Quand peu de choses font la différence

Projet de recherche en Mathématiques

Latere Joshua, Meessen Jules, Vanthournhout Matthias, Schnackers Victor, Zech Noé

21 janvier 2026

Sur une règle graduée standard d'une longueur de $\ell \geq 1$ unités, il y a $\ell + 1$ graduations placées à intervalles réguliers de 1 unité. Pour mesurer un objet de longueur entière, on place habituellement la règle de sorte à ce qu'une extrémité de l'objet se trouve sur la graduation 0. La graduation se trouvant à l'autre extrémité de l'objet indique alors sa longueur.

Cela étant dit, il est possible de mesurer certains objets de plusieurs manières différentes. Par exemple, si $\ell = 5$, il est possible de mesurer une longueur de 2 de 4 manières possibles, en considérant les écarts respectifs entre les graduations 0 et 2, 1 et 3, 4 et 2, ou encore 5 et 3. Le point commun est que la différence entre les graduations est toujours égale à 2, c'est-à-dire :

$$2 - 0 = 3 - 1 = 4 - 2 = 5 - 3 = 2.$$

Si l'on efface certaines graduations, il est parfois encore possible de mesurer les mêmes longueurs qu'auparavant. Par exemple, si $\ell = 7$, nous avons 8 graduations. Il est possible, par exemple, de garder seulement les graduations 0, 1, 2, 4 et 7.

Le problème général est le suivant : en fonction de ℓ, quel est le nombre minimal $m(\ell)$ de graduations qui permet de mesurer toutes les longueurs inférieures ou égales à ℓ ? C'est une question difficile, et pour laquelle une réponse générale est peut-être hors de portée. Néanmoins, on pourra envisager les questions suivantes, qui feront progresser notre compréhension du problème :

(i) On peut commencer par étudier en détail des exemples avec des petites valeurs de ℓ, par exemple toutes les valeurs $1 \leq \ell \leq 10$.

(ii) On peut imaginer une méthode de construction générale d'une règle de longueur ℓ, qui n'atteint peut-être pas la configuration optimale, mais qui semblerait déjà assez bonne. Par exemple, on peut essayer d'imaginer une méthode de construction qui permet de toujours enlever au moins la moitié des graduations.

(iii) On peut aussi réfléchir à un encadrement de $m(\ell)$, pour estimer à quel point ce nombre peut-être grand ou petit. Par exemple, il est clair que $m(\ell) \leq \ell + 1$.

(iv) On peut se demander s'il existe des solutions "parfaites", c'est à dire des configurations où chaque longueur de 1 à ℓ est mesurable d'une seule manière.

