

# Quand peu de choses font la différence

Projet de recherche en Mathématiques

Latere Joshua, Meessen Jules, Vanthournhout Matthias, Schnackers Victor, Zech Noé

6 novembre 2025

Sur une règle graduée standard d'une longueur de  $\ell \geq 1$  unités, il y a  $\ell + 1$  graduations placées à intervalles réguliers de 1 unité. Pour mesurer un objet de longueur entière, on place habituellement la règle de sorte à ce qu'une extrémité de l'objet se trouve sur la graduation 0. La graduation se trouvant à l'autre extrémité de l'objet indique alors sa longueur.

Cela étant dit, il est possible de mesurer certains objets de plusieurs manières différentes. Par exemple, si  $\ell = 5$ , il est possible de mesurer une longueur de 2 de 4 manières possibles, en considérant les écarts respectifs entre les graduations 0 et 2, 1 et 3, 4 et 2, ou encore 5 et 3. Le point commun est que la différence entre les graduations est toujours égale à 2, c'est-à-dire :

$$2 - 0 = 3 - 1 = 4 - 2 = 5 - 3 = 2.$$

Si l'on efface certaines graduations, il est parfois encore possible de mesurer les mêmes longueurs qu'auparavant. Par exemple, si  $\ell = 7$ , nous avons 8 graduations. Il est possible, par exemple, de garder seulement les graduations 0, 1, 2, 4 et 7.

Le problème général est le suivant : en fonction de  $\ell$ , quel est le nombre minimal  $m(\ell)$  de graduations qui permet de mesurer toutes les longueurs inférieures ou égales à  $\ell$  ? C'est une question difficile, et pour laquelle une réponse générale est peut-être hors de portée. Néanmoins, on pourra envisager les questions suivantes, qui feront progresser notre compréhension du problème :

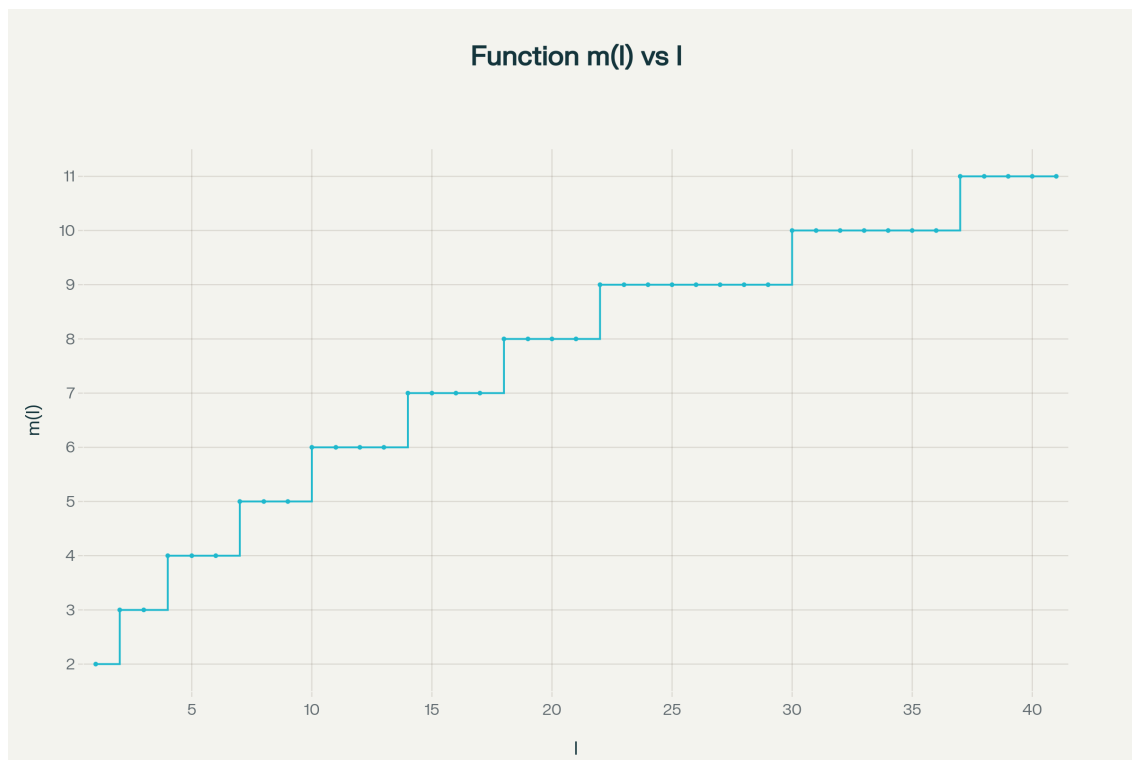
- (i) On peut commencer par étudier en détail des exemples avec des petites valeurs de  $\ell$ , par exemple toutes les valeurs  $1 \leq \ell \leq 10$ .
- (ii) On peut aussi réfléchir à un encadrement de  $m(\ell)$ , pour estimer à quel point ce nombre peut-être grand ou petit. Par exemple, il est clair que  $m(\ell) \leq \ell + 1$ .
- (iii) On peut imaginer une méthode de construction générale d'une règle de longueur  $\ell$ , qui n'atteint peut-être pas la configuration optimale, mais qui semblerait déjà assez bonne. Par exemple, on peut essayer d'imaginer une méthode de construction qui permet de toujours enlever au moins la moitié des graduations.
- (iv) On peut poser exactement les mêmes questions dans une variante circulaire, où il est question de mesurer des longueurs d'arc sur un cercle divisé en  $\ell$  arcs de même longueur. Quels liens peut-on établir entre les versions rectiligne et circulaire du problème ?

