# Formes d'ondes circulaires par bloc et égalisation fréquentielle

C. Poulliat

25 novembre 2020

# Plan

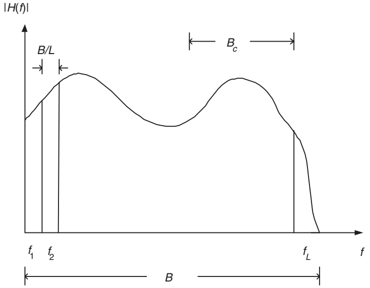
# Plan

# OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

Principe de base, rappels

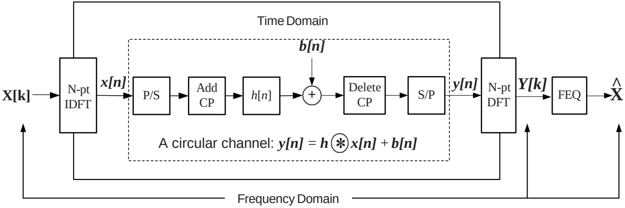
## Orthogonal Frequency Division Multiplexing

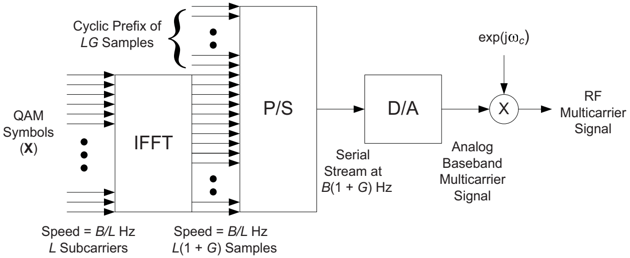
- Introduit pour traiter efficacement les interférences entre symboles pour les canaux fortement dispersifs,
- Principe : transformer un canal large bande en un certains nombre de canaux bande étroite de largeur plus petite que la bande de cohérence du canal.
  $\Rightarrow$ *flat fading* sur chaque canal



# OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

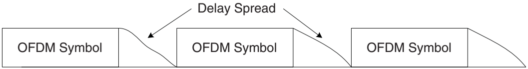
## structure émetteur-récepteur en mono-utilisateur



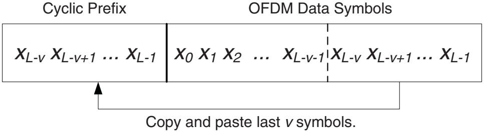



# OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

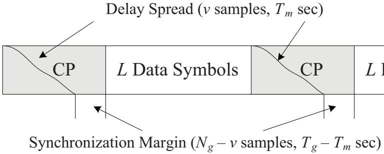
## Principe du préfixe cyclique




Intervales de garde ⇒ pas d'IES inter-symboles OFDM




Préfixe cyclique : rendre la convolution avec le canal circulaire




Ajout Préfixe cyclique : plus IES intra symbole OFDM

# OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

## Modélisation, notations

- TFD :

$$X[k] = TFD(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \ \forall k = 1 : N-1$$

- TFD inverse :

$$x[n] = TFD^{-1}(X[k]) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+i\frac{2\pi}{N}nk}, \ \forall k = 1 : N-1$$

- Convolution circulaire :

$$\begin{aligned} TD : y[n] &\triangleq h \circledast x[n] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] h[< n-m >_N], \ \forall n = 0 : N-1 \end{aligned}$$

$$FD : Y[k] = H[k]X[k], \ \forall k = 0 : N-1$$

# OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

## Modélisation récepteur, domaine temporel

- Soit un bloc de $N$ symboles modulés noté $X[k] \in \mathcal{X} \subset \mathbb{C}, \forall k = 0 \cdots N-1$.
- Après passage par le bloc de TFD inverse, on obtient un bloc de symboles

$$x[n] = TFD^{-1}(X[k]), \forall n = 0 \cdots N-1.$$

- Après ajout d'un préfixe cyclique, on obtient le vecteur

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}[0]\tilde{x}[1] \cdots \tilde{x}[N+N_{cp}-1]] = [x[N-N_{cp}] \cdots x[N-1]|x[0] \cdots x[N-1]].$$

- Après transmission sur le canal, on a

$$y[n] = h * \tilde{x}[n] + b[n]$$

- Après retrait du CP, on a

$$y[n] = h \circledast x[n] + b[n]$$

# OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

## Modélisation récepteur, domaine fréquentiel

- Par propriété de la transformée de Fourier discrète, on a $\forall k = 0 \cdots N-1$

$$Y[k] = TFD(y[n]) = H[k]X[k] + B[k]$$

où $H[k] = TFD(h[n])$ et $B[k] = TFD(b[n])$
$\Rightarrow$ on a donc transformé un canal sélectif en fréquence en canal sélectif en temps/à évanouissements temporels

$\Rightarrow$ Par propriétés de la transformée de Fourier, le bruit est toujours blanc Gaussien

# OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

## Modélisation récepteur, aspect récepteur

- Il est souvent présenté une "égalisation" des canaux avant décision. On "filtre" les données par un filtre "one-tap" $W[k]$ chaque sous canaux (ie ; $\forall k = 1 \cdots N-1$). On obtient alors un symbole estimé

$$\hat{X}[k] = W[k]Y[k] = W[k]H[k]X[k] + W[k]B[k] = \alpha_k X[k] + B[k]$$

- Deux types de critère :
  1. Critère Zero-forcing :

$$W[k] = \frac{1}{H[k]}$$

  2. Critère MMSE :

$$W[k] = \frac{H^*[k]}{|H[k]|^2 + N_0}$$

$\Rightarrow$ le modèle étant un modèle à évanouissements scalaires, cette étape n'est pas nécessaire si on considère un système OFDM codé.

# OFDM, un exemple forme d'onde circulaire

## Modélisation récepteur, aspect récepteur

- Détection par maximum de vraisemblance : en utilisant le modèle discret équivalent il vient directement :

$$\hat{X}[k] = \arg\max_{X \in \mathcal{X}} P(Y[k]|X[k], H[k])$$

où dans le cas Gaussien on a

$$P(Y[k]|X[k], H[k]) \propto exp(-\frac{||Y[k] - H[k]X[k]||^2}{N_0})$$

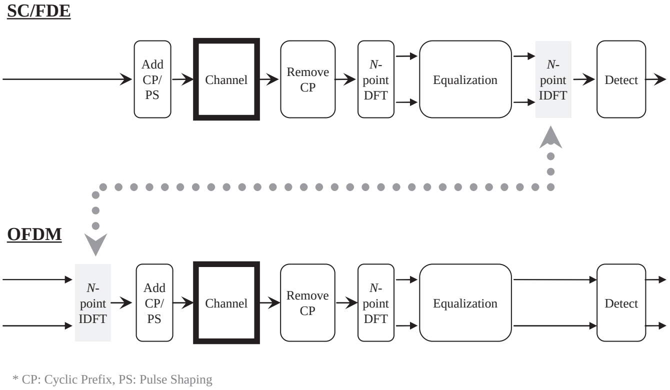
- Détection MAP bit pour schéma codé à bits entrelacés : Les vecteurs binaires $X_b[n] = [X_1[n] \cdots X_m[n]]$ sont "mappés" sur des symboles $X[n] \in \mathcal{X}$.

$$L(x_i[n]) \quad = \log\left(\frac{P(x_i[n]=0|Y[n])}{P(x_i[n]=1|Y[n])}\right) = \log\left(\frac{\sum_{X[n]\in\mathcal{X}_0^i} P(Y[n]|X[n],H[n])}{\sum_{X[n]\in\mathcal{X}_1^i} P(Y[n]|H[n],X[n])}\right)$$

# Plan

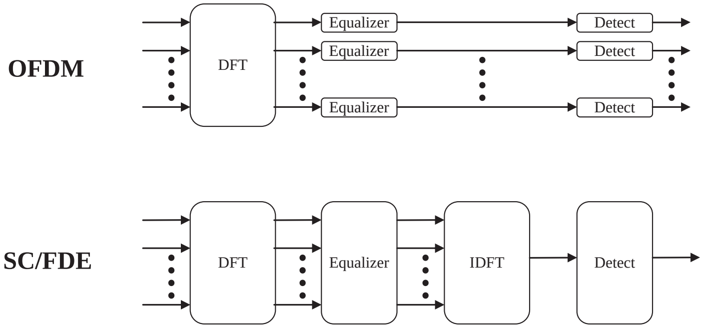
# SC-FDE

## Egalisation Monoporteuse dans le domaine fréquentiel : SC-FDE vs OFDM



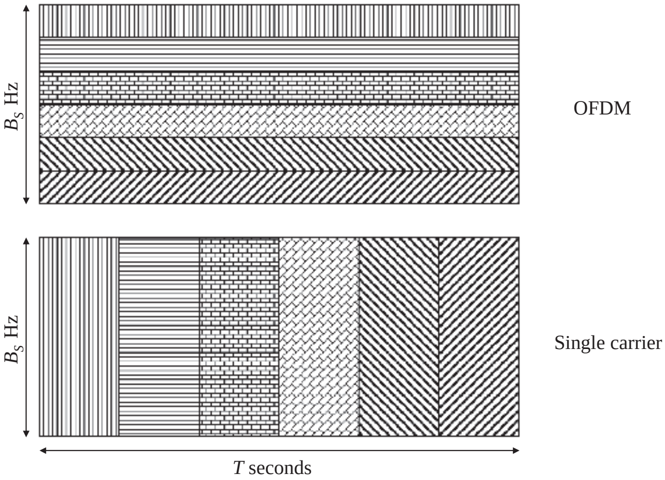
# OFDM et SC-FDE

## SC-FDE vs OFDM : récepteurs



# OFDM et SC-FDE

## SC-FDE vs OFDM : interprétation dans le plan temps-fréquence



# SC-FDE

## Modélisation récepteur, domaine temporel

- Soit un bloc de $N$ symboles modulés noté $x[n] \in \mathcal{X} \subset \mathbb{C}, \forall n = 0 \cdots N-1$.
- Après ajout d'un préfixe cyclique, on obtient le vecteur

