

Universidade de São Paulo  
Instituto de Matemática e Estatística  
MAC 5789 - Laboratório de Inteligência Artificial

## EP 1: MaxSAT

Autor:

Walter Perez Urcia

São Paulo

Abril 2015

## **Resumo**

Neste trabalho o objetivo foi explorar o problema Partial Weighted Max-SAT com diferentes parâmetros e comparar seus resultados, para isso foi usado solvers oficiais de [?]. A primeira parte do trabalho consiste em fazer um gerador de dados com o padrão oficial wcnf (weighted conjunction normal form). As seguintes partes são experimentos feitos para o tamanho de clausulas dois e tres variando seus parâmetros como o número de clausulas, tamanho de clausulas e número de átomos. A continuação apresentamos os experimentos, resultados e conclusões.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Problema</b>	<b>5</b>
1.1	Definições prévias . . . . .	5
1.2	SAT: Satisfiability problem . . . . .	5
1.3	Max-SAT: Maximum Satisfiability problem . . . . .	5
1.4	Partial Max-SAT . . . . .	5
1.5	Weighted Max-SAT . . . . .	5
1.6	Partial Weighted Max-SAT . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Dados de entrada</b>	<b>6</b>
2.1	Restrições . . . . .	6
2.2	Gerador aleatório de dados . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Experimentos e resultados</b>	<b>8</b>
3.1	Experimento 1 . . . . .	8
3.1.1	Descrição . . . . .	8
3.1.2	Resultados . . . . .	9
3.2	Experimento 2 . . . . .	9
3.2.1	Descrição . . . . .	9
3.2.2	Resultados . . . . .	10
3.3	Experimento 3 . . . . .	10
3.3.1	Descrição . . . . .	10
3.3.2	Resultados . . . . .	11
3.4	Experimento 4 . . . . .	14
3.4.1	Descrição . . . . .	14
3.4.2	Resultados . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>18</b>
<b>A</b>	<b>wiejfowijefoiwjef</b>	<b>19</b>

## Lista de Figuras

1	Curva de resposta de tempo (azul), curva de percentagem (vermelho)	9
2	Curva de resposta de tempo (azul), curva de percentagem (vermelho)	10
3	Curva de resposta de tempo para $M/N = 1.0$ . . . . .	11
4	Curva de resposta de tempo para $M/N = 3.0$ . . . . .	12
5	Curva de resposta de tempo para $M/N = 4.3$ . . . . .	12
6	Curva de resposta de tempo para $M/N = 6.0$ . . . . .	13
7	Curva de resposta de tempo para $M/N = 8.0$ . . . . .	13
8	Curva de resposta de tempo para $M/N = 1.0$ . . . . .	15
9	Curva de resposta de tempo para $M/N = 3.0$ . . . . .	15
10	Curva de resposta de tempo para $M/N = 4.3$ . . . . .	16
11	Curva de resposta de tempo para $M/N = 6.0$ . . . . .	16
12	Curva de resposta de tempo para $M/N = 8.0$ . . . . .	17

## Lista de Tabelas

1	Comparação de tempos (segundos) de Max 3-SAT . . . . .	11
2	Comparação de tempos (segundos) de Max 2-SAT . . . . .	14

# 1 Problema

## 1.1 Definições prévias

Para entender o problema, é necessário primeiro definir algumas coisas como:

**Átomo** Variável lógica, ou seja que só pode ter como possíveis valores a Verdadeiro e Falso. O número total de átomos para este trabalho será representado com  $N$ .

**Cláusula** Conjunto de átomos numa disjunção. São da seguinte forma:  $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_K$ , onde  $K$  é o tamanho da cláusula. O número total de cláusulas para este trabalho será representado com  $M$ .

**Satisfiability** Um átomo  $p$  é satisfasível se  $v(p) = 1$  (verdadeiro). Uma cláusula só vai ser satisfasível se pelo menos um de seus átomos é satisfasível.

## 1.2 SAT: Satisfiability problem

Dado um conjunto de cláusulas ( $M$  cláusulas), determinar se existe uma valoração dos átomos que faça possível que a conjunção de todas as cláusulas, ou seja  $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_M$ , seja verdadeiro.

## 1.3 Max-SAT: Maximum Satisfiability problem

Dado um conjunto de cláusulas, determinar o conjunto de tamanho máximo (maior número de cláusulas) que seja satisfasível com alguma valoração dos átomos [?].

## 1.4 Partial Max-SAT

Neste problema é um caso especial de Max-SAT onde temos um conjunto de cláusulas que é obrigatório conhecidas como **cláusulas hard** e as outras cláusulas como **cláusulas soft**. Da mesma forma que o anterior problema, tem que determina-se o conjunto de tamanho máximo tendo em consideração o conjunto de cláusulas hard.

## 1.5 Weighted Max-SAT

Neste caso especial de Max-SAT cada cláusula tem um peso  $w_i$  e deve determinar-se o conjunto de peso máximo que pode ser satisfasível com alguma valoração dos átomos.

