Plan du cours

- **Bref historique**

Plan du cours

- Bref historique
- Introduction

Plan du cours

- Bref historique
- Introduction
- Modèles de représentation d’un graphe

Plan du cours

- Bref historique
- Introduction
- Modèles de représentation d’un graphe
- Etude de la connexité

Plan du cours

- Bref historique
- Introduction
- Modèles de représentation d’un graphe
- Etude de la connexité
- Parcours eulériens et hamiltoniens

Plan du cours

- Bref historique
- Introduction
- Modèles de représentation d’un graphe
- Etude de la connexité
- Parcours eulériens et hamiltoniens
- Méthodes de recherche de chemins

Plan du cours

- Bref historique
- Introduction
- Modèles de représentation d’un graphe
- Etude de la connexité
- Parcours eulériens et hamiltoniens
- Méthodes de recherche de chemins
- Arbres et arborescences

Plan du cours

- Bref historique
- Introduction
- Modèles de représentation d’un graphe
- Etude de la connexité
- Parcours eulériens et hamiltoniens
- Méthodes de recherche de chemins
- Arbres et arborescences
- Réseaux, réseaux de transport et problèmes de flots

Plan du cours

- Bref historique
- Introduction
- Modèles de représentation d’un graphe
- Etude de la connexité
- Parcours eulériens et hamiltoniens
- Méthodes de recherche de chemins
- Arbres et arborescences
- Réseaux, réseaux de transport et problèmes de flots
- Couplages

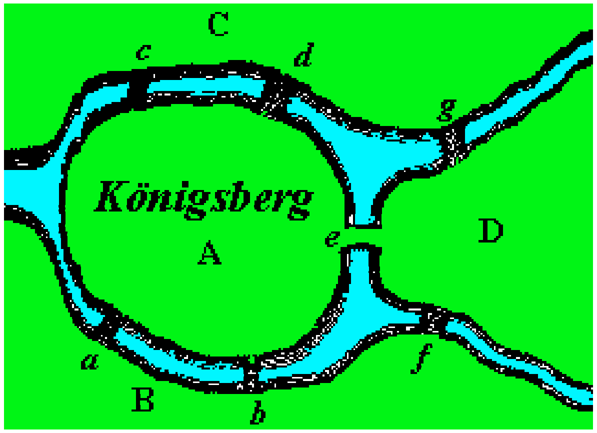
Bref historique de la théorie des graphes

Bref historique de la théorie des graphes

- **Naissance en 1736, communication d'Euler où il propose une solution au problème des ponts de Königsberg**

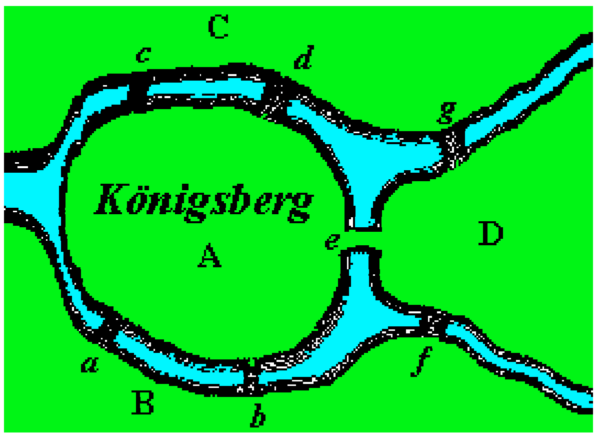
Bref historique de la théorie des graphes

- **Naissance en 1736, communication d'Euler où il propose une solution au problème des ponts de Königsberg**



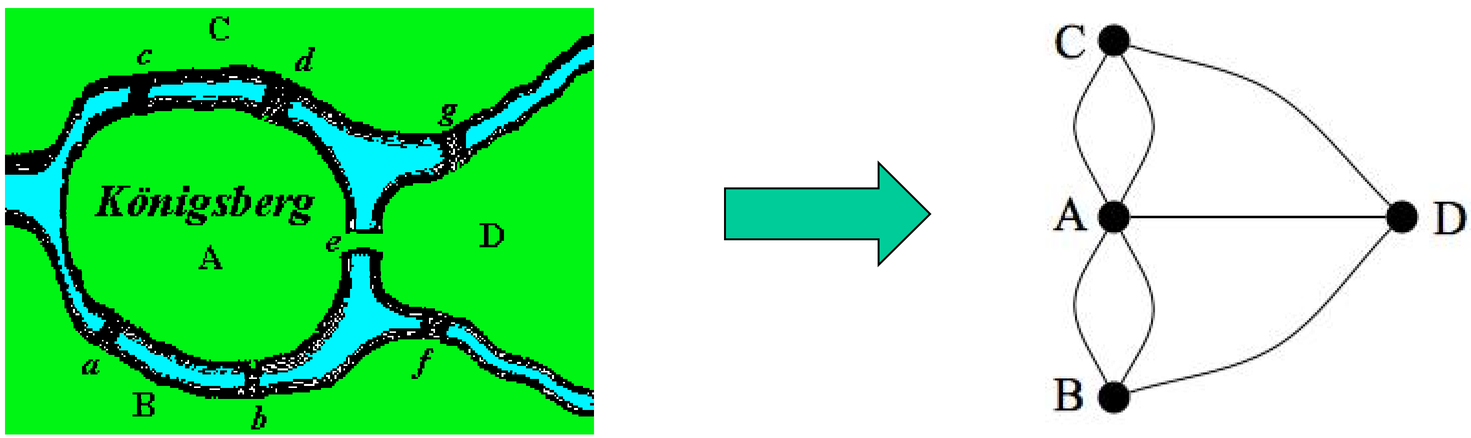
Bref historique de la théorie des graphes

- **Naissance en 1736, communication d'Euler où il propose une solution au problème des ponts de Königsberg**



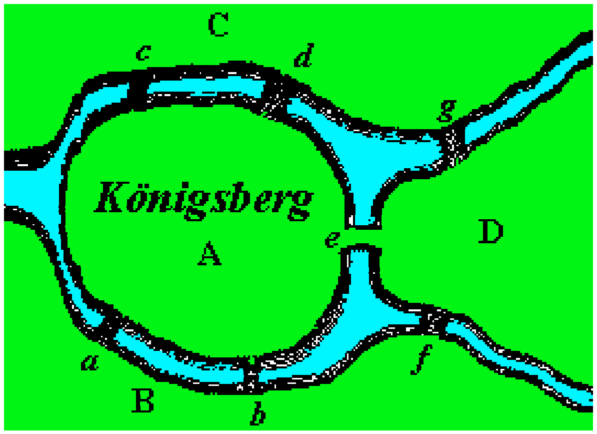
Bref historique de la théorie des graphes

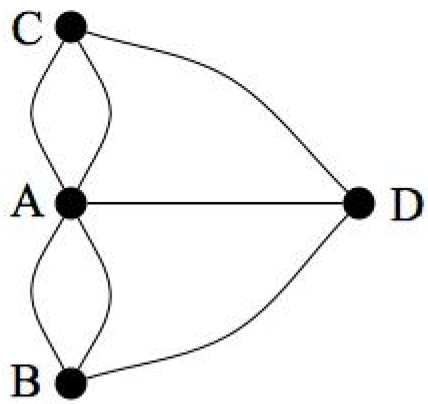
- **Naissance en 1736, communication d'Euler où il propose une solution au problème des ponts de Königsberg**



Bref historique de la théorie des graphes

- Naissance en 1736, communication d'Euler où il propose une solution au problème des ponts de Königsberg

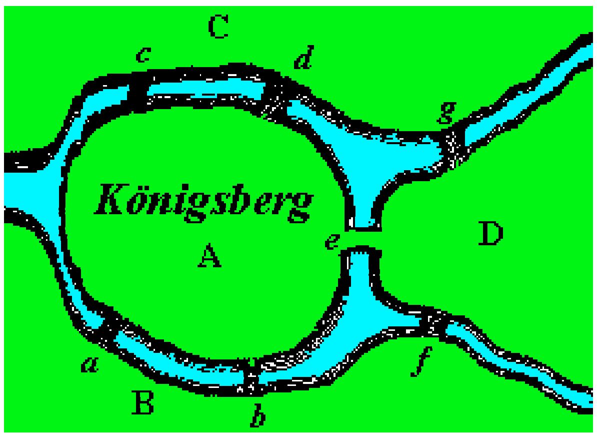


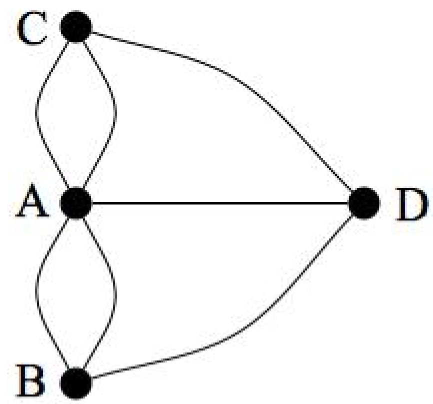


Dessin comportant des sommets (points) et des arêtes reliant ces sommets

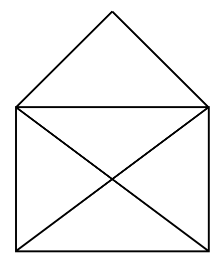
Bref historique de la théorie des graphes

- **Naissance en 1736, communication d'Euler où il propose une solution au problème des ponts de Königsberg**





Dessin comportant des sommets (points) et des arêtes reliant ces sommets



Bref historique de la théorie des graphes

Bref historique de la théorie des graphes

- **1847 Kirchhoff**
  théorie des arbres (analyse de circuits électriques)

Bref historique de la théorie des graphes

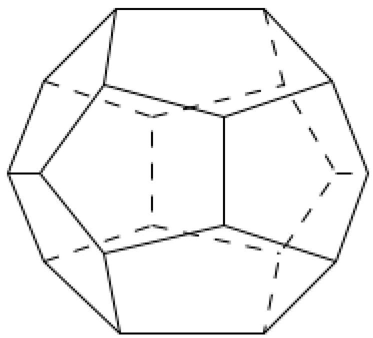
- **1847 Kirchhoff**
  théorie des arbres (analyse de circuits électriques)
- **1860 Cayley**
  énumération des isomères saturés des hydrocarbures C_nH_{2n+2}

Bref historique de la théorie des graphes

- **1847 Kirchhoff**
  théorie des arbres (analyse de circuits électriques)
- **1860 Cayley**
  énumération des isomères saturés des hydrocarbures C_nH_{2n+2}
- **A la même époque, énoncé de problèmes importants**
  - **Conjecture des quatre couleurs (1879)**
    (Möbius, De Morgan, Cayley, solution trouvée en 1976)
  - **Existence de chemins Hamiltoniens (1859)**

Bref historique de la théorie des graphes

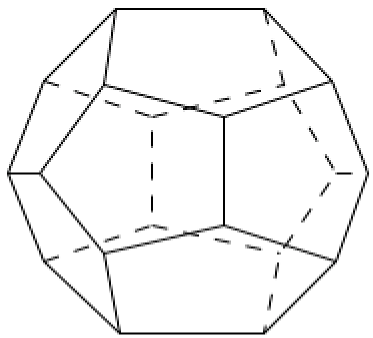
- **1847 Kirchhoff**
  théorie des arbres (analyse de circuits électriques)
- **1860 Cayley**
  énumération des isomères saturés des hydrocarbures C_nH_{2n+2}
- **A la même époque, énoncé de problèmes importants**
  - **Conjecture des quatre couleurs (1879)**
    (Möbius, De Morgan, Cayley, solution trouvée en 1976)
  - **Existence de chemins Hamiltoniens (1859)**



Bref historique de la théorie des graphes

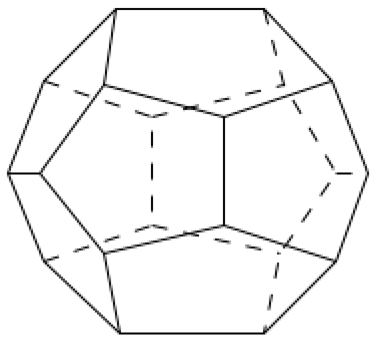
- **1847 Kirchhoff**
  théorie des arbres (analyse de circuits électriques)
- **1860 Cayley**
  énumération des isomères saturés des hydrocarbures C_nH_{2n+2}
- **A la même époque, énoncé de problèmes importants**
  - **Conjecture des quatre couleurs (1879)**
    (Möbius, De Morgan, Cayley, solution trouvée en 1976)
  - **Existence de chemins Hamiltoniens (1859)**

- **1936 König**
  premier ouvrage sur les graphes



Bref historique de la théorie des graphes

- **1847 Kirchhoff**
  théorie des arbres (analyse de circuits électriques)
- **1860 Cayley**
  énumération des isomères saturés des hydrocarbures C_nH_{2n+2}
- **A la même époque, énoncé de problèmes importants**
  - **Conjecture des quatre couleurs (1879)**
    (Möbius, De Morgan, Cayley, solution trouvée en 1976)
  - **Existence de chemins Hamiltoniens (1859)**
- **1936 König**
  premier ouvrage sur les graphes
- **1946 ⟹ Kuhn, Ford, Fulkerson, Roy**
  Berge



Introduction

Introduction

Qu'est-ce qu'un graphe ?

Introduction

Qu'est-ce qu'un graphe ?

- ***Définition* 1**

Introduction

Qu’est-ce qu’un graphe ?

- ***Définition* 1**
  - On appelle graphe $G=(X, A)$ la donnée d'un ensemble X dont les éléments sont appelés sommets et d'une partie de A symétrique $(x, y) \in A \Leftrightarrow (y, x) \in A$ dont les éléments sont appelés arêtes.

Introduction

Qu'est-ce qu'un graphe ?

- ***Définition* 1**
  - On appelle graphe $G=(X, A)$ la donnée d'un ensemble X dont les éléments sont appelés sommets et d'une partie de A symétrique $(x, y) \in A \Leftrightarrow (y, x) \in A$ dont les éléments sont appelés arêtes.
  - En présence d'une arête $a=(x,y)$ qui peut être notée simplement xy, on dit que x et y sont les extrémités de a, que a est incidente en x et en y, et que y est un successeur ou voisin de x (et vice versa).

Introduction

Qu’est-ce qu’un graphe ?

- ***Définition* 1**
  - On appelle graphe $G=(X, A)$ la donnée d'un ensemble X dont les éléments sont appelés sommets et d'une partie de A symétrique $(x, y) \in A \Leftrightarrow (y, x) \in A$ dont les éléments sont appelés arêtes.
  - En présence d'une arête $a=(x,y)$ qui peut être notée simplement xy, on dit que x et y sont les extrémités de a, que a est incidente en x et en y, et que y est un successeur ou voisin de x (et vice versa).
  - On dit qu'un graphe est sans boucle si A ne contient pas d'arête de la forme (x, x), c'est-à-dire joignant un sommet à lui-même.

Introduction

Qu'est-ce qu'un graphe ?

- ***Définition* 1**
  - On appelle graphe $G=(X, A)$ la donnée d'un ensemble X dont les éléments sont appelés sommets et d'une partie de A symétrique $(x, y) \in A \Leftrightarrow (y, x) \in A$ dont les éléments sont appelés arêtes.
  - En présence d'une arête $a=(x,y)$ qui peut être notée simplement xy, on dit que x et y sont les extrémités de a, que a est incidente en x et en y, et que y est un successeur ou voisin de x (et vice versa).
  - On dit qu'un graphe est sans boucle si A ne contient pas d'arête de la forme (x, x), c'est-à-dire joignant un sommet à lui-même.
  - Le nombre de sommets est appelé ordre du graphe.

Introduction

Qu’est-ce qu’un graphe ?

- ***Définition* 1**
  - On appelle graphe $G=(X, A)$ la donnée d'un ensemble X dont les éléments sont appelés sommets et d'une partie de A symétrique $(x, y) \in A \Leftrightarrow (y, x) \in A$ dont les éléments sont appelés arêtes.
  - En présence d'une arête $a=(x,y)$ qui peut être notée simplement xy, on dit que x et y sont les extrémités de a, que a est incidente en x et en y, et que y est un successeur ou voisin de x (et vice versa).
  - On dit qu'un graphe est sans boucle si A ne contient pas d'arête de la forme (x, x), c'est-à-dire joignant un sommet à lui-même.
  - Le nombre de sommets est appelé ordre du graphe.
  - Un graphe ne possédant pas de boucle ni d'arêtes parallèles (deux arêtes distinctes joignant la même paire de sommets) est appelé graphe simple ou 1-graphe.

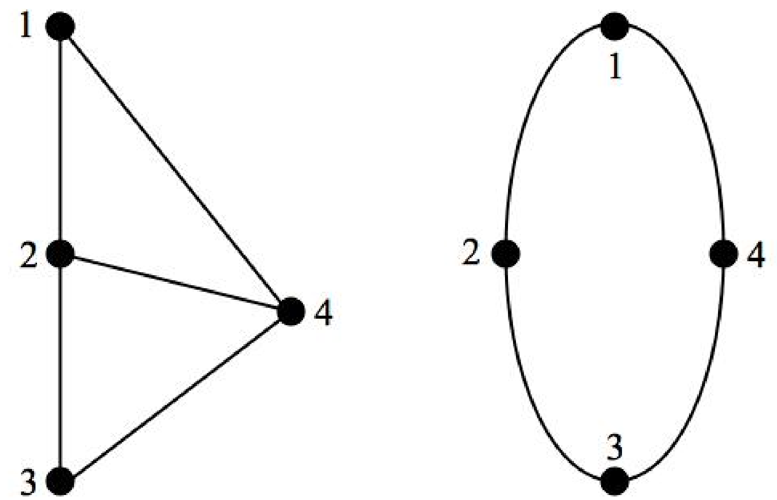
Introduction

Introduction

Deux graphes identiques

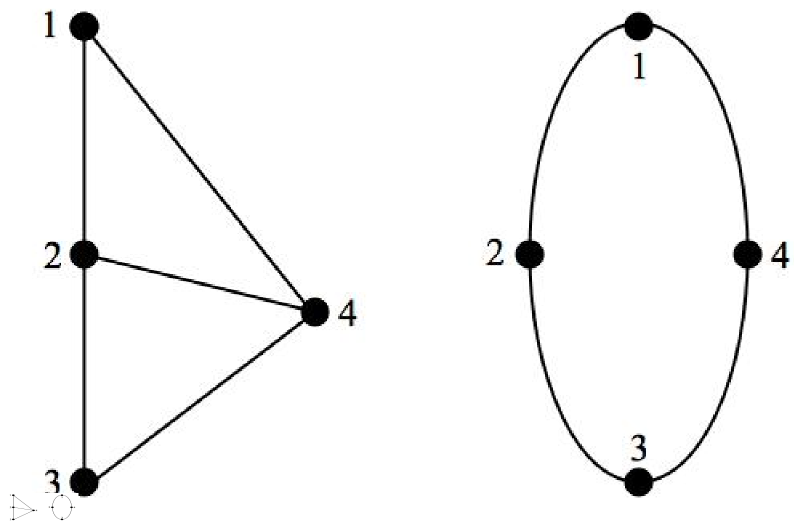
Introduction

Deux graphes identiques



Introduction

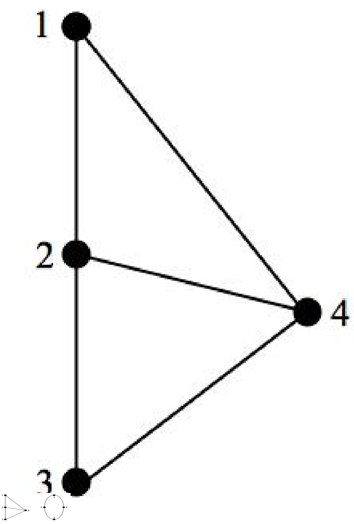
Deux graphes identiques

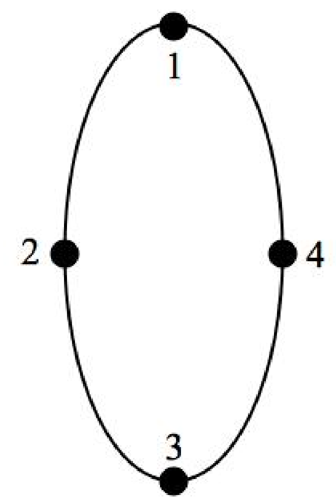


Arêtes *e* et *f* sans intersection

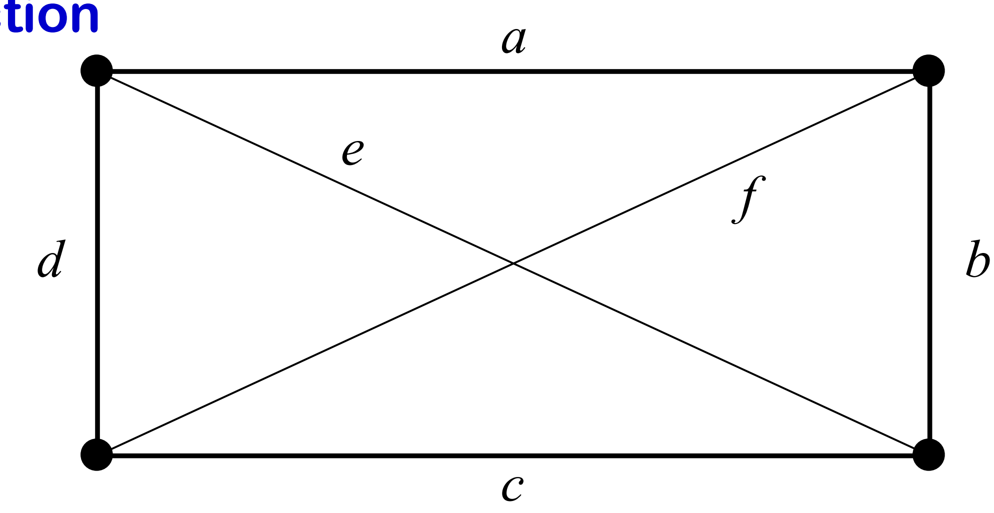
Introduction

Deux graphes identiques



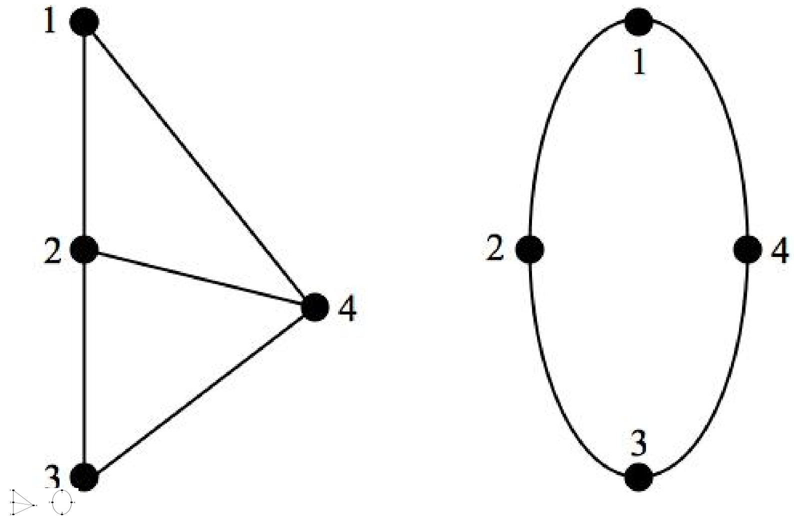


Arêtes *e* et *f* sans intersection

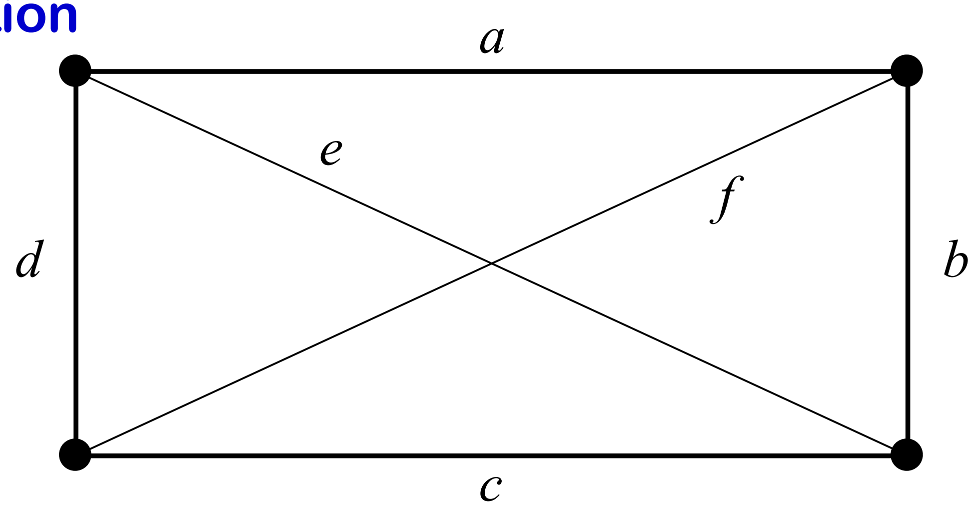


Introduction

Deux graphes identiques



Arêtes *e* et *f* sans intersection



Graphes non-orientés

Introduction

Introduction

- ***Définition*** **2**

Introduction

- ***Définition* 2**
  - On appelle graphe orienté ou digraphe G=(X, A) la donnée d'un ensemble X dont les éléments sont appelés sommets et d'une partie de A de $X \times X$ dont les éléments sont appelés arcs ou arêtes.

Introduction

- ***Définition* 2**
  - On appelle graphe orienté ou digraphe G=(X, A) la donnée d'un ensemble X dont les éléments sont appelés sommets et d'une partie de A de $X \times X$ dont les éléments sont appelés arcs ou arêtes.
  - En présence d'une arc a=(x, y) qui peut être noté simplement xy, on dit que x est l'origine (ou extrémité initiale) et y l'extrémité (terminale) de a, que a est sortant en x et incident en y. On dit aussi que x et y sont adjacents.

Introduction

Graphes et applications multivoques

Introduction

Graphes et applications multivoques

- L'ensemble des successeurs d'un sommet $x \in X$ est noté $\Gamma(x)$.

Introduction

Graphes et applications multivoques

- L'ensemble des successeurs d'un sommet $x \in X$ est noté $\Gamma(x)$.

- L'application Γ qui, à tout élément de X, fait correspondre une partie de X (un élément de $\mathrm{P}(X)$) est appelée une application multivoque.

Introduction

Graphes et applications multivoques

- L'ensemble des successeurs d'un sommet $x \in X$ est noté $\Gamma(x)$.

- L'application Γ qui, à tout élément de X, fait correspondre une partie de X (un élément de $\mathrm{P}(X)$) est appelée une application multivoque.

- L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet $x \in X$ peut alors être noté $\Gamma^{-1}(x)$ où Γ^{-1} est l'application (multivoque) réciproque de Γ.

Introduction

Graphes et applications multivoques

- L'ensemble des successeurs d'un sommet $x \in X$ est noté $\Gamma(x)$.

- L'application Γ qui, à tout élément de X, fait correspondre une partie de X (un élément de $\mathrm{P}(X)$) est appelée une application multivoque.

- L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet $x \in X$ peut alors être noté $\Gamma^{-1}(x)$ où Γ^{-1} est l'application (multivoque) réciproque de Γ.

- Si le graphe G est un 1-graphe, on constate qu'il est parfaitement déterminé par la donnée de l'ensemble X et de l'application multivoque Γ de $X \rightarrow \mathrm{P}(X)$. Un tel graphe peut donc aussi être noté : $G=(X, \Gamma)$.

Introduction

Introduction

Principales définitions **(contexte graphes orientés)**

Introduction

Principales définitions **(contexte graphes orientés)**

- ***Définition* 3**

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition* 3**
  - On appelle degré sortant ou demi-degré extérieur d'un sommet x le nombre d'arcs de la forme $a=(x, y)$ avec $y \neq x$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de $\Gamma(x) \setminus \{x\}$. On note $d_s(x)$ ce degré.

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition* 3**
  - On appelle degré sortant ou demi-degré extérieur d'un sommet x le nombre d'arcs de la forme $a=(x, y)$ avec $y \neq x$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de $\Gamma(x) \setminus \{x\}$. On note $d_s(x)$ ce degré.
  - On appelle degré entrant ou demi-degré intérieur d'un sommet x le nombre d'arcs de la forme $a=(y, x)$ avec $y \neq x$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de $\Gamma^{-1}(x) \setminus \{x\}$. On note $d_e(x)$ ce degré.

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition* 3**
  - On appelle degré sortant ou demi-degré extérieur d'un sommet x le nombre d'arcs de la forme $a=(x, y)$ avec $y \neq x$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de $\Gamma(x) \setminus \{x\}$. On note $d_s(x)$ ce degré.
  - On appelle degré entrant ou demi-degré intérieur d'un sommet x le nombre d'arcs de la forme $a=(y, x)$ avec $y \neq x$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de $\Gamma^{-1}(x) \setminus \{x\}$. On note $d_e(x)$ ce degré.
  - On appelle degré de x (ou valence) la somme du degré entrant et du degré sortant.

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

➢ ***Définition* 3**

- On appelle degré sortant ou demi-degré extérieur d'un sommet x le nombre d'arcs de la forme $a=(x, y)$ avec $y \neq x$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de $\Gamma(x) \setminus \{x\}$. On note $d_s(x)$ ce degré.
- On appelle degré entrant ou demi-degré intérieur d'un sommet x le nombre d'arcs de la forme $a=(y, x)$ avec $y \neq x$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de $\Gamma^{-1}(x) \setminus \{x\}$. On note $d_e(x)$ ce degré.
- On appelle degré de x (ou valence) la somme du degré entrant et du degré sortant.
- Un sommet de degré entrant non nul et de degré sortant nul est appelé puits, tandis qu'un sommet de degré entrant nul et de degré sortant non nul est appelé source.

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition* 3**
  - On appelle degré sortant ou demi-degré extérieur d'un sommet x le nombre d'arcs de la forme $a=(x, y)$ avec $y \neq x$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de $\Gamma(x) \setminus \{x\}$. On note $d_s(x)$ ce degré.
  - On appelle degré entrant ou demi-degré intérieur d'un sommet x le nombre d'arcs de la forme $a=(y, x)$ avec $y \neq x$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de $\Gamma^{-1}(x) \setminus \{x\}$. On note $d_e(x)$ ce degré.
  - On appelle degré de x (ou valence) la somme du degré entrant et du degré sortant.
  - Un sommet de degré entrant non nul et de degré sortant nul est appelé puits, tandis qu'un sommet de degré entrant nul et de degré sortant non nul est appelé source.
  - Un sommet n'ayant pas d'arcs incidents est appelé sommet isolé ; ces sommets ont un degré nul

Introduction

Introduction

Principales définitions **(contexte graphes orientés)**

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition* 4**
  - On appelle graphe réflexif un graphe possédant une boucle sur chaque sommet.

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition* 4**
  - On appelle graphe réflexif un graphe possédant une boucle sur chaque sommet.
  - Un graphe est symétrique si, pour tout arc $a_1=(x, y)$ appartenant à A, l'arc $a_2=(y, x)$ appartient également à A.

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

➢ ***Définition 4***

- On appelle graphe réflexif un graphe possédant une boucle sur chaque sommet.

- Un graphe est symétrique si, pour tout arc $a_1=(x, y)$ appartenant à A, l'arc $a_2=(y, x)$ appartient également à A.

- Un graphe est antisymétrique si, pour tout arc $a_1=(x, y)$ appartenant à A, l'arc $a_2=(y, x)$ n'appartient pas à A.

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition 4***
  - On appelle graphe réflexif un graphe possédant une boucle sur chaque sommet.
  - Un graphe est symétrique si, pour tout arc $a_1=(x, y)$ appartenant à A, l'arc $a_2=(y, x)$ appartient également à A.
  - Un graphe est antisymétrique si, pour tout arc $a_1=(x, y)$ appartenant à A, l'arc $a_2=(y, x)$ n'appartient pas à A.
  - Enfin, un graphe est transitif si, quelque soit deux arcs adjacents $a_1=(x, y)$ et $a_2=(y, z)$ appartenant à A, alors l'arc $a_3=(x, z)$ appartient également à A.

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition 4***

  - On appelle graphe réflexif un graphe possédant une boucle sur chaque sommet.

  - Un graphe est symétrique si, pour tout arc $a_1=(x, y)$ appartenant à A, l'arc $a_2=(y, x)$ appartient également à A.

  - Un graphe est antisymétrique si, pour tout arc $a_1=(x, y)$ appartenant à A, l'arc $a_2=(y, x)$ n'appartient pas à A.

  - Enfin, un graphe est transitif si, quelque soit deux arcs adjacents $a_1=(x, y)$ et $a_2=(y, z)$ appartenant à A, alors l'arc $a_3=(x, z)$ appartient également à A.

Le concept de graphe symétrique est très proche de celui des graphes non orientés. En fait, à tout graphe symétrique, on peut associer un graphe non orienté en substituant aux arcs $a_1=(x, y)$ et $a_2=(y, x)$, une arête $a=(y, x)$.

Introduction

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

Introduction

Principales définitions **(contexte graphes orientés)**

- ***Définition*** **5**

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition 5***
  - Un graphe $G=(X, A)$ est dit complet si, pour toute paire de sommets (x, y), il existe au moins un arc de la forme (x, y) ou (x, y).

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition* 5**
  - Un graphe G=(X, A) est dit complet si, pour toute paire de sommets (x, y), il existe au moins un arc de la forme (x, y) ou (x, y).
  - Un graphe simple complet d'ordre n est noté K_n. Un sous-ensemble de sommets $C \subset X$ tel que deux sommets quelconques de C sont reliés par une arête est appelé une clique.

