

本节内容

二叉排序树 (BST)

王道考研/CSKAOYAN.COM

1

知识总览

二叉排序树

二叉排序树的定义

查找操作

插入操作

删除操作

查找效率分析

王道考研/CSKAOYAN.COM

2

二叉排序树的定义

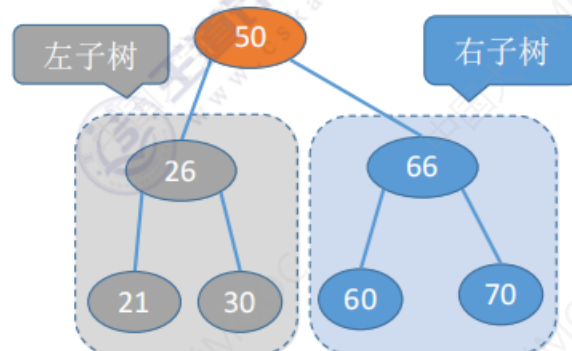
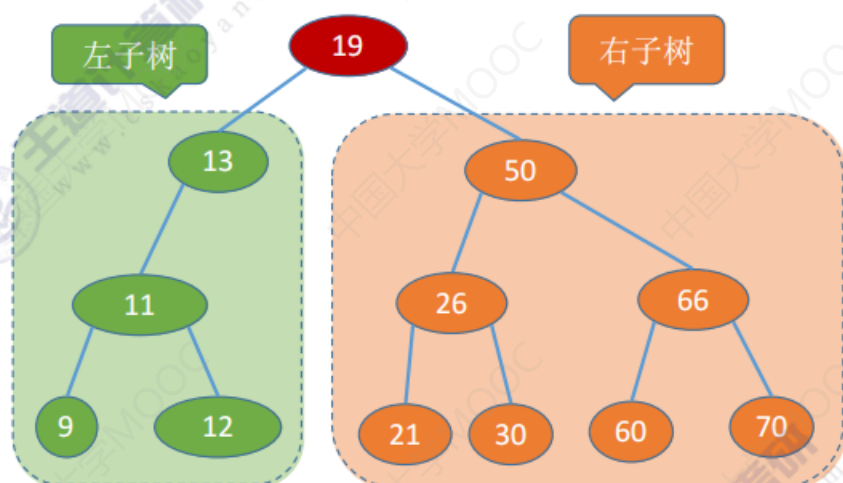
二叉排序树可用于元素的有序组织、搜索

