Prise de notes : Evaluation de performance

Généralités sur le cours

- 8 CMs ;
- 3 TDs ;
- 1 prépa de TP ;
- 7/8 TPs ;
- Tous documents autorisés pour l'examen ;
- Examen plus orienté utilisation d'outils qu'orienté maths.

Table des matières

Définitions

Mot	***Définition***
Processus stochastique	S
CMTD	Chaine de Markov à Temps Discret
fortement connexe	il existe un chemin d'un point A à un point B
ergodique	Relatif à un processus stochastique dont les statistiques peuvent être approchées par la connaissance d'une seule de ses réalisations
PASTA	Poisson Arrivals See Time Averages

1. Introduction (18/02/25)

Réseaux de communication est ensemble composants dont on veut connaître les performances indiv et globale. Obj atteindre QoS attendu.

Pour globale juste généralisation, on prend les performances indiv et on multiplie ? V/F souvent F. Il faut que les compo soit indep et c'est faux. => compliqué

Echelle de tps ? pour bout en bout

Voir quoi retenir perf indiv et voir que qu'on peut se retrouver pour globale

- Qualitatif : protocole correct et correctement implémenter. Outils mathématiques automates… (parcours symbiot)
- Quantitatif : delai moy, taux de perte, gigue… Tout ce qui est quantifiable. outils math : probas, stats, algèbre

-> 2 mondes séparer. On va voir le côté quantitatif.

Chaque fam réseaux a ses pbl :
- rezo loco : méthode d'accès
- rezo longue distance : perte de paquet, controle flux/erreur, retransmission
- rezo telecom : ???

1.1. rezo commutation de circuit

Les pbls de ces rezo c'est les pannes (e.g. coup de pelleteuse dans les câbles) => réseaux maillé pour solution secours si panne

Proba quel nombre appels refusé pour eval perf.

exemple: 2 commutateurs reliés par un lien. Déterminer proba qu'1 appel refusé car pas de place pour un lien. Etudier avec un autre lien.

1.2. rezo commutation de paquet

circuit virtuel et datagramme

rezo semaphore : datagramme en mode commutation de message -> pas de séquencement, fonctionne pour messages cours

multiplexage statistique

esperer debit fil d'attente baisse pour vider file d'attente

pbl : état fil d'attente

-> attente variable dependant de l'état d'engorgement quand paquet entre file d'attente => perte

epee de damocles qui est qu'à des moments c'est engorgé

necessiter implementer mecanisme de reprise (si on veut) (circuit virtuel). pour datatgrame on envoie les pbl aux extrémitées.

Problème théorie des files d'attentes.

type longueur paquets:
- données : 1500 o
- signalisation : ack…

pbl pour sens communication. Sens montant bcp ack donc pourrir buffer avec bc de petits paquets

1.3. Evolution des réseaux

mode circuit remplacé par mode paquet

QoS différentiée : plus facile reseaux acces qu'internet car plus petit qu'internet, la topologie est connue

1.4. couche MAC

stations homologue/homogène : pas de connections comment avoir commun ? :
- polling (70′s)
- méthode d'accès de type décentralisées sans collision (e.g. token ring, token bus, FDDI (jeton temporisé))
- méthode d'accès avec accès aléatoire (e.g. ALOHA (avec ou sans ACK) / CSMA)

TDMA / FDMA : débit constant -> utile pour téléphonie

Un reseau d'accès a une topologie arborescente.

ADSL : que des équipements actifs de réseaux

pour user entre dans le rezo : slot temporel laissé libre (tirage aléatoire temporel pour savoir qui rejoint en 1er puis en 2e…)

1.5. modélisation

(partie la + importante)

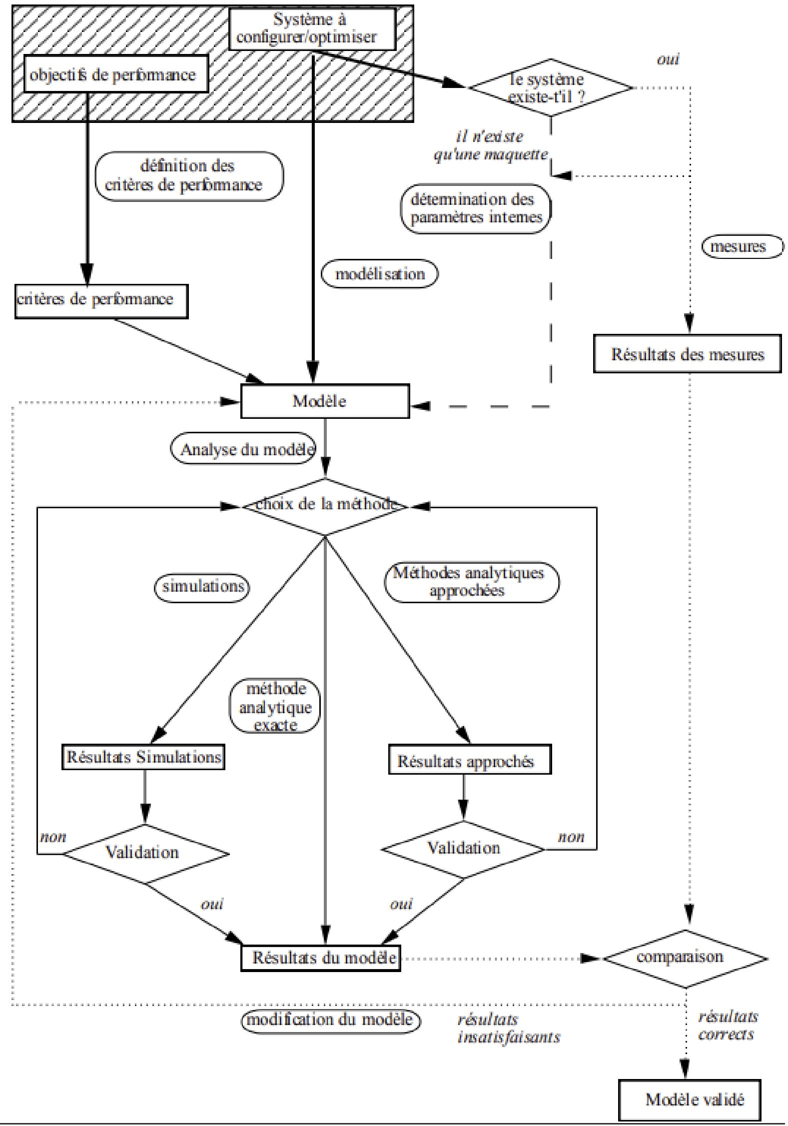
Le but est d'essayer de retenir ce qui est fondamental pour modéliser => simplifier le rézo

nécessite le plus d'expertise dans le domaine des rezo

pour un modèle pour un rezo il peut y a voir plusieurs modèles : on décide en fonction des critères de perf

plusieurs étude de perf en fonction des critères

1.6. Méthode générale



2. Analyse opérationnelle

2.1. Chaîne de Markov à temps discret

Définition 1: Processus stochastique:
$(X_n, n \in \mathbb{N})$ à temps discret à espace d'états discret sera dit chaîne de Markov à temps discret si

$$\forall (i_1, .., i_n, s) \in E^{n+1}, \mathbb{P}(X_{n+1} = s \mid X_n = x_n, .., X_1 = x_1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = s \mid X_n = n)$$

Définition 2: Une chaîne de Markov $(X_n, n \in \mathbb{N})$ sera dite **homogène** si $\forall (i,j) \in E^2$ $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2$

$$\mathbb{P}(X_{n+k+1} = i \mid X_{n+k} = j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i \mid X_n = j) = p_{i,j}$$

$p_{i,j}$ = probabilité de transition de i à j

$\mathbb{P}(p_{\mathrm{ij}})$ matrice de transition. C'est une matrice stochastique .

Les valeurs propres d'une matrice stochastique sont dans le disque unité, et elles admettent 1 comme valeur propre. (théorème de Perron-Frobenius *je suis déjà duper*)

2.2. Représentation des chaînes de Markov à temps discret (homogène)

Deux choix possibles :
- par sa matrice de transition P
- par un graphe orienté valué *le prof a vraiment mis « valué »*
  1. état $\leftrightarrow$ transition
  2. transition $\leftrightarrow$ flèches
  3. probabilités de transition $\leftrightarrow$ poids

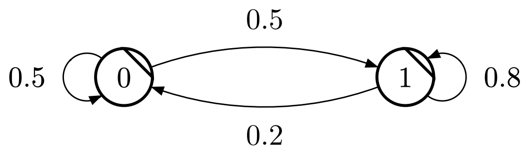


Fig. 1. – graphe de démonstration

$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$

2.3. Evolution d'une CMTD (Chaine de Markov a Temps Discret)

- $\Pi_n^k = \mathbb{P}(X_n = k)$
- $\Pi^{(k)} = (\Pi_1^k, .., \Pi_n^k)$ distribution àl'instant k
- $\Pi_n^{k+1} = \sum_{j \in E} \Pi_j^k \cdot \mathbb{P}(X_{k+1} = n \mid X_k = j)$
- $\boldsymbol{\Pi^{k+1} = \Pi^k \cdot P}$
- Π^0 distribution à l'instant 0.
- $\Pi^k = \Pi^0 P^k$

2.3.1. Existence en régime permanent

$\exists ? \lim_{k \to \infty} \Pi_n^k = \Pi_n$

(on sait pas si elle existe)

$\Pi = (\Pi_1, .., \Pi_n, ..)$ distribution en régime permanent

S'il y a convergence, alors $\boldsymbol{\Pi = \Pi \cdot \mathbb{P}}$ et $\Pi(\mathbb{I} - \mathbb{P}) = \emptyset$ ($\mathbb{I}$ est un neutre au sens de la multiplication (genre 1 mais pour les ensembles))

$\|\Pi\|_1 = 1 = |\Pi|$

Application au graphe de démonstrtation : Fig 1

$$\begin{aligned} \Pi_0 = 0.5\Pi_0 + 0.2\Pi_1 &\Rightarrow 0.5\Pi_0 = 0.2\Pi_1 \\ &\Rightarrow \Pi_0 = 0.4\Pi_1 (1) \end{aligned}$$

$\Pi_1 = 0.5\Pi_0 + 0.8\Pi_1$

$\Pi_0 + \Pi_1 = 1 \Rightarrow 1.4\Pi_1 = 1$ D'après (1)

$\Rightarrow \Pi_0 = \frac{2}{7}$ et $P_1 = \frac{5}{7}$

2.3.2. Classification sur les (états des) CMTD

Irréductibilité : Une CMTD sera irréductible si le graphe associé est **fortement connexe**.

$M = m_{\text{ij}}$ $\quad\quad m_{\text{ij}} = \begin{cases} 1 \text{ si } p_{\text{ij}}>0 \\ 0 \text{ si } p_{\text{ij}}=0 \end{cases}$

M^2

On utilise des algorithmes de fermeture transitive mais

- complexité élevée
- ne fonctionne que pour des graphes comportant un nombre fini d'états Dans la pratique, on saura par construction n le graphe est fortement connexe.

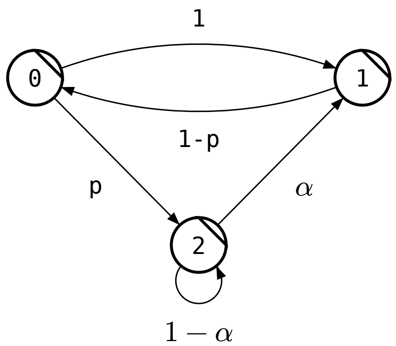


Fig. 2. – Graphe connexe sous conditions

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$ $\quad\quad 0 \le p \le 1$

$0 \le \alpha \le 1$

Pour que le graphe 2 soit fortement connexe ici il faut deux conditions :

1. $p > 0$
2. $\alpha > 0$

$p > 0$ et $\alpha > 0$, $\exists$ un chemin entre : 2 et 1,2 et 0, 2 et 2 et de même pour les trois états

2.3.3. Périodicité état état :

Pour un état j d'un CMTD :

- $k_j =$ pgcd{longueurs des cycles relatifs à ij }
- $k_j = 1$, j est dit apériodique
- $k_j > 1$, j est dit périodique de période k_j

Si tous les états sont a, j est dit périodique de pépériodiques, la chaîne est apériodique. Si tout les états sont periodiques de même periode, elle est dite periodique de période k.

Pour notre chaîne n°2 Si $\alpha < 1$ on a un cycle 2-2 de longueur 1 $\Rightarrow$ état « 2 » apériodique

Si $\alpha = 1$ le cycle est alors: $2 - 1 - 0 - 2$ il est de longueur 3 alors on a le PGCD de 5 et $3 = 1$

- $\Rightarrow$ état « 2 » apériodique

Si $p < 1$ cycle: $2 - 1 - 0 - 1 - 0 - 2$ cycle de longueur 5.

- $\Rightarrow$ état « 2 » apériodique.

Si p = 1 les cycles sont de la forme 2-1-0-2 || 2-1-0-2 de longueur 3 maximum

- ⇒ état « 2 » périodique de période 3

2.3.4. États récurrent, états transitoires :

On notre pour un état f d'un CMTD

- $f_1^k = \mathbb{P}$ (le 1er retour en 1 se fait en k pas de temps)
- $f^k = \mathbb{P}(X_{n+k} = j, X_{n+k-1} \neq j, X_{n+k+1} \neq j \mid X_n = j)$
- $f_j = \sum_{k=1}^{+\infty} f_j^{(k)}$
- f_j la probabilité de revenir en j.
- $f_j < 1 \Rightarrow$ j est dit transitive
- $f_j = 1 \Rightarrow$ j est récurrent

Pour un état récurrent, on note M_j le temps moyen du 1er retour en j.

$M_j = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot f_j^k$

- Si $M_j < +\infty$ j est dit récurrent non nul.
- Si $M_j \to (+\infty)$, j est dit récurrent nul

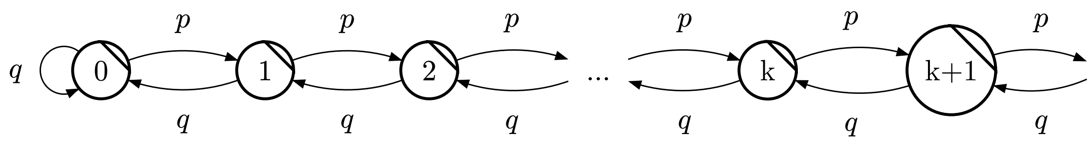


Fig. 3. – Graphe 3

$p + q = 1 \qquad 0 \leq p \leq 1$

Pour que le graphe soit fortement connexe, il faut et il suffit

$$0 < p < 1$$

- Si $p > q \Leftrightarrow p > \frac{1}{2} \Rightarrow$ les états sont transitoires.
- Si $p = q = \frac{1}{2} :\Rightarrow$ les états sont récurrents nuls
- si $p < \frac{1}{2} \Rightarrow$ les états sont récurrents non nuls.

Graph 4

- $f_1^{(1)} = 0$
- $f_1^{(2)} = (1 - p)$
- $f_1^{(3)} = p \cdot \alpha$
- $f_1^{(k+3)} = p \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha)^k$
- $f_1 = (1 - p) + p \cdot \alpha \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - \alpha)^k = (1 - p) + p \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ (duh)

$$
\begin{aligned}
M_1 &= 2\cdot(1-p) + \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}(k+3)\cdot p\cdot\alpha\cdot(1-\alpha) \\
&= 2\cdot(1-p) + p\cdot\alpha\cdot\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}(k+3)(1-\alpha)^k \\
&= 2\cdot(1-p) + p\cdot\alpha\cdot\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}(k+3)\cdot\beta^k \\
&= 2\cdot(1-p) + p\cdot\alpha\cdot\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}(k+2+1)\cdot\beta^k \\
&= 2\cdot(1-p) + 2\cdot p + p\cdot\alpha\cdot\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\cdot\beta^k \\
&= 2 + p\cdot\alpha\tfrac{d}{d\beta}\cdot\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}\beta^{k+1} \quad \text{car } (k+1)\cdot\beta^k = \tfrac{d}{d\beta}\beta^{k+1} \text{ puis on permute la somme et la dérivée} \\
&= 2 + p\cdot\alpha\cdot\tfrac{d}{d\beta}\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}\beta^k \\
&= 2 + p\cdot\alpha\cdot\tfrac{1}{(1-p)^2} \\
&= 2 + \tfrac{p}{\alpha^2} = 2 + \tfrac{p}{\alpha} \\
&= 2 + \tfrac{p^\alpha}{\alpha} = \tfrac{2\alpha+p}{\alpha}
\end{aligned}
$$

Proposition 1 : (admise) Les états d'1 CMTD homogène irréductible sont

$$
\begin{cases} \text{— tous transitoire} \\ \text{— tous récurrents nuls} \\ \text{— tous récurrents non nul} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \text{— tous périodiques de même période} \\ \text{— tous apériodique} \end{cases}
$$

Idée de preuve (périodicité)

$$c_{\text{ji}} = |\mathcal{C}_{\text{ji}}|$$

$$c_{\text{ij}} = |\mathcal{C}_{\text{ij}}|$$

Graph5

Soit $\mathcal{C}_i$ un chemin périodique relatif à l'état i (multiple de k).

$\mathcal{C}_{\text{ji}} \parallel \mathcal{C}_{\text{ij}}$ cycle relatif à f(?) plutot j nn ?