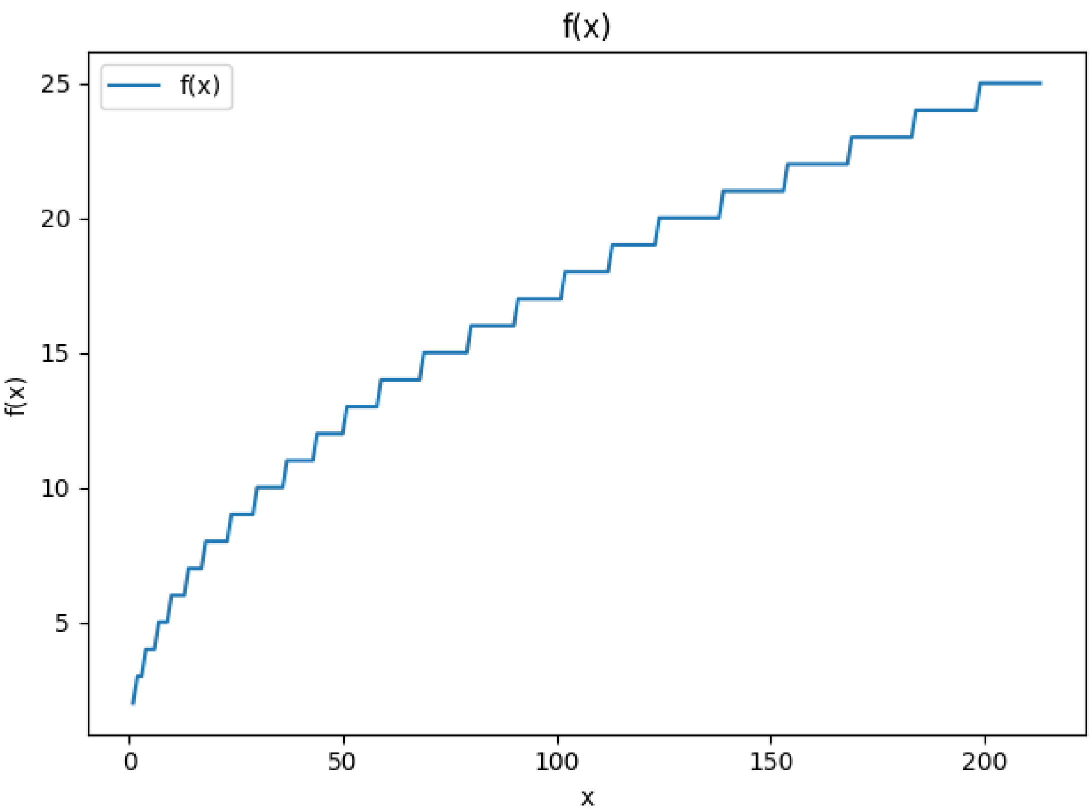
(v) On peut poser exactement les mêmes questions dans une variante circulaire, où il est question de mesurer des longueurs d'arc sur un cercle divisé en ℓ arcs de même longueur. Quels liens peut-on établir entre les versions rectiligne et circulaire du problème ?

Le problème consiste donc à déterminer le nombre $m(\ell)$ minimal de graduations nécessaires pour mesurer toute longueur entière de 1 à ℓ avec une règle de longueur ℓ.

(i) Déterminer les solutions pour $\ell \leq 213$.

Voici quelques exemples de solutions pour ℓ allant de 1 à 10 :
$m(1) = 2$: Nous avons besoin de 2 graduations à 0 et 1.
$m(2) = 3$: Nous avons besoin de 3 graduations à 0, 1 et 2.
$m(3) = 3$: Nous avons besoin de 3 graduations à 0, 1 et 3.
$m(4) = 4$: Nous avons besoin de 4 graduations à 0, 1, 2 et 4.
$m(5) = 4$: Nous avons besoin de 4 graduations à 0, 1, 2 et 5.
$m(6) = 4$: Nous avons besoin de 4 graduations à 0, 1, 4 et 6.
$m(7) = 5$: Nous avons besoin de 5 graduations à 0, 1, 2, 3 et 7.
$m(8) = 5$: Nous avons besoin de 5 graduations à 0, 1, 2, 5 et 8.
$m(9) = 5$: Nous avons besoin de 5 graduations à 0, 1, 2, 6 et 9.
$m(10) = 6$: Nous avons besoin de 6 graduations à 0, 1, 2, 3, 6 et 10.

Graphique des valeurs de $m(\ell)$ pour $\ell \leq 231$:



On peut déjà que la fonction $m(\ell)$ évolue proportionnellement à $\sqrt{\ell}$.

(ii) Trouver une méthode de construction qui se rapproche de $m(\ell)$.

Pour approcher la valeur de $m(\ell)$, nous pouvons utiliser la méthode utilisée dans le point (ii). Elle consiste à utiliser pour un $1 \leq n \leq \ell$ fixé :

— Les n premières graduations : $0, 1, 2, \ldots, n-1 \implies n$ graduations ;

— Tous les multiples suivants de n soustrait de 1 : $2n-1, 3n-1, \ldots$, jusqu'à la plus grande valeur inférieure à $\ell \implies \left\lfloor \frac{\ell}{n} \right\rfloor - 1$ graduations ;

— Le nombre ℓ lui-même $\implies$ 1 graduation.

