

概率论与数理统计复习纲要

---NonoTion

第一章 随机事件及其概率

一. 随机事件及其运算

事件间的关系和运算：

- 包含 $A \in B$
- 并 (和)
- 交
- 差 $A - B = A - AB$
- 互不相容 ($P(AB) = 0$)
- 对立 ($P(AB) = 0$), $A + B = \Omega$

运算律 P5

- 交换律
- 结合律
- 分配律
- 德摩根律

二. 古典概型和几何概型

古典概型：

$$P(A) = \frac{\text{事件} A \text{ 包含的事件数}}{\text{事件的总数}}$$

集合概型：

$$P(A) = \frac{A \text{ 的测度}}{\Omega \text{ 的测度}}$$

测度：面积，体积等

Ω ：全集

三. 概率的公理化定义及其性质

三条公理：

- 非负性
- 规范性

- 可列可加性

概率的性质

1. $P(\text{空集}) = 0$

2. 有限可加性

若事件 $A_1 \dots A_n$ 两两互不相容, 则

$$P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

3. 可减性

如果 $A \in B$ 则 $P(B - A) = P(B) - P(AB)$

4. 单调性

如果 $A \in B$ 则 $P(A) \leq P(B)$

5. $P(A \text{ 的补集}) = 1 - P(A)$

6. 加法公式

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

还有上连续性和下连续性, 感觉没啥用

四. 条件概率

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

性质:

- 非负性
- 规范性
- 可列可加性

乘法公式

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

事件的独立性

如果 A, B 独立

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

反之不一定

五.全概率公式和贝叶斯公式

全概率公式

设 A_1, \dots, A_n 是样本空间的一个分割, 又叫做完备事件组, 则B发生的概率

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)$$

贝叶斯公式

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)}$$

六.伯努利概型

在n重伯努利试验中, 事件A可能发生1,2...n次, 每次实验中发生概率为p, 求事件A恰好发生k次的概率

$$P_n(k) = C_n^k (1-p)^{n-k} p^k$$

第二章 随机变量及其分布

一. 随机变量与分布函数

分布函数:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

性质:

- 单调不减
- $F(+\infty)=1, F(-\infty)=0$
- 右连续

二.离散型随机变量及其分布

分布律:

$$P(X = x_k) = p_k (k = 1, 2, 3, \dots)$$

常见的离散型随机变量:

- 0-1分布
- 二项分布
- 几何分布
- 超几何分布
- 泊松分布 ($n > 10, p < 0.1$) 近似计算二项分布的概率

泊松定理:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} np = \lambda$$

三.连续型随机变量

概率密度函数:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

常见分布:

- 均匀分布
- 指数分布
- 正态分布

四.随机变量函数的分布

离散型:

列表求解

连续型:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

对上式求导就可以得到 $f_Y(y)$

公式法:

1. $y=g(x)$ 在区间(a.b)上严格单调
2. $x=g^{-1}(y)$ 具有连续导函数

则

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)|, \alpha \leq y \leq \beta$$

其他时候为 0

$$\alpha = \min(g(a), g(b))$$

$$\beta = \max(g(a), g(b))$$

第三章 多维随机变量及其分布

一.二维随机变量及其分布

二维随机变量的分布函数

$$F(X, Y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

性质:

- 单调非减
- $F(+\infty, +\infty)=1$, $F(+\infty, -\infty)=0$, $F(-\infty, +\infty)=0$, $F(-\infty, -\infty)=0$
- 关于x,y都是右连续的

二维离散型随机变量

(X,Y)的联合概率分布 简称概率分布或分布律

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$$

二维连续性随机变量

(X,Y)的联合概率密度函数

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv$$

几种特殊分布

- 均匀分布
- 二维正态分布

二.边缘分布

离散型:

关于X,Y的边缘概率函数

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i)$$

$$F_Y(y) = \sum_{y_i \leq y} p(Y = y_i)$$

关于X,Y的边缘概率分布

$$P(X = x_i) = \sum_j p_{ij} = p_{i\cdot}$$

$$P(X = x_j) = \sum_i p_{ij} = p_{\cdot j}$$

连续型:

