变换 Transformation

2D Transform

不均缩放 Scale(Non-Uniform)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

反射矩阵 Reflection Matrix

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

剪切矩阵/切变矩阵 Shear Matrix

> Hints:
>
> Horizontal shift is 0 at y=0,
>
> Horizontal shift is a at y=1,
>
> Vertical shift is always 0

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

旋转 Rotate

> about the origin (0,0),CCW by default
>
> 默认绕原点(0,0) 逆时针(CounterClockWise)旋转

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

对于任意一个旋转必定满足于

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

并且有以下几个特殊点

$$\begin{cases} (0,1) \rightarrow (\cos\theta, \sin\theta) \\ (1,0) \rightarrow (-\sin\theta, \cos\theta) \end{cases}$$

代入原式解得

$$\begin{cases} a = \cos\theta \\ b = -\sin\theta \\ c = \sin\theta \\ d = \cos\theta \end{cases}$$

即得到

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

并且不难发现

$$R_{-\theta} = R_\theta^T = R_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

平移变换 Translation

平移满足

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

但是在这种情况下则不属于矩阵的线性变化了，故我们引入齐次坐标

齐次坐标 Homogenous Coordinates

解决平移变换不属于2x2矩阵中的线性变换问题

解决办法，增加一个维度，将二维问题转换为三位问题，则二维问题中的平移问题转换为三维问题中的投影问题

作一下规定

$$\begin{aligned} &\text{2D point} = (x, y, 1)^T \\ &\text{2D vector} = (x, y, 0)^T \end{aligned}$$

那么即有以下矩阵代表三种线性变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

同时也不难发现一个有趣的符合齐次坐标的运算

> vector + vector = vector
>
> point - point = vector
>
> point +vector = point
>
> point + point = the center point

齐次坐标下的三种线性变化

Scale

$$S(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation

$$S(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translation

$$T(t_x, t_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

变换和逆变换

变换矩阵的逆矩阵即为逆变换

变换的组合

由于矩阵乘法不满足交换律

故需要以下原则：

```
从右往左，从先到后
```

并且变换的先后顺序和计算的性能十分相关，同一个结果，不同的运算过程性能差距可能会十分巨大

另外可以通过分解变化将一个复杂变化分解成若干个简易变化

3D Transformation

Scale

$$S(S_x, S_y, S_z) = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation

Roll & Pitch &yaw

绕x轴旋转

$$R_x(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

绕y轴旋转

$$R_x(a) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

绕z轴旋转

$$R_x(a) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

罗德里格斯旋转公式 Roarigues' Rotation Formula

Rotation by angle $\boldsymbol{\alpha}$ around axis $\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \alpha) = \cos(\alpha)\boldsymbol{I} + (1-\cos(\alpha))\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T + \sin(\alpha)\begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}$$

Translation

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MVP（Model-View-Projection）

- Model transformation (placing objects)

  想象一下：世界坐标系下有很多Object，用一个变化矩阵把它们的顶点坐标从Local坐标系（相对）转换到世界Global坐标系（绝对）。这就是placing objects

- View transformation (placing camera)

  想象一下：我们看到的画面由摄像机捕捉，摄像机参数决定了我们在屏幕上看到的东西，这一步可以将世界坐标系转换到摄像机坐标系。

- Projection transformation

  摄像机坐标系，视锥体，再规整一下

Viewing Transformation

视角/相机变换 View / Camera Transformation

Also Model-View Transformation

Define the camera first

- 相机位置 Position $\vec{e}$
- 相机朝向 Look-at / gaze direction $\hat{g}$
- 相机顶部方向 Up Direction $\hat{t}$

通过把相机固定在原点朝向-z轴，顶部朝y轴保证统一直观的计算

已知 $\vec{e}$，$\hat{g}$，$\hat{t}$

需要做以下操作

- Translates $\vec{e}$ to origin
- Rotates $\hat{g}$ to $-\hat{Z}$
- Rotates $\hat{t}$ to $\hat{Y}$
- Rotates $(\hat{g} \times \hat{t})$ to $\hat{X}$

我们将相机先进行平移操作将其移至原点位置，再对其进行旋转操作，即$M_{\text{view}} = R_{\text{view}} T_{\text{view}}$

对于 Translates $\vec{e}$ to origin

$$T_{\text{view}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_e \\ 0 & 1 & 0 & -y_e \\ 0 & 0 & 1 & -z_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于轴向旋转，将任意一个旋转角旋转至正坐标系不好写，但是反过来将正坐标系角旋转至任意一个旋转角是简易的，根据前文所学知识进行分解M的逆变换是M^{-1}，所以我们可以利用逆变换的思路进行逆向计算

$$R_{\text{view}}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{\hat{g}\times\hat{t}} & x_{\hat{t}} & x_{-\hat{g}} & 0 \\ y_{\hat{g}\times\hat{t}} & y_{\hat{t}} & y_{-\hat{g}} & 0 \\ z_{\hat{g}\times\hat{t}} & z_{\hat{t}} & z_{-\hat{g}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

