

# Egalisation linéaire temporelle

C. Poulliat

11 novembre 2020

# Plan

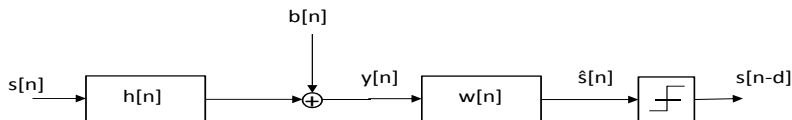
- 1 Egalisation linéaire : principe
- 2 Critère Zero-Forcing (ZF)
- 3 Egaliseur de Wiener, critère MMSE

# Plan

## 1 Egalisation linéaire : principe

# Egalisation linéaire

## Principes



- $w[n]$  est un filtre d'êt égaliseur,
- différentes structures possibles : FIR ou IIR,
- différents critères d'optimisation pour la décision : ZF ou MMSE (Wiener).

# Plan

## 2 Critère Zero-Forcing (ZF)

# Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) : imposer les IES nulles en absence de bruit

structure non contrainte

En Temporel

Domaine transformé en Z

$$\hat{s}[n] = w_{ZF} * y(n) = s[n - d] \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{s}(z) = w_{ZF}(z)h(z)s(z) = s(z)z^{-d}$$

$$w_{zf} * h[n] = \delta[n - d] \quad \Longleftrightarrow \quad w_{zf}(z) = \frac{z^{-d}}{h(z)}$$

# Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) : imposer les IES nulles en absence de bruit

structure FIR ZF partiel par inversion directe :  $\mathbf{w}_{zf} = \{w_k, k = -N \dots + N\}$

$$w_{zf} * h[n] = \sum_{k=-N}^N w_k h_{n-k} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n = \pm 1, \dots, \pm N \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} h[0] & \dots & \dots & h[-N] & \dots & \dots & h[-2N] \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ h[N-1] & \dots & & h[-1] & \dots & & h[-N-1] \\ h[N] & \dots & & h[0] & \dots & & h[-N] \\ h[N+1] & \dots & & h[1] & \dots & & h[-N+1] \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ h[2N] & \dots & & h[N] & \dots & & h[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{-N} \\ \vdots \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}\mathbf{w} = \Delta$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{H}^{-1}\Delta$$

# Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) : imposer les IES nulles en absence de bruit

**structure FIR ZF par méthode des moindres carrés :**

$$e[n] = w[n] * h[n] - \delta[n - d]$$

$$T(z) = w(z)h(z) = \sum_{k=0}^L t[k]z^{-k}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{H}\mathbf{w}, \mathbf{w} = [w[0], \dots, w[L_w]]^T$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h[0] & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ h[1] & h[0] & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ h[L_h] & & & h[0] & & \\ 0 & \ddots & & & \ddots & \\ \vdots & & h[L_h] & & \dots & h[0] \\ 0 & \dots & 0 & h[L_h] & & h[1] \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & & h[L_h] \end{pmatrix}$$



# Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) : imposer les IES nulles en absence de bruit

## Structure FIR : ZF partiel, méthode des moindres carrés

Pour calculer  $\mathbf{w}_{\text{ZF-LS}} = [w[0], \dots, w[L_w]]^T$ ,

- 1 Calculer  $\mathbf{H}^\# = (\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\dagger$  ;
- 2 Calculer  $\mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{H}^\#$  ;
- 3 Sélectionner  $d$  tel que  $p_{d,d}$  est la plus grande valeur de la diagonale ;
- 4 Sélectionner la  $d$ -ième colonne de  $\mathbf{H}^\#$ , identique au calcul  $\mathbf{w}_{\text{ZF-LS}} = \mathbf{H}^\# \mathbf{1}_d$ .

# Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) : imposer les IES nulles en absence de bruit

structure FIR ZF par méthode des moindres carrés :

$$J(\mathbf{w}) = \sum_{n=0}^L |e[n]|^2 = \|\mathbf{t} - \mathbf{1}_d\|_2^2 = \|\mathbf{H}\mathbf{w} - \mathbf{1}_d\|_2^2$$

$$\mathbf{1}_d = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \overset{d}{1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^\top$$

$$\mathbf{w}_{ZF-LS} = (\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{1}_d$$

$$J_{\mathbf{w},\min}(d) = \left\| \mathbf{H} (\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{1}_d - \mathbf{1}_d \right\|_2^2 = 1 - p_{d,d}$$

# Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) - Analyse en présence de bruit

structure non contrainte

En Temporel

Domaine fréquentiel

$$\hat{s}[n] = s[n - d] + \underbrace{w_{ZF} * b[n]}_{b_i[n]}$$

$$\overset{\circ}{\gamma}_{b_f}(\nu) = \sigma_b^2 \left| \overset{\circ}{w}_{zf}(\nu) \right|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_{b_f}^2 = \sigma_b^2 \int_{[1]} \frac{1}{|h(\nu)|^2} d\nu$$

$$\text{SNR}_{\text{IR-ZF}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_{b_w}^2} = \frac{\sigma_s^2}{\int_{[1]} \frac{N_0}{|h(\nu)|^2} d\nu}$$

structure contrainte FIR (sans délai)

$$\begin{aligned} \hat{x}[n] &= w[n] * h[n] * s[n] + w[n] * b[n] \\ &= s[n] + \sum_{|k| > N} (w * h)[k] s[n - k] + w[n] * b[n] = s[n] + b_i[n] \end{aligned}$$

$$\text{SINR}_{\text{FIR-ZF}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_{b_i}^2}$$

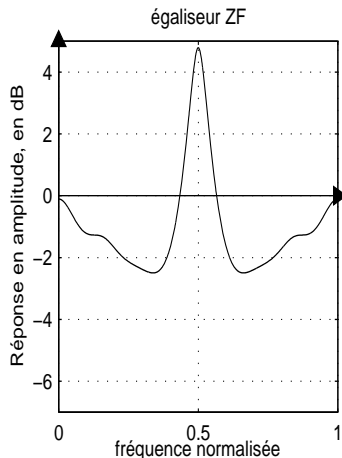
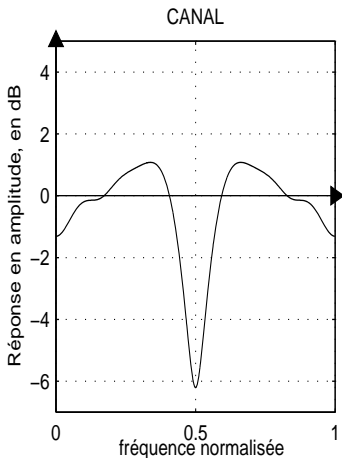
# Egalisation linéaire

Critère zéro-forcing (ZF) - Analyse en présence de bruit

- **Amplification du bruit** : si  $\exists \nu_0 \in [0, 1]$ , tel que  $\dot{h}(\nu_0) = 0$ , le gain du filtre ZF peut devenir infini et donc la puissance de bruit filtré est peut être très grande,
- faible complexité mais forte amplification du bruit