$|\mathcal{C}_{\text{ji}} \parallel \mathcal{C}_{\text{ij}}|$ multiple de k_j

$\quad = c_{\text{ji}} + c_{\text{ij}}$

$\mathcal{C}_{\text{ji}} \parallel \mathcal{C}_{\text{i}} \parallel \mathcal{C}_{\text{ij}}$ cycle relatif à ij
$c_{\text{ji}} + c_i + c_{\text{ij}}$ multiple de k_j

c_i multiple de k_i

$\Rightarrow k_i$ multiple de k_j
idem k_j multiple de $k_i \Rightarrow k_i = k_j$

Proposition 2 : (admise) (Pour une CMTD)

irréductible qui comporte un nombre fini d'état, les états sont tous récurrents non nuls

Définition 3: Un état d'une CMTD

irréductible qui est récursive non nuls et apériodique est dit ergodique si tous les états sont ergodiques la chaîne est ergodique

Théorème 1 : (admis) Pour une chaîne ergodique $\Pi_j^{(n)} \underset{n \to +\infty}{\to} \Pi_j > 0$

Π solution unique de $\begin{cases} \Pi \cdot P = \Pi \\ |\Pi| = 1 \end{cases}$; $\Pi_j = \frac{1}{M_j}$
indépendant de $\Pi^{(0)}$

$\mathcal{D}$ans tous les cas si la chaine est irréductible et apériodique il y a convergence, mais si les états sont transitoires ou récurents nuls, $\Pi_j^n \underset{n \to +\infty}{\to} 0, \forall j$

Remarque pratique Si une CMTD irréductible et périodique admet une solution unique et positive (strictement) à l'équation donc

$$\Pi \cdot P = \Pi$$

$$|\Pi| = 1 \text{ alors elle sera ergodique}$$

Pb lié à la périodicité

chaine inéductible états récurrents non nuls $M_0 = M_1 = M_2 = M_3$

$\Pi \cdot I = \Pi$ $\qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \Pi_0 = \Pi_1 \\ \Pi_1 = \Pi_2 \\ \Pi_2 = \Pi_3 \end{cases}$ $\qquad \Pi_0 = \Pi_1 = \Pi_2 = \frac{1}{3}$

$\Pi^0 = (1, 0, 0)$ $\qquad \Pi^1 = (0, 1, 0)$

propotion de temps passé dans les états

- 1 étape (1 0 0)
- 2e étape (1/2, 0, 1/2)
- 3e étpe (1/3, 1/3, 1/3)

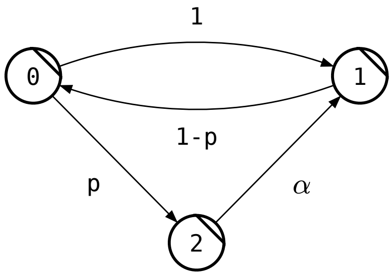
$\Pi^{(0)}$ distribution à l'instant 0.

$\Pi^{(0)} = \left(\Pi^{(0)}\right)_0, \Pi_1^{(0)}, \Pi_2^{(0)}) = \Pi^{(3)} = \Pi^{(3k)}$

$\Pi^1 = (\Pi_1^0, \Pi_2^0, \Pi_0^0) = \Pi^4 = \Pi^{3k+1}$

$\Pi^{(2)} = \left(\Pi^{(0)}\right)_2, \Pi_0^{(0)}, \Pi_1^{(0)}) = \Pi^{(5)} = \Pi^{(3k+2)}$

$\Pi^{((k)}$ n'admet pas de limite quand $k \to +\infty$



$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{cases} \Pi \cdot \mathbb{P} = \Pi \\ |\Pi| = 1 \end{cases}$

$\Pi_0 = \Pi_1$

$\Pi_1 = (1-p) \cdot \Pi_0 + \alpha \cdot \Pi_2$ avec $p \cdot \Pi_0 = \alpha \cdot \Pi_2$

$\Pi_2 = p\Pi_0 + (1-\alpha)\Pi_2$ et $\cancel{p\Pi_0 = \alpha\Pi_2}$

$\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 = 1$

$\Pi_0\left(2 + \frac{p}{\alpha}\right) = 1 \Rightarrow \Pi_0 = \frac{\alpha}{p+2 \cdot \alpha}$

$\Pi_1 = \frac{\alpha}{p+2 \cdot \alpha} = \frac{1}{M_1}$?? qui est M1 ? en bas à droite

$\Pi_2 = \frac{\alpha}{p+2 \cdot \alpha}$

3. Chapitre 2 : Chaîne de Markov à temps continu

Définition 4: Un processus stochastique $(X_t, t \geq 0)$ à temps continu et à espace d'états discret E sera dit chaîne de Markov à temps continu (CMTC)

Si $\forall t_1 < t_2 < .. < t_n < t$, $\forall (i_1, ..., i_n, j) \in E^{n+1}$

$\mathbb{P}\left(X_t = j \mid X_{t_n} = i_n, X_{t_1} = i_1\right) = \mathbb{P}\left(X_t = j \mid X_{t_n} = i_n\right)$

Définition 5: Une CMTC sera dite homogène si :

$\forall (s, t, u) \in \mathbb{R}^+, s < t, \forall i, j \in E^2$

$\mathbb{P}(X_{t+u} = j \mid X_{s+u} = i) = \mathbb{P}(X_j = j \mid X_s = i) = p_{ij}(t-s)$

probabilité de transition de i à j sur une durée (t-s).

$P(t) = \left(p_{\mathrm{ij}}(t)\right)$ matrice de transition sur une durée t. (matrice stocahstique)

3.0.1. Evolution d'un CMTC

On note :

$\Pi_1(t) = \mathbb{P}(X_t = j)$

$\Pi(t) = \left(\Pi_1(t), ..., \Pi_j(t), ...\right)$ distribution à l'instant t.

$\Pi(t) = \Pi(0)P(t)$

$\Pi(t+h) = \Pi(t) \cdot \mathbb{P}(h)$

$\frac{\Pi(t+h) - \Pi(t)}{h} = \Pi(t) \cdot \frac{\mathbb{P}(h) - \mathbb{I}}{h}$

$$\Pi'(t) = \Pi(t) \cdot Q$$

Si les limites existent $Q = \lim_{h\to 0} \frac{P(h)-I}{h}$

Q générateur infinitésimal.

$i \neq j$ et $q_{ij} = \lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h}$

appelé taux de transition (instantanée) de i à j

$q_{\text{ij}} = \lim_{h\to 0} \frac{p_{\text{ij}}-1}{h}$

$q_{\text{ij}} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\sum_{j\neq i} p_{ij}(h)-1}{h}$

$q_{\text{ij}} = -\sum_{i\neq j} \lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h}$

$q_{\text{ij}} = -\sum_{j\neq i} q_{\text{ij}}$

$\sum_{j\in E} q\text{ij} = 0$ => la matrice Q admet $\emptyset$ comme valeur propre

$\Pi_j(t+dt) = \Pi_{j(t)} + {\Pi_j}'(t)dt + o(\text{dt})$

$\Pi_j(t+dt) = \Pi_j(t) + \sum_{i\in\mathbb{E}} q_{ij}\Pi_i(t)dt + o(\text{dt})$

$\Pi_j(t+dt) = \left(1 + q_{\text{jj}} \cdot dt\right) \cdot \Pi_j(t) + \sum_{i\neq j} q_{\text{ij}} \cdot \Pi_i(t) \cdot dt + o(dt)$

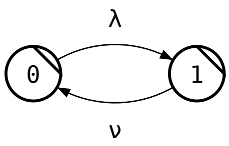
3.1. Représentation d'une chaîne de Markov à temps homogène

- Q sont générateur infinitésimal
- par un graphe orienté et valué

sommets $\longleftrightarrow$ états

flèches $\longleftrightarrow$ transitions instantanées

poids $\longleftrightarrow$ taux de transition > 0



$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$

3.1.1. Régime permanent

existe-t-il $\Pi_i(t) \underset{t\to\infty}{\to} \Pi_j$?

$\Pi = \left(\Pi_1, ..., \Pi_j, ...\right)$

$\Pi'(t) = \Pi(t)Q$

- $t \to \infty$

$0 < \Pi \cdot Q$

$(|\Pi| = 1)$

$0 = -\lambda\Pi_0 + \mu\Pi_1$ $0 = \lambda\Pi_0 + \mu\Pi_1$

On rajoute

$$\Pi_0 + \Pi_1 = 1$$

$\Pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}; \Pi_1 = \frac{\lambda}{\text{récurrentmu}})$

3.2. Classification des (états d'une) CMTC

- Irréductibilité = même définition que pour les CMTD

3.2.1. Etats récurrents transitoires

$F_j(t)$ probabilité que le premier retour en j ait lieu en une durée ≤ t.

$F_j = \int_{t=0}^{\infty} dF_{j(t)}$

- Si $F_j < 1$ j est dit transitoire
- Si $F_j = 1$ j est dit récurrent

3.2.2. Etats récurrents nuls et non nuls

$M_j = \int^{+\infty} tdF_{j(t)}$ temps moyen de 1er retour en j.

$M_j < \infty$ j est dit récurrent **non nul**
$M_j \to \infty$ j est dit récurrent **nul**

Proposition 3 : (admise) Pour un CMTC irréductible, les états sont soit :
- tous récurrents non nuls
- tous récurrents nuls
- tous transitoires

Proposition 4 : Pour un CMTC irréductible qui comporte un nombre fini d'états, tous les états sont RNN.

Définition 6: un état récurrent non nul (RNN) est dit ergodique si tout les états sont ergodiques, la chaine est ergodique.

Théorème 2 : (admis) Pour une chaîne ergodique, il y a convergence

$$\Pi_j(t) \to \Pi_j > 0$$

Π solution de $\begin{cases} \Pi Q = 0 \\ |\Pi| = 1 \end{cases}$ indépendamment de la distribution initiale $\Pi(0)$

Si la chaîne est irréductible, mais que les états sont transitoires ou récurrents nuls. Alors il y a convergence: $\Pi_{j(t)} \underset{t\to\infty}{\to} 0$

Corollaire 1 : Si on a
- un nombre fini d'états
- la chaîne est irréductible

Alors la chaîne est ergodique.

Sinon, s on a :
- un nombre infini d'états
- la chaîne est irréductible

- Si $\Pi Q = 0$, et que $|\Pi| = 1$, admet 1 solution positive

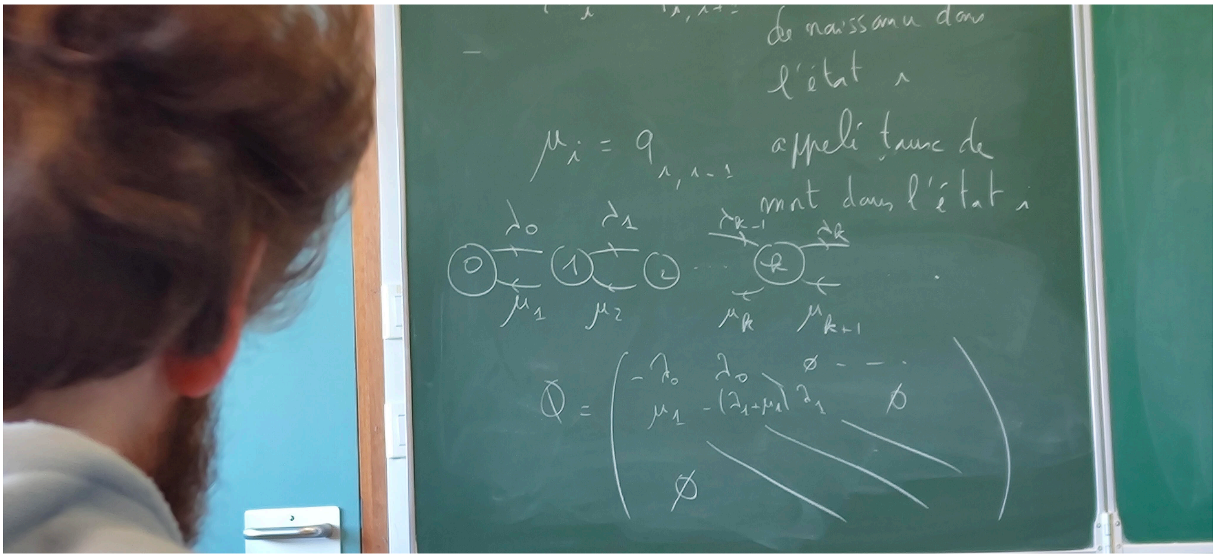
Alors la chaîne est ergodique.

Exemple 1 : Les processus de naissance et de mort $(X_t, t \geq 0)$ CMTC à états E = (0,1,...)

sera dit processus de naissance et de à $\forall i, j|i - j| > 1$ avec $q_{\text{ij}} = 0$

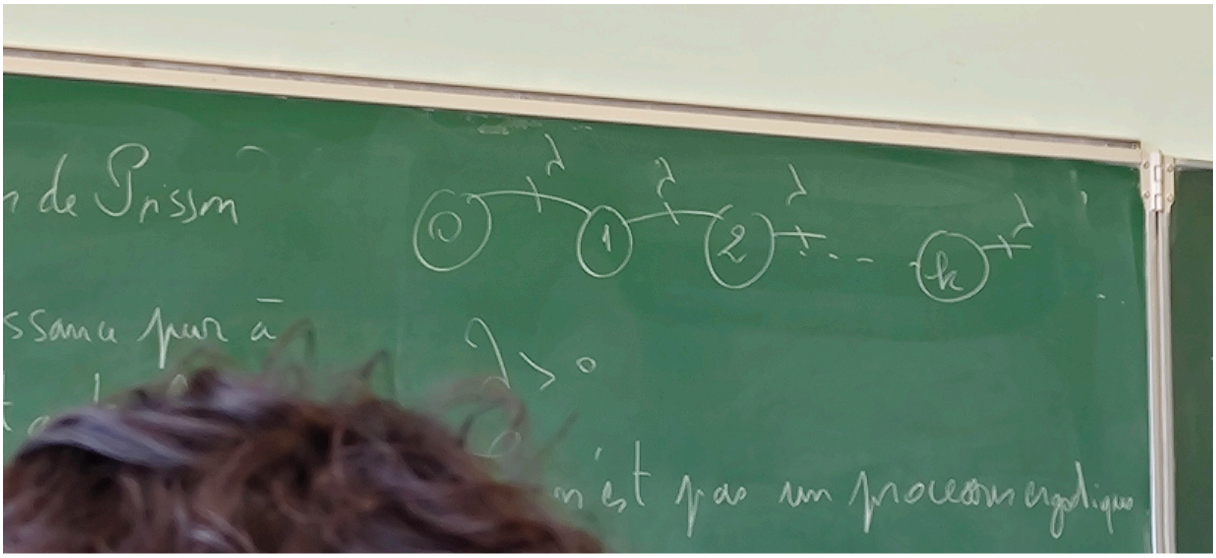
$\lambda_i = q_{i,j+1}$ est appelé **taux de naissance dans l'état i**

$\mu_i = q_i, j + 1$ est appelé **taux de mort dans l'état i**



Exemple 2 : Le processus de Poisson

C'est un processus de naissance pur à taux de naissance constant λ. C'est un processus de comptage, on compte les naissances à partir d'un instant initial t_0 = 0 (N(t), t$\geq$ 0), distribution initiale $\Pi(0) = (1, 0...0...)$



Ce n'est pas un processus ergodique. On va regarder uniquement le régime transitoire $\Pi(t)$

$\Pi_0(t + \text{dt}) = \Pi_0(t)(1 - \lambda\text{dt}) + o(\text{dt})$

$\Pi_1(t+dt) = \Pi_0(t)\lambda \mathrm{dt} + \Pi_1(t)(1-\lambda \mathrm{dt}) + o(\mathrm{dt})$

$\Pi_{k+1}(t+\mathrm{dt}) = \Pi_k(t)\lambda \mathrm{dt} + \Pi_{k+1}(t)(1-\lambda \mathrm{dt}) + o(\mathrm{dt})$

Équations différentielles:

$\Pi_0'(t) - \lambda \Pi_0(t)$

$\Pi_1'(t) = \lambda \Pi_0(t) - \lambda \Pi_1(t)$

$\Pi_{k+1}'(t) = \lambda \Pi_{k(t)} - \lambda \Pi_{k+1}(t) \forall k \geq 1$

Début de résolution (on veut retrouver la loi de poisson):

$$
\begin{aligned}
\Pi_0(t) &= K \exp(-\lambda t) \\
\Pi_0(0) &= 1 \\
\Pi_0(t) &= \exp(-\lambda t) \\
\Pi_1(t) &= K(t) \exp(-\lambda t) \\
\exp(-\lambda t)(K'(t) - \cancel{\lambda K(t)}) &= \lambda \exp(-\lambda t) \cancel{- \lambda K(t) \exp(-\lambda t)} \\
K'(t) &= \lambda \\
&\Rightarrow K(t) = \lambda t + C \\
\Pi_1(t) &= (\lambda t) \exp(-\lambda t) \\
\Pi_{k(t)} &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda t) \\
\Pi_{k+1}(t) &= K(t) \exp(-\lambda t) \exp(-\lambda t) \{K'(t) - \lambda \cancel{K(t)}\} \\
&= \lambda \cdot \frac{(\lambda t)^t}{k!} \cdot \exp(-\lambda t) - \lambda K(t) \exp(-\lambda t) \\
K'(t) &= \lambda \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
K(t) &= \frac{(\lambda t)^k}{(k+1)!} + C \\
K(0) &= 0
\end{aligned}
$$

$\Pi_t\left(\exp(-\lambda t), \lambda t \exp(-\lambda t), ..., \frac{(\lambda+1)^k}{k!} \exp(-\lambda t) ...\right)$

N(t) suit une loi de Poisson λt

$E(N(t)) = \lambda t; \mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t$

3.2.3. Temps entre naissances successives

$\tilde{t}$ temps avant la 1ère naissance.