边缘密度函数

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

三.条件分布

条件分布 = $\frac{\text{联合分布}}{\text{边缘分布}}$

掌握离散型即可，连续性不在期末考纲中

四.随机变量的独立性

二维随机变量(X,Y), 如果有

$$F(X, Y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称X,Y相互独立

- 离散型

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

- 连续性

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

五.二维随机变量函数的分布

离散型

列表求解即可

连续型:

总体思想感觉类似高中线性规划的思想，涉及到二重积分，具体分下面几种情况

- 和分布($Z=X+Y$)

卷积公式求解，建议看课本自己推导一遍，或许一通百通，剩下的几个也不用背了

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

- 商分布($Z=\frac{X}{Y}$)

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(yz)f_Y(y)|y|dy$$

- 最大最小分布 比较简单 看课本即可
-

第四章 随机变量的数字特征与极限定理

一.数学期望

随机变量的数学期望

- 离散型:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

- 连续性:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

随机变量函数的数学期望

设 $y=g(x)$ 是连续函数, Y 是随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$

那么

- 离散型 (级数收敛) :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k) p_k$$

- 连续型: (积分收敛)

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

数学期望的性质

1. C 为常量, $E(C)=C$
2. $E(CX)=CE(X)$
3. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
4. 若随机变量 X, Y 相互独立, $E(XY)=E(X)E(Y)$
5. $[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

二. 方差

方差的定义:

$$D(X) = E[X - E(X)]^2$$

可利用 一 中的随机变量函数的期望计算方法计算

也可用简化公式计算

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$\sqrt{D(X)}$ 叫做标准差

方差的性质:

1. $D(C)=0$
2. $D(CX)=C^2D(X)$
3. X, Y 为相互独立的随机变量, 则

$$D(x + -y) = D(x) + D(Y)$$

三.协方差和相关系数

设二位变量 (X,Y) ,它们的协方差为

$$Cov(X, Y) = E([X - EX][Y - EY])$$

相关系数为

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

含常用公式

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

计算 $Cov(X,Y)$

协方差与相关系数的性质

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
2. $Cov(a_1X + b_1, a_2X + b_2) = a_1b_1Cov(X, Y)$
3. $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$
4. $D(X + -Y) = D(X) + D(Y) + -2Cov(X, Y)$
5. $|\rho_{XY}| \leq 1$
6. $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是 $P(Y = aX + b) = 1$ (a, b 为常数, $a \neq 0$)

四.大数定律

1.切比雪夫不等式

设随机变量的数学期望和方差都存在则对于任意的 $\epsilon > 0$,有

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{DX}{\epsilon^2}$$

2.大数定律

- 切比雪夫大数定律 设随机变量 $X_1 \dots X_n$ 相互独立, 且具有相同的期望和方差, 则对于任意的 $\epsilon > 0$ 都有

$$P(|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu| < \epsilon) = 1$$

- 辛钦大数定律 设随机变量 $X_1 \dots X_n$ 独立同分布, 具有数学期望, 则对于任意的 $\epsilon > 0$ 都有

$$P(|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu| < \epsilon) = 1$$

- 伯努利大数定律, 设 k_n 是 n 此独立重复实验中事件 A 发生的次数, 而 p 是每次实验中 A 发生的概率, 则对于任意的 $\epsilon > 0$ 都有

$$P(|\frac{k_n}{n} - p| < \epsilon) = 1$$

五.中心极限定理

- 列维-林德伯格中心极限定理 (独立同分布的中心极限定理)

设 $X_1 \dots X_n$ 是具有相同分布且相互独立的一系列随机变量, 且 $EX=\mu, DX=\sigma^2$, 则对任意 x 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

- 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理 (二项分布中心极限定理)

设 $Y_n (n = 1, 2, 3 \dots)$ 服从二项分布, 则对于任意 x 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\frac{\sum_{k=1}^n Y_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

第五章 数理统计基本知识

一.总体与样本

简单随机样本: 具有独立性和代表性

了解样本和总体的关系即可

二.统计量和三大分布

统计量: 关于总体样本不含未知参数的实值函数

常用统计量:

