Harmonic Oscillators

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบกลับไปกลับมาของวัตถุ ในเบื้องต้นจะใช้สมการกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน พร้อมกับความรู้คณิตศาสตร์ อันได้แก่ การแก้สมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 (second order differential equation) , แคลคูลัสเบื้องต้น , จำนวนเชิงซ้อน ในเบื้องต้น การเคลื่อนที่รูปแบบนี้ จะสามารถแบ่งได้เป็น 3 ลักษณะ ได้แก่ simple harmonic , damp oscillation , driven oscillation (แท้จริงแล้วมีอีกลักษณะหนึ่ง คือ couple oscillation แต่จะขอไม่กล่าวถึงเนื่องจากใช้คณิตศาสตร์ในระดับที่สูงกว่า 3 ลักษณะข้างต้นพอสมควร) โดยในบทความนี้จะเริ่มต้นกล่าวถึงกรณีที่เป็นพื้นฐานมากที่สุด คือ simple harmonic ไปจนถึงกรณีที่ทั่วไปมากที่สุด คือ driven oscillation

Simple Harmonic Motion

Simple harmonic motion เป็นการเคลื่อนที่แบบกลับไปกลับมาในอุดมคติ กล่าวคือ เคลื่อนที่โดยไม่มีแรงต้าน ไม่มีแรงบังคับการเคลื่อนที่จากภายนอก มีเพียงแค่แรงที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่เพียงแรงเดียว

ตัวอย่างเช่น ระบบมวลติดสปริงในแนวระดับ มีเพียงแรงคืนตัวสปริงที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน; $-kx = m\,\frac{d^2}{dt^2}x$

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{k}{m}x = 0$$ สังเกตว่าสมการนี้เป็นสมการอนุพันธ์อันดับ 2

กำหนดค่าคงที่ $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ ซึ่งเป็นความถี่เชิงมุมของการสั่น

เราสามารถยกคำตอบของสมการอนุพันธ์อันดับ 2 ได้ว่า $x(t) = A\sin(\omega t + \emptyset)$

โดย $\emptyset$ เรียกว่ามุมเฟสตั้งต้น สามารถพิจารณาได้จากเงื่อนไขตอนเริ่มต้นการเคลื่อนที่ของวัตถุ (Initial condition)

และ A เป็นค่าคงที่ ที่มีหน่วยเดียวกับ x เรียกว่าแอมพลิจูด เป็นระยะที่วัตถุไกลจากจุดสมดุลมากที่สุด

การแก้สมการอนุพันธ์อันดับ 2 ดังกล่าว ทำให้เราทราบถึง ตำแหน่งของวัตถุที่เวลาใดๆ หากเราต้องการทราบเพิ่มเติมถึง อัตราเร็วและอัตราเร่ง ที่เวลาใดๆ ก็จะสามารถทำได้โดยง่ายด้วยการหาอนุพันธ์ของตำแหน่งเทียบเวลา ดังแสดงด้านล่างนี้

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \emptyset)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \emptyset)$$

Damped Harmonic Motion

กรณีนี้เกิดเมื่อการสั่นของระบบเกิดขึ้นในกรณีที่มีแรงต้าน ในธรรมชาติแรงต้านจะมีค่าแปรผันโดยตรงกับ ความเร็วหรือความเร็วกำลังสอง ของวัตถุ แล้วแต่กรณี และมีทิศตรงกันข้ามกับทิศความเร็วของวัตถุเสมอ โดยในบทความนี้จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่แรงต้านมีค่าแปรผันโดยตรงกับความเร็วเท่านั้น โดยแรงต้าน $\vec{f} = -b\vec{v}$ ซึ่ง b เป็นค่าคงที่

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน $-kx - b\frac{dx}{dt} = m\ \frac{d^2}{dt^2}x$

ให้ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ และ $2\gamma = \frac{b}{m}$; $\frac{d^2}{dt^2}x + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์อันดับ 2 อีกเช่นเคย

ก่อนจะไปต่อ เราจะนิยามตัวแปรเพิ่มคือ $\Omega^2 = \gamma^2 - \omega^2$ ซึ่งค่านี้จะเป็นตัวบ่งบอกชนิดของ damp oscillation ซึ่งแบ่งออกเป็นอีก 3 ชนิด ดังนี้

กรณี $\Omega^2 > 0$ เรียกว่า overdamping

กรณี $\Omega^2 = 0$ เรียกว่า critical damping

กรณี $\Omega^2 < 0$ เรียกว่า underdamping

1) overdamping ($\gamma > \omega$)

ทำการแก้สมการด้านบนด้วยการใช้ D-operator ซึ่งในที่นี้ D จะเทียบเท่า $\frac{d}{dt}$

$$(D^2 + 2\gamma D + \omega^2)x = 0$$

$$D = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{(2\gamma)^2 - 4\omega^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

ดังนั้นจะได้ $x(t) = Ae^{-\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right)t} + Be^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}$ ซึ่งกรณีนี้จะไม่เกิดการสั่น เพราะ พจน์ทั้งคู่ของคำตอบเป็น transient solutions ในแบบที่จะลดลงตามเวลาเพียงอย่างเดียว

2) critical damping ($\gamma = \omega$)

ทำการแก้สมการด้านบนด้วยการใช้ D-operator ซึ่งในที่นี้ D จะเทียบเท่า $\frac{d}{dt}$

$$(D^2 + 2\gamma D + \omega^2)x = 0$$

$$D = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{(2\gamma)^2 - 4\omega^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma$$

สมการให้ค่า D เพียงค่าเดียว ดังนั้นคำตอบของสมการจะได้เป็น $x(t) = (At + B)e^{-\gamma t}$ ซึ่งกรณีนี้จะไม่เกิดการสั่น เพราะ ค่าของตำแหน่งจะลดลงเพียงอย่างเดียