Method of normal spline-collocation

Article *in* Журнал вычислительной математики и математической физики · January 1989

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 29, 1989 № 2

УДК 519.642

МЕТОД НОРМАЛЬНОЙ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ

ГОРБУНОВ В. К.

(Фрунзе)

Излагается проекционный метод решения линейных одномерных интегральных и дифференциальных уравнений. Метод основан на постановке задачи о нормальном решении (в гильбертовом соболевском пространстве) системы коллокации и на преобразовании точечных и интегральных функционалов к канонической форме – скалярному произведению. Решение получается в виде обобщенного сплайна.

Из двух основных классов методов приближенного решения функциональных задач — сеточных и проекционных — второй имеет потенциально лучшие свойства. Подходящий выбор базиса позволяет обработать различные особенности уравнений в аналитических выкладках и хорошо аппроксимировать функциональную задачу конечномерной задачей небольшой размерности.

В данной работе строится проекционный метод решения линейных интегродифференциальных уравнений, начальных и краевых задач типа метода коллокации [1], но с естественным базисом, порождаемым ядром интегрального оператора или (и) коэффициентами уравнения, а также выбранным пространством решений. В качестве последнего выбирается гильбертово пространство соболевского типа. Исходное уравнение заменяется конечной системой равенств в точках некоторого разбиения промежутка независимой переменной. В отличие от классических проекционных методов базисная система не постулируется. Недоопределенность задачи решения конечной системы функциональных равенств снимается постановкой задачи о нормальном решении этой системы.

Наш подход основан на том, что в пространстве $W_2^l[a, b]$ интегралы искомого решения с весами, порождаемыми ядром исходного интегрального уравнения, и значения функции и ее производных порядка до $l-1$ в заданных точках есть линейные непрерывные функционалы. Этот факт следует [2] из теоремы вложения С. Л. Соболева $W_2^l[a, b]$ в $C^{l-1}[a, b]$.

По теореме Рисса, любой линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве может быть представлен в виде скалярного произведения. Это каноническое представление точечных и интегральных функционалов, порождаемых ядрами или (и) коэффициентами исходных уравнений, лежит в основе алгоритмизации предлагаемого метода. Канонические образы функционалов являются элементами W_2^l и образуют базисную систему. Таким образом, этот базис, как и в методе Купрадзе — Алексидзе [3] (в случае интегральных уравнений), определяется заданными функциями исходного уравнения, но преобразованными в соответствии с выбором пространства решения.

Предлагаемый метод дает в качестве приближенного решения исходной задачи обобщенный сплайн [4]—[7]. Однако в известных реализациях этого направления минимизируемый функционал является полунормой. Использование нормы упрощает исследование сходимости и вычислительную схему.

Метод реализован для интерполяции функций, начальных и краевых задач дифференциальных уравнений. При этом выявлена вычислительная эквивалентность двух норм, порождающих экспоненциальные и полиномиальные сплайны. Предложена схема сгущения сеток, эффективная для решения «жестких» задач. Ранее каноническое преобразование функционалов было использовано автором при решении интегральных уравнений I рода [8], [9].

§ 1. Уравнения в пространствах $W_2^l(a, b)$

Рассмотрим проблему решения уравнений вида

$$A(t)\frac{dx(t)}{dt}+B(t)x(t)-\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds=f(t) \tag{1.1}$$

с условиями

$$Cx(a)+Dx(b)=g, \tag{1.2}$$

где x, f, $g\in\mathbb{R}_n$, A, B, C, D, K — квадратные матрицы порядка n. В случае $A(t)\equiv0$ здесь имеется в виду интегральное уравнение II рода и условия (1.2) не нужны. При этом предполагается, что матрица $B(t)$ не вырождается при $a\leqslant t\leqslant b$.

Проблема разрешимости задач для уравнения (1.1) решается в частных случаях обычно для функциональных пространств типа $C(a, b)$ или $L_2(a, b)$. Здесь имеется в виду принадлежность этим пространствам компонент вектор-функции $x(t)$. В случае разрешимости задачи в одном из этих пространств, как правило, нетрудно установить дополнительные свойства дифференцируемости решения, т. е. принадлежность его компонент пространству $C^r(a, b)$ при некотором $r\geqslant1$. Для этого следует убедиться в возможности дифференцирования слагаемых равенства (1.1) достаточное число раз.

Излагаемый далее вариационный метод приближенного решения задач для уравнения (1.1) основан на возможности представить искомое решение как элемент гильбертова пространства соболевского типа $W_2^l(a, b)$ при $l\geqslant2$; если $A\equiv0$, то $l\geqslant1$. Будут рассмотрены две топологически-эквивалентные нормы:

$$\|x\|=\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_a^b[x_i^2(s)+(x_i^{(l)})^2]\,ds\right\}^{1/2}, \tag{1.3а}$$

$$\|x\|=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{l-1}[x_i^{(k)}(a)]^2+\int_a^b[x_i^{(l)}(s)]^2\right)ds\right\}^{1/2}. \tag{1.3б}$$

В случае (1.3а) допустимы бесконечные промежутки.