二叉排序树，又称二叉查找树（BST，Binary Search Tree）
一棵二叉树或者是空二叉树，或者是具有如下性质的二叉树：

左子树上所有结点的关键字均小于根结点的关键字；
右子树上所有结点的关键字均大于根结点的关键字。
左子树和右子树又各是一棵二叉排序树。

左子树结点值 < 根结点值 < 右子树结点值

进行中序遍历，可以得到一个递增的有序序列



王道考研/CSKAOYAN.COM

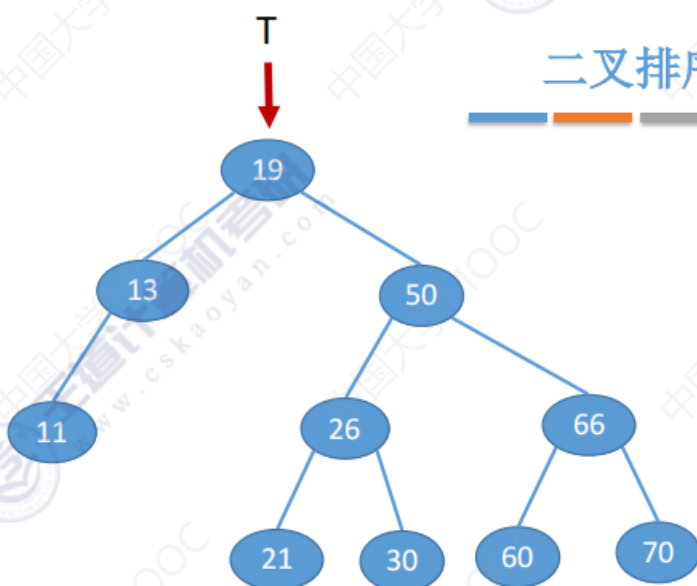
3

二叉排序树的查找

左子树结点值 < 根结点值 < 右子树结点值

若树非空，目标值与根结点的值比较：
若相等，则查找成功；
若小于根结点，则在左子树上查找，否则在右子树上查找。

查找成功，返回结点指针；查找失败返回NULL



例1：查找关键字为30的结点

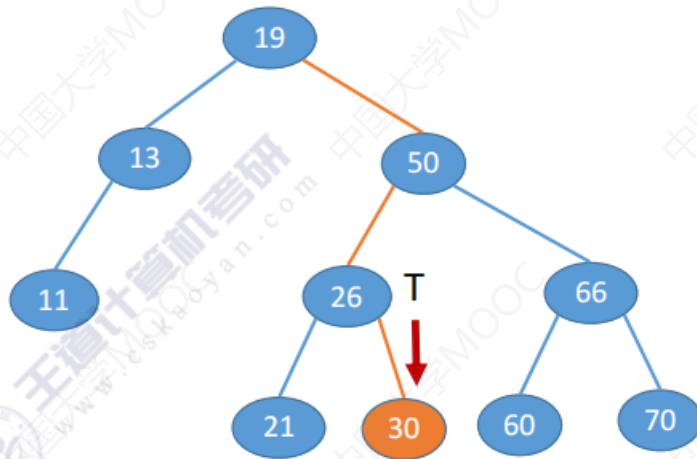
```
//二叉排序树结点
typedef struct BSTNode{
    int key;
    struct BSTNode *lchild,*rchild;
}BSTNode,*BSTree;
```

```
//在二叉排序树中查找值为 key 的结点
BSTNode *BST_Search(BSTree T,int key){
    while(T!=NULL&&key!=T->key){
        if(key<T->key) T=T->lchild;
        else T=T->rchild;
    }
    return T;
}
```

王道考研/CSKAOYAN.COM

4

二叉排序树的查找



左子树结点值 < 根结点值 < 右子树结点值

若树非空，目标值与根结点的值比较：
若相等，则查找成功；
若小于根结点，则在左子树上查找，否则在右子树上查找。

查找成功，返回结点指针；查找失败返回NULL

例1：查找关键字为30的结点

```
//二叉排序树结点
typedef struct BSTNode{
    int key;
    struct BSTNode *lchild,*rchild;
}BSTNode,*BSTree;
```

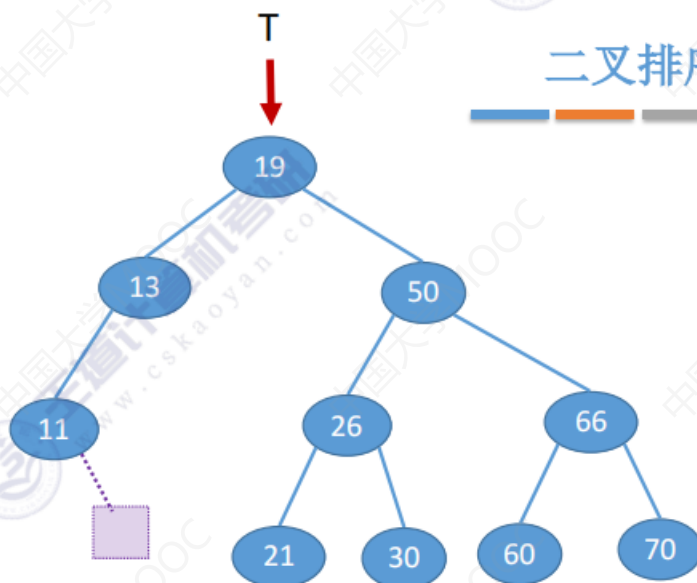
//在二叉排序树中查找值为 key 的结点

```
BSTNode *BST_Search(BSTree T,int key){
    while(T!=NULL&&key!=T->key){        //若树空或等于根结点值，则结束循环
        if(key<T->key) T=T->lchild;      //小于，则在左子树上查找
        else T=T->rchild;                //大于，则在右子树上查找
    }
    return T;
}
```

王道考研/CSKAOYAN.COM

5

二叉排序树的查找



左子树结点值 < 根结点值 < 右子树结点值

若树非空，目标值与根结点的值比较：
若相等，则查找成功；
若小于根结点，则在左子树上查找，否则在右子树上查找。

查找成功，返回结点指针；查找失败返回NULL

例2：查找关键字为12的结点

```
//二叉排序树结点
typedef struct BSTNode{
    int key;
    struct BSTNode *lchild,*rchild;
}BSTNode,*BSTree;
```