经过转置可得

$$R_{\text{view}} = \begin{bmatrix} x_{\hat{g}\times\hat{t}} & y_{\hat{g}\times\hat{t}} & z_{\hat{g}\times\hat{t}} & 0 \\ x_{\hat{t}} & y_{\hat{t}} & z_{\hat{t}} & 0 \\ x_{-\hat{g}} & y_{-\hat{g}} & z_{-\hat{g}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故得

$$M_{\text{view}} = R_{\text{view}} T_{\text{view}} = \begin{bmatrix} x_{\hat{g}\times\hat{t}} & y_{\hat{g}\times\hat{t}} & z_{\hat{g}\times\hat{t}} & -x_e \\ x_{\hat{t}} & y_{\hat{t}} & z_{\hat{t}} & -y_e \\ x_{-\hat{g}} & y_{-\hat{g}} & z_{-\hat{g}} & -z_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

投影变换 Projection Transformation

正交投影 Orthographic Projection

Simple way

- 将坐标移至原点 Translates position $\vec{e}$ to origin
- 旋转朝向至-Z方向 Rotates look-at direction $\hat{g}$ to $-\hat{Z}$
- 旋转顶部朝向至+Y方向Rotates up direction$\hat{t}$ to $\hat{Y}$

- 舍弃Z轴坐标值 Drop Z Coordinates
- 将坐标进行 Translate and scale the rusulting rectangle to $[-1,1]^3$

Formal way

- We want to map a cuboid $[\text{left}, \text{right}] \times [\text{bottom}, \text{top}] \times [\text{far}, \text{near}]$ to the "canonical(正则、规范、标准)"cube $[-1,1]^3$
- center cuboid by Translating
- scale into canonical cube

$$
\begin{aligned}
M_{\text{ortho}} = S_{\text{ortho}} T_{\text{ortho}} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{r+l}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{t+b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{2} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

透视投影 Perspective Projection

> Before everthing , there's a fact you should know.
>
> $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \\ k \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \\ z \end{pmatrix}$ all represent the same point (x, y, z) in 3D

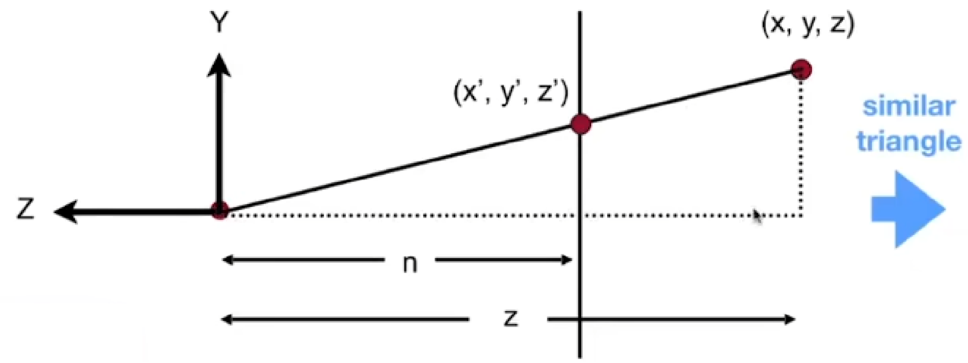
- First 将透视棱台压缩至正交立方体($n \to n, f \to f$)($M_{\text{persp}\to\text{ortho}}$)
- Then 进行正交透视变换

Perspective Frustum to Orthographic Cube

首先已知

$$
\underset{\text{original point}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}} \rightarrow \underset{\text{transformed point}}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}}
$$

通过相似三角形来进行推导可得



$$y' = \frac{n}{z}y$$

$$\underset{\text{original point}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}} \Rrightarrow \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ unknown \\ z \end{pmatrix} = \underset{\text{transformed point}}{\begin{pmatrix} nx/z \\ ny/z \\ unknown \\ 1 \end{pmatrix}}$$

所以第一步即要进行如下操作

$$M_{\text{persp}\to\text{ortho}}^{(4\times4)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ unknown \\ z \end{pmatrix}$$

所以可以得

$$M_{\text{persp}\to\text{ortho}}^{(4\times4)} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

根据条件"任何z=n（位于近平面）上的点的坐标不会改变"可列方程

$$M_{\text{persp}\to\text{ortho}}^{(4\times4)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ n^2 \\ n \end{pmatrix} \Rrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ n \\ 1 \end{pmatrix}$$

解得矩阵第三行（因为结果为 n^2 与x，y线性无关故前两位为0）

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = n^2 \Rrightarrow An + B = n^2$$

再根据条件"在 z=f（位于远平面）上的中心点坐标不会改变"可列方程

$$M_{\text{persp}\to\text{ortho}}^{(4\times4)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f^2 \\ f \end{pmatrix} \Rrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 1 \end{pmatrix}$$

解得矩阵第三行

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 1 \end{pmatrix} = f^2 \Rightarrow Af + B = f^2$$

联立方程解得

$$\begin{cases} An + B = n^2 \\ Af + B = f^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = n + f \\ B = -nf \end{cases}$$