## 1.6 Partial Weighted Max-SAT

É uma combinação dos dois problemas anteriores onde cada cláusula tem um peso e também se tem um conjunto de cláusulas hard (com peso máximo) que são obrigatórias e um conjunto de cláusulas soft. Se deve determinar o conjunto de peso

máximo tendo em consideração as cláusulas hard [?]. Este é o problema com o que se vai experimentar neste trabalho.

## 2 Dados de entrada

Implementar um gerador aleatório de problemas no formato padrão cnf, com  $N$  átomos e  $M$  cláusulas, e as cláusulas todas possuem  $K$ -literais, com pesos entre 1 e o número total de cláusulas  $M$ .  $K$ ,  $N$  e  $M$  são parâmetros a serem passados ao gerador. Esta implementação pode ser feita em qualquer linguagem de programação para rodar em qualquer sistema operacional. Não entregue a implementação, apenas descreva seus pontos mais importantes, por exemplo, como lida com repetição de literais e cláusulas.

### 2.1 Restrições

No arquivo de regras dado em [?] se explica o padrão wcnf da seguinte forma:

```
c
c Comments
c
p wcnf N M Wmax
w1 a1 a2 ... aK
w2 b1 b2 ... bK
.
.
.
wM z1 z2 ... zK
```

Las linhas que começam com *c* são tomadas como comentarios e não adicionam informação numérica para a resolução do problema. A seguinte linha contem os valores de  $N$  (número de átomos),  $M$  (número de cláusulas) e  $W_{max}$  que é o máximo peso das cláusulas, que vai ser também o peso das cláusulas hard. Por último tem  $M$  linhas descrevendo cada cláusula, primeiro tem seu peso e logo seus respetivos literais (numerados de 1 a  $N$ ). Em caso seja necessário colocar alguma negação tão só tem que colocá-se o número negativo do identificador do átomo (ou seja, de -1 a  $-N$ ). Além, cada cláusula vai ter o mesmo número de literais  $K$  em cada geração de dados. Em quanto as restrições numéricas temos:

- Os pesos das cláusulas tem que ser maiores ou iguais a 1
- A suma dos pesos das cláusulas soft tem que ser menor a  $2^{63}$
- Cláusulas hard tem peso  $W_{max}$  e cláusulas soft peso menor a  $W_{max}$
- $W_{max}$  sempre é maior que a suma dos pesos das cláusulas soft

## 2.2 Gerador aleatório de dados

O gerador de dados está escrito na linguagem de programação Python e recebe 4 parâmetros:  $N$ ,  $M$ ,  $K$  e o nome para o arquivo gerado. Ao momento de fazer que os dados sejam gerados totalmente aleatórios surgem dois problemas e se tem que garantir que:

1. Literais numa mesma cláusula tem que ser diferentes, ou seja uma cláusula  $C$  não deve ser da seguinte forma:  $a \vee b \vee \dots b \vee \dots z$
2. Não devem existir cláusulas iguais (considerando só seus literais e não seu peso)
3. Deve gerar cláusulas hard e cláusulas soft

A função principal que satisfaz ambas condições é a seguinte:

```
1  def generateClause( self ) :
2      clause = []
3      ishard = randint( 0 , 1 )
4      weight = ( self.M * self.M if ishard == 1 else randint( 1 , self.M ) )
5      self.top = max( self.top , weight )
6      while True :
7          clause = []
8          currentLiterals = {}
9          for p in range( self.K ) :
10             while True :
11                 sign = randint( 0 , 1 )
12                 atom = randint( 1 , self.N )
13                 atom = ( 1 if sign == 0 else -1 ) * atom
14                 if atom in currentLiterals : continue
15                 else : break
16             currentLiterals [ atom ] = True
17             clause . append( atom )
18             if self . hashCode( clause ) in self . currentClauses : continue
19             else : break
20         self . addClause( clause )
21         clause . insert ( 0 , weight )
22     return clause
```

Para satisfazer a primeira condição, o gerador tem um dicionário *currentLiterals* que armazena os literais que existem nessa cláusula até esse momento. De esta forma, na linha 14 verifica se o novo literal gerado já existe nesse dicionário e o armazena se não existe, caso contrario gera outro literal. Da mesma forma para satisfazer a segunda condição, o gerador tem um dicionário *currentClauses* que armazena os valores hash das cláusulas geradas até esse momento, e na linha 18 verifica se a novo valor já existe ou não. Mas o principal problema com a verificação de existência das cláusulas geradas é que depende  $K$  e  $M$ , então para reduzir o tempo de execução neste passo, cada cláusula foi convertida a seu valor hash. Para isto se tem os seguintes parâmetros:

- Aos literais na cláusula foi adicionado  $N$  para fazer positivos aqueles com valores negativos
- A base para o valor hash é  $B = 2N$  porque se está adicionando  $N$  a cada literal

- Para evitar transbordamento nos tipos de dados cada valor hash foi calculado módulo 1000000007 ( $10^9 + 7$ )
- O valor hash para uma cláusula  $C$  será da seguinte forma:  $hash(C) = (a_1 * B^{K-1} + a_2 * B^{K-2} + \dots + a_K * B^0) \bmod 1000000007$

Fazendo essa conversão às cláusulas o tempo de execução já não depende de  $K$  porque somente estão sendo comparados números. Por último, para satisfazer a terceira condição, é gerado aleatoriamente um valor 0 ou 1 que diz se uma cláusula vai ser hard ou não (soft em caso seja 0, hard em caso seja 1). Além, tendo em conta as restrições em 2.1, as cláusulas soft têm peso entre 1 e  $M$ , mas as cláusulas hard têm peso  $M^2$  porque o peso de uma cláusula hard sempre deve ter um valor maior que a soma das cláusulas soft que como máximo poderiam ser  $M - 1$  cláusulas.