- 样本均值
- 样本方差

- 样本标准差
- 样本k阶原点矩
- 样本k阶中心距

三大分布

- 卡方分布
- t分布
- F分布

了解图像和性质即可

上分位数（点）：设随机变量X的分布函数为F(x)，满足等式

$$P(X > x_\alpha) = 1 - F(x_\alpha) = \alpha$$

的实数 α 称为X的上 α 分位数（数）

三.正态总体的抽样分布

主要掌握单正态总体即可

那几条性质有点难打，在课本的P129

四.数据的整理

了解概念即可

第六章 参数估计和假设检验

一.参数的点估计

- 矩估计

用样本的k阶原点(中心)矩作为总体的k阶原点（中心）矩的估计

- 最大似然估计

总体X有独立同分布的样本 $X_1 \dots X_N$,求 θ 的值，使得事件 $\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$ 发生的概率最大，并以其作为参数 θ 的最大似然估计量

解决问题的步骤

1. 求最大似然函数 $L(\theta)$ 的表达式

离散型: $L(\theta) = P(X_1 = x_1 \dots X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$

连续性: $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$

2. 求最大似然函数的极值解

- 估计量优劣的评价标准

1. 无偏估计 估计量的期望=参数
2. 有效性 方差较小的估计量有效性更好
3. 相合性（一致性） 期末不考

二.参数的区间估计

概念:

- 置信区间
- 置信度

求置信区间

1. 找到一个与要估计参数 θ 有关的统计量 T ，一般是参数的良好估计
2. 设法找出 T 和 θ 之间的某一函数 H ， H 叫做**枢轴变量**
3. 寻找适当的常数 c, d 使得

$$P(c \leq H(T, \theta) \leq d) = 1 - \alpha$$

4. 将 3 中的不等式化为关于 θ 的不等式，不等式的两端便是参数的置信上线和置信下限

附：单个正态总体的区间估计表

它置信区间问题，也可讨论两个正态总体均值差、方差比的置信区间问题。它们用到的枢轴变量 $H(T, \theta)$ 分别见定理 5.3.1 和定理 5.3.2，列表如表 6.2.1、表 6.2.2。

表 6.2.1 单个正态总体的参数区间估计表 (置信水平为 $1-\alpha$)

待估参数	条件	枢轴变量及其分布	置信区间
均值 μ	方差 σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$\left[\bar{X} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
	方差 σ^2 未知	$\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$
方差 σ^2	均值 μ 已知	$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$	$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)} \right]$
	均值 μ 未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \right]$

表 6.2.2 两个正态总体均值差、方差比的区间估计表 (置信水平为 $1-\alpha$)

置信区间

三.假设性检验

假设性检验的基本原理和步骤

1. 建立假设, H_0 原假设, H_1 备择假设

假设检验的目的就是在二者中选择其一

2. 选取检验统计量

求 H_0 成立时检验统计量的分布, 并与 H_1 成立时统计量的分布进行比较, 从而得到对 H_0 不利的

3. 选取检验的显著性水平 α 与临界值, 进而求出拒绝域

4. 作判断

原假设与备择假设的选取原则

通常, 将研究者要证明的结论作为备择假设 H_1

把研究者要反对的假设、现状和不能轻易否定的假设作为原假设 H_0

假设性检验的两类错误

1. H_0 成立拒绝 H_0

2. H_1 成立接受 H_0

H_0, H_1 给定后, α 越小, u_α 越大, 放第二类错误的概率越大

单个正态总体的假设性检验

表 6.4.1 单正态总体的假设检验表 (显著性水平为 α)

条件	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\sigma^2 = \sigma_0^2$ 已知	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$	$ U > u_{\alpha/2}$
	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$U > u_\alpha$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$U < -u_\alpha$
σ^2 未知	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$ T > t_{\alpha/2}(n-1)$
	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$T > t_\alpha(n-1)$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$T < -t_\alpha(n-1)$
$\mu = \mu_0$ 已知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$	$\chi^2 > \chi_{\alpha/2}^2(n)$
	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		或 $\chi^2 < \chi_{1-\alpha/2}^2(n)$
	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)$
μ 未知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 > \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$
	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		或 $\chi^2 < \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 > \chi_\alpha^2(n-1)$

注:双正态总体的区间估计和假设性检验在期末考中都不做要求