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition* 5**
  - Un graphe G=(X, A) est dit complet si, pour toute paire de sommets (x, y), il existe au moins un arc de la forme (x, y) ou (x, y).
  - Un graphe simple complet d'ordre n est noté K_n. Un sous-ensemble de sommets $C \subset X$ tel que deux sommets quelconques de C sont reliés par une arête est appelé une clique.
- ***Définition* 6**

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition* 5**
  - Un graphe G=(X, A) est dit complet si, pour toute paire de sommets (x, y), il existe au moins un arc de la forme (x, y) ou (x, y).
  - Un graphe simple complet d'ordre n est noté K_n. Un sous-ensemble de sommets $C \subset X$ tel que deux sommets quelconques de C sont reliés par une arête est appelé une clique.

- ***Définition* 6**
  - Soit un graphe G=(X, A) et $X' \subset X$. Le sous-graphe engendré par X' est G'=(X', A'), A' étant formé des arêtes dont les deux extrémités sont dans X'.

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition* 5**
  - Un graphe $G=(X, A)$ est dit complet si, pour toute paire de sommets (x, y), il existe au moins un arc de la forme (x, y) ou (x, y).
  - Un graphe simple complet d'ordre n est noté K_n. Un sous-ensemble de sommets $C \subset X$ tel que deux sommets quelconques de C sont reliés par une arête est appelé une clique.

- ***Définition* 6**
  - Soit un graphe $G=(X, A)$ et $X' \subset X$. Le sous-graphe engendré par X' est $G'=(X', A')$, A' étant formé des arêtes dont les deux extrémités sont dans X'.
  - Si l'on se donne un sous-ensemble A_1 de A, le graphe partiel engendré par A_1 est $G_1=(X, A_1)$.

Introduction

Principales définitions (contexte graphes orientés)

- ***Définition* 5**
  - Un graphe G=(X, A) est dit complet si, pour toute paire de sommets (x, y), il existe au moins un arc de la forme (x, y) ou (x, y).
  - Un graphe simple complet d'ordre n est noté K_n. Un sous-ensemble de sommets $C \subset X$ tel que deux sommets quelconques de C sont reliés par une arête est appelé une clique.

- ***Définition* 6**
  - Soit un graphe G=(X, A) et $X' \subset X$. Le sous-graphe engendré par X' est G'=(X', A'), A' étant formé des arêtes dont les deux extrémités sont dans X'.
  - Si l'on se donne un sous-ensemble A_1 de A, le graphe partiel engendré par A_1 est G_1=(X, A_1).

D'après la définition précédente, une clique d'un graphe *G* est donc un sous-graphe complet de *G*.

Modes de représentation d’un graphe

Successeurs

Prédécesseurs

Modes de représentation d'un graphe

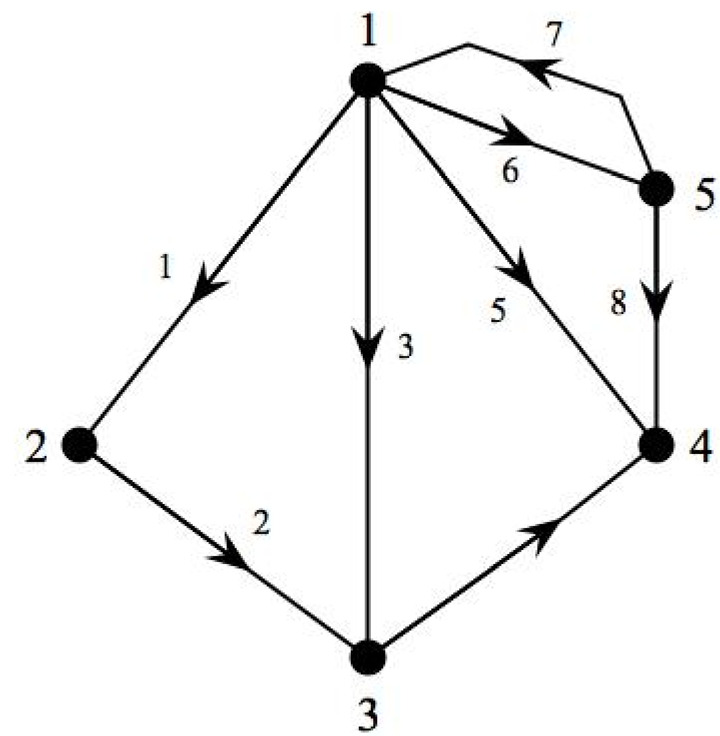
➢ **Listes de succession**

Successeurs

Prédécesseurs

Modes de représentation d'un graphe

➢ **Listes de succession**



Successeurs

Prédécesseurs

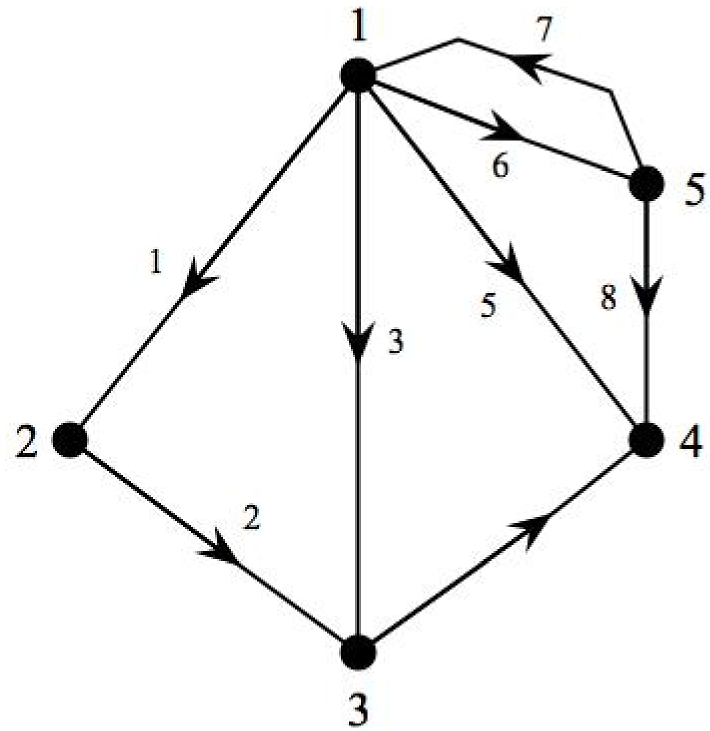
Modes de représentation d'un graphe

➢ **Listes de succession**

1	2, 3, 4, 5
2	3
3	4
4	-
5	1, 4

Successeurs

Prédécesseurs



Modes de représentation d'un graphe

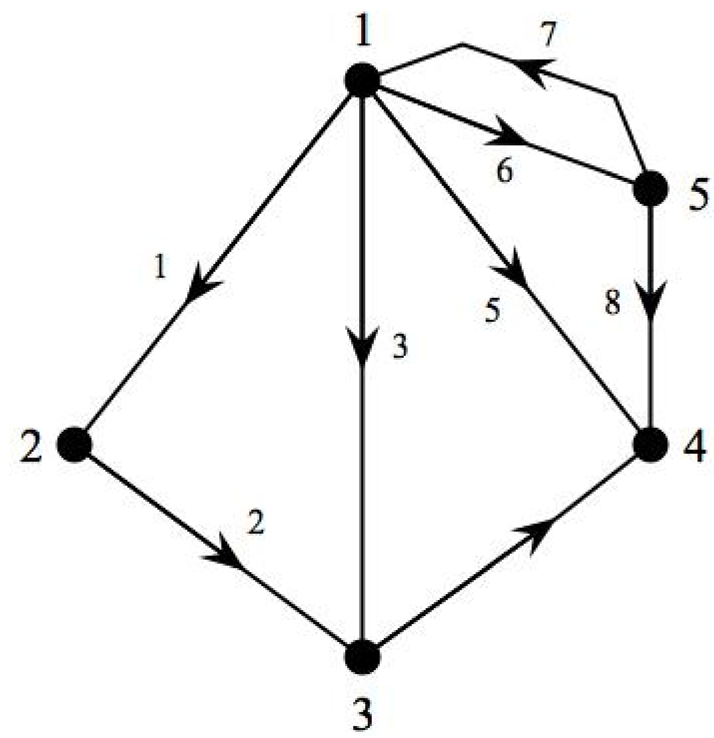
- **Listes de succession**

1	2, 3, 4, 5
2	3
3	4
4	-
5	1, 4

Successeurs

1	5
2	1
3	1, 2
4	1, 3, 5
5	1

Prédécesseurs



Modes de représentation d'un graphe

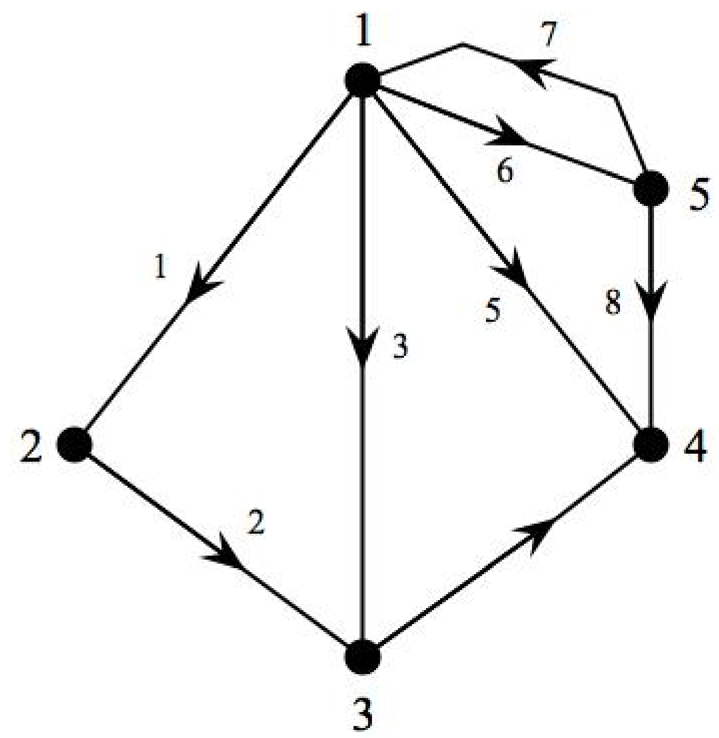
- **Listes de succession**

1	2, 3, 4, 5
2	3
3	4
4	-
5	1, 4

Successeurs

1	5
2	1
3	1, 2
4	1, 3, 5
5	1

Prédécesseurs



Représentation machine

Modes de représentation d'un graphe

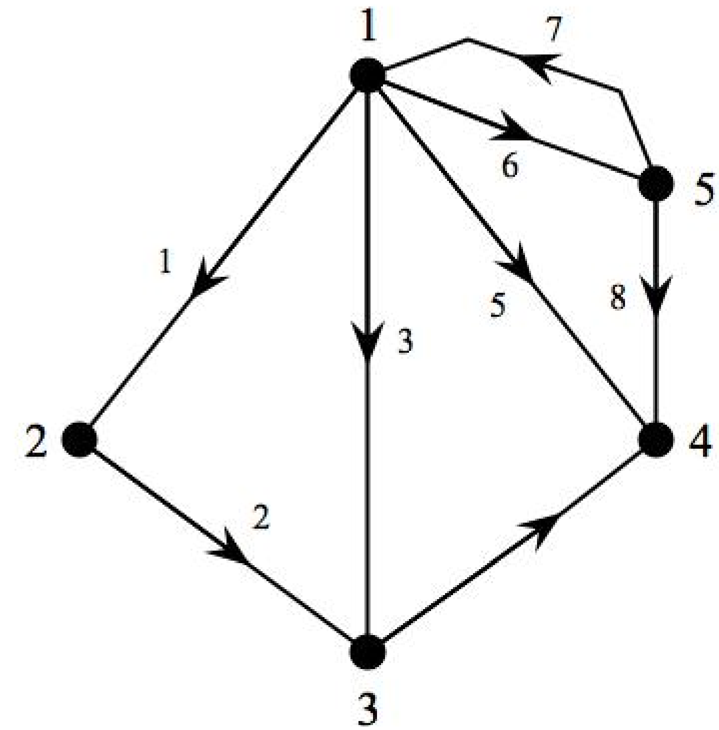
➢ **Listes de succession**

1	2, 3, 4, 5
2	3
3	4
4	-
5	1, 4

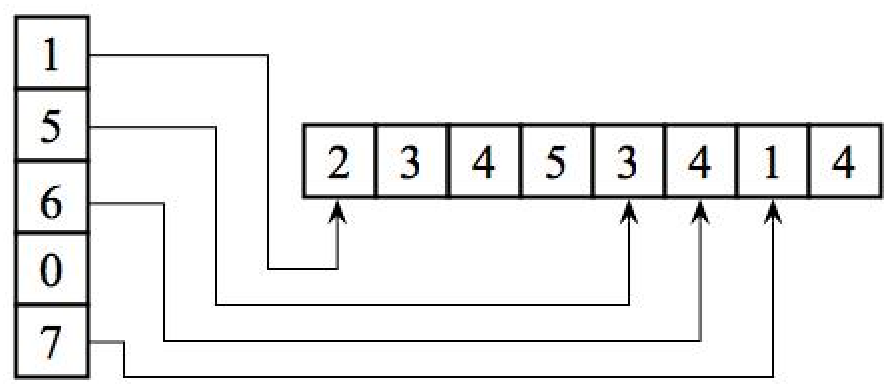
Successeurs

1	5
2	1
3	1, 2
4	1, 3, 5
5	1

Prédécesseurs



Représentation machine



Modes de représentation d'un graphe

Modes de représentation d’un graphe

- **Matrice d’adjacence**

Modes de représentation d’un graphe

- **Matrice d’adjacence**

  Utilisation des outils d’algèbre linéaire

Modes de représentation d'un graphe

- **Matrice d'adjacence**

  Utilisation des outils d'algèbre linéaire

- ***Définition 7***

  Considérons un graphe G=(X, A) comportant n sommets. La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice U=(u_{ij}) de dimension $n \times n$ telle que :

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in A \ \ (\text{c'est}-\text{à}-\text{dire } (i, j) \text{ est une arête}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Une telle matrice, ne contenant que des « 0 »
  et des « 1 » est appelée matrice booléenne.

Modes de représentation d'un graphe

- **Matrice d'adjacence**

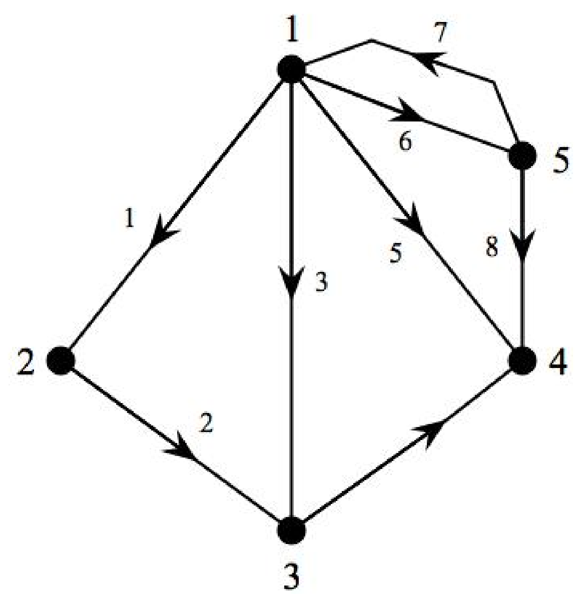
  Utilisation des outils d'algèbre linéaire

- ***Définition 7***

  Considérons un graphe G=(X, A) comportant n sommets. La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice U=(u_{ij}) de dimension $n \times n$ telle que :

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in A \ \text{(c'est-à-dire } (i,j) \text{ est une arête)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une telle matrice, ne contenant que des « 0 » et des « 1 » est appelée matrice booléenne.



Modes de représentation d'un graphe

- **Matrice d'adjacence**

  Utilisation des outils d'algèbre linéaire

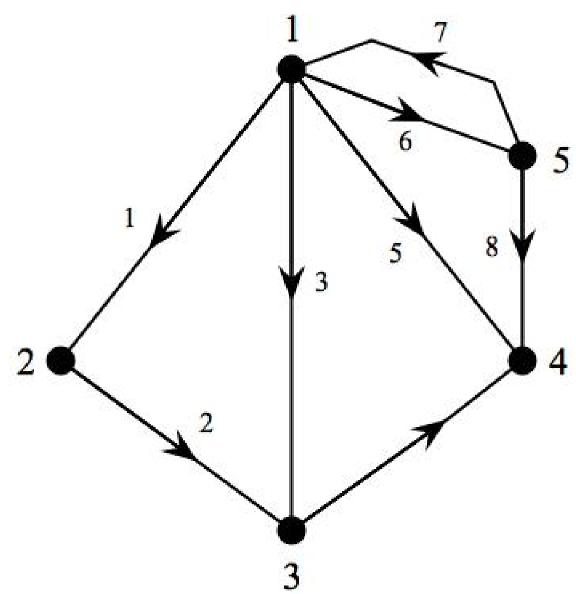
- ***Définition 7***

  Considérons un graphe G=(X, A) comportant n sommets. La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice U=(u_{ij}) de dimension $n \times n$ telle que :

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in A \ \ (\text{c'est}-\text{à}-\text{dire } (i, j) \text{ est une arête}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une telle matrice, ne contenant que des « 0 » et des « 1 » est appelée matrice booléenne.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

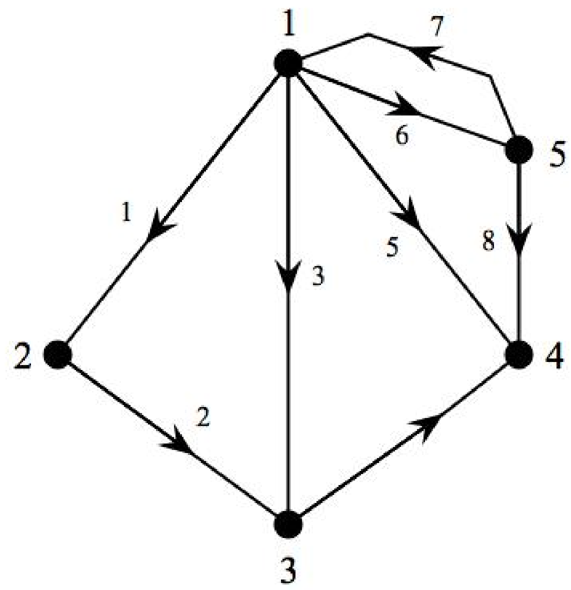


Modes de représentation d’un graphe

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de U est égale au degré sortant $d_s(x_i)$ du sommet x_i de G.

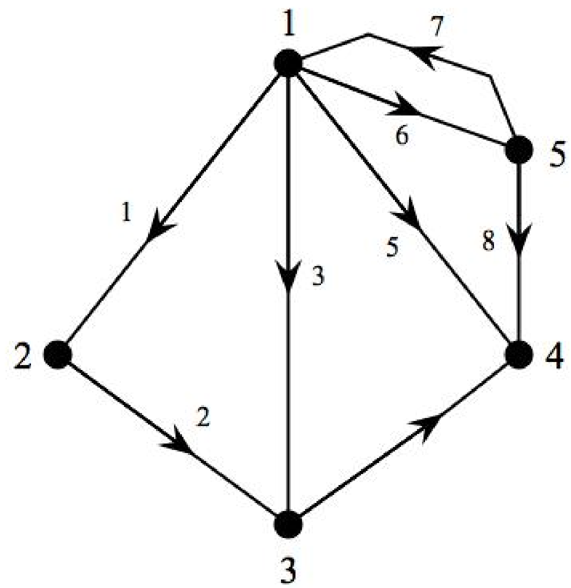
Modes de représentation d'un graphe



$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de U est égale au degré sortant $d_s(x_i)$ du sommet x_i de G.

Modes de représentation d'un graphe

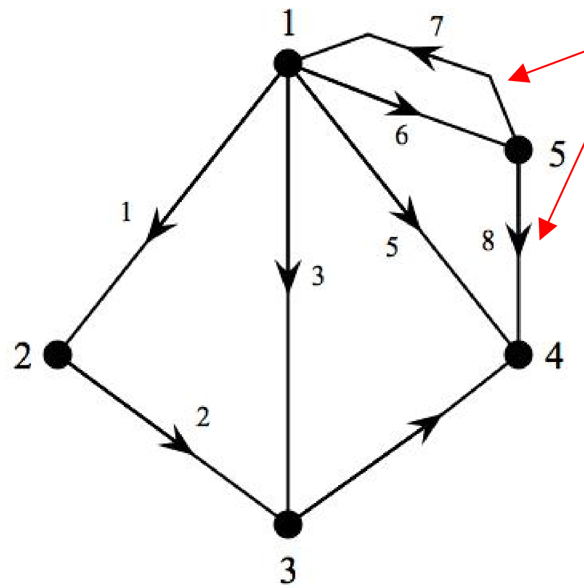


$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés

➢ la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de U est égale au degré sortant $d_s(x_i)$ du sommet x_i de G.

Modes de représentation d’un graphe

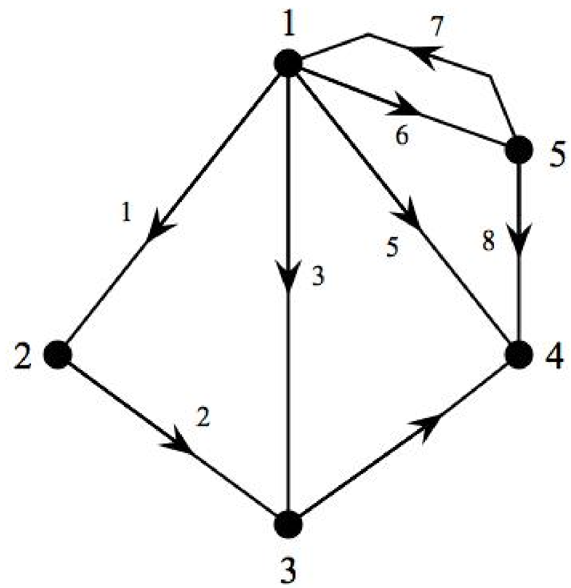


$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \rightarrow \; 2 \end{matrix}$$

Propriétés

- la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de U est égale au degré sortant $d_s(x_i)$ du sommet x_i de G.

Modes de représentation d'un graphe



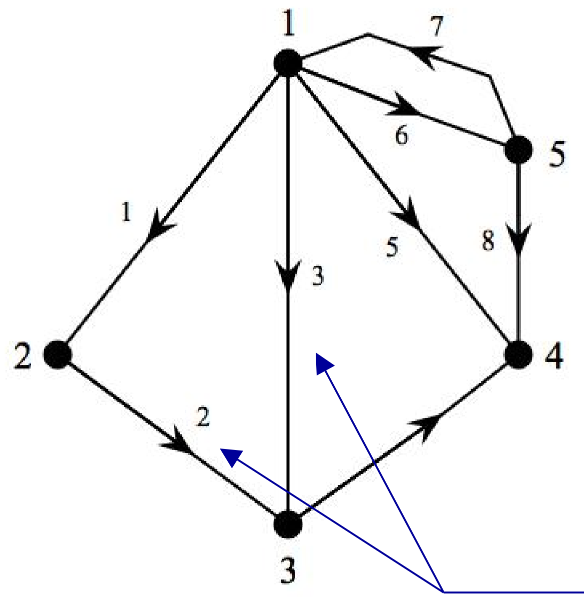
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés

- la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de U est égale au degré sortant $d_s(x_i)$ du sommet x_i de G.

- la somme des éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne de U est égale au degré entrant $d_e(x_j)$ du sommet x_j de G.

Modes de représentation d'un graphe



$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

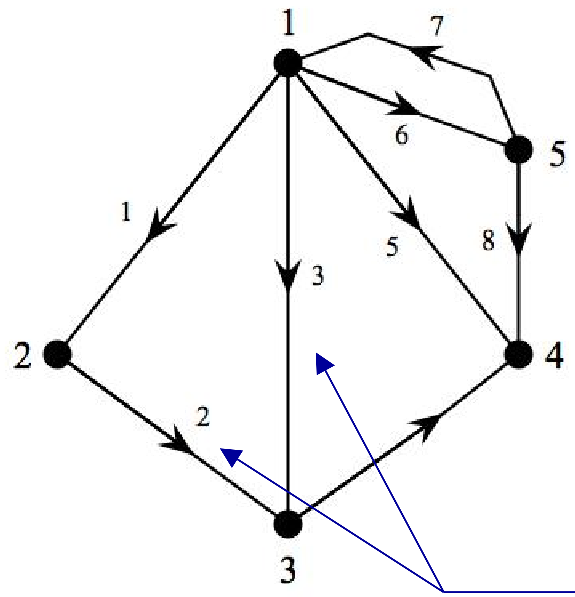
2

Propriétés

➢ la somme des éléments de la $i^{ème}$ ligne de U est égale au degré sortant $d_s(x_i)$ du sommet x_i de G.

➢ la somme des éléments de la $j^{ème}$ colonne de U est égale au degré entrant $d_e(x_j)$ du sommet x_j de G.

Modes de représentation d'un graphe



$$\begin{array}{c} U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & & \downarrow & & \\ & & 2 & & \end{array} \end{array}$$

Propriétés

- la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de U est égale au degré sortant $d_s(x_i)$ du sommet x_i de G.

- la somme des éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne de U est égale au degré entrant $d_e(x_j)$ du sommet x_j de G.

- U est symétrique si, et seulement si, le graphe G est symétrique.

Modes de représentation d'un graphe

Modes de représentation d'un graphe

- **Matrice d'incidence**

Modes de représentation d'un graphe

- **Matrice d'incidence**

  Incidence entre arêtes et sommets

Modes de représentation d'un graphe

➢ Matrice d'incidence

Incidence entre arêtes et sommets

➢ *Définition 8*

Considérons un graphe orienté sans boucle $G=(X, A)$ comportant n sommets $x_1, \ldots, x_n$ et m arêtes $a_1, \ldots, a_m$. On appelle matrice d'incidence (aux arcs) de G la matrice $M=(m_{ij})$ de dimension $n \times m$ telle que :

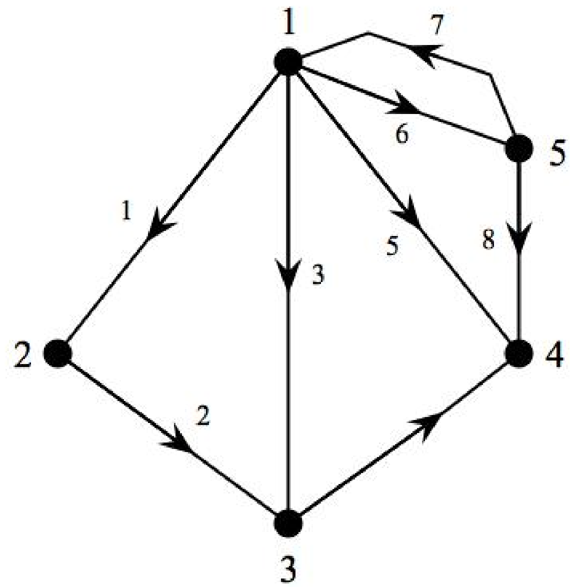
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x_i \text{ est l'extrémité initiale de } a_j \\ -1 & \text{si } \ x_i \text{ est l'extrémité terminale de } a_j \\ 0 & \text{si } \ x_i \text{ n'est pas une extrémité de } a_j \end{cases}$$

Pour un graphe non orienté sans boucle, la matrice d'incidence (aux arêtes) est définie par :

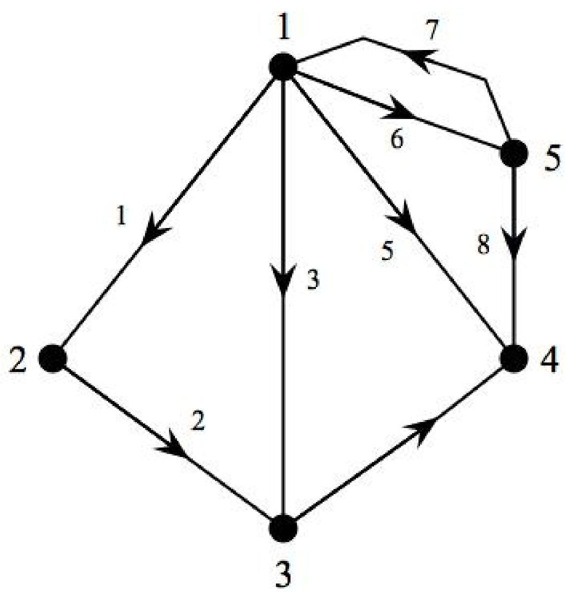
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x_i \text{ est une extrémité de } a_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Modes de représentation d’un graphe

Modes de représentation d'un graphe

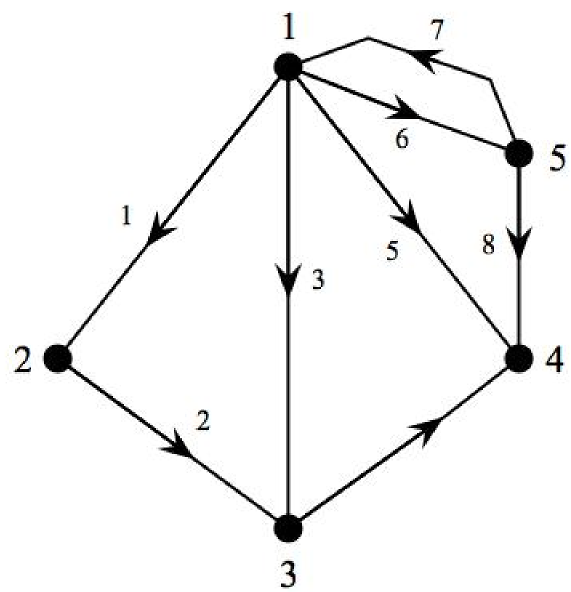


Modes de représentation d'un graphe



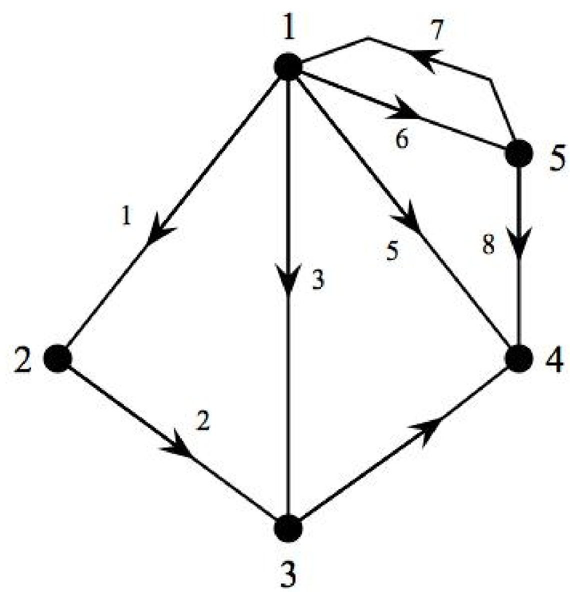
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Modes de représentation d'un graphe



$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & \text{Arc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
M = & & \multicolumn{8}{c}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

Modes de représentation d'un graphe



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} \text{Arc} \quad 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
M = & \begin{pmatrix}
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}
$$

Sommet

Etude de la connexité

Etude de la connexité

Chaînes et cycles, élémentaires et simples

Etude de la connexité

Chaînes et cycles, élémentaires et simples

- ***Définition* 9**

Etude de la connexité

Chaînes et cycles, élémentaires et simples

- ***Définition* 9**
  - Une chaîne est une séquence finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadre dans la séquence.

Etude de la connexité

Chaînes et cycles, élémentaires et simples

- ***Définition* 9**
  - Une chaîne est une séquence finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadre dans la séquence.
  - Le premier et le dernier sommet sont appelés (sommets) extrémités de la chaîne.

Etude de la connexité

Chaînes et cycles, élémentaires et simples

➢ ***Définition* 9**

- Une chaîne est une séquence finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadre dans la séquence.
- Le premier et le dernier sommet sont appelés (sommets) extrémités de la chaîne.
- La longueur de la chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.

Etude de la connexité

Chaînes et cycles, élémentaires et simples

- ***Définition* 9**

  - Une chaîne est une séquence finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadre dans la séquence.
  - Le premier et le dernier sommet sont appelés (sommets) extrémités de la chaîne.
  - La longueur de la chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
  - Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est dite chaîne élémentaire.

Etude de la connexité

Chaînes et cycles, élémentaires et simples

- ***Définition*** **9**

  - Une chaîne est une séquence finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadre dans la séquence.
  - Le premier et le dernier sommet sont appelés (sommets) extrémités de la chaîne.
  - La longueur de la chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
  - Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est dite chaîne élémentaire.
  - Si aucune des arêtes composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est dite chaîne simple.

Etude de la connexité

Etude de la connexité

Chaînes et cycles, élémentaires et simples

Etude de la connexité

Chaînes et cycles, élémentaires et simples

- Un cycle est une chaîne dont les extrémités coïncident.

Etude de la connexité

Chaînes et cycles, élémentaires et simples

- Un cycle est une chaîne dont les extrémités coïncident.
- Un cycle élémentaire (tel que l'on ne rencontre pas deux fois le même sommet en le parcourant) est un cycle minimal pour l'inclusion, c'est-à-dire ne contenant strictement aucun autre cycle.

Etude de la connexité

Etude de la connexité

Chemins et circuits, élémentaires et simples

Etude de la connexité

Chemins et circuits, élémentaires et simples

- ***Définition* 10**

Etude de la connexité

Chemins et circuits, élémentaires et simples

- ***Définition* 10**
  - Un chemin est une séquence finie et alternée de sommets et d'arcs, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arc est sortant d'un sommet et incident au sommet suivant dans la la séquence (cela correspond à la notion de chaîne « orientée »).