## 3 Experimentos e resultados

Para poder fazer cada experimento foi utilizado o programa `toysat` [?] e um script para ter varios threads em paralelo tão para gerar os dados como para executar `toysat solver`.

### 3.1 Experimento 1

#### 3.1.1 Descrição

Para  $K = 3$  (ou seja, 3-SAT) e  $N = 100$ , levantar a curva de resposta de tempo, e apresentá-la sobreposta à curva de percentagem de problemas satisfazíveis. Cada ponto deve ser obtido a partir de pelo menos 100 instâncias geradas aleatoriamente. Apresentar e discutir o formato do gráfico.



### 3.1.2 Resultados

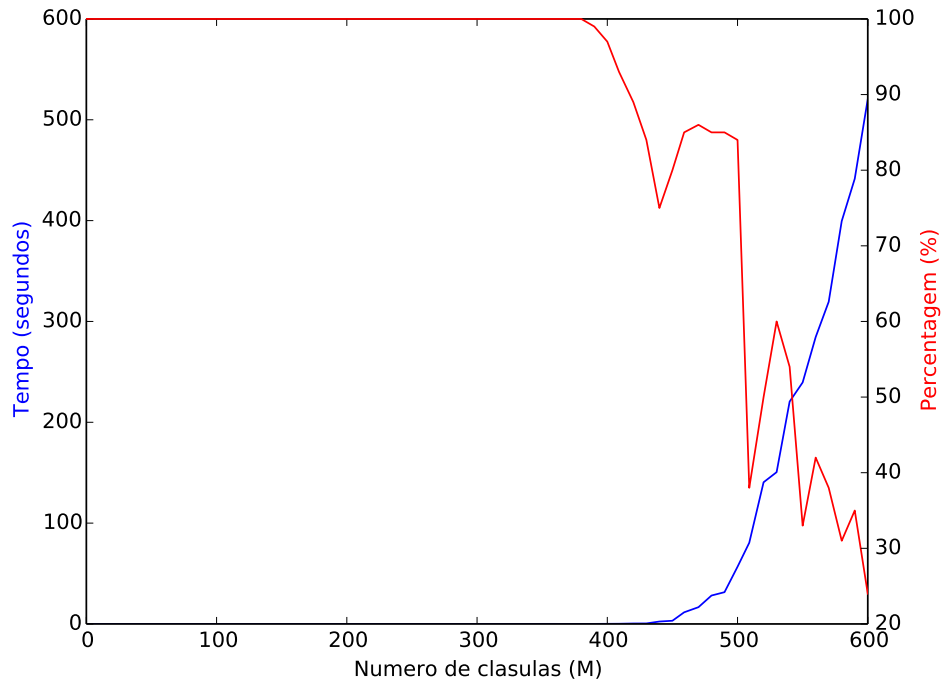


Figura 1: Curva de resposta de tempo (azul), curva de percentagem (vermelho)

## 3.2 Experimento 2

### 3.2.1 Descrição

Para  $K = 2$  (ou seja, 2-SAT) e  $N = 100$ , levantar a curva de resposta de tempo, e apresentá-la sobreposta à curva de percentagem de problemas satisfatíveis. Cada ponto deve ser obtido a partir de pelo menos 100 instâncias geradas aleatoriamente. Apresentar e discutir o formato do gráfico.