//在二叉排序树中查找值为 key 的结点

```
BSTNode *BST_Search(BSTree T,int key){
    while(T!=NULL&&key!=T->key){        //若树空或等于根结点值，则结束循环
        if(key<T->key) T=T->lchild;      //小于，则在左子树上查找
        else T=T->rchild;                //大于，则在右子树上查找
    }
    return T;
}
```

王道考研/CSKAOYAN.COM

6

二叉排序树的查找

```
//在二叉排序树中查找值为 key 的结点
BSTNode *BST_Search(BSTree T,int key){
    while(T!=NULL&&key!=T->key){ //若树空或等于根结点值,则结束循环
        if(key<T->key) T=T->lchild; //小于,则在左子树上查找
        else T=T->rchild; //大于,则在右子树上查找
    }
    return T;
}
```

最坏空间复杂度 $O(1)$

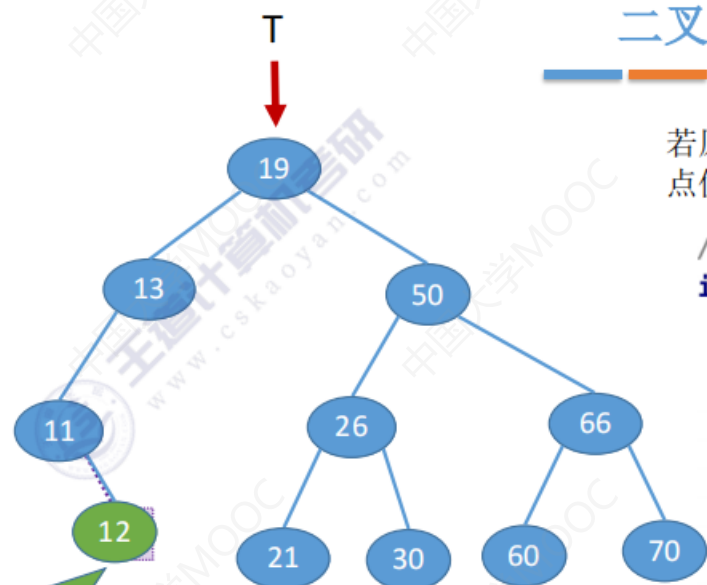
```
//在二叉排序树中查找值为 key 的结点 (递归实现)
BSTNode *BSTSearch(BSTree T,int key){
    if (T==NULL) //查找失败
        return NULL;
    if (key==T->key) //查找成功
        return T;
    else if (key < T->key)
        return BSTSearch(T->lchild, key); //在左子树中找
    else
        return BSTSearch(T->rchild, key); //在右子树中找
}
```

最坏空间复杂度 $O(h)$

王道考研/CSKAOYAN.COM

7

二叉排序树的插入



新插入的结点一定是叶子

例: 插入关键字为12的结点



嗨嗨, 醒醒, 敲代码了!

练习: 实现非递归插入

若原二叉排序树为空, 则直接插入结点; 否则, 若关键字 k 小于根结点值, 则插入到左子树, 若关键字 k 大于根结点值, 则插入到右子树

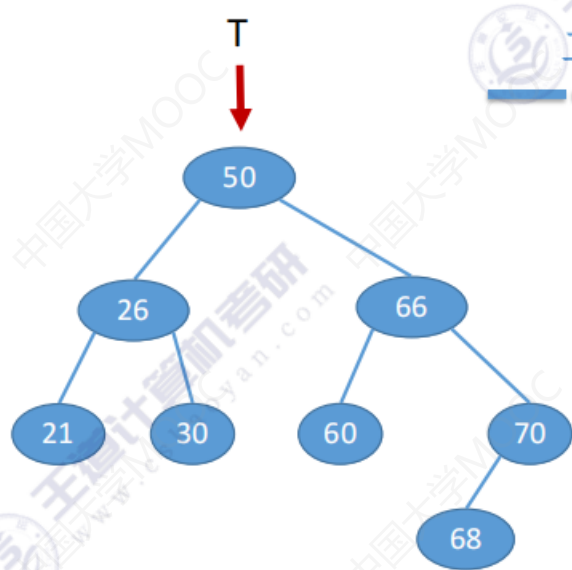
```
//在二叉排序树插入关键字为k的新结点 (递归实现)
int BST_Insert(BSTree &T, int k){
    if(T==NULL){ //原树为空, 新插入的结点为根结点
        T=(BSTree)malloc(sizeof(BSTNode));
        T->key=k;
        T->lchild=T->rchild=NULL;
        return 1; //返回1, 插入成功
    }
    else if(k==T->key) //树中存在相同关键字的结点, 插入失败
        return 0;
    else if(k<T->key) //插入到T的左子树
        return BST_Insert(T->lchild, k);
    else //插入到T的右子树
        return BST_Insert(T->rchild, k);
}
```

