNO NEODVISNI!
Če ima matrika $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ n-<u>različnih</u> lastnih vrednosti, potem imamo v $\mathbb{C}^n$ bazo B iz lastnih vektorjev za A! V tej bazi pripada A diagonalna matrika!

Zgled:
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ... karakteristični polinom za A je $p_A(\alpha) = \begin{vmatrix} 1-\alpha & -1 & 4 \\ 3 & 2-\alpha & -1 \\ 2 & 1 & -1-\alpha \end{vmatrix} = -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 5\alpha - 6 = -(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)$

SPEKTER za A je zato $\sigma(A) = \{1, 3, -2\}$! Algebraične večkr. vseh lastnih vrednosti so enake 1!

LASTNI VEKTORJI so $v_1 = (-1,4,1)$, $v_2 = (1,2,1)$, $v_3 = (-1,1,1)$

DIAGONALNA MATRIKA je $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (lastne vrednosti na diagonali), kjer je $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$; $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

$\Rightarrow$ A in D sta PODOBNI MATRIKI!

P.S.: Rečemo da se da A DIAGONALIZIRATI (ali A je diagonalizabilna)!

Theo: Matriko A se da diagonalizirati natanko tedaj, ko je $m_a(\alpha)=m_g(\alpha)$ za vse lastne vrednosti $\alpha\in\sigma(A)$, kar pomeni, da obstaja taka obrnljiva matrika P, da je $D=P^{-1}\cdot A\cdot P$ diagonalna matrika!
Pri tem je P prehodna matrika med bazo B iz lastnih vektorjev in standardno bazo za $\mathbb{C}^n$!

Zgled: Diagonaliziraj matriko $A=\begin{pmatrix}5&8&16\\4&1&8\\-4&-4&-11\end{pmatrix}$, s karakter. polinomom $p_A(\alpha)=(\alpha+3)^2(\alpha-1)$!

Spekter A je $\sigma(A)=\{-3,1\}$ z $m_a(-3)=2$ in $m_a(1)=1$! ... PS: NAPAKA V NALOGI ...

Theo: CAYLEY–HAMILTONOV IZREK
Če je $p_A(\alpha)$ karakteristični polinom matrike $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, potem je $p_A(A)=0$!

Zgled:
$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ ... za karak. polinom dobimo $p_A(\alpha)=\det(A-\alpha I_3)=-\alpha^3+\alpha^2+5\alpha+3$
$\Rightarrow$ po C-H izreku $p_A(A)=0\Rightarrow -A^3+A^2+5A+3I_3=0$ ...
$\Rightarrow A^3-A^2-5A=3I_3\Rightarrow \frac{1}{3}A(A^2-A-5I_3)=I_3$ ... tako lahko izračunamo inverz od A ...
$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}(A^2-A-5I_3)$!

P.S.: A je diagonalizabilna $\Rightarrow D=P^{-1}A\cdot P\Rightarrow A=P\cdot D\cdot P^{-1}$! Za izračunat potenco matrike A...
... npr. $A^2=P\cdot D\cdot \underbrace{P^{-1}\cdot P}\cdot D\cdot P^{-1}=P\cdot D^2\cdot P^{-1}$ in splošneje $A^n=P\cdot D^n\cdot P^{-1}$!
Pri tem je D diagonalna matrika: $D=\begin{pmatrix}\alpha_1&&0\\&\alpha_2\ddots&\\0&&\alpha_k\end{pmatrix}\Rightarrow D^n=\begin{pmatrix}\alpha_1^n&&0\\&\ddots&\\0&&\alpha_k^n\end{pmatrix}$!

VEKTORJI V PROSTORU

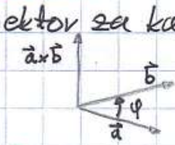
SKALARNI, VEKTORSKI in MEŠANI PRODUKT

SKALARNI PRODUKT

Def: Za $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ in $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ je SKALARNI PRODUKT $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$!
Velja: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
$\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$ in $\vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$
$\|\vec{a}\|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$
Če označimo s φ kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je $\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$
$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

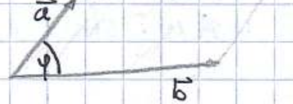
VEKTORSKI PRODUKT

Def: $\vec{a}\times\vec{b}$ je vektor, za katerega velja:
- $\vec{a}\times\vec{b}$ je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$
- $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\varphi$ $\quad(\varphi=\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))$
- $\vec{a}$ po krajši poti zavrtimo do $\vec{b}$, tedaj ima vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ smer desnega vijaka!