Предположим, что интегральный оператор в (1.1) ограничен в W_2^l и рассматриваемая задача имеет решение в этом пространстве. Если решение не единственное, то существует единственное нормальное решение. Обозначим его x^0.

Введем на промежутке (a, b) последовательность разбиений сеток

$$a\leqslant t_1^m<\ldots<t_m^m\leqslant b,\qquad m\to\infty, \tag{1.4}$$

и перейдем от уравнения (1.1) на континууме (a, b) к конечной системе равенств

$$(1.5)\qquad A(t_k^m)\frac{dx(t_k^m)}{dt}+B(t_k^m)x(t_k^m)-\int_a^b K(t_k^m,s)x(s)\,ds=f(t_k^m),$$
$$1\leqslant k\leqslant m,$$

для некоторого разбиения (1.4); если $A(t)\neq 0$, то эту систему рассмотрим совместно с условием (1.2).

В левой части (1.5) искомое решение $x(s)$ представлено своими значениями, а также значениями производных (если $A\neq 0$) в точках t_i^m и линейными по x интегралами. Все эти объекты являются в W_2^l линейными непрерывными функционалами, следовательно, множество, описываемое системой (1.2), (1.5), линейное и замкнутое. Оно, очевидно, содержит решение x^0 и имеет элемент минимальной нормы

$$(1.6)\qquad x_m=\operatorname{argmin}\{\|x\|^2 : (1.2),\ (1.5)\}.$$

В случае $A(t)\equiv 0$ условие (1.2) в (1.6) следует опустить.

Переход от континуального уравнения (1.1) к конечной системе (1.5) лежит в основе известного метода коллокации [1]. В исходном варианте этого метода решение представляется в виде разложения по априорному базису. Известен метод сплайн-коллокации, где решение ищется в виде кубического сплайна [10]. Эта модификация в отличие от исходного варианта с классическими алгебраическими или тригонометрическими базисами обеспечивает сходимость на произвольных сгущающихся сетках.

Задача (1.6) — частный случай абстрактной схемы обобщенных сплайнов [4]—[6]. Выбор нормы в качестве минимизируемого функционала делает тривиальной проблему существования и единственности решения. С точки зрения вариационного исчисления, (1.6) есть классическая изопериметрическая задача и может решаться методом Лагранжа. Однако этот путь ведет к сложным системам интегродифференциальных уравнений относительно искомых функций и множителей Лагранжа. Специфика задачи (1.6) (выбор функционала — квадрата нормы) позволяет построить простой метод решения, основанный на каноническом преобразовании линейных непрерывных функционалов и излагаемый ниже.

§ 2. Сходимость нормальных решений

Исследуем сходимость решений (1.6) к решению исходной задачи. Введем обозначение τ_m для максимального шага разбиения (1.4).

Лемма 1. *Пусть $\psi(t)$ — скалярная функция пространства $W_2^l(a, b)$, равная нулю в узлах разбиения $a\leqslant t_1<\ldots<t_m\leqslant b$, и в некоторой точке $\theta\in(a, b)$ выполняется $|\psi(\theta)|=\varepsilon>0$; тогда*

$$(2.1)\qquad \|\psi\|^2>\frac{2^{l-1}}{\tau^{2l-1}}\varepsilon^2,$$

где $\tau=\max\{t_i-t_{i-1} : 2\leqslant i\leqslant m\}$.

Доказательство. Пусть $t_k<\theta<t_{k+1}$, тогда

$$\|\psi\|^2\geqslant\int_{t_k}^{t_{k+1}}|\psi^{(l)}(s)|^2\,ds.$$

Рассмотрим случай $l=1$. Очевидно,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\psi'|^2 ds \geqslant \min_{\varphi \in W_2'} \left\{ \int_{t_k}^{\theta} |\varphi'|^2 ds : \varphi(t_k)=0,\ \varphi(\theta)=\varepsilon \right\}.$$

Уравнение Эйлера экстремальной задачи справа есть $\varphi''=0$, и ее решение

$$\varphi(s)=\frac{s-t_k}{\theta-t_k}\varepsilon.$$

Из этого следует справедливость неравенства

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\psi^{(l)}(s)|^2 ds \geqslant \frac{2^{l-1}}{\tau^{2l-1}}\varepsilon^2, \tag{2.2}$$

а значит, и неравенства (2.1) при $l=1$.

Пусть неравенство (2.2) справедливо при $l=r\geqslant 1$. Для доказательства леммы достаточно показать, что оно также справедливо при $l=r+1$.

На промежутке (t_k, t_{k+1}) существует экстремальная точка $\bar{\theta}$, в которой $\psi(\bar{\theta})\geqslant\psi(\theta)=\varepsilon$ и $\psi^{(r)}(\bar{\theta})=0$, следовательно,

$$\psi^{(r)}(t)=-\int_{t}^{\bar{\theta}} \psi^{(r+1)}(s)\,ds.$$

Возведем это равенство в квадрат и применим к правой части неравенства Коши — Буняковского, тогда

$$|\psi^{(r)}(t)|^2 \leqslant (\bar{\theta}-t)\int_{t}^{\bar{\theta}} |\psi^{(r+1)}(s)|^2 ds \leqslant (\bar{\theta}-t)\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\psi^{(r+1)}|^2 ds.$$

Интегрируя крайние выражения по $[t_k, t_{k+1}]$, получаем неравенство

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\psi^{(r)}|^2 ds \leqslant \frac{\tau^2}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\psi^{(r+1)}|^2 ds.$$

Из этого следует справедливость (2.2) при $l=r+1$, что доказывает лемму.