最坏空间复杂度 $O(h)$

王道考研/CSKAOYAN.COM

8

二叉排序树的构造



```
//按照 str[] 中的关键字序列建立二叉排序树
void Creat_BST(BSTree &T,int str[],int n){
    T=NULL;           //初始时T为空树
    int i=0;
    while(i<n){        //依次将每个关键字插入到二叉排序树中
        BST_Insert(T,str[i]);
        i++;
    }
}
```

例1: 按照序列str={50, 66, 60, 26, 21, 30, 70, 68}建立BST

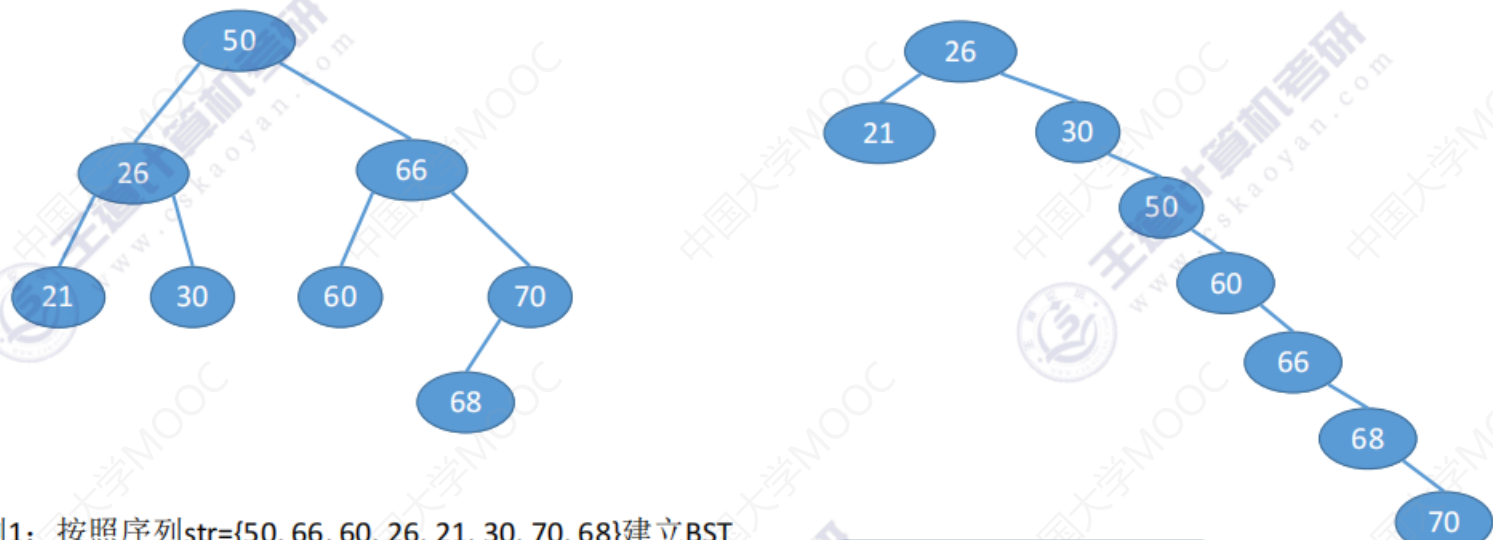
例2: 按照序列str={50, 26, 21, 30, 66, 60, 70, 68}建立BST