So we get the $M_{\text{persp}\to\text{ortho}}^{(4\times4)}$

$$M_{\text{persp}\to\text{ortho}}^{(4\times4)} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

对于任意处于n与f之间的一点已知$n<k<f$，可得

$$M_{\text{persp}\to\text{ortho}}^{(4\times4)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ k(n+f) - nf \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{nx}{k} \\ \frac{nx}{k} \\ \frac{k(n+f)-nf}{k} \\ 1 \end{pmatrix}$$

并且我们可以做以下推导

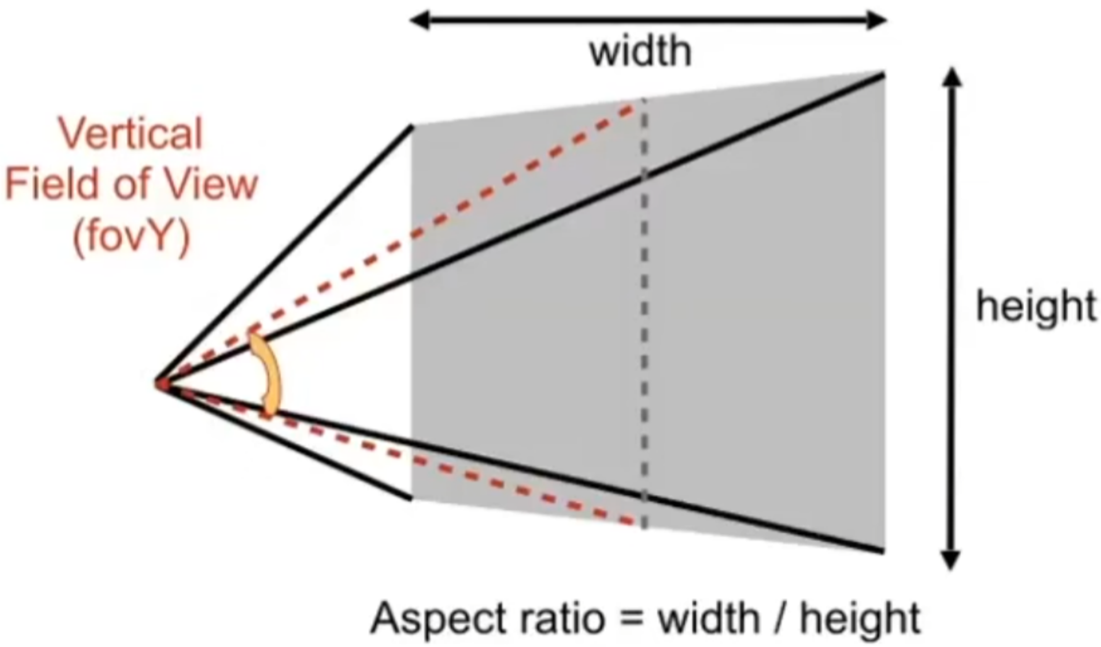
$$\begin{aligned} f &> k \\ k - n &> 0 \\ f(k-n) &> k(k-n) \\ fk - fn &> k^2 - kn \\ kn + kf - nf &> k^2 \\ \frac{k(n+f) - nf}{k} &> k \end{aligned}$$

故可以发现，位于远近平面中间的点，在经过透视变化后，其z值会出现变大（如果近平面z小远平面z大的话）的情况，即变得距离摄像机更远

视口变换

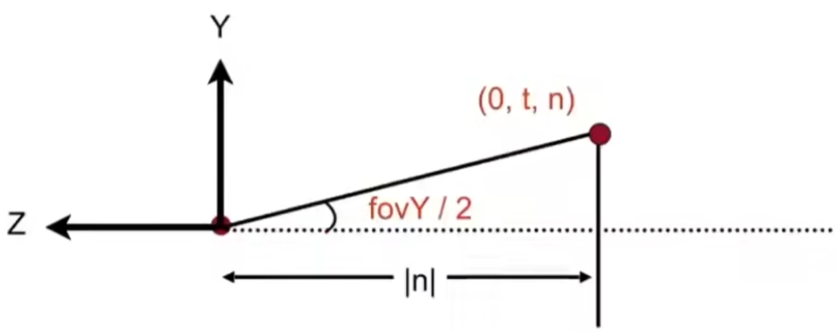
视锥

视锥通常使用**field-of-view(fovY)**和**aspect ratio**来定义其大小，以下是一个视锥的斜视图



那么要如何将**fovY**和**aspect ratio**信息转换成棱台的**L**eft,**R**ight,**T**op,**B**ottom坐标信息?

一种可行的



$$\tan\frac{fovY}{2} = \frac{t}{|n|}$$

$$aspect = \frac{r}{t}$$

正则矩形至屏幕空间 Canonical Cube To Screen

在xy空间内做变换 : $[-1,1]^2$ to $[0, width] \times [0, height]$

视口变换矩阵

$$M_{viewport} = \begin{pmatrix} \frac{width}{2} & 0 & 0 & \frac{width}{2} \\ 0 & \frac{height}{2} & 0 & \frac{height}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$