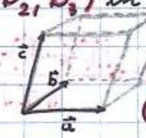
Velja: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$
$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$
$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$ ($\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta KOLINEARNA ali LINEARNO ODVISNA) ... $\Rightarrow\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$
$\vec{i}\times\vec{j}=-\vec{j}\times\vec{i}=\vec{k}$
$\vec{j}\times\vec{k}=-\vec{k}\times\vec{j}=\vec{i}$
$\vec{k}\times\vec{i}=-\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}$
Naj bo $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ in $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\ldots$
$\ldots=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$

P.S.: Ploščina paralelograma, napetega na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je:
$p=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\varphi=\|\vec{a}\times\vec{b}\|$!



MEŠANI PRODUKT

Def.: Mešani produkt vektorjev $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ in $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ je število, označimo $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$



$\|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\|$ = Volumen paralelipipeda

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ so KOPLANARNI

Vaje: 1) Dane so točke $A(-1,0,2)$, $B(2,1,2)$ in $C(4,-3,3)$! Določi koordinate točke D, tako da bo ABCD paralelogram! Izračunaj obseg, ploščino in dolžino diagonal tega paralelograma!

$D(x,y,z)=?$

$\vec{AB}=\vec{DC} \Rightarrow (3,1,0)=(4-x,-3-y,3-z) \Rightarrow D(1,-4,3)!$ ← TOČKA D

OBSEG → $O=2(\|\vec{AB}\|+\|\vec{BC}\|)=2(\sqrt{10}+\sqrt{21})$

PLOŠČINA → $P=\|\vec{AB}\times\vec{BC}\|=\sqrt{1^2+(-3)^2+(-14)^2}$

DIAGONALE → $\|\vec{AC}\|=\sqrt{35}$

2) Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata kot $\pi/6$! Izračunajte ploščino paralelograma, napetega na vektorja $\vec{a}+2\vec{b}$ in $-3\vec{a}+\vec{b}$, če je $\|\vec{a}\|=2$ in $\|\vec{b}\|=3$!

... $p=\|(\vec{a}+2\vec{b})\times(-3\vec{a}+\vec{b})\|=\|\underbrace{-3\vec{a}\times\vec{a}}_{0}+\vec{a}\times\vec{b}+6\vec{a}\times\vec{b}+\underbrace{2\vec{b}\times\vec{b}}_{0}\|=7\cdot\|\vec{a}\times\vec{b}\|=7\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\underline{\underline{21}}$

3) Dana sta vektorja $\vec{a}=(1,0,-2)$ in $\vec{b}=(2,1,1)$. Določite vektor $\vec{c}$ dolžine $\|\vec{c}\|=2\sqrt{5}$, ki je pravokoten na $\vec{b}$, z vektorjem $\vec{a}$ oklepa kot $\pi/3$ in velja $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})>0$!

$\vec{c}=(x,y,z)$... dobimo $x^2+y^2+z^2=20$ ... VSTAVIMO SEM ... $\Rightarrow z=-2+\sqrt{2}/2$

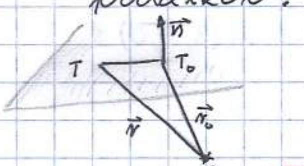
$\vec{c}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow 2x+y+z=0 \Rightarrow y=-5z-10$ $\qquad x=1+\sqrt{2}$

$\sphericalangle(\vec{a},\vec{c})=\pi/3 \Rightarrow x-2z=5 \Rightarrow x=5+2z$ $\qquad y=-5\sqrt{2}/2$

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})>0 \Rightarrow 2x-5y+z>0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow z>-2$

ENAČBA RAVNINE V PROSTORU

Ravnina v 3-razsežnem prostoru je natanko določena z različnimi vrstami podatkov:
1) TRI NEKOLINEARNE TOČKE
2) DVE SEKAJOČI SE PREMICI
3) DVE VZPOREDNI IN NEIDENTIČNI PREMICI
4) TOČKA NA RAVNINI IN SMER PRAVOKOTNA NA RAVNINO (normalni vektor)



$\vec{OT_0}=\vec{r}_0$ = krajevni vektor točke T_0
$\vec{OT}=\vec{r}$ = krajevni vektor točke T
$\vec{n}$ = normalni vektor

$\vec{n}\perp(\vec{r}-\vec{r}_0) \Longleftrightarrow$ VEKTORSKA EN. RAVNINE $\boxed{\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0}$

Naj bodo $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{r}=(x,y,z)$ in $\vec{n}=(a,b,c)$, potem je

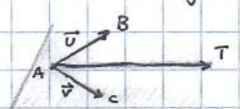
$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow ax+by+cz=\underbrace{ax_0+by_0+cz_0}_{=d}$

SPLOŠNA EN. RAVNINE

$\boxed{ax+by+cz=d}$

Naj bo $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ in $C(c_1,c_2,c_3)$ tri nekolinearne točke na ravnini!