不同的关键字序列可能得到同款二叉排序树

王道考研/CSKAOYAN.COM

9

二叉排序树的构造



例1: 按照序列str={50, 66, 60, 26, 21, 30, 70, 68}建立BST

例2: 按照序列str={50, 26, 21, 30, 66, 60, 70, 68}建立BST

例3: 按照序列str={26, 21, 30, 50, 60, 66, 68, 70}建立BST

不同的关键字序列可能得到同款二叉排序树

也可能得到不同款二叉排序树

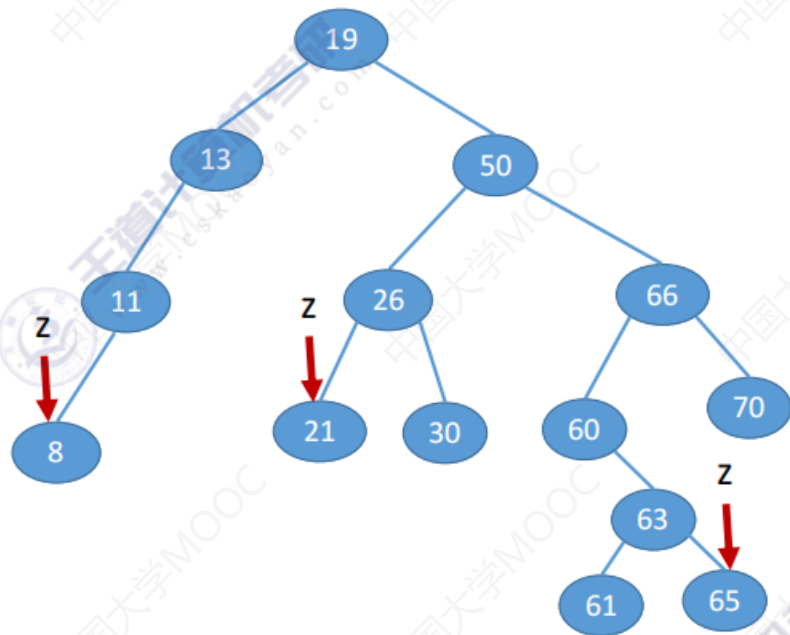
王道考研/CSKAOYAN.COM

10

二叉排序树的删除

先搜索找到目标结点：

① 若被删除结点 z 是叶结点，则直接删除，不会破坏二叉排序树的性质。



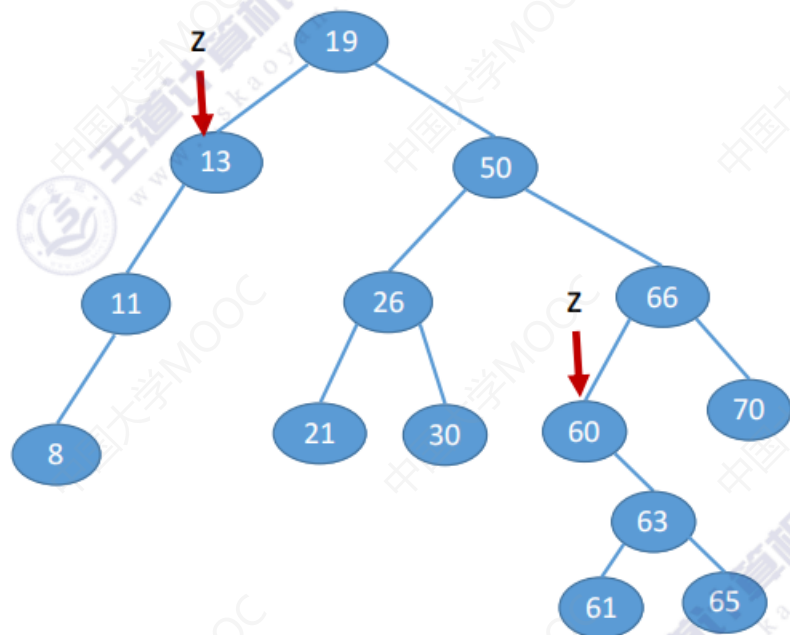
左子树结点值 < 根结点值 < 右子树结点值

王道考研/CSKAOYAN.COM

11

二叉排序树的删除

② 若结点 z 只有一棵左子树或右子树，则让 z 的子树成为 z 父结点的子树，替代 z 的位置。



左子树结点值 < 根结点值 < 右子树结点值

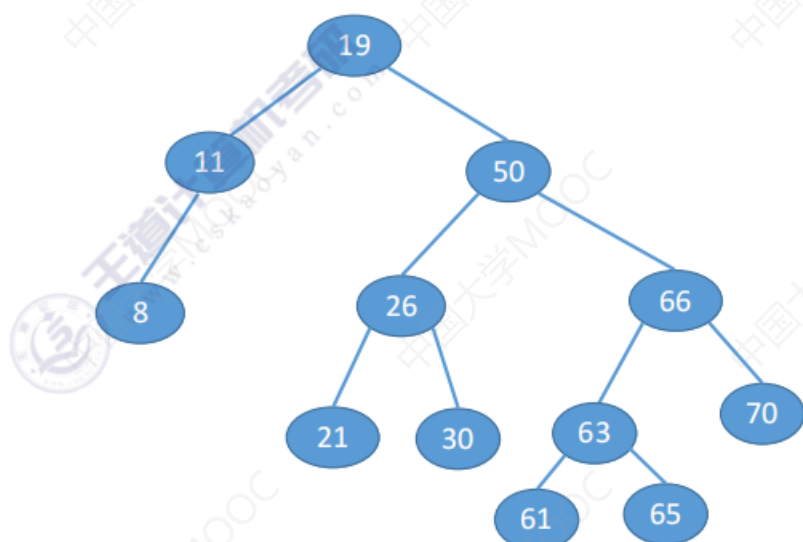