$F_{\tilde{t_1}}(t) = 1 - \exp(-\lambda t), t >= 0$

$f_{\tilde{t_1}}(t) = \lambda \exp(-\lambda t), t \geq 0$

$\tilde{t_1} \sim \exp(\lambda)$

$E(\tilde{t_1}) = \frac{1}{\lambda}$

$\mathrm{Var}(\tilde{t_1}) = \frac{1}{\lambda^2}$

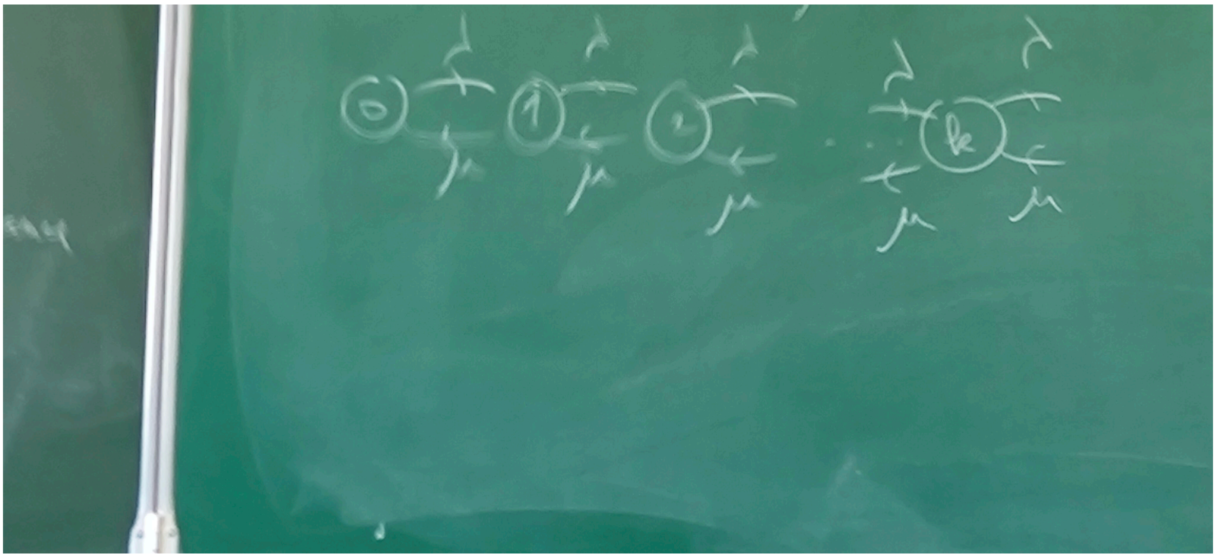
$C_{\tilde{t_1}}^2 = \frac{\mathrm{Var}(\tilde{t_1})}{E(\tilde{t_1}^2)} = 1$

On change de processus pour les naissances suivantes en comptant les naissances à partir de ces instants de naissances successifs.

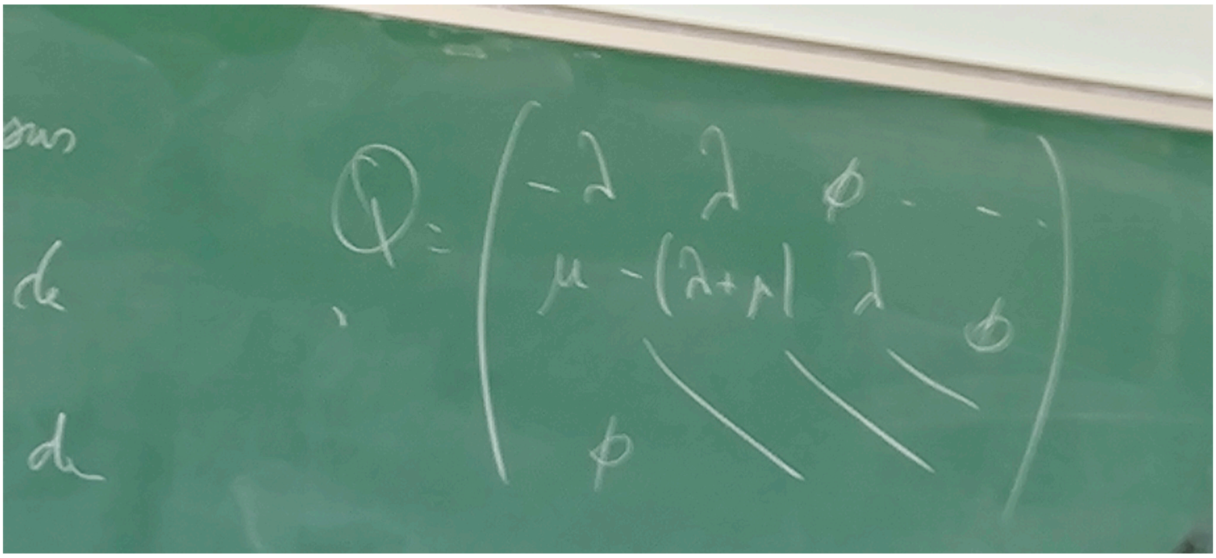
De façon similaire, $\tilde{t_k}$ le temps entre la naissance n°(k-1) et n°k.

$$\tilde{t_k} \sim \exp(\lambda)$$

Exemple 3 : On considère le processus de naissance et de mort à taux de naissance constant $\lambda > 0$ et à taux de mort constant $\mu > 0$



$\lambda > 0, \mu > 0$, graphe fortement connexe chaîne irréductible



$$\Pi Q = 0$$

$$\begin{cases} -\lambda\Pi_0 = \mu\Pi_1 = 0 \\ \lambda\Pi_0 - (\lambda+\mu)\Pi_1 + \mu\Pi_2 = 0 \end{cases}$$

$\lambda\Pi_{k-1} - (\lambda + \mu)\Pi_k + \mu\Pi_{k+1} = 0$

$$\Pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\Pi_0$$

$$\Pi_2 = \frac{\lambda}{\mu}\Pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\Pi_0$$

Donc de proche en proche: $\Pi_{k+1} = \frac{\lambda}{\mu}\Pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\Pi_0$

$\sum_k \Pi_k = 1$

Donc on en déduit:

$\Pi_0 \left(\sum_{k \geq 0} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right) = 1$

Comme c'est une somme géométrique:

Si $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, alors: $\Pi_0 = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = 1$

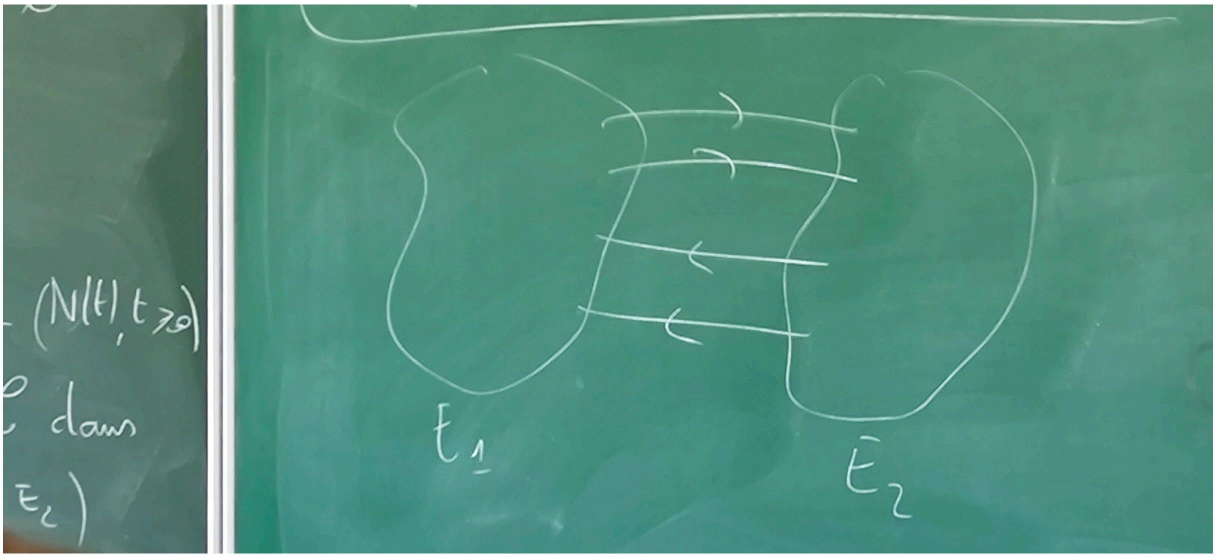
$\Pi_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$
$\Pi_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, k \geq 0$

3.2.4. Méthode des coupes

Soit une chaîne ergodique (N(t), t>=0) quelle que soit la coupe C dans le graphe d'états $C = (E_1, E_2)$

$E_1 \cap E = 0; E_1 \cup E_2 = E$

$\sum_{j \in E_1} \sum_{i \in E_2} \Pi_j q_{\text{ji}} = \sum_{j \in E_1} \sum_{i \in E_2} \Pi_i q_{\text{ij}}$



Idée de preuve :

$0 = \Pi Q$ est une méthode de couple

$$\forall j \in E, \textstyle\sum_{i \in E} \Pi_i q_{\text{ij}} = 0$$

$$\Pi_j q_{\text{jj}} + \textstyle\sum (i \neq j) \Pi_i q_{\text{ij}} = 0$$

$$-\textstyle\sum_{i \neq j} \Pi_j q_{\text{ji}} + \sum_{i \neq j} \Pi_i q_{\text{ij}} = 0$$

$$\textstyle\sum_{i \neq j} \Pi_i q_{\text{ij}} = \sum_{i \neq j} \Pi_j q_{\text{ji}} \text{ et } C = \{\{j\}, E \setminus \{j\}\}$$

$$\forall j \in E_1 : \textstyle\sum_{i \in E} \Pi_i q_{\text{ij}} = 0$$

$$\textstyle\sum_{j \in E_1} \sum_{i \in E} \Pi_i q(\text{ij}) = 0$$

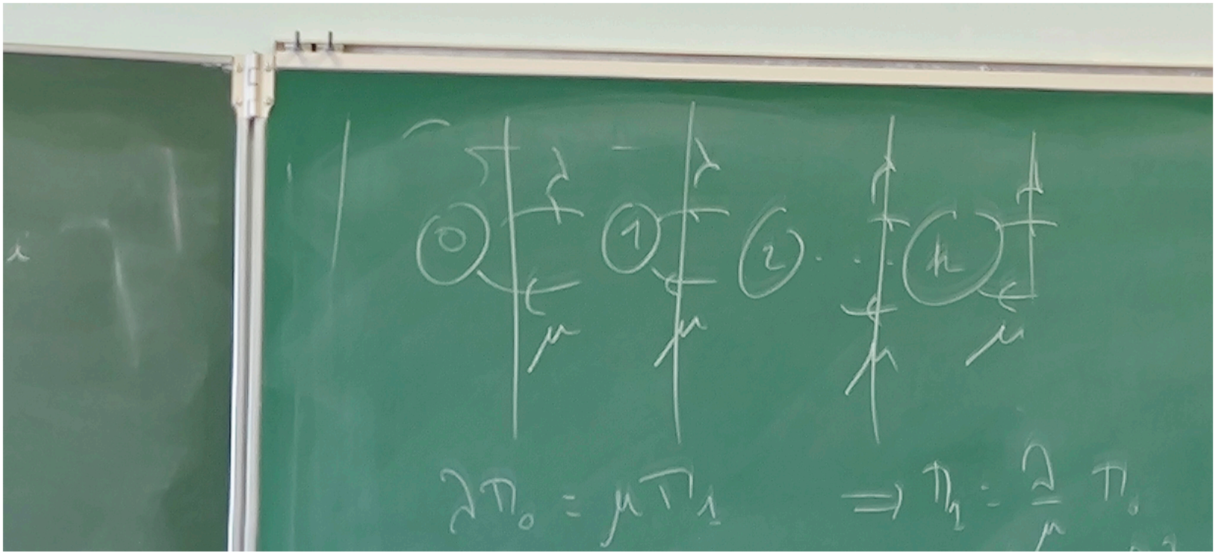
$$\textstyle\sum_{j \in E_1} \sum_{i \in E_1} \Pi_i q_{\text{ij}} + \sum_{j \in E_1} \sum_{i \in E_2} \Pi_i q_{\text{ij}} = 0$$

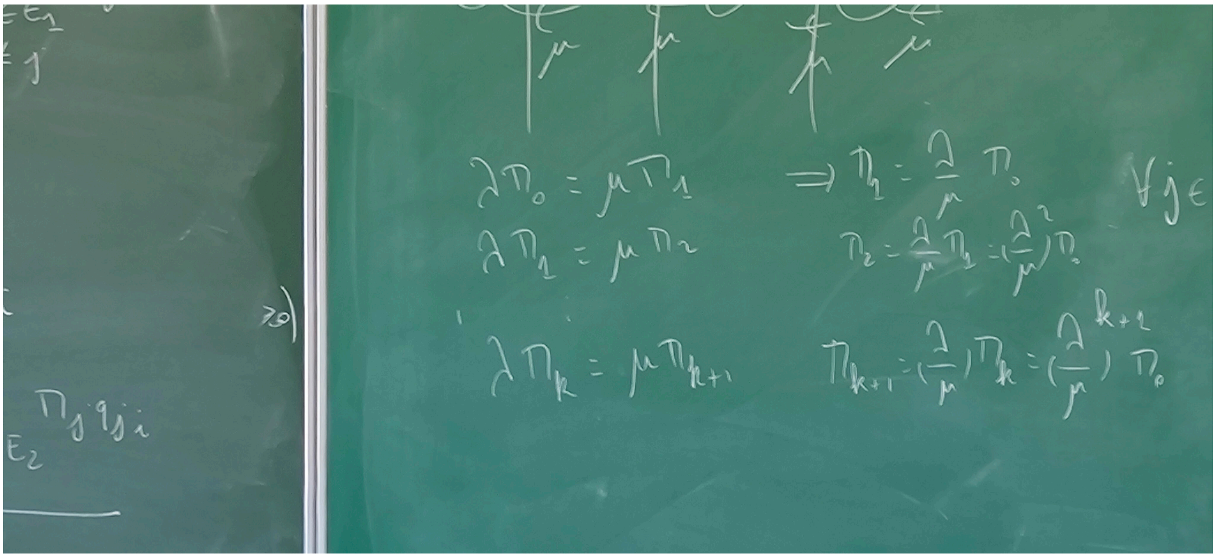
$$\textstyle\sum_{i \in E_1} \sum_{j \in E_1} \Pi_j q_{\text{ji}} = \sum_{j \in E_1} \Pi_j \sum_{i \in E_1} q_{\text{ji}}$$

$$\textstyle\sum_{i \in E_1} q_{\text{ji}} = q_{\text{jj}} + \sum_{i \in E_1} q_{\text{ji}} - \sum_{i \in E} q\text{ji}$$

$$= -\textstyle\sum_{i \in E_2} q_{\text{ji}}$$

$$\textstyle\sum_{j \in E_1} \sum_{j \in E_2} \Pi_i q_{\text{ij}} = \sum_{j \in E_1} \sum_{i \in E_2} \Pi_j q_{\text{ji}}$$





3.3. Files d'Attente Simples

Définition 7: Une file d'attente est défini par un flux de clients qui demandent un service rendu par un certain nombre de guichets (ou serveurs) mais qui suite à des restrictions sur le nombre de serveurs ou le type de service sont amenés à attendre.

On suppose qu'un serveur ne sert qu'un client à la fois et qu'un client n'est servi que part un serveur à la fois.

Les clients peuvent être regroupés en classes de service correspondant à un niveau de priorité, une durée de service etc…

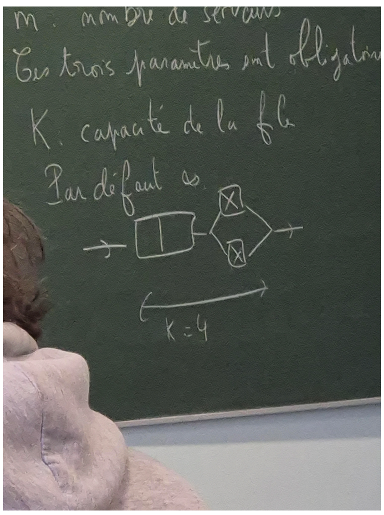
3.4. Notation de Kendall des files d'attente :

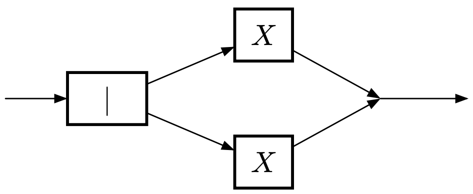
3.4.1. Variables utilisées:

Paramètres obligatoires : A,D,m.

Pour les 3 autres on met des valeurs par défaut.

- A = (caractérisation) loi d'arrivées des clients dans la file ;
  - M : Poisson (Memoryless) ;
  - D : Constant (Deterministe) ;
  - G : Quelconque (Générale) ;
  - ...
- B = loi de la durée du service ;
  - M : exponnetielle (Memoryless) ;
  - D : Constant ;
  - G : General ;
  - ...
- m = nombre de serveurs ;
- K = capacité de la file ;
  - par défaut ∞.



