Quand peu de choses font la différence

Projet de recherche en Mathématiques

Latere Joshua, Meessen Jules, Vanthournhout Matthias, Schnackers Victor, Zech Noé

20 novembre 2025

Sur une règle graduée standard d'une longueur de $\ell \geq 1$ unités, il y a $\ell + 1$ graduations placées à intervalles réguliers de 1 unité. Pour mesurer un objet de longueur entière, on place habituellement la règle de sorte à ce qu'une extrémité de l'objet se trouve sur la graduation 0. La graduation se trouvant à l'autre extrémité de l'objet indique alors sa longueur.

Cela étant dit, il est possible de mesurer certains objets de plusieurs manières différentes. Par exemple, si $\ell = 5$, il est possible de mesurer une longueur de 2 de 4 manières possibles, en considérant les écarts respectifs entre les graduations 0 et 2, 1 et 3, 4 et 2, ou encore 5 et 3. Le point commun est que la différence entre les graduations est toujours égale à 2, c'est-à-dire :

$$2 - 0 = 3 - 1 = 4 - 2 = 5 - 3 = 2.$$

Si l'on efface certaines graduations, il est parfois encore possible de mesurer les mêmes longueurs qu'auparavant. Par exemple, si $\ell = 7$, nous avons 8 graduations. Il est possible, par exemple, de garder seulement les graduations 0, 1, 2, 4 et 7.

Le problème général est le suivant : en fonction de ℓ, quel est le nombre minimal $m(\ell)$ de graduations qui permet de mesurer toutes les longueurs inférieures ou égales à ℓ ? C'est une question difficile, et pour laquelle une réponse générale est peut-être hors de portée. Néanmoins, on pourra envisager les questions suivantes, qui feront progresser notre compréhension du problème :

(i) On peut commencer par étudier en détail des exemples avec des petites valeurs de ℓ, par exemple toutes les valeurs $1 \leq \ell \leq 10$.

(ii) On peut imaginer une méthode de construction générale d'une règle de longueur ℓ, qui n'atteint peut-être pas la configuration optimale, mais qui semblerait déjà assez bonne. Par exemple, on peut essayer d'imaginer une méthode de construction qui permet de toujours enlever au moins la moitié des graduations.

(iii) On peut aussi réfléchir à un encadrement de $m(\ell)$, pour estimer à quel point ce nombre peut-être grand ou petit. Par exemple, il est clair que $m(\ell) \leq \ell + 1$.

(iv) On peut poser exactement les mêmes questions dans une variante circulaire, où il est question de mesurer des longueurs d'arc sur un cercle divisé en ℓ arcs de même longueur. Quels liens peut-on établir entre les versions rectiligne et circulaire du problème ?

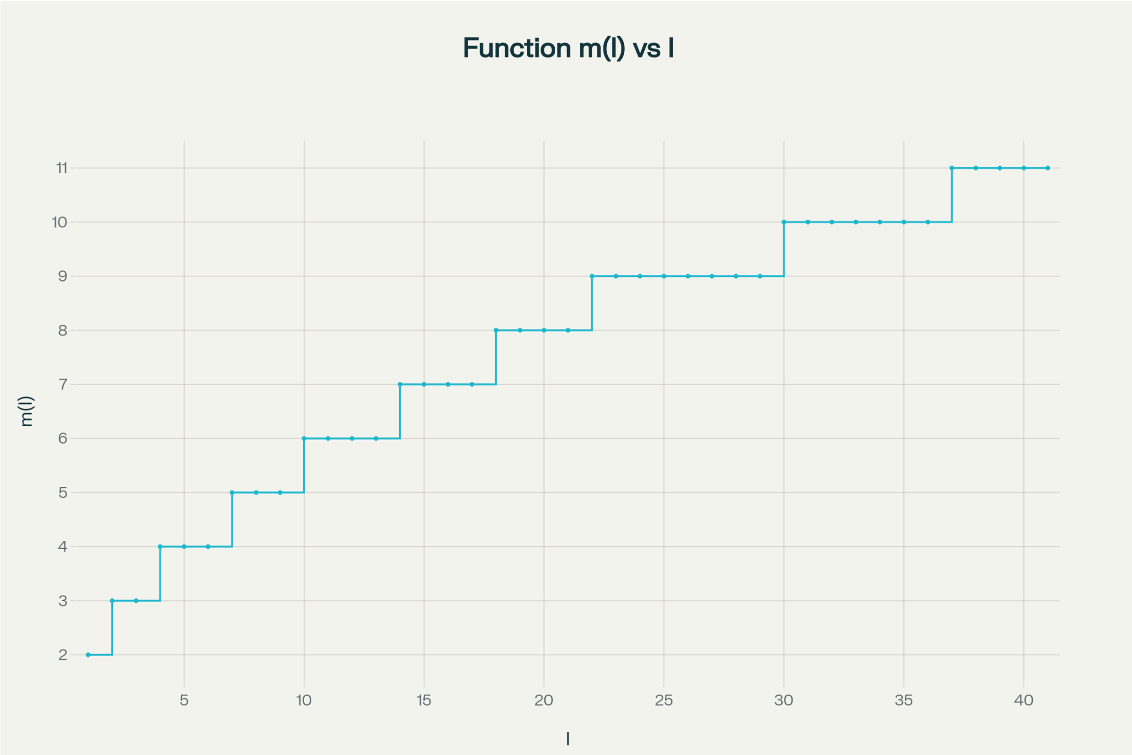
(v) On peut se demander à partir de quand il n'existe pas de solution "parfaite", c'est à dire une configuration où chaque longueur de 1 à ℓ est mesurable d'une seule manière.