王道考研/CSKAOYAN.COM

12

二叉排序树的删除

② 若结点 z 只有一棵左子树或右子树，则让 z 的子树成为 z 父结点的子树，替代 z 的位置。

左子树结点值 < 根结点值 < 右子树结点值



王道考研/CSKAOYAN.COM

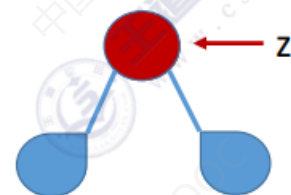
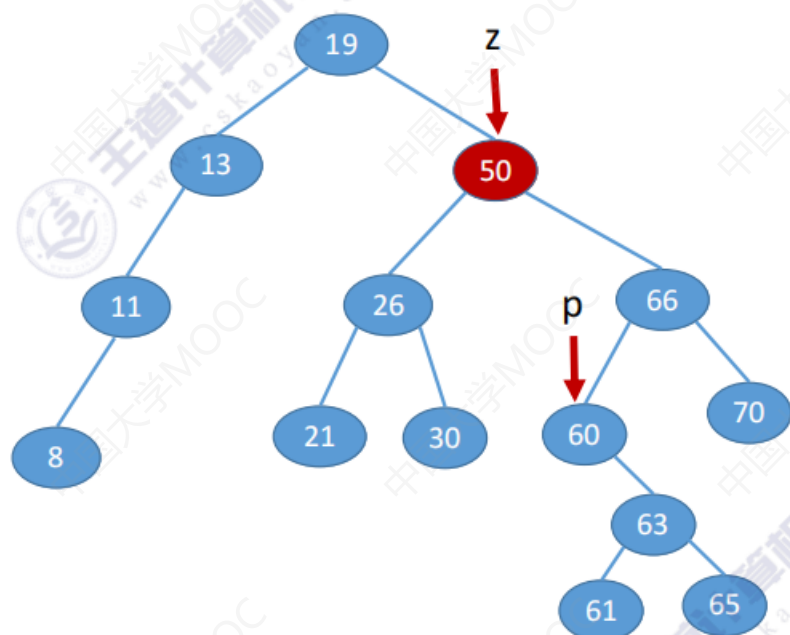
13

二叉排序树的删除

③ 若结点 z 有左、右两棵子树，则令 z 的直接后继（或直接前驱）替代 z ，然后从二叉排序树中删去这个直接后继（或直接前驱），这样就转换成了第一或第二种情况。

左子树结点值 < 根结点值 < 右子树结点值

进行中序遍历，可以得到一个递增的有序序列



中序遍历——左 根 右
左 根 (左 根 右)
左 根 ((左 根 右) 根 右)

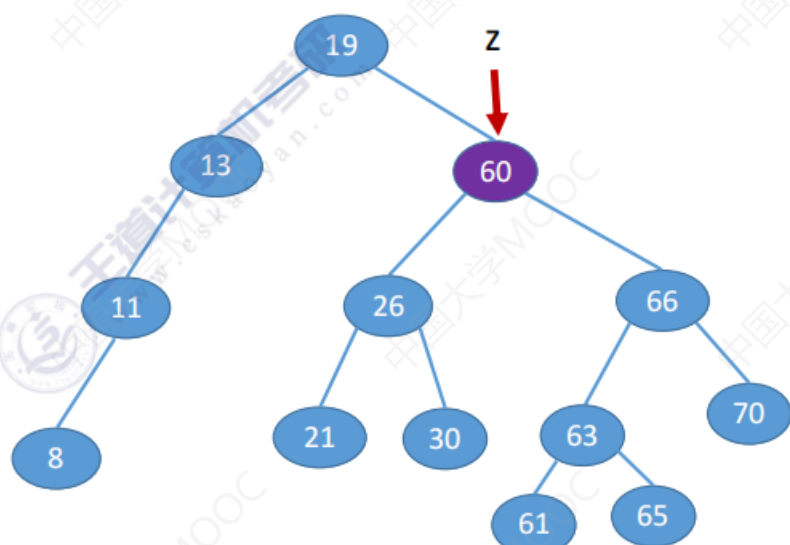
z 的后继： z 的右子树中最左下结点（该结点一定没有左子树）

王道考研/CSKAOYAN.COM

14

二叉排序树的删除

③ 若结点 z 有左、右两棵子树，则令 z 的直接后继（或直接前驱）替代 z ，然后从二叉排序树中删去这个直接后继（或直接前驱），这样就转换成了第一或第二种情况。