# Egalisation linéaire

## Critère zéro-forcing (ZF) - Illustration

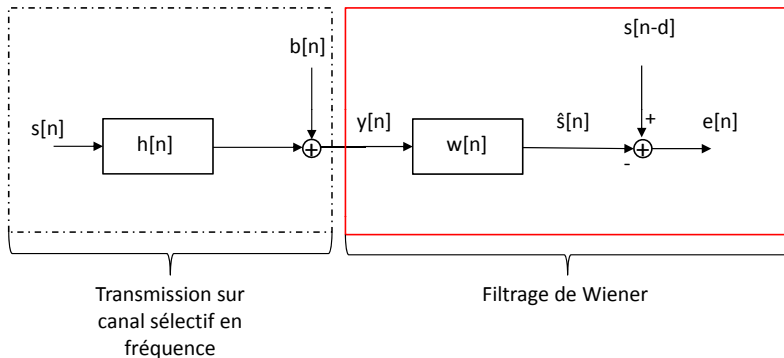


# Plan

## 3 Egaliseur de Wiener, critère MMSE

# Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener pour l'égalisation



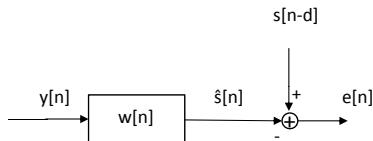
## Filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

Trouver le filtre optimal  $w_{opt}(z)$  qui minimiser la fonction de coût

$$J_w = \mathbb{E} (|e[n]|^2), \quad e[n] = \hat{s}[n] - s[n-d], \quad s[n] = w * y[n]$$

# Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation



## Filtrage de Wiener : cadre générale

Trouver le filtre optimal  $w_{opt}(z)$  qui minimiser la fonction de coût

$$J(\mathbf{w}) = \mathbb{E} (|e[n]|^2) , e[n] = s[n - d] - \hat{s}[n]$$



# Egalisation linéaire

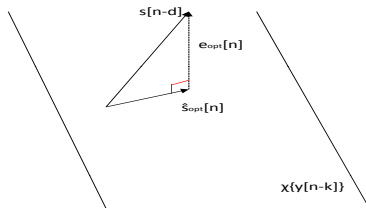
Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

## Principe d'orthogonalité

$$\text{CNS : } \mathbb{E}(e_{\text{opt}}[n]y[n-k]^*) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$$

## Interprétation géométrique

- Opérateur  $\mathbb{E}(XY^*) = \langle X, Y \rangle$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$  si variables centrées,
- l'erreur optimale est donc obtenue si elle est orthogonale à l'espace des observations (meilleure estimation obtenue)



# Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

## Wiener non contraint

- Expression du filtre de Wiener non contraint :

$$h^*(z) = \sum_n h^*(n)z^{-n}$$

Domaine en  $z$  :  $w_\infty(z) = \frac{\sigma_s^2 z^{-d} h^*(z^{-1})}{\sigma_s^2 h(z) h^*(z^{-1}) + \sigma_b^2}$

Domaine fréquentiel :  $\overset{\circ}{w}_\infty(\nu) = e^{-j2\pi\nu d} \frac{\sigma_s^2 \overset{\circ}{h}^*(\nu)}{\sigma_s^2 |\overset{\circ}{h}(\nu)|^2 + \sigma_b^2}$

- Equivalence à fort SNR avec le filtre ZF :

$$w_\infty(z) \approx w_{zf}(z)$$

- Equivalence à faible SNR avec le filtre MF :

$$w_\infty(z) \rightarrow w_{MF}(z) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_b^2} z^{-d} h^*(z^{-1})$$

# Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

## Wiener non contraint, analyse de performance

- ❶ **Biais sur l'estimateur MMSE** :  $\hat{x}[n] = \alpha s[n] + e'[n]$

$$\alpha = \int_{[1]} \frac{\text{SNR}(\nu)}{\text{SNR}(\nu) + 1} d\nu, \quad \text{SNR}(\nu) = \frac{\sigma_s^2 |h(\nu)|^2}{N_0}$$

- ❷ **Rapport signal sur bruit, estimateur biaisé** :

$$\text{SNR}_{\text{biased}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_{e'}^2} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

- ❸ **Rapport signal sur bruit, estimateur non biaisé** :

$$\text{SNR}_{\text{unbiased}} = \frac{\alpha^2 \sigma_s^2}{\sigma_{e'}^2} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