Le problème consiste donc à déterminer le nombre  $m(l)$  minimal de graduations nécessaires pour mesurer toute longueur entière de 1 à  $l$  avec une règle de longueur  $l$ .

(i) Déterminer les solutions pour  $l \leq 41$ .

- $m(1) = 2$  : Nous avons besoin de 2 graduations à 0 et 1.  
 $m(2) = 3$  : Nous avons besoin de 3 graduations à 0, 1 et 2.  
 $m(3) = 3$  : Nous avons besoin de 3 graduations à 0, 1 et 3.  
 $m(4) = 4$  : Nous avons besoin de 4 graduations à 0, 1, 2 et 4.  
 $m(5) = 4$  : Nous avons besoin de 4 graduations à 0, 1, 2 et 5.  
 $m(6) = 4$  : Nous avons besoin de 4 graduations à 0, 1, 4 et 6.  
 $m(7) = 5$  : Nous avons besoin de 5 graduations à 0, 1, 2, 3 et 7.  
 $m(8) = 5$  : Nous avons besoin de 5 graduations à 0, 1, 2, 5 et 8.  
 $m(9) = 5$  : Nous avons besoin de 5 graduations à 0, 1, 2, 6 et 9.  
 $m(10) = 6$  : Nous avons besoin de 6 graduations à 0, 1, 2, 3, 6 et 10.  
 $m(11) = 6$  : Nous avons besoin de 6 graduations à 0, 1, 2, 3, 7 et 11.  
 $m(12) = 6$  : Nous avons besoin de 6 graduations à 0, 1, 2, 3, 8 et 12.  
 $m(13) = 6$  : Nous avons besoin de 6 graduations à 0, 1, 2, 6, 10 et 13.  
 $m(14) = 7$  : Nous avons besoin de 7 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 9 et 14.  
 $m(15) = 7$  : Nous avons besoin de 7 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 10 et 15.  
 $m(16) = 7$  : Nous avons besoin de 7 graduations à 0, 1, 2, 3, 8, 12 et 16.  
 $m(17) = 7$  : Nous avons besoin de 7 graduations à 0, 1, 2, 3, 8, 13 et 17.  
 $m(18) = 8$  : Nous avons besoin de 8 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12 et 18.  
 $m(19) = 8$  : Nous avons besoin de 8 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 9, 14 et 19.  
 $m(20) = 8$  : Nous avons besoin de 8 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 10, 15 et 20.  
 $m(21) = 8$  : Nous avons besoin de 8 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 10, 16 et 21.  
 $m(22) = 9$  : Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 16 et 22.  
 $m(23) = 9$  : Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 11, 17 et 23.  
 $m(24) = 9$  : Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 18 et 24.  
 $m(25) = 9$  : Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 19 et 25.  
 $m(26) = 9$  : Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 10, 15, 21 et 26.  
 $m(27) = 9$  : Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 10, 16, 22 et 27.  
 $m(28) = 9$  : Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 9, 10, 21, 22, 24, 26 et 28.  
 $m(29) = 9$  : Nous avons besoin de 9 graduations à 0, 1, 2, 14, 18, 21, 24, 27 et 29.  
 $m(30) = 10$  : Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 17, 24 et 30.  
 $m(31) = 10$  : Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 18, 25 et 31.  
 $m(32) = 10$  : Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 19, 26 et 32.  
 $m(33) = 10$  : Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 13, 19, 26 et 33.  
 $m(34) = 10$  : Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 2, 3, 15, 20, 24, 28, 31 et 34.  
 $m(35) = 10$  : Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 4, 5, 16, 18, 25, 27, 33 et 35.  
 $m(36) = 10$  : Nous avons besoin de 10 graduations à 0, 1, 3, 6, 13, 20, 27, 31, 35 et 36.  
 $m(37) = 11$  : Nous avons besoin de 11 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 14, 22, 29 et 37 ou à 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 23, 24, 36 et 37.  
 $m(38) = 11$  : Nous avons besoin de 11 graduations à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 15, 22, 30 et 38 ou à 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 24, 25, 37 et 38.  
 $m(39) = 11$  : Nous avons besoin de 11 graduations à 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 25, 26, 38 et 39.  
 $m(40) = 11$  : Nous avons besoin de 11 graduations à 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 26, 27, 39 et 40.  
 $m(41) = 11$  : Nous avons besoin de 11 graduations à 0, 2, 4, 6, 7, 18, 21, 31, 32, 40 et 41.