左子树结点值 < 根结点值 < 右子树结点值

进行中序遍历，可以得到一个递增的有序序列



中序遍历——左 根 右

左 根 (左 根 右)

左 根 ((左 根 右) 根 右)

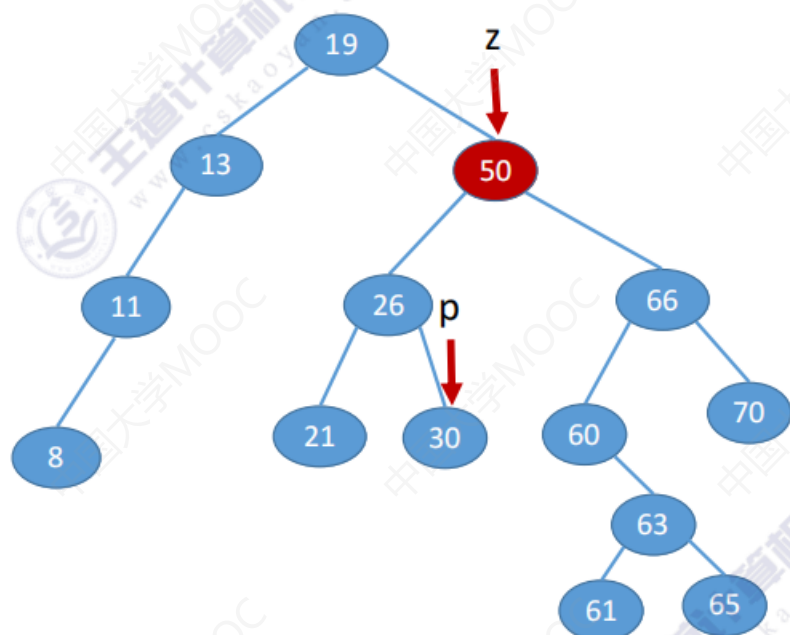
z 的后继： z 的右子树中最左下结点（该结点一定没有左子树）

王道考研/CSKAOYAN.COM

15

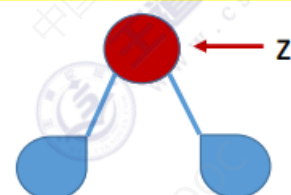
二叉排序树的删除

③ 若结点 z 有左、右两棵子树，则令 z 的直接后继（或直接前驱）替代 z ，然后从二叉排序树中删去这个直接后继（或直接前驱），这样就转换成了第一或第二种情况。