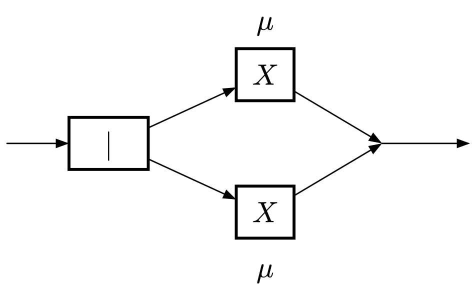


$\longleftarrow\ ---\ \longrightarrow$

- F = discipline de service (ordonnanceur) ;
  - FCFS (First Come First Served) (même chose que FIFO mais ne pas dire FIFO !!!) par défaut ;
  - LCFS (Last Come First Served): si système saturé, quelques uns vont quand même réussir à passer (meilleure qualité d'expérience) ;
  - Quantum ;
  - Processor Sharing (PS) : cas limite du Quantum ;
  - Mécanismes de priorité : absolue, préemptive (si une prio plus élevée arrive: on tej celle en cours pour passer la prio +) ;
  - ...
- N = Taille de la population: nombre max de client intéressés/susceptibles d'aller dans la file (par défaut: ∞).

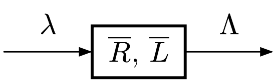
exemple de limitation :
- environnement mobile. Seuls les utilisateurs de la cellule sont susceptibles de communiquer.
- Réseau paquet avec contrôle de flux. Chaque communication n'a droit qu'à K paquets/accusé de réception $\Rightarrow$ Nombre total de paquets dans le réseau est limité.

exemple :



4. Analyse opérationnelle (loi de Little) (Chapitre 3??)

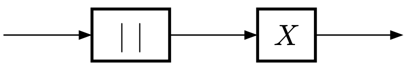
Soit un système traitant des requêtes.

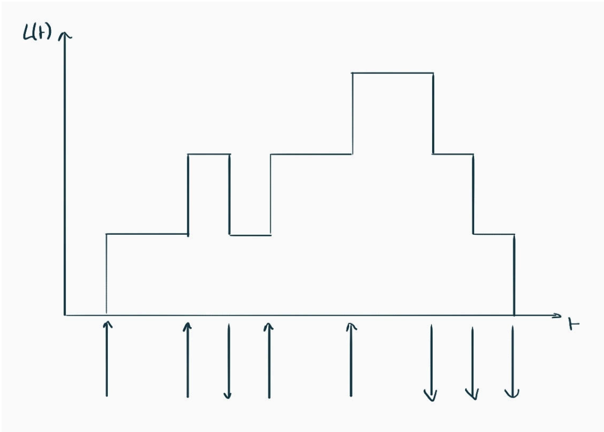


- λ : débit d'arrivée des requêtes
- Λ : débit de sortie des requêtes
- $\overline{\mathbb{L}}$: nombre moyen de requêtes dans le système
- $\overline{R}$: temps moyen posé par les requêtes dans le système.

$\overline{\mathbb{L}} = \Lambda \cdot \overline{R}$

Illustration : Soit 1 file d'attente simple avec un serveur, FCFS



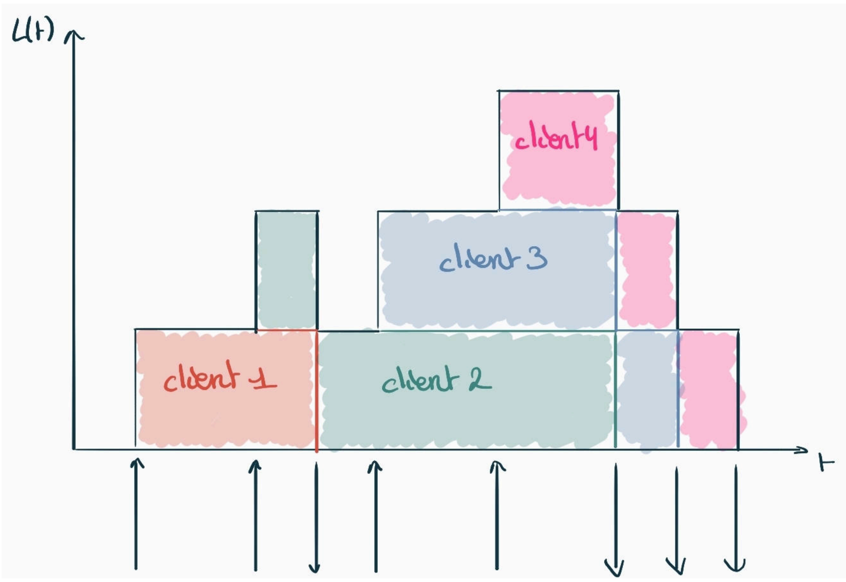


- $\overline{\mathbb{L}_T}$: nombre moyen de clients dans la file entre 0 et T ;
- M_T : nombre de clients servis entre 0 et T ;
- $\overline{R_T}$ = temps moyen de réponse entre 0 et T ;
- r_i : temps de réponse du client i ;
- Λ_T = débit(moyen) entre 0 et T (de sortie).

$\Lambda_T = \frac{M_T}{T}$

$\overline{R_T} = \frac{1}{M_T} \cdot \sum_{i=1}^{M_T} r_i$

$\overline{\mathbb{L}_T} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^{T} L(t)dt$



Donc,

$\int_{t=0}^{T} L(t)dt = \sum_{i=1}^{M_T} r_i$
$\overline{L_T} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^{M_T} r_i = \frac{M_T}{T} \cdot \frac{1}{M_i} \cdot \sum_{i=1}^{M_T} r_i$

$\quad = \Lambda_T \cdot \overline{R_T}$

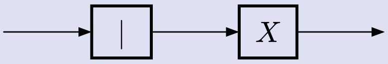
En faisant tendre $T \to \infty$

$\overline{L} = \Lambda \cdot \overline{R}$

Pour cela, il faut que le système se vide une infinité de fois

Utilisation de la loi de Little au serveur d'une file simple avec un seul serveur

Théorème 3 : Théorème de Chang-Lavenberg



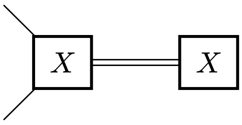
- Λ = débit de sortie
- $\overline{\mathbb{L}_S}$ = nombre moyen de clients en service
- $\overline{R_S} = \overline{\mathbb{S}}$ = temps moyen de service
- U= taux d'occupation du serveur

$$\overline{L_S} = \overline{S} \cdot \Lambda$$

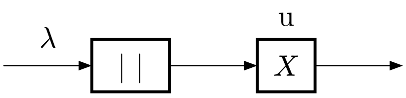
$\overline{L_s} = (1-U) \cdot 0 + 1 \cdot U = U$ (attention homogénéité, U sans unité mais 1 est en nombre de clients comme $\overline{L_s}$)

$U = \overline{S} \cdot \Lambda \leq 1$ où: $\Lambda \leq \frac{1}{S}$

4.0.1. Modèle de base pour les réseaux à commutation de Paquets



- Arrivées poissonnienne de taux λ
- Durée des services suit une loi exponentielle de taux μ
- 1 serveur
- FCFS
- Capacité ∞
- taille population



- ρ : charge de la file

$\rho = \lambda \cdot \mathbb{E}(S) = \frac{\lambda}{\mu}$

$\mathbb{E}(L) =?$, $\mathbb{E}(R) =?$

L(t), nombre de clients dans la file à t (L(t), t ≥ 0) est de 1 CMTC de type processus de naissance et de mort

Arrivées

$\mathbb{P}(1 \text{ arrivée entre } t \text{ et } t + dt) = \lambda \cdot dt + o(dt)$

$\mathbb{P}(0 \text{ arrivée entre } t \text{ et } t + dt) = 1 - \lambda \cdot dt + o(dt)$

$\mathbb{P}(\text{Plus d'une arrivée entre } t \text{ et } t + dt) = o(dt)$

Départs/fins de service

$\mathbb{P}$(1 sevice en cours à t se termine entre t et $t + dt) = \mu \cdot dt + o(dt)$

$\mathbb{P}$(1 sevice en cours à t ne se termine pas entre t et $t + dt) = 1 - \mu \cdot dt + o(dt)$

$\mathbb{P}$(2 fins de service entre t et t + dt) $\leq \mu^2(\mathrm{dt}) + o(\mathrm{dt}) = o(\mathrm{dt})$

$\mathbb{P}$(0 départ entre t et $t + dt) = 1 - \mu \cdot dt + o(dt)$

$\mathbb{P}$(1 départ entre t et $t + dt) = \mu \cdot dt + o(dt) \Rightarrow (L(t), t \geq 0) =$ CMTC

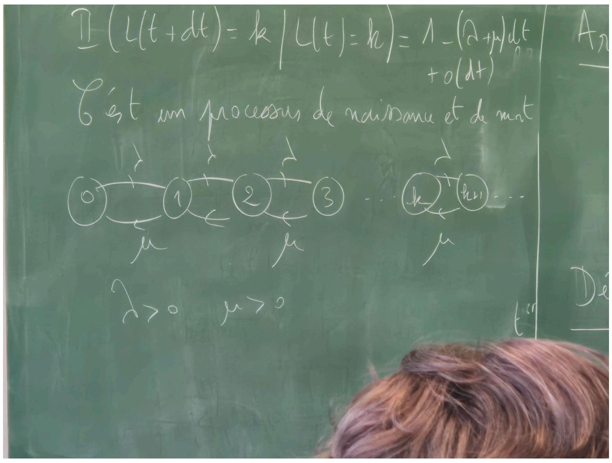
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L(t+\mathrm{dt}) = k+1 \mid L(t) = k > 0)&\\ &= \lambda \cdot \mathrm{dt} + o(\mathrm{dt})(1 - \mu \cdot \mathrm{dt} + o(\mathrm{dt}))\\ &= \lambda \cdot \mathrm{dt} + o(\mathrm{dt})\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(L(t + dt) = k - 1 \mid L(t) = k > 0) = (1 - \lambda \cdot dt + o(dt))(\mu \cdot dt + o(dt)) = \mu \cdot dt + o(dt)$

$\mathbb{P}(L(t + dt)) = k \mid L(t) = k > 0) = (1 - \lambda \cdot dt + o(dt))(1 - \mu \cdot dt + o(dt)) =$
(pas sur qu'il y ait un égal)$(\lambda \cdot dt + o(\mathrm{dt})(\mu \cdot dt + o(\mathrm{dt})))$

$\mathbb{P}(L(t + dt) = k \mid L(t) = k) = 1 - (\lambda - \mu) \cdot dt + o(dt)$

C'est un processus de naissance et de mort **Là y'a un graphe deux** deux ???? OUI, deux



$\lambda > 0$ et $\mu > 0$

$\lambda \cdot \Pi_0 = \mu \cdot \Pi_1 \Rightarrow \Pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \Pi_0 = \rho \cdot \Pi_0$

$\lambda \cdot \Pi_1 = \mu \cdot \Pi_2 \Rightarrow \Pi_2 = \rho \cdot \Pi_1 = \rho^2 \cdot M_0$

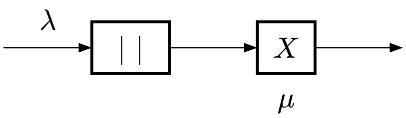
$\lambda \cdot \Pi_k = \mu \cdot \Pi_{k+1} \Rightarrow \Pi_{k+1} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \Pi_k + 1 = \rho^{k+1}\Pi_0$

$\sum_{k=0}^{\inf} \Pi_k = 1$

$\Pi_0 \cdot \left(1 + \rho + \rho^2 + ... + \rho^k + ...\right) = 1$

$$\begin{aligned}E(L) = \sum_{k=0}^{+\infty} kT'_k &= (1-\rho)\sum_{k=1}^{+\infty} k\rho^k\\ &= \rho(1-\rho) \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \rho^{k-1}\\ &= \rho(1-e)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=0}^{+\infty}\rho^k\\ E(L) &= \frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

$\mathbb{E}(R) = \frac{E(L)}{\Lambda}$



- Quand la file d'attente est vide:

$\Lambda = 0 \cdot \Pi_0 + \mu(1 - \Pi_0)$

$\quad = \mu(1-(1-\rho)) = \mu\rho = \mu\frac{\lambda}{\mu}$

$\quad = \lambda$

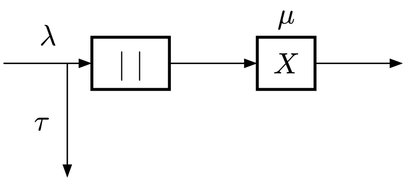
$E(R) = \frac{E(L)}{\lambda}$

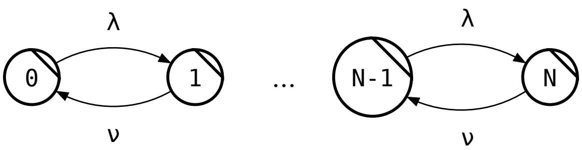
$\quad\quad = \frac{\frac{\cancel{\lambda}}{\mu}}{\cancel{\lambda}(1-\rho)}$

$\quad\quad = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

$E(R) = \frac{1}{\mu - \lambda}$

Etude de la file M/M/1/N:





$\lambda > 0$ et $\mu > 0 \Rightarrow$ irréductible / nombre fini d'état / ergodique (pas sure de la mise en forme)

$\lambda\Pi_0 = \mu\Pi_1 \qquad\qquad \Pi_1 = \rho\Pi_0$

$\lambda\Pi_1 = \mu\Pi_2 \qquad\qquad \Pi_2 = \rho^2\Pi_0$

... $\qquad\qquad$ ...

$\lambda\Pi_{N-1} = \mu\Pi_N \qquad\qquad \Pi_N = \rho^N\Pi_0$

$\Pi_0 + \Pi_1 + ... + \Pi_N = 1 \qquad \Pi_0(1 + \rho + ... + \rho^N) = 1$

$\rho \neq 1$ $\Pi_0 \cdot \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho} = 1$

On isole Π_0: $\Pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$

Donc de proche en proche : $\Pi_k = \rho^k \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$ avec $\mu \geq k \geq 0$

$\rho = 1 \qquad \Pi_0 = \Pi_1 = \Pi_2 = ... = \Pi_N = \frac{1}{N+1}$

$\tau =$ (PASTA : Poisson Arrivals See Time Averages) $= \Pi_N$

Average :

$\tau = \frac{1}{N+1} \qquad \rho = 1$

$\tau = \rho^N \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \qquad \rho \neq 1$

$\mathbb{X} = \lambda \cdot \Pi_N$

$\tau_0 = \frac{\mathbb{X}}{\lambda} = \Pi_M$

$\Lambda = \mu \cdot (1 - \Pi_0)$

$\tau = \frac{\lambda - \Lambda}{\lambda} = 1 - \frac{\Lambda}{\lambda}$

$\quad = 1 - \frac{\mu}{\lambda}(1 - \Pi_0) = 1 - \frac{1}{\rho}(1 - \Pi_0)$

- $\rho \neq 1$

$\tau = 1 - \frac{1}{\rho}(1 - \Pi_0)$

$\quad = 1 - \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)$

$\quad = 1 - \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\rho - \rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}\right\}$

$\quad = 1 - \frac{1-\rho^N}{1-\rho^{N+1}}$

$\quad = \frac{1-\rho^{N+1} - (1-\rho^N)}{1-\rho^{N+1}} = \rho^N \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = M_N$

$\tau(\rho, N) = \rho^N \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \qquad \rho \neq 1$

$\qquad\qquad = \frac{1}{N+1} \qquad \rho = 1$

fonction croissante de ρ Par rapport à la charge

fonction décroissante de ρ

$\lim_{N\to\infty} \tau(\rho, N) = \lim_{N\to\infty} \rho^N \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$

- Si $\rho < 1$:

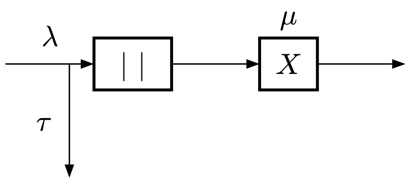
$\lim_{N\to\infty} \tau(1, N) = 0$

$\lim_{N\to\infty} \tau(\rho, N) = \lim_{N\to\infty} \frac{\rho-1}{\rho - \frac{1}{\rho^N}}$

- Si $\rho > 1$:

$\lim_{N\to\infty} \tau(\rho, N) = \frac{\rho-1}{\rho}$

4.0.2. Modèles de base pour les réseaux « paquets »



$\tau = \Pi_N = \frac{1}{N+1},\ \rho = 1$

$\tau = \rho^n \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}},\ \rho \neq 1$

$(\rho, \tau^*) \to \mathbb{N}^*$

$\tau^* \geq \rho^N \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$

En posant: $x = \rho^N$

$\tau^* \geq x \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho \cdot x}$

D'où: $(1-\rho\cdot x)\cdot\tau^* \geq x(1-\rho)$

et donc, en passant $\rho\cdot x$ de l'autre coté: $\tau* \geq x(1-\rho+\rho\cdot\tau*)$

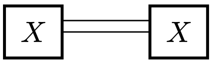
On isole alors x: $\rho^N = x \leq \frac{\tau^*}{1-\rho+\rho\tau^*}$

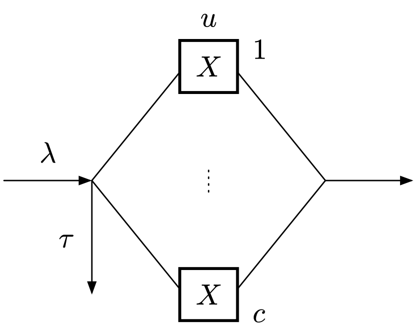
$N\cdot\log_{10}(\rho) \leq \log_{10}(\tau*) - \log_{10}(1-\rho+\rho\cdot\tau*)$

$N \geq \frac{\log_{10}(\tau^*)-\log_{10}(1-\rho+\rho\cdot\tau^*)}{\log_{10(\rho)}}$

$\boxed{N^* = \lceil\left(\frac{\log_{10}(\tau^*)-\log_{10}(1-\rho+\rho\cdot\tau^*)}{\log_{10}(\rho)}\right)\rceil}$ (arrondi au supérieur)

4.0.3. Modèles de base pour les réseaux à commutation de circuit





Arrivées des appels -> loi de Poisson (λ)

Durée des appels -> loi exponentielle (μ)

M/M/C/C

On regarde le critère de performance au travers du taux de rejet τ.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ est la charge, ie, le nombre moyen de communications si il n'y a pas de rejets. Il est exprimé en **Erlangs**.