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}[0]\tilde{x}[1] \cdots \tilde{x}[N+N_{cp}-1]] = [x[N-N_{cp}] \cdots x[N-1]|x[0] \cdots x[N-1]].$$

- Après transmission sur le canal, on a

$$y[n] = h * \tilde{x}[n] + b[n]$$

- Après retrait du CP, on a

$$y[n] = h \circledast x[n] + b[n]$$

# SC-FDE, Modèle du signal en réception

Après TFD, on applique un filtre $W[k]$ sur chaque sous-bande

- Domaine fréquentiel :

$$Y[k] = H[k]X[k] + B[k], \ \forall k = 1 : N-1$$

$$\begin{aligned} Y_e[k] &= W[k]Y[K] \\ &= W[k]H[k]X[k] + W[k]B[k], \ \forall k = 1 : N-1 \end{aligned}$$

- Domaine temporel :

$$\begin{aligned} \hat{x}[n] &= TFD^{-1}(Y_e[k]), \ \forall n = 1 : N-1 \\ &= \underbrace{\tilde{w} \circledast x[n]}_{\substack{\text{signal utile} \\ + \\ \text{interference} \\ \text{entre symbole}}} + \underbrace{w \circledast x[n]}_{\text{bruit filtre}} = \underbrace{x_u[n] + x_i[n]}_{\hat{x}_t[n]} + \hat{b}[n] \end{aligned} \quad (1)$$

avec $\tilde{w} = TFD^{-1}(\tilde{W}[k]) = TFD^{-1}(W[k]H[k])$

# Egalisation

## Cas MMSE

$$W[k] = \frac{\gamma H[k]^*}{\gamma |H[k]|^2 + 1} \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_B^2} \quad (3)$$

$$(4)$$

## Cas ZF

$$W[k] = \frac{H[k]^*}{|H[k]|^2} \quad (5)$$

# Détection

## Détection

Si on prend le modèle du signal après égalisation, on aura

$$\hat{x}[n] = \alpha x[n] + x_i[n] + \hat{b}[n] \quad (6)$$
$$= \alpha x[n] + b'[n] \quad (7)$$

On pourra donc faire une détection en faisant une approximation Gaussienne sur $b'[n]$ et ainsi appliquer les mêmes détecteur que le cas OFDM.

# Plan

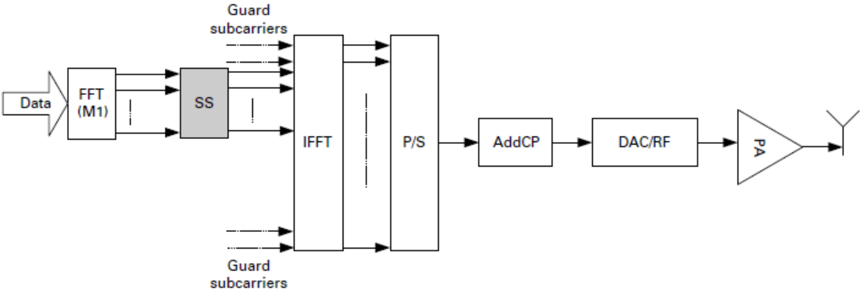
# Plan

# Plan

2. Forme d'ondes mono-porteuse circulaire
   - SC-FDE
   - SC-FDE avec mise en forme fréquentielle
   - Spectral Shaping
   - SC-FDMA : extension pour l'accès multiple