- ❹ **Equivalence entre ces deux quantités** :

$$\text{SNR}_{\text{unbiased}} = \text{SNR}_{\text{biased}} - 1.$$

- ❺ **Relation d'ordre avec l'égaliseur ZF** :

$$\text{SNR}_{\text{unbiased}} > \text{SNR}_{\text{ZF}}$$

# Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

## Wiener RIF de taille $N$

$$\hat{s}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_{n-k} \text{ et } \mathbb{E}(e_{opt}[n]y[n-p]^*) = 0, \forall p \in [0, N-1]$$

- Expression générale :

$$R_y \mathbf{w} = [(\gamma_{sy}(p-d))_{p=0 \dots N-1}] = \Gamma_{sy}$$

- Expression détaillée :  $e[n] = \hat{s}[n] - s[n-d] = \mathbf{w}^\top \mathbf{Y}_n - s[n-d]$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{H} \mathbf{S}_n + \mathbf{B}_n$$

$$\mathbf{w} = \sigma_s^2 (\sigma_s^2 \mathbf{H}^* \mathbf{H}^\top + \sigma_b^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{1}_d$$

$$\mathbf{1}_d = [0 \dots 0 \quad \underbrace{1}_{\text{position } d} \quad 0 \dots 0]^\top$$

# Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

## Modèle matriciel détaillé 1/2

$$\mathbf{Y}_n = [y[n] \ \dots \ y[n - N + 1]]^\top$$

$$\mathbf{B}_n = [b[n] \ \dots \ b[n - N + 1]]^\top$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h[0] & \dots & h[L-1] & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h[0] & \dots & h[L-1] & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h[0] & \dots & h[L-1] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_n = [s[n] \ \dots \ s[n - N - L + 2]]^\top$$

# Egalisation linéaire

Critère EQMM - filtrage de Wiener appliquée à l'égalisation

## Modèle matriciel détaillé 2/2

$$\mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \gamma_Y(0) & \gamma_Y(-1) & \cdots & \gamma_Y(-N+1) \\ \gamma_Y(1) & \gamma_Y(0) & \cdots & \gamma_Y(-N+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_Y(N-1) & \gamma_Y(N-2) & \cdots & \gamma_Y(0) \end{pmatrix} = \mathbb{E}(\mathbf{Y}_n^* \mathbf{Y}_n^T)$$

$$\Gamma_{sy} = [(\gamma_{sy}(p-d))_{p=0 \dots N-1}] = \mathbb{E}(s[n-d] \mathbf{Y}_n^*)$$

## Erreur quadratique moyenne minimum et décomposition du critère

$$J(\mathbf{w}) = \sigma_s^2 + \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_y \mathbf{w} - 2 \operatorname{Re}(\mathbf{w}^\dagger \Gamma_{sy})$$

⇓

$$\sigma_{e,\text{opt}}^2 = \sigma_s^2 - \Gamma_{sy}^\dagger \mathbf{w} = \sigma_s^2 - \mathbf{w}^\dagger \Gamma_{sy}$$

$$= \sigma_s^2 - \mathbf{w}^\dagger \mathbf{R}_y \mathbf{w} = \sigma_s^2 \left( 1 - \underbrace{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{H}^* \mathbf{H}^T \mathbf{w}}_{\text{IES}} - \underbrace{\text{snr}^{-1} \|\mathbf{w}\|^2}_{\text{bruit}} \right)$$

# Bibliographie

- B. P. Lathi and Zhi Ding, Modern Digital and Analog Communication Systems, Oxford University Press, 2009.
- John Barry, Edward Lee, David Merserschnitt, Digital Communications, Kluwer Academic Publisher, Third edition.
- Andreas F. Molisch, Wireless Communications, 2nd Edition, IEEE Press-Wiley, 2010.
- Digital Communications, 4th edition, John G. Proakis, Mc Graw-Hill.
- J. Choi, Adaptive and Iterative Signal Processing in Communications, Cambridge University Press, 2006.
- Zhi Ding and Ye Li, Blind Equalization and Identification , Marcel Dekker, New York, 2001.