On peut normaliser la charge: $\rho_N = \frac{\rho}{c} = \frac{\lambda}{c\cdot\mu}$. On exprime peu souvent en charge normalisée.

On pose $L(t)$ le nombre d'appels en cours, et on a: $(L(t), t \geq 0)$ une CMTC de type processus de naissance et de mort.

Ce qui fera evoluer le nombre d'appels dans la chaine est l'arrivée ou la fin d'un appel.

4.0.4. Arrivées poissonniennes

$\mathbb{P}(1 \text{ arrivée entre } t \text{ et } t+dt) = \lambda dt + o(dt)$

$\mathbb{P}(0 \text{ arrivée entre } t \text{ et } t+dt) = 1 - \lambda dt + o(dt)$

Tout le reste est négligeable

4.0.5. Fin d'appels et départs

$\mathbb{P}(1 \text{ appel en cours à } t \text{ se termine entre } t \text{ et } t+dt) = \mu dt + o(dt)$

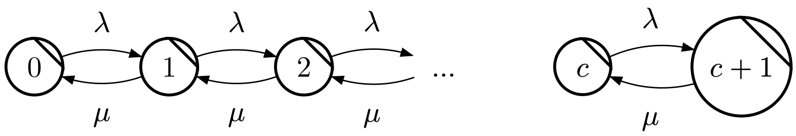
$\mathbb{P}(1 \text{ appel en cours à } t \text{ ne se termine pas entre } t \text{ et } t+dt) = 1 - \mu dt + o(dt)$

$\mathbb{P}(1 \text{ fin d'appel entre } t \text{ et } t+dt \mid L(t) \geq k > 0)$
$$= \binom{k}{1} \cdot (\mu dt + o(dt))(1-\mu dt + o(dt))^{k-1}$$
$$= k \cdot \mu \cdot \mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t)$$

$$\mathbb{P}(0 \text{ fin d'appel entre } t \text{ et } t+dt) = (1-\mu dt + o(dt))^k$$
$$= 1 - k\mu dt + o(dt)$$

$$\mathbb{P}(2 \text{ fins d'appel entre } t \text{ et } t+dt \mid \ L(t) = k > 1) = \binom{k}{2}(\mu dt + o(dt))^2 (1-\mu dt + o(dt))^{k-2}$$
$$= o(dt)$$

On pose $L(t)$ le nombre d'appels en cours, et on a: $(L(t), t \geq 0)$ une CMTC de type processus de naissance et de mort. (déjà dit)



$\lambda > 0$ et $\mu > 0$

La chaine est ergodique.

$$\begin{cases} \lambda\Pi_0 = \mu\Pi_1 \\ \lambda\Pi_1 = \mu\Pi_2 \\ \text{Donc par récurrence: } \lambda\Pi_{c-1} = \mu\Pi_c \\ \sum_{k=0}^{c} \Pi_k = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{En remplaçant } \frac{\mu}{\lambda} \text{ par } \rho\text{:} \\ \Pi_0 = \rho\Pi_1 \\ \Pi_1 = \rho\Pi_2 \\ \text{Donc par récurrence: } \Pi_{c-1} = \rho\Pi_c \\ \Pi \cdot \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^c}{c!}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{c} \frac{\rho^j}{j!}}$$

$$\Pi_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{j=0}^{c} \frac{\rho^j}{j!}}$$

$$\tau = \Pi_c = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{j=0}^{c} \frac{\rho^j}{j!}}$$

Première formule d'Erlang, ou Erlang-B

$$\tau = \frac{X}{\lambda}$$

$$\tau = \frac{\lambda - \Lambda}{\lambda} = 1 - \frac{\Lambda}{\lambda}$$

$$\Lambda = \sum_{k=0}^{c} k \cdot \mu \cdot \Pi_k$$
$$= \mu \cdot \sum_{k=0}^{c} k \cdot \Pi_k$$
$$= \mu \cdot E(L)$$

$$\sum_{k=0}^{c} k \cdot \Pi_k = \sum_{k=0}^{c} k \cdot \frac{\rho^k}{k!} \cdot \Pi_0$$
$$= \rho \sum_{k=0}^{c} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \Pi_0$$
$$= \rho \sum_{k=0}^{c-1} \frac{\rho^k}{k!} \cdot \Pi_0$$
$$= \rho \cdot \sum_{k=0}^{c-1} \Pi_k$$
$$= \rho \cdot (1 - \Pi_c)$$

On en déduit, en remplaçant dans Λ:

$\Lambda = \mu \cdot \rho \cdot (1 - \Pi_0)$

$\quad = \lambda \cdot (1 - \Pi_c)$

D'où:

$\tau = 1 - \frac{\Lambda}{\lambda}$

$\quad = 1 - (1 - \Pi_c)$

$\quad = \Pi_c$

$E(L) = \sum_{k=0}^{c} k^n \Pi_k = \rho \cdot (1 - \Pi_c)$

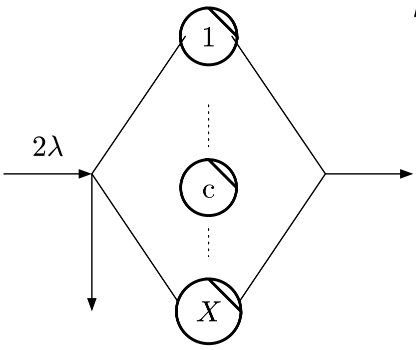
Remarque 1 : $\lim_{c \to \infty} \Pi_c = 0 \Rightarrow \lim_{c \to \infty} E(L) = \rho$

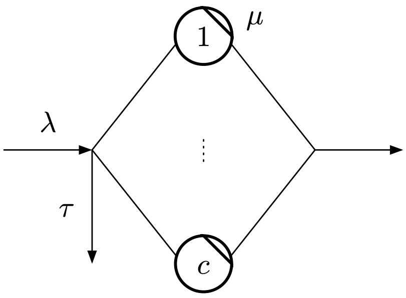
$E(R) = \frac{E(L)}{\Lambda} = \frac{E(L)}{\mu \cdot E(L)} = \frac{1}{\mu}$

$E(R) = \frac{1}{\mu}$

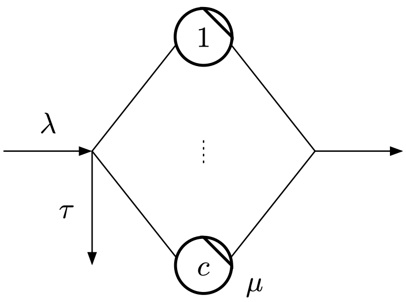
$E(R) = E(W) + E(S) = E(S) = \frac{1}{\mu}$, car $E(W) = 0$.

$\rho_N = \frac{2\lambda}{2C\mu} = \frac{\lambda}{C\mu}$

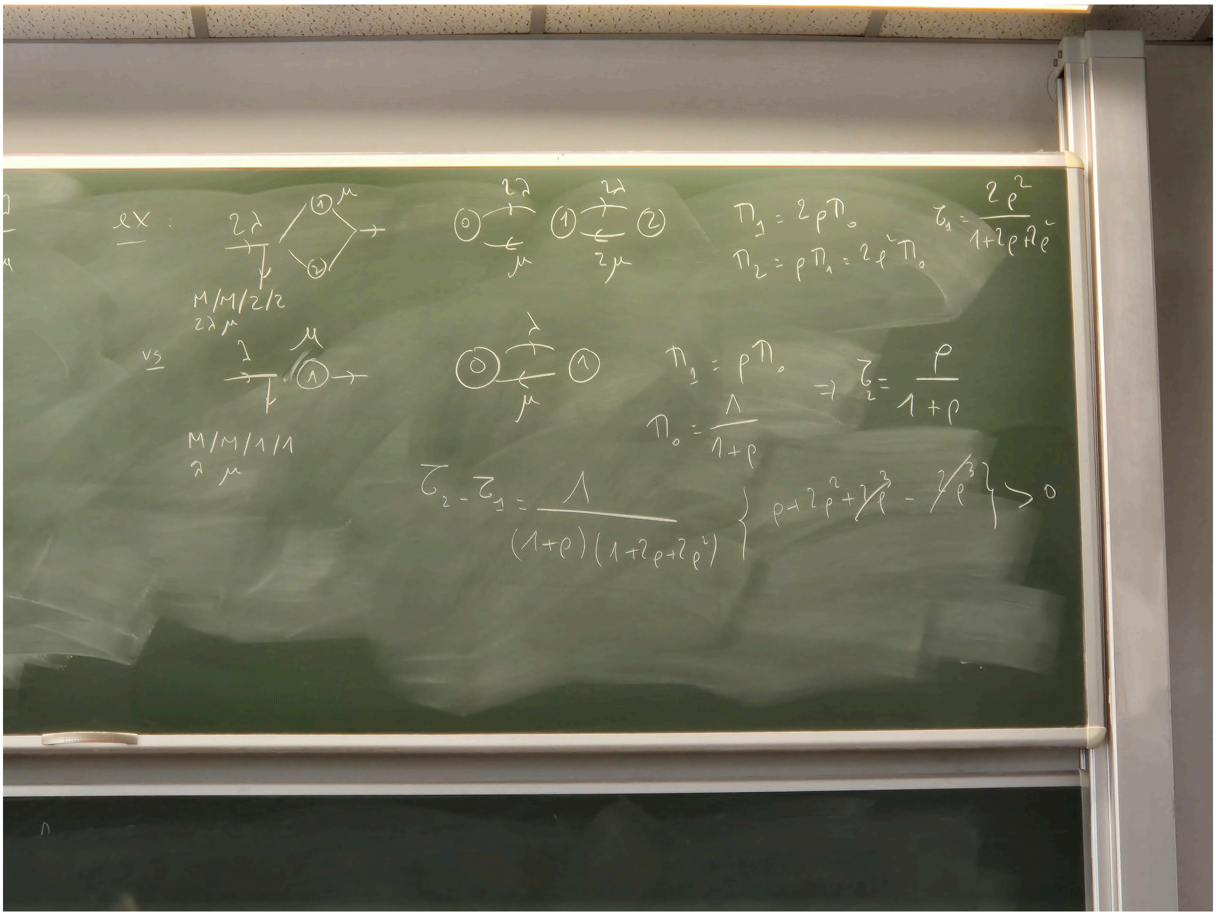




$\rho_N = \frac{\lambda}{C\mu}$



Pour le 1er système:



$\Pi_1 = 2\rho\Pi_0$

$\Pi_2 = \rho\Pi_1 = 2\rho^2\Pi_0$

Donc $\tau_1 = \frac{2\rho^2}{1+2\rho+2\rho^2}$

<u>et Pour le 2e système:</u>

$\Pi_1 = \rho\Pi_0$

$\Pi_0 = \frac{1}{1+\rho}$

Donc $\tau_2 = \frac{\rho}{1+\rho}$

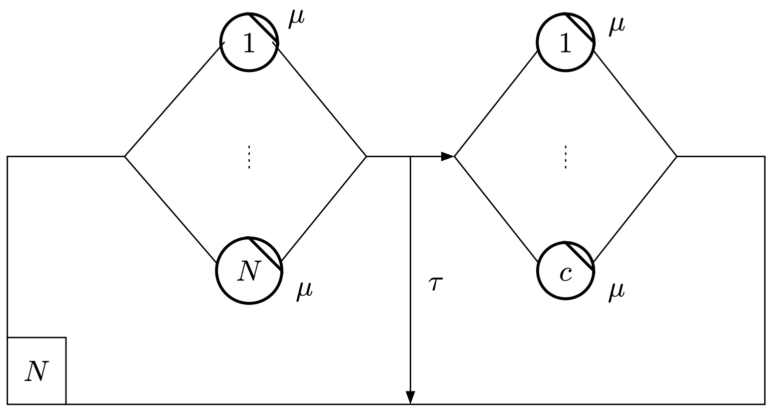
$\tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{(1+p)(1+2p+2p^2)}$

Or $(1+p)(1+2p+2p^2) = \rho + 2\rho^2 + 2\rho^3 - 2\rho^3 > 0$.

Donc $\tau_2 - \tau_1 > 0$ ie : $\tau_2 > \tau_1$

Donc le 2e système a un plus grand taux de perte, et est donc moins efficace.

4.1. Etude de la file M/M/C/C/N avec N $>$ C



$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$L(t)$: nombre d'appels en cours à t.

$(L(t), t \geq 0)$ est une CMTC de type processus de naissance et de mort.

4.1.1. Départ de la file:

$\mathbb{P}(1$ appel dépar entre t et $t + dt \mid L(t) - k > 0) = k\mu dt + o(dt)$

$\mathbb{P}(0$ départ entre t et $t + dt \mid L(t) - k > 0) = 1 - k \cdot \mu dt + o(dt)$

4.1.2. Arrivés de la file

$\mathbb{P}(1$ arrivée entre t et $t + dt \mid L(t) - k) = (N - k) \cdot \lambda dt + o(dt)$

$\mathbb{P}(0$ arrivée entre t et $t + dt \mid L(t) - k) = 1 - (N - k) \cdot \lambda dt + o(dt)$

graph $\mu > 0$ et $\lambda > O$

Chaine ergodique

$\Pi_1 = N\rho\Pi_0$

$\Pi_2 = N - 1\frac{)}{2}\rho\Pi_1$

$\quad = \frac{N(N-1)}{2}\rho^2\Pi_0$

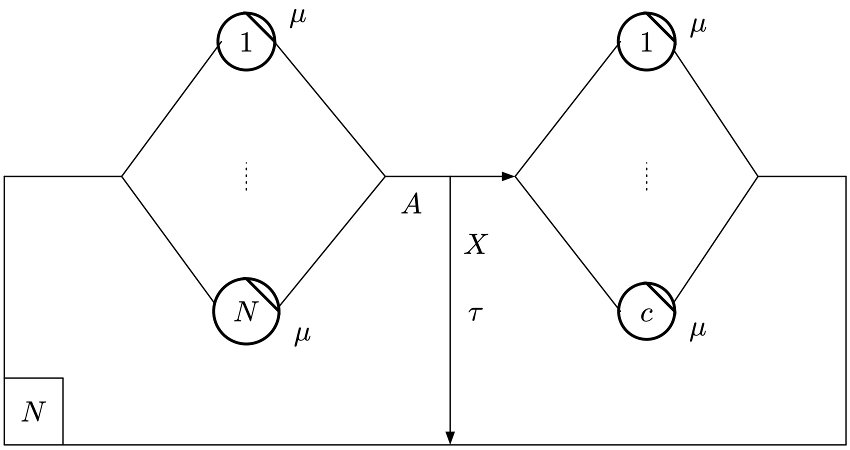
$\quad = \binom{N}{2}\rho^2\Pi_0$

$\Pi_c = \frac{N-c+1}{c} \cdot \rho\Pi_{c-1} = \frac{N\cdot(N-1)\ldots(N-c+1)}{c!} \cdot \rho^c\Pi_0 = \binom{N}{c} \cdot \rho^c \cdot \Pi_0$

$\Pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{c}\binom{N}{j}p^j}$;

$\Pi_k = \frac{\binom{N}{k}\rho^k}{\sum_{j=0}^{c}\binom{N}{j}\rho^j}$

$\tau \neq \Pi_c$



$X = (N-c)\lambda\Pi_c$

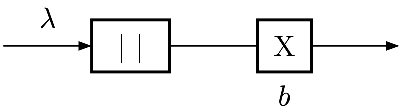
$A = \sum_{(k=0)_{k=0}}^{c} (N-k)\lambda \cdot \Pi_k$

$\tau = \frac{X}{A} = \frac{\rho(N-c)\cancel{\lambda}\Pi_c}{\sum_{k=0}^{c}(N_k)\cancel{\lambda}\Pi_k} = (N-c)\binom{N}{c}\rho^c \frac{\cancel{\Pi_0}}{\sum(k=0)^c}(N-k)\binom{N}{k}\rho^k\cancel{\Pi_0}$

$= (N-k) \cdot \frac{N!}{(N-k)!k!} = N \cdot \frac{(N-1)!}{(N-1-k)!k!} = N \cdot \binom{N-1}{k}$

$\tau = \frac{\cancel{N}\binom{N-1}{c}\rho^c}{\left(\sum_k = 0\right)^c}\cancel{N}(N-1;k)\rho^k = \Pi_c(N-1) < \Pi_{c(\mu)}$

5. Chapitre 4 : Étu de file M/G/1



$E(S) < +\infty$ $\quad$ $E(L) = ?$

$E(S^2) < +\infty$ $\quad$ $E(R) = ?$

b = densité de probabilité du temps de service quelconque

$\rho = \lambda$ E(S)

Arrivées Poissonniennes 1 serveurs taille population ∞

Temps de service quelconque FCFS capacité: ∞

$L(t)$: nombre de clients dans la file à instant t.

