

LOS SIMBOLOS DE CHRISTOFFEL

Los símbolos que estudiamos aquí fueron introducidos en la matemática, a finales del siglo XIX, por el alemán Elwin Bruno Christoffel (1829 – 1900), que fue, junto con Bernard Riemann, el primero en establecer la noción de Tensor, y, en la práctica, el creador del luego llamado Cálculo Tensorial. Veamos en qué consisten estos símbolos.

0. Introducción:

Sabemos que en los espacios euclidianos, la métrica viene dada por un tensor simétrico (g_{ik}) , cuyas componentes covariantes –las g_{ik} – y las componentes contravariantes –las g^{ik} – están ligadas por la relación:

$$g_{ik} \cdot g^{kj} = \delta_{ij} \text{ (Cronecker)}$$

por lo que, en estos espacios puede hablarse de vectores sin añadir el calificativo de “covariante” o de “contravariante”, pues las componentes en ambos casos vienen ligadas por :

$$g_{ij} \cdot x^i = x_j$$

De esta manera, en los espacios euclidianos las magnitudes vectoriales adquieren un carácter intrínseco independiente de la forma de representación.

En cuanto a los espacios de Riemann, se definen como un par (V_n, g_{ij}) , formado por una variedad y una métrica, en general no euclidiana. Para que en estos espacios riemannianos también las magnitudes sean intrínsecas se hace conveniente una generalización de las fórmulas euclidianas, de modo que en lo sucesivo consideraremos los espacios de Riemann (V_n, g_{ij}) , donde es V_n una variedad, (g_{ij}) es un tensor métrico de componentes g_{ij} covariantes y g^{ij} contravariantes, ligadas por la expresión

$$g_{ij} \cdot x^i = x_j$$

El tensor métrico en un espacio de Riemann es, en general, variable en cada punto (y^k) del espacio:

$$g_{ij} = g_{ij}(y^k)$$

Es decir, en cada punto de la variedad existe una métrica distinta. Cada punto es, pues, un origen referencial para la expresión de los vectores y tensores en las variedades de Riemann.

A partir de la métrica o tensor fundamental, (g_{ij}) , y efectuando operaciones elementales, se pueden estudiar y relacionar matemáticamente las principales formas tensóreas en estos espacios. Para este estudio son importantes algunas simbolizaciones obtenidas desde los elementos del tensor métrico fundamental y que simplifican mucho estas relaciones. Tales son los Símbolos de Christoffel.

En los espacios euclidianos se introducen en el estudio de los sistemas naturales de referencia. Nosotros podemos introducirlos aquí, para los espacios de Riemann de modo que concuerden con las relaciones y significado geométrico que tienen en los espacios euclidianos

1. Símbolos de Primera Especie:

1.1. Definición:

$$(ij, k) = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

1.2. Propiedades:

1.2.1. Simetría:

$$(ij, k) = (ji, k)$$

En efecto:

$$(ij, k) = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) = \frac{1}{2} (\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}) = (ji, k)$$

1.2.2. Comportamiento frente a los cambios de coordenadas:

En un cambio de coordenadas de modo que las y^j pasen a ser las y'^k , se tiene que también la matriz fundamental g_j cambiará y pasará a ser, por ejemplo, la matriz g'_{rs} , de modo que la relación tensorial entre ambas matrices métricas sería del tipo:

$$g'_{pq} = A_p^i \cdot A_q^j \cdot g_{ij}$$

. donde las matrices de paso vienen dadas por las diferenciales parciales

$$A_p^i = \frac{\partial y^i}{\partial y'^p}, \quad A_q^j = \frac{\partial y^j}{\partial y'^q}$$

Asimismo, la definición de los símbolos de Christoffel de 1ª especie en las nuevas coordenadas serían:

$$(pq, r)' = \frac{1}{2} (\partial_p g'_{qr} + \partial_q g'_{pr} - \partial_r g'_{pq})$$

En estas condiciones se cumple la siguiente relación:

Si son (ij, k) los símbolos de Christoffel en el sistema de coordenadas y^j , y son $(pq, s)'$ los símbolos de Christoffel en el sistema de coordenadas y'^p , con matrices de paso para el tensor métrico entre ambos sistemas las dadas en la expresión

$$g'_{pq} = A_p^i \cdot A_q^j \cdot g_{ij}$$

entonces, se verifica que

$$(pq, s)' = A_p^i \cdot A_q^j \cdot A_s^k \cdot (ij, k) + g_{ij} \cdot A_s^i \cdot A_{pq}^j$$