Le problème consiste donc à déterminer le nombre $m(\ell)$ minimal de graduations nécessaires pour mesurer toute longueur entière de 1 à ℓ avec une règle de longueur ℓ.

(i) Déterminer les solutions pour $\ell \leq 41$.

$m(1) = 2$: Nous avons besoin de 2 graduations à 0 et 1.
$m(2) = 3$: Nous avons besoin de 3 graduations à 0, 1 et 2.
$m(3) = 3$: Nous avons besoin de 3 graduations à 0, 1 et 3.
$m(4) = 4$: Nous avons besoin de 4 graduations à 0, 1, 2 et 4.
$m(5) = 4$: Nous avons besoin de 4 graduations à 0, 1, 2 et 5.
$m(6) = 4$: Nous avons besoin de 4 graduations à 0, 1, 4 et 6.
$m(7) = 5$: Nous avons besoin de 5 graduations à 0, 1, 2, 3 et 7.
$m(8) = 5$: Nous avons besoin de 5 graduations à 0, 1, 2, 5 et 8.
$m(9) = 5$: Nous avons besoin de 5 graduations à 0, 1, 2, 6 et 9.
$m(10) = 6$: Nous avons besoin de 6 graduations à 0, 1, 2, 3, 6 et 10.
$m(11) = 6$: Nous avons besoin de 6 graduations à 0, 1, 2, 3, 7 et 11.
$m(12) = 6$: Nous avons besoin de 6 graduations à 0, 1, 2, 3, 8 et 12.
$m(13) = 6$: Nous avons besoin de 6 graduations à 0, 1, 2, 6, 10 et 13.
$m(14) = 7$: Nous avons besoin de 7 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 9 et 14.
$m(15) = 7$: Nous avons besoin de 7 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 10 et 15.
$m(16) = 7$: Nous avons besoin de 7 graduations à 0, 1, 2, 3, 8, 12 et 16.
$m(17) = 7$: Nous avons besoin de 7 graduations à 0, 1, 2, 3, 8, 13 et 17.
$m(18) = 8$: Nous avons besoin de 8 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12 et 18.
$m(19) = 8$: Nous avons besoin de 8 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 9, 14 et 19.
$m(20) = 8$: Nous avons besoin de 8 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 10, 15 et 20.
$m(21) = 8$: Nous avons besoin de 8 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 10, 16 et 21.
$m(22) = 9$: Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 16 et 22.
$m(23) = 9$: Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 11, 17 et 23.
$m(24) = 9$: Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 18 et 24.
$m(25) = 9$: Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 19 et 25.
$m(26) = 9$: Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 10, 15, 21 et 26.
$m(27) = 9$: Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 10, 16, 22 et 27.
$m(28) = 9$: Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 9, 10, 21, 22, 24, 26 et 28.
$m(29) = 9$: Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 14, 18, 21, 24, 27 et 29.
$m(30) = 10$: Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 17, 24 et 30.
$m(31) = 10$: Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 18, 25 et 31.
$m(32) = 10$: Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 19, 26 et 32.
$m(33) = 10$: Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 13, 19, 26 et 33.
$m(34) = 10$: Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 2, 3, 15, 20, 24, 28, 31 et 34.
$m(35) = 10$: Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 4, 5, 16, 18, 25, 27, 33 et 35.
$m(36) = 10$: Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 3, 6, 13, 20, 27, 31, 35 et 36.
$m(37) = 11$: Nous avons besoin de 11 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 14, 22, 29 et 37 ou à 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 23, 24, 36 et 37.
$m(38) = 11$: Nous avons besoin de 11 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 15, 22, 30 et 38 ou à 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 24, 25, 37 et 38.
$m(39) = 11$: Nous avons besoin de 11 graduations à 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 25, 26, 38 et 39.
$m(40) = 11$: Nous avons besoin de 11 graduations à 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 26, 27, 39 et 40.
$m(41) = 11$: Nous avons besoin de 11 graduations à 0, 2, 4, 6, 7, 18, 21, 31, 32, 40 et 41.