Vektorji $\vec{AT}$, $\vec{AB}$ in $\vec{AC}$ so KOPLANARNI $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3\\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\end{vmatrix}=0$

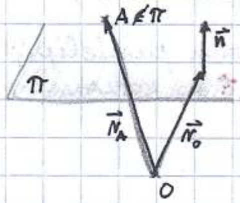


... $\vec{OA}=\vec{r}_0$
$\vec{OT}=\vec{r}$
$\vec{AT}=\vec{r}-\vec{r}_0$

Ker so vektorji $\vec{u},\vec{v},\vec{r}-\vec{r}_0$ KOPLANARNI ali LINEARNO ODVISNI $\Rightarrow \vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{u}+s\vec{v}$

parametra

RAZDALJA TOČKE OD RAVNINE



$$d(A,\pi)=\frac{\|(\vec{r}_A-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$$ ... če je ravnina podana z vektorsko enačbo

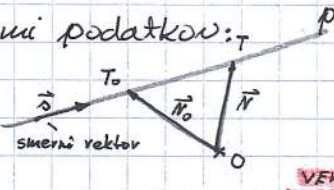
Če je π podana z $ax+by+cz=d \Rightarrow \vec{n}=(a,b,c)$, tedaj je:

$$d(A,\pi)=\frac{ax_A+by_A+cz_A-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ENAČBA PREMICE V PROSTORU

Premica je določena z različnimi vrstami podatkov:

1) DVE RAZLIČNI TOČKI
2) DVE NE-VZPOREDNI RAVNINI
3) TOČKA NA PREMICI IN SMER



$\overrightarrow{T_0T}=\vec{r}-\vec{r}_0$

$\overrightarrow{T_0T}$ in $\vec{s}$ sta KOLINEARNA ali LINEARNO ODVISNA

VEKTORSKA EN. PREMICE

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{s}}$$

Naj bo $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ in $\vec{s}=(a,b,c)$:

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=x_0+ta \\ y=y_0+tb \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+tc \end{cases}}$$ ... PARAMETRIČNA EN. PREMICE

$$p:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$$ ... enačba premice kot presek med ravninama π_1 in π_2

RAZDALJA MED TOČKO IN PREMICO ...

$$d(A,p)=\frac{\|(\vec{r}_A-\vec{r}_0)\times\vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}$$

Vaje: 1) a) Katero ravnino (imenujemo jo π) določata premica $p:\begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=-1+3t \end{cases}$ in točka $A(3,4,0)$?

b) Zapiši enačbo ravnine π_1, ki vsebuje točko A in je pravokotna na premico p!

c) Katera premica je presečišnica ravnin π in π_1?

a) → da dobimo enačbo ravnine rabimo 3 točke ... imamo točko A, drugi dve dobimo tako da vstavimo dve različni vrednosti za t v enačbo premice (npr. $t=0$ in $t=1$)

$\Rightarrow A(3,4,0)$, $T_0(2,3,-1)$ in $T_1(3,5,2)$ določajo ravnino ... sestavimo determinanto ...

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-0 \\ 2-3 & 3-4 & -1-0 \\ 3-3 & 5-4 & 2-0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\ldots=x-2y+z+5=0$$ (to je enačba ravnine π)

b) → iz enačbe premice vidimo 2 informaciji: točka $T_0(2,3,-1)$ ... (vstaviš $t=0$) leži na premici in smerni vektor $\vec{s}_p=(1,2,3)$ ... (prebereš iz koeficientov pred t)

$\pi_1\perp p \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1}=\vec{s}_p=(1,2,3)$ — normala ravnine π_1 je kot smerni vektor p (normala $\perp\pi_1$)

