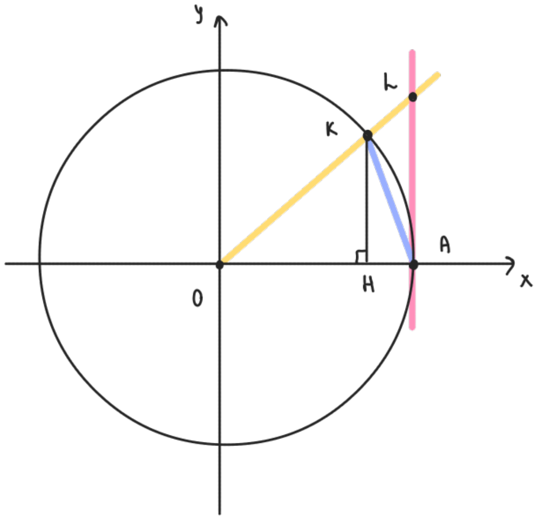
1.1 Первый замечательный предел. Доказательство. Вывод следствий

Первый замечательный предел:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Доказательство:

Доказываем для положительного x сначала $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x} = 1$



Рассматриваем $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

$S_{\triangle}OKA = \frac{1}{2}\underbrace{OA}_{1}\cdot\underbrace{KH}_{\sin x} = \frac{1}{2}\cdot\sin x$

$S_{сек}OAK = \frac{1}{2}R^2\cdot x = \frac{x}{2}$

$S_{\triangle}OAL = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{AL}_{tg\, x} = \frac{1}{2}\cdot tg\, x$

$S_{\triangle}OAL > S_{сек}OKA > S_{\triangle}OKA$

$\frac{1}{2}tg\, x > \frac{x}{2} > \frac{1}{2}\cdot\sin x$

Меняем знаки, перев. дробь:

$\frac{1}{tg\, x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$

Умножаем на sin x

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

При $x \to 0+0$:

$1 < \lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x} < 1$

По теореме о 2-х полицейских

$\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0+0$

Как доказать для отрицательных x?

$\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}$ Делаем замену: $t = -x$

$\lim\limits_{t\to 0+0}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim\limits_{t\to 0+0}\frac{\sin t}{t} = 1$ чтд

Следствия

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\, x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\cdot\frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\frac{x}{2})^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin \overset{\sin y}{x}}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\arcsin(\sin y)}{\sin y} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\, x}{x} = 1$ аналогично 3

1.2 Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о непрерывном (с доказательством). Теорема о дифференцируемости (с доказательством)

Рассмотрим такую функцию: $\varphi(x) = \int_a^x F(t)\,dt$ - это называется интеграл с переменным верхним пределом

Теорема 1 (о непрерывности)

Если $F(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то $\varphi(x)$ непрерывна в $[a,b]$

Доказательство:

$$\varphi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} F(t)\,dt = \int_a^x F(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} F(t)\,dt$$

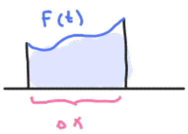
$$\Delta\varphi = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \underbrace{\int_a^x F(t)\,dt} + \int_x^{x+\Delta x} F(t)\,dt - \underbrace{\int_a^x F(t)\,dt}$$

$$\Delta\varphi = \int_x^{x+\Delta x} F(t)\,dt$$

По теореме о среднем значении:

$$\int_x^{x+\Delta x} F(t)\,dt = M\Delta x$$

(типа эту площадь можно посчитать так: $M\Delta x$
(M - какое-то число)



$$\Delta\varphi = M\Delta x$$

Тогда при $\Delta x \to 0$ $\Delta\varphi \to 0$, а это и есть непрерывность

Теорема 2 (о дифференцируемости)

Если F непрерывна на $[a,b]$, то $\varphi'(x) = F(x)$, $x \in [a,b]$

Доказательство:

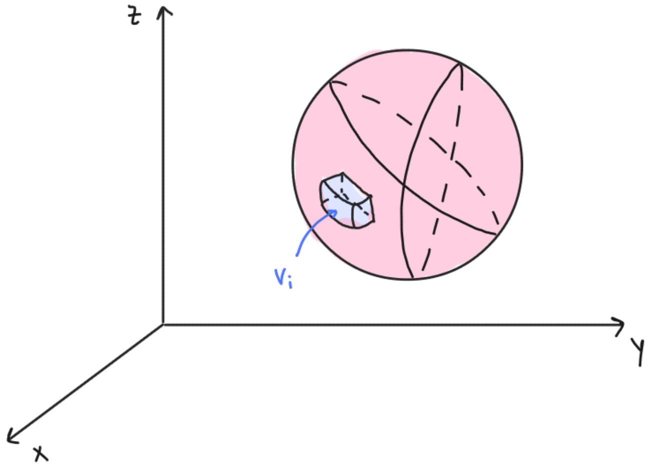
как M в теореме о среднем
$c \in [x; x+\Delta x]$

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} F(t)\,dt}{\Delta t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} F(c)$$

Но при $\Delta x \to 0$ $c \to x$ $\longrightarrow$ $\varphi'(x) = F(x)$

1.3 Приведение тройнгго интеграла к повторному

Рассмотрим задачу вычисления массы тела



Пусть дано тело V, в каждой его точке известна плотность $p(x,y,z)$

Разложим тело на n частей: $V_1, V_2 \dots V_n$ и в каждой части выберем произвольную точку $M_i(a_i, b_i, c_i)$

Предполагаем, что плотность в пределах части V_i постоянна и равна $p(a_i, b_i, c_i)$

Тогда масса тела приближенно: $m \approx \sum_{i=1}^{n} p(a_i, b_i, c_i) \cdot V_i$ (V_i - объем части)

Если устремить диаметры частей к 0, получим: $m = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} p(a_i, b_i, c_i) \cdot V_i$

параметр мелкости разбиения

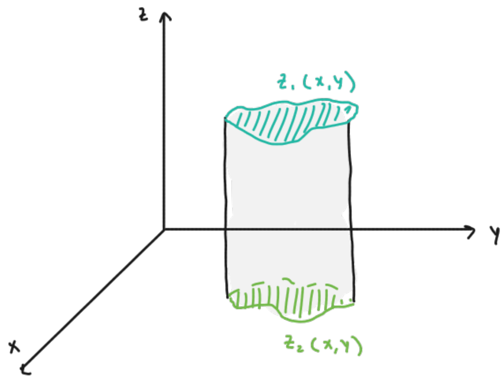
Полученная сумма - тройной интеграл:

$$\boxed{m = \iiint\limits_V p(x,y,z)\, dV}$$

Вычисление тройного интеграла

Пусть тело - цилиндрический брусок, ограниченный сверху и снизу поверхностями $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$

Эти поверхности проецируются на XOY в некоторую фигуру D



Тогда:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dV = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x,y,z)\, dz$$

(z изменяется от одной поверхности до другой, поэтому так) - свели от тройного к повторному

Если область D - криволин. трапеция с кривыми $y_1(x)$ и $y_2(x)$ и прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$, то:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dV = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\, dz$$