

# Quand peu de choses font la différence

## Projet de recherche en Mathématiques

Latere Joshua, Meessen Jules, Vanthournhout Matthias, Schnackers Victor, Zech Noé

1<sup>er</sup> février 2026

Sur une règle graduée standard d'une longueur de  $\ell \geq 1$  unités, il y a  $\ell + 1$  graduations placées à intervalles réguliers de 1 unité. Pour mesurer un objet de longueur entière, on place habituellement la règle de sorte à ce qu'une extrémité de l'objet se trouve sur la graduation 0. La graduation se trouvant à l'autre extrémité de l'objet indique alors sa longueur.

Cela étant dit, il est possible de mesurer certains objets de plusieurs manières différentes. Par exemple, si  $\ell = 5$ , il est possible de mesurer une longueur de 2 de 4 manières possibles, en considérant les écarts respectifs entre les graduations 0 et 2, 1 et 3, 4 et 2, ou encore 5 et 3. Le point commun est que la différence entre les graduations est toujours égale à 2, c'est-à-dire :

$$2 - 0 = 3 - 1 = 4 - 2 = 5 - 3 = 2.$$

Si l'on efface certaines graduations, il est parfois encore possible de mesurer les mêmes longueurs qu'auparavant. Par exemple, si  $\ell = 7$ , nous avons 8 graduations. Il est possible, par exemple, de garder seulement les graduations 0, 1, 2, 4 et 7.

Le problème général est le suivant : en fonction de  $\ell$ , quel est le nombre minimal  $m(\ell)$  de graduations qui permet de mesurer toutes les longueurs inférieures ou égales à  $\ell$ ? C'est une question difficile, et pour laquelle une réponse générale est peut-être hors de portée. Néanmoins, on pourra envisager les questions suivantes, qui feront progresser notre compréhension du problème :

- (i) On peut commencer par étudier en détail des exemples avec des petites valeurs de  $\ell$ , par exemple toutes les valeurs  $1 \leq \ell \leq 10$ .
- (ii) On peut imaginer une méthode de construction générale d'une règle de longueur  $\ell$ , qui n'atteint peut-être pas la configuration optimale, mais qui semblerait déjà assez bonne. Par exemple, on peut essayer d'imaginer une méthode de construction qui permet de toujours enlever au moins la moitié des graduations.
- (iii) On peut aussi réfléchir à un encadrement de  $m(\ell)$ , pour estimer à quel point ce nombre peut-être grand ou petit. Par exemple, il est clair que  $m(\ell) \leq \ell + 1$ .
- (iv) On peut se demander s'il existe des solutions "parfaites", c'est à dire des configurations où chaque longueur de 1 à  $\ell$  est mesurable d'une seule manière.
- (v) On peut poser exactement les mêmes questions dans une variante circulaire, où il est question de mesurer des longueurs d'arc sur un cercle divisé en  $\ell$  arcs de même longueur. Quels liens peut-on établir entre les versions rectiligne et circulaire du problème ?

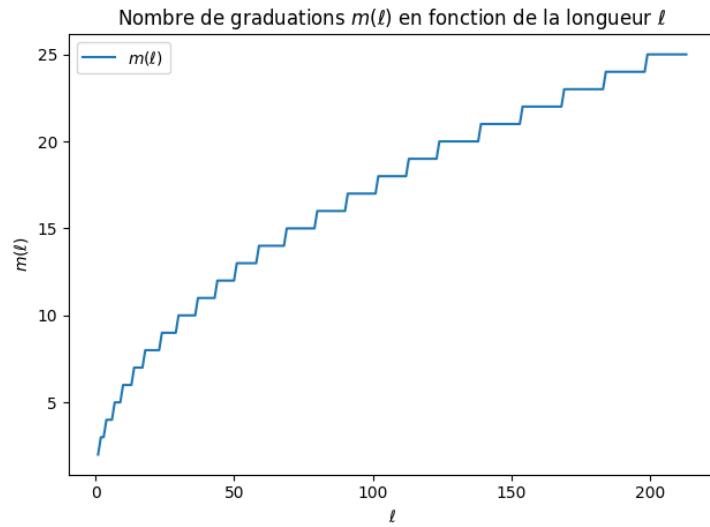
Le problème consiste donc à déterminer le nombre  $m(\ell)$  minimal de graduations nécessaires pour mesurer toute longueur entière de 1 à  $\ell$  avec une règle de longueur  $\ell$ .