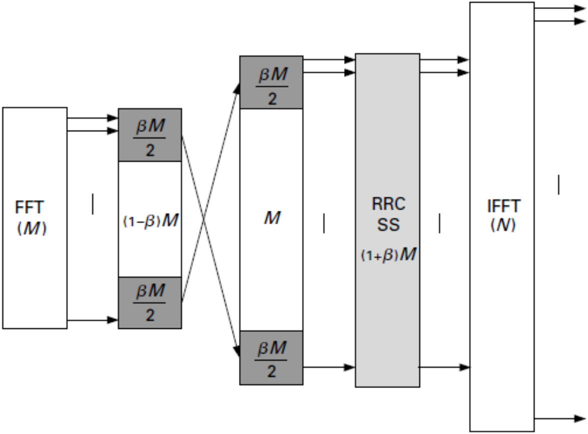
# Spectral shaping

## Shaping fréquentiel : cas générale



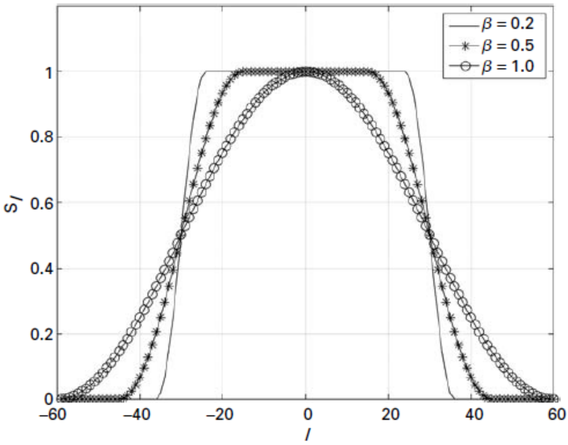
# Spectral shaping

## Shaping fréquentiel : cas mono-utilisateur



# Spectral shaping

## Shaping fréquentiel : exemples



# Spectral shaping

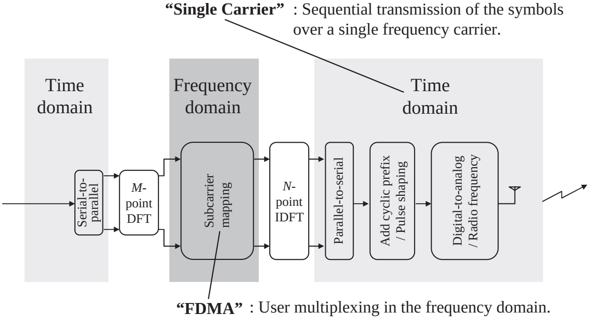
## Implémentations

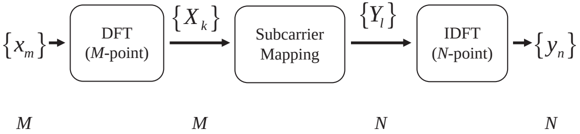
- Le cas mono-utilisateur est connu sos le nom Extented-Weighted SC-OFDM,
- Un filtrage de type filtrage rectangulaire est utilisé dans le cadre du standard DVB-NGH sous l'accronyme SC-OFDM,
- la version multi-utilisateurs est connue sous le sigle SC-FDMA et considère un filtre rectangulaire étendu.