En efecto. Vamos a comprobarlo, calculando las derivadas parciales que figuran en la expresión de los símbolos en el nuevo sistema:

$$\partial'_s g'_{pq} = A_p^i \cdot A_q^j \cdot A_s^k \cdot \partial_k g_{ij} + A_{qs}^i \cdot A_p^j \cdot g_{ij} + A_q^i \cdot A_{ps}^j \cdot g_{ij}$$

Donde es:

$$A_{qs}^j = \frac{\partial^2 y^j}{\partial y'^p \partial y'^q}$$

y, al permutar circularmente los subíndices p, q y s, se tiene:

$$\partial'_p g'_{qs} = A_q^i \cdot A_s^j \cdot A_p^k \cdot \partial_k g_{ij} + A_{sp}^i \cdot A_q^j \cdot g_{ij} + A_{ps}^i \cdot A_q^j \cdot g_{ij}$$

$$\partial'_q g'_{sp} = A_s^i \cdot A_p^j \cdot A_q^k \cdot \partial_k g_{ij} + A_{pq}^i \cdot A_s^j \cdot g_{ij} + A_{sq}^i \cdot A_p^j \cdot g_{ij}$$

Si sustituimos ahora en la expresión de $(pq, s)'$:

$$(pq, s)' = \frac{1}{2} (\partial_p g'_{qs} + \partial_q g'_{ps} - \partial_s g'_{pq}) = A_p^i \cdot A_q^j \cdot A_s^k \cdot (ij, k) + g_{ij} \cdot A_s^i \cdot A_{pq}^j$$

1.2.3. Identidad de Ricci:

Se verifica la siguiente identidad:

$$(ij, k) + (ik, j) = \partial_i g_{jk}$$

En efecto:

$$(ij, k) + (jk, i) = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} + \partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik}) = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_i g_{jk}) = \partial_i g_{jk}$$

2. Símbolos de segunda especie:

2.1. Definición:

Se definen como una relación entre los símbolos de Christoffel de primera especie y las componentes contravariantes del tensor métrico fundamental:

$$\Gamma_{ij}^h = (ij, k) \cdot g^{kh}$$

2.2. Propiedades:

2.2.1. Simetría:

$$\Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ji}^h$$

Efectivamente:

$$\Gamma_{ij}^h = (ij, k) \cdot g^{kh} = (ji, k) \cdot g^{kh} = \Gamma_{ji}^h$$

2.2.2. Comportamiento frente a los cambios de coordenadas:

En un cambio de coordenadas del tipo descrito en el apartado anterior para los símbolo de primera especie, se verifica que

$$\Gamma_{pa}^{r'} = A_p^i \cdot A_q^j \cdot B_h^r \cdot \Gamma_{ij}^h + A_{pa}^m \cdot B_m^r$$

Efectivamente, bastará multiplicar por

$$g^{r'sr} = B_k^s \cdot B_h^r \cdot g^{kh}$$

y tener en cuenta que se verifican las relaciones:

$$A_r^k \cdot B_k^s = \mathbf{d}_r^s \text{ (Cronecker)}, \text{ y } g_{ij} \cdot g^{jh} = \mathbf{d}_i^h \text{ (Cronecker)}$$

2.2.3. identidad de Christoffel:

Se verifica la igualdad:

$$A_{pz}^r = A_r^k \cdot \Gamma_{pa}^{r'} - A_p^i \cdot A_q^j \cdot \Gamma_{ij}^k$$

Se obtiene fácilmente si multiplicamos la igualdad del apartado anterior por la matriz

$$A_r^k$$

y despejamos la matriz

$$A_{pq}^k$$

3. Teorema:

De la definición de estos símbolos y de sus propiedades, en particular, de la Identidad de Christoffel, se tiene un teorema que cobra una cierta importancia por su aplicación a la mecánica teórica relativista:

Las transformaciones de coordenadas que cambian una métrica de coeficientes constantes a otra métrica también de coeficientes constantes, son transformaciones lineales.

En efecto, si la métrica es de coeficientes constantes, entonces, los símbolos de primera especie son nulos

$$(ij, k) = 0$$

y, por la identidad de Christoffel:

$$A_{pq}^m = 0 \Rightarrow A_p^m = \frac{\partial y^m}{\partial y'^p} = \text{constante}$$

Integrando con respecto a las variables del cambio de coordenadas:

$$y^m = A_p^m \cdot y'^p + k$$

-----0000000-----