Ainsi, le nombre total de graduations utilisées pour un n fixé est :

$$k = n + \left\lfloor \frac{\ell}{n} \right\rfloor - 1 + 1 = n + \left\lfloor \frac{\ell}{n} \right\rfloor .$$

Après certains essais, nous remarquons que la valeur de k est minimisée lorsque n est proche de $\sqrt{\ell}$. En effet, en posant $n = \lceil \sqrt{\ell} \rceil$, nous obtenons :

$$k = \lceil \sqrt{\ell} \rceil + \left\lfloor \frac{\ell}{\lceil \sqrt{\ell} \rceil} \right\rfloor \approx 2\sqrt{\ell}.$$

(iii) Trouver des bornes pour $m(\ell)$.

1. **Borne inférieure :** $m(\ell) \geq \frac{1+\sqrt{8\ell+1}}{2}$.

   — **Démonstration :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de paires (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$ est donné par $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Si le nombre de graduations est $m(\ell)$, alors le nombre de différences distinctes que l'on peut obtenir est au plus $\binom{m(\ell)}{2}$. Pour mesurer toutes les longueurs de 1 à ℓ, il faut donc que :

   $$\binom{m(\ell)}{2} \geq \ell$$

   Cela conduit à l'inégalité quadratique :

   $$\frac{m(m-1)}{2} \geq \ell \iff m^2 - m - 2\ell \geq 0$$

   En résolvant cette inégalité, on obtient :

   $$m(\ell) \geq \left\lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 8\ell}}{2} \right\rceil$$

   Ceci établit la borne inférieure.

2. **Borne supérieure :** $m(\ell) \leq 2\sqrt{\ell} + 1$.

   — **Démonstration :** Considérons une règle avec des graduations placées aux positions $0, 1, 2, \ldots, n-1$ et aux positions $2n-1, 3n-1, \ldots, kn-1, \ell$ où $k = \lfloor \frac{\ell}{n} \rfloor$. Le nombre total de graduations est donc $n + k - 1 + 1 = n + k = n + \lfloor \frac{\ell}{n} \rfloor$. Pour mesurer toutes les longueurs de 1 à ℓ, il suffit de choisir n tel que $n \approx \sqrt{\ell}$. En effet, en choisissant $n = \left\lceil \sqrt{\ell} \right\rceil$, on a :

   $$m(\ell) \leq n + \left\lfloor \frac{\ell}{n} \right\rfloor \leq \left\lceil \sqrt{\ell} \right\rceil + \left\lfloor \frac{\ell}{\left\lceil \sqrt{\ell} \right\rceil} \right\rfloor \leq \left\lceil \sqrt{\ell} \right\rceil + \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor \leq 2 \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor + 1$$

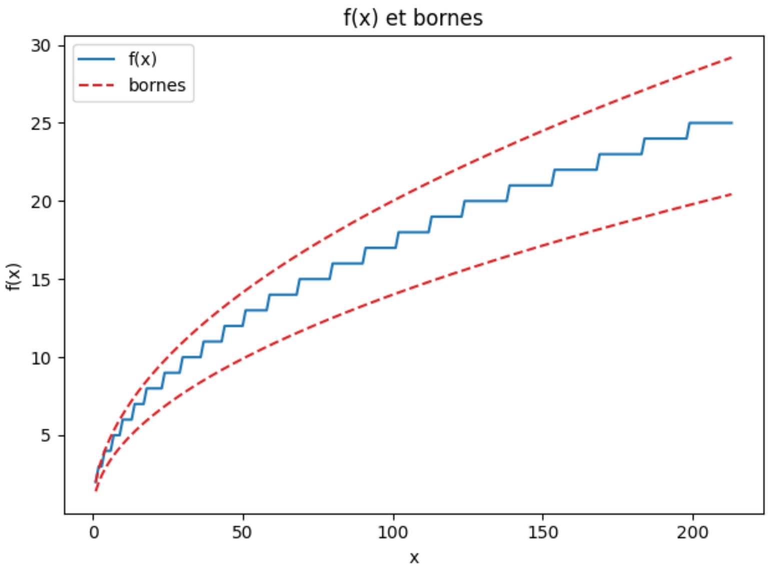
   Ceci établit la borne supérieure.