左子树结点值 < 根结点值 < 右子树结点值

进行中序遍历，可以得到一个递增的有序序列



中序遍历——左 根 右

(左 根 右) 根 右

(左 根 (左 根 右)) 根 右

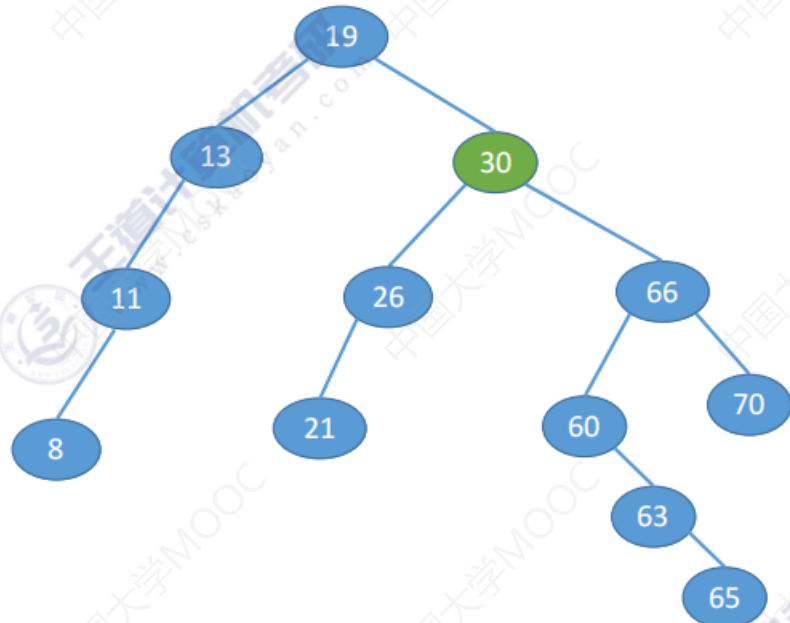
z 的前驱： z 的左子树中最右下结点（该结点一定没有右子树）

王道考研/CSKAOYAN.COM

16

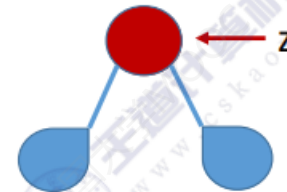
二叉排序树的删除

③ 若结点 z 有左、右两棵子树，则令 z 的直接后继（或直接前驱）替代 z ，然后从二叉排序树中删去这个直接后继（或直接前驱），这样就转换成了第一或第二种情况。



左子树结点值 < 根结点值 < 右子树结点值

进行中序遍历，可以得到一个递增的有序序列



中序遍历——左 根 右

(左 根 右) 根 右

(左 根 (左 根 右)) 根 右

z 的前驱： z 的左子树中最右下结点（该结点一定没有右子树）

王道考研/CSKAOYAN.COM

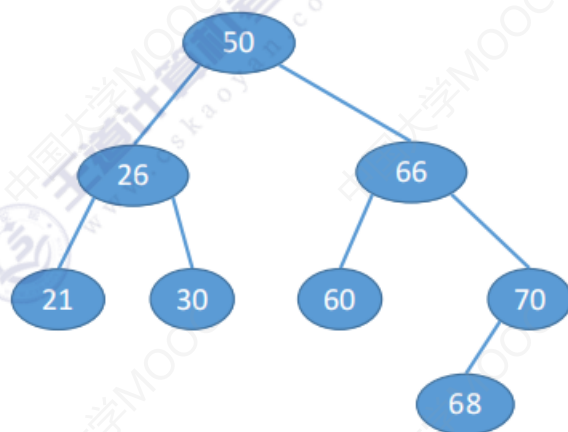
17

查找效率分析

若树高 h ，找到最下层的一个结点需要对比 h 次

最好情况： n 个结点的二叉树最小高度为 $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ 。
平均查找长度 = $O(\log_2 n)$

查找长度——在查找运算中，需要对比关键字的次数称为查找长度，反映了查找操作时间复杂度



查找成功的平均查找长度 ASL (Average Search Length)

$$ASL = (1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 4 + 4 \times 1) / 8 = 2.625$$



最坏情况：每个结点只有一个分支，树高 h =结点数 n 。平均查找长度= $O(n)$

$$ASL = (1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 1 + 6 \times 1 + 7 \times 1) / 8 = 3.75$$

王道考研/CSKAOYAN.COM

18

查找效率分析

平衡二叉树。树上任一结点的左子树和右子树的深度之差不超过1。

左子树深度=2 右子树深度=3

str={50, 66, 60, 26, 21, 30, 70, 68}

左子树深度=1 右子树深度=6

str={26, 21, 30, 50, 60, 66, 68, 70}

优秀

n个结点的二叉树最小高度为 $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ (完全二叉树)
而平衡二叉树高度与完全二叉树同等数量级

王道考研/CSKAOYAN.COM

19

查找效率分析

查找长度——在查找运算中，需要对比关键字的次数称为查找长度。

查找失败的平均查找长度 ASL (Average Search Length)

$ASL = (3*7 + 4*2)/9 = 3.22$

$ASL = (2*3 + 3+4+5+6+7*2)/9 = 4.22$

王道考研/CSKAOYAN.COM

20

知识回顾与重要考点

二叉排序树

二叉排序树的定义

! 左子树结点值 < 根结点值 < 右子树结点值

默认不允许两个结点的关键字相同

查找操作

从根节点开始，目标值更小往左找，目标值更大往右找

插入操作

找到应该插入的位置（一定是叶子结点），一定要注意修改其父节点指针

! 删除操作

①被删结点为叶子，直接删除

②被删结点只有左或只有右子树，用其子树顶替其位置

③被删结点有左、右子树

可用其后继结点顶替，再删除后继结点

或用其前驱结点顶替，再删除前驱结点

前驱：左子树中最右下的结点

后继：右子树中最左下的结点

查找效率分析

取决于树的高度，最好 $O(\log n)$ ，最坏 $O(n)$

! 平均查找长度的计算

查找成功的情况

查找失败的情况（需补充失败结点）

王道考研/CSKAOYAN.COM