Graphique des valeurs de $m(\ell)$ pour $\ell \leq 41$:



(ii) Trouver une méthode de construction qui se rapproche de $m(\ell)$.

Pour approcher la valeur de $m(\ell)$, nous pouvons utiliser la méthode utilisée dans le point (ii). Elle consiste à utiliser pour un $1 \leq n \leq \ell$ fixé :

— Les n premières graduations : $0, 1, 2, \ldots, n-1 \implies n$ graduations ;
— Tous les multiples suivants de n soustrait de 1 : $2n-1, 3n-1, \ldots$, jusqu'à la plus grande valeur inférieure à $\ell \implies \left\lfloor \frac{\ell}{n} \right\rfloor - 1$ graduations ;
— Le nombre ℓ lui-même $\implies$ 1 graduation.

Ainsi, le nombre total de graduations utilisées pour un n fixé est :

$$k = n + \left\lfloor \frac{\ell}{n} \right\rfloor - 1 + 1 = n + \left\lfloor \frac{\ell}{n} \right\rfloor .$$

Après certains essais, nous remarquons que la valeur de k est minimisée lorsque n est proche de $\sqrt{\ell}$. En effet, en posant $n = \lceil \sqrt{\ell} \rceil$, nous obtenons :

$$k = \lceil \sqrt{\ell} \rceil + \left\lfloor \frac{\ell}{\lceil \sqrt{\ell} \rceil} \right\rfloor \approx 2\sqrt{\ell}.$$

(iii) Trouver des bornes pour $m(\ell)$.

1. **Borne inférieure :** $m(\ell) \geq \frac{1+\sqrt{8\ell+1}}{2}$.

   — **Démonstration :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de paires (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$ est donné par $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Si le nombre de graduations est $m(\ell)$, alors le nombre de différences distinctes que l'on peut obtenir est au plus $\binom{m(\ell)}{2}$. Pour mesurer toutes les longueurs de 1 à ℓ, il faut donc que :

   $$\binom{m(\ell)}{2} \geq \ell$$

   Cela conduit à l'inégalité quadratique :

   $$\frac{m(m-1)}{2} \geq \ell \iff m^2 - m - 2\ell \geq 0$$

   En résolvant cette inégalité, on obtient :

   $$m(\ell) \geq \frac{1+\sqrt{1+8\ell}}{2}$$

   Ceci établit la borne inférieure.

2. **Borne supérieure :** $m(\ell) \leq 2\sqrt{\ell} + 1$.

   — **Démonstration :** Considérons une règle avec des graduations placées aux positions $0, 1, 2, \ldots, n-1$ et aux positions $2n-1, 3n-1, \ldots, kn-1, \ell$ où $k = \lfloor \frac{\ell}{n} \rfloor$. Le nombre total de graduations est donc $n+k-1+1 = n+k = n+\lfloor \frac{\ell}{n} \rfloor$. Pour mesurer toutes les longueurs de 1 à ℓ, il suffit de choisir n tel que $n \approx \sqrt{\ell}$. En effet, en choisissant $n = \lceil \sqrt{\ell} \rceil$, on a :

   $$m(\ell) \leq n + \lfloor \frac{\ell}{n} \rfloor \leq \lceil \sqrt{\ell} \rceil + \lfloor \frac{\ell}{\lceil \sqrt{\ell} \rceil} \rfloor \leq \lceil \sqrt{\ell} \rceil + \lfloor \sqrt{\ell} \rfloor \leq 2\lfloor \sqrt{\ell} \rfloor + 1$$

   Ceci établit la borne supérieure.