Etude de la connexité

Chemins et circuits, élémentaires et simples

- ***Définition* 10**
  - Un chemin est une séquence finie et alternée de sommets et d'arcs, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arc est sortant d'un sommet et incident au sommet suivant dans la la séquence (cela correspond à la notion de chaîne « orientée »).
  - Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin élémentaire.

Etude de la connexité

Chemins et circuits, élémentaires et simples

- ***Définition* 10**
  - Un chemin est une séquence finie et alternée de sommets et d'arcs, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arc est sortant d'un sommet et incident au sommet suivant dans la la séquence (cela correspond à la notion de chaîne « orientée »).
  - Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin élémentaire.
  - Si aucune des arêtes composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin simple.

Etude de la connexité

Chemins et circuits, élémentaires et simples

- ***Définition* 10**
  - Un chemin est une séquence finie et alternée de sommets et d'arcs, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arc est sortant d'un sommet et incident au sommet suivant dans la la séquence (cela correspond à la notion de chaîne « orientée »).
  - Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin élémentaire.
  - Si aucune des arêtes composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin simple.
  - Un circuit est un chemin dont les extrémités coïncident.

Etude de la connexité

Chemins et circuits, élémentaires et simples

- ***Définition* 10**
  - Un chemin est une séquence finie et alternée de sommets et d'arcs, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arc est sortant d'un sommet et incident au sommet suivant dans la la séquence (cela correspond à la notion de chaîne « orientée »).
  - Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin élémentaire.
  - Si aucune des arêtes composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin simple.
  - Un circuit est un chemin dont les extrémités coïncident.
  - En parcourant un circuit élémentaire, on ne rencontre pas deux fois le même sommet.

Etude de la connexité

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes connexes

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes connexes

- ***Définition* 11**

  Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre une paire quelconque de sommets de G.

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes connexes

- ***Définition* 11**

  Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre une paire quelconque de sommets de G.

La relation :

$$x_i \;\mathcal{R}\; x_j \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } x_i = x_j \\ \text{soit il existe une chaîne joignant } x_i \text{ à } x_j \end{cases}$$

est une relation d'équivalence (réflexivité, symétrie, transitivité). Les classes d'équivalence induites sur X par cette relation forment une partition de X en X_1, X_2, … X_p.

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes connexes

➢ ***Définition* 11**

Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre une paire quelconque de sommets de G.

La relation :

$$x_i \ \mathrm{R} \ x_j \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } \ x_i = x_j \\ \text{soit il existe une chaîne joignant } x_i \text{ à } x_j \end{cases}$$

est une relation d'équivalence (réflexivité, symétrie, transitivité). Les classes d'équivalence induites sur X par cette relation forment une partition de X en X_1, X_2, … X_p.

Le nombre p de classes d'équivalence distinctes est appelé nombre de connexité du graphe.

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes connexes

- ***Définition* 11**

Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre une paire quelconque de sommets de G.

La relation :

$$x_i \; \mathrm{R} \; x_j \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } \; x_i = x_j \\ \text{soit il existe une chaîne joignant } x_i \text{ à } x_j \end{cases}$$

est une relation d'équivalence (réflexivité, symétrie, transitivité). Les classes d'équivalence induites sur X par cette relation forment une partition de X en X_1, X_2, … X_p.

Le nombre p de classes d'équivalence distinctes est appelé nombre de connexité du graphe.

Un graphe est dit connexe si et seulement si son nombre de connexité est égal à 1.

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes connexes

- ***Définition* 11**

Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre une paire quelconque de sommets de G.

La relation :

$$x_i \;\mathrm{R}\; x_j \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } x_i = x_j \\ \text{soit il existe une chaîne joignant } x_i \text{ à } x_j \end{cases}$$

est une relation d'équivalence (réflexivité, symétrie, transitivité). Les classes d'équivalence induites sur X par cette relation forment une partition de X en $X_1, X_2, \ldots X_p$.

Le nombre p de classes d'équivalence distinctes est appelé nombre de connexité du graphe.

Un graphe est dit connexe si et seulement si son nombre de connexité est égal à 1.

Les sous-graphes G_i engendrés par les sous-ensembles X_i sont appelés les composantes connexes du graphe. Chaque composante connexe est un graphe connexe.

Etude de la connexité

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes connexes

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes connexes

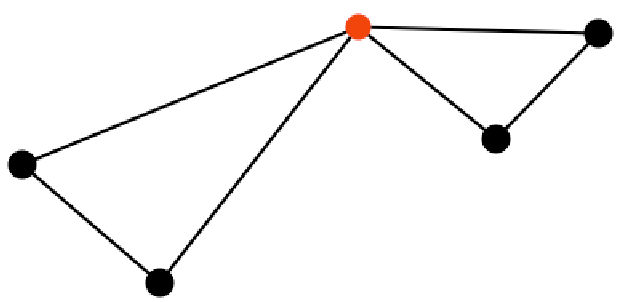
- ***Définition* 12**
  - Un point d'articulation d'un graphe est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes connexes

➢ ***Définition* 12**

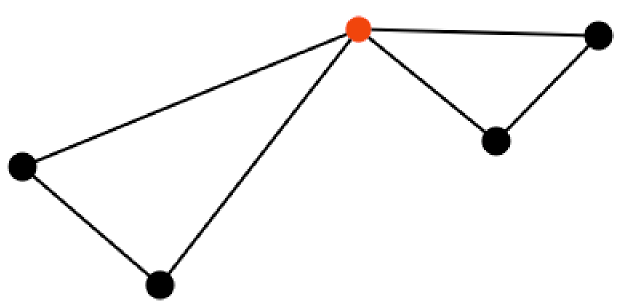
- Un point d'articulation d'un graphe est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.



Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes connexes

- ***Définition* 12**
  - Un point d'articulation d'un graphe est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.
  - Un isthme est une arête dont la suppression a le même effet.

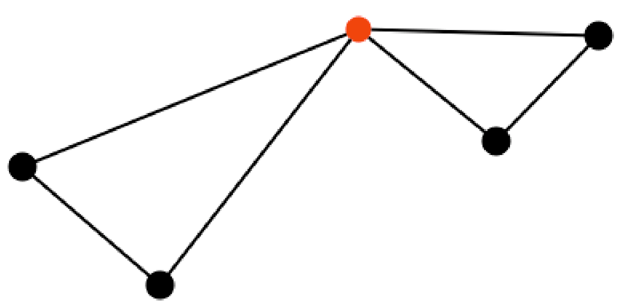


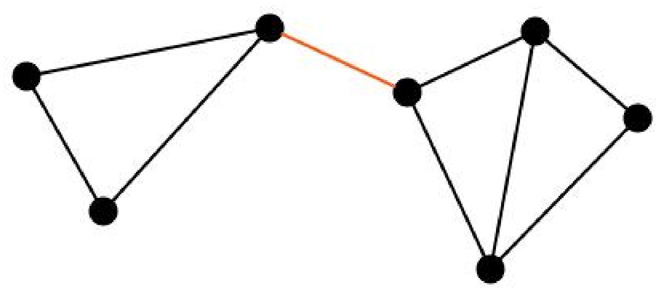
Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes connexes

➢ ***Définition* 12**

- Un point d'articulation d'un graphe est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.
- Un isthme est une arête dont la suppression a le même effet.

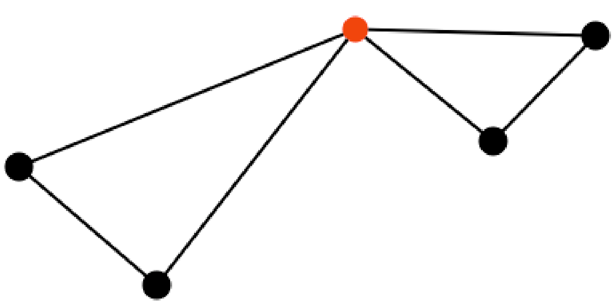


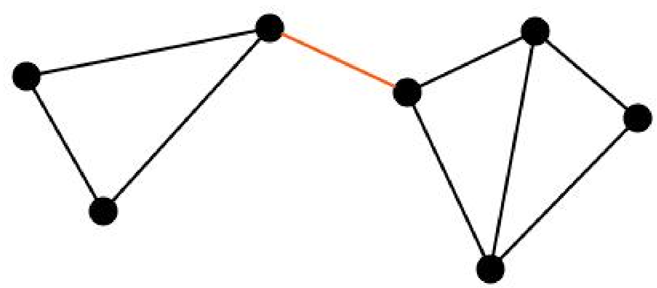


Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes connexes

- ***Définition* 12**
  - Un point d'articulation d'un graphe est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.
  - Un isthme est une arête dont la suppression a le même effet.
  - Un ensemble d'articulation d'un graphe connexe *G* est un ensemble de sommets tel que le sous-graphe *G'* déduit de *G* par suppression des sommets de *E*, ne soit plus connexe.





Etude de la connexité

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes fortement connexes

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes fortement connexes

- ***Définition* 13**

  Un graphe orienté est fortement connexe s'il existe un chemin joignant deux sommets quelconque.

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes fortement connexes

- ***Définition* 13**

  Un graphe orienté est fortement connexe s'il existe un chemin joignant deux sommets quelconque.

La relation :

$$x_i \ \mathrm{R} \ x_j \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } \ x_i = x_j \\ \text{soit il existe à la fois un chemin joignant } x_i \text{ à } x_j \text{ et un chemin joignant } x_j \text{ à } x_i \end{cases}$$

est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence induites sur X par cette relation forment une partition de X en $X_1, X_2, \ldots X_q$.

Les sous-graphes engendrés par les sous-ensembles $G_1, G_2, \ldots G_q$ sont appelés les composantes fortement connexes du graphe.

Etude de la connexité

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes fortement connexes

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes fortement connexes

- ***Définition* 14**

On appelle graphe réduit le quotient du graphe G par la relation de forte connexité $G_r = G/R$

Les sommets de G_r sont donc les composantes fortement connexes et il existe un arc entre deux composantes fortement connexes si et seulement s'il existe au moins un arc entre un sommet de la première composante et un sommet de la seconde.

On vérifie que le graphe G_r est sans circuit.

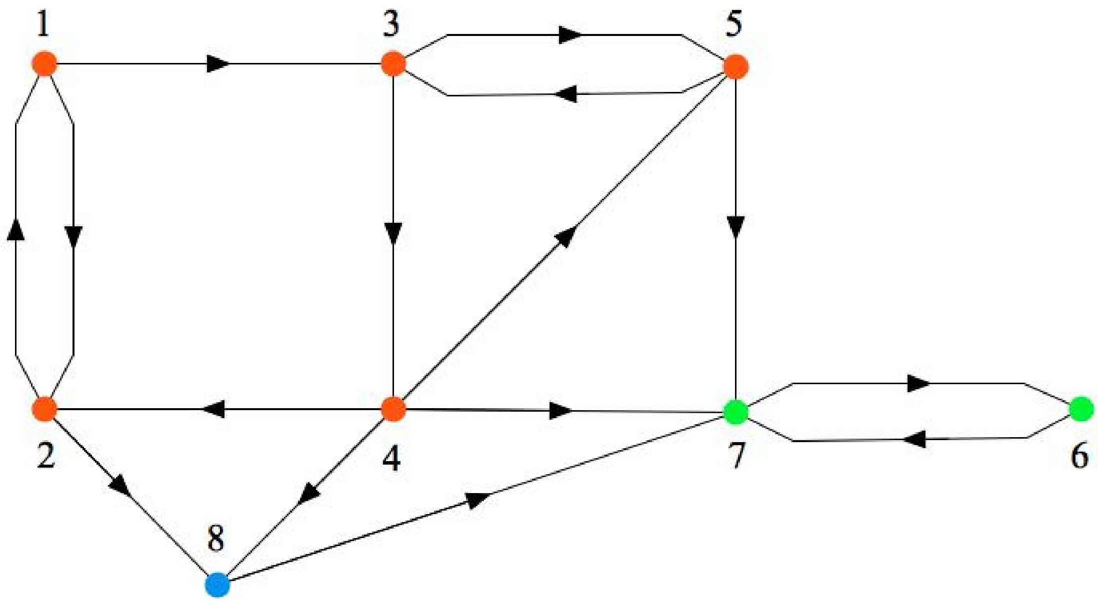
Etude de la connexité

Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes fortement connexes

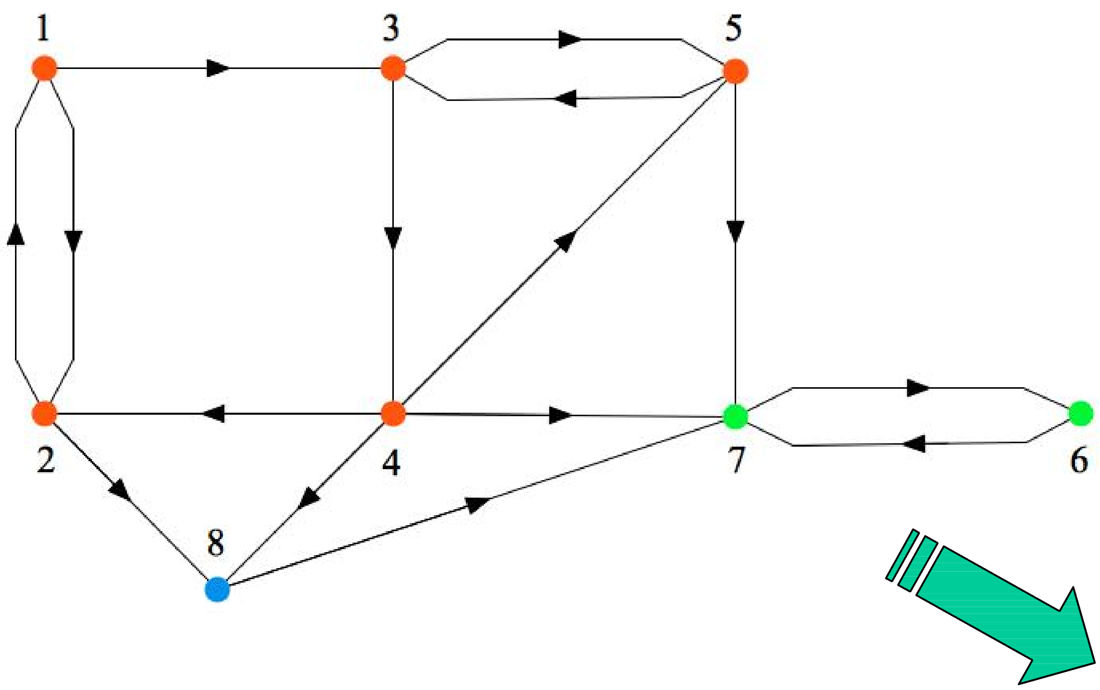
Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes fortement connexes



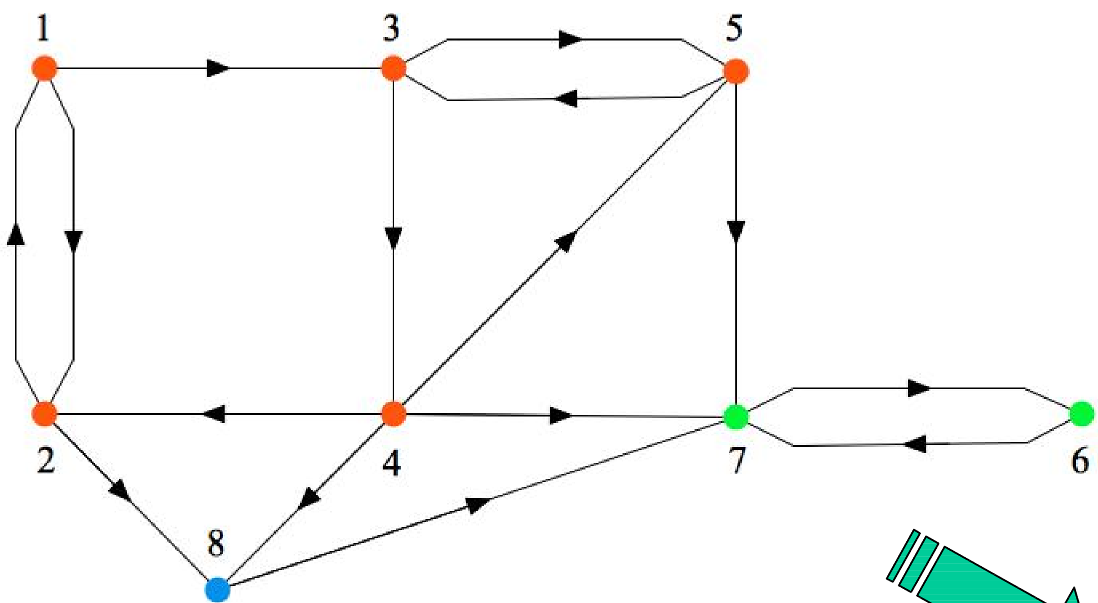
Etude de la connexité

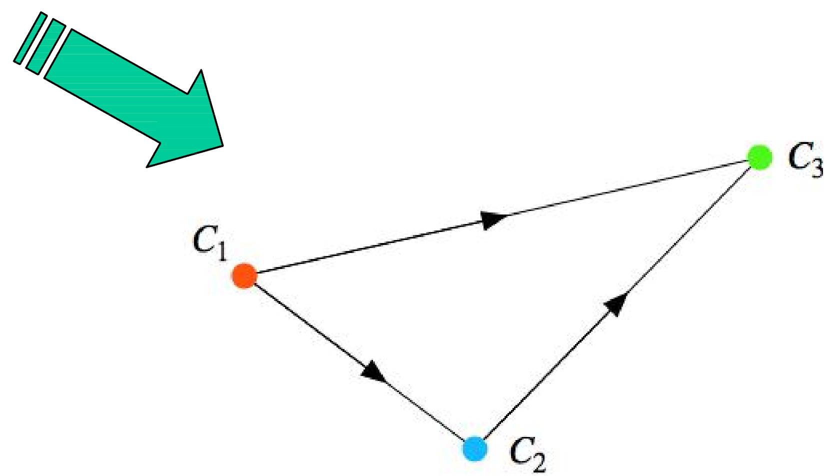
Graphes et sous-graphes fortement connexes



Etude de la connexité

Graphes et sous-graphes fortement connexes





Etude de la connexité

Etude de la connexité

Cycles et nombre cyclomatique

Etude de la connexité

Cycles et nombre cyclomatique

Pour un cycle μ donné, on désigne par μ^+ l'ensemble des arcs du cycle orientés dans le sens de parcours et par μ^- l'ensemble des arcs orientés en sens contraire. Si le graphe possède m arcs désignés par a_1, a_2, … a_m, on peut faire correspondre à tout cycle μ un vecteur µ tel que :

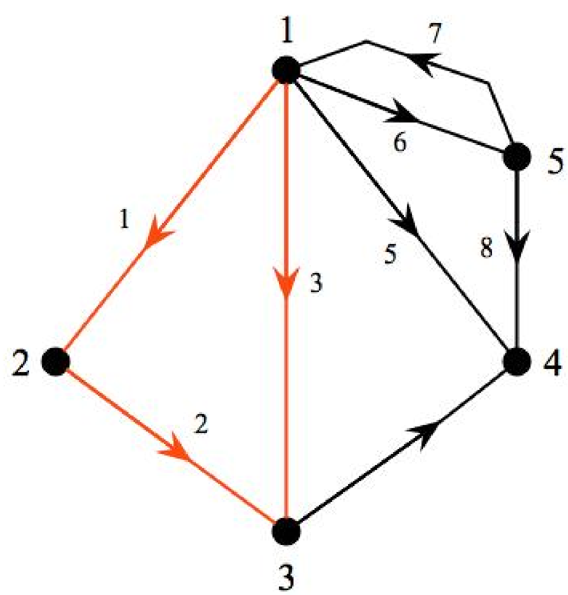
$$\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \in \mu^+ \\ -1 & \text{si } a_i \in \mu^- \\ 0 & \text{si } a_i \notin \mu^+ \cup \mu^- \end{cases}$$

Etude de la connexité

Cycles et nombre cyclomatique

Pour un cycle μ donné, on désigne par μ^+ l'ensemble des arcs du cycle orientés dans le sens de parcours et par μ^- l'ensemble des arcs orientés en sens contraire. Si le graphe possède m arcs désignés par a_1, a_2, … a_m, on peut faire correspondre à tout cycle μ un vecteur µ tel que :

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \in \mu^+ \\ -1 & \text{si } a_i \in \mu^- \\ 0 & \text{si } a_i \notin \mu^+ \cup \mu^- \end{cases}$$

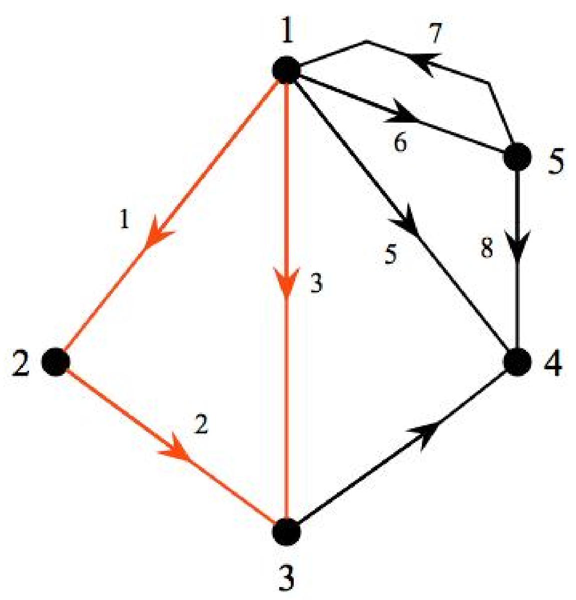


Etude de la connexité

Cycles et nombre cyclomatique

Pour un cycle μ donné, on désigne par μ^+ l'ensemble des arcs du cycle orientés dans le sens de parcours et par μ^- l'ensemble des arcs orientés en sens contraire. Si le graphe possède m arcs désignés par $a_1, a_2, \ldots a_m$, on peut faire correspondre à tout cycle μ un vecteur μ tel que :

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \in \mu^+ \\ -1 & \text{si } a_i \in \mu^- \\ 0 & \text{si } a_i \notin \mu^+ \cup \mu^- \end{cases}$$



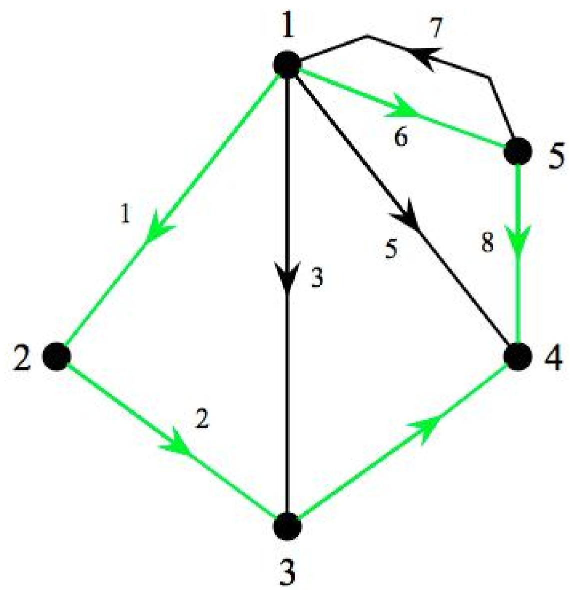
$\mu = (\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

Etude de la connexité

Cycles et nombre cyclomatique

Pour un cycle μ donné, on désigne par μ^+ l'ensemble des arcs du cycle orientés dans le sens de parcours et par μ^- l'ensemble des arcs orientés en sens contraire. Si le graphe possède m arcs désignés par $a_1, a_2, \ldots a_m$, on peut faire correspondre à tout cycle μ un vecteur μ tel que :

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \in \mu^+ \\ -1 & \text{si } a_i \in \mu^- \\ 0 & \text{si } a_i \notin \mu^+ \cup \mu^- \end{cases}$$



$\mu = (\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

$\mu = (\ -1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$

Etude de la connexité

Etude de la connexité

Cycles et nombre cyclomatique

Etude de la connexité

Cycles et nombre cyclomatique

- ***Définition* 15**

Etude de la connexité

Cycles et nombre cyclomatique

- ***Définition* 15**

  - On dit que *p* cycles $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ sont dépendants s'il existe, entre leurs vecteurs associés, une relation vectorielle de la forme :

    $$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \ldots + \lambda_p \mu_p = 0$$

    avec les λ_i non tous nuls.

Etude de la connexité

Cycles et nombre cyclomatique

- ***Définition* 15**

  - On dit que *p* cycles $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ sont dépendants s'il existe, entre leurs vecteurs associés, une relation vectorielle de la forme :

    $$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \ldots + \lambda_p \mu_p = 0$$

    avec les λ_i non tous nuls.

  - Si la satisfaction de la relation précédente implique $\lambda_i=0$, $i=1,\ldots,p$, les *p* cycles sont dits indépendants.

Etude de la connexité

Cycles et nombre cyclomatique

- ***Définition* 15**

  - On dit que p cycles $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ sont dépendants s'il existe, entre leurs vecteurs associés, une relation vectorielle de la forme :

    $$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \ldots + \lambda_p \mu_p = 0$$

    avec les λ_i non tous nuls.

  - Si la satisfaction de la relation précédente implique $\lambda_i=0$, $i=1,\ldots,p$, les p cycles sont dits indépendants.

  - Une base de cycles est un ensemble minimal de cycles indépendants tel que tout vecteur représentatif d'un cycle puisse s'exprimer comme combinaison linéaire des cycles de la base.

Etude de la connexité

Cycles et nombre cyclomatique

- ***Définition* 15**

  - On dit que p cycles $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ sont dépendants s'il existe, entre leurs vecteurs associés, une relation vectorielle de la forme :

    $$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \ldots + \lambda_p \mu_p = 0$$

    avec les λ_i non tous nuls.
  - Si la satisfaction de la relation précédente implique $\lambda_i=0$, $i=1,\ldots,p$, les p cycles sont dits indépendants.
  - Une base de cycles est un ensemble minimal de cycles indépendants tel que tout vecteur représentatif d'un cycle puisse s'exprimer comme combinaison linéaire des cycles de la base.
  - On appelle nombre cyclomatique d'un graphe G, la dimension de la base de cycles.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Définition* 16**

  Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Définition* 16**

  Soit un graphe orienté G=(X, A).

  - Une chaîne eulérienne est une chaîne empruntant une fois et une fois seulement chaque arête de G.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Définition* 16**

  Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

  - Une chaîne eulérienne est une chaîne empruntant une fois et une fois seulement chaque arête de G.
  - Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Définition* 16**

Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

- Une chaîne eulérienne est une chaîne empruntant une fois et une fois seulement chaque arête de G.
- Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.
- Un graphe possédant un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.

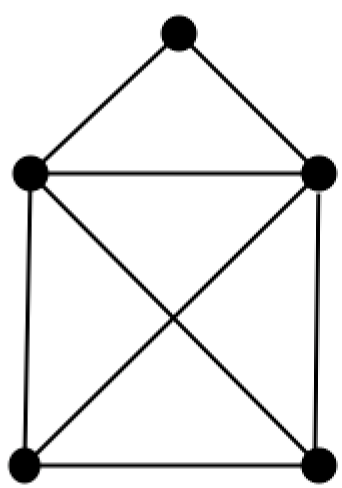
Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

➢ ***Définition* 16**

Soit un graphe orienté G=(X, A).

- Une chaîne eulérienne est une chaîne empruntant une fois et une fois seulement chaque arête de G.
- Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.
- Un graphe possédant un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



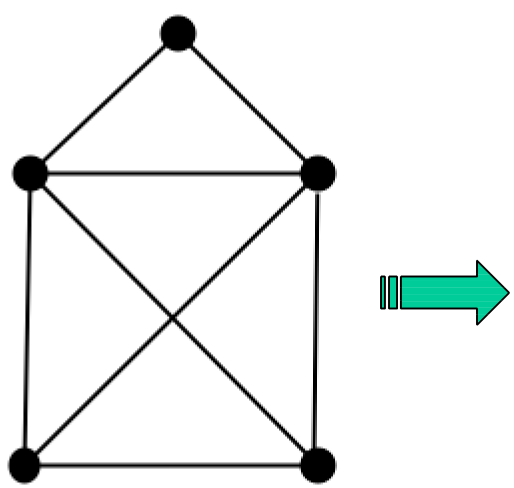
Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

➢ ***Définition* 16**

Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

- Une chaîne eulérienne est une chaîne empruntant une fois et une fois seulement chaque arête de G.
- Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.
- Un graphe possédant un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



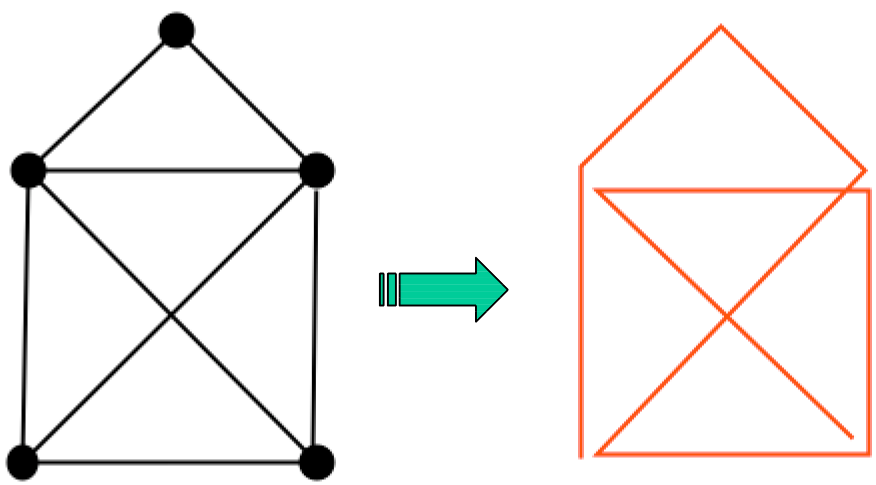
Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Définition* 16**

  Soit un graphe orienté G=(X, A).

  - Une chaîne eulérienne est une chaîne empruntant une fois et une fois seulement chaque arête de G.
  - Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.
  - Un graphe possédant un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



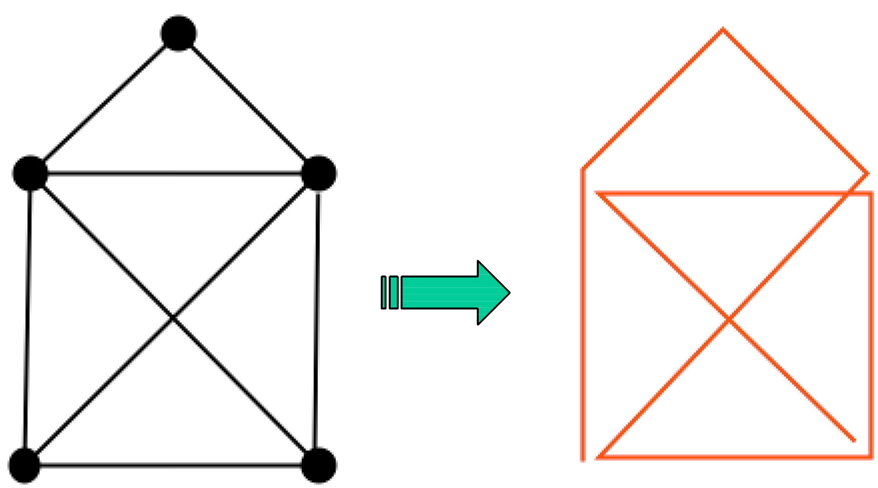
Parcours eulériens et hamiltoniens

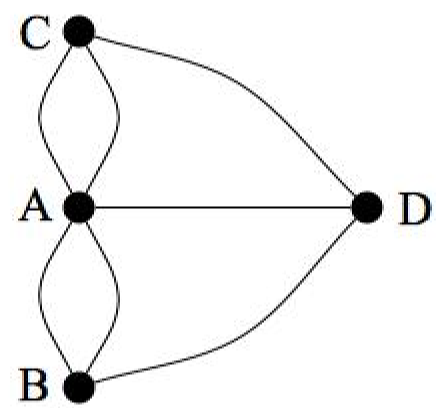
Chaînes et cycles eulériens

- ***Définition* 16**

  Soit un graphe orienté G=(X, A).

  - Une chaîne eulérienne est une chaîne empruntant une fois et une fois seulement chaque arête de G.
  - Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.
  - Un graphe possédant un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.





