

Egalisation Par Maximum de Vraisemblance

C. Poulliat

17 novembre 2020

Plan

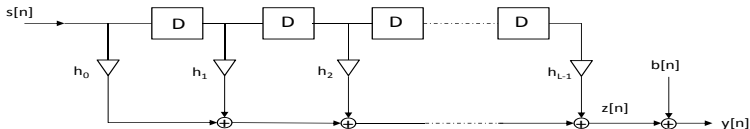
1 Structures d'égalisation non linéaire

Décodage par Maximum de Vraisemblance

Modèle discret équivalent bande de base

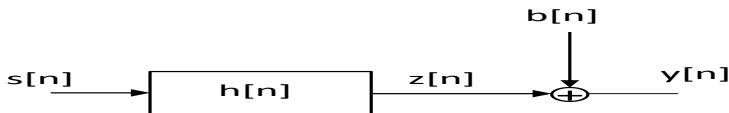
$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k h_{n-k} + b[n] \\
 &= \sum_{k=0}^{L_h-1} h[k] s[n-k] + b[n] \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= h_0 s[n] + \underbrace{\sum_{k=1}^{L_h-1} h[k] s[n-k]}_{IES} + b[n] \quad (2)
 \end{aligned}$$



Modèle discret bande de base

Modèle discret équivalent bande de base



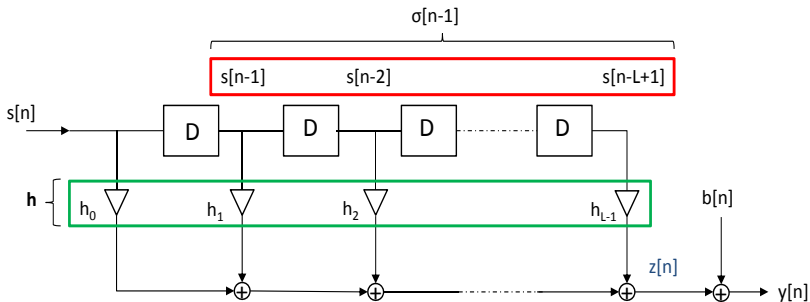
Décodage d'une Séquence par Maximum de Vraisemblance (MLSE)

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s}'} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}') \quad (3)$$

- $\mathbf{s} = [s_1 s_2 \dots s_N]$,
- $\mathbf{y} = [y_1 y_2 \dots y_N]$,
- $y[n] \sim \mathcal{N}(\sum_k h_k s_{n-k}, N_0)$

Modèle à états finis

Modèle convolutif et Représentation d'état



$$\begin{aligned}
 y[n] &= z[n] + b[n] \\
 &= \mathbf{h}^T \begin{bmatrix} s_n \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} + b[n]
 \end{aligned}$$

Modèle à états finis

Représentation en treillis

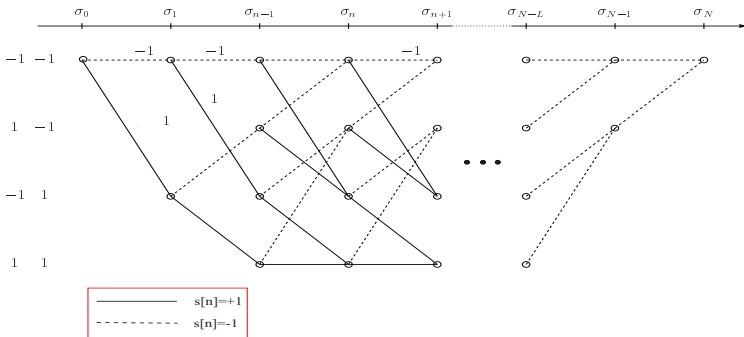
- Représentation fonctionnelle associée :
 - Equation d'évolution : passage d'un état à σ_{n-1} à σ_n .

$$\sigma_n = F_1(\sigma_{n-1}, s_n)$$

- Equation d'observation : génération des sorties observables

$$z_n = \sum_{k=0}^{L-1} h_k s_{n-k}.$$

$$z_n = F_2(\sigma_{n-1}, s_n) = F_3(\sigma_{n-1}, \sigma_n)$$



Décodage par Maximum de Vraisemblance

Critère de décodage MLSE

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}} &= \arg \max_{\mathbf{s}'} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}') \\ &= \arg \max_{\mathbf{s}'} \prod_n p(y_n|\mathbf{s}') \\ &= \arg \min_{\{\mathbf{s}_n\}} \sum_n |y_n - \sum_{k=0}^{L-1} h_k s_{n-k}|^2\end{aligned}$$

- $\mathbf{s} = [s_1 s_2 \dots s_N]$, $\mathbf{y} = [y_1 y_2 \dots y_N]$, $y[n] \sim \mathcal{N}(\sum_k h_k s_{n-k}, N_0)$,
- la séquence optimale est celle qui minimise la distance euclidienne la plus faible.
- utilisation de la structure markovienne du canal pour réaliser un décodage MLSE avec complexité raisonnable.