# Plan

# SC-FDMA

## Principe générale

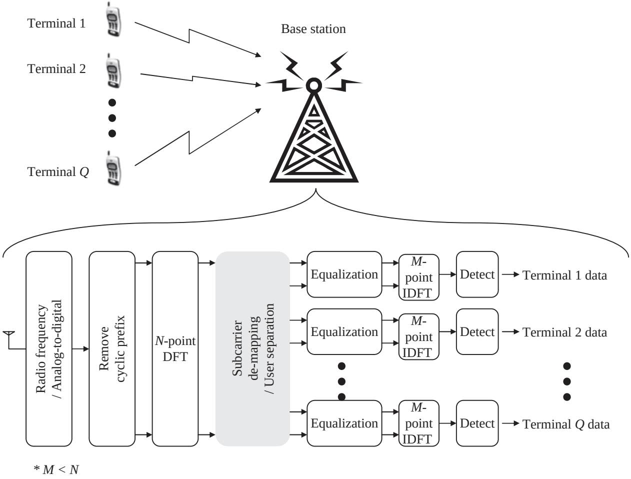



*$M$, $N$: number of data symbols

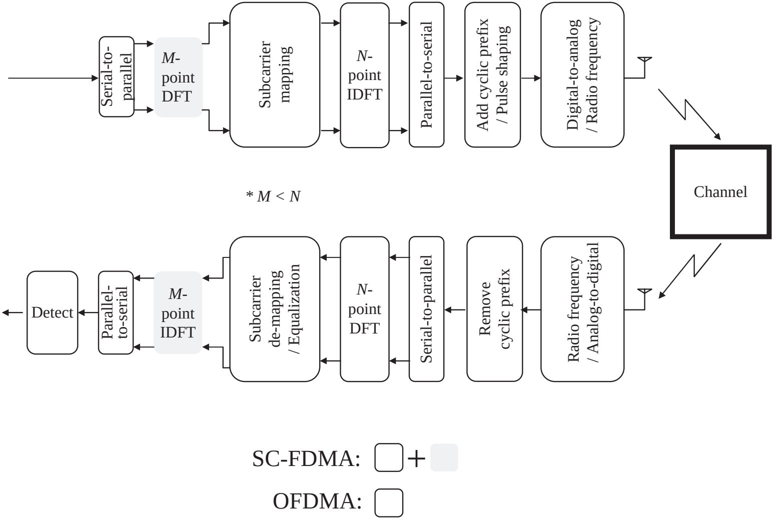
# SC-FDMA

## Architecture récepteur



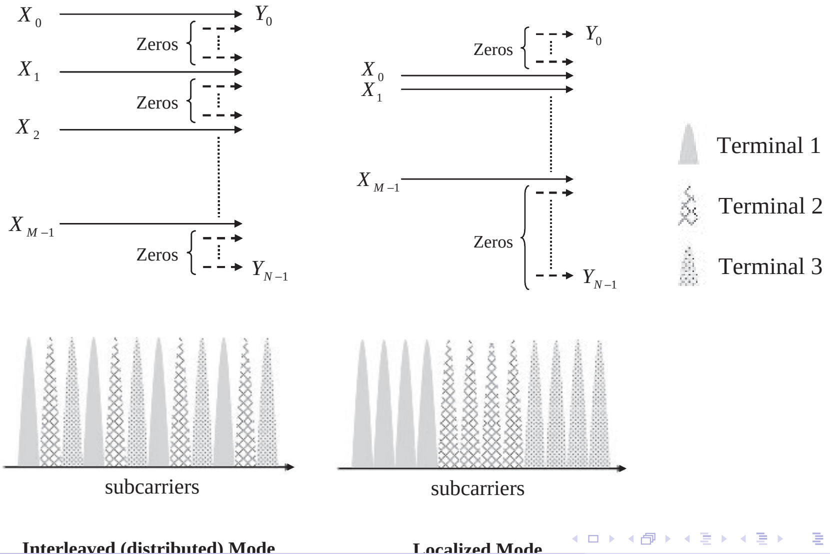
# SC-FDMA

## Comparaison OFDMA vs SC-FDMA : structure



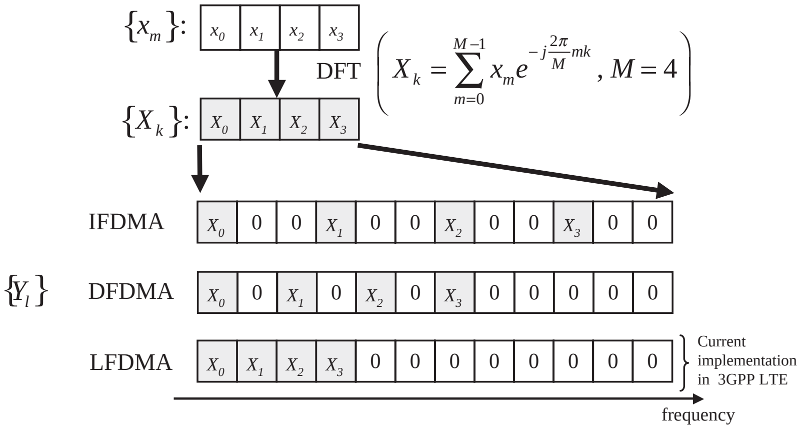
# SC-FDMA

## Allocation de sous-porteuses



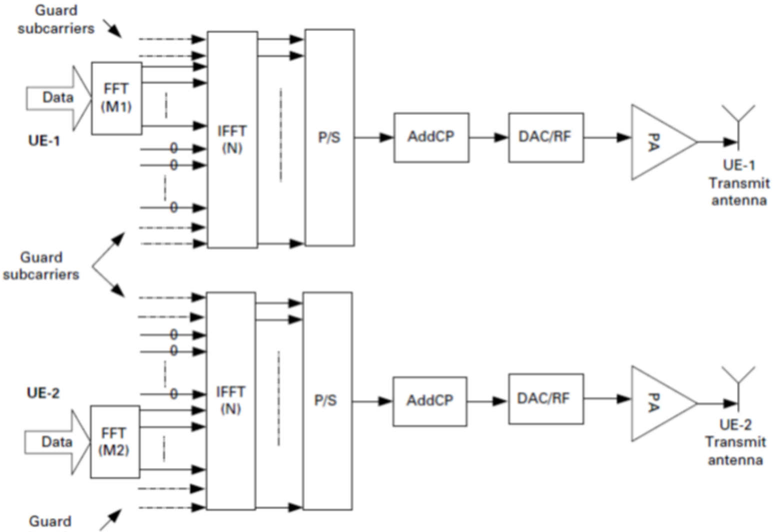
# OFDMA et SC-FDMA

## SC-FDMA : allocation de sous-porteuses



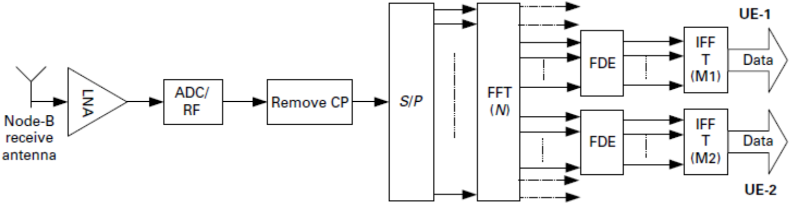
# SC-FDMA

## Cas multi-utilisateurs - émetteurs



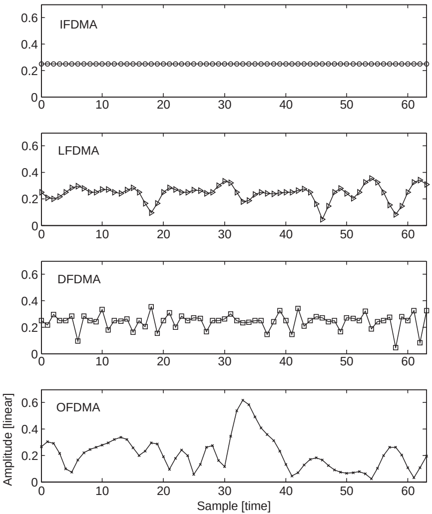