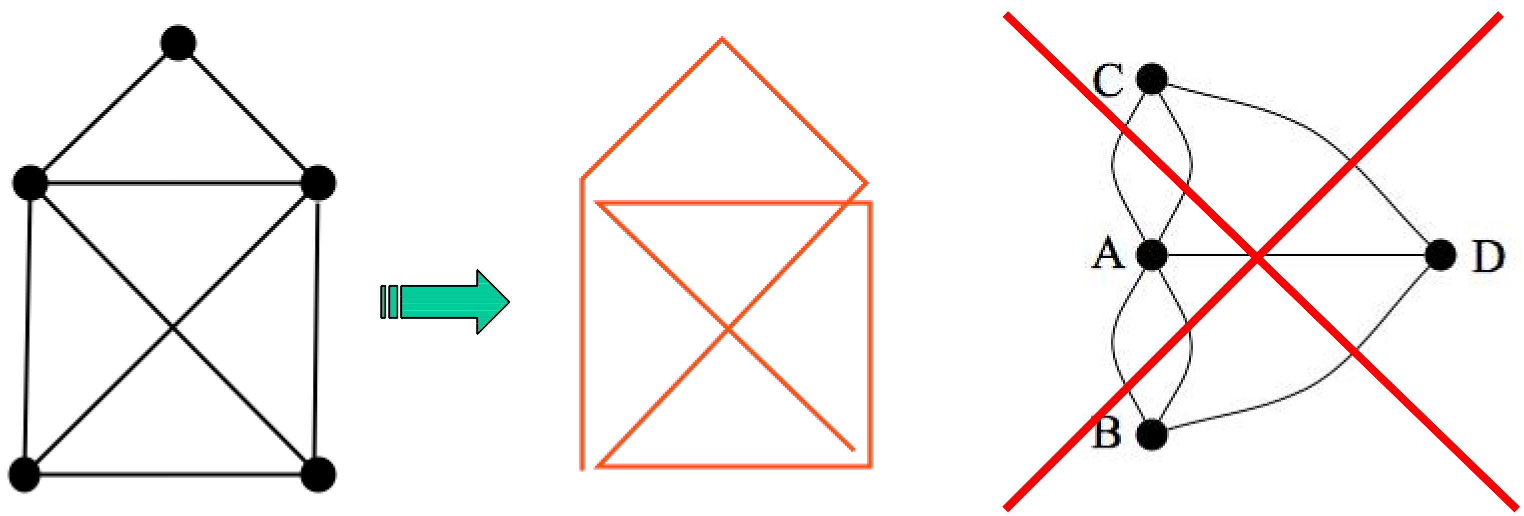
Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Définition* 16**

Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

- Une chaîne eulérienne est une chaîne empruntant une fois et une fois seulement chaque arête de G.
- Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.
- Un graphe possédant un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



Parcours eulériens et hamiltoniens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Théorème* 1**

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Théorème* 1**
  - Un graphe non orienté connexe possède une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Théorème* 1**
  - Un graphe non orienté connexe possède une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.
  - Il admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Théorème* 1**
  - Un graphe non orienté connexe possède une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.
  - Il admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.

Condition nécessaire

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Théorème*** **1**
  - Un graphe non orienté connexe possède une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.
  - Il admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.

Condition nécessaire

En chaque sommet, le nombre d'arcs incidents doit être égal au nombre d'arcs sortants,

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Théorème* 1**
  - Un graphe non orienté connexe possède une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.
  - Il admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.

Condition nécessaire

En chaque sommet, le nombre d’arcs incidents doit être égal au nombre d’arcs sortants, les sommets doivent donc être de degré pair.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Théorème* 1**
  - Un graphe non orienté connexe possède une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.
  - Il admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.

Condition nécessaire

En chaque sommet, le nombre d’arcs incidents doit être égal au nombre d’arcs sortants, les sommets doivent donc être de degré pair.

Dans le cas d’une chaîne, les deux extrémités font exception ; on part ou on arrive une

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

- ***Théorème* 1**
  - Un graphe non orienté connexe possède une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.
  - Il admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.

Condition nécessaire

En chaque sommet, le nombre d'arcs incidents doit être égal au nombre d'arcs sortants, les sommets doivent donc être de degré pair.

Dans le cas d'une chaîne, les deux extrémités font exception ; on part ou on arrive une fois de plus, d'où un degré impair pour ces deux sommets extrémités.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Condition nécessaire

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Condition nécessaire

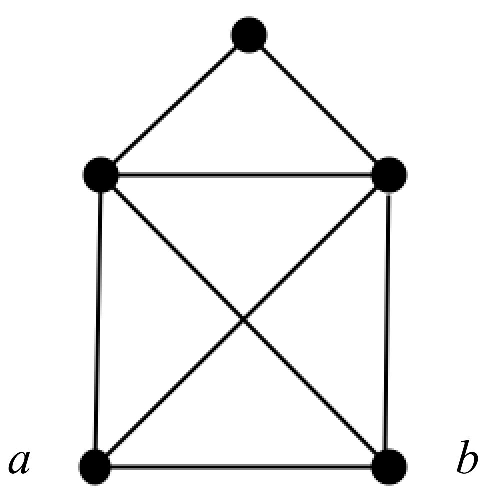
Soit *a* et *b* deux sommets de degré impair (s'il n'y en a pas a et b sont confondus).

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Condition nécessaire

Soit *a* et *b* deux sommets de degré impair (s'il n'y en a pas a et b sont confondus).

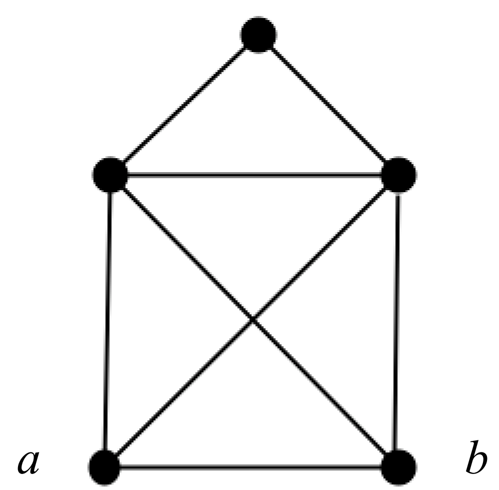


Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Condition nécessaire

Soit *a* et *b* deux sommets de degré impair (s'il n'y en a pas a et b sont confondus).
Soit *L* la chaîne parcourue en partant de *a* (avec l'interdiction d'emprunter deux fois la même arête).

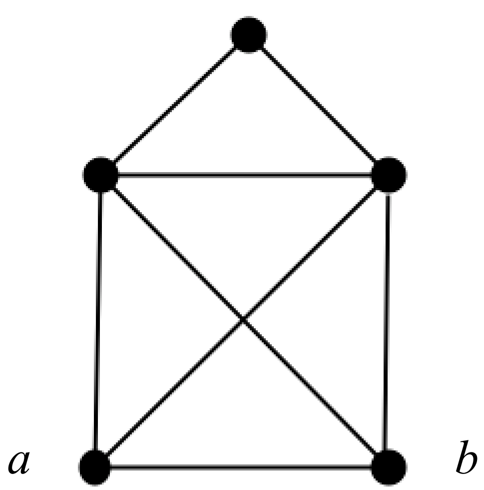


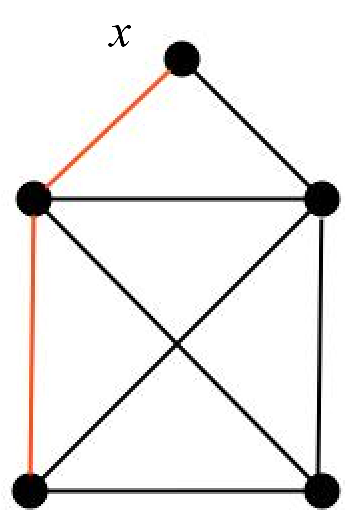
Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Condition nécessaire

Soit a et b deux sommets de degré impair (s'il n'y en a pas a et b sont confondus).
Soit L la chaîne parcourue en partant de a (avec l'interdiction d'emprunter deux fois la même arête).





Parcours eulériens et hamiltoniens

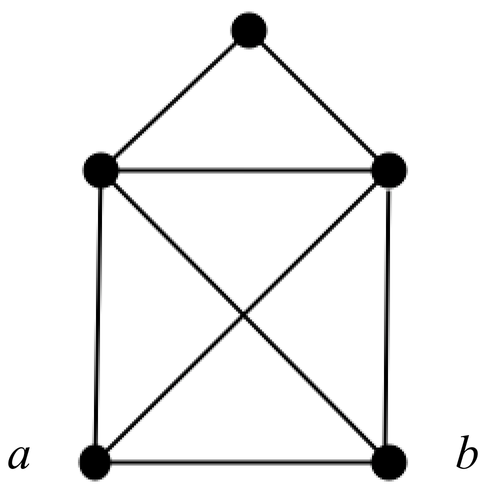
Chaînes et cycles eulériens

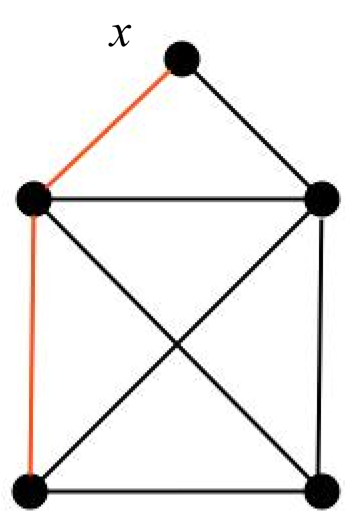
Condition nécessaire

Soit a et b deux sommets de degré impair (s'il n'y en a pas a et b sont confondus).

Soit L la chaîne parcourue en partant de a (avec l'interdiction d'emprunter deux fois la même arête).

Si l'on arrive à un sommet $x \neq b$, on a utilisé un nombre impair d'arêtes incidentes à x. On peut donc « repartir » par une arête non déjà utilisée.





Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

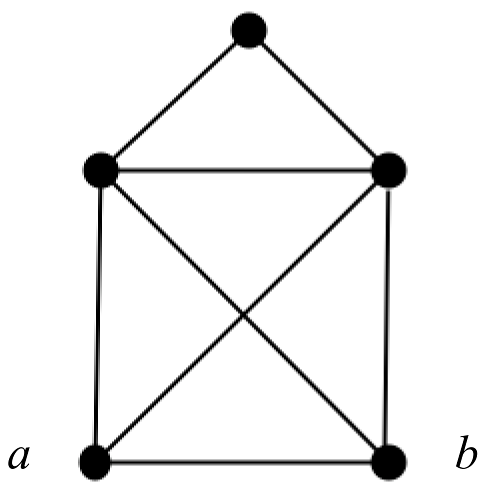
Condition nécessaire

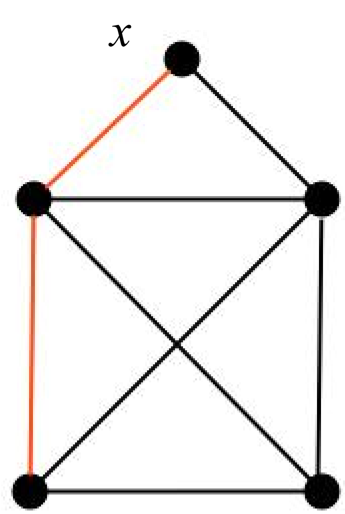
Soit a et b deux sommets de degré impair (s'il n'y en a pas a et b sont confondus).

Soit L la chaîne parcourue en partant de a (avec l'interdiction d'emprunter deux fois la même arête).

Si l'on arrive à un sommet $x \neq b$, on a utilisé un nombre impair d'arêtes incidentes à x. On peut donc « repartir » par une arête non déjà utilisée.

Quand on ne peut plus bouger, c'est qu'on est en b. Si toutes les arêtes ont été utilisées, on a parcouru une chaîne eulérienne.





Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

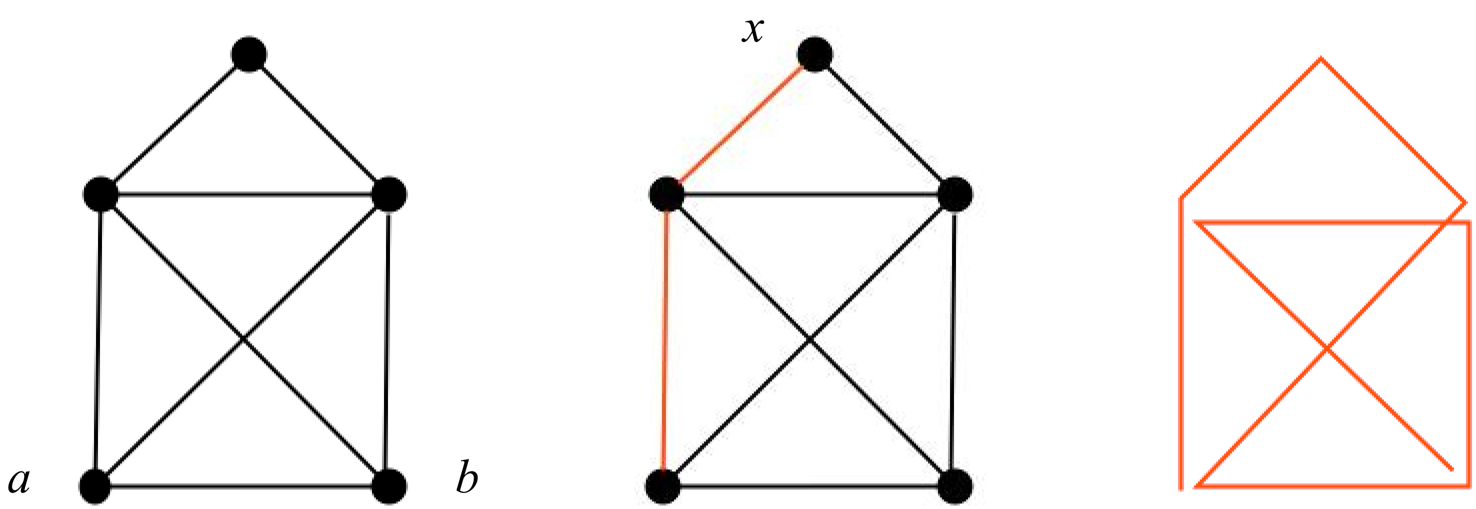
Condition nécessaire

Soit a et b deux sommets de degré impair (s'il n'y en a pas a et b sont confondus).

Soit L la chaîne parcourue en partant de a (avec l'interdiction d'emprunter deux fois la même arête).

Si l'on arrive à un sommet $x \neq b$, on a utilisé un nombre impair d'arêtes incidentes à x. On peut donc « repartir » par une arête non déjà utilisée.

Quand on ne peut plus bouger, c'est qu'on est en b. Si toutes les arêtes ont été utilisées, on a parcouru une chaîne eulérienne.



Parcours eulériens et hamiltoniens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Condition nécessaire

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Condition nécessaire

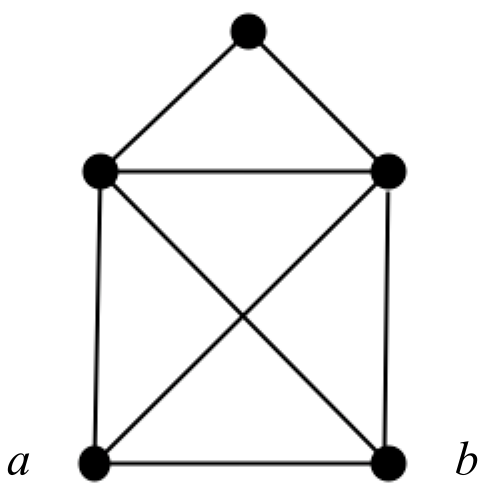
Si toutes les arêtes n’ont pas été utilisées, on greffe, dans la chaîne, des cycles eulériens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Condition nécessaire

Si toutes les arêtes n'ont pas été utilisées, on greffe, dans la chaîne, des cycles eulériens

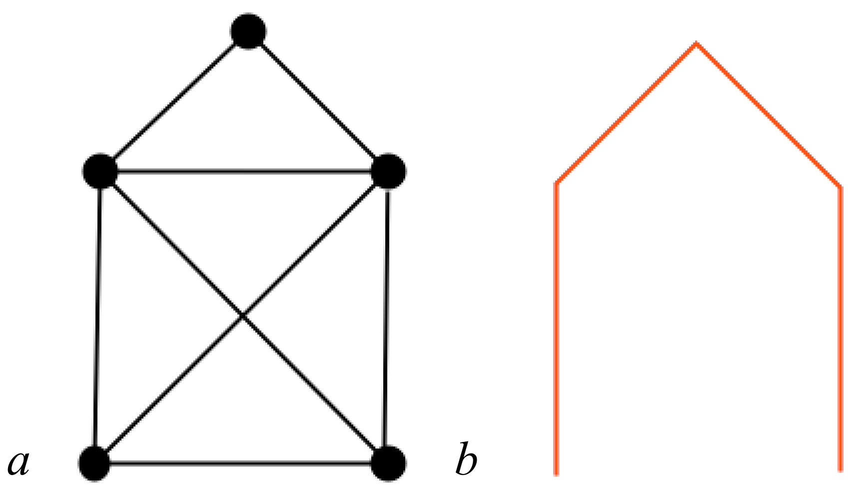


Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Condition nécessaire

Si toutes les arêtes n'ont pas été utilisées, on greffe, dans la chaîne, des cycles eulériens

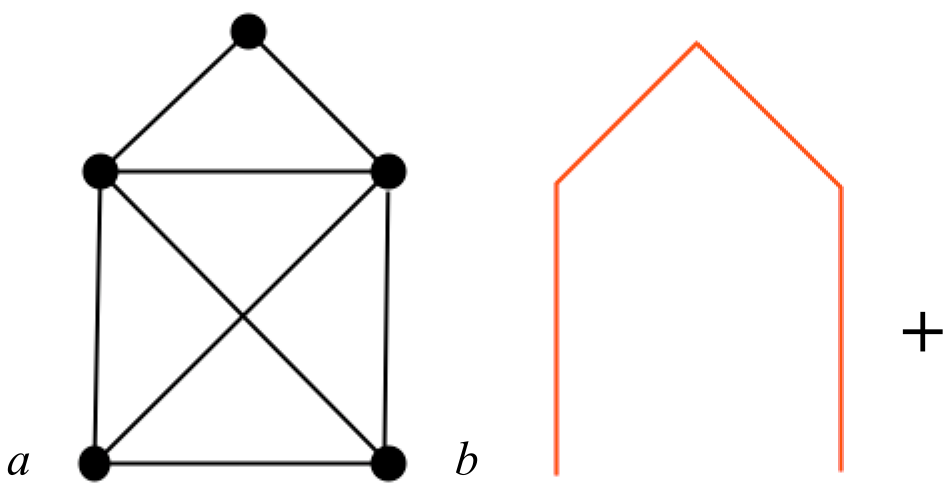


Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Condition nécessaire

Si toutes les arêtes n'ont pas été utilisées, on greffe, dans la chaîne, des cycles eulériens

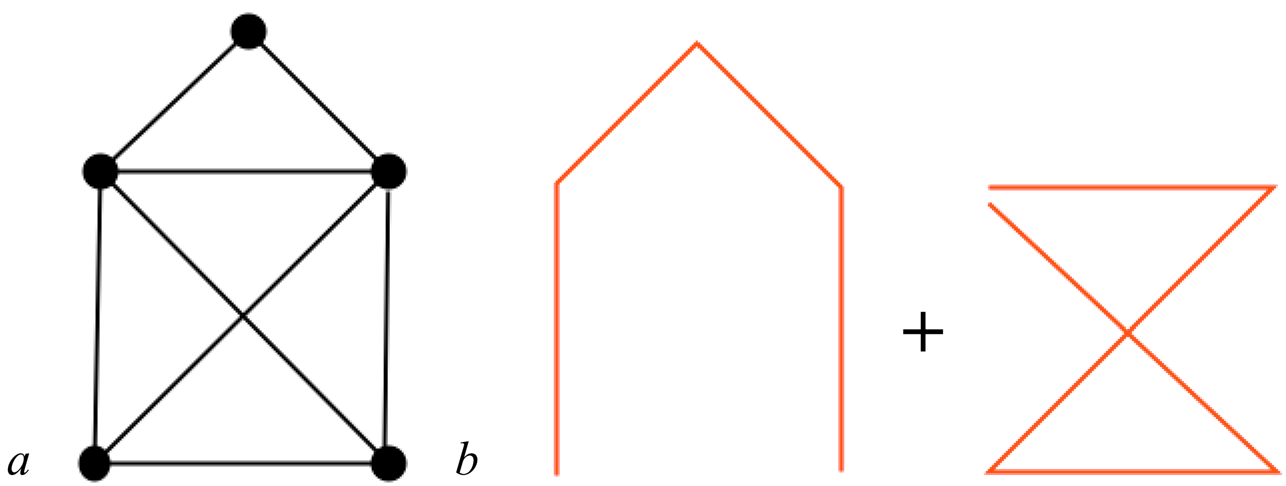


Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Condition nécessaire

Si toutes les arêtes n’ont pas été utilisées, on greffe, dans la chaîne, des cycles eulériens

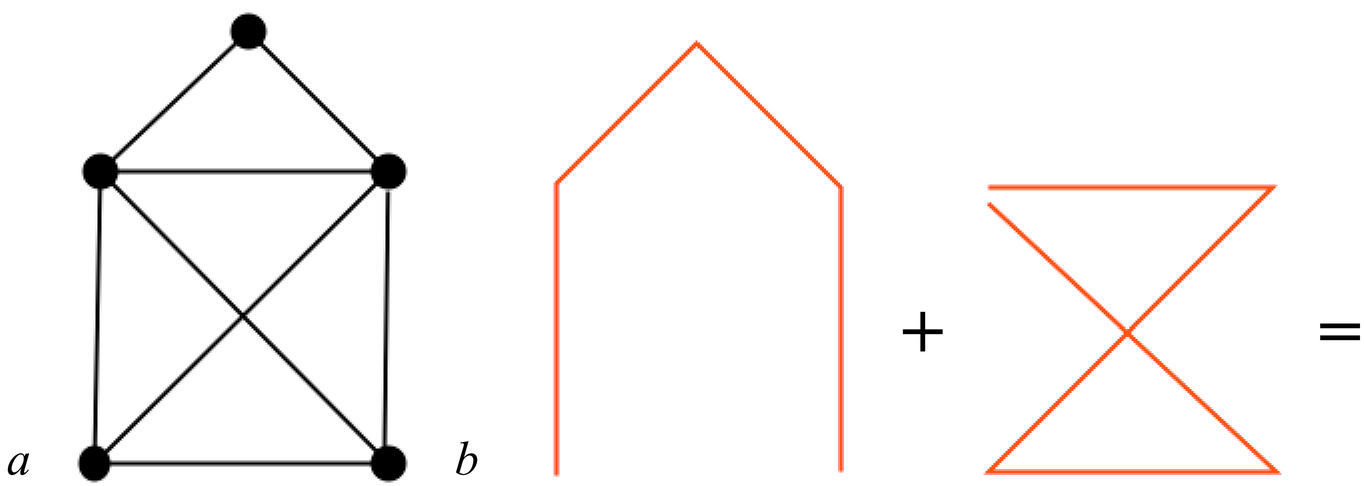


Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Condition nécessaire

Si toutes les arêtes n'ont pas été utilisées, on greffe, dans la chaîne, des cycles eulériens

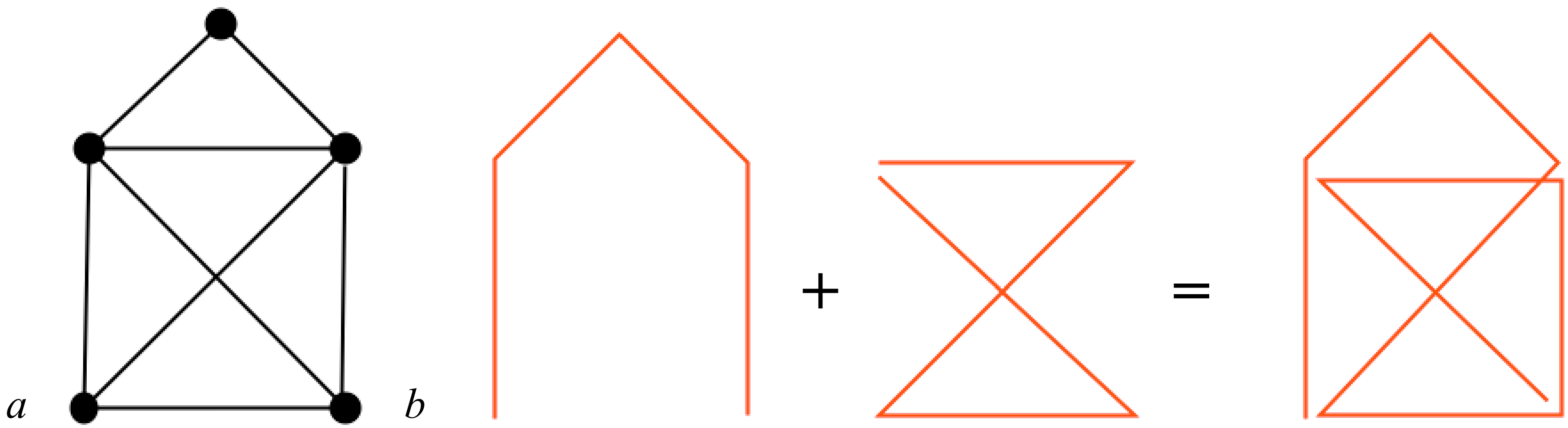


Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

Condition nécessaire

Si toutes les arêtes n'ont pas été utilisées, on greffe, dans la chaîne, des cycles eulériens



Parcours eulériens et hamiltoniens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chemins et circuits eulériens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chemins et circuits eulériens

- ***Définition* 17**

  Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chemins et circuits eulériens

- ***Définition* 17**

  Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

  - Un chemin dans un graphe orienté est dit eulérien s'il passe exactement une fois par chaque arête.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chemins et circuits eulériens

- ***Définition* 17**

  Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

  - Un chemin dans un graphe orienté est dit eulérien s'il passe exactement une fois par chaque arête.
  - Un graphe orienté est dit eulérien s'il admet un circuit eulérien.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chemins et circuits eulériens

- ***Définition* 17**

  Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

  - Un chemin dans un graphe orienté est dit eulérien s'il passe exactement une fois par chaque arête.
  - Un graphe orienté est dit eulérien s'il admet un circuit eulérien.

- ***Théorème* 2**

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chemins et circuits eulériens

- ***Définition* 17**

  Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

  - Un chemin dans un graphe orienté est dit eulérien s'il passe exactement une fois par chaque arête.
  - Un graphe orienté est dit eulérien s'il admet un circuit eulérien.

- ***Théorème* 2**

  - Un graphe orienté connexe admet un chemin eulérien (mais pas de circuit eulérien) si, et seulement si, pour tout sommet sauf deux (a et b), le degré entrant est égal au degré sortant et

$$d_e(a)=d_s(a)-1 \qquad \text{et} \qquad d_e(b)=d_s(b)+1$$

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chemins et circuits eulériens

- ***Définition* 17**

  Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

  - Un chemin dans un graphe orienté est dit eulérien s'il passe exactement une fois par chaque arête.
  - Un graphe orienté est dit eulérien s'il admet un circuit eulérien.

- ***Théorème* 2**

  - Un graphe orienté connexe admet un chemin eulérien (mais pas de circuit eulérien) si, et seulement si, pour tout sommet sauf deux (a et b), le degré entrant est égal au degré sortant et

    $$d_e(a)=d_s(a)-1 \qquad \text{et} \qquad d_e(b)=d_s(b)+1$$

  - Un graphe orienté connexe admet un circuit eulérien si, et seulement si, pour tout sommet, le degré entrant est égal au degré sortant.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Problèmes « prototypes » classiques : problème du postier chinois

parcourir les rues d'une ville en passant au moins une fois dans chaque rue, le graphe n'étant pas nécessairement eulérien ; on cherche bien sûr à minimiser la longueur totale du parcours.

Application : tournées de distribution de courrier, de ramassage d'ordures, d'inspection de réseaux de distribution.

Dans le cas orienté où chaque arc doit être emprunté dans un sens privilégié, le problème se ramène à la recherche d'un flot à coût minimum.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Problèmes « prototypes » classiques : problème du postier chinois

parcourir les rues d'une ville en passant au moins une fois dans chaque rue, le graphe n'étant pas nécessairement eulérien ; on cherche bien sûr à minimiser la longueur totale du parcours.

Application : tournées de distribution de courrier, de ramassage d'ordures, d'inspection de réseaux de distribution.

Dans le cas orienté où chaque arc doit être emprunté dans un sens privilégié, le problème se ramène à la recherche d'un flot à coût minimum.

- ***Théorème* 3**

Parcours eulériens et hamiltoniens

Problèmes « prototypes » classiques : problème du postier chinois

parcourir les rues d'une ville en passant au moins une fois dans chaque rue, le graphe n'étant pas nécessairement eulérien ; on cherche bien sûr à minimiser la longueur totale du parcours.

Application : tournées de distribution de courrier, de ramassage d'ordures, d'inspection de réseaux de distribution.

Dans le cas orienté où chaque arc doit être emprunté dans un sens privilégié, le problème se ramène à la recherche d'un flot à coût minimum.

- ***Théorème* 3**
  - Un graphe non orienté admet un cycle chinois si, et seulement si, il est connexe.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Problèmes « prototypes » classiques : problème du postier chinois

parcourir les rues d'une ville en passant au moins une fois dans chaque rue, le graphe n'étant pas nécessairement eulérien ; on cherche bien sûr à minimiser la longueur totale du parcours.

Application : tournées de distribution de courrier, de ramassage d'ordures, d'inspection de réseaux de distribution.

Dans le cas orienté où chaque arc doit être emprunté dans un sens privilégié, le problème se ramène à la recherche d'un flot à coût minimum.

- ***Théorème* 3**
  - Un graphe non orienté admet un cycle chinois si, et seulement si, il est connexe.
  - Un graphe orienté admet un circuit chinois si, et seulement si, il est fortement connexe.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens

- ***Définition* 18**

  Soit $G=(X, A)$ un graphe connexe d 'ordre n.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens

- ***Définition* 18**

  Soit G=(X, A) un graphe connexe d 'ordre n.

  - On appelle chemin hamiltonien (chaîne hamiltonienne) un chemin (une chaîne) passant une fois, et une fois seulement, par chacun des sommets de G.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens

- ***Définition* 18**

  Soit G=(X, A) un graphe connexe d ’ordre n.

  - On appelle chemin hamiltonien (chaîne hamiltonienne) un chemin (une chaîne) passant une fois, et une fois seulement, par chacun des sommets de G.
  - Un chemin hamiltonien (une chaîne hamiltonienne) est donc un chemin (une chaîne) élémentaire de longueur n–1.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens

- ***Définition* 18**

  Soit $G=(X, A)$ un graphe connexe d 'ordre n.

  - On appelle chemin hamiltonien (chaîne hamiltonienne) un chemin (une chaîne) passant une fois, et une fois seulement, par chacun des sommets de G.
  - Un chemin hamiltonien (une chaîne hamiltonienne) est donc un chemin (une chaîne) élémentaire de longueur $n-1$.
  - Un circuit hamiltonien (un cycle hamiltonien) est un circuit (un cycle) qui passe une fois, et une seule fois, par chacun des sommets de G.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens

- ***Définition* 18**

  Soit $G=(X, A)$ un graphe connexe d 'ordre n.

  - On appelle chemin hamiltonien (chaîne hamiltonienne) un chemin (une chaîne) passant une fois, et une fois seulement, par chacun des sommets de G.
  - Un chemin hamiltonien (une chaîne hamiltonienne) est donc un chemin (une chaîne) élémentaire de longueur $n-1$.
  - Un circuit hamiltonien (un cycle hamiltonien) est un circuit (un cycle) qui passe une fois, et une seule fois, par chacun des sommets de G.
  - On dit qu'un graphe G est hamiltonien s'il contient un cycle hamiltonien (cas non orienté) ou un circuit hamiltonien (cas orienté).

Parcours eulériens et hamiltoniens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

- **Problème du voyageur de commerce**

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

- **Problème du voyageur de commerce**
  - Un représentant de commerce doit rendre visite à n clients x_1, x_2, … x_n en partant d'une ville x_0 et revenir à son point de départ. Il connaît des distances $d_{0\mathrm{j}}$ qui séparent le dépôt x_0 de chacun de ses clients, ainsi que la distance d_{ij} entre deux clients quelconques x_i et x_j.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

- **Problème du voyageur de commerce**
  - Un représentant de commerce doit rendre visite à n clients $x_1, x_2, \ldots x_n$ en partant d'une ville x_0 et revenir à son point de départ. Il connaît des distances d_{0j} qui séparent le dépôt x_0 de chacun de ses clients, ainsi que la distance d_{ij} entre deux clients quelconques x_i et x_j.
  - Dans quel ordre doit-il rendre visiste à ses clients pour que la distance totale parcourue soit minimale ?

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

- **Problème du voyageur de commerce**
  - Un représentant de commerce doit rendre visite à n clients x_1, x_2, … x_n en partant d'une ville x_0 et revenir à son point de départ. Il connaît des distances d_{0j} qui séparent le dépôt x_0 de chacun de ses clients, ainsi que la distance d_{ij} entre deux clients quelconques x_i et x_j.
  - Dans quel ordre doit-il rendre visiste à ses clients pour que la distance totale parcourue soit minimale ?
  - Ce problème revient à chercher un cycle hamiltonien de longueur totale minimale dans le graphe complet G construit sur l'ensemble des sommets, les arêtes étant munies des longueurs d_{ij}.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

- **Problème du voyageur de commerce**
  - Un représentant de commerce doit rendre visite à n clients x_1, x_2, … x_n en partant d'une ville x_0 et revenir à son point de départ. Il connaît des distances d_{0j} qui séparent le dépôt x_0 de chacun de ses clients, ainsi que la distance d_{ij} entre deux clients quelconques x_i et x_j.
  - Dans quel ordre doit-il rendre visiste à ses clients pour que la distance totale parcourue soit minimale ?
  - Ce problème revient à chercher un cycle hamiltonien de longueur totale minimale dans le graphe complet G construit sur l'ensemble des sommets, les arêtes étant munies des longueurs d_{ij}.
  - Lorsque le point d'arrivée est différent du point de départ, le problème revient à rechercher une chaîne hamiltonienne de longueur totale minimale.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

- Ordonnancement de tâches

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

- **Ordonnancement de tâches**
  - On cherche un ordre dans lequel on peut effectuer n tâches données (deux tâches quelconques ne pouvant être effectuées simultanément) tout en respectant un certain nombre de contraintes d'antériorité.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

- **Ordonnancement de tâches**
  - On cherche un ordre dans lequel on peut effectuer n tâches données (deux tâches quelconques ne pouvant être effectuées simultanément) tout en respectant un certain nombre de contraintes d'antériorité.
  - Si l'on construit le graphe G dont l'ensemble des sommets correspond à l'ensemble des tâches, et où il existe un arc (i, j) si la tâche i peut être effectuée avant la tâche j, le problème revient à déterminer un chemin hamiltonien de G.