Теорема 1. *Если* $-\infty<a<b<\infty$, $\tau_m\to 0$, *то*

$$\lim_{m\to\infty} \|x_m-x^0\|=0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Решение x^0 удовлетворяет любой системе (1.5), поэтому $\|x_m\|\leqslant\|x^0\|$ и последовательность x_m имеет слабо предельную точку $\bar{x}$. При этом $\|\bar{x}\|\leqslant\|x^0\|$.

Рассмотрим невязки уравнения (1.1) на функциях x_m, $\bar{x}$, т. е. вектор-функции

$$\varphi^m(t)=A(t)\frac{dx_m(t)}{dt}+B(t)x_m(t)-\int_a^b K(t,s)x_m(s)\,ds-f(t),$$

$$\bar{\varphi}(t)=A(t)\frac{d\bar{x}(t)}{dt}+B(t)\bar{x}(t)-\int_a^b K(t,s)\bar{x}(s)\,ds-f(t).$$

В силу ограниченности оператора уравнения (1.1) из $W_2^l(a, b)$ в $W_2^{l-1}(a, b)$ при $A \neq 0$ и ограниченности в W_2^l при $A \equiv 0$, эти невязки являются элементами по крайней мере пространства $W_2^1(a, b)$ и последовательность φ^m ограничена и слабо сходится к $\bar{\varphi}$. Это обеспечивает поточечную сходимость $\varphi^m(t) \to \bar{\varphi}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$.

Предположим, что в некоторой точке $\theta \in (a, b)$ для $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ компонента невязки $\bar{\varphi}_i$ достигает значения $2\varepsilon > 0$. Тогда при достаточно больших m будет $\varphi_i^m(\theta) \geqslant \varepsilon$ и, в силу леммы и условия $\tau_m \to 0$, последовательность невязок φ_i^m будет неограниченной. Это противоречие приводит к тождеству $\bar{\varphi}_i(t) = 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, откуда следует, что $\bar{x}$ — решение (1.1).

Из неравенства $\|\bar{x}\| \leqslant \|x^0\|$ и обратного неравенства следует, что $\|\bar{x}\| = \|x^0\|$, и так как нормальное решение x^0 единственно, то $\bar{x} = x^0$.

Известно, что норма слабо полунепрерывна снизу, т. е.

$$\|x^0\| = \liminf_{m\to\infty} \|x_m\| \leqslant \limsup_{m\to\infty} \|x_m\| \leqslant \|x^0\|,$$

поэтому $\|x_m\| \to \|x^0\|$. Для гильбертова пространства из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость, т. е. равенство (2.3).

Теорема 2. *Если промежуток* (a, b) *уравнения* (1.1) *не ограничен, разбиения* (1.4) *локализованы на конечном отрезке* $[\alpha, \beta]$ $C(a, b)$ *и* $\tau_m \to 0$, *то последовательность* x_m *сходится в метрике* $W_2^l(a, b)$ *к функции* $\bar{x}$ — *нормальному решению уравнения*

$$A(t)\frac{dx(t)}{dt} + B(t)x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds = f(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{2.4}$$

Доказательство этой теоремы в основном повторяет доказательство теоремы 1 со следующими отличиями. Из слабой сходимости $x_m \to \bar{x}$ в $W_2^l(a, b)$ с неограниченным промежутком следует поточечная сходимость на любой ограниченной части (a, b), и равенство нулю невязки $\bar{x}$ будет иметь место лишь на $[\alpha, \beta]$. Следовательно, слабый предел $\bar{x}$ удовлетворяет лишь уравнению (2.4). При этом $\|x_m\| \leqslant \bar{x}$, откуда, как и в теореме 1, следует сходимость $x_m \to \bar{x}$ в норме $W_2^l(a, b)$. Так как любое решение (2.4) удовлетворяет системам (1.5) и, следовательно, имеет норму не меньше $\|x_m\|$, то $\bar{x}$, как предел последовательности x_m, является решением (2.4) минимальной нормы.

Итак, переход к задаче (1.6) является приближенным методом решения уравнения (1.1). Напомним, что из сходимости в $W_2^l(a, b)$ следует равномерная сходимость производных $x^{(k)}(s)$, $0 \leqslant k \leqslant l-1$, на любой конечной части (a, b).

§ 3. Преобразование интегральных и точечных функционалов

Остановимся на проблеме преобразования интегральных и точечных функционалов к каноническому виду (скалярному произведению), рассмотрев и значения в точках производных от $x(s)$ порядков до $l-1$. Такие функционалы также непрерывны в силу известных вложений

$$W_2^l \to C^k, \qquad 0 \leqslant k \leqslant l-1.$$

Итак, рассмотрим линейные функционалы

$$\int_a^b k(s)x(s)\,ds, \qquad \left.\frac{d^r x(s)}{ds^r}\right|, \qquad 0 \leqslant r \leqslant l-1,$$

где k — суммируемая функция. Начнем с интегрального функционала. По теореме Рисса, функции k соответствует единственная функция $h \in W_2^l$ такая, что для любого $x \in W_2^l$

$$
\left.\begin{aligned}
&(3.1\text{а}) \qquad \int_a^b [h(s)x(s)+h^{(l)}(s)x^{(l)}(s)]\,ds \\
&(3.1\text{б}) \qquad \sum_{r=0}^{l-1} h^{(r)}(a)x^{(r)}(a)+\int_a^b h^{(l)}x^{(l)}\,ds
\end{aligned}\right\} = \int_a^b k(s)x(s)\,ds,
$$

соответственно нормам (1.3а) и (1.3б).

Используя интегрирование по частям, получаем для искомой функции $h(s)$ в случае (3.1а) краевую задачу

$$(3.2\text{а}) \qquad (-1)^l h^{(2l)}(t)+h(t)=k(t), \qquad h^{(r)}(a)=h^{(r)}(b)=0, \qquad l\leqslant r\leqslant 2l-1,$$

и в случае (3.1б) — задачу

$$(3.2\text{б}) \qquad (-1)^l h^{(2l)}(t)=k(t), \qquad h^{(r)}(a)-(-1)^{l-1-r}h^{(2l-1-r)}(a)=$$
$$=k^{(2l-1-r)}(b)=0, \qquad 0\leqslant r\leqslant l-1.$$

Эти задачи имеют смысл в случае существования и суммируемости функции $h^{(2l)}$, что не является необходимым свойством функций W_2^l. Обоснование этого свойства, а следовательно, и перехода от вариационных равенств (тождеств относительно x) к задачам (3.2) дает

Теорема 3. *Решение каждой из краевых задач* (3.2) *существует при любой суммируемой функции* $k(t)$, *единственно и представляется через соответствующую функцию Грина* $G(s, t)$:

$$(3.3) \qquad h(s)=\int_a^b G(s,t)k(t)\,dt.$$

Доказательство теоремы заключается в доказательстве того, что нуль не является собственным значением задач (3.2), т. е. соответствующие однородные задачи не имеют нетривиальных решений.

В случае (3.1а) общее решение уравнения

$$(-1)^l h^{(2l)}(s)+h(s)=0$$

имеет вид

$$h(s)=\sum_{r=1}^{2l} c_r \exp(\lambda_r s),$$

где λ_r — корни степени $2l$ из числа $(-1)^{l+1}$ — различные ненулевые комплексные числа. Подставляя это выражение в краевые условия из (3.2а), где можно считать $a=0$, $b=1$, получаем для коэффициентов c_r систему уравнений

$$\sum_{r=1}^{2l} \lambda_r^{k+l} c_r=0, \qquad \sum_{r=1}^{2l} \lambda_r^{k+l} \exp(\lambda_r) c_r=0, \qquad 0\leqslant k\leqslant l-1.$$

Рассмотрим линейную комбинацию произвольного столбца матрицы этой системы с коэффициентами α_k, β_k:

$$\sum_{k=0}^{l-1}[\alpha_k+\beta_k\exp(\lambda_r)]\lambda_r^{k+l}=0.$$

В силу линейной независимости системы $\{\lambda^l,\ldots,\lambda^{2l-1}\}$, необходимо $\alpha_k=-\beta_k\exp(\lambda_r)$. Так как это равенство выполняется для всех $k=0, 1,\ldots, l-1$ при различных λ_r, то необходимо $\alpha_k=\beta_k=0$. Таким образом, система уравнений, определяющая коэффициенты общего решения, не вырождена и может иметь только тривиальное решение. Этим теорема доказана для случая (3.1а).

В случае (3.1б) общее решение соответствующего однородного уравнения есть

$$h(s)=\sum_{r=0}^{2l-1}c_rs^r$$

и коэффициенты, удовлетворяющие краевым условиям, описываются уравнениями

$$k!c_k-(-1)^{l-1-k}(2l-k-1)!c_{2l-k-1}=0,$$

$$\sum_{r=l+k}^{2l-1}\frac{r!}{(r-l-k)!}c_r=0, \qquad 0\leqslant k\leqslant l-1.$$

Легко видеть, что матрица этой системы верхняя треугольная и невырожденная, поэтому система имеет лишь тривиальное решение. Теорема доказана.

Следствие. Если функция $k\in C^r(a, b)$, $r\geqslant -1$ (C^{-1} — класс суммируемых функций), то ее образ (3.3) принадлежит $C^{2l+r}(a, b)$.

Это — очевидное следствие дифференциальных уравнений из (3.2), которым удовлетворяют образы h интегральных функционалов (3.1) согласно теореме 3.

Таким образом, проблема канонического преобразования интегральных функционалов может быть решена построением функции Грина $G(s, t)$ соответствующей краевой задачи (3.2). Такая функция для $a<t<b$ определяется в случае (3.1а) краевой задачей

$$\text{(3.4а)}\quad \begin{gathered}(-1)^l\frac{\partial^{2l}G(s,t)}{\partial s^{2l}}+G(s,t)=0, \qquad s\neq t,\\ \frac{\partial^rG(a,t)}{\partial s^r}=\frac{\partial^rG(b,t)}{\partial s^r}=0, \qquad l\leqslant r\leqslant 2l-1,\end{gathered}$$

в случае (3.1б) — задачей

$$\text{(3.4б)}\quad \begin{gathered}\frac{\partial^{2l}G(s,t)}{\partial s^{2l}}=0,\\ \frac{\partial^rG(a,t)}{\partial s^r}-(-1)^{l-1-r}\frac{\partial^{2l-1-r}G(a,t)}{\partial s^{2l-1-r}}=\frac{\partial^{2l-1-r}G(b,t)}{\partial s^{2l-1-r}}=0,\\ 0\leqslant r\leqslant l-1,\end{gathered}$$

причем в обоих случаях выполняется условие скачка

$$\frac{\partial^{2l-1}G(t-0,t)}{\partial s^{2l-1}}-\frac{\partial^{2l-1}G(t+0,t)}{\partial s^{2l-1}}=(-1)^{l} \tag{3.5}$$

и производные меньших порядков по первому аргументу непрерывны.

Согласно теореме 3, каждая из задач (3.4), (3.5) разрешима единственным образом. В силу самосопряженности задач функции Грина симметричны.

Нахождение функции Грина также решает проблему преобразования точечных функционалов, так как справедливо тождество

$$x(t)=\int_a^b\left[G(s,t)x(s)+\frac{\partial^l G(s,t)}{\partial s^l}x^{(l)}(s)\right]ds \tag{3.6а}$$

или

$$x(t)=\sum_{k=0}^{l-1}x^{(k)}(a)\frac{\partial^k G(a,t)}{\partial s^k}+\int_a^b\frac{\partial^l G(s,t)}{\partial s^l}x^{(l)}(s)\,ds \tag{3.6б}$$

для любых $x\in W_2^2(a, b)$, $a\leqslant t\leqslant b$. Правые части здесь являются скалярными произведениями функций $G(s, t)$, рассматриваемых при любом $t\in\in[a, b]$ как элементы $W_2^l(a, b)$ на x. Это тождество нетрудно проверить, интегрируя правую часть по частям с использованием равенств (3.4), (3.5). Образы функционалов — значений в точках производных порядка до $l-1$ — получаются дифференцированием тождества (3.6) по t.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\langle x, y\rangle$ для скалярного произведения элементов x, $y\in W_2^l$, соответствующего нормам (1.3). Точечные функционалы при этом будут иметь вид

$$\frac{d^r x(t)}{dt^r}=\left\langle\frac{\partial^r G(\cdot,t)}{\partial t^r},x\right\rangle,\qquad 0\leqslant r\leqslant 1. \tag{3.7}$$

Преобразование линейных функционалов к каноническому виду приводит условия задачи (1.6) к форме скалярных произведений. Это упрощает ее дальнейший анализ и алгоритмизацию. При этом оказывается полезной

Лемма 2. *Если $G(s, t)$ — функция Грина, определяющая каноническое преобразование линейных функционалов в пространстве W_2^l, $a\leqslant t_i$, $t_j\leqslant b$, то*

$$\langle G(\cdot, t_i), G(\cdot, t_j)\rangle=G(t_i, t_j), \tag{3.8а}$$

$$\langle G(\cdot, t_i), G_t'(\cdot, t_j)\rangle=G_t'(t_i, t_j), \tag{3.8б}$$

$$\langle G_t'(\cdot, t_i), G_t'(\cdot, t_j)\rangle=G_{st}''(t_i, t_j). \tag{3.8в}$$

Доказательство. Равенства (3.8а, б), в силу симметричности $G(s, t)$ и скалярного произведения, непосредственно следуют из (3.7) при $r=0$, $t=t_i$, $x(s)=G(s, t_j)$ и $x'(s)=G_t'(s, t_j)$.

Далее, используя (3.8б), получаем

$$\langle G_t'(\cdot,t_i),G_t'(\cdot,t_j)\rangle=\frac{d}{dt}\langle G(\cdot,t),G_t'(\cdot,t_j)\rangle\big|_{t=t_i}=$$

$$=\frac{d}{dt}G_t'(t,t_j)\big|_{t=t_i}=G_{ts}''(t_i,t_j),$$

т. е. равенство (3.8в).

Решение задач (3.4), (3.5) о функциях Грина для случаев $l=1$, $l=2$ и нормы (1.3а) приведено в [8]. Эта норма обычно используется для построения стабилизирующих функционалов в теории и методах решения некорректных задач. Норма (1.3б) эквивалентна ей, но приводит к более простым функциям Грина. Нетрудно получить эти функции для $l=1$:

$$G(s, t)=1+s, \qquad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,$$

и для $l=2$:

$$G(s, t)=1+(s+s^2/2)t-s^3/6, \qquad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1.$$

Норма (1.3б) имеет смысл лишь для конечных промежутков, в то время как (1.3а) сохраняет значение для пространств $W_2^l[0, \infty)$ и $W_2^l(-\infty, \infty)$. Соответствующие функции Грина нетрудно получить из фундаментальных решений уравнений (3.4а), приведенных для $l=1$ и 2 в [8], и из краевых условий, имеющих на бесконечности предельный смысл.