### 3.2.2 Resultados

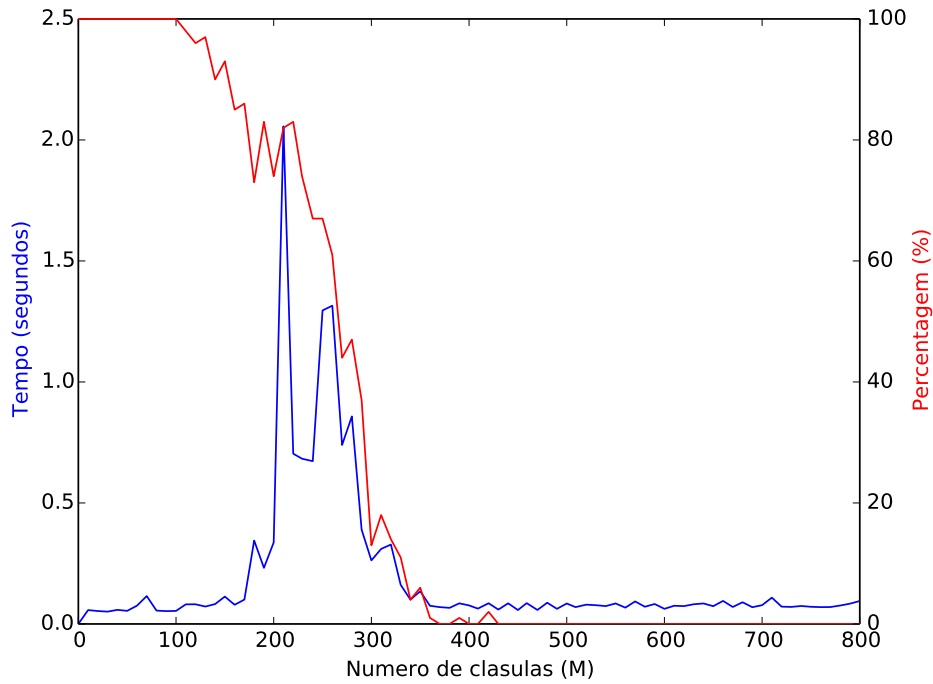


Figura 2: Curva de resposta de tempo (azul), curva de percentagem (vermelho)

## 3.3 Experimento 3

### 3.3.1 Descrição

Apresentar 5 gráficos mostrando o tempo de execução em função de  $N$  para  $K = 3$ . Em cada gráfico, o valor de  $M/N$  deve ser fixo. Os cinco gráficos devem ser feitos para  $N$  variando de 100 a 1000, em intervalos de 100. Os valores de  $M/N$  de cada um dos 5 gráficos são 1; 3; 4,3; 6; e 8. Discutir a natureza da curva obtida em cada caso, se polinomial ou exponencial.

N	$M/N = 1.0$	$M/N = 3.0$	$M/N = 4.3$	$M/N = 6.0$	$M/N = 8.0$
100	0.042	0.050	10.278	6327.574	100.724
200	0.092	0.137	58.735	7732.361	224.791
300	0.071	0.108	116.031	15253.935	384.112
400	0.131	0.322	230.58	40823.234	681.084
500	0.178	0.434	512.05	91834.454	800.268
600	0.196	0.422	741.912	131082.805	811.481
700	0.168	0.668	998.048	-	811.101
800	0.188	0.763	1806.502	-	842.849
900	0.296	0.765	2501.011	-	895.298
1000	0.199	0.717	4700.17	-	874.026