# SC-FDMA

## Cas multi-utilisateurs - récepteurs



# SC-FDMA

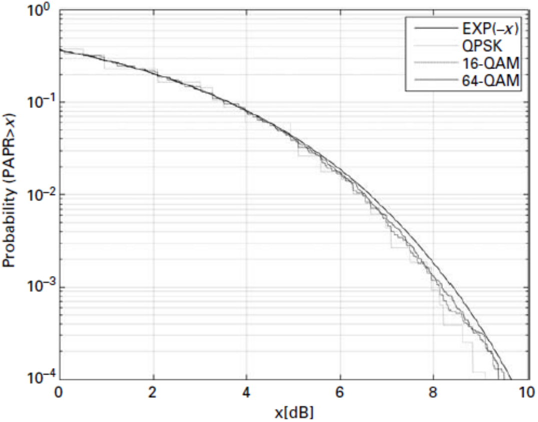
## Dynamique des signaux : SC-FDMA vs OFDMA



# SC-FDMA

## Dynamique des signaux : SC-FDMA vs OFDMA

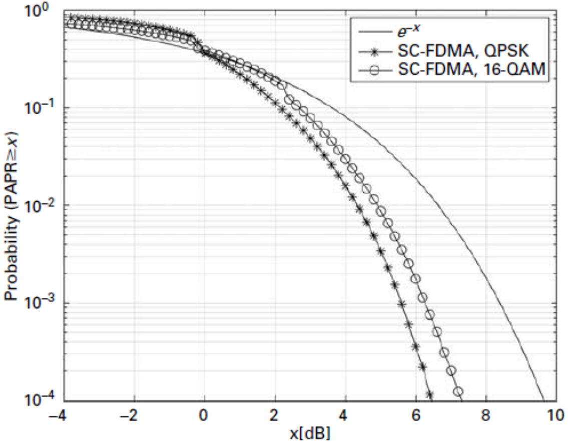
$$\mathrm{PAPR} = \frac{|s(t)|^2}{\mathbb{E}(|s(t)|^2)}$$




PAPR pour OFDM avec 16 canaux

# SC-FDMA

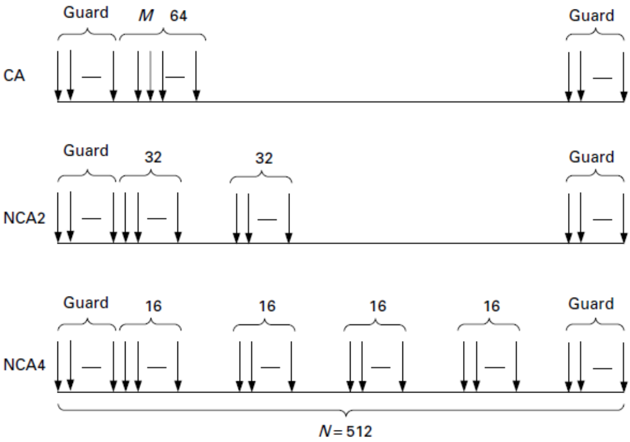
## SC-FDMA vs OFDMA




PAPR pour SC-FDMA localisé $M = 64, N = 512$

# SC-FDMA

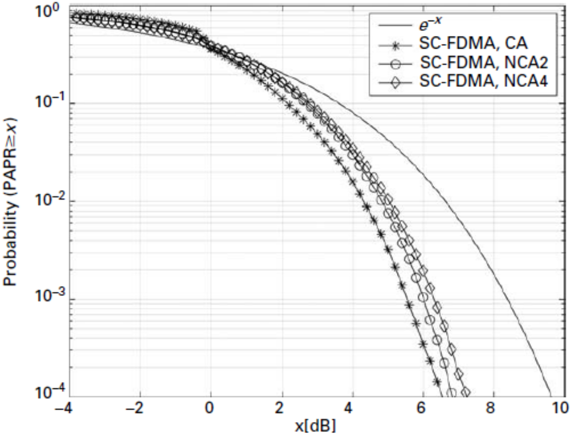
## Dynamique des signaux : SC-FDMA vs OFDMA