§ 4. Реализация метода

Метод нормальной сплайн-коллокации реализован для интерполяции функций, начальной и краевой задач дифференциального уравнения второго порядка. Для интерполяции функций поставлено три задачи о нормальном решении системы

$$(4.1) \qquad x(t_i)=f_i, \qquad 1\leqslant i\leqslant m,$$

где $a=t_1<\ldots\leqslant t_m=b$: в пространстве $W_2^1[a, b]$, в пространстве $W_2^2[a, b]$ и в пространстве $W_2^2[a, b]$ с дополнительными условиями

$$(4.2) \qquad x'(t_1)=f_{m+1}, \quad x'(t_m)=f_{m+2}.$$

Во всех случаях использованы обе нормы (1.3).

В каноническом виде система (4.1), (4.2) представляется как

$$(4.3) \qquad \langle g_i, x\rangle=f_i, \qquad 1\leqslant i\leqslant m+2,$$

где

$$(4.4а) \qquad g_i(s)=G(s, t_i), \qquad 1\leqslant i\leqslant m,$$

$$(4.4б) \qquad g_{m+1}(s)=\frac{\partial G(s,0)}{\partial t}, \qquad g_{m+2}(s)=\frac{\partial G(s,1)}{\partial t}.$$

Функции (4.4), очевидно, линейно независимы. Нормальное решение системы (4.3) представляется в виде

$$(4.5) \qquad x_m(t)=\sum_{i=1}^{m+2} u_i g_i(t),$$

и коэффициенты разложения здесь определяются системой уравнений

$$(4.6) \qquad \sum_{j=1}^{m+2} g_{ij}u_j=f_j, \qquad 1\leqslant j\leqslant m+2,$$

где g_{ij} — коэффициенты симметричной положительно-определенной матрицы Грама соответствующего базиса представления (4.4). По лемме 2,

$$g_{ij}=G(t_i, t_j), \qquad 1\leqslant i, j\leqslant m,$$

$$g_{i,\,m+1}=G_t'(t_i, t_1), \qquad g_{i,\,m+2}=G_t'(t_i, t_m),$$

$$g_{m+1,\,m+1}=G_{st}''(t_1,\ t_1),\qquad g_{m+1,\,m+2}=G_{st}''(t_1,\ t_m),$$

$$g_{m+2,\,m+2}=G_{st}''(t_m,\ t_m).$$

Из представления (4.5) и свойств функций Грина следует, что интерполянта x_m есть сплайн класса C^{2l-2} дефекта 1. В случае нормы (1.3б) — это классические полиномиальные сплайны, при $l=1$ — линейные и при $l=2$ — кубические.

Развиваемый здесь подход в случае нормы (1.3б) дает новое представление полиномиальных сплайнов в виде (4.5). Это представление для $l\geqslant 2$ обладает минимальными требованиями к количеству информации, аналогично B-сплайнам [10]: необходимо хранить два массива — точки разбиения и коэффициенты разложения по базису, определяемому соответствующей функцией Грина.

Свойства аппроксимации полиномиальных сплайнов для $l=1$ и 2, полученные, например, в [10], переносятся на сплайны (4.5), соответствующие норме (1.3б). Сплайны, порождаемые нормой (1.3а), описываются экспоненциальными и тригонометрическими функциями, и методы получения оценок аппроксимации для полиномиальных сплайнов здесь не могут применяться непосредственно. Для сравнения свойств аппроксимации сплайнов обоих типов проведены численные эксперименты на тестовых функциях из [10]. На равномерных сетках с шагами 0.1 и 0.05 погрешности, вычисленные на сетке с шагом 0.01, различаются между собой не более чем на 8%. Аномалия отмечена при интерполяции функции e^t. Здесь в первой задаче с нормой (1.3а) достигнута точность порядка 10^{-6} на сетке шага 0.2. Это объясняется тем, что интерполируемая функция принадлежит подпространству базисных гиперболических функций.

В заключение продемонстрируем предлагаемый метод на краевой задаче для уравнения

$$\ddot{x}(t)+q(t)\dot{x}(t)+r(t)x(t)=f(t) \tag{4.7}$$

на промежутке [0, 1] с условиями

$$c_{11}x(0)+c_{12}\dot{x}(0)=d_1,\qquad c_{21}x(1)+c_{22}\dot{x}(1)=d_2.$$

Метод коллокации допускает здесь много вариантов, основанных на преобразовании уравнения (4.7) к системам дифференциальных, интегро-дифференциальных или интегральных уравнений. Остановимся на двух вариантах. В первом перейдем к системе дифференциальных уравнений относительно переменных $x_1=x$ и $x_2=\dot{x}_1$:

$$\dot{x}_2(t)+q(t)x_2(t)+r(t)x_1(t)=f(t),\quad \dot{x}_1(t)-x_2(t)=0;$$

во втором проинтегрируем (4.7) от 0 до t, перейдя к интегродифференциальному уравнению

$$[\dot{x}(s)+q(s)x(s)]_0^t+\int_0^t[r(s)-\dot{q}(s)]x(s)\,ds=\int_0^t f(s)\,ds. \tag{4.8}$$