Nous avons donc montré que :

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sqrt{1+8\ell}}{2} &\leq m(\ell) \leq 2\lfloor \sqrt{\ell} \rfloor + 1 \\
\implies \frac{1+\sqrt{8\ell}}{2} &\leq m(\ell) \leq 2\lfloor \sqrt{\ell} \rfloor + 1 \\
\implies \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2\ell}}{2} &\leq m(\ell) \leq 2\lfloor \sqrt{\ell} \rfloor + 1 \\
\implies \frac{1}{2} + \sqrt{2\ell} &\leq m(\ell) \leq 2\lfloor \sqrt{\ell} \rfloor + 1 \\
\implies \sqrt{2\ell} &\leq m(\ell) \leq 2\sqrt{\ell} + 1
\end{aligned}$$

(iv) Déterminer les liens entre les versions rectiligne et circulaire du problème.

Considérons une règle circulaire de longueur l avec $m(l)$ graduations permettant de mesurer toutes les longueurs entières de 1 à l. La solution peut donc comprendre moins de graduations puisqu'une distance entre 2 graduations peut être mesurée dans les 2 sens (sens horaire et antihoraire). Il faut donc seulement pouvoir mesurer des distances entre 1 et $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$. Ainsi, si l'on note $m_c(l)$ le nombre minimal de graduations pour une règle circulaire de longueur l, on a la relation suivante :

$$m_c(l) \leq m(\lfloor l/2 \rfloor) \leq 2\sqrt{\lfloor l/2 \rfloor} \leq \sqrt{2l}.$$

(v) Déterminer à partir de quel ℓ qu'il n'existe pas de solution parfaite. Une solution parfaite est une configuration de graduations telle que chaque longueur de 1 à ℓ soit mesurable d'une seule manière.

Pour simplifier l'analyse, nous allons définir n comme le nombre de graduations utilisées.

Une solution est parfaite si et seulement si $\ell = \binom{n}{2}$. Nous pouvons réécrire la règle en fonction de la distance entre les graduations adjacentes. Soit d_i la distance entre la graduation i et la graduation $i+1$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ansi, la somme de toutes ces distances vaut ℓ.

Sous cette forme, pour qu'une solution parfaite existe, il est nécéssaire que chaque somme de sous-tableaux contigus des distances d_i soit unique (condition d'unicité) et couvre toutes les longueurs de 1 à ℓ. C'est à dire, pour tout entier $k \in [1, \ell]$, il existe un unique couple (i, j) tel que $k = d_i + \ldots + d_j$.

Cette ... nous permet d'utiliser des sommes et non des différences.

Une solution parfaite exige que tous les d_i soient des naturels distincts non nuls. La plus petite somme de $n-1$ naturels distincts non nuls vaut $1+2+\ldots+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2} = \binom{n}{2} = \ell$.

Ansi, le tableau d est une permutation de $[1, 2, \ldots, n-1]$ telle que toutes les sommes de sous-tableaux contigus soient différentes.

Depuis cela, prouvons qu'aucune solution parfaite n'existe pour $n \geq 5$. En effet, la distance de valeur 1 ne peut pas être adjacente qu'à une distance de valeur $n-1$ car la somme de ces deux distances doit être strictement supérieure à $n-1$ pour respecter la condition d'unicité. Nous aurons donc forcément $d_1 = 1$ ou $d_{n-1} = 1$ pour n'avoir qu'un adjacent. Supposons que $d_1 = 1$ pour plus de facilité. Il faut alors que $d_2 = n-1$. On doit ensuite placer la valeur 2, qui ne peut être qu'à côté de la valeur $n-1$ car la somme avec son adjacent doit être strictement supérieure à n. Nous devons donc avoir $d_3 = 2$. Mais il n'y plus a aucune valeur à placer à l'emplacement d_4 car tous les nombres restants formeraient une somme d'au plus n, ce qui crérait des sommes doublons. Par conséquent, aucune solution parfaite n'existe pour $n \geq 5$.

Ainsi, la plus grande valeur de ℓ pour laquelle une solution parfaite existe est obtenue pour $n = 4$.