$(L(t), t \geq 0)$ est-il une CMTC? (comme la questtion est posée, c'est que non.)

5.0.1. Arrivées Poissonniennes:

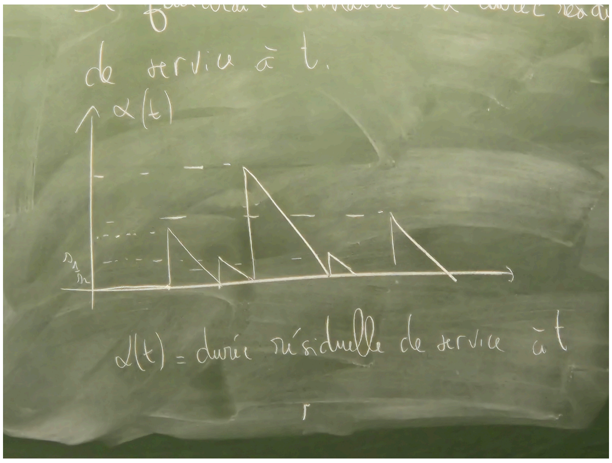
$\mathbb{P}$(1 arrivée entre t et $t + dt$) $= \lambda dt + o(dt)$

$\mathbb{P}$(0 arrivée entre t et $t + dt$) $= 1 - \lambda dt + o(dt)$

5.0.2. Départs Poissonniens:

$\mathbb{P}$(1 client en service en t termine se service entre t et $t + dt$) = inconnu

Il faudrait connaitre la durée résiduelle de service à t:



$\alpha(t)$: durée résiduelle de service à t.

$(L(t), \alpha(t), t \geq 0)$ est un processus markovien

$\alpha(t)$ à espace d'états continu.

5.1. Méthode de la chaîne incluse:

On étudie le système à des instants particuliers (discrets) :

- Instants d'arrivée ;
- Instants de départs $\rightarrow \alpha(t) = 0$ en ces points là.

C'est plus simple de regarder les instants de départ car on sait que le temps résiduel de service $\alpha(t) = 0$.

5.1.1. Représentation des instants d'observations

$A_{k(t)} = \mathbb{P}($ 1 client arrivent à $\ t\ $ trouve $\ k\ $ clients dans la file$) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} a_k$

$d_{k(t)}$: $\mathbb{P}($1 client partant à instant t laisse k clients dans la file.$) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} d_k$

$\Pi_{k(t)} = \mathbb{P}(L(t) = k) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} \Pi_k$

Proposition 5 : PASTA (c'est pas une blague)

$\forall k\ \ \forall t \quad A_{k(t)} = \Pi_k(t) \Rightarrow \forall k a_k = \Pi_k$

Proposition 6 : Si le système évolue par pas de +/- 1 : $\forall k$: $a_k = d_k$

Pour un système qui évolue par pas de ± 1

#	arrivée	départ
1	0	1
2	1	2
3	1	1
4	2	0

a_k^T : proportion de clients qui arrivent entre 0 et T et qui trouvent k clients dans la file.

d_k^T : proportion de clients qui arrivent entre 0 et T et qui laissent k clients dans la file. Les plus simple à calculer.

si le système est vide à 0 et T, alors $\forall k : a_k^T = d_k^T$ et donc $\lim_{T\to\infty} a_k = d_k$

$=>\forall\ \boldsymbol{k a_k = d_k = \Pi_k}$

q_n = nombre de clients dans la file quand le client n part.

v_n = nombre de clients qui arrivent pendant le service du client n.

$(q_n, n \in \mathbb{N})$ est une CMTD.

Démonstration 1 : On montre que $(q_n, n \in \mathbb{N})$ est une CMTD.

- $q_n = 0$ $\qquad q_{n+1} = v_{n+1}$
- $q_n > 0$ $\qquad q_{n+1} = q_n - 1 + v_{n+1}$

$q_{n+1} = q_n - \mathbb{I}_{\{q_n > 0\}} + v_{n+1}$

$\mathbb{P}(v_n = k) = \int_{x=0}^{+\infty} \mathbb{P}(v_n = k \mid s_n = x) b(x) dx$

s_n = temps de service du client n

$= \int_{x=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \cdot x)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda k} dx = b_k$

$=>$ $(q_n, n \in \mathbb{N})$ est 1 CMTD

$P = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ \emptyset & & & & \end{pmatrix}$

$(1 - b_0) \cdot d_0 = b_0 \cdot d_0$

$(1 - b_0 - b_1) \cdot d_0 + (1 - b_0 - b_1) \cdot d_1 = b_0 \cdot d_2$

On pourrait continuer les calculs.

Mais ce qui nous intéresse :

$$E(L) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \Pi_k = \sum_{k=0}^{+\infty} k d_k$$

$q_{n+1} = q_n - \mathbb{I}_{\{q_n > 0\}} + v_{n+1}$

$q_n \underset{n\to+\infty}{\to} \tilde{q}$

$\mathbb{I}_{\{q_n > 0\}} \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{I}_{\{\tilde{q} > 0\}}$

$v_n \underset{n\to\infty}{\to} \tilde{v}$

$E(\tilde{q}) = ? = E(L)$

$E(q_{n+1}) = E(q_n) - E\left(I_{\{q_n > 0\}}\right) + E(v_{n+1})$

$E(\tilde{q}) = E(\tilde{q}) - E\left(1_{\{\tilde{q} > 0\}}\right) + E(\tilde{v})$

$E\left(1_{\{\tilde{q} > 0\}}\right) = \mathbb{P}(\tilde{q} > 0) = E(\tilde{v})$

$\mathbb{P}(\tilde{q} > 0) = 1 - d_0 = 1 - \Pi_0 = U = \Lambda E(S)$

$$
\begin{aligned}
E(v_n) &= \int_{x=0}^{+\infty} E(v_n|s_n = x)b(x)dx = \lambda E(S) \\
&= \int_{x=0}^{+\infty} \lambda x b(x) \cdot \mathrm{d}x \\
&= \lambda \cdot E(S)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left(\mathbb{I}_{\{\tilde{q}>0\}}\right) &= \mathbb{P}(\tilde{q} > 0) - E(\tilde{v}) \\
&= \lambda E(S) = \Lambda \cdot E(S) \\
&= \rho
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{n+1}^2 = q_n^2 &+ \mathbb{I}_{\{q_{n_1}>0\}} + n_{n+1}^2 \\
&-2q_n \cdot \cancel{\mathbb{I}_{\{q_n>0\}}} + 2q_n v_{n+1} \\
&-2\mathbb{I}_{\{q_n>0\}} v_{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(q_{n+1}^2) = E(q_n^2) &+ E\left(\mathbb{I}_{\{q_n>0\}}\right) + E(v_{n+1}^2) \\
&-2E(q_n) + 2E(q_n)E(v_{n+1}) \\
&-2E\left(\mathbb{I}_{\{q_n>0\}}\right)E(v_{n+1})
\end{aligned}
$$

$$\cancel{E(\tilde{q}^2)} = \cancel{E(\tilde{q}^2)} + E\left(1_{\{\tilde{q}>0\}}\right) + E(\tilde{v}^2) - 2 \cdot E(\tilde{q}) + 2 \cdot E(\tilde{v}) \cdot E(\tilde{q}) - 2 \cdot E\left(1_{\{\tilde{q}>0\}}\right) \cdot E(\tilde{v})$$

$$2E(\tilde{q})(1 - E(\tilde{v})) = E\left(\mathbb{I}_{\{\tilde{q}>0\}}\right) - 2E\left(\mathbb{I}_{\{\tilde{q}>0\}}\right)E(\tilde{v}) + (\tilde{v}^2)$$

$$2E(\tilde{q})(1 - \rho) = \mathbf{2} \cdot \rho - 2 \cdot \rho^2 + E(\tilde{v}) - \boldsymbol{E(\tilde{v})}$$

$$\boldsymbol{E(\tilde{q}) = \rho + \frac{E(\tilde{v}(\tilde{v}-1))}{2 \cdot (1-\rho)}}$$

$$
\begin{aligned}
E(v_n(v_{n-1})) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}(v_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \int_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(v_n = k \mid s_n = x)b(x)\mathrm{d}x \frac{(\lambda x)^k}{k!} \\
&= \int_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda x} b(x) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{(\lambda x)^k}{k!} dx \\
&= \int_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda x} b(x)(\lambda x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{k-2}}{(k-2)!} dx \\
&= \int_{x=0}^{+\infty} \cancel{e^{-\lambda x}} b(x)(\lambda x)^2 \cancel{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!}} dx \qquad \text{car } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = e^{+\lambda x} \\
&= \int_{x=0}^{+\infty} \lambda^2 \cdot x^2 \cdot b(x)dx \\
&= \lambda^2 \cdot E(S^2)
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{E(L) = E(\tilde{q}) = \rho + \frac{\lambda^2 \cdot E(S^2)}{2 \cdot (1-\rho)}}$$

Démonstration 2 : Première formule de Pollaczek–Khinchine

$$
\begin{aligned}
C_S^2 &= \frac{\mathrm{Var}(s)}{E(S)^2} \\
&= \frac{E(S^2)}{E(S)^2} - 1
\end{aligned}
$$

$$E(S^2) = E(S)^2 \cdot (1 + C_S^2) E\left(L_{\mathrm{M/G/1}}\right) = \rho + \frac{\lambda^2 \cdot E(S)^2 \cdot (1 + C_S^2)}{2 \cdot (1-\rho)}$$

$$\boldsymbol{E\left(L_{\mathrm{M/G/1}}\right) = \rho + \rho \cdot (1 + C_S^2) \frac{)}{2 \cdot (1-\rho)}}$$

Pour une charge ρ donnée, $E\left(L_{M/G/1}\right)$ est une fonction croissante de $\mathcal{C}_S^2$, donc minimale quand $\mathcal{C}_S^2 = \mathrm{Var}(S) = \emptyset$

Pour une file M/D/1 $\mathcal{C}_S^2 = \emptyset$

$$\begin{aligned} E\left(L_{\mathrm{M/D/1}}\right) &= \rho + \tfrac{\rho^2}{2\cdot(1-\rho)} \\ &= \tfrac{\rho\cdot(2-\rho)}{2\cdot 1-\rho} \end{aligned}$$

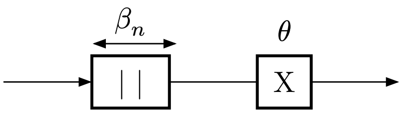
$$\begin{aligned} E\left(L_{\mathrm{M/M/1}}\right) &= C_S^2 = 1 \\ &= \rho + \tfrac{\cancel{2}\cdot\rho^2}{\cancel{2}\cdot(1-\rho)} \\ &= \tfrac{\rho}{1-\rho} \end{aligned}$$

$E(R) = \frac{E(L)}{\Lambda} = \frac{E(L)}{\lambda}$

$$\boldsymbol{E(R) = E(S) + \frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)}}$$

avec $\frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)} = E(w)$ le temps moyen d'attente

5.2. Autre méthode



w_n = temps d'attente du client n

θ_n = temps résiduel de service quand n arrive

β_n = nombre de clients en train d'attendre quand n arrive.

s_k = temps de service du client k

$w_n = \theta_n + \sum_{k=n\cdot\beta_n}^{n-1} s_k$

$E(w_n) = E(\theta_n) + E(\beta_n) \cdot E(S)$

On applique: $\lim_{n\to\infty}$
- On applique aussi **PASTA** sur θ_n et β_n

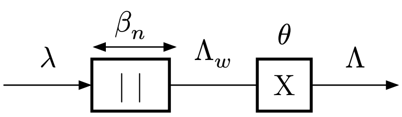
$E(w) = E(\theta) + E(L_w) \cdot E(S)$

Avec $E(\theta)$: temps moyen résiduel en régime permanent.

et $E(L_w)$: nombre myen de clients en train d'attendre en régime permanent

$E(w) = E(\theta) + E(L_w) \cdot E(S)$ $E(\theta)$ = tps moyen résiduel en régime permanent

$E(L_w)$ = nombre moyen de clients en train d'attendre en régime permanent



On a donc:

$E(L_w) = \Lambda_w E(w)$ d'après la loi de Little.

$= \lambda E(w)$

$E(w)\{1 - \lambda E(S)\} = E(\theta)$

$$\boldsymbol{E(w) = \frac{E(\theta)}{1 - \rho}}$$

M_T : nombre de clients servis entre 0 et T.

$\overline{\theta_T} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \alpha(t)dt$

$= \frac{M_T}{T} \cdot \frac{1}{M_T} \cdot \sum_{k=1}^{M_T} \frac{s_k^2}{2}$

$= \frac{1}{2}\frac{M_T}{T}\frac{1}{M_T}\sum_{k=1}^{M_T} s_k^2$

$\downarrow T \to \infty$

$E(\Theta) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot E(S^2) = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot E(S^2)$

$$\boldsymbol{E(w) = \frac{\lambda \cdot E(S^2)}{2(1 - \rho)}}$$

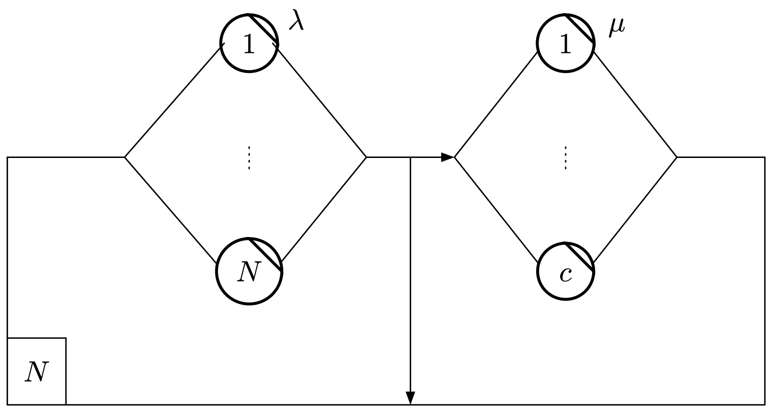
6. Réseaux de files d'attente

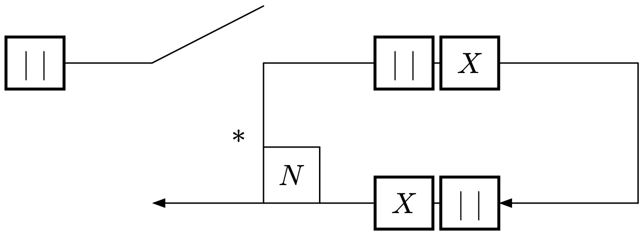
Définition 8: Réseau de files d'attente

Un réseau de files d'attentes est composé d'un certain nombre de files d'attente simples et de clients qui circulent entre ces files.

- On suppose que le passage d'une file à un autre est instantanée.
- On suppose qu'un client n'est que dans 1 file à la fois et qu'un serveur ne sert qu'un client à la fois.
- On appelle le cheminement des clients dans le réseau « routage » (🛣️ 🧓). Ce routage peut être déterministe, aléatoire, adaptatif etc…
- on va distinguer les réseaux de files d'attente ouverts dans lesquels des clients rentrent dans le réseau, circulent entre les files et ressortent des réseaux de files d'attente fermés où un nombre constants de clients circulent entre les files.

Exemple: de réseaux fermés





6.1. Réseaux de files d'attente

Définition 9: Réseau de capacité maximale du système (y compris les clients en service et en attente).

Un réseau ouvert avec K files d'attentes est dit **réseau de Jackson** si:

- Les arrivées dans le réseau sont poissonniennes de taux λ
- chaque file:
  - 1 serveur ;
  - FCFS ;
  - service exponentiel de taux μ_i ;
  - capacité ∞.
- Routage probabiliste:
  - p_{ij}: proba qu'en sortant de la file i, le client aille dans la file j ;
  - $P = (p_{\text{ij}})_{1<i<K}^{1<j<K}$ la matrice de routage

  La matrice P est **sous-stochastique**.

  - p_{i0}: la probabilité qu'en sortant de la file i, le client quitte le réseau.
  - p_{0i}: la probabilité qu'en rentrant, le client aille vers la file i
  - $q_0 = (p_{01}, ..., p_{0k})$

6.1.1. Flux dans les réseaux de Jackson

λ_i: débit d'entrée de la file i

Λ_i = débit de sortie de la file i

On en déduit la relation entre les 2:

$$\lambda_i = \lambda \cdot p_{\text{Oi}} + \sum_{j=1}^{K} \Lambda_j \cdot p_{\text{ji}}$$

λ : taux d'arrivée poissonnienne

e_i = nombre moyen de passages d'un client par la file i

$e = (e_j, ..., e_k)$

Si le réseau est stable : $\lambda_i = \Lambda_i$

$\lambda_i = \lambda \cdot p_{0i} + \sum_{j-1}^{k} \lambda_j p_{\text{ij}}$

$\lambda_i = \lambda e_i$

$\lambda e_i = \lambda \cdot p_{0i} + \sum_{j=1}^{k} \lambda e_j p_{\text{ji}}$

$e_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{K} e_j p_{ij}$

$e = q_0 + e \cdot P$

On isole q_0:

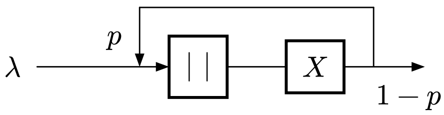
$e(\mathbb{I} - P) = q_0$

- Donc si la matrice I - P est inversible:

$e = q_0 \cdot (I - P)^{-1}$

Si la matrice I - P n'est pas inversible, cela se traduit par une possibilité de ne jamais sortir du réseau.

exemple 1 :



On voit simplement que: $e_1 = 1 + p \cdot e_1$ Si: $1 - p > 0$

donc: $e_1 = \frac{1}{1-p}$

On note: $\mathbb{N}_1$: le nombre de passages dans la file 1.