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

- **Ordonnancement de tâches**
  - On cherche un ordre dans lequel on peut effectuer n tâches données (deux tâches quelconques ne pouvant être effectuées simultanément) tout en respectant un certain nombre de contraintes d'antériorité.
  - Si l'on construit le graphe G dont l'ensemble des sommets correspond à l'ensemble des tâches, et où il existe un arc (i, j) si la tâche i peut être effectuée avant la tâche j, le problème revient à déterminer un chemin hamiltonien de G.

Chaînes et cycles hamiltoniens : extension

Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

- **Ordonnancement de tâches**
  - On cherche un ordre dans lequel on peut effectuer n tâches données (deux tâches quelconques ne pouvant être effectuées simultanément) tout en respectant un certain nombre de contraintes d'antériorité.
  - Si l'on construit le graphe G dont l'ensemble des sommets correspond à l'ensemble des tâches, et où il existe un arc (i, j) si la tâche i peut être effectuée avant la tâche j, le problème revient à déterminer un chemin hamiltonien de G.

Chaînes et cycles hamiltoniens : extension

On appelle cycle (circuit) préhamiltonien d'un graphe G, un cycle (un circuit) passant au moins une fois par chaque sommet de G. Un graphe G qui admet un tel cycle (ou circuit) est appelé graphe préhamiltonien et une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que G soit connexe (fortement connexe).

Méthodes de recherche de chemins

Méthodes de recherche de chemins

Rappel sur les opérations booléennes sur les matrices

Méthodes de recherche de chemins

Rappel sur les opérations booléennes sur les matrices

A	B	$A \oplus B$	$A \otimes B$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Méthodes de recherche de chemins

Rappel sur les opérations booléennes sur les matrices

A	B	$A \oplus B$	$A \otimes B$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

- **Addition booléenne des matrices**

Méthodes de recherche de chemins

Rappel sur les opérations booléennes sur les matrices

A	B	$A \oplus B$	$A \otimes B$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

- **Addition booléenne des matrices**
  - G_1 et G_2 de matrices d'adjacence U_1 et U_2 (possédant les mêmes sommets)

Méthodes de recherche de chemins

Rappel sur les opérations booléennes sur les matrices

A	B	$A \oplus B$	$A \otimes B$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

- **Addition booléenne des matrices**
  - G_1 et G_2 de matrices d'adjacence U_1 et U_2 (possédant les mêmes sommets)
  - $U_3 = U_1 \oplus U_2$ / $(U_3)_{ij} = (U_1)_{ij} \oplus (U_2)_{ij}$

Méthodes de recherche de chemins

Rappel sur les opérations booléennes sur les matrices

A	B	$A \oplus B$	$A \otimes B$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

- **Addition booléenne des matrices**
  - G_1 et G_2 de matrices d'adjacence U_1 et U_2 (possédant les mêmes sommets)
  - $U_3 = U_1 \oplus U_2 \quad / \quad (U_3)_{ij} = (U_1)_{ij} \oplus (U_2)_{ij}$
  - $\Rightarrow G_3$ comporte les arcs de G_1 et de G_2

Méthodes de recherche de chemins

Méthodes de recherche de chemins

Rappel sur les opérations booléennes sur les matrices

Méthodes de recherche de chemins

Rappel sur les opérations booléennes sur les matrices

- **Multiplication booléenne des matrices**

Méthodes de recherche de chemins

Rappel sur les opérations booléennes sur les matrices

- **Multiplication booléenne des matrices**
  - G_1 et G_2 de matrices d'adjacence U_1 et U_2 (possédant les mêmes sommets)

Méthodes de recherche de chemins

Rappel sur les opérations booléennes sur les matrices

- **Multiplication booléenne des matrices**
  - G_1 et G_2 de matrices d'adjacence U_1 et U_2 (possédant les mêmes sommets)
  - $U_4 = U_1 \otimes U_2$ /

$$(U_4)_{ij} = (U_1)_{i1} \otimes (U_2)_{1j} \oplus (U_1)_{i2} \otimes (U_2)_{2j} \oplus \ldots. \oplus (U_1)_{in} \otimes (U_2)_{nj}$$

Méthodes de recherche de chemins

Rappel sur les opérations booléennes sur les matrices

- **Multiplication booléenne des matrices**
  - G_1 et G_2 de matrices d'adjacence U_1 et U_2 (possédant les mêmes sommets)
  - $U_4 = U_1 \otimes U_2$ /

    $$(U_4)_{ij} = (U_1)_{i1} \otimes (U_2)_{1j} \oplus (U_1)_{i2} \otimes (U_2)_{2j} \oplus \ldots . \oplus (U_1)_{in} \otimes (U_2)_{nj}$$
  - Pour que $(U_4)_{ij}$ soit égal à 1, il faut qu'il existe au moins un indice k tel que simultanément les éléments $(U_1)_{ik}$ et $(U_2)_{kj}$ soit égaux à 1.

Méthodes de recherche de chemins

Rappel sur les opérations booléennes sur les matrices

- **Multiplication booléenne des matrices**
  - G_1 et G_2 de matrices d'adjacence U_1 et U_2 (possédant les mêmes sommets)
  - $U_4 = U_1 \otimes U_2$ /

    $$(U_4)_{ij} = (U_1)_{i1} \otimes (U_2)_{1j} \oplus (U_1)_{i2} \otimes (U_2)_{2j} \oplus \ldots. \oplus (U_1)_{in} \otimes (U_2)_{nj}$$
  - Pour que $(U_4)_{ij}$ soit égal à 1, il faut qu'il existe au moins un indice k tel que simultanément les éléments $(U_1)_{ik}$ et $(U_2)_{kj}$ soit égaux à 1.
  - Cela revient à construire un graphe G_4 dans lequel un arc (i, j) existe si et seulement s'il existe un sommet k tel que (i, k) soit un arc de G_1 et (k, j) un arc de G_2.

Méthodes de recherche de chemins

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

- G de matrice d'adjacence U

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

- G de matrice d'adjacence U
- $U_{ij} = 1 \quad \Rightarrow$ il existe un chemin de longueur 1 entre les sommets i et j

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

- G de matrice d'adjacence U
- $U_{ij} = 1 \quad \Rightarrow$ il existe un chemin de longueur 1 entre les sommets i et j
- $U^2 = U \otimes U \quad \rightarrow \; G'$

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

- G de matrice d'adjacence U
- $U_{ij} = 1 \quad \Rightarrow$ il existe un chemin de longueur 1 entre les sommets i et j
- $U^2 = U \otimes U \quad \rightarrow \; G'$
- Chaque arc (i, j) de G' exprime l'existence d'un chemin de longueur 2 du sommet i au sommet j.

  (i, j) existe si et seulement s'il existe un sommet k tel que (i, k) et (k, j) sont des arcs de G.

Méthodes de recherche de chemins

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

- **Démonstration par récurrence**

  U^p donne l'existence des chemins de longueur p

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

- **Démonstration par récurrence**

  U^p donne l'existence des chemins de longueur p

  - Admettons la propriété pour p-1 et démontrons la pour p.

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

- **Démonstration par récurrence**

  U^p donne l'existence des chemins de longueur p

  - Admettons la propriété pour p-1 et démontrons la pour p.
  - Chemin de longueur p entre i et j = chemin de longueur p-1 entre i et k + l'arc (k, j).

    L'existence du chemin entre les sommets i et k est donnée, par hypothèse, par l'élément $(U^{p-1})_{ik}$, celle de l'arc (k, j) par U_{kj}.

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

- **Démonstration par récurrence**

U^p donne l'existence des chemins de longueur p

- Admettons la propriété pour p-1 et démontrons la pour p.
- Chemin de longueur p entre i et j = chemin de longueur p-1 entre i et k + l'arc (k, j).

  L'existence du chemin entre les sommets i et k est donnée, par hypothèse, par l'élément $(U^{p-1})_{ik}$, celle de l'arc (k, j) par U_{kj}.
- L'existence d'un chemin joignant les sommets i et j et passant par le sommet k est donc donnée par $(U^{p-1})_{ik} \otimes U_{kj}$.

Méthodes de recherche de chemins

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

- **Démonstration par récurrence**

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

- **Démonstration par récurrence**
  - L'existence d'un chemin joignant les sommets i et j et passant par le sommet k est donc donnée par $(U^{p-1})_{ik} \otimes U_{kj}$.

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

- **Démonstration par récurrence**
  - L'existence d'un chemin joignant les sommets i et j et passant par le sommet k est donc donnée par $(U^{p-1})_{ik} \otimes U_{kj}$.
  - Or, le sommet k est quelconque et peut être l'un des n sommets du graphe. L'existence d'un chemin entre les sommets i et j s'écrit donc :

$$C_{ij} = (U^{p-1})_{i1} \otimes U_{1j} \oplus (U^{p-1})_{i2} \otimes U_{2j} \oplus \ldots. \oplus (U^{p-1})_{in} \otimes U_{nj}$$

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

- **Démonstration par récurrence**
  - L'existence d'un chemin joignant les sommets i et j et passant par le sommet k est donc donnée par $(U^{p-1})_{ik} \otimes U_{kj}$.
  - Or, le sommet k est quelconque et peut être l'un des n sommets du graphe. L'existence d'un chemin entre les sommets i et j s'écrit donc :

    $$C_{ij} = (U^{p-1})_{i1} \otimes U_{1j} \oplus (U^{p-1})_{i2} \otimes U_{2j} \oplus \ldots . \oplus (U^{p-1})_{in} \otimes U_{nj}$$
  - Par définition, $C_{ij} = (U^{p})_{ij}$

Méthodes de recherche de chemins

Recherche de chemin

- **Démonstration par récurrence**
  - L'existence d'un chemin joignant les sommets *i* et *j* et passant par le sommet *k* est donc donnée par $(U^{p-1})_{ik} \otimes U_{kj}$.
  - Or, le sommet *k* est quelconque et peut être l'un des *n* sommets du graphe. L'existence d'un chemin entre les sommets *i* et *j* s'écrit donc :

    $$C_{ij} = (U^{p-1})_{i1} \otimes U_{1j} \oplus (U^{p-1})_{i2} \otimes U_{2j} \oplus \ldots. \oplus (U^{p-1})_{in} \otimes U_{nj}$$
  - Par définition, $C_{ij} = (U^{p})_{ij}$
  - La propriété est vraie pour $p = 2$, elle l'est donc quel que soit *p*.

Méthodes de recherche de chemins

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Nombreuses applications**

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Nombreuses applications**
  - les problèmes de tournées,

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Nombreuses applications**
  - les problèmes de tournées,
  - certains problèmes d’investissement et de gestion de stocks,

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Nombreuses applications**
  - les problèmes de tournées,
  - certains problèmes d'investissement et de gestion de stocks,
  - les problèmes de programmation dynamique à états discrets et temps discret,

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Nombreuses applications**
  - les problèmes de tournées,
  - certains problèmes d’investissement et de gestion de stocks,
  - les problèmes de programmation dynamique à états discrets et temps discret,
  - les problèmes d’optimisation de réseaux (routiers, télécommunications),

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Nombreuses applications**
  - les problèmes de tournées,
  - certains problèmes d'investissement et de gestion de stocks,
  - les problèmes de programmation dynamique à états discrets et temps discret,
  - les problèmes d'optimisation de réseaux (routiers, télécommunications),
  - certaines méthodes de traitement numérique du signal, de codage et de décodage de l'information

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Nombreuses applications**
  - les problèmes de tournées,
  - certains problèmes d'investissement et de gestion de stocks,
  - les problèmes de programmation dynamique à états discrets et temps discret,
  - les problèmes d'optimisation de réseaux (routiers, télécommunications),
  - certaines méthodes de traitement numérique du signal, de codage et de décodage de l'information
  - les problèmes de labyrinthe et de récréations mathématiques.

Méthodes de recherche de chemins

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Position du problème**

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Position du problème**
  - Graphe orienté $G=(X, A)$

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Position du problème**
  - Graphe orienté $G=(X, A)$
  - Pour $a=(i,j) \in A$, on associe $l(a)=l_{ij} \in \mathbf{R}$ (longueur de l'arc)

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Position du problème**
  - Graphe orienté $G=(X, A)$
  - Pour $a=(i,j) \in A$, on associe $l(a)=l_{ij} \in \mathbf{R}$ (longueur de l'arc)
  - Problème du plus court chemin entre deux sommets i et j

    trouver un chemin $\mu(i,j)$ de i à j dont la longueur totale

    $l(\mu)= \sum_{a\in\mu(i,j)} l(a)$ soit minimum.

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Position du problème**
  - Graphe orienté $G=(X, A)$
  - Pour $a=(i,j) \in A$, on associe $l(a)=l_{ij} \in \mathbf{R}$ (longueur de l'arc)
  - Problème du plus court chemin entre deux sommets i et j

    trouver un chemin $\mu(i,j)$ de i à j dont la longueur totale

    $l(\mu)= \sum_{a\in\mu(i,j)} l(a)$ soit minimum.

Longueur : coût de transport, dépense de construction, temps de parcours, etc.

Méthodes de recherche de chemins

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Algorithme itératif**
  - L'ensemble des sommets est partitionné en deux sous-ensembles S et $\overline{S}$

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Algorithme itératif**
  - L'ensemble des sommets est partitionné en deux sous-ensembles S et $\overline{S}$
  - Le sous-ensemble S (initialisé à $\{1\}$) contient les sommets définitivement marqués, c'est-à-dire les sommets pour lesquels la marque $\pi(i)$ représente effectivement la longueur du plus court chemin entre le sommet 1 et le sommet i.

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Algorithme itératif**
  - L'ensemble des sommets est partitionné en deux sous-ensembles S et $\overline{S}$
  - Le sous-ensemble S (initialisé à $\{1\}$) contient les sommets définitivement marqués, c'est-à-dire les sommets pour lesquels la marque $\pi(i)$ représente effectivement la longueur du plus court chemin entre le sommet 1 et le sommet i.
  - Le complémentaire contient tous les sommets k ayant une marque provisoire définie par :

$$\forall k \in \overline{S} : \pi(k) = \min_{i \in S \cap \Gamma_k^{-1}} \left(\pi(i) + l_{ik}\right)$$

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Algorithme itératif**

  - L'ensemble des sommets est partitionné en deux sous-ensembles S et $\overline{S}$
  - Le sous-ensemble S (initialisé à $\{1\}$) contient les sommets définitivement marqués, c'est-à-dire les sommets pour lesquels la marque $\pi(i)$ représente effectivement la longueur du plus court chemin entre le sommet 1 et le sommet i.
  - Le complémentaire contient tous les sommets k ayant une marque provisoire définie par :

$$\forall k \in \overline{S} : \pi(k) = \min_{i \in S \cap \Gamma_k^{-1}} \left(\pi(i) + l_{ik}\right)$$

  - Le sommet j de marque provisoire minimale est marqué définitivement.

$$\pi(j) = \min_{k \in \overline{S}} \left(\pi(k)\right)$$

Méthodes de recherche de chemins

Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)
Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives

Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)
Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives

- Initialisations

$\overline{S} = \{2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ $\quad\quad \pi(1) = 0 \quad\quad \pi(i) = \begin{cases} l_{ij} & \text{si } i \in \Gamma(1) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)

Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives

- Initialisations

$\bar{S} = \{2,\ 3,\ \dots,\ n\}$ $\qquad \pi(1) = 0 \qquad \pi(i) = \begin{cases} l_{ij} & \text{si } i \in \Gamma(1) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

- Sélectionner j tel que pour $k \in \bar{S}$ $\quad \pi(j) = \min(\pi(k))$

Faire $\bar{S} \leftarrow \bar{S} \setminus \{j\}$

Si $|\bar{S}| = 0$ alors FIN

Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)

Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives

- Initialisations

  $\overline{S} = \{2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ $\quad\quad$ $\pi(1) = 0$ $\quad\quad$ $\pi(i) = \begin{cases} l_{ij} & \text{si } i \in \Gamma(1) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

- Sélectionner j tel que pour $k \in \overline{S}$ $\quad$ $\pi(j) = \min(\pi(k))$

  Faire $\overline{S} \leftarrow \overline{S} \setminus \{j\}$

  Si $|\overline{S}| = 0$ alors FIN

- Faire pour tout $i \in \overline{S} \cap \Gamma(j)$

  $\pi(i) \leftarrow \min\left(\pi(i), \pi(j) + l_{ji}\right)$

Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)

Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives

- Initialisations

$\overline{S} = \{2, \ 3, \ \ldots, \ n\}$ $\qquad \pi(1) = 0 \qquad \pi(i) = \begin{cases} l_{ij} & \text{si } i \in \Gamma(1) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

- Sélectionner j tel que pour $k \in \overline{S}$ $\quad \pi(j) = \min(\pi(k))$

  Faire $\quad \overline{S} \leftarrow \overline{S} \setminus \{j\}$

  Si $|\overline{S}| = 0$ alors FIN

- Faire pour tout $i \in \overline{S} \cap \Gamma(j)$

  $\pi(i) \leftarrow \min\left(\pi(i), \pi(j) + l_{ji}\right)$

Méthodes de recherche de chemins

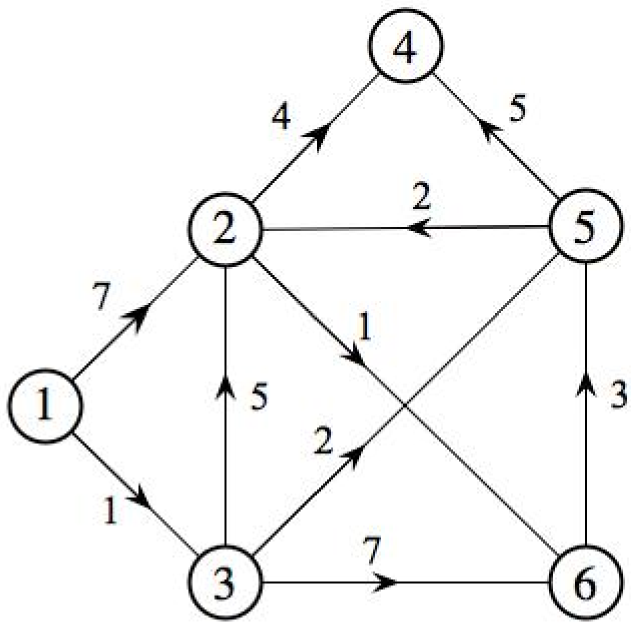
Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)

Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives

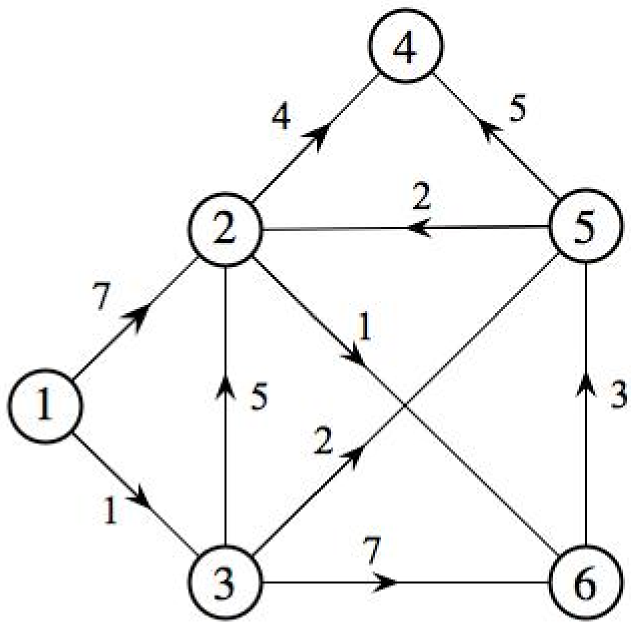
Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)
Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives



Méthodes de recherche de chemins

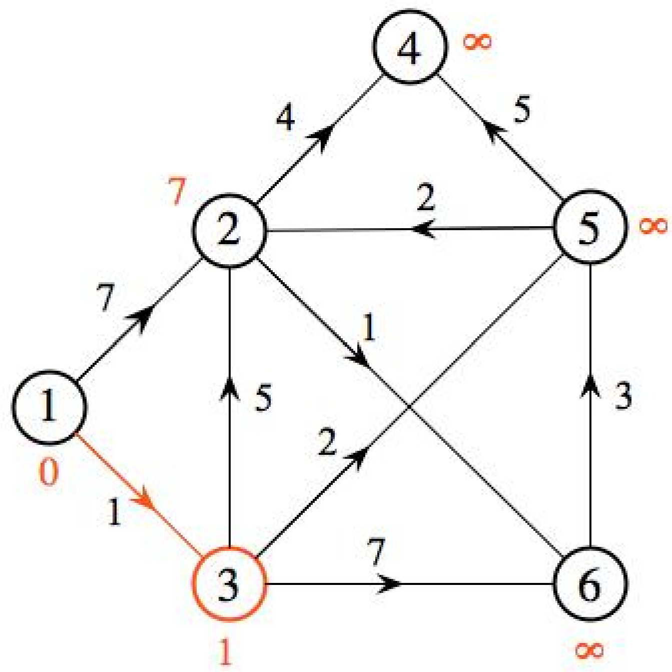
Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)
Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives



$$\overline{S} = \{2,3,4,5,6\}, \quad \pi(1) = 0, \pi(2) = 7, \pi(3) = 1, \pi(4) = \infty, \pi(5) = \infty, \pi(6) = \infty$$

Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)
Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives

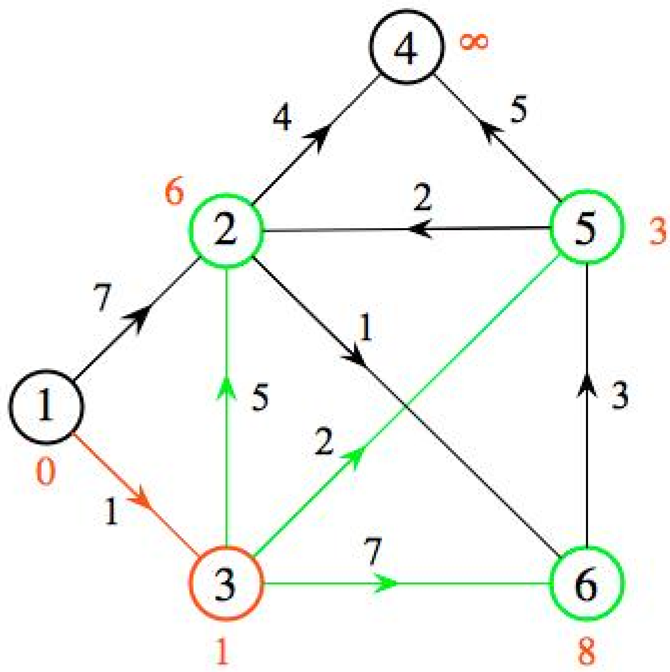


$$\overline{S} = \{2,3,4,5,6\}, \quad \pi(1)=0, \pi(2)=7, \pi(3)=1, \pi(4)=\infty, \pi(5)=\infty, \pi(6)=\infty$$

$$j=3, \quad \overline{S}=\{2,4,5,6\}$$

Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)
Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives



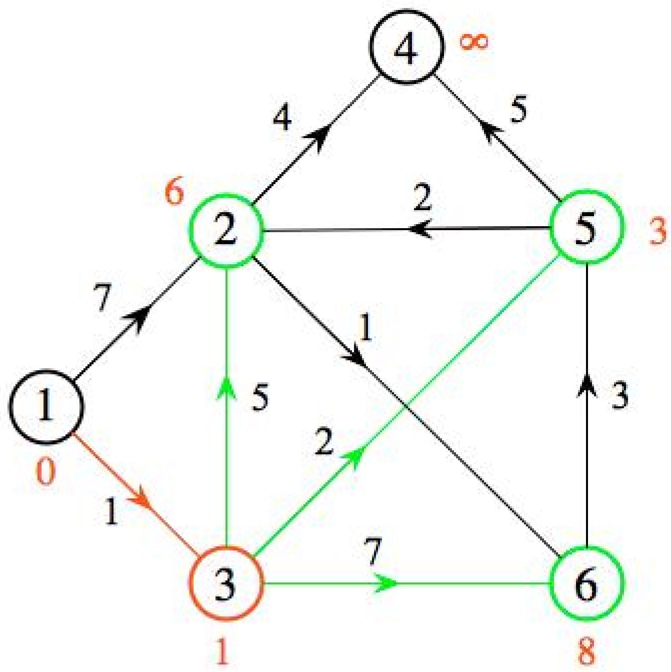
$$\bar{S} = \{2,3,4,5,6\}, \quad \pi(1)=0, \pi(2)=7, \pi(3)=1, \pi(4)=\infty, \pi(5)=\infty, \pi(6)=\infty$$

$$j = 3, \quad \bar{S} = \{2,4,5,6\}$$

$$\bar{S} \cap \Gamma(3) = \{2,5,6\}, \quad \pi(2)=\min(7,1+5)=6, \pi(5)=\min(\infty,1+2)=3, \ \pi(6)=\min(\infty,1+7)=8$$

Méthodes de recherche de chemins

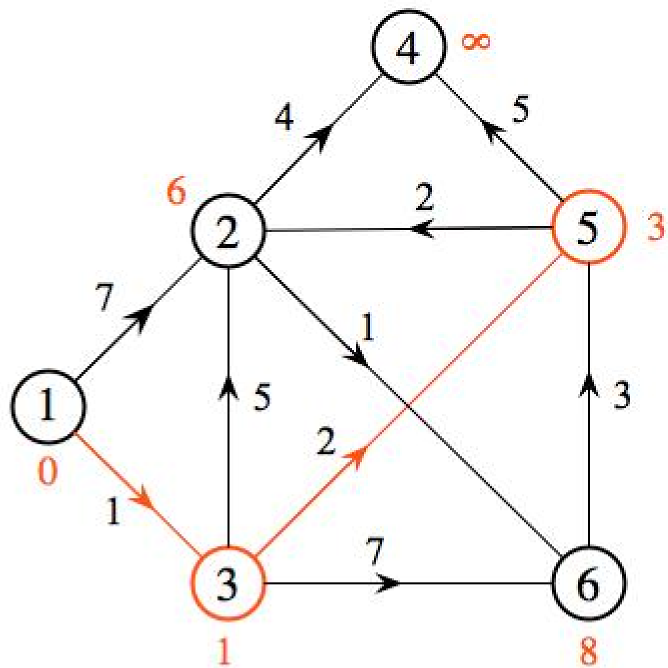
Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)
Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives



$$\overline{S} = \{2,4,5,6\}, \quad \pi(1)=0, \pi(2)=6, \pi(4)=\infty, \pi(5)=3, \pi(6)=8$$

Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)
Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives

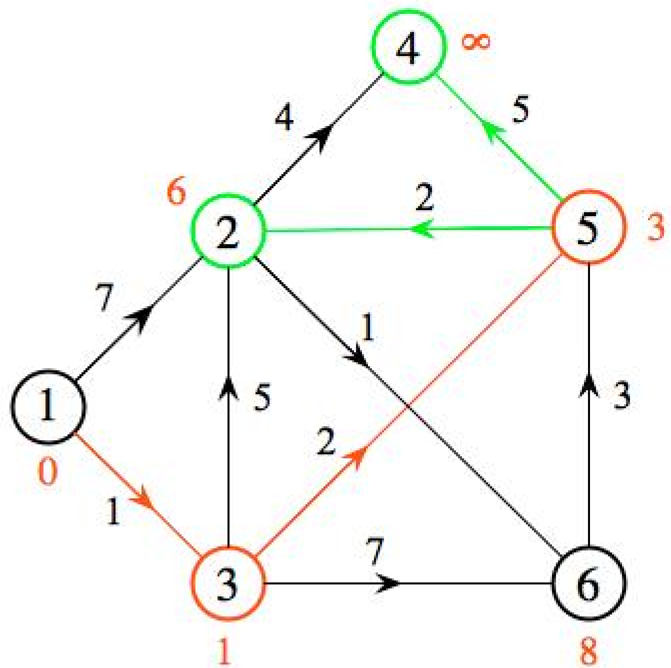


$$\overline{S} = \{2,4,5,6\}, \quad \pi(1) = 0, \pi(2) = 6, \pi(4) = \infty, \pi(5) = 3, \pi(6) = 8$$

$$j = 5, \quad \overline{S} = \{2,4,6\}$$

Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)
Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives



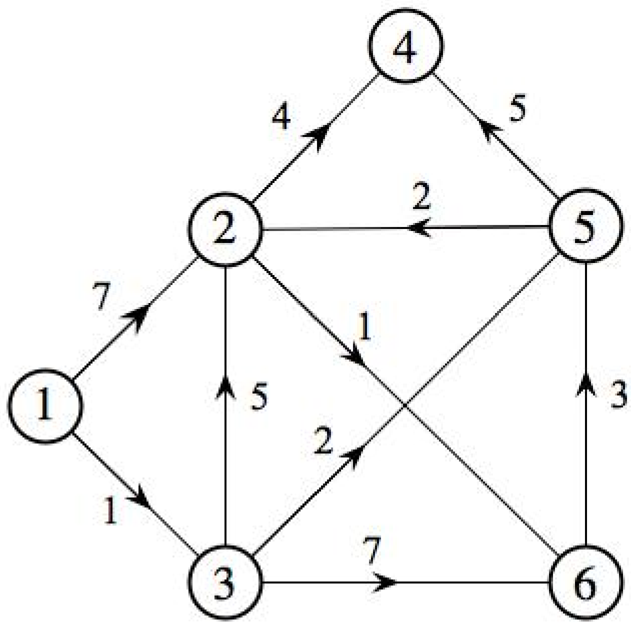
$$\bar{S} = \{2,4,5,6\}, \quad \pi(1)=0, \pi(2)=6, \pi(4)=\infty, \pi(5)=3, \pi(6)=8$$

$$j=5, \quad \bar{S}=\{2,4,6\}$$

$$\bar{S} \cap \Gamma(5) = \{2,4\}, \quad \pi(2)=\min(6,3+2)=5, \pi(4)=\min(\infty,3+5)=8$$

Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 1 (Moore-Dijkstra)
Plus court chemin entre deux sommets dans un graphe à longueurs positives



$$\pi(1) = 0, \pi(2) = 5, \pi(3) = 1, \pi(4) = 8, \pi(5) = 3, \pi(6) = 6$$

Méthodes de recherche de chemins

Méthodes de recherche de chemins

Matrice des plus courts chemins dans un graphe à longueurs positives

Méthodes de recherche de chemins

Matrice des plus courts chemins dans un graphe à longueurs positives

- Notons $L=(l_{ij})$ la matrice $n \times n$ dont le terme (i,j) est égal à la longueur de l'arc (i,j) pour $(i,j) \in A$ et ∞ sinon (pour les termes diagonaux, $l_{ij}=0$).

Méthodes de recherche de chemins

Matrice des plus courts chemins dans un graphe à longueurs positives

- Notons $L=(l_{ij})$ la matrice $n \times n$ dont le terme (i,j) est égal à la longueur de l'arc (i,j) pour $(i,j) \in A$ et ∞ sinon (pour les termes diagonaux, $l_{ij}=0$).
- Pour $1 \leq k \leq n$, notons $L^{(k)}$ la matrice $(l_{ij}^{(k)})$ dont le terme (i,j) représente la longueur minimale d'un chemin d'origine i et d'extrémité j, et astreint à la condition que tous les sommets intermédiaires appartiennent au sous-ensemble $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Méthodes de recherche de chemins

Matrice des plus courts chemins dans un graphe à longueurs positives

- Notons $L=(l_{ij})$ la matrice $n \times n$ dont le terme (i,j) est égal à la longueur de l'arc (i,j) pour $(i,j) \in A$ et ∞ sinon (pour les termes diagonaux, $l_{ij}=0$).
- Pour $1 \leq k \leq n$, notons $L^{(k)}$ la matrice $(l_{ij}^{(k)})$ dont le terme (i,j) représente la longueur minimale d'un chemin d'origine i et d'extrémité j, et astreint à la condition que tous les sommets intermédiaires appartiennent au sous-ensemble $\{1, 2, \ldots, k\}$.
- Pour $k = 0$, on a $L^{(0)} = L$, puisque l_{ij} est la longueur du chemin direct (unique) entre i et j (sans sommet intermédiaire). On remarque alors que les matrices $L^{(k)}$ sont liées par la relation de récurrence :

Méthodes de recherche de chemins

Matrice des plus courts chemins dans un graphe à longueurs positives

- Notons $L=(l_{ij})$ la matrice $n \times n$ dont le terme (i,j) est égal à la longueur de l'arc (i,j) pour $(i,j) \in A$ et ∞ sinon (pour les termes diagonaux, $l_{ij}=0$).
- Pour $1 \leq k \leq n$, notons $L^{(k)}$ la matrice $(l_{ij}{}^{(k)})$ dont le terme (i,j) représente la longueur minimale d'un chemin d'origine i et d'extrémité j, et astreint à la condition que tous les sommets intermédiaires appartiennent au sous-ensemble $\{1, 2, \ldots, k\}$.
- Pour $k = 0$, on a $L^{(0)} = L$, puisque l_{ij} est la longueur du chemin direct (unique) entre i et j (sans sommet intermédiaire). On remarque alors que les matrices $L^{(k)}$ sont liées par la relation de récurrence :

$$l_{ij}^{(k)} = \min\left(l_{ij}^{(k-1)}, l_{ik}^{(k-1)} + l_{kj}^{(k-1)}\right)$$

Méthodes de recherche de chemins

Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 2 (Floyd)

Matrice des plus courts chemins dans un graphe à longueurs positives

Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 2 (Floyd)

Matrice des plus courts chemins dans un graphe à longueurs positives

- Pour k de 1 à n

Méthodes de recherche de chemins

Algorithme 2 (Floyd)

Matrice des plus courts chemins dans un graphe à longueurs positives

- Pour k de 1 à n

  Pour tout i et j de 1 à n faire

  $l_{ij}=\min(l_{ij}, l_{ik} + l_{kj})$

Arbres et arborescences

Arbres et arborescences

Définitions et propriétés

Arbres et arborescences

Définitions et propriétés

- ***Définition* 19**

Arbres et arborescences

Définitions et propriétés

- ***Définition* 19**
  - Un arbre est un graphe connexe sans cycles.

Arbres et arborescences

Définitions et propriétés

➢ ***Définition* 19**

- Un arbre est un graphe connexe sans cycles.
- Un graphe sans cycle qui n'est pas connexe est appelé une forêt (chaque composante connexe est un arbre).

Arbres et arborescences

Définitions et propriétés

- ***Définition* 19**

  - Un arbre est un graphe connexe sans cycles.
  - Un graphe sans cycle qui n'est pas connexe est appelé une forêt

    (chaque composante connexe est un arbre).

  Un arbre est donc un graphe simple.
  $\mathcal{T}$ = (X,T) est un arbre si et seulement s'il existe une chaîne et une seule entre deux sommets quelconques.

Arbres et arborescences

Définitions et propriétés

➢ ***Définition* 19**

- Un arbre est un graphe connexe sans cycles.
- Un graphe sans cycle qui n'est pas connexe est appelé une forêt (chaque composante connexe est un arbre).

  Un arbre est donc un graphe simple.
  $\mathcal{T}$ = (X,T) est un arbre si et seulement s'il existe une chaîne et une seule entre deux sommets quelconques.

- Un arbre incluant tous les sommets du graphe G est appelé arbre maximum ou arbre couvrant.

Arbres et arborescences

Définitions et propriétés

- ***Définition* 19**

  - Un arbre est un graphe connexe sans cycles.
  - Un graphe sans cycle qui n'est pas connexe est appelé une forêt (chaque composante connexe est un arbre).

    Un arbre est donc un graphe simple.
    $\mathcal{T}$ = (X,T) est un arbre si et seulement s'il existe une chaîne et une seule entre deux sommets quelconques.

  - Un arbre incluant tous les sommets du graphe G est appelé arbre maximum ou arbre couvrant.
  - Une forêt maximale *de* G est une forêt de G maximale pour l'inclusion (l'ajout d'une seule arête supplémentaire du graphe à cette forêt crée un cycle)..

Arbres et arborescences

Arbres et arborescences

Algorithme de construction d’une forêt maximale

Arbres et arborescences

Algorithme de construction d'une forêt maximale

- Initialement, tous les arcs du graphe sont "incolores". La méthode consiste à examiner successivement tous les arcs du graphe (dans n'importe quel ordre) et à les colorer soit en " rouge " soit en " vert ".

  A une étape quelconque, G_c est le graphe partiel engendré par les arcs colorés (rouges ou verts) et G_r le graphe partiel engendré par les arcs rouges.

Arbres et arborescences

Algorithme de construction d'une forêt maximale

- Initialement, tous les arcs du graphe sont "incolores". La méthode consiste à examiner successivement tous les arcs du graphe (dans n'importe quel ordre) et à les colorer soit en " rouge " soit en " vert ".

  A une étape quelconque, G_c est le graphe partiel engendré par les arcs colorés (rouges ou verts) et G_r le graphe partiel engendré par les arcs rouges.

- Chaque fois qu'un nouvel arc *a* incolore est examiné

Arbres et arborescences

Algorithme de construction d'une forêt maximale

- Initialement, tous les arcs du graphe sont "incolores". La méthode consiste à examiner successivement tous les arcs du graphe (dans n'importe quel ordre) et à les colorer soit en " rouge " soit en " vert ".

  A une étape quelconque, G_c est le graphe partiel engendré par les arcs colorés (rouges ou verts) et G_r le graphe partiel engendré par les arcs rouges.

- Chaque fois qu'un nouvel arc a incolore est examiné

  - soit il passe par a un cycle élémentaire μ dont tous les arcs (autres que a) sont rouges ; on colore alors l'arc en vert, le nombre de connexité de G_c et de G_r reste constant,

Arbres et arborescences

Algorithme de construction d'une forêt maximale

- Initialement, tous les arcs du graphe sont "incolores". La méthode consiste à examiner successivement tous les arcs du graphe (dans n'importe quel ordre) et à les colorer soit en " rouge " soit en " vert ".

  A une étape quelconque, G_c est le graphe partiel engendré par les arcs colorés (rouges ou verts) et G_r le graphe partiel engendré par les arcs rouges.

- Chaque fois qu'un nouvel arc a incolore est examiné

  - soit il passe par a un cycle élémentaire μ dont tous les arcs (autres que a) sont rouges ; on colore alors l'arc en vert, le nombre de connexité de G_c et de G_r reste constant,
  - soit un tel cycle n'existe pas, auquel cas l'arc a permet de connecter deux sommets qui n'étaient pas encore connectés dans G_c ; on colore l'arc a en rouge, le nombre de connexité de G_c et de G_r décroît de 1.

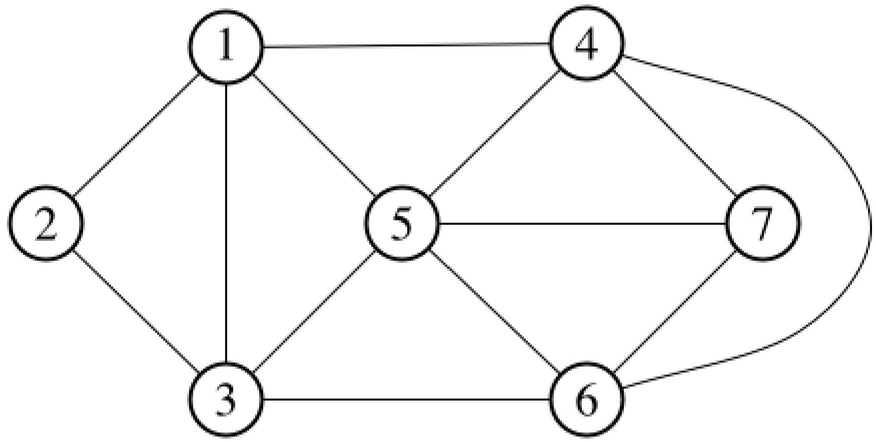
Arbres et arborescences

Arbres et arborescences

Algorithme de construction d’une forêt maximale

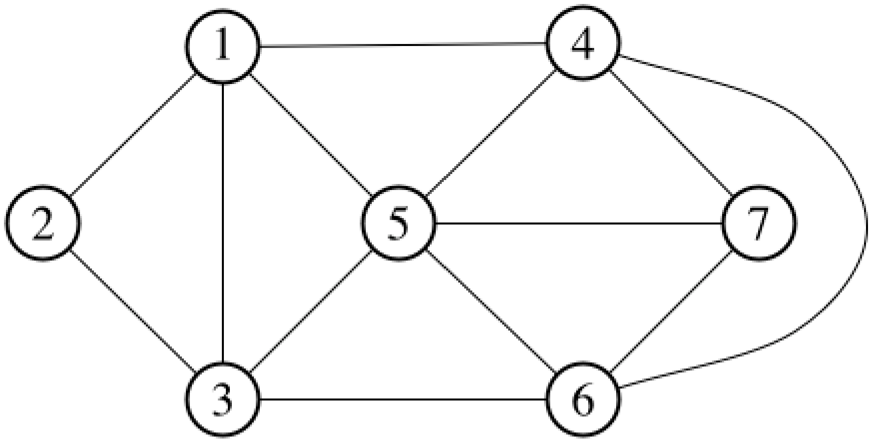
Arbres et arborescences

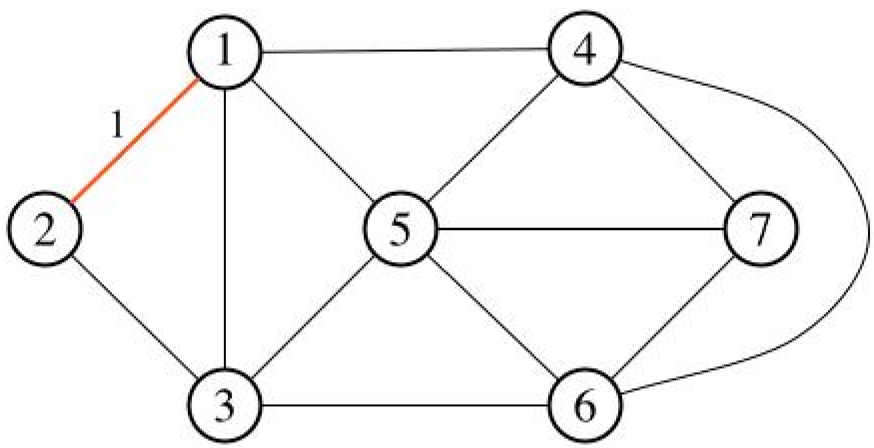
Algorithme de construction d'une forêt maximale



Arbres et arborescences

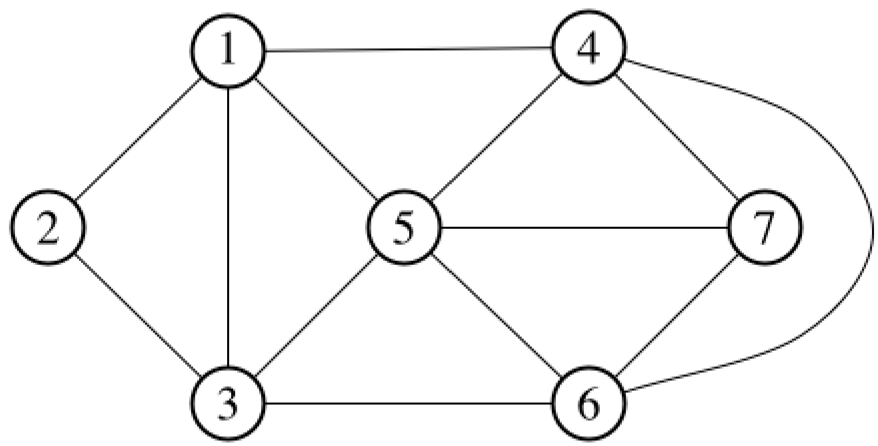
Algorithme de construction d'une forêt maximale

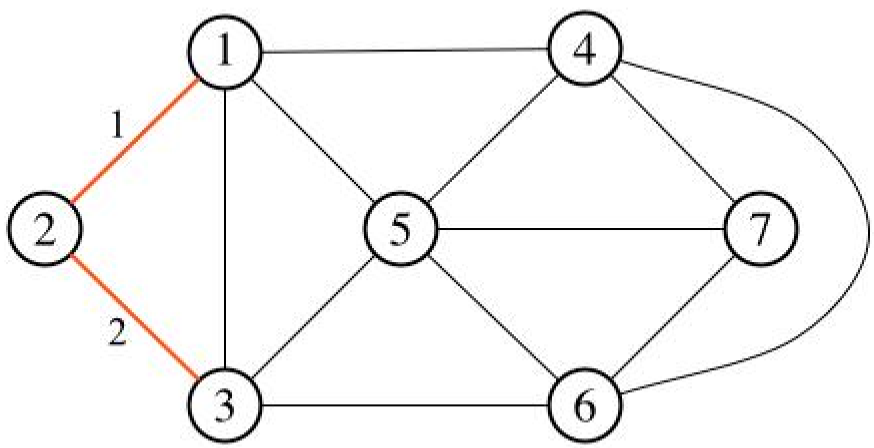




Arbres et arborescences

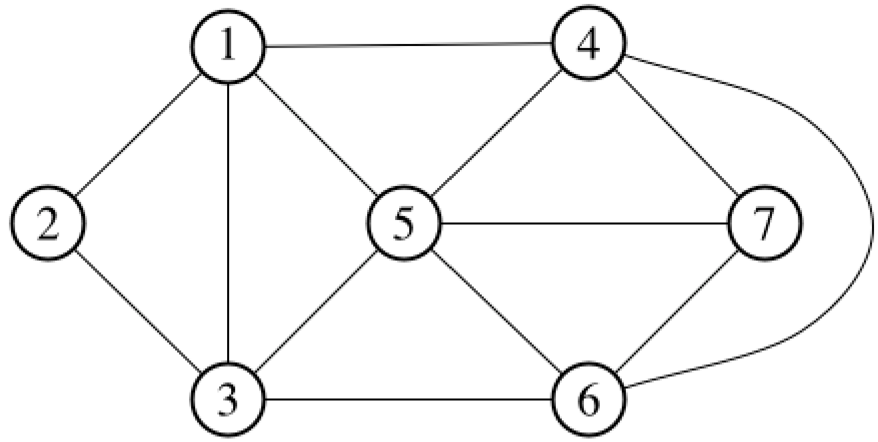
Algorithme de construction d'une forêt maximale

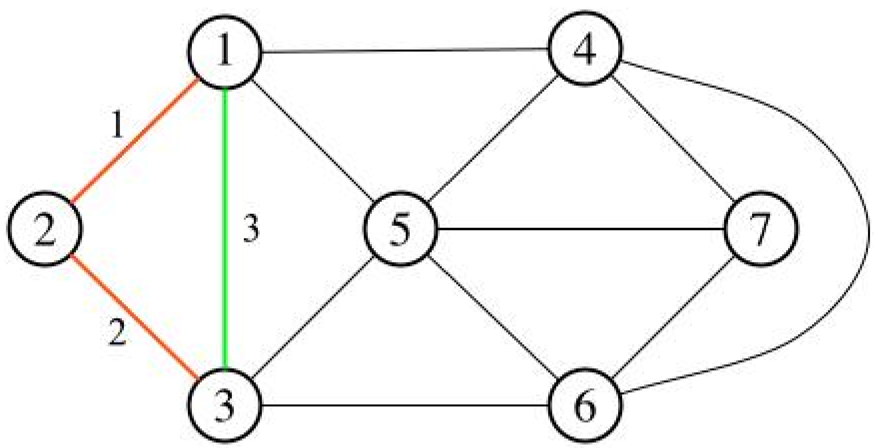




Arbres et arborescences

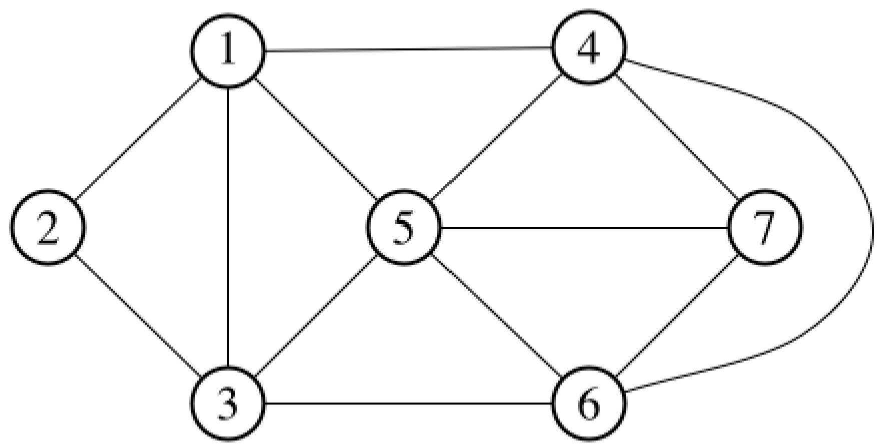
Algorithme de construction d'une forêt maximale

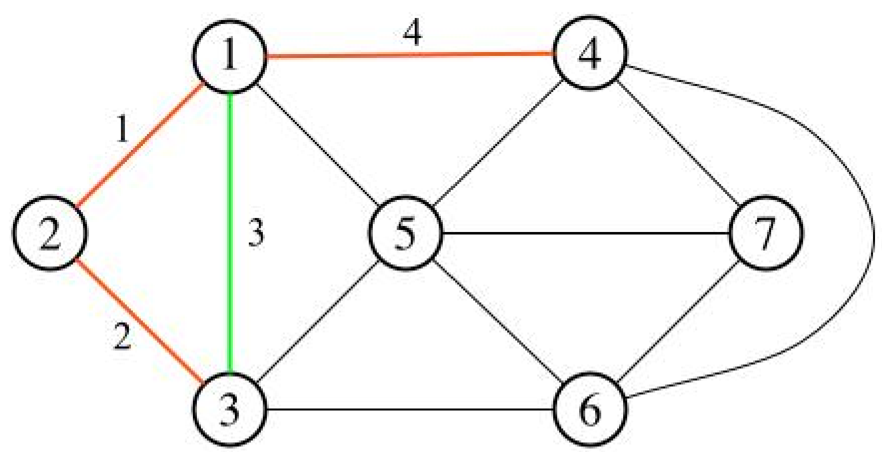




Arbres et arborescences

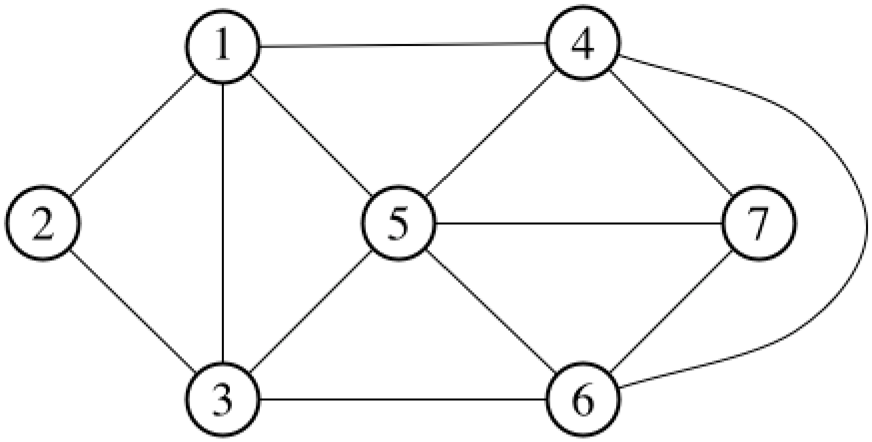
Algorithme de construction d'une forêt maximale

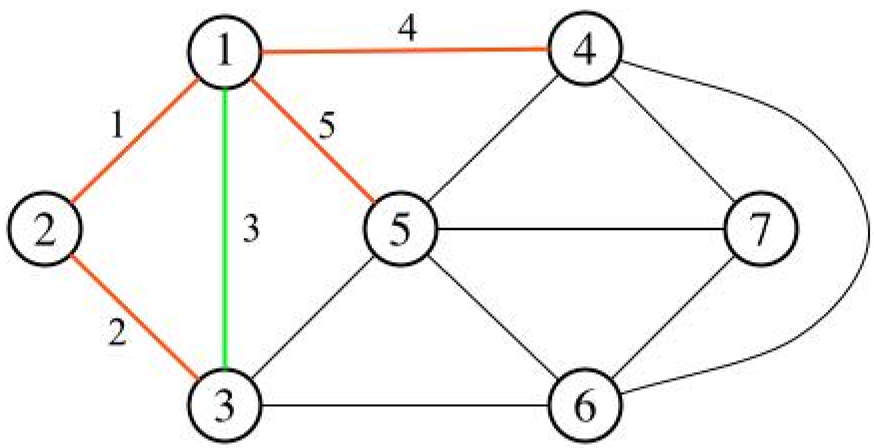




Arbres et arborescences

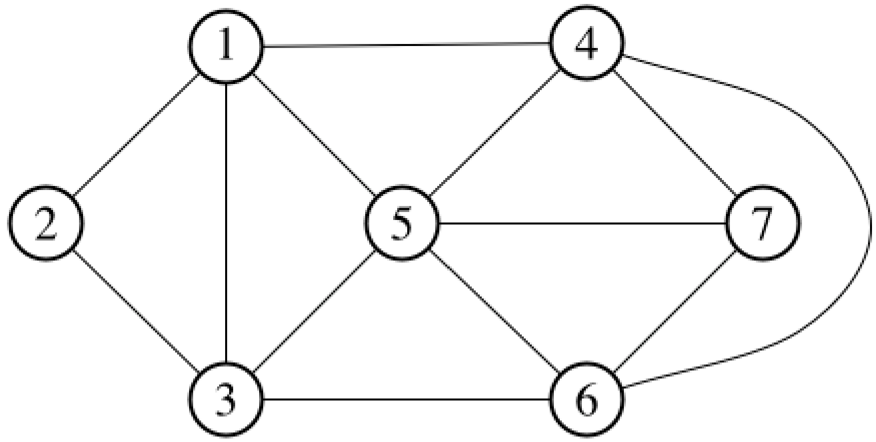
Algorithme de construction d'une forêt maximale

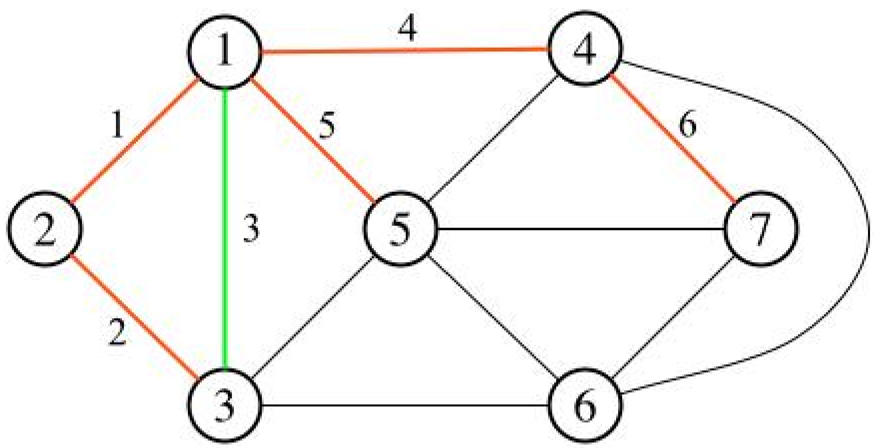




Arbres et arborescences

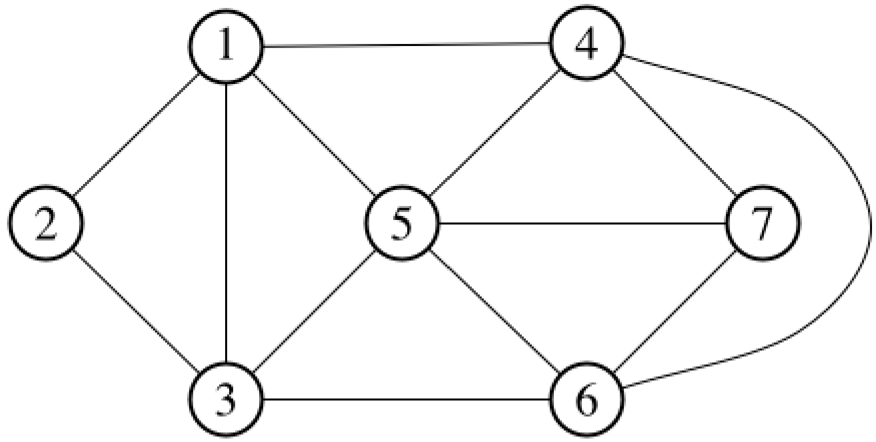
Algorithme de construction d'une forêt maximale

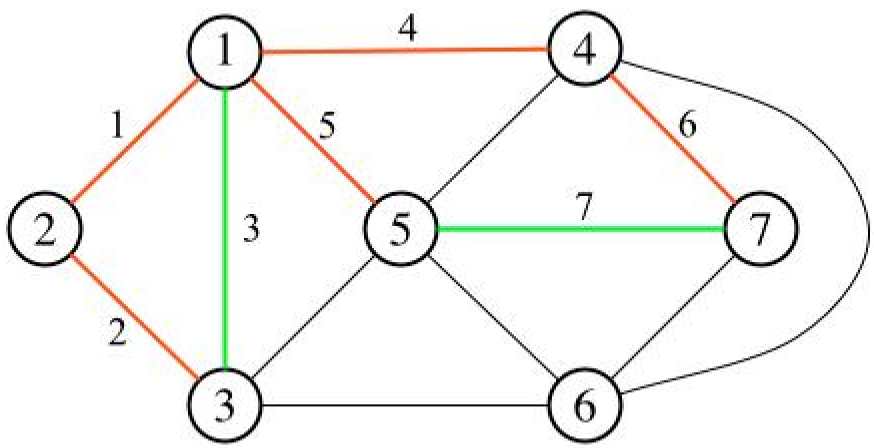




Arbres et arborescences

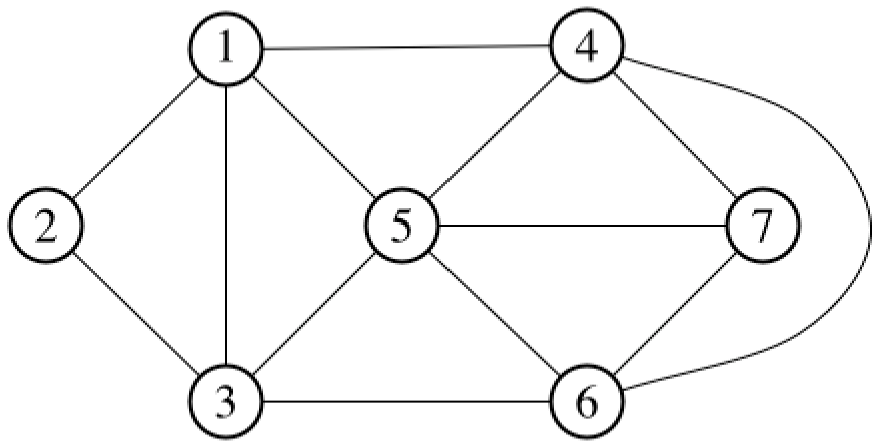
Algorithme de construction d'une forêt maximale

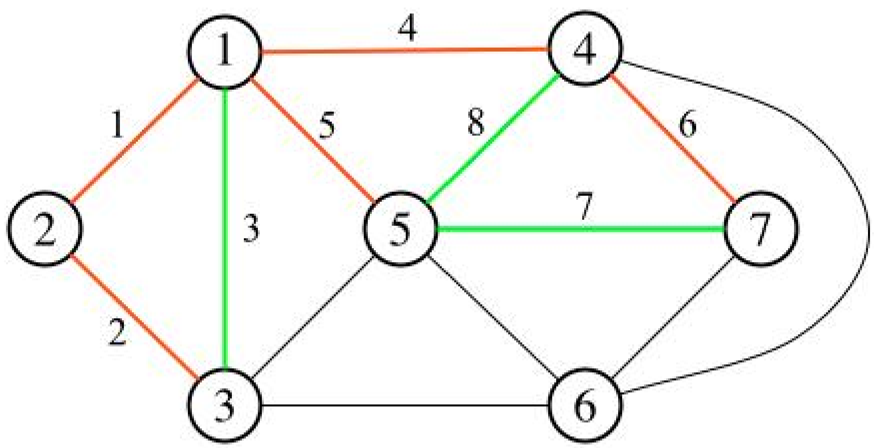




Arbres et arborescences

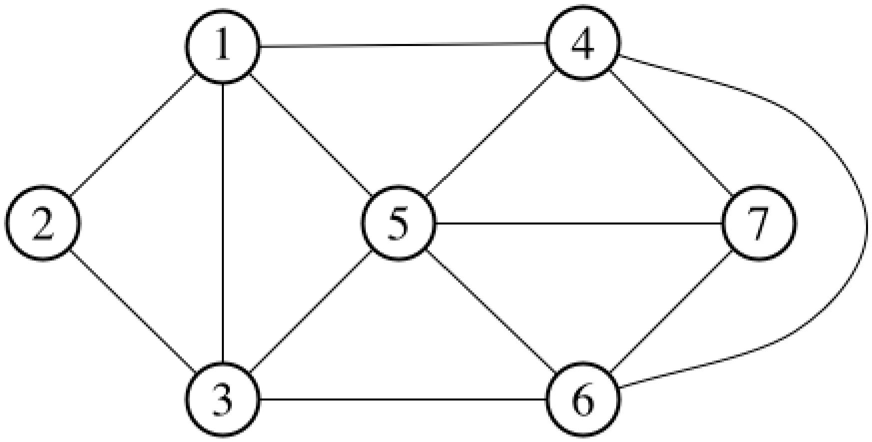
Algorithme de construction d'une forêt maximale

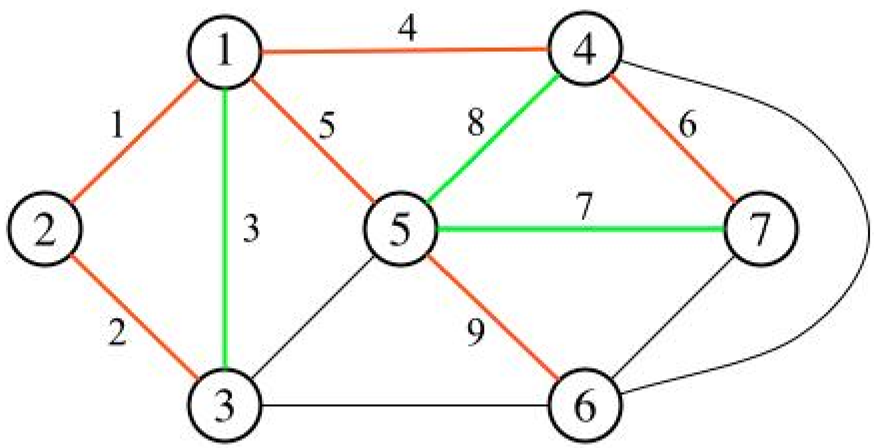




Arbres et arborescences

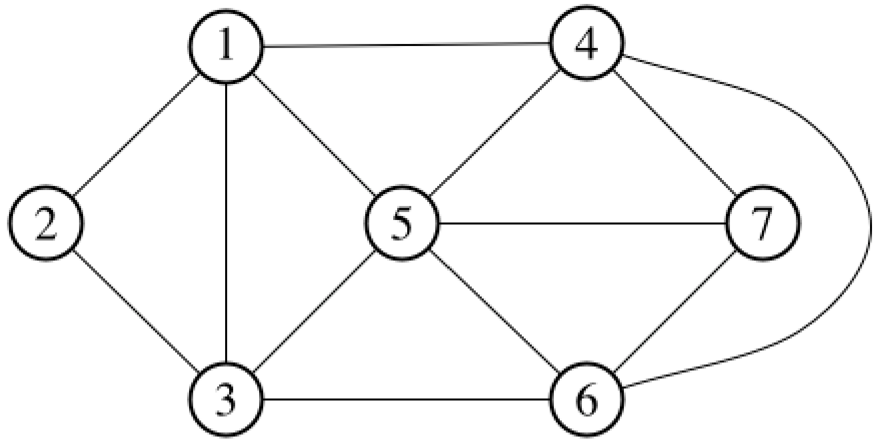
Algorithme de construction d'une forêt maximale

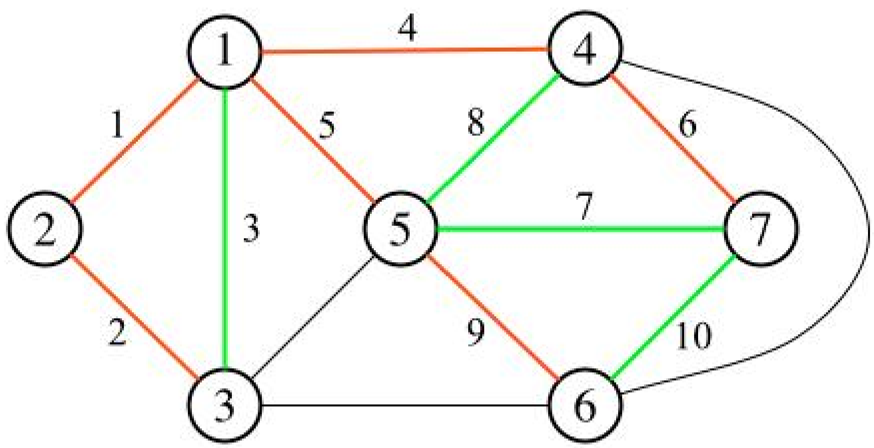




Arbres et arborescences

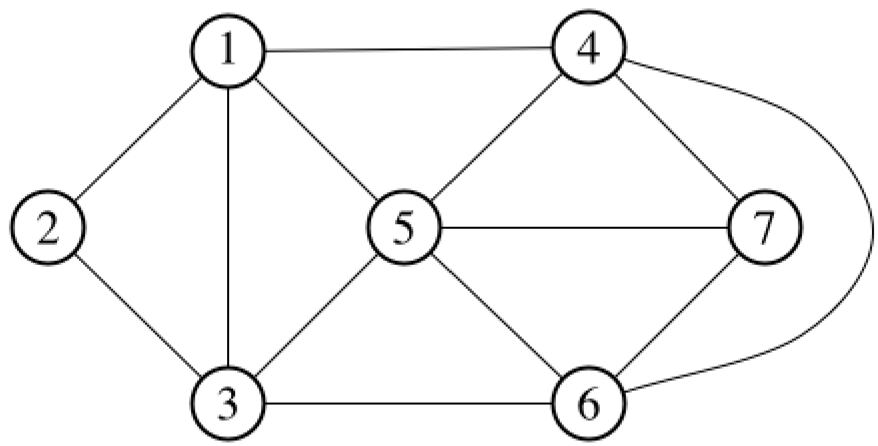
Algorithme de construction d'une forêt maximale