(i) Déterminer les solutions pour  $\ell \leq 213$ .

Voici quelques exemples de solutions pour  $\ell$  allant de 1 à 10 :

$\ell$	$m(\ell)$	Graduations
0	1	0
1	2	0, 1
2	3	0, 1, 2
3	3	0, 1, 3
4	4	0, 1, 2, 4
5	4	0, 1, 2, 5
6	4	0, 1, 4, 6
7	5	0, 1, 2, 3, 7
8	5	0, 1, 2, 5, 8
9	5	0, 1, 2, 6, 9
10	6	0, 1, 2, 3, 6, 10

Graphique des valeurs de  $m(\ell)$  pour  $\ell \leq 213$  :



**(ii) Trouver une méthode de construction qui se rapproche de  $m(\ell)$ .**

Pour approcher la valeur de  $m(\ell)$ , nous pouvons utiliser la méthode utilisée dans le point (ii). Elle consiste à utiliser pour un  $1 \leq n \leq \ell$  fixé :

- Les  $n$  premières graduations :  $0, 1, 2, \dots, n - 1 \implies n$  graduations ;
- Tous les multiples suivants de  $n$  soustrait de 1 :  $2n - 1, 3n - 1, \dots$ , jusqu'à la plus grande valeur inférieure à  $\ell \implies \lfloor \frac{\ell}{n} \rfloor - 1$  graduations ;
- Le nombre  $\ell$  lui-même  $\implies 1$  graduation.

Ainsi, le nombre total de graduations utilisées pour un  $n$  fixé est :

$$k = n + \left\lfloor \frac{\ell}{n} \right\rfloor - 1 + 1 = n + \left\lfloor \frac{\ell}{n} \right\rfloor.$$

Après certains essais, nous remarquons que la valeur de  $k$  est minimisée lorsque  $n$  est proche de  $\sqrt{\ell}$ . En effet, en posant  $n = \lceil \sqrt{\ell} \rceil$ , nous obtenons :

$$k = \lceil \sqrt{\ell} \rceil + \left\lfloor \frac{\ell}{\lceil \sqrt{\ell} \rceil} \right\rfloor \approx 2\sqrt{\ell}.$$

(iii) Trouver des bornes pour  $m(\ell)$ .

1. **Borne inférieure** :  $m(\ell) \geq \frac{1+\sqrt{8\ell+1}}{2}$ .

— **Démonstration** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le nombre de paires  $(i, j)$  avec  $1 \leq i < j \leq n$  est donné par  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ . Si le nombre de graduations est  $m(\ell)$ , alors le nombre de différences distinctes que l'on peut obtenir est au plus  $\binom{m(\ell)}{2}$ . Pour mesurer toutes les longueurs de 1 à  $\ell$ , il faut donc que :

$$\binom{m(\ell)}{2} \geq \ell$$

Cela conduit à l'inégalité quadratique :

$$\frac{m(m-1)}{2} \geq \ell \iff m^2 - m - 2\ell \geq 0$$

En résolvant cette inégalité, on obtient :

$$m(\ell) \geq \left\lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 8\ell}}{2} \right\rceil$$

Ceci établit la borne inférieure.

2. **Borne supérieure** :  $m(\ell) \leq 2\sqrt{\ell} + 1$ .

— **Démonstration** : Considérons une règle avec des graduations placées aux positions  $0, 1, 2, \dots, n-1$  et aux positions  $2n-1, 3n-1, \dots, kn-1, \ell$  où  $k = \lfloor \frac{\ell}{n} \rfloor$ . Le nombre total de graduations est donc  $n+k-1+1 = n+k = n + \lfloor \frac{\ell}{n} \rfloor$ . Pour mesurer toutes les longueurs de 1 à  $\ell$ , il suffit de choisir  $n$  tel que  $n \approx \sqrt{\ell}$ . En effet, en choisissant  $n = \lceil \sqrt{\ell} \rceil$ , on a :

$$m(\ell) \leq n + \left\lfloor \frac{\ell}{n} \right\rfloor \leq \lceil \sqrt{\ell} \rceil + \left\lfloor \frac{\ell}{\lceil \sqrt{\ell} \rceil} \right\rfloor \leq \lceil \sqrt{\ell} \rceil + \lceil \sqrt{\ell} \rceil \leq 2 \lceil \sqrt{\ell} \rceil + 1$$