On a alors:

$\mathbb{P}(N_1 = 1) = 1 - p$

$\mathbb{P}(N_1 = 2) = p \cdot (1 - p)$

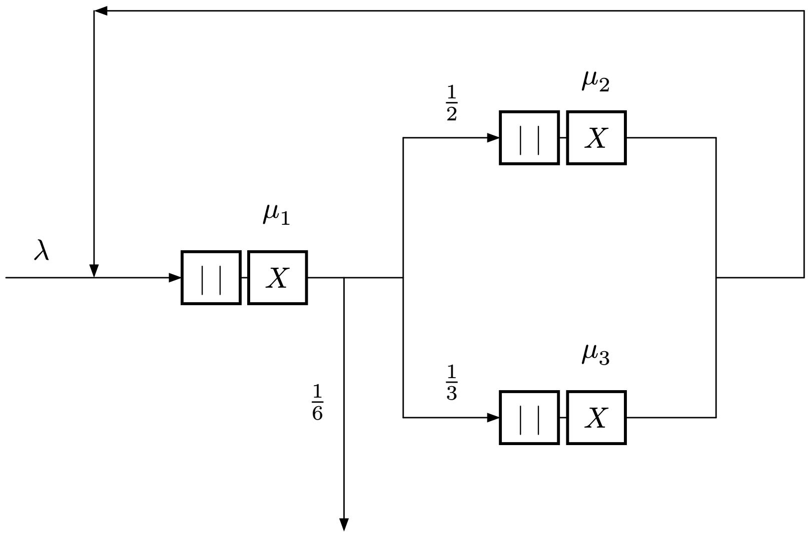
$\mathbb{P}(N_1 = k) = p^{k-1} \cdot (1 - p)$

On remarque une loi géométrique. Et donc comme: $\mathbb{E}(\mathbb{N}_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\mathbb{N}_1 = k)$.

La somme géométrique nous donne:

$$\boldsymbol{\mathbb{E}(\mathbb{N}_1) = \frac{1}{1-p}}$$

exemple 2:



On a:

$q_0 = (100)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{On tire de cette matrice:} \\ e_1 = 1 + e_2 + e_3 \\ e_2 = \frac{1}{2} \cdot e_1 \\ e_3 = \frac{1}{3} \cdot e_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{On remplace dans les différentes équations:} \\ e_1 = 6 \\ e_2 = 3 \\ e_3 = 2 \end{cases}$$

$L_{j(t)}$: nombre de clients dans la file j à t.

$\left(L_{j(t)}, t \geq 0\right)$ est-il une CMTC?

- $\mathbb{P}$(1 arrivée de l'extérieur dants la file j entre t et $t + dt) = \lambda \cdot \mathrm{dt} + o \cdot (\mathrm{dt})$
- $\mathbb{P}$(1 fin de service entre t et $t + dt) = \mu \cdot \mathrm{dt} + o \cdot (\mathrm{dt})$
- $\mathbb{P}\Big($1 arrivée d'1 autre file entre t et $t + dt \ \left(L_{j(t)} = n_j\right)\Big)$ =??

$\left(\left(L_1(t), ..., L_{K(t)}\right) t \geq 0\right)$ est un CMTC

Si un client passe de la file i à la file j:

$\mathbb{P}\Big(L_{j(t+dt)} = n_1, ..., L_{j(t+dt)} = n_j + 1, ..., L_{i(t+dt)} = n_i - 1, L_{k(t+dt)} = n_k \mid L_1(t) = n_1, L_{j(t)} = n_j\Big), L_{i(t)} = n_i, L_{k(t)} = n_k) = p_{\mathrm{ij}} \mu_i dt + o(dt)$

Ce n'est pas un processus de naissance et de mort.

<u>Notations :</u>

$n = (n_1, ..., n_k)$

$n_j = \left(n_1, ..., n_{j+1}, ..., n_k\right)$

$n_i = (n_1, ..., n_{i-1}, ..., n_k)$

$n_i + j = \left(n_1, ..., n_{i+1}, ..., n_{j-1}, ..., n_k\right)$

Théorème 4 : Théorème de Jackson

Dans un réseau de Jackson ouvert si :

- $\rho_j = \frac{\lambda_{c_j}}{\mu_j} < 1 \qquad 1 \leq j \leq k$
- $\Pi(n) = \Pi_{j=1}^{k} (1 - p_j) p_j^{n_j}$ solution à forme produit

Démonstration 3 :

$\sum_{n \in \Omega} \Pi(n)$

$\Omega = \{(n_1, ..., n_K), n_1 \geq 0, ..., n_K \geq 0\}$

$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} ... \sum_{n_K=0}^{\infty} \Pi_{j=1}^{K} (1 - \rho_j) e_j^{n_j} = 1$

1. On va vérifier que Π satisfait le système linéaire $\Pi \cdot Q = 0$:

$$\forall n \in \Omega$$

$$\begin{aligned}\Pi(n) \left\{ \lambda + \sum_{j=1}^{K} \mu_j \mathbb{I}_{\{n_j > 0\}} \right\} &= \sum_{j=1}^{K} \mu_j p_{j0} \Pi\left(n_{j^+}\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{k} \lambda \cdot p_{0j} \mathbb{I}_{\{n_j > 0\}} \Pi\left(n_j\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \mu_i p_{\mathrm{ij}} \mathbb{I}_{\{n_j > 0\}} \cdot \Pi\left(n_{i^+ j^-}\right)\end{aligned}$$

Équation de Chapman-Kolmogorov ou **Équation d'équilibre globale**

2. On va vérifier que Π satisfait toutes les équations d'équilibre globale

On va écrire à partir de l'équation globale $(K + 1)$ équation dites d'équilibre local.

(0) $\lambda \cdot \Pi(n) \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^{K} \mu_j p_{\mathrm{j0}} \cdot \Pi\left(n_{j^+}\right)$

(1)-(K) $\mu_j \mathbb{I}_{\{n_j > 0\}} \Pi(n) \stackrel{?}{=} \lambda \cdot p_{0j} \mathbb{I}_{\{n_j > 0\}} \Pi\left(n_j^-\right) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \cdot p_{\mathrm{ij}} \mathbb{I}_{\{n_j > 0\}} \Pi_{n^-_{(i+j)}}$

L'équation (1)-(K) est plus facile à prouver (contre intuitif), donc on commence par prouver celle-ci:

- (1)-(k):
  - Si $n_j = 0$, alors tout de suite on a: $0 = 0$.
  - Si $n_j \neq 0,$ alors $\mu_j \Pi(n) \stackrel{?}{=} \lambda p_{0j} \Pi\left(n_{j^-}\right) + \sum_{i=1}^{K} \mu_i p_{ij} \Pi_{n^+ j^-}$

$$\cancel{\mu_j} \cancel{\Pi(n)} \stackrel{?}{=} \cancel{\lambda} p_{0j} \cancel{\Pi(n)} \frac{\cancel{\mu_j}}{\cancel{\lambda} e_j} + \sum_{i=1}^{K} \cancel{\mu_i} p_{ij} \cancel{\Pi(n)} \frac{\cancel{\lambda} e_i}{\cancel{\mu_i}} \frac{\cancel{\mu_i}}{\cancel{\lambda} e_j}$$

$$e_j \stackrel{?}{=} p_{0j} + \sum_{i=1}^{K} p_{ij} e_i$$

On démontre maintenant l'autre équation:

- (0)

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \Pi(n) &\stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^{K} \mu_j p_{\mathrm{j0}} \Pi\left(n_j^+\right) \\ &\stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^{K} \mu_j \cdot \lambda_{\mathrm{j0}} \cdot \Pi(n) \cdot \frac{\lambda_{e_j}}{\mu_j}\end{aligned}$$

On simplifie par $\lambda \cdot \Pi(n)$ des 2 cotés, ce qui nous donne:

$$\mathbf{1} \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^{K} \boldsymbol{e_j p_{\mathrm{i0}}}$$

On reprend le résultat de (1) - (K) et on va développer jusqu'à arriver au résultat de (0):

$e_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^{k} p_{\text{ij}} e_i$

$\sum_{j=1}^{k} e_j = \sum_{j=1}^{k} p_{0j} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} p_{\text{ij}} e_i$

$\qquad\qquad = 1 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} p_{\text{ij}} c_j = 1 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} p_{\text{ji}} e_j$

$\sum_{j=1}^{k} e_{j\left(1 - \sum_{i=1}^{k} p_{\text{ij}}\right)} = 1$

$\sum_{j=1}^{k} = e_j p_{j\emptyset} = 1$

Donc Π satisfait toutes les équations d'équilibre local:

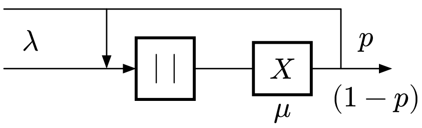
- $\Rightarrow$ toutes les équations d'équilibre local
- $\Rightarrow$ c'est la solution de: $\begin{cases} \Pi \cdot Q = 0 \\ |M| = 1 \end{cases}$

Corollaire 2 : dans un réseau de Jackson (si $p_j < 1 \;\; ; \;\; 1 \leq j \leq K$) chaque file se comporte comme une file M/M/1 de taux d'arrivée λe_i et taux de service μ_i (chaque ρ_j)

$E(L_j) = \frac{\rho_j}{1 - \rho_j}$ $\qquad$ $E(R_j) = \frac{1}{\mu_j - \lambda e_j}$

$E(L) = \sum_{j=1}^{K} E(L_j)$ $\qquad$ $E(R) = \frac{E(L)}{\lambda} = \sum_{j=1}^{K} e_j E(R_j)$

$\Pi_{j(n_j)} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_{j-1}=0}^{\infty} \sum_{n_{j+1}=0}^{\infty} \dots \sum_{n_K=0}^{\infty} \Pi_{i=2}^{K} (1 - p_i)^{n_i} \cdot p_i$



$e_1 = \frac{1}{1-p}$

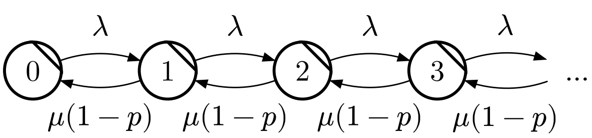
$\rho_1 = \frac{\lambda \cdot e_1}{\mu} < 1 \Rightarrow E(L_1) = \frac{\lambda \cdot \frac{e_1}{\mu}}{1 - \lambda \cdot \frac{e_1}{\mu}}$

$E(L) = E(L_1) = \frac{\frac{\lambda}{\mu(1-p)}}{1 - \frac{\lambda}{\mu(1-p)}}$

$E(R_1) = \frac{1}{\mu - \lambda e_1} = \frac{1}{\mu - \frac{\lambda}{1-p}}$

$E(R) = e_1 E(R_1) = \frac{1}{\mu(1-p) - \lambda}$

$L_1(t)$ est 1 CMTC.



C'est la même chaine que pour 1 file M/M/1 de taux d'arrivée λ et de taux de service $\mu(1-p)$.

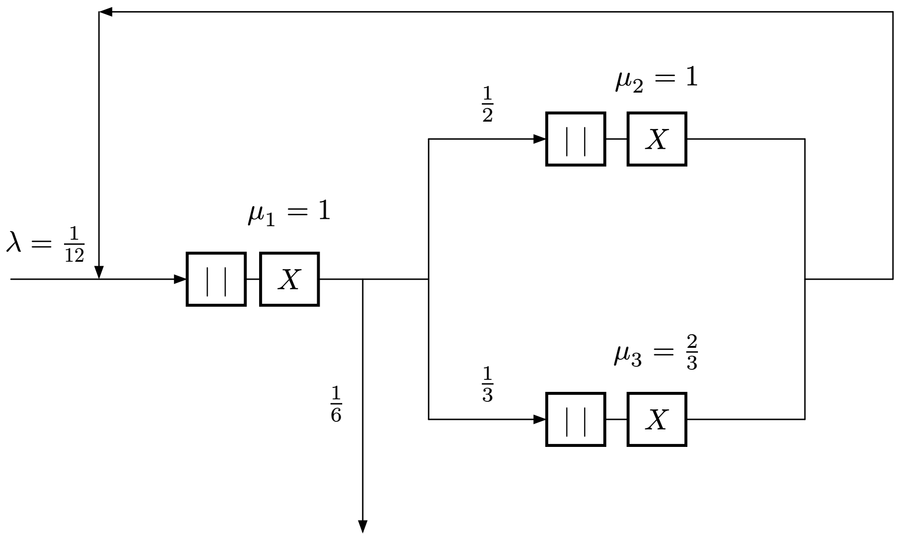
D'où: $E(L) = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu \cdot (1-\rho)}}{1 - \frac{\lambda}{\mu \cdot (1-p)}}$

Et donc:

$$\boldsymbol{E(R) = \frac{1}{\mu \cdot (1-p) - \lambda}}$$

exemple 2:

On reprends l'exemple 2 fait précédemment:



On en tire : $\begin{cases} e_1=6 \\ e_2=3 \\ e_3=2 \end{cases}$

Ainsi que les équations des différents ρ: $\begin{cases} \rho_1=\frac{\lambda e_1}{\mu_1}=\frac{\frac{1}{12}\times 6}{1}=\frac{1}{2}<1 \\ \rho_2=\frac{\lambda e_2}{\mu_2}=\frac{\frac{1}{12}\times 3}{1}=\frac{1}{4}<1 \\ \rho_3=\frac{\lambda e_3}{\mu_3}=\frac{\frac{1}{12}\times 2}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}<1 \end{cases}$

$E(L_1) = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

$E(L_2) = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

$E(L_3) = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

$E(L) = \frac{5}{3}$

$E(R) = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{12}} = 20$

$E(R_1) = \frac{E(L_1)}{e_1\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{12}\times 6} = 2$

$E(R_2) = \frac{\frac{1}{3}}{3\cdot(\frac{1}{12})} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$E(R_3) = \frac{E(L_3)}{e_3\lambda} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{12}\times 2} = 2$

6.1.2. Réseaux de Jackson fermés

Définition 10: Réseaux de Jackson fermés :

Un réseau de file d'attente fermé comportant K files et M clients sera dit réseau de Jackson fermé si :

- chaque file :
  - 1 serveur ;
  - FCFS ;
  - Service exponentiel de taux μ_i ;
  - Capacité ∞ (au - M).

- Routage probabiliste:

  p_{ij}: proba qu'en sortant de la file i, le client aille dans la file j

  P matrice de routage $P = \left(p_{ij}\right)$ est **stochastique**.

- Flux dans le réseau:

  $\lambda_j = \sum_{i=1}^{K} \Lambda_i \cdot p_{\text{ij}}$

  $\quad = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \cdot p_{\text{ij}}$

  e_j = nombre moyen de passage d'un client par la file j.

  $\lambda_j = \lambda e_j \qquad e = (e_1, ..., e_K)$

  $e_j = \sum_{i=1}^{K} e_i p_{ij}$

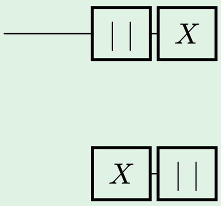
  $e = e \cdot P$

  Donc en passant de l'autre coté de l'égalité:

  $e(I - P) = 0$, La matrice I - P n'est pas inversible.

  La notion de nombre moyen de passages n'est plus qu'une solution relative.

- à un temps d'observation T, $e_j(T)$ = nombre moyen de passage par j pendant T

- 

par rapport à 1 point d'observation

- e_j^* : nombre moyen de passages par j entre 2 passages au point d'observation.

  .Les critères de performance seront alors *relatifs* à ce point..

$e^* = e^* P + 1$ équation liée au point d'observation

$L_{i(t)}$: nombre de clients dans la file à t.

$(L_i(t), t \geq 0)$ est il un CMTC ?

$\mathbb{P}(1 \text{ départ entre t et t+dt} \mid L_i(t) = n_i > 0) = \mu_i \cdot \mathrm{dt} + \mathrm{o(dt)}$

$\mathbb{P}(1 \text{ arrivéé}) = ??$ (inconnu)

$\left(\left(L_1(t), ..., L_{k(t)}\right), i \geq 0\right)$ est 1 CMTC

$n = (n_1, ..., n_k)$

$\mathbb{P}(L_i(t + dt) = n_1, ..., L_i(t + dt) = n_i - 1), ..., L_i(t + dt) - n_j + 1... \mid \begin{cases} L_1(t) = n_1 - L_i(t) - n_i > 0 \\ L_k(t) = n_k \end{cases}$

Ce n'est pas un processus de naissance et de mort.