PAPR pour SC-FDMAs

# SC-FDMA

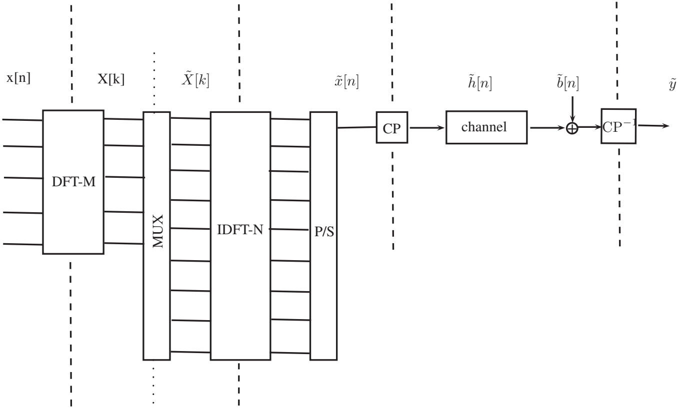
## Dynamique des signaux : SC-FDMA vs OFDMA



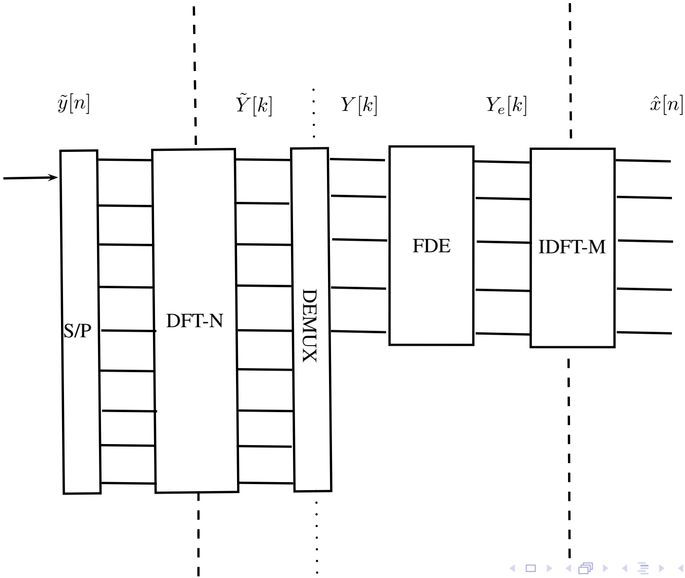

PAPR pour SC-FDMAs

# Plan

# Emetteur


x[n]
X[k]
$\tilde{X}[k]$
$\tilde{x}[n]$
$\tilde{h}[n]$
$\tilde{b}[n]$
$\tilde{y}[n]$
DFT-M
MUX
IDFT-N
P/S
CP
channel
$CP^{-1}$

# Récepteur



# Principales notations et définitions

- TFD :

$$X[k] = TFD(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \; \forall k = 1 : N-1$$

- TFD inverse :

$$x[n] = TFD^{-1}(x[n]) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{+i\frac{2\pi}{N}nk}, \; \forall k = 1 : N-1$$

- Convolution circulaire :

$$\begin{aligned} TD : y[n] &\triangleq h \circledast x[n] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[< n-m >_N], \; \forall n = 0 : N-1 \\ FD : Y[k] &= H[k]X[k], \; \forall k = 0 : N-1 \end{aligned}$$

# Plan

# Modèle du signal en réception

- Domaine fréquentiel :

$$Y[k] = H[k]X[k] + B[k], \ \forall k = 1 : N-1$$

$$\begin{aligned} Y_e[k] &= W[k]Y[K] \\ &= W[k]H[k]X[k] + W[k]B[k], \ \forall k = 1 : M-1 \end{aligned}$$

- Domaine temporel :

$$\begin{aligned} \hat{x}[n] &= TFD^{-1}(Y_e[k]), \ \forall n = 1 : M-1 \\ &= \underbrace{\tilde{w} \circledast x[n]}_{\substack{\text{signal utile} \\ + \\ \text{interference} \\ \text{entre symbole}}} + \underbrace{w \circledast x[n]}_{\textit{bruit filtre}} = \underbrace{x_u[n] + x_i[n]}_{\hat{x}_t[n]} + \hat{b}[n] \end{aligned} \tag{8}$$

avec $\tilde{w} = TFD^{-1}(\tilde{W}[k]) = TFD^{-1}(W[k]H[k])$

# Puissance de bruit 1/3

- Domaine temporel :

$$\hat{b}[n] = TFD^{-1}(W[k]B[k]),\ \forall n = 1 : M-1 \tag{9}$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} W[k]B[k]e^{-i\frac{2\pi}{M}nk} \tag{10}$$

- Variance du bruit, cas générale :

$$\sigma^2_{\hat{b}} \triangleq \mathbb{E}(|\hat{b}[n]|^2)$$

$$= \frac{\sigma^2_B}{M} \times \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} |W[k]|^2$$

$$= \sigma^2_{\tilde{b}_M} \sum_{n=0}^{M-1} |w[n]|^2$$

avec $\tilde{b}_M[n] = TFD^{-1}(B[k])$ et $w[n] = TFD^{-1}(W[k])$

# Puissance de bruit 2/3

## Cas MMSE

$$W[k] = \frac{\gamma H[k]^*}{\gamma |H[k]|^2 + 1} \tag{11}$$

$$\gamma = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_B^2} \tag{12}$$

$$\gamma_k = |H[k]|^2 \gamma \tag{13}$$

$$\sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\sigma_B^2}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\gamma^2 |H[k]|^2}{(\gamma |H[k]|^2 + 1)^2} \tag{14}$$