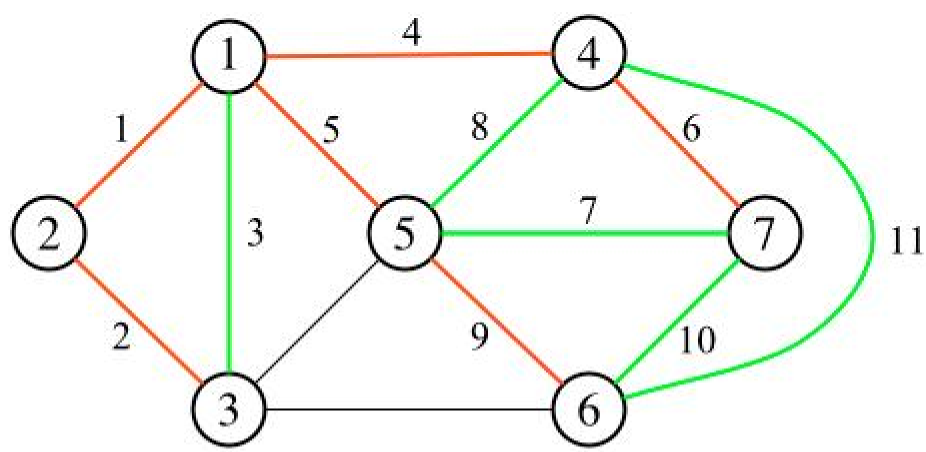




Arbres et arborescences

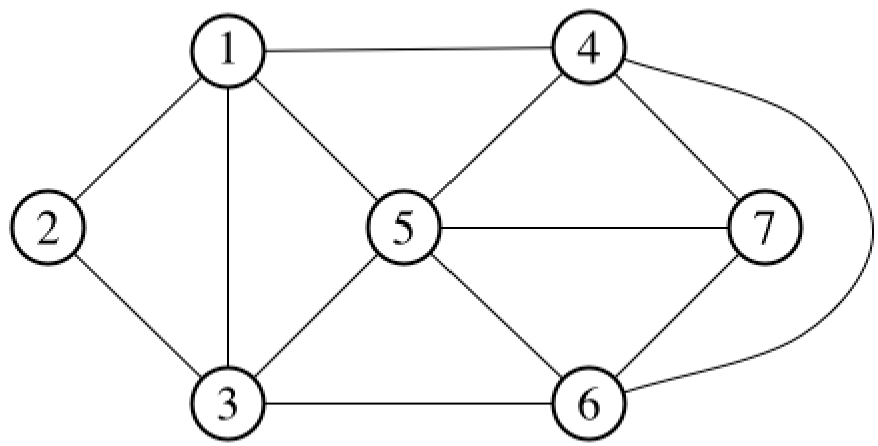
Algorithme de construction d'une forêt maximale

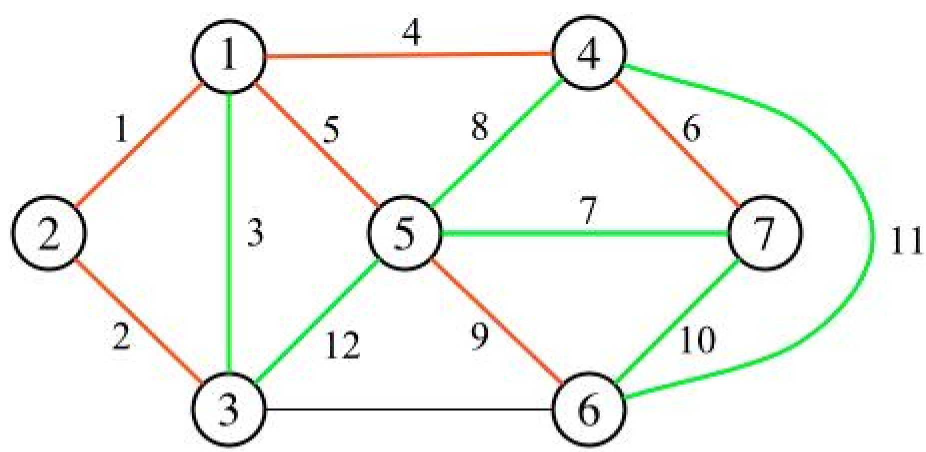




Arbres et arborescences

Algorithme de construction d'une forêt maximale



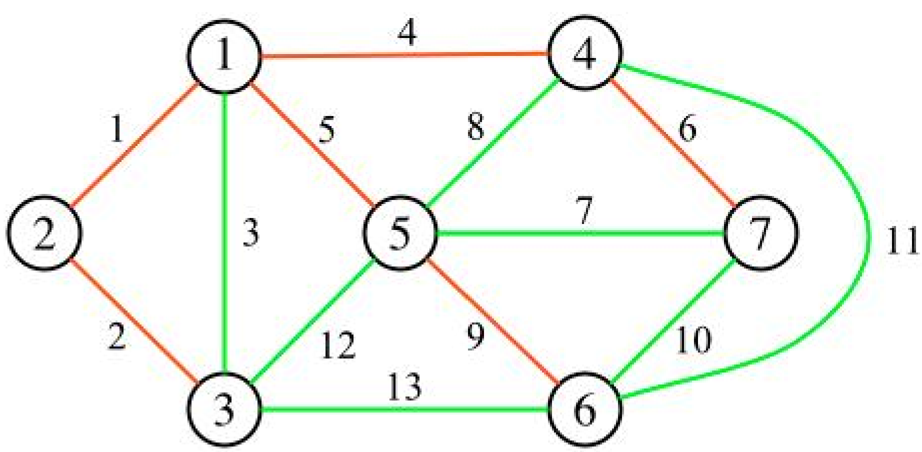


Arbres et arborescences

Algorithme de construction d'une forêt maximale

Pour montrer que le graphe partiel obtenu est bien une forêt maximale de G, il suffit d'observer qu'à tout instant, le graphe G_r est sans cycle (c'est donc bien une forêt de G)

A la fin de la procédure, elle est bien maximale pour l'inclusion car, en ajoutant un arc vert quelconque à G_r, on crée un cycle.



Arbres et arborescences

Arbres et arborescences

Propriétés

Arbres et arborescences

Propriétés

- Si G possède n sommets et p composantes connexes, une forêt maximale de G comporte exactement $n-p$ arcs.

Arbres et arborescences

Propriétés

- Si G possède n sommets et p composantes connexes, une forêt maximale de G comporte exactement $n-p$ arcs.
- Soit $\mathcal{T} = (X,T)$ une forêt maximale de G. Alors $\mathcal{T}$ et G ont le même nombre de connexité.

Arbres et arborescences

Propriétés

- Si G possède n sommets et p composantes connexes, une forêt maximale de G comporte exactement $n\!-\!p$ arcs.
- Soit $\mathcal{T} = (X,T)$ une forêt maximale de G. Alors $\mathcal{T}$ et G ont le même nombre de connexité.
- Soit $\mathcal{T} = (X,T)$ une forêt maximale de G=(X, A). Alors, par tout arc $a \in A - T$, il passe un cycle et un seul dont tous les arcs (autres que a) appartiennent à $\mathcal{T}$.

Arbres et arborescences

Propriétés

- Si G possède n sommets et p composantes connexes, une forêt maximale de G comporte exactement $n-p$ arcs.
- Soit $\mathcal{T} = (X,T)$ une forêt maximale de G. Alors $\mathcal{T}$ et G ont le même nombre de connexité.
- Soit $\mathcal{T} = (X,T)$ une forêt maximale de $G=(X, A)$. Alors, par tout arc $a \in A - T$, il passe un cycle et un seul dont tous les arcs (autres que a) appartiennent à $\mathcal{T}$.

$\Rightarrow$ **construction d'une base de cycles**

Arbres et arborescences

Propriétés

- Si G possède n sommets et p composantes connexes, une forêt maximale de G comporte exactement $n-p$ arcs.
- Soit $\mathcal{T} = (X,T)$ une forêt maximale de G. Alors $\mathcal{T}$ et G ont le même nombre de connexité.
- Soit $\mathcal{T} = (X,T)$ une forêt maximale de $G=(X, A)$. Alors, par tout arc $a \in A - T$, il passe un cycle et un seul dont tous les arcs (autres que a) appartiennent à $\mathcal{T}$.

⇒ construction d'une base de cycles

- Soit un graphe $G=(X, A)$ comportant n sommets, m arcs et p composantes connexes.

Arbres et arborescences

Propriétés

- Si G possède n sommets et p composantes connexes, une forêt maximale de G comporte exactement $n{-}p$ arcs.
- Soit $\mathcal{T} = (X,T)$ une forêt maximale de G. Alors $\mathcal{T}$ et G ont le même nombre de connexité.
- Soit $\mathcal{T} = (X,T)$ une forêt maximale de $G{=}(X, A)$. Alors, par tout arc $a \in A - T$, il passe un cycle et un seul dont tous les arcs (autres que a) appartiennent à $\mathcal{T}$.

⇒ construction d'une base de cycles

- Soit un graphe $G{=}(X, A)$ comportant n sommets, m arcs et p composantes connexes.
- Soit $\mathcal{T} = (X,T)$ une forêt maximale de $G{=}(X, A)$ et pour $a \in A - T$, notons μ^a le cycle (unique) contenu dans G.

Arbres et arborescences

Propriétés

- Si G possède n sommets et p composantes connexes, une forêt maximale de G comporte exactement $n–p$ arcs.
- Soit $\mathcal{T}= (X,T)$ une forêt maximale de G. Alors $\mathcal{T}$ et G ont le même nombre de connexité.
- Soit $\mathcal{T}= (X,T)$ une forêt maximale de $G=(X, A)$. Alors, par tout arc $a \in A - T$, il passe un cycle et un seul dont tous les arcs (autres que a) appartiennent à $\mathcal{T}$.

⇒ construction d'une base de cycles

- Soit un graphe $G=(X, A)$ comportant n sommets, m arcs et p composantes connexes.
- Soit $\mathcal{T}= (X,T)$ une forêt maximale de $G=(X, A)$ et pour $a \in A - T$, notons μ^{a} le cycle (unique) contenu dans G.
- Les cycles $\{\mu^{a}\}$ forment une base de cycles du graphe G, dont la dimension est le nombre cyclomatique de G.

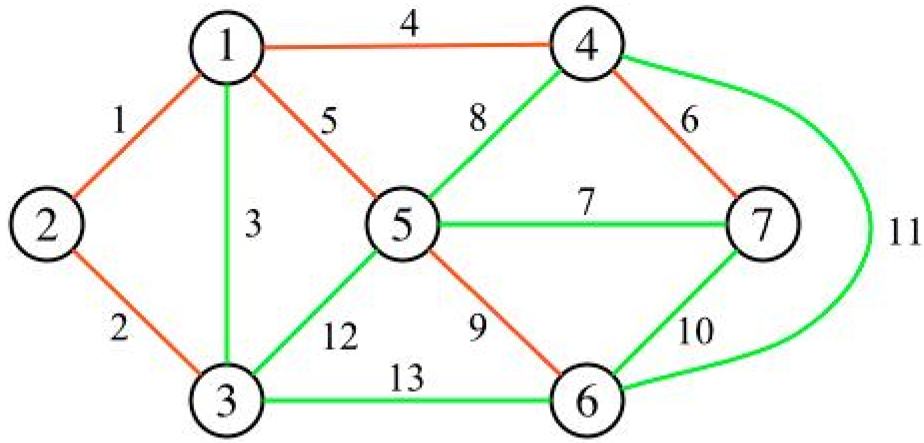
Arbres et arborescences

Arbres et arborescences

Exemple

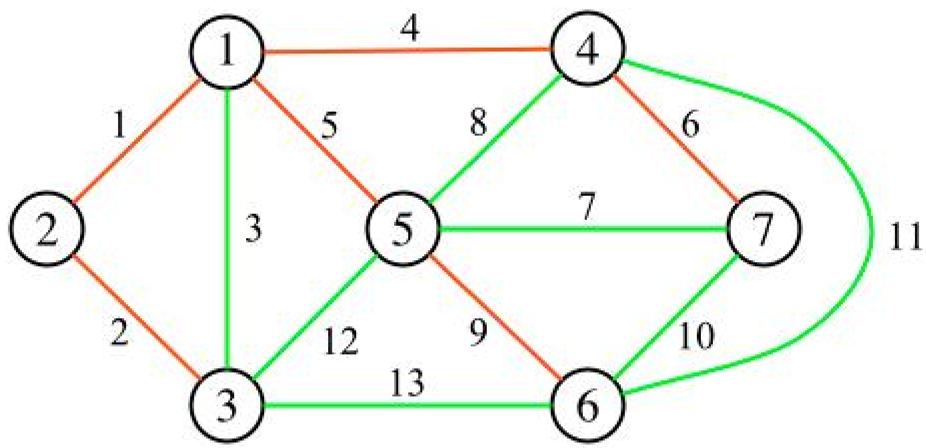
Arbres et arborescences

Exemple



Arbres et arborescences

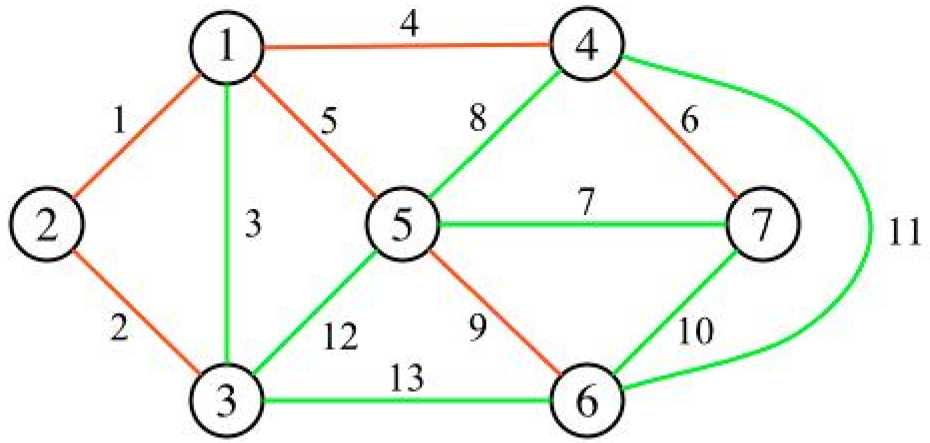
Exemple



Base de cycles

Arbres et arborescences

Exemple

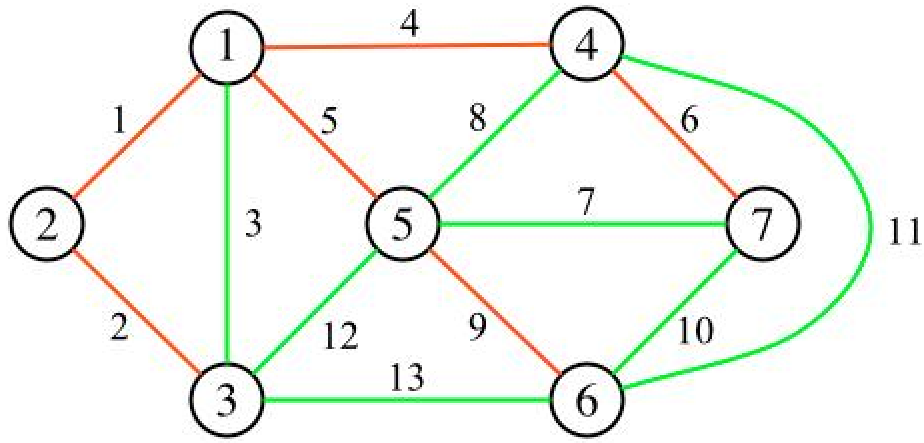


Base de cycles

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Arbres et arborescences

Exemple

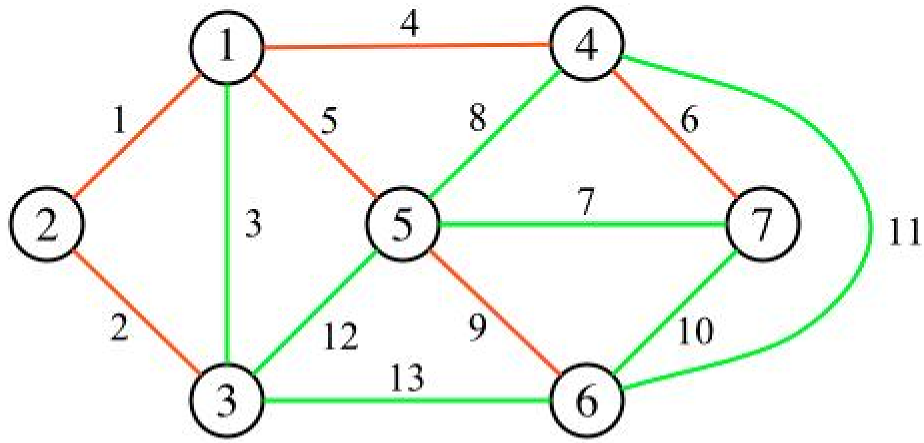


Base de cycles

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\
\mu^3 & = (& 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \;)
\end{array}
$$

Arbres et arborescences

Exemple

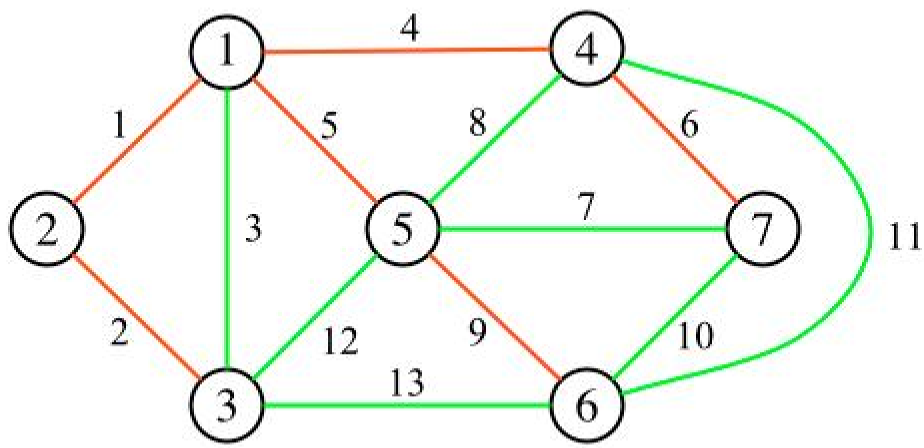


Base de cycles

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\
\mu^3 = (& 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ ) \\
\mu^7 = (& 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ )
\end{array}
$$

Arbres et arborescences

Exemple

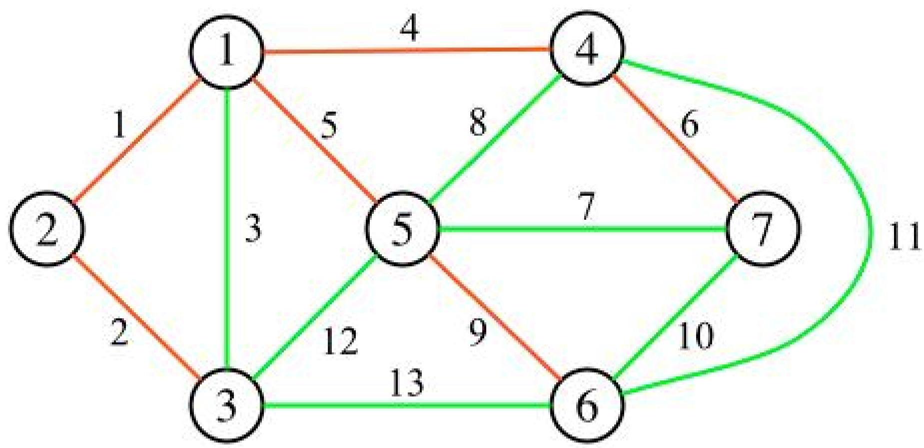


Base de cycles

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\
\mu^3 = (& 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ ) \\
\mu^7 = (& 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ ) \\
\mu^8 = (& 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ )
\end{array}
$$

Arbres et arborescences

Exemple

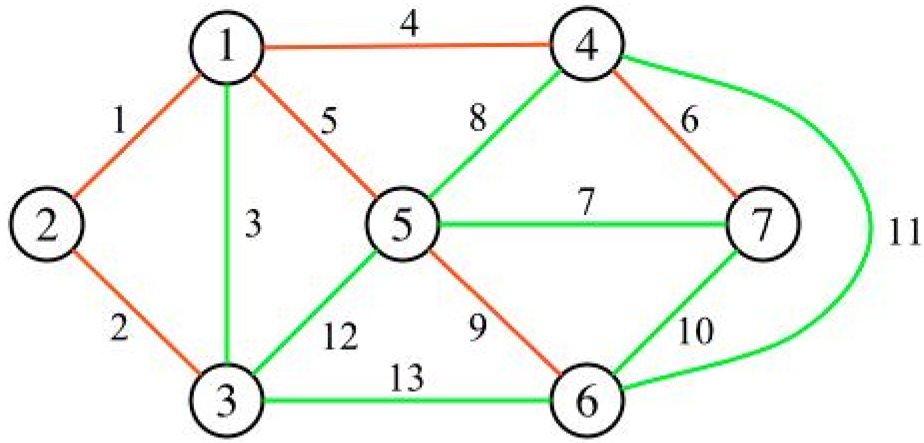


Base de cycles

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mu^3 = ($	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0)
$\mu^7 = ($	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0)
$\mu^8 = ($	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0)
$\mu^{10} = ($	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0)

Arbres et arborescences

Exemple

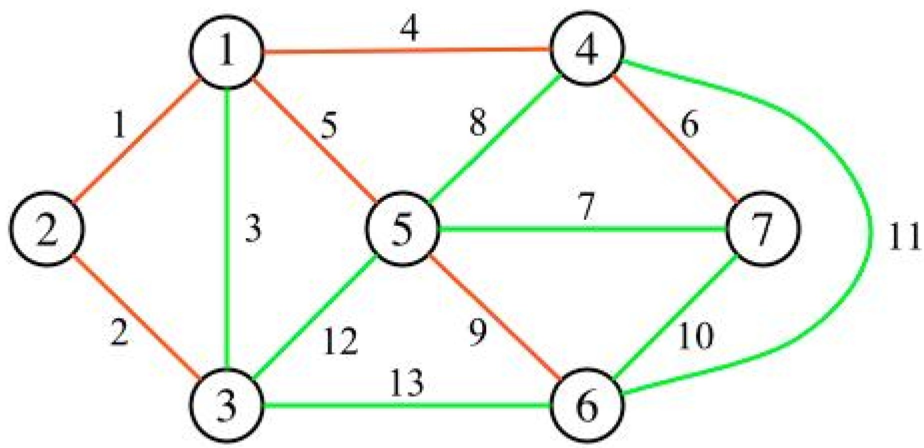


Base de cycles

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mu^3 =$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu^7 =$	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
$\mu^8 =$	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
$\mu^{10} =$	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
$\mu^{11} =$	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0

Arbres et arborescences

Exemple

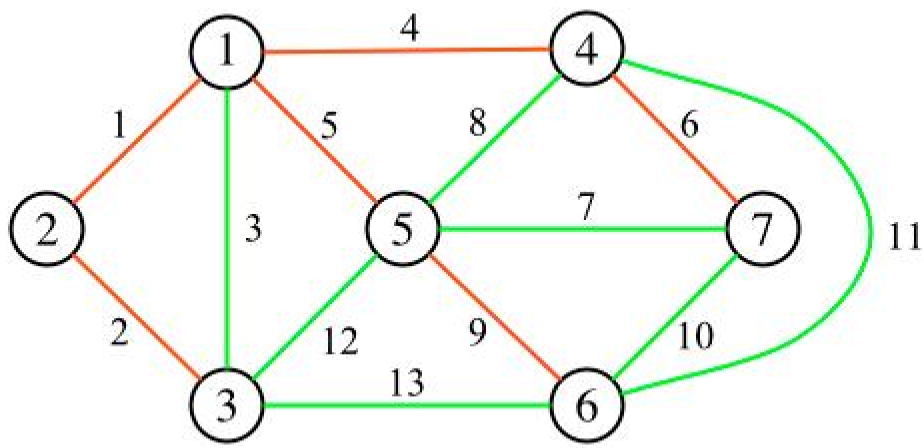


Base de cycles

$$
\begin{array}{l}
 \\
\mu^3 = \\
\mu^7 = \\
\mu^8 = \\
\mu^{10} = \\
\mu^{11} = \\
\mu^{12} =
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Arbres et arborescences

Exemple



Base de cycles

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mu^3 =$ (	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0)
$\mu^7 =$ (	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0)
$\mu^8 =$ (	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0)
$\mu^{10} =$ (	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0)
$\mu^{11} =$ (	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0)
$\mu^{12} =$ (	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0)
$\mu^{13} =$ (	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1)

Arbres et arborescences

La notion d’arborescense est l’adaptation de la structure d’arbre aux 1-graphes orientés.

Arbres et arborescences

La notion d'arborescense est l'adaptation de la structure d'arbre aux 1-graphes orientés.

- ***Définition* 20**

Arbres et arborescences

La notion d’arborescense est l’adaptation de la structure d’arbre aux 1-graphes orientés.

- ***Définition* 20**
  - Un graphe G est une arborescence s’il existe un sommet R appelé racine de G tel que, pour tout sommet S de G, il existe un chemin et un seul de R vers S.

Arbres et arborescences

La notion d'arborescense est l'adaptation de la structure d'arbre aux 1-graphes orientés.

- ***Définition* 20**
  - Un graphe G est une arborescence s'il existe un sommet R appelé racine de G tel que, pour tout sommet S de G, il existe un chemin et un seul de R vers S.
  - La notion d'arborescence couvrante se définit comme celle d'arbre couvrant, mais elle est plus délicate car il faut trouver une racine (qui n'existe pas toujours).

Arbres et arborescences

Arbres et arborescences

Arbre couvrant de poids minimal

Arbres et arborescences

Arbre couvrant de poids minimal

- Problème : relier *n* villes par un réseau cablé de la manière la plus économique possible.

Arbres et arborescences

Arbre couvrant de poids minimal

- Problème : relier *n* villes par un réseau cablé de la manière la plus économique possible.
    - On suppose connue la longueur la longueur de câble nécessaire pour relier les villes *i* et *j*.

Arbres et arborescences

Arbre couvrant de poids minimal

- Problème : relier *n* villes par un réseau cablé de la manière la plus économique possible.
  - On suppose connue la longueur la longueur de câble nécessaire pour relier les villes *i* et *j*.
  - Le réseau doit évidemment être connexe et il ne doit pas admettre de cycles pour être de coût minimal

Arbres et arborescences

Arbre couvrant de poids minimal

- Problème : relier n villes par un réseau cablé de la manière la plus économique possible.
  - On suppose connue la longueur la longueur de câble nécessaire pour relier les villes i et j.
  - Le réseau doit évidemment être connexe et il ne doit pas admettre de cycles pour être de coût minimal
  - $\Rightarrow$ c'est donc un arbre et ce doit être l'arbre maximum le plus économique.

Arbres et arborescences

Arbre couvrant de poids minimal

- Problème : relier *n* villes par un réseau cablé de la manière la plus économique possible.
  - On suppose connue la longueur la longueur de câble nécessaire pour relier les villes *i* et *j*.
  - Le réseau doit évidemment être connexe et il ne doit pas admettre de cycles pour être de coût minimal
  - $\Rightarrow$ c'est donc un arbre et ce doit être l'arbre maximum le plus économique.

- ***Définition* 21**

Soit un graphe non orienté *G*, connexe, pondéré par une fonction positive *l* attachée aux arêtes. Soit un arbre couvrant *T*=(*X*, *B*) défini comme graphe partiel de *G* avec un ensemble d'arêtes *B*.

Son poids (ou coût) total est : $l(T)= \sum l(a)$, pour a $\in B$

Arbres et arborescences

Arbre couvrant de poids minimal

- Problème : relier n villes par un réseau cablé de la manière la plus économique possible.
  - On suppose connue la longueur la longueur de câble nécessaire pour relier les villes i et j.
  - Le réseau doit évidemment être connexe et il ne doit pas admettre de cycles pour être de coût minimal
  - $\Rightarrow$ c'est donc un arbre et ce doit être l'arbre maximum le plus économique.

- ***Définition* 21**

Soit un graphe non orienté G, connexe, pondéré par une fonction positive l attachée aux arêtes. Soit un arbre couvrant T=(X, B) défini comme graphe partiel de G avec un ensemble d'arêtes B.

Son poids (ou coût) total est : $l(T)= \sum l(a)$, pour a $\in B$

- On dit que T est un arbre couvrant de poids minimal de G si $l(T)$ est minimal parmi les poids de tous les arbres couvrants possibles de G.

Arbres et arborescences

Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

- Construction progressive d'un arbre à partir d'un sommet quelconque (arbitrairement le sommet numéro 1).

Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

- Construction progressive d'un arbre à partir d'un sommet quelconque (arbitrairement le sommet numéro 1).
- Greffe, à chaque étape, de l'arête de poids minimal parmi celles qui permettent de maintenir un graphe partiel qui soit un arbre.

Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

- Construction progressive d'un arbre à partir d'un sommet quelconque (arbitrairement le sommet numéro 1).
- Greffe, à chaque étape, de l'arête de poids minimal parmi celles qui permettent de maintenir un graphe partiel qui soit un arbre.
- Si le graphe est connexe, le processus s'arrête avec un arbre couvrant.

Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

- Construction progressive d'un arbre à partir d'un sommet quelconque (arbitrairement le sommet numéro 1).
- Greffe, à chaque étape, de l'arête de poids minimal parmi celles qui permettent de maintenir un graphe partiel qui soit un arbre.
- Si le graphe est connexe, le processus s'arrête avec un arbre couvrant.
- Sinon, il aboutit à un arbre couvrant pour une composante connexe ; on poursuit avec les autres composantes connexes pour obtenir une forêt couvrante.

Arbres et arborescences

Arbres et arborescences

Algorithme de Prim : mise en œuvre

Arbres et arborescences

Algorithme de Prim : mise en œuvre

- On associe à chaque sommet i un nombre réel $\pi(i)$ appelé marque.

Arbres et arborescences

Algorithme de Prim : mise en œuvre

- On associe à chaque sommet i un nombre réel $\pi(i)$ appelé marque.
- A une étape quelconque, la marque $\pi(i)$ d 'un sommet $i \in X \setminus S$ représente le poids de l'arête de poids minimum parmi les arêtes joignant i à S.

Arbres et arborescences

Algorithme de Prim : mise en œuvre

- On associe à chaque sommet i un nombre réel $\pi(i)$ appelé marque.
- A une étape quelconque, la marque $\pi(i)$ d 'un sommet $i \in X \setminus S$ représente le poids de l'arête de poids minimum parmi les arêtes joignant i à S.
- On conserve également, pour chaque sommet, l'indice de l'arête ayant permis d'attribuer la marque $\pi(i)$ au sommet i .

Arbres et arborescences

Algorithme de Prim : mise en œuvre

- On associe à chaque sommet i un nombre réel $\pi(i)$ appelé marque.
- A une étape quelconque, la marque $\pi(i)$ d 'un sommet $i \in X \setminus S$ représente le poids de l'arête de poids minimum parmi les arêtes joignant i à S.
- On conserve également, pour chaque sommet, l'indice de l'arête ayant permis d'attribuer la marque $\pi(i)$ au sommet i .
- Lorsque le sous-ensemble S est augmenté du sommet i, les marques sont mises à jour : pour toutes les arêtes (i, j) avec $j \in X \setminus S$ (sommet j pas encore dans l'arbre), on choisit comme marque la plus petite valeur entre l'ancienne valeur et le poids de l'arête (i, j).