$n = (n_1 ... n_K),\ n_{i^+ j^-} = \left(n_1, ..., n - i + 1, ..., n_j - 1, ..., n_K\right)$

$\Omega = \left\{n = (n_1, ..., n_k) \mid n_1 + n_2 + ... + n_k = M \text{ et } 0 \leq n_j \leq M \forall j\right\}$

$|\Omega| = \binom{M+K-1}{K-1} = \binom{M+K-1}{M}$

Théorème 5 : Théorème de Gordon et Newell On envisage un modèle fermé dans lequel on a en permanence N clients

Dans un réseau de Jackson fermé si le graphe formé par les fils est fortement connexe

$\Pi(n) = G \cdot \Pi_{j=1}^{k} \left(\frac{e_j^*}{\mu_j}\right)^{n_j}$ $\qquad G/\Sigma_{n\in\Omega}\Pi(n) = 1$

Solution à forme produit

Démonstration 4 : Démonstration du Théorème de Gordon et Newell

On va vérifier que Π satisfait $\Pi \cdot Q = 0$

On écrit les équations de Chapmann-Kolmogorov

$\Pi(n) = \Sigma_{j=1}^{k}\mathbb{I}\{n_j > 0\}\mu_j = \Sigma_{i=1}^{k}\Sigma_{j=1}^{k}\mu_i \cdot \mathrm{p_{ij}} \cdot \mathbb{I}\{n_j > 0\} \cdot \pi_{n_i+j^-}$

On écrit les équations d'équilibre local

$(1) - (K)\ \Pi(n)\mu_j\mathbb{I}_{\{n_j>0\}} = \sum_{i=1}^{K} \mu_i\mathbb{I}_{\{n_j>0\}}p_{ij}\Pi_{n_{i+j^-}}$

soit :

- $n_j = 0 \Rightarrow 0 = 0$
- $n_j > 0 \Rightarrow \Pi(n)\mu_j^1 = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \cdot p_{ij} \cdot \Pi(n) \cdot \frac{e_i^*}{\mu_i} \cdot \frac{\mu_j}{e_j^*}$

$$e_j^* \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^{k} p_{ij} \cdot e_i^*$$

Algorithme de mise en oeuvre

- on fixe un point d'observation ;
- $e^* = e^*P$ on passe une seule fois par le point d'observation ;
- on décrit l'espace d'état et on écrit les probabilités des états en fonction de G ;
- on détermine G
- on choisit une file i et on détermine son taux d'occupation de serveur:

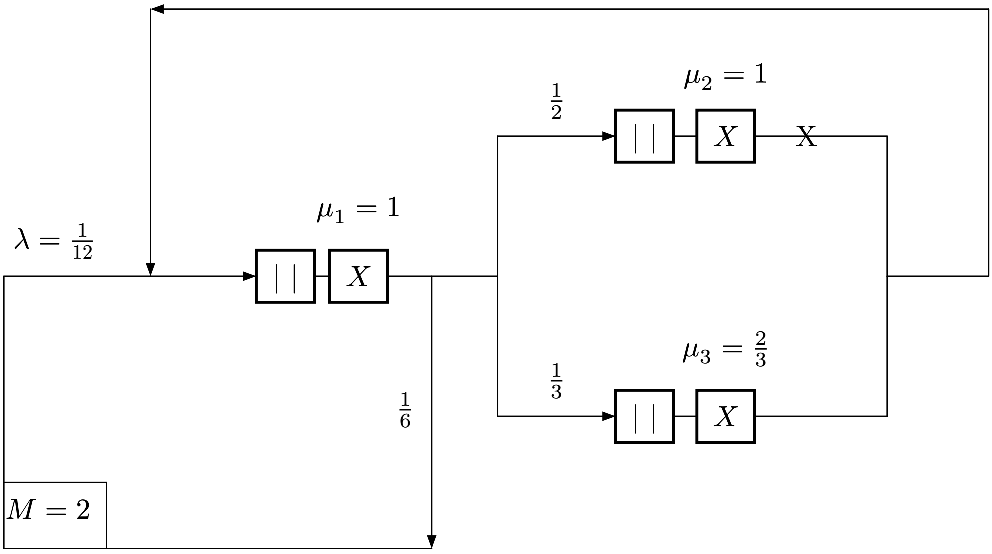
$U_i = \sum_{n\in\Omega n_i>0} \Pi(n)$

$\quad = \Lambda_i \cdot E(S_i) = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} = \frac{\Lambda^* \cdot e_i^*}{\mu_i}$ Λ^* débit au point d'observation.

$\Lambda_i = \Lambda^* e_i^*$

$\Lambda^* = \frac{U_i\mu_i}{e_i^*}$

$\overline{R^*} = \frac{M}{\Lambda^*}$



$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$e_1 = \frac{1}{6} \cdot e_1 + e_2 + e_3$

$e_2 = \frac{1}{2} \cdot e_1$ $\quad \Rightarrow e_1^* = 2$

$e_3 = \frac{1}{3} \cdot e_1$ $\quad e_3^* = \frac{2}{3}$

$\frac{e_1^*}{\mu_1} = 2 \qquad \frac{e_2^*}{\mu_2} = 1 \qquad \frac{e_3^*}{\mu_3} = 1$

$\Pi(2 \quad 0 \quad 0) = G \quad 2^2 \quad 0^1 \quad 0^1 = 4G = \frac{4}{11}$

$\Pi(1 \quad 1 \quad 0) = G \quad 2^1 \quad 0^1 \quad 0^0 = 2G = \frac{2}{11}$

$\Pi(1 \quad 0 \quad 1) = G \quad 2^1 \quad 0^0 \quad 0^1 = 2G = \frac{2}{11}$

$\Pi(0 \quad 2 \quad 0) = G = \frac{1}{11}$

$\Pi(0 \quad 1 \quad 1) = G = \frac{1}{11}$

$\Pi(0 \quad 0 \quad 2) = G = \frac{1}{11}$

$G = \frac{1}{11}$

Je choisis la file 2:

$U_2 = \Pi(1 \quad 1 \quad 0) + \Pi(0 \quad 2 \quad 0) + \Pi(0 \quad 1 \quad 1) = \frac{4}{11}$

$\Lambda^* = \frac{U_2 \cdot \mu_2}{e_2^*} = \frac{4}{11}$

Si on avait pris la file 1 :

$U = \Pi(2 \quad 0 \quad 0) + \Pi(1 \quad 1 \quad 0) + \Pi(1 \quad 0 \quad 1) = \frac{8}{11}$

$\Lambda^* = \frac{U_1 \mu_1}{e_1^*} = \frac{\frac{8}{11} \times 1}{2} = \frac{4}{11}$

$\overline{R^*} = \frac{2}{\frac{4}{11}} = \frac{11}{2}$

$e_1^+ = 6$

$e_2^+ = 3$

$e_3^+ = 2$

Les probabilités stationnaires sont identiques.

U_i également.

$\Lambda^* = \frac{U_2 \cdot \mu_2}{e_2^*} = \frac{\frac{4}{11}}{3} = \frac{4}{33}$

$(\lambda, \mu_i, P, q_0) \overset{\text{Jackson}}{\rightarrow} \begin{cases} E(L_i) \\ E(L) \end{cases} \overset{\text{Little}}{\rightarrow} \begin{cases} E(R_i) \\ E(R) \end{cases}$

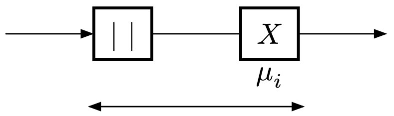
$(\mu_i, P, M) \overset{\text{Th de Gordon \& Newell}}{\rightarrow} \Lambda^* \overset{\text{Little}}{\rightarrow} E(R^*)$

Récurrence Mean Value Analysis (MVA) (Algorithme de Reiser)

Dans un réseau de Jackson fermé on note

- $\overline{R_i}(M)$ le temps moyen de réponse de la file i quand il y a M clients en régime permanent;
- $\overline{L_i}(M)$ le nombre moyen de réponses quand il y a M clients en régime permanent;
- $\overline{S_i}$ le temps moyen de service;
- $\overline{Q_i}(M)$ le nombre moyen de clients dans la file i en régime permanent quand un client arrive;

$$\begin{aligned} \overline{R_i}(M) &= \overline{Q_i}(M) \cdot \overline{S_i} + \overline{S_i} \\ &= \left(1 + \overline{Q_i}(M)\right) \frac{1}{\mu_i} \end{aligned}$$



Théorème 6 : Théorème de Sevak-Mitrni (et non Mittérand, le poisson président des neuils)

Dans un réseau de Jackson fermé:

$\overline{Q_i}(M) = \overline{L_i}(M-1)$

$e_i^* \cdot \overline{R_i}(M) = \left(1 + \overline{L_i}(M)\right) \frac{1}{\mu_i} \cdot e_i^*$

Récurrence MVA :

```

for j from 1 to k do
    C_j ← ∅
end for
```

for i from 1 to M **do**
  for j from 1 to k **do**
    $e_j^* \overline{R_j} = \left(1 + \overline{L_j} \cdot \frac{i \cdot e_j^*}{\mu_j}\right)$
  end for
  $e_j^* \overline{R_j} \leftarrow \left(1 + \overline{L_j} \cdot \frac{i \cdot e_j^*}{\mu_j}\right)$
  $\Lambda^* \leftarrow \frac{i}{R}$ (Little global)
  for j from 1 to k **do**
    $L_j \leftarrow \Lambda^* \cdot e_j^* \overline{R_j}$
  end for
end for

	1	2
$e_1^* \overline{R_1}$	$\frac{e_1^*}{\mu_1}(1+o) = 2$	$2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$
$e_2^* \overline{R_2}$	$\frac{e_2^*}{\mu_2}(1+o) = 1$	$1\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$
$e_3^* \overline{R_3}$	$\frac{e_3^*}{\mu_3}(1+o) = 1$	$1\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$
$\overline{R}$	4	$\frac{11}{2}$
Λ	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{11}$
$\overline{L_1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{11}$
$\overline{L_2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{11}$
$\overline{L_3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{11}$

Extensions de MVA

- fies avec 1 serveur, service exponentiel, FCFS
- nombre infini de serveurs, temps de service général

  $\overline{R_i}(M) = \overline{S_i}$

Etude des files avec infinité de serveurs:

M/M/∞

M/D/∞

$\Pi_1 = \rho \cdot \Pi_0$

$\Pi_2 = \left(\frac{\rho}{2}\right) \cdot \Pi_1 = \left(\frac{\rho^2}{2}\right) * \Pi_0$

$\Pi_k = \frac{\rho}{K} \cdot \Pi_{K-1} = \frac{\rho^K}{K!} \cdot \Pi_0$

$\Pi_0 \cdot \left(1 + \rho + ... + \left(\frac{\rho^K}{K!}\right) + ...\right) = 1$

$\Pi_0 = e^{-}\rho$

$\Pi_K = \left(\frac{\rho^K}{K}\right) \cdot e^{-}\rho$

M/D/∞

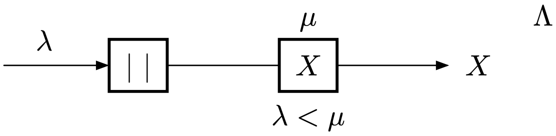
$\Pi_{K(t)} = \mathbb{P}(K$ clients dans la file à $t)$ Ce sont les clients arrivées entre t $_{\text{et}}(t - D)$

$= \frac{(\lambda D)^K}{K!} e^{-\lambda D}$

$= \frac{\rho^K}{K!} e^{-}\rho$

Etude du processus de sortie d'une file M/M/1

T = temps entre deux sorties



Si la file n'est pas vide:

$T = S$ et $T \sim \exp(\mu)$

$f_{S(x)} = \mu e^{-\mu \cdot x}\mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}$

Si la file est vide:

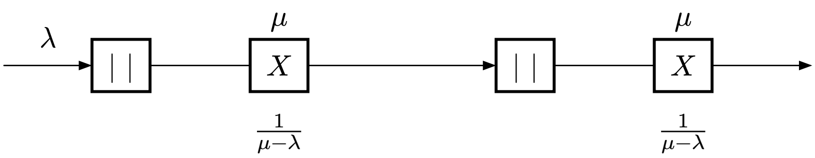
$T = S + A$

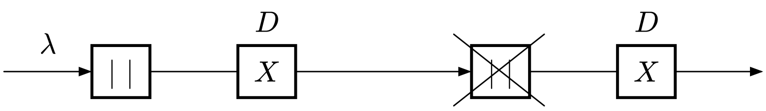
où $A \sim \exp(\lambda)$ et $S \sim \exp(\mu)$

$$
\begin{aligned}
f_{T(x)} &= \int_{y=0}^{x} f_{A(y)} f_{S(x-y)} dy \\
&= \int_{y=0}^{x} \lambda e^{-\lambda \cdot \mu} \cdot \mu e^{-\mu(x-y)} dy \\
&= \lambda \cdot \mu \cdot e^{-\mu x} \int_{y=0}^{x} e^{y(\mu-\lambda)} dy \\
&= \lambda\mu e^{-\mu x} \left[\frac{1}{\mu\lambda} \cdot e^{y(\mu-\lambda)}\right]_0^x \\
&= \frac{\lambda\mu e^{-\mu x}}{\mu-\lambda}\left[e^{x(\mu-\lambda)} - 1\right] \\
&= \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\left(e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}\right) \\
&= \rho f_{S(x)} + (1-\rho) f_{A+S}(x) \\
&= \frac{\lambda}{\cancel{\mu}}\cancel{\mu} e^{-\mu x} + \frac{\cancel{\mu-\lambda}}{\cancel{\mu}} \frac{\lambda\cancel{\mu}}{\cancel{\mu-\lambda}}\left(e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}\right)
\end{aligned}
$$

$f_{T(x)} = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$

$T \sim \exp(\lambda)$

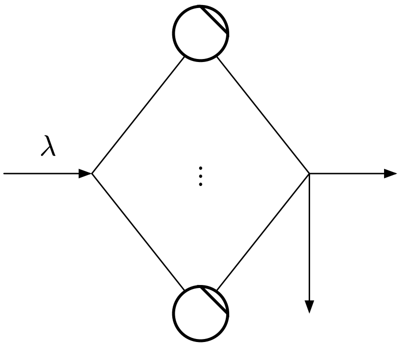




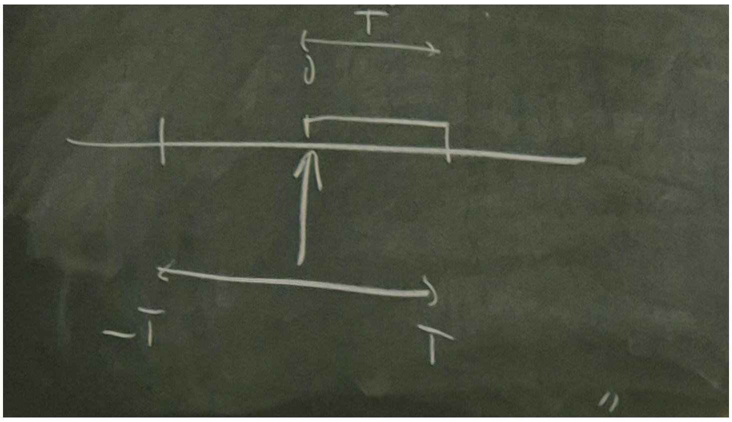
$E(L) = \frac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)}$

$E(R) = \frac{\rho(L)}{\lambda}$

Méthode d'accès aléatoires Aloha



taille de trame constante, temps d'émission T.



Période de vulnérabilité $[-T, T]$

$\mathbb{P}(\text{succès}) = e^{-2\lambda T}$ Occupation du support par des transmissions réussies

$\Theta = \lambda T e^{-2\lambda T}$, λT la charge

$G = \lambda T$

$\Theta(G) = Ge^{-2G}$

$\Theta'(G) = e^{-2G}\{1 - 2G\}$

G	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	∞
θ'	+		-	
θ	$\nearrow$		$\searrow$	

$\Theta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e} = 0,18$

Vulnérabilité $[-T, 0]$

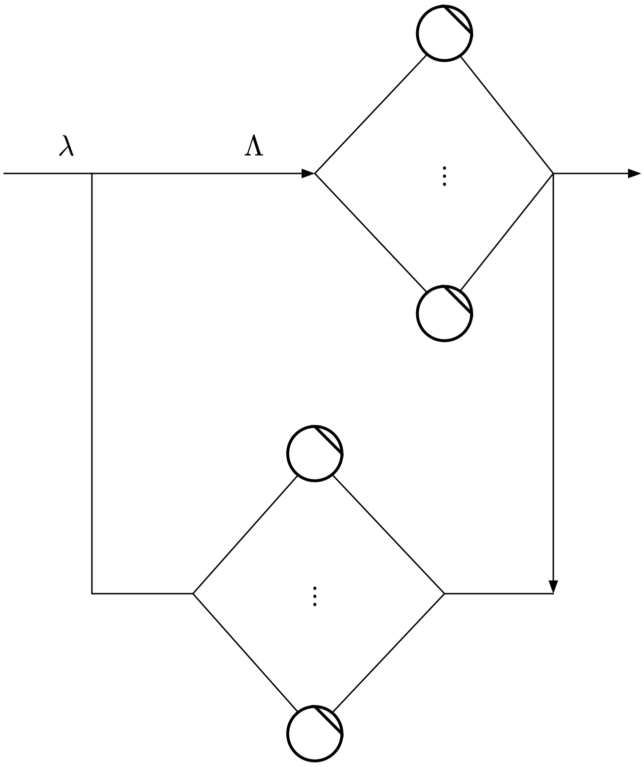
$\mathbb{P}(\text{succès}) = e^{-\lambda T}$

$\Theta = \lambda T e^{-\lambda T} = Ge^{-G}$

$\Theta'(G) = e^{-G}(1 - G)$

G	0	1	1	∞
θ'	+		-	
θ	$\nearrow$		$\searrow$	

$\Theta(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0.36$



On suppose que le trafic émis sur le support suit une loi de Poisson de Paramètre (ΛT)