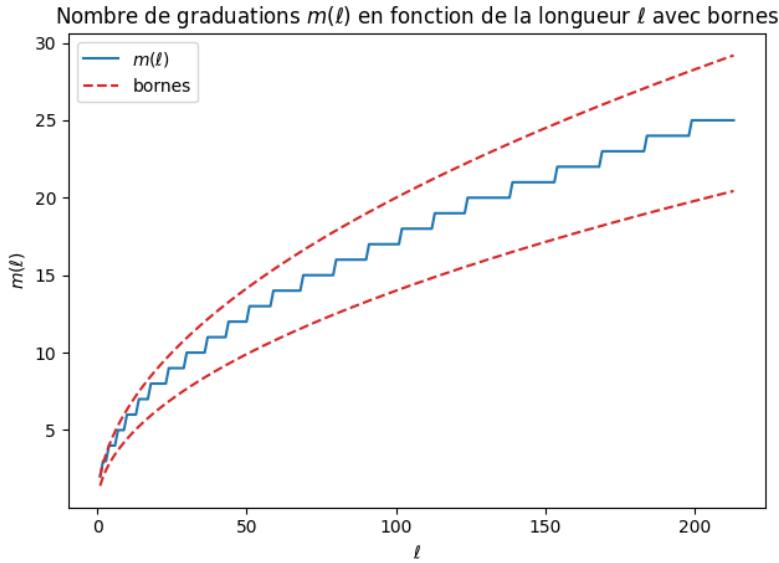
Ceci établit la borne supérieure.

Nous avons donc montré que :

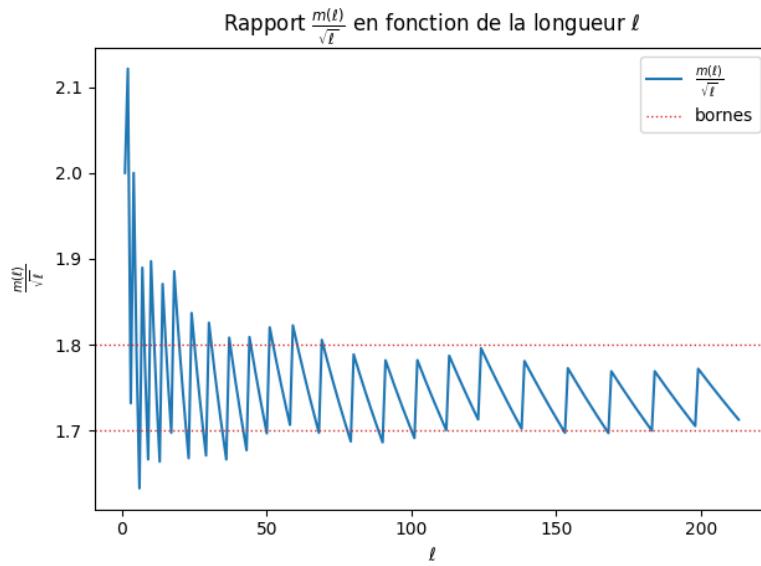
$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{1 + 8\ell}}{2} &\leq m(\ell) \leq 2 \lceil \sqrt{\ell} \rceil + 1 \\ \implies \frac{1 + \sqrt{8\ell}}{2} &\leq m(\ell) \leq 2 \lceil \sqrt{\ell} \rceil + 1 \\ \implies \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2\ell}}{2} &\leq m(\ell) \leq 2 \lceil \sqrt{\ell} \rceil + 1 \\ \implies \frac{1}{2} + \sqrt{2\ell} &\leq m(\ell) \leq 2 \lceil \sqrt{\ell} \rceil + 1 \\ \implies \sqrt{2\ell} &\leq m(\ell) \leq 2\sqrt{\ell} + 1 \end{aligned}$$

(iiib) Trouver une approximation de la solution optimale par une méthode d'optimisation numérique.