Систему коллокаций первого варианта запишем в виде

(4.9а) $\quad r_ix_1(t_i)+\dot{x}_2(t_i)+q_ix_2(t_i)=f_i,\qquad 1\leqslant i\leqslant m,$

(4.9б) $\quad c_{11}x_1(t_1)+c_{12}x_2(t_1)=d_1,\qquad \dot{x}_1(t_i)-x_2(t_i)=0,$

(4.9в) $\quad c_{21}x_1(t_m)+c_{22}x_2(t_m)=d_2.$

Здесь и в дальнейшем $q_i=q(t_i)$, $r_i=r(t_i)$, $f_i=f(t_i)$. $f_{m+1}=d_1$, $f_{m+2}=d_2$.

Таблица 1

k от	k до	$h_{1k}(s)$	$h_{2k}(s)$
1	m	$r_k G(s, t_k)$	$G_t'(s, t_k)+q_k G(s, t_k)$
$m+1$		$c_{11}G(s, t_1)$	$c_{12}G(s, t_1)$
$m+2$	$2m+1$	$G_t'(s, t_{k-m-1})$	$-G(s, t_{k-m-1})$
$2m+2$		$c_{21}G(s, t_m)$	$c_{22}G(s, t_m)$

Каноническое представление функционалов системы (4.9) см. в табл. 1. Элементы матрицы Грама этой векторной системы определяются формулой $g_{ij}=\langle h_{1i}, h_{1j}\rangle+\langle h_{2i}, h_{2j}\rangle$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2m+2$.

Соответствующие выражения легко получить, пользуясь леммой 2. Нормальное решение системы (4.9)

$$x_\nu(s)=\sum_{k=1}^{2m+2} u_k h_{\nu k}(s), \qquad \nu=1, 2,$$

и коэффициенты u_k определяются системой вида (4.6) порядка $2m+2$.

Систему коллокаций второго варианта выберем в форме

$$(4.10а)\qquad \dot{x}(t_{i+1})-\dot{x}(t_i)+q_{i+1}x(t_{i+1})-q_i x(t_i)+\int_{t_i}^{t_{i+1}} k(s)x(s)\,ds=\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s)\,ds,$$

$$1\leqslant i\leqslant m-1,$$

$$(4.10б)\qquad c_{11}x(t_1)+c_{12}\dot{x}(t_1)=d_1, \qquad c_{21}x(t_m)+c_{22}\dot{x}(t_m)=d_2.$$

Здесь введено обозначение $k(s)=r(s)-\dot{q}(s)$.

Канонические образы функционалов системы (4.10):

$$(4.11а)\qquad h_i(s)=G_t'(s, t_{i+1})-G_t'(s, t_i)+q_{i+1}G(s, t_{i+1})-$$

$$-q_i G(s, t_i)+\hat{h}_i(s), \qquad 1\leqslant i\leqslant m-1,$$

$$(4.11б)\qquad h_{m+1}(s)=c_{11}G(s, t_1)+c_{12}G_t'(s, t_1),$$

$$(4.11в)\qquad h_{m+2}(s)=c_{21}G(s, t_m)+c_{22}G_t'(s, t_m).$$

Здесь

$$(4.12)\qquad \hat{h}_i(s)=\int_{t_i}^{t_{i+1}} G(s, \tau)k(\tau)\,d\tau.$$

Отметим, что базисная система первого варианта (табл. 1) и ее матрица Грама зависят лишь от дискретных значений коэффициентов исходного уравнения (4.7). Второй вариант, основанный на переходе к интегро-дифференциальному уравнению (4.8), требует вычисления интегралов (4.12) для базисной системы (4.11) и соответствующих скалярных произведений $\langle \hat{h}_i, \hat{h}_j\rangle$.

Приведем результаты решения модельного примера из [1]:

$$\varepsilon\ddot{x}(t)-\dot{x}(t)=-e^t, \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \qquad x(0)=0, \quad \dot{x}(1)=z,$$

где z соответствует условию $x(1)=0$. Точное решение такой задачи

Таблица 2

ε	DFEQ2	IDEQX	P2	PZ
0.2	0.89E-3	0.30E-3	0.0038	0.027
0.02	0.072	0.03	0.37	0.029
0.002	3.54	2.0	71.0	0.035

$$x(t)=\frac{1}{1-\varepsilon}\left(e^t-\frac{e-1}{e^{(1-t)/\varepsilon}-e^{-t/\varepsilon}}-\frac{1-e^{(\varepsilon-1)/\varepsilon}}{1-e^{-1/\varepsilon}}\right)$$

при малых $\varepsilon>0$ является «жестким». На большей части промежутка $[0, 1]$ оно мало отличается от решения вырожденной задачи e^t-1 и в конце резко опускается к нулю, т. е. имеет «пограничный слой» при $t=1$.