Graphique des valeurs de  $m(l)$  pour  $l \leq 41$  :



(ii) Trouver des bornes pour  $m(l)$ .

1. **Borne inférieure :**  $m(l) \geq \frac{1+\sqrt{8l+1}}{2}$ .

— **Démonstration :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le nombre de paires  $(i, j)$  avec  $1 \leq i < j \leq n$  est donné par  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ . Si le nombre de graduations est  $m(l)$ , alors le nombre de différences distinctes que l'on peut obtenir est au plus  $\binom{m(l)}{2}$ . Pour mesurer toutes les longueurs de 1 à  $l$ , il faut donc que :

$$\binom{m(l)}{2} \geq l$$

Cela conduit à l'inégalité quadratique :

$$\frac{m(m-1)}{2} \geq l \iff m^2 - m - 2l \geq 0$$

En résolvant cette inégalité, on obtient :

$$m(l) \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 8l}}{2}$$

Ceci établit la borne inférieure.

2. **Borne supérieure :**  $m(l) \leq 2\sqrt{l} + 1$ .

— **Démonstration :** Considérons une règle avec des graduations placées aux positions  $0, 1, 2, \dots, n-1$  et aux positions  $2n-1, 3n-1, \dots, kn-1, l$  où  $k = \lfloor \frac{l}{n} \rfloor$ . Le nombre total de graduations est donc  $n + k - 1 + 1 = n + k = n + \lfloor \frac{l}{n} \rfloor$ . Pour mesurer toutes les longueurs de 1 à  $l$ , il suffit de choisir  $n$  tel que  $n \approx \sqrt{l}$ . En effet, en choisissant  $n = \lceil \sqrt{l} \rceil$ , on a :

$$m(l) \leq n + \lfloor \frac{l}{n} \rfloor \leq \lceil \sqrt{l} \rceil + \lfloor \frac{l}{\lceil \sqrt{l} \rceil} \rfloor \leq \lceil \sqrt{l} \rceil + \lfloor \sqrt{l} \rfloor \leq 2\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 1$$

Ceci établit la borne supérieure.

Nous avons donc montré que :

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{1 + 8l}}{2} &\leq m(l) \leq 2\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 1 \\ \implies \frac{1 + \sqrt{8l}}{2} &\leq m(l) \leq 2\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 1 \\ \implies \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8l}}{2} &\leq m(l) \leq 2\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 1 \\ \implies \frac{1}{2} + \sqrt{2l} &\leq m(l) \leq 2\lfloor \sqrt{l} \rfloor + 1 \\ &\implies \sqrt{2l} \leq m(l) \leq 2\sqrt{l} + 1 \end{aligned}$$

(iii) Trouver une méthode de construction qui se rapproche de  $m(l)$ .

Pour approcher la valeur de  $m(l)$ , nous pouvons utiliser la méthode utilisée dans le point (ii). Elle consiste à utiliser pour un  $1 \leq n \leq l$  fixé :

- Les  $n$  premières graduations :  $0, 1, 2, \dots, n-1 \implies n$  graduations ;
- Tous les multiples suivants de  $n$  soustrait de 1 :  $2n-1, 3n-1, \dots$ , jusqu'à la plus grande valeur inférieure à  $l \implies \left\lfloor \frac{l}{n} \right\rfloor - 1$  graduations ;
- Le nombre  $l$  lui-même  $\implies 1$  graduation.

Ainsi, le nombre total de graduations utilisées pour un  $n$  fixé est :

$$k = n + \left\lfloor \frac{l}{n} \right\rfloor - 1 + 1 = n + \left\lfloor \frac{l}{n} \right\rfloor.$$

Après certains essais, nous remarquons que la valeur de  $k$  est minimisée lorsque  $n$  est proche de  $\sqrt{l}$ . En effet, en posant  $n = \lceil \sqrt{l} \rceil$ , nous obtenons :

$$k = \lceil \sqrt{l} \rceil + \left\lfloor \frac{l}{\lceil \sqrt{l} \rceil} \right\rfloor \approx 2\sqrt{l}.$$

(iv) Quels liens peut-on établir entre les versions rectiligne et circulaire du problème ?

Considérons une règle circulaire de longueur  $l$  avec  $m(l)$  graduations permettant de mesurer toutes les longueurs entières de 1 à  $l$ . La solution peut donc comprendre moins de graduations puisqu'une distance entre 2 graduations peut être mesurée dans les 2 sens (sens horaire et antihoraire). Il faut donc seulement pouvoir mesurer des distances entre 1 et  $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ . Ainsi, si l'on note  $m_c(l)$  le nombre minimal de graduations pour une règle circulaire de longueur  $l$ , on a la relation suivante :

$$m_c(l) \leq m(\lfloor l/2 \rfloor) \leq 2\sqrt{\lfloor l/2 \rfloor} \leq \sqrt{2l}.$$