# Puissance de bruit 3/3

## Cas ZF :

$$W[k] = \frac{\gamma H[k]^*}{\gamma |H[k]|^2} \tag{15}$$

$$\sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\sigma_B^2}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{\gamma |H[k]|^2} \tag{16}$$

# Puissance terme utile

- Signal utile en sortie de IDFT :

$$\hat{x}_u[n] = \tilde{w}[0]x[n] = x[n]\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} W[k]H[k] \tag{17}$$

- Variance de $\hat{x}_u[n]$ :

$$\sigma_{x_u}^2 = \sigma_x^2 \left| \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} W[k]H[k] \right|^2 \tag{18}$$

# Puissance terme interférence entre symbole

- Variance de $\hat{x}_i[n]$ :

$$\sigma^2_{x_i} = \sigma^2_{x_t} - \sigma^2_{x_u} \tag{19}$$

avec

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{x_t} &= \sigma^2_x \sum_{m=0}^{M-1} |\tilde{w}[< n - m >_M]|^2 \\
&= \sigma^2_x \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |\tilde{W}[k]|^2 \\
&= \sigma^2_x \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |W[k]H[k]|^2
\end{aligned}$$

# Rapport signal à bruit en sortie de DFT

- Cas général :

$$
\begin{aligned}
SNR &= \frac{\sigma_{x_u}^2}{\sigma_{x_t}^2 - \sigma_{x_u}^2 + \sigma_{\hat{b}}^2} \\
&= \frac{|\alpha|^2}{\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}(|H[k]|^2 + \gamma^{-1})|W[k]|^2 - |\alpha|^2}
\end{aligned} \tag{20}
$$

avec

$$
\alpha = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} W[k]H[k]
$$

# Rapport signal à bruit en sortie de DFT

- Cas MMSE :

$$SNR = \frac{\beta}{1-\beta} \tag{21}$$

avec

$$\beta = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{\gamma_k}{\gamma_k+1}$$

- Cas ZF :

$$SNR = \frac{1}{\beta} \tag{22}$$

avec

$$\beta = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{1}{\gamma_k}$$

# Plan

# Modèle du signal en réception

## Modèle domaine fréquentiel

- Domaine fréquentiel sans combinaison :

$$\begin{aligned} Y_e[k] =& W_0[k]Y[k] \\ =& W_0[k]\tilde{H}[k]X[k] + W_0[k]B[k], \ \forall k \in I_1 \end{aligned}$$

- Domaine fréquenciel avec combinaison :

$$\begin{aligned} Y_e[k] =& W_1[k]Y_1[k] + W_2[k]Y_2[k], \ \forall k \in I_2 \\ =& (W_1[k]\tilde{H}_1[k] + W_2[k]\tilde{H}_2[k])X[k] + W_1[k]B_1[k] + W_2[k]B_2[k] \end{aligned}$$

avec $\tilde{H}[k]$ canal en réception + weighting

# Modèle du signal en réception

## Modèle équivalent

$$Y_e[k] = \begin{cases} \tilde{W}[k]X[k] + W_0[k]B[k] & , \forall k \in I_1 \\ \tilde{W}[k]X[k] + W_1[k]B_1[k] + W_2[k]B_2[k] & , \forall k \in I_2 \end{cases}$$

avec

$$\tilde{W}[k] = \begin{cases} W[k]\tilde{H}[k] & , \forall k \in I_1 \\ W_1[k]\tilde{H}_1[k] + W_2[k]\tilde{H}_2[k] & , \forall k \in I_2 \end{cases}$$

# Rapport signal à bruit en sortie de DFT

- Cas général :

$$SNR = \frac{|\alpha|^2}{\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\left(|\tilde{W}[k]|^2 + \gamma^{-1}|W[k]|^2\right) - |\alpha|^2} \tag{23}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\tilde{W}[k]$$

et

$$|W[k]|^2 = \begin{cases} |W_0[k]|^2 & ,\forall k \in I_1 \\ |W_1[k]|^2 + |W_2[k]|^2 & ,\forall k \in I_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ valable pour tout type de combinaison

# Plan

# Bibliographie


- [*SESIA*11] S Sesia et al., LTE – The UMTS Long Term Evolution, Wiley, 2011.
- [*KHAN*09] F. KHAN, *LTE for 4G Mobile Broadband Air Interface Technologies and Performance*, Cambridge University Press, 2009.
- [3*GPP*1] 3GPP R1-051335, **“Simulation Methodology of IFDMA and DFT DFT-Spread-OFDMA,”** Nov. 2005.
- [3*GPP*2] 3GPP R1-051352, **“Simulation methodology for EUTRA uplink : SC-FDMA and OFDMA,”** Nov. 2005.