Tabela 1: Comparação de tempos (segundos) de Max 3-SAT

### 3.3.2 Resultados

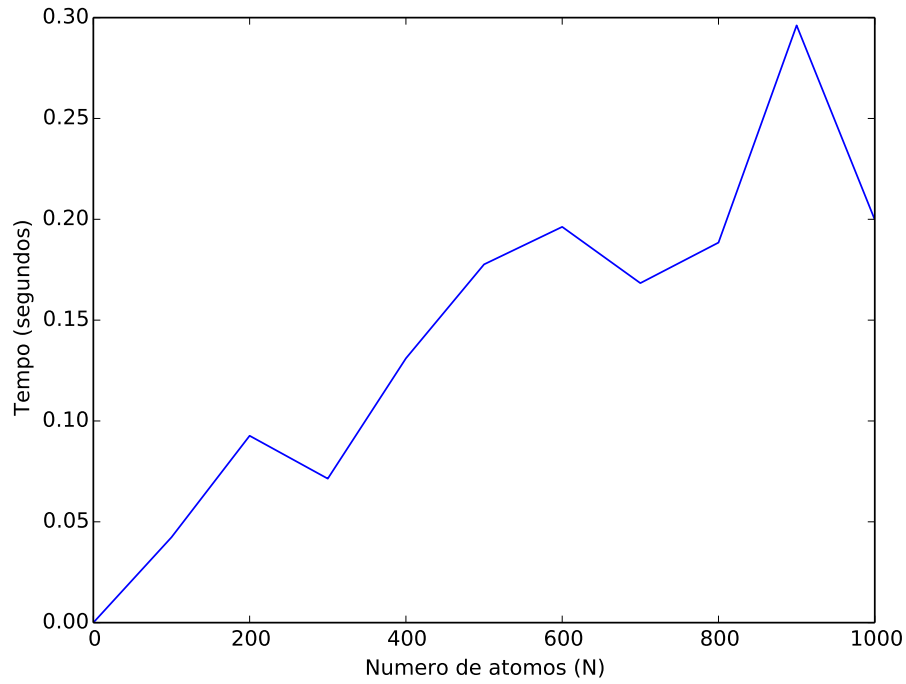


Figura 3: Curva de resposta de tempo para  $M/N = 1.0$

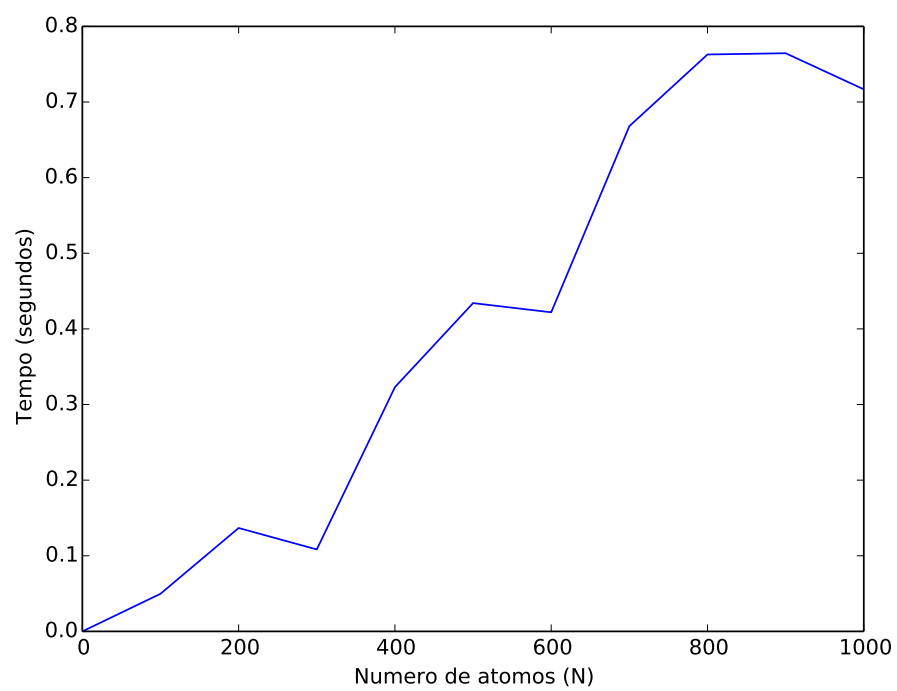


Figura 4: Curva de resposta de tempo para  $M/N = 3.0$

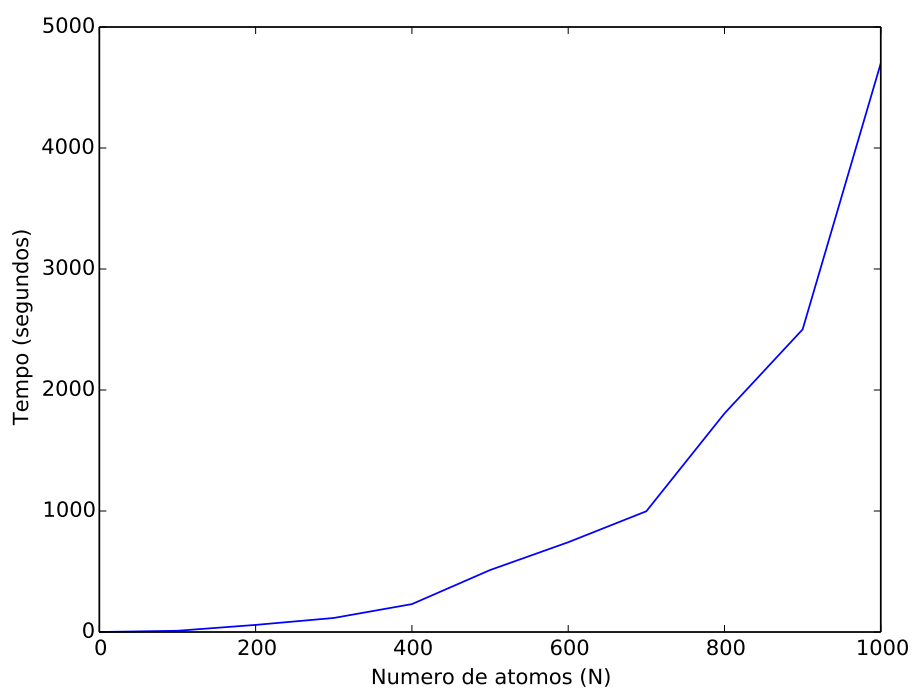


Figura 5: Curva de resposta de tempo para  $M/N = 4.3$

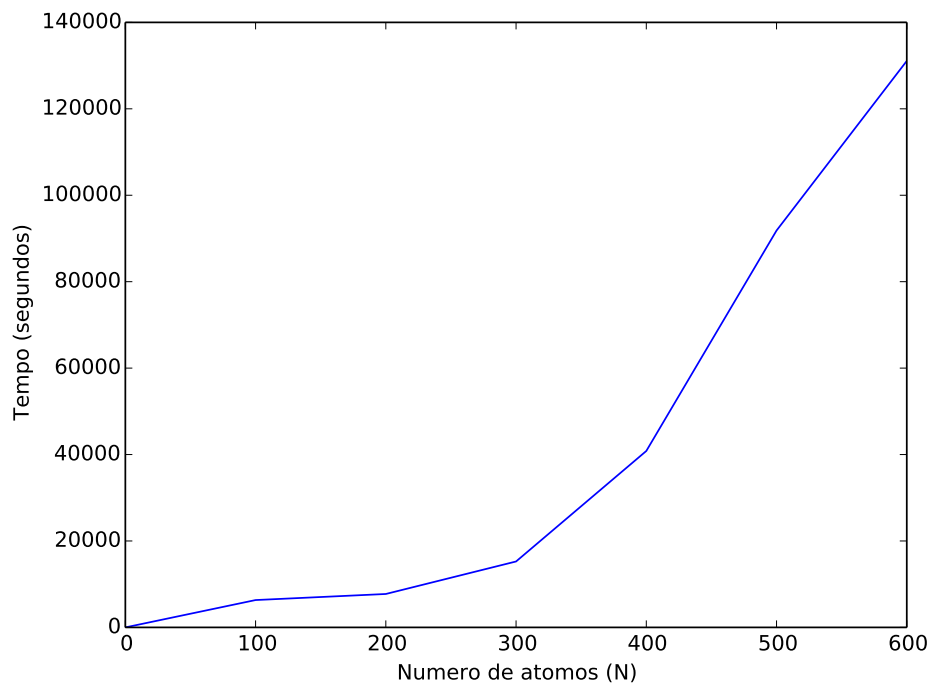


Figura 6: Curva de resposta de tempo para  $M/N = 6.0$

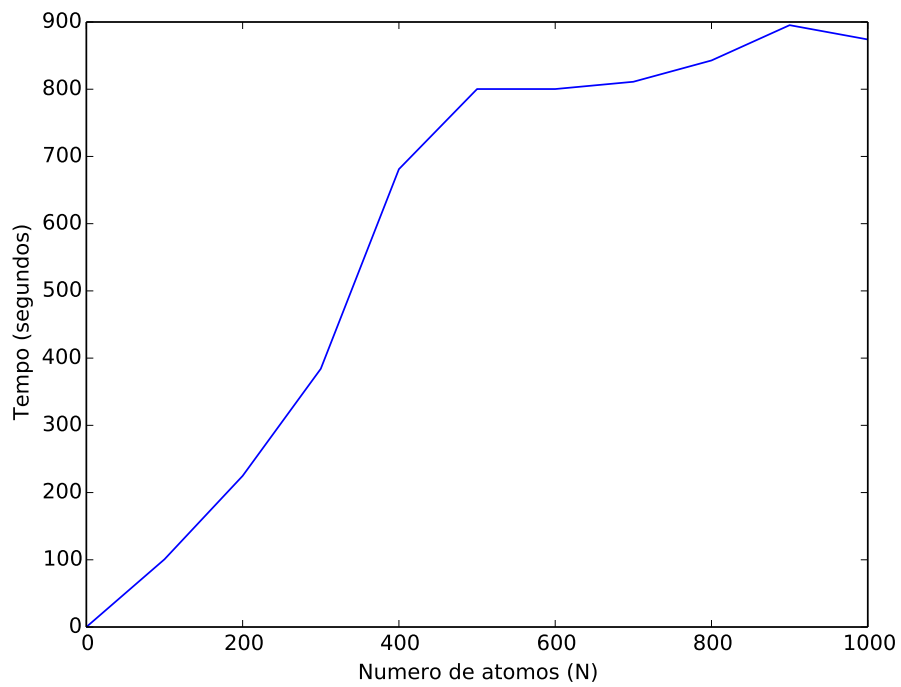


Figura 7: Curva de resposta de tempo para  $M/N = 8.0$

## 3.4 Experimento 4

### 3.4.1 Descrição

Apresentar 5 gráficos mostrando o tempo de execução em função de  $N$  para  $K = 2$ . Em cada gráfico, o valor de  $M/N$  deve ser fixo. Os cinco gráficos devem ser feitos para  $N$  variando de 100 a 1000, em intervalos de 100. Os valores de  $M/N$  de cada um dos 5 gráficos são 1; 3; 4,3; 6; e 8. Discutir a natureza da curva obtida em cada caso, se polinomial ou exponencial.

### 3.4.2 Resultados

N	$M/N = 1.0$	$M/N = 3.0$	$M/N = 4.3$	$M/N = 6.0$	$M/N = 8.0$
100	0.040	0.259	0.057	0.063	0.075
200	0.048	18.241	0.078	0.099	0.136
300	0.052	0.076	0.111	0.152	0.218
400	0.062	0.128	0.159	0.221	0.354
500	0.060	0.115	0.193	0.337	0.615
600	0.076	0.188	0.310	0.446	0.700
700	0.073	0.191	0.382	0.659	0.982
800	0.073	0.217	0.398	0.890	1.184
900	0.0790	0.272	0.551	1.128	2.731
1000	0.286	0.359	0.582	1.535	2.275