В табл. 2 приведены погрешности результатов решения примера на равномерной сетке с шагом 0.02 ($m=51$) программами DFEQ2 (нормальное решение системы (4.9)) и IDEQX (нормальное решение системы (4.10)) с нормой (1.3б). Компоненты x_1, x_2 первого варианта и переменная x второго — элементы пространства $W_2^2[0, 1]$. Погрешность вычислялась на удвоенной сетке. В столбцах P2 и PZ приведены соответствующие результаты из [11] решения примера разностным методом. В случае P2 производная в краевом условии аппроксимировалась со вторым порядком (с использованием уравнения), а в случае PZ использовалась специальная аппроксимация, точная на погранслойной функции.

Первый вариант (DFEQ2) реализован также для нормы (1.3а). Соответствующие погрешности практически не отличаются от приведенных в табл. 2. Это позволяет сделать вывод о нецелесообразности использования нормы (1.3а), как более сложной в реализации, для задач на ограниченных промежутках.

Остановимся на проблеме пограничного слоя. Один из путей ее решения — построение неравномерных сеток, сгущающихся в местах резких изменений решения. Методы сплайн-коллокации позволяют строить такие сетки поэтапно, решая вначале задачу на редкой сетке и добавляя на следующих этапах узлы в зависимости от невязки уравнений, вычисленной в исходных и дополнительных промежуточных узлах первоначальной сетки.

В основу одной из стратегий сгущения сеток можно заложить следующую схему. Пусть N — число точек, добавляемых к исходной сетке

$$\varphi_m(t)=\dot{x}_m(t)+q(t)x_m(t)+r(t)x_m(t)-f(t),$$

$$\delta_{mi}=|\varphi_m(t_i)|+|\varphi_m(t_{i+1})|+\left|\varphi_m\left(\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)\right|,$$

$$\Delta_m=\sum_{i=1}^{m-1}\delta_{mi},\qquad p_i=\delta_{mi}/\Delta_m.$$

В качестве исходной сетки $\{t_i\}$ можно взять равномерную и на следующем этапе добавлять на каждом интервале (t_i, t_{i+1}) по $n_i=Np_i$ равномерно распределенных дополнительных узлов.

Описанная схема идеализирована, и при реализации на ЭВМ следует обеспечить непустоту массива n_i (отличие от нуля), в силу усечения вещественных результатов умножения Np_i до целого числа n_i, и равенство $N=n_1+\ldots+n_{m-1}$.

Таблица 3

m	$\varepsilon=0.02$		$\varepsilon=0.002$	
	$\alpha=0.1$	$\alpha=1$	$\alpha=0.1$	$\alpha=1$
4	3.90	3.90	44.8	44.8
10	0.51	0.34	10.8	8.5
16	0.49E-1	0.12E-1	2.8	1.1
22	0.55E-2	0.30E-2	0.54	0.55E-1
28	0.23E-2	0.28E-2	0.75E-1	0.26E-2

После добавления узлов получается «кусочно-постоянная» сетка $\{\bar{t}_i\}$, которую можно «сгладить», минимизируя функционал

$$\sum_{i=1}^{m-1}(t_{i+1}-t_i)^2+\alpha\sum_{i=2}^{m-1}(t_i-\bar{t}_i)^2$$

по $t_2, \dots, t_{m-1}$ при $t_1=0$, $t_m=1$. Параметр $\alpha>0$ препятствует переходу к равномерной сетке.

Стратегия сгущения определяется двумя параметрами: начальным числом узлов m и числом добавляемых на каждом этапе узлов N. Очевидно, лучшие сетки формируются при меньших значениях этих параметров, однако это требует роста числа этапов. Здесь возникает проблема оптимизации стратегии в условиях заданного ограничения на число операций.

В табл. 3 приведены погрешности результатов решения приведенного примера на сгущающихся сетках программой IDEQX. Здесь $m=4$, $N=6$, исходная сетка равномерная. В случае $\varepsilon=0.002$, $\alpha=1.0$ последняя сетка имеет максмальный (первый) шаг 0.171 и минимальный (последний) 0.55E-3. Погрешность специальной аппроксимации [11] на сгущающейся сетке из 50 шагов равна 0.24E-1.

Литература

1. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
2. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
3. *Купрадзе В. Д., Алексидзе М. А.* Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4. № 4. С. 683–715.
4. *Atteia M.* Spline-fonctions généralisées // C. r. Acad. sci. 1965. T. 261. № 11. P. 2149–2152.
5. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.
6. *Морозов В. А.* Теория сплайнов и задача устойчивого вычисления значений неограниченного оператора // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 3. С. 545–558.
7. *Василенко В. А.* Сплайн-функции: Теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983.
8. *Горбунов В. К.* Методы редукции неустойчивых вычислительных задач. Фрунзе: Илим, 1984.
9. *Горбунов В. К.* Редукция линейных интегральных уравнений с равномерной погрешностью в правой части // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 2. С. 210–223.
10. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
11. *Задорин А. И.* О численном решении третьей краевой задачи для уравнения с малым параметром // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 7. С. 1008–1015.

Поступила в редакцию 9.XII.1986
Переработанный вариант 22.IV.1988