Nous avons donc montré que :

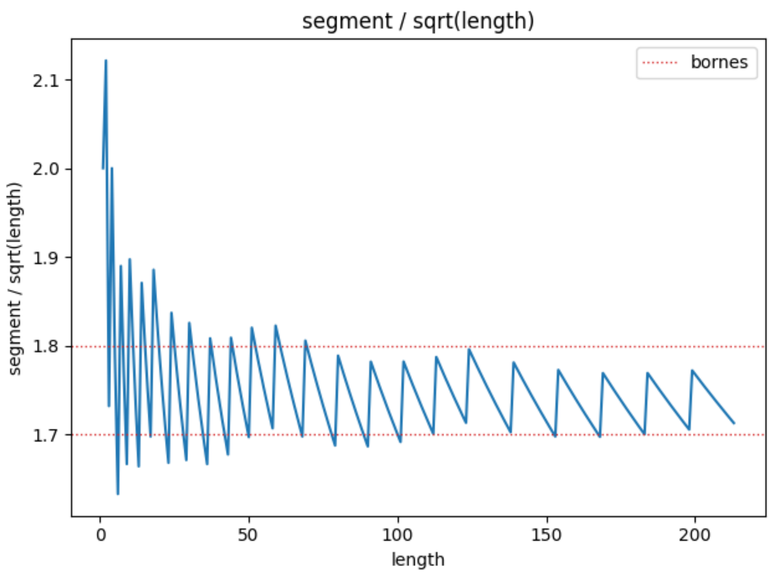
$$\begin{aligned}
\frac{1 + \sqrt{1 + 8\ell}}{2} &\leq m(\ell) \leq 2 \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor + 1 \\
\implies \frac{1 + \sqrt{8\ell}}{2} &\leq m(\ell) \leq 2 \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor + 1 \\
\implies \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2\ell}}{2} &\leq m(\ell) \leq 2 \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor + 1 \\
\implies \frac{1}{2} + \sqrt{2\ell} &\leq m(\ell) \leq 2 \left\lfloor \sqrt{\ell} \right\rfloor + 1 \\
\implies \sqrt{2\ell} &\leq m(\ell) \leq 2\sqrt{\ell} + 1
\end{aligned}$$

(iiib) Trouver une approximation de la solution optimale par une méthode d'optimisation numérique.

Tout d'abord, nous pouvons placer nos valeurs connues sur un graphique :



Nous avons émis l'hypothèse que la fonction $f(x)$ valait approximativement $k\sqrt{x}$ pour une certaine constante k. Nous pouvons donc construire ce graphique des valeurs de $\frac{f(x)}{\sqrt{x}}$:



Toutes les valeurs sont effectivement entre $\sqrt{2} \approx 1.414$ et 2, ce qui confirme nos bornes. Cependant, nous pouvons remarquer que les valeurs semblent converger vers une valeur entre 1.7 et 1.8 lorsque x devient grand.

Même avec l'aide de toutes ces approximations, il est difficile de prouver rigoureusement une quelconque convergeance. Nous savons donc que $f(x)$ est proportionnel à $\sqrt{x}$, mais nous ne pouvons pas affirmer avec certitude que la limite de $\frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ existe.

(iv) Déterminer à partir de quel ℓ qu'il n'existe pas de solution parfaite. Une solution parfaite est une configuration de graduations telle que chaque longueur de 1 à ℓ soit mesurable d'une seule manière.

Pour simplifier l'analyse, nous allons définir n comme le nombre de graduations utilisées.

Une solution est parfaite si et seulement si $\ell = \binom{n}{2}$. Nous pouvons réécrire la règle en fonction de la distance entre les graduations adjacentes. Soit d_i la distance entre la graduation i et la graduation $i+1$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ansi, la somme de toutes ces distances vaut ℓ.