Tabela 2: Comparação de tempos (segundos) de Max 2-SAT

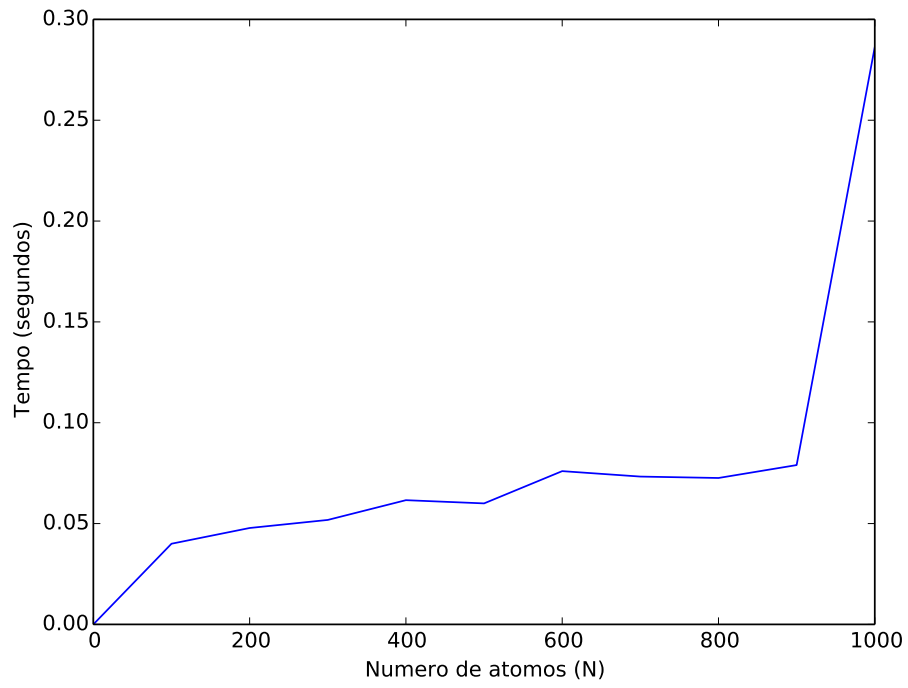


Figura 8: Curva de resposta de tempo para  $M/N = 1.0$

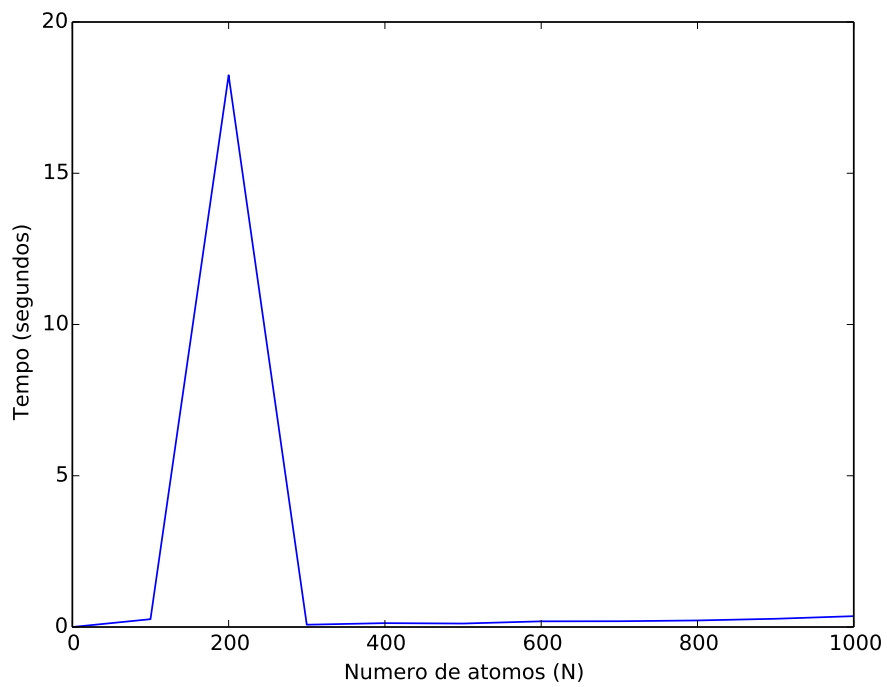


Figura 9: Curva de resposta de tempo para  $M/N = 3.0$

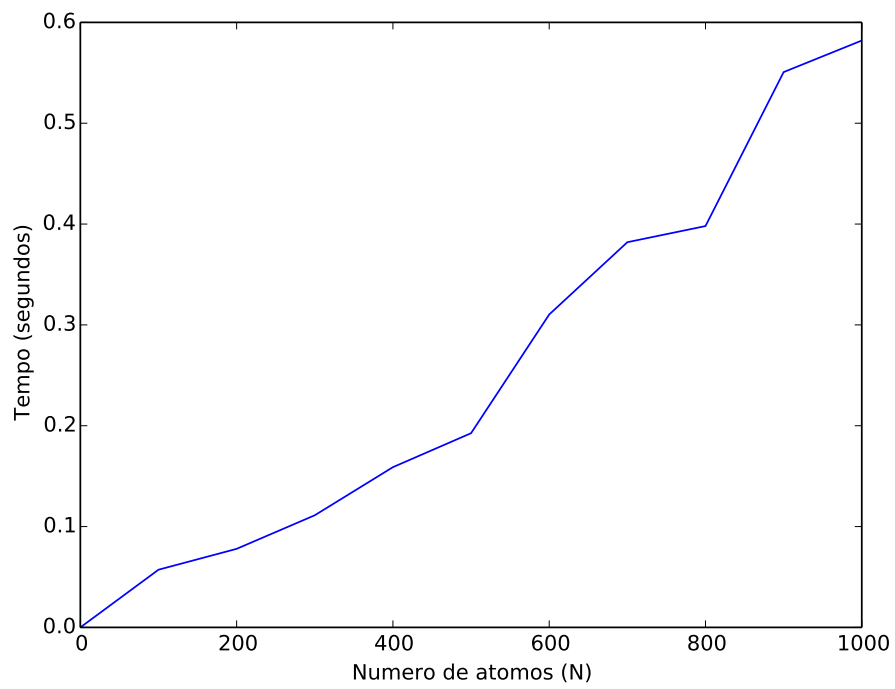