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \pi_1: x+2y+3z=d \\ &A\in\pi_1 \Rightarrow 3+8=d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi_1: x+2y+3z=11$$ (enačba ravnine π_1)

c) → $\left.\begin{aligned} \pi&: x-2y+z=-5 \\ \pi_1&: x+2y+3z=11 \end{aligned}\right\}$ sistem 2 enačb za 3 neznanke ... razrešiš, imaš 1 parameter ... kar dobiš je enačba premice presečišča π in π_1

$$\pi\cap\pi_1=p_1:\begin{cases} x=-13+4t \\ y=t \\ z=8-2t \end{cases} \Rightarrow \vec{s}_{p_1}=(4,1,-2)$$ ... ps.: za parameter smo izbrali y ... $(y=t)$ ... lahko bi izbrali katerokoli x, y, z ...

2) Zapišite enačbo ravnine, ki vsebuje točko $T(3,-5,1)$ in je vzporedna ravnini $2x+y+8z=10$!

→ vzporedna ravnini $2x+y+8z=10 \Rightarrow$ ima isto normalo $\vec{n}_\pi = \vec{n}_{\pi_1} = (2,1,8)$!

$\pi: 2x+y+8z=d$ ... da določimo d... vemo da vsebuje točko T $(T \in \pi) \Rightarrow$ vstavimo koordinate točke T in dobimo: $2\cdot 3 - 5 + 8\cdot 1 = d \Rightarrow d = 9 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x+y+8z=9}$

3) Zapišite enačbo premice, ki gre skozi točko $T(1,1,1)$ in je pravokotna na vektorja $\vec{a}=(2,1,1)$ in $\vec{b}=(3,3,0)$

→ p pravokotna na $\vec{a}, \vec{b} \Rightarrow \vec{s}_p = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3,3,3) \Rightarrow p: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1+3t \\ z = 1+3t \end{cases}$

4) Zapišite enačbo ravnine, ki vsebuje točko $A(0,1,2)$ in je vzporedna premicama

$p: \begin{cases} x = t \\ y = 2+t \\ z = -3+t \end{cases}$ in $q: \begin{cases} x-y+1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$! → zapišimo najprej q v parametrični obliki (rešimo na y)

$\Rightarrow q: \begin{cases} x = -1+t \\ y = t \\ z = 2-t \end{cases} \Rightarrow \vec{s}_q = (1,1,-1)$ in vidimo $\vec{s}_p = (1,1,1)$

→ ker vemo $\pi \parallel p$ in $\pi \parallel q \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{s}_p$ in $\vec{n}_\pi \perp \vec{s}_q \Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{s}_p \times \vec{s}_q = \ldots =$

$\Rightarrow \vec{n}_\pi = (-2,2,0) \Rightarrow$ enačba ravnine $\pi: -2x+2y=d$ ... vemo da $A \in \pi \Rightarrow$ vstavimo A v enačbo

$\Rightarrow d = 2 \Rightarrow \boxed{\pi: -2x+2y=2}$ ali če delimo z 2: $-x+y=1$

5) Zapišite enačbo ravnine, ki je pravokotna na premico $p: \begin{cases} x-2z=-1 \\ y-3z=1 \end{cases}$ in gre skozi točko, kjer premica seka ravnino xy! $(z=0)$

→ $p \perp \pi \Rightarrow$ smerni vektor $p \to \vec{s}_p$ je enak normali ravnine $\vec{n}_\pi \Rightarrow$ moramo zapisat enačbo za p v parametrični obliki... rešiš sistem, za parameter izbereš npr. z.

$p: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \vec{s}_p = (2,3,1) \Rightarrow 2x+3y+z=d$ ... vstavimo točko kjer p seka xy: $T(-1,1,0)$ in dobimo $d=1$!

6) Poiščite enačbo premice q, ki leži v ravnini $\sigma: x-4y+2z=7$ in, ki pod pravim kotom seka premico $p: \begin{cases} x-2y-4z=-3 \\ 2x+y-3z=-1 \end{cases}$! → poiščemo parametrično obliko, da dobimo $\vec{s}_p = (2,-1,1)$

$\Rightarrow p \perp q \Rightarrow \vec{s}_p \cdot \vec{s}_q = 0$ ...(označimo $\vec{s}_q = (a,b,c)$) $\Rightarrow \boxed{2a-b+c=0}$!

vemo, da $q \in \sigma \Rightarrow \vec{s}_q \cdot \vec{n}_\sigma = 0 \Rightarrow$ (vidimo iz enačbe da $\vec{n}_\sigma = (1,-4,2)$) $\Rightarrow \boxed{a-4b+2c=0}$!