Décodage par Maximum de Vraisemblance

Représentation en treillis

propriétés

- Chaque chemin sur le treillis représente une séquence de symboles émis possibles :

séquence MLSE \Leftrightarrow chemin le plus probable, ie de plus petite distance euclidienne cumulée sur le treillis

- **Idée de Viterbi :** utiliser la structure du treillis pour énumérer et sélectionner “intelligemment” les candidats.
- Ceci est possible en remarquant que

$$\{s[n]|n = 1 \dots N\} \iff \{\sigma[n]|n = 0 \dots N\}$$

Espace des séquences

Espaces des Etats

Décodage par Maximum de Vraisemblance

Algorithme de Viterbi : MLSE revisité

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}} &= \arg \min_{\{\mathbf{s}_n\}} \sum_n |y_n - \sum_{k=0}^{L-1} h_k \mathbf{s}_{n-k}|^2 \\ &\quad \Updownarrow \\ \hat{\mathbf{s}} &= \arg \min_{\{\sigma_n\}} \sum_n |y_n - \mathbf{z}_n(\sigma_{n-1}, \sigma_n)|^2\end{aligned}$$

Décodage par Maximum de Vraisemblance

Algorithme de Viterbi

Algorithme de Viterbi

- Pour chaque section n ($n = 1 \cdots N$), pour chaque état $\sigma_n = s$ ($s = 0 \cdots |\mathcal{S}|$) :

- 1 calculer Λ_n tel que

$$\Lambda_n(\sigma_n) = \min_{\{\sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_n\}} \{\Lambda_{n-1}(\sigma_{n-1}) + \lambda_n(\sigma_{n-1}, \sigma_n)\}$$

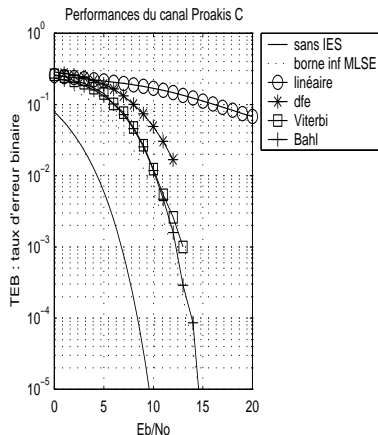
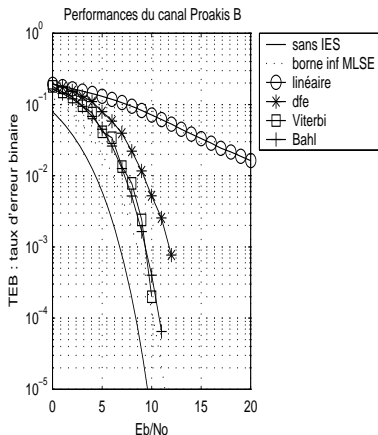
- 2 stocker l'état précédent σ_{n-1} : pour chaque état σ_n , on peut donc associer une séquence *survivante* $\{\sigma_0, \cdots, \sigma_n\}$ de distance euclidienne cumulée associée $\Lambda_n(\sigma_n)$

- A la fin du treillis, il ne reste plus que $|\mathcal{S}|$ chemins possibles, alors par parcours arrière des états du treillis

$$\hat{\mathbf{s}} = \left\{ \sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{N-1}, \sigma_N \mid \underset{\sigma_N}{\operatorname{argmin}} \{ \Lambda_N(\sigma_N) \} \right\}$$

Décodage par Maximum de Vraisemblance

Algorithme de Viterbi : performance



Bibliographie

- B. P. Lathi and Zhi Ding, Modern Digital and Analog Communication Systems, Oxford University Press, 2009.
- John Barry, Edward Lee, David Merserschnitt, Digital Communications, Kluwer Academic Publisher, Third edition.
- Andreas F. Molisch, Wireless Communications, 2nd Edition, IEEE Press-Wiley, 2010.
- Digital Communications, 4th edition, John G. Proakis, Mc Graw-Hill.
- J. Choi, Adaptive and Iterative Signal Processing in Communications, Cambridge University Press, 2006.
- Zhi Ding and Ye Li, Blind Equalization and Identification , Marcel Dekker, New York, 2001.