Figura 10: Curva de resposta de tempo para  $M/N = 4.3$

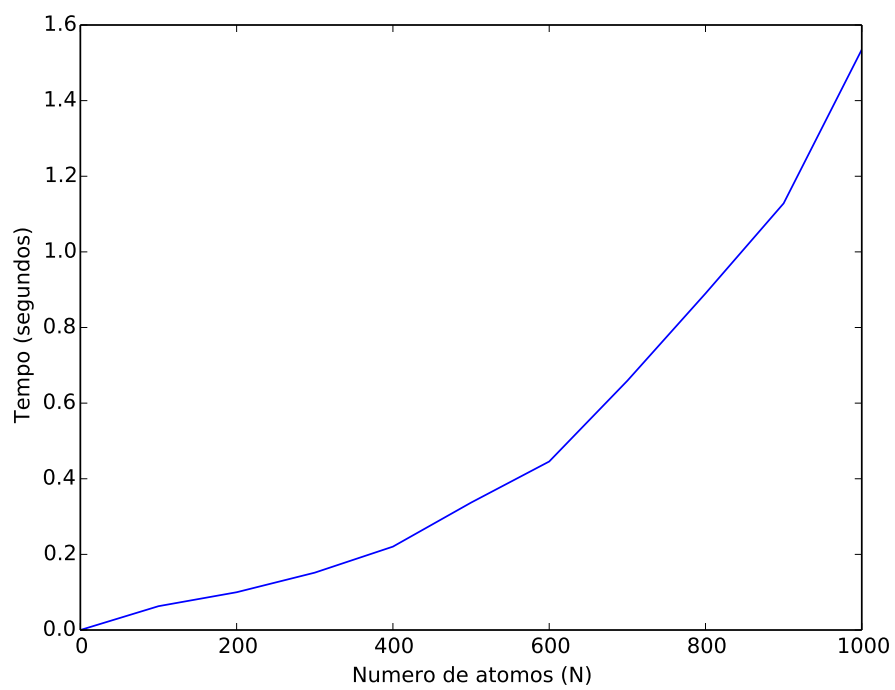


Figura 11: Curva de resposta de tempo para  $M/N = 6.0$



Texto figura 4

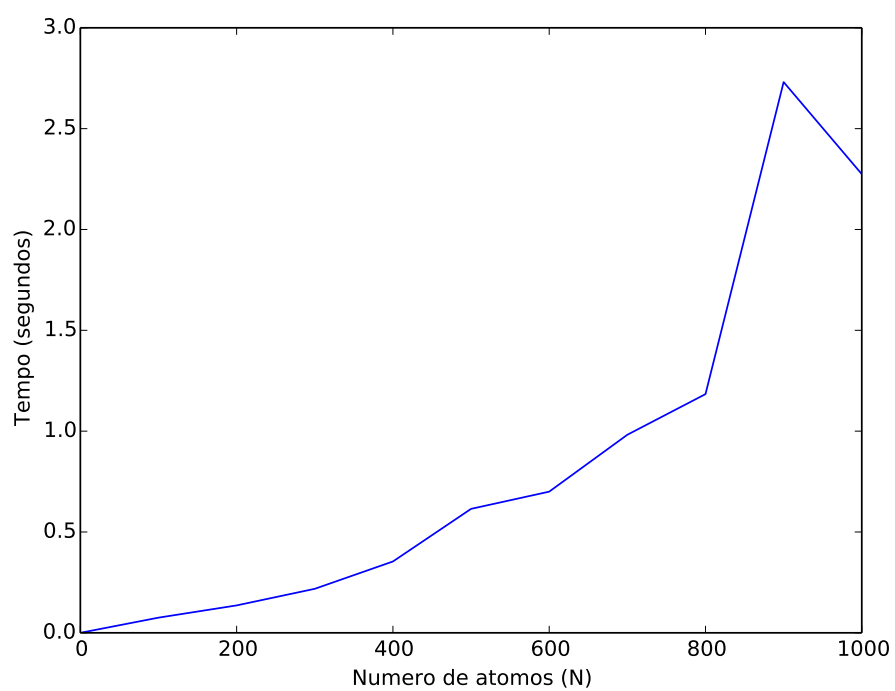


Figura 12: Curva de resposta de tempo para  $M/N = 8.0$

Colocar texto aqui :)

## 4 Conclusões

A    wiejfowijefoiwjef