... rešimo sistem 2 enačbi za 3 neznanke (imeli bomo 1 parameter) → dobimo $\vec{s}_q = (2,-3,-7)$ ... za zapisat enačbo premice, rabimo še 1 točko... poiščemo kje premica p seka ravnino σ: $p \cap \sigma = T(2, -1/2, 3/2) \Rightarrow q: \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -3 - 1/2\, t \\ z = -7 + 3/2\, t \end{cases}$

7) Poiščite premico skozi točko $T(0,-1,1)$, ki seka premici $p: \begin{cases} x = -3+2t \\ y = 2-t \\ z = t \end{cases}$ in $q: \begin{cases} x-3z=-2 \\ y-2z=-5 \end{cases}$!

Dve premici $p_1: \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}_1$ se sekata, če $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \neq \vec{0}$!
$p_2: \vec{r}\,' = \vec{r}_0\,' + t\vec{s}_2$ in če $(\vec{r}_0 - \vec{r}_0\,', \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$!

→ vidimo $\vec{r}_p = (-3,2,0)$ in $\vec{s}_p = (2,-1,1)$ ... q → parametrično obliko $\Rightarrow \vec{r}_q = (-2,-5,0)$ in $\vec{s}_q = (3,2,1)$!

... označimo našo premico s p' in $\vec{s}_{p'} = (a,b,c)$! $\vec{r}_{p'} = (0,-1,1)$

$\Rightarrow p' \cap p \neq \emptyset \Leftrightarrow (\vec{r}_p - \vec{r}_{p'}, \vec{s}_p, \vec{s}_{p'}) = 0 = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \boxed{2a+b-3c=0}$ ... enako te za q ..

$\Rightarrow p' \cap q \neq \emptyset \Leftrightarrow (\vec{r}_q - \vec{r}_{p'}, \vec{s}_q, \vec{s}_{p'}) = 0 = \begin{vmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \boxed{-2a-b+8c=0}$

$\Rightarrow \underline{c=0}$ in $\underline{b=-2a}$

$\Rightarrow$ postavimo a za parameter $a=t \Rightarrow p': \begin{cases} x = 0+t \\ y = -1-2t \\ z = 1 \end{cases} \to \vec{s}_{p'} = (1,-2,0)$

točka T

8) Določite takšno točko T na ravnini $\pi: x - y + 3z = 6$, da bo točka $T'(1,-1,2)$ njena pravokotna projekcija na ravnino $\pi': x + y + z = 2$!

→ označimo $T(x, y, z)$ ... vidimo $\vec{n}_{\pi'} \parallel \overrightarrow{TT'} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1,1,1) \parallel (1-x, -1-y, 2-z)$ ... vzporedna vek. ⇒ je linearna kombinacija ⇒

$\Rightarrow (1-x, -1-y, 2-z) = (\alpha, \alpha, \alpha) \Rightarrow x = 1-\alpha;\ y = -1-\alpha;\ z = 2-\alpha \ ... \Rightarrow \alpha = +2/3 \Rightarrow ...$

$\Rightarrow T(1/3, -5/3, 4/3)$

9) Na premici $p: x+4 = \frac{y-4}{-2} = z$ poiščite točko, ki je enako oddaljena od točk $A(5,3,1)$ in $B(3,1,-3)$!

→ postavimo z za parameter $z=t$ $p: \begin{cases} x = -4+t \\ y = 4-2t \\ z = t \end{cases}$

ČE IMAMO $p: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

$\Rightarrow \vec{s}_p = (a,b,c)$ in $\vec{r}_p = (x_0, y_0, z_0)$

→ $\|\overrightarrow{TA}\| = \|\overrightarrow{TB}\|$; označimo $T(a,b,c)$!

$\Rightarrow (5-a)^2 + (3-b)^2 + (1-c)^2 = (3-a)^2 + (1-b)^2 + (-3-c)^2$ ... T leži na p ⇒ vstavimo param. obliko namesto a, b, c

$\Rightarrow$ dobimo $t = 4 \Rightarrow T(0,-4,4)$!

D.N. 10) Premica q gre skozi točko $T(2,3,2)$ in pod pravim kotom seka premico $p: -x = \frac{y+1}{2} = z-2$!
Določite enačbo ravnine, ki vsebuje premico q in točko $R(3,5,5)$!
Določite še kot med premico p in dobljeno ravnino!