Tout d'abord, voici les valeurs obtenues empiriquement pour  $m(\ell)$  avec  $\ell \in \llbracket 1, 213 \rrbracket$  :



Nous avons émis l'hypothèse que la fonction  $m(\ell)$  valait approximativement  $k\sqrt{\ell}$  pour une certaine constante  $k$ . Nous pouvons donc construire ce graphique des valeurs de  $\frac{m(\ell)}{\sqrt{\ell}}$  :



Toutes les valeurs sont effectivement entre  $\sqrt{2} \approx 1.414$  et 2, ce qui confirme nos bornes. Cependant, nous pouvons remarquer que les valeurs semblent converger vers une valeur entre 1.7 et 1.8 lorsque  $\ell$  devient grand.

Même avec l'aide de toutes ces approximations, il est difficile de prouver rigoureusement une quelconque convergeance. Nous savons donc que  $m(\ell)$  est proportionnel à  $\sqrt{\ell}$ , mais nous ne pouvons pas affirmer avec certitude que la limite de  $\frac{m(\ell)}{\sqrt{\ell}}$  existe.

(iv) Déterminer à partir de quel  $\ell$  qu'il n'existe pas de solution parfaite. Une solution parfaite est une configuration de graduations telle que chaque longueur de 1 à  $\ell$  soit mesurable d'une seule manière.

Pour simplifier l'analyse, nous allons définir  $n = m(\ell)$  (le nombre de graduations utilisées).

Une solution est parfaite si et seulement si  $\ell = \binom{n}{2}$ . Nous pouvons réécrire la règle en fonction de la distance entre les graduations adjacentes. Soit  $d_i$  la distance entre la graduation  $i$  et la graduation  $i + 1$  pour  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Ainsi, la somme de toutes ces distances vaut  $\ell$ .

Sous cette forme, la condition d'existence d'une solution parfaite revient à exiger que les sommes de tous les sous-tableaux contigus des distances  $d_i$  soient distinctes et couvrent exactement l'ensemble des longueurs de 1 à  $\ell$ . Autrement dit, pour tout entier  $k \in [1, \ell]$ , il existe un unique couple  $(i, j)$  tel que

$$k = d_i + d_{i+1} + \dots + d_j.$$

Ce changement de perspective nous permet de raisonner en termes de sommes plutôt qu'en termes de différences.

Une solution parfaite exige que tous les  $d_i$  soient des naturels distincts non nuls. Or, la plus petite somme de  $n - 1$  naturels distincts non nuls vaut

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{(n - 1)n}{2} = \binom{n}{2} = \ell.$$

Le tableau  $d$  est donc formé d'une permutation de  $[1, 2, \dots, n - 1]$  telle que toutes les sommes de sous-tableaux contigus soient différentes.

Montrons maintenant qu'il n'existe pas de solution parfaite pour  $n \geq 5$ . Pour éviter qu'une longueur soit générée par des sous-tableaux différents, la valeur 1 ne peut être adjacente qu'à  $n - 1$ . On doit donc placer 1 à l'une des extrémités du tableau, disons  $d_1 = 1$ , ce qui impose  $d_2 = n - 1$ . La valeur 2 doit également être adjacente à  $n - 1$ , sous peine de produire une longueur déjà réalisable. On fixe donc  $d_3 = 2$ . Aucune des valeurs restantes ne peut donc être placée en  $d_4$  sans engendrer une somme déjà atteinte auparavant. Ainsi, la construction devient impossible pour  $n \geq 5$ .

Nous avons donc démontré que la plus grande valeur de  $\ell$  pour laquelle une solution parfaite existe est  $n = 4$  (et  $\ell = 6$ ).

Les solutions parfaites sont résumées dans le tableau suivant :

$m(\ell)$	$\ell$	Graduations
2	1	{0, 1}
3	3	{0, 1, 3}
4	6	{0, 1, 4, 6} {0, 2, 5, 6}

### (v) Déterminer les liens entre les versions rectiligne et circulaire du problème.

Prenons maintenant une règle circulaire au lieu d'une règle rectiligne. Cela signifie que la règle est fermée sur elle-même, formant un cercle de longueur  $\ell$ . Le problème revient à pouvoir mesurer tous les arcs de cercle de longueur entière entre 1 et  $\ell$  à l'aide de graduations placées sur ce cercle.