Sous cette forme, la condition d'existence d'une solution parfaite revient à exiger que les sommes de tous les sous-tableaux contigus des distances d_i soient distinctes et couvrent exactement l'ensemble des longueurs de 1 à ℓ. Autrement dit, pour tout entier $k \in [1, \ell]$, il existe un unique couple (i, j) tel que

$$k = d_i + d_{i+1} + \ldots + d_j.$$

Ce changement de perspective nous permet de raisonner en termes de sommes plutôt qu'en termes de différences.

Une solution parfaite exige que tous les d_i soient des naturels distincts non nuls. Or, la plus petite somme de $n-1$ naturels distincts non nuls vaut

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} = \binom{n}{2} = \ell.$$

Le tableau d est donc formé d'une permutation de $[1, 2, \ldots, n-1]$ telle que toutes les sommes de sous-tableaux contigus soient différentes.

Montrons maintenant qu'il n'existe pas de solution parfaite pour $n \geq 5$.
Pour éviter que deux longueurs différentes soient générées par des segments identiques, la valeur 1 ne peut être adjacente qu'à $n-1$. On doit donc placer 1 à l'une des extrémités du tableau, disons $d_1 = 1$, ce qui impose $d_2 = n-1$. La valeur 2 doit également être adjacente à $n-1$, sous peine de produire une longueur déjà réalisable. On fixe donc $d_3 = 2$. Aucune des valeurs restantes ne peut donc être placée en d_4 sans engendrer une somme déjà atteinte auparavant. Ainsi, la construction devient impossible pour $n \geq 5$.

Nous avons donc démontrer que la plus grande valeur de ℓ pour laquelle une solution parfaite existe est $n = 4$ (et $\ell = 6$).

Les solutions parfaites sont donc les suivantes :

- Pour $n = 2$ (i.e. $\ell = 1$) :
  Graduations en $\{0, 1\}$
- Pour $n = 3$ (i.e. $\ell = 3$) :
  Graduations en $\{0, 1, 3\}$
- Pour $n = 4$ (i.e. $\ell = 6$) :
  Graduations en $\{0, 1, 4, 6\}$ ou $\{0, 2, 5, 6\}$

(v) Déterminer les liens entre les versions rectiligne et circulaire du problème.

Considérons une règle circulaire de longueur l avec $m(l)$ graduations permettant de mesurer toutes les longueurs entières de 1 à l. La solution peut donc comprendre moins de graduations puisqu'une distance entre 2 graduations peut être mesurée dans les 2 sens (sens horaire et antihoraire). Il faut donc seulement pouvoir mesurer des distances entre 1 et $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$. Ainsi, si l'on note $m_c(l)$ le nombre minimal de graduations pour une règle circulaire de longueur l, on a la relation suivante :

$$m_c(l) \leq m(\lfloor l/2 \rfloor) \leq 2\sqrt{\lfloor l/2 \rfloor} \leq \sqrt{2l}.$$

Au niveau des solutions parfaites, il est possible de faire des généralisations.

Tout d'abord, pour qu'une solution parfaite existe, il faut que la règle soit de longueur $\ell = q(q+1)+1 = q^2+q+1$. En effet, il faut que la distance entre chaque paire de graduations soit unique. Pour un nombre $n = q+1$ de graduations, il y a donc $n(n-1) = q(q+1)$ paires, et donc $q(q+1)$ distances distinctes. La longueur vaut cette distance additionnée à 1 : $\ell = q(q+1)+1 = q^2+q+1$.

Maintenant que nous avons nos critères, il faut déterminer pour quels q il est possible de construire une solution parfaite.

Proposition : Une solution parfaite pour la règle circulaire de longueur $\ell = q^2+q+1$ avec $n = q+1$ graduations existe si et seulement si q est une puissance d'un nombre premier.

Solution attendue : $q = p^k$ où p est un nombre premier et k est un naturel non nul (séquence : OEIS A335865).