Arbres et arborescences

Arbres et arborescences

Algorithme 3 (Prim)
Recherche d ’un arbre couvrant de poids minimal

Arbres et arborescences

Algorithme 3 (Prim)
Recherche d 'un arbre couvrant de poids minimal

- Initialisations

$$\pi(1) = 0 \qquad\qquad \pi(i) = \infty,\ \ \forall i \in \{2, 3, \ldots, n\}$$
$$S = \varnothing \qquad\qquad \alpha(i) = \infty,\ \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Arbres et arborescences

Algorithme 3 (Prim)
Recherche d 'un arbre couvrant de poids minimal

- Initialisations

$$\pi(1) = 0 \qquad \pi(i) = \infty, \ \forall i \in \{2, 3, \ldots, n\}$$
$$S = \varnothing \qquad \alpha(i) = \infty, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

- Sélectionner i tel que pour $j \in X \setminus S \quad \pi(i) = \min(\pi(j))$

Si $\pi(i) = \infty$ ou $S = X$ alors FIN

$S \leftarrow S \cup \{i\}$

Arbres et arborescences

Algorithme 3 (Prim)
Recherche d 'un arbre couvrant de poids minimal

- Initialisations

$\pi(1) = 0 \qquad \pi(i) = \infty, \ \forall i \in \{2, 3, \ldots, n\}$

$S = \varnothing \qquad \alpha(i) = \infty, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

- Sélectionner i tel que pour $j \in X \setminus S \quad \pi(i) = \min(\pi(j))$

Si $\pi(i) = \infty$ ou $S = X$ alors FIN

$S \leftarrow S \cup \{i\}$

- Pour toutes les arêtes $a = (i, j)$ telles que $j \in X \setminus S$ faire

si $l_{ij} < \pi(j)$ alors $\pi(j) = l_{ij}$, $\alpha(j) = a$

Arbres et arborescences

Algorithme 3 (Prim)
Recherche d 'un arbre couvrant de poids minimal

- Initialisations

$$\pi(1) = 0 \qquad \pi(i) = \infty,\ \forall i \in \{2, 3, \dots, n\}$$
$$S = \varnothing \qquad \alpha(i) = \infty,\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

- Sélectionner i tel que pour $j \in X \setminus S \quad \pi(i) = \min(\pi(j))$

  Si $\pi(i) = \infty$ ou $S = X$ alors FIN

  $S \leftarrow S \cup \{i\}$

- Pour toutes les arêtes $a = (i, j)$ telles que $j \in X \setminus S$ faire

  si $l_{ij} < \pi(j)$ alors $\pi(j) = l_{ij}$, $\alpha(j) = a$

Arbres et arborescences

Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Arbres et arborescences

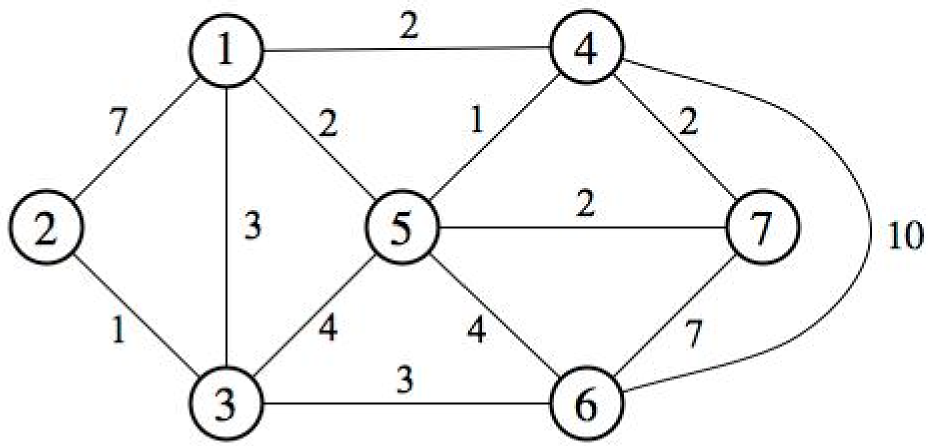
Algorithme de Prim

Recherche d'un arbre couvrant de poids minimal

Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

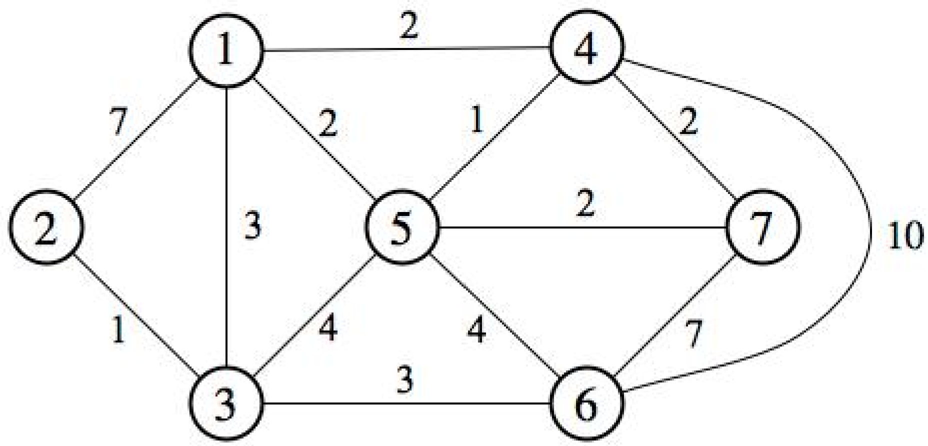
Recherche d'un arbre couvrant de poids minimal

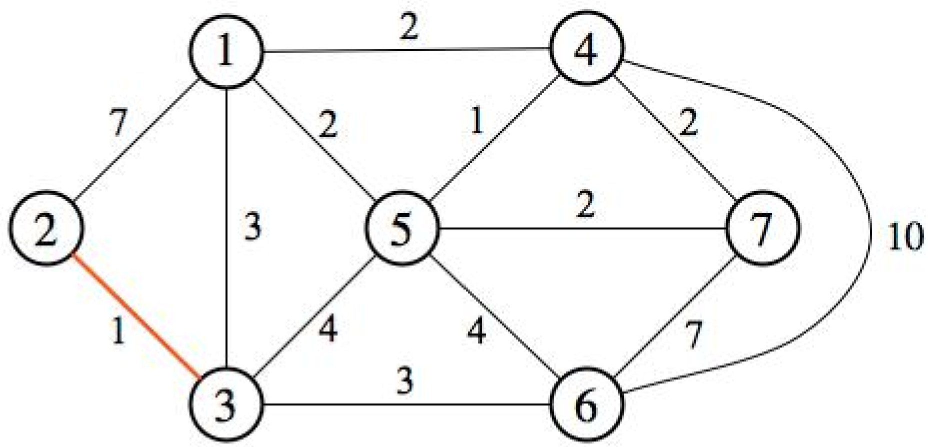


Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Recherche d’un arbre couvrant de poids minimal

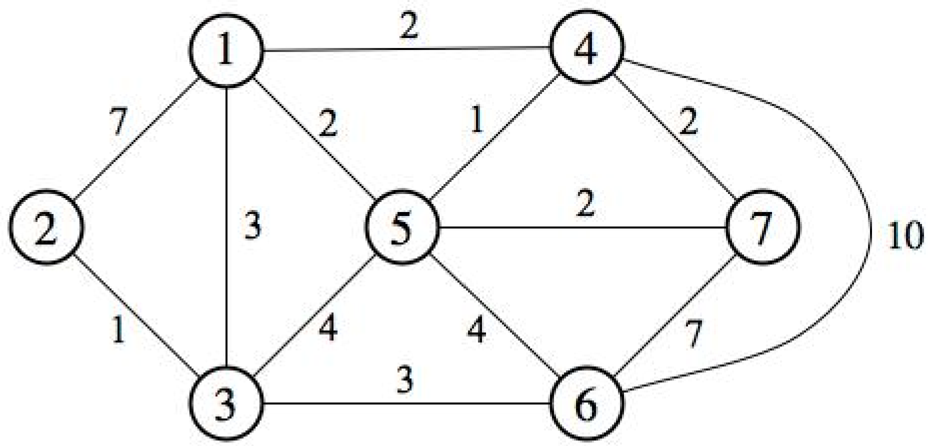


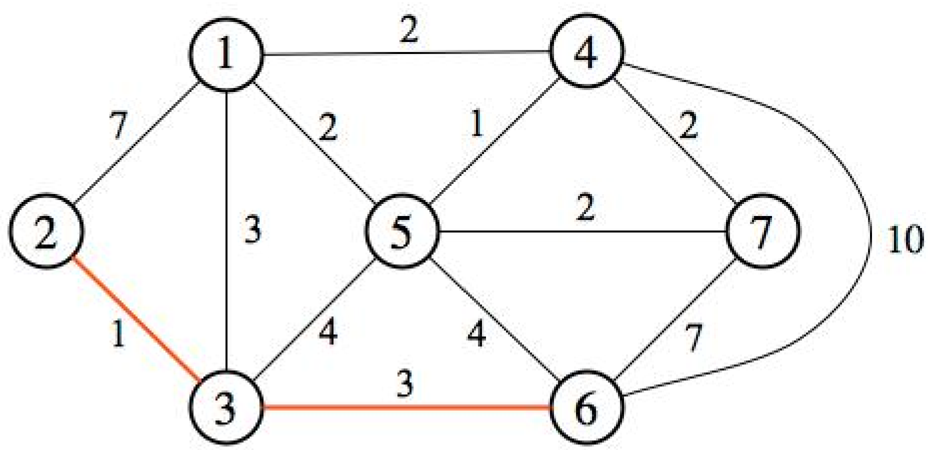


Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Recherche d'un arbre couvrant de poids minimal

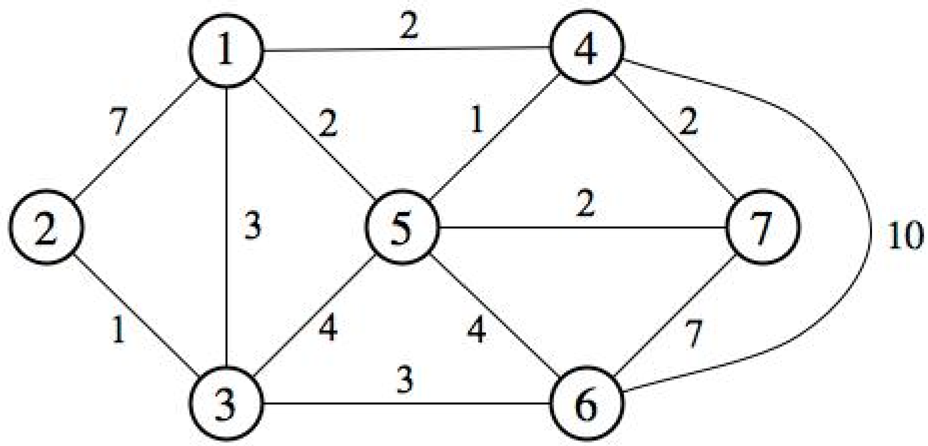


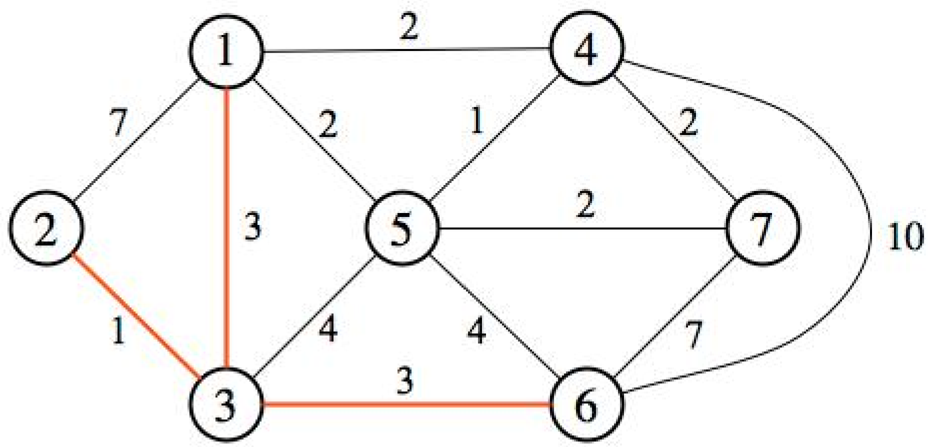


Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Recherche d'un arbre couvrant de poids minimal

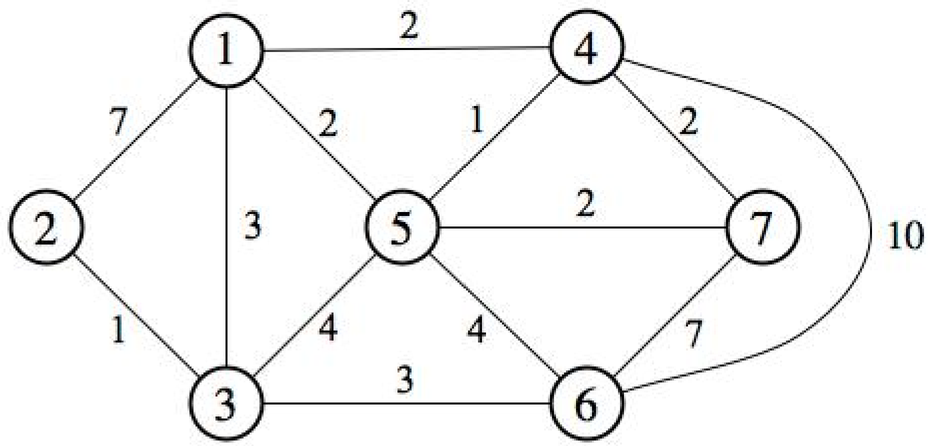


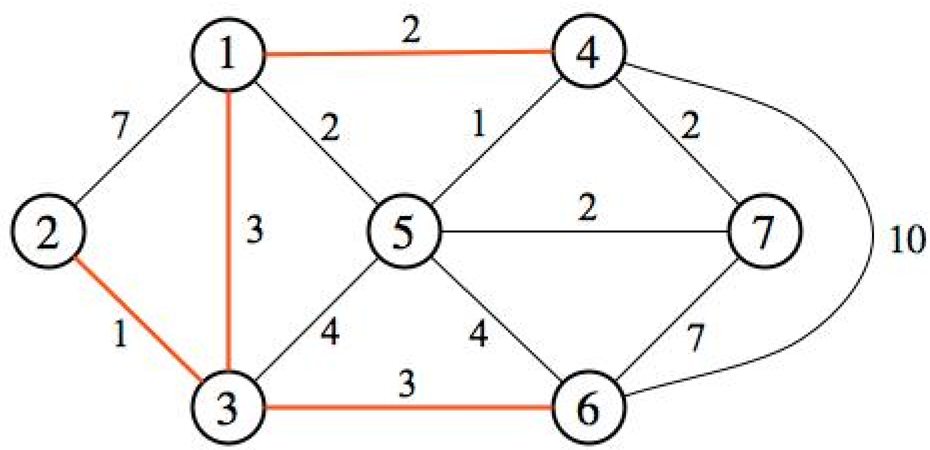


Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Recherche d’un arbre couvrant de poids minimal

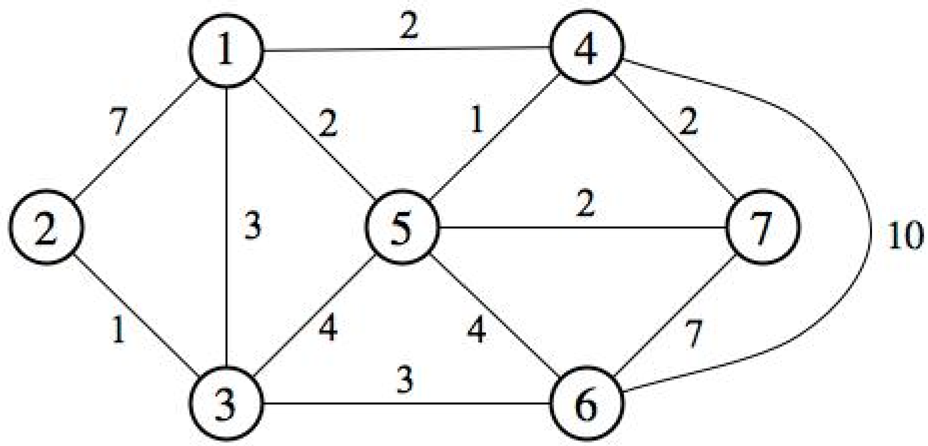


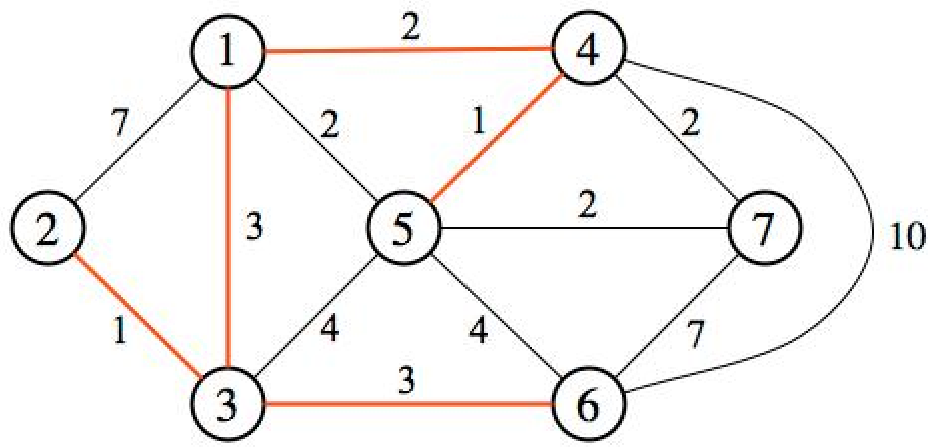


Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Recherche d'un arbre couvrant de poids minimal

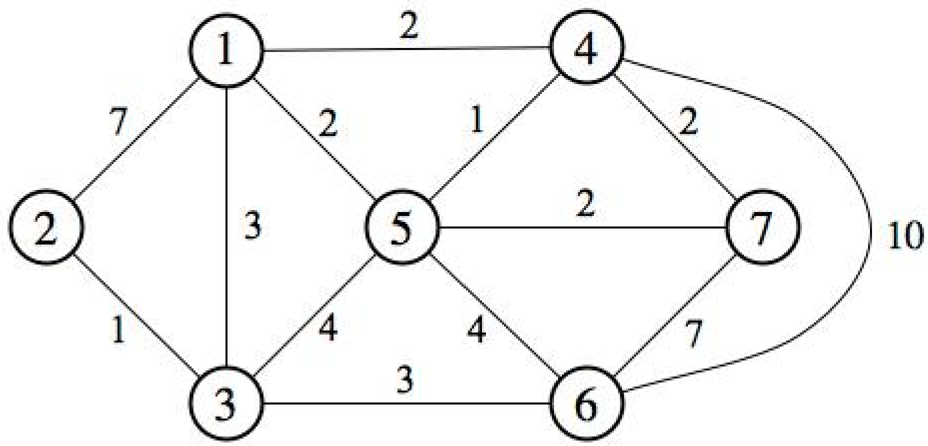


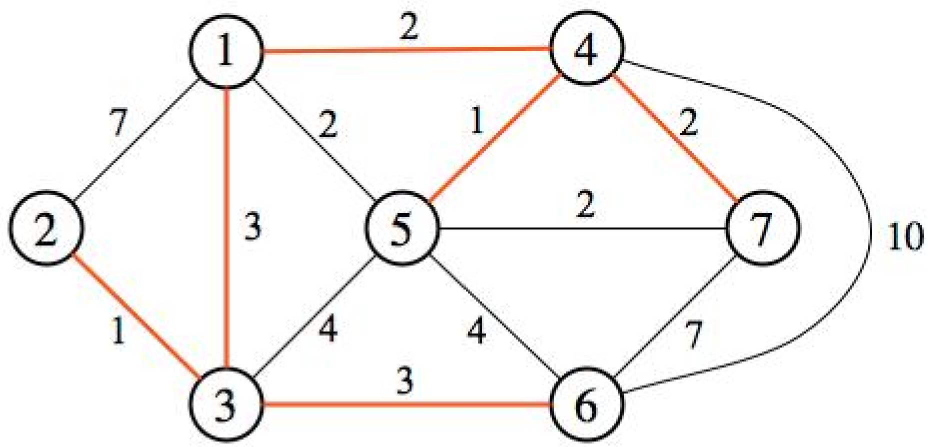


Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Recherche d’un arbre couvrant de poids minimal

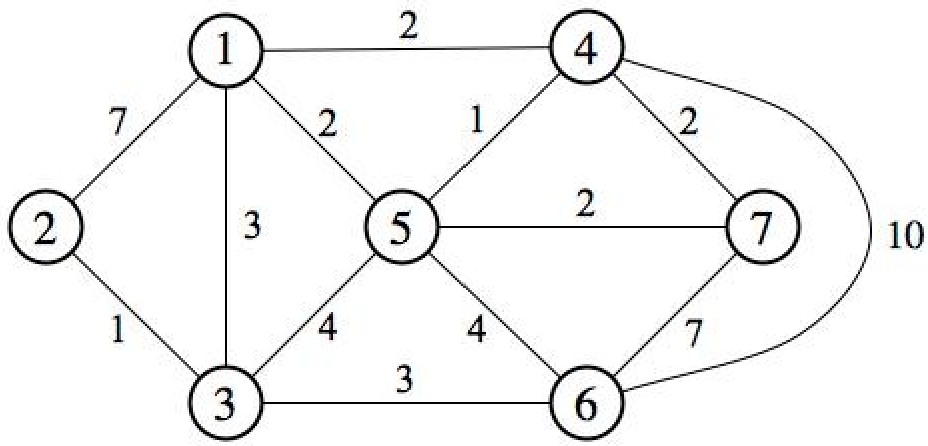




Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Recherche d'un arbre couvrant de poids minimal

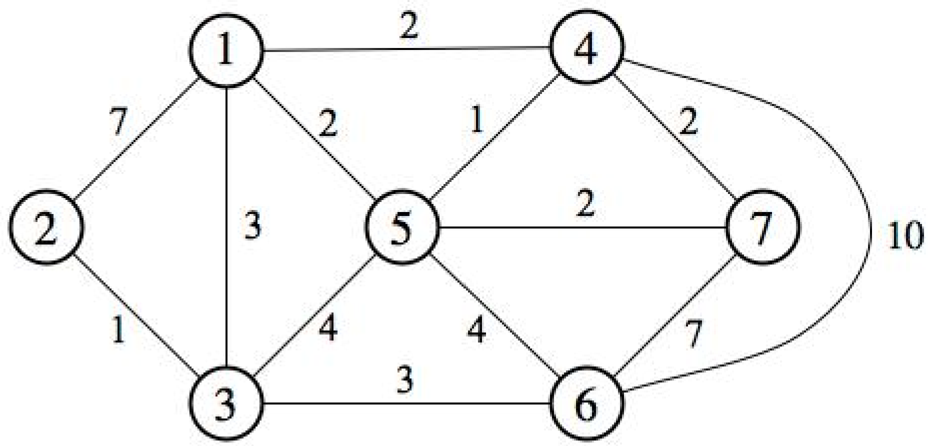


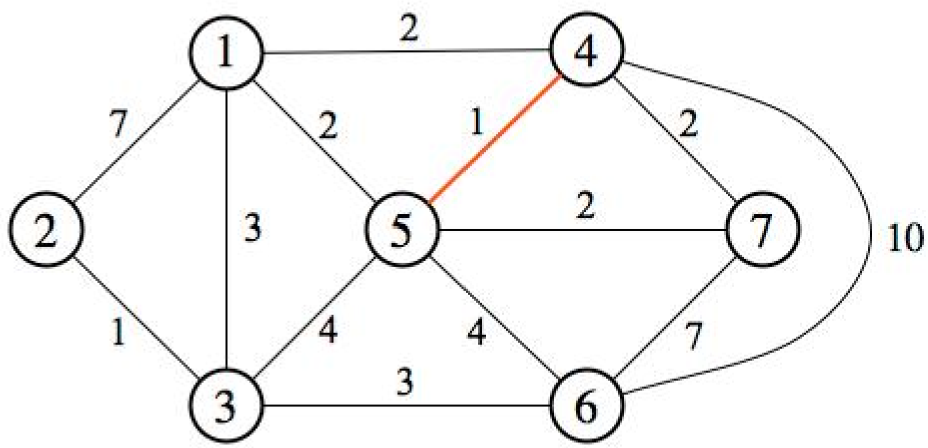
2ème recherche

Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Recherche d'un arbre couvrant de poids minimal

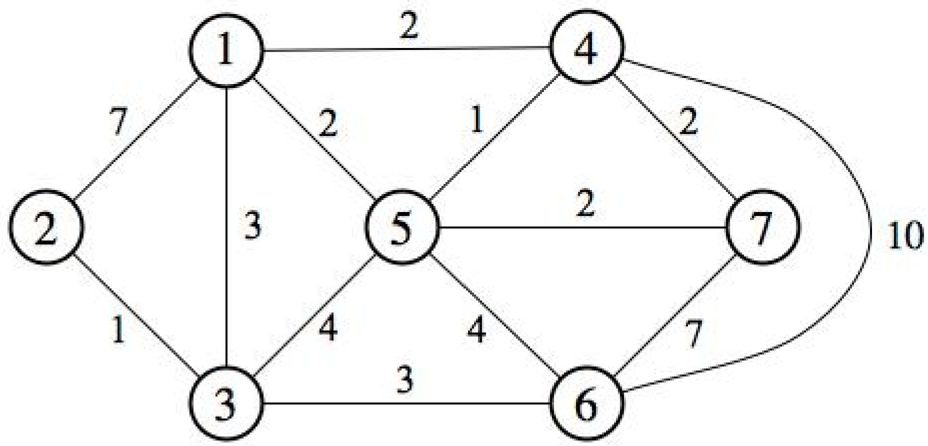


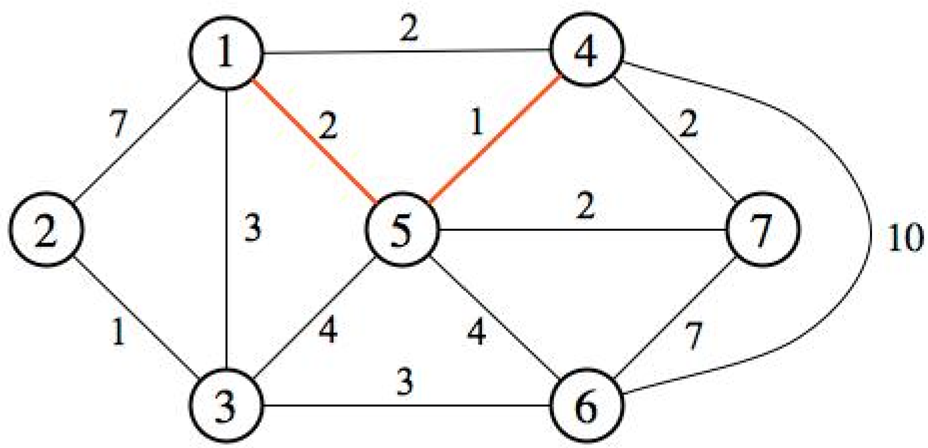


Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Recherche d'un arbre couvrant de poids minimal

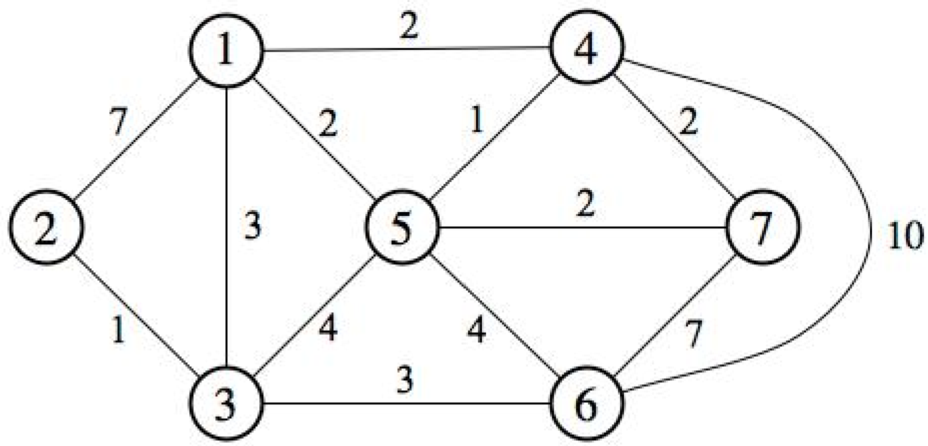


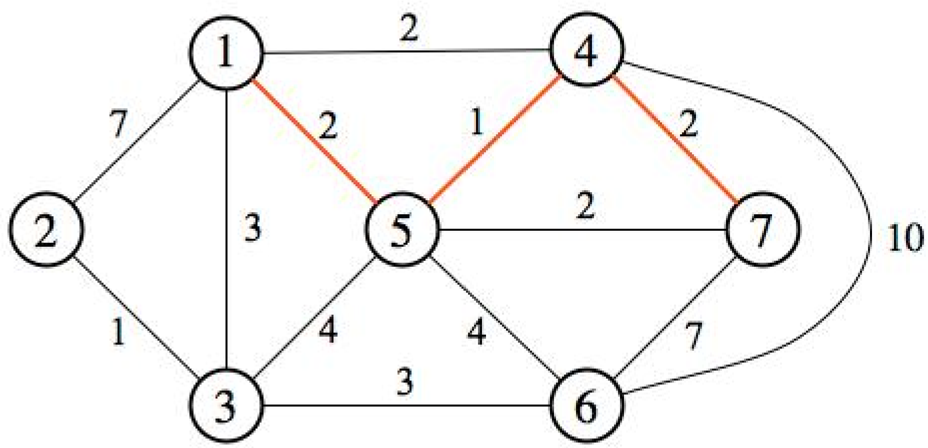


Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Recherche d'un arbre couvrant de poids minimal

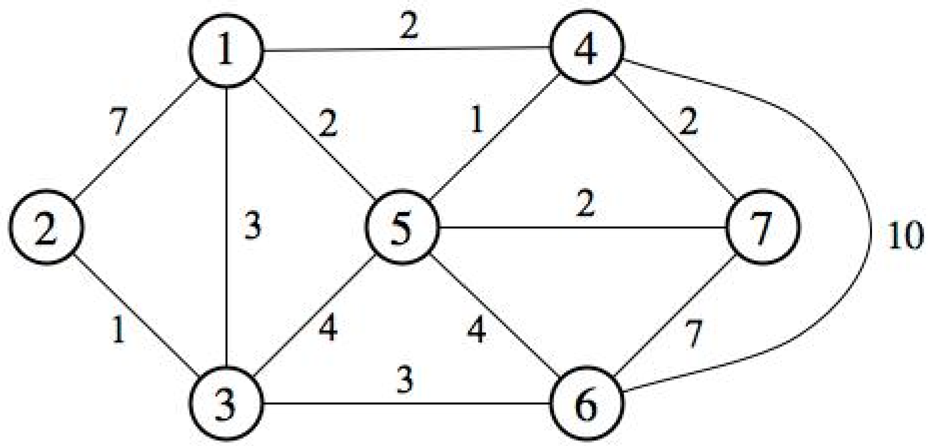


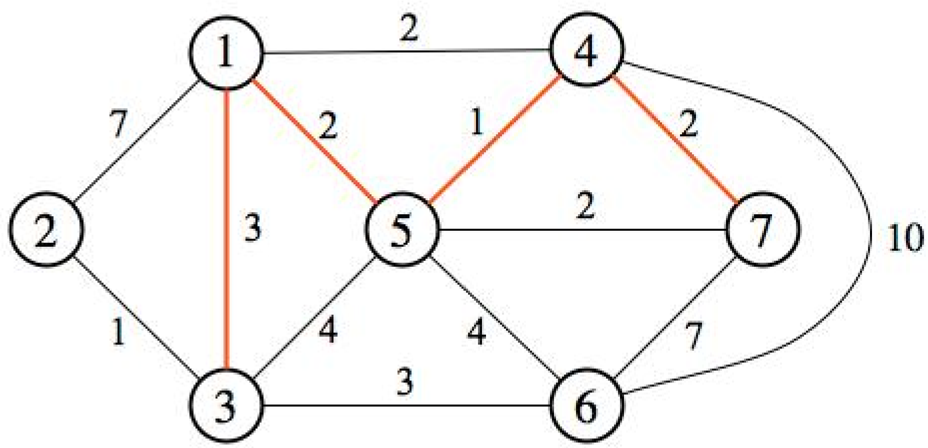


Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Recherche d'un arbre couvrant de poids minimal

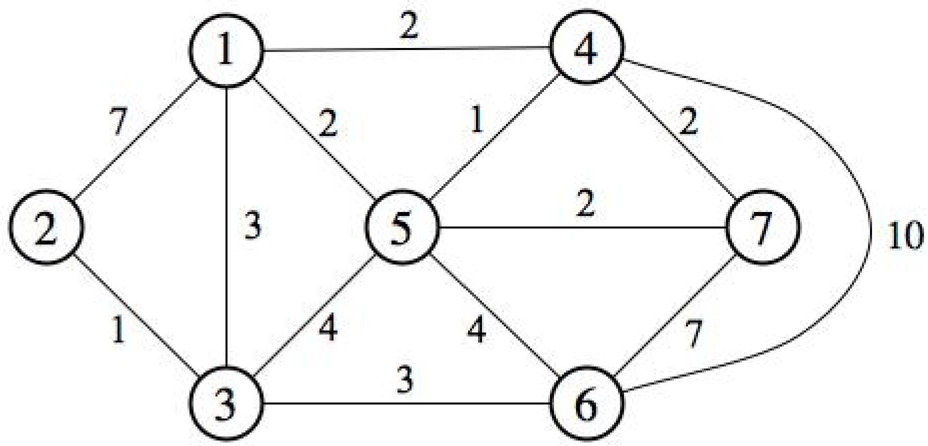


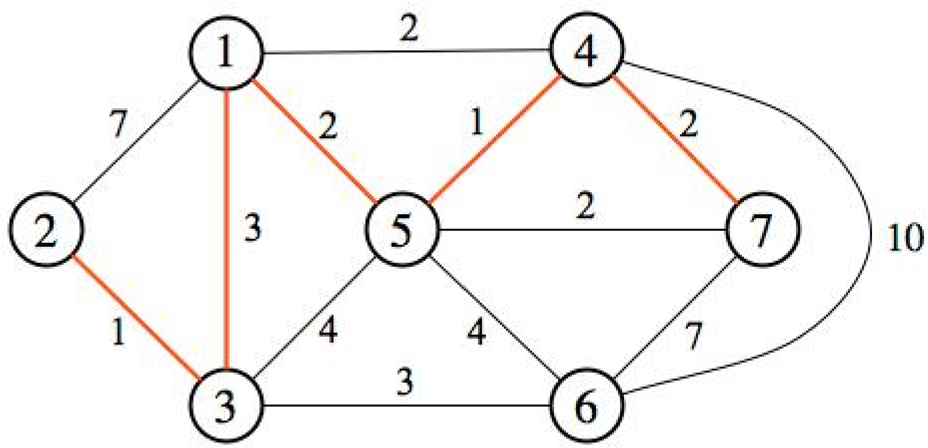


Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Recherche d'un arbre couvrant de poids minimal





Arbres et arborescences

Algorithme de Prim

Recherche d'un arbre couvrant de poids minimal