Définissons  $m_c(\ell)$  comme le nombre minimal de graduations à placer.

La solution peut donc comprendre moins de graduations puisque la distance entre 2 graduations peut se faire dans les deux sens (sens horaire et antihoraire). Il faut donc seulement pouvoir mesurer des distances entre 1 et  $\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor$ . On obtient donc la relation suivante :

$$m_c(\ell) \leq m(\lfloor \ell/2 \rfloor) \leq 2\sqrt{\lfloor \ell/2 \rfloor} \leq \sqrt{2\ell}.$$

Nous pouvons aussi trouver une borne inférieure pour  $m_c(\ell)$  en utilisant le même raisonnement que pour la règle rectiligne. En effet, avec  $n$  graduations, on peut mesurer au plus  $n(n - 1)$  distances différentes. Il faut donc que :

$$n(n - 1) \geq \ell.$$

Cela revient à dire que :

$$m_c(\ell) \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 4\ell}}{2} \sim \sqrt{\ell}.$$

On encadre donc  $m_c(\ell)$  de la façon suivante :

$$\sqrt{\ell} \lesssim m_c(\ell) \lesssim \sqrt{2\ell}.$$

Au niveau des solutions parfaites, il est possible de faire des généralisations.

Tout d'abord, pour qu'une solution parfaite existe, il faut que la règle soit de longueur  $\ell = q(q+1)+1 = q^2+q+1$ . En effet, il faut que la distance entre chaque paire de graduations soit unique. Pour un nombre  $n = q + 1$  de graduations, il y a donc  $n(n - 1) = q(q + 1)$  paires, et donc  $q(q + 1)$  distances distinctes. La longueur vaut cette distance additionnée à 1 :  $\ell = q(q + 1) + 1 = q^2 + q + 1$ .

Maintenant que nous avons nos critères, il faut déterminer pour quels  $q$  il est possible de construire une solution parfaite.

**Proposition :** Une solution parfaite pour la règle circulaire de longueur  $\ell = q^2 + q + 1$  avec  $n = q + 1$  graduations existe lorsque  $q$  est une puissance d'un nombre premier.

Solution attendue :  $q = p^k$  où  $p$  est un nombre premier et  $k$  est un naturel non nul (séquence : [OEIS A335865](#)).

### (bonus) Autres découvertes

Au-delà des bornes établies précédemment pour  $m(\ell)$ , plusieurs autres observations intéressantes ont été faites lors de l'étude des règles à mesurer.

**1. Lien entre règle circulaire et jeu de société dobble :** Le jeu de société dobble peut être résolu en utilisant une règle circulaire parfaite. En effet, on associe chaque symbole du jeu à une graduation (utilisée ou non) sur une règle circulaire. On prend ensuite les graduations utilisées pour construire la règle parfaite sur la première carte, puis on décale les graduations de 1 pour obtenir la deuxième carte, et ainsi de suite jusqu'à revenir à la carte initiale. Chaque carte du jeu correspond ainsi à une position de la règle circulaire, garantissant que chaque paire de cartes partage exactement un symbole commun. La propriété est respectée puisque chaque distance apparaît exactement une fois. Il est donc garantis que si l'on décale notre règle initiale d'un entier  $k$ , il n'existe qu'une graduation en commun entre ces 2 règles.

**2. Règles en 2 dimensions :** Une extension naturelle de la règle à mesurer est la règle en 2 dimensions, où les graduations sont placées sur un plan. La distance entre deux graduations est alors représentée sous forme de vecteur. Une règle en 2D parfaite permettrait de mesurer toutes les distances vectorielles possibles entre deux points sur une grille définie. Il est possible de définir une fonction  $m_2(\ell)$  représentant le nombre minimal de graduations nécessaires pour mesurer toutes les distances vectorielles dans un carré de côté  $\ell$ . En adaptant les techniques utilisées pour les règles linéaires, on peut établir des bornes pour  $m_2(\ell)$  :  $\sqrt{2} \cdot \ell \leq m_2(\ell) \leq 2\ell$ . La borne supérieure peut être obtenue en divisant le carré initial par des carrés de longueur  $\sqrt{\ell}$ , et en plaçant  $\ell$  graduations dans le carré en bas à gauche, puis dans la case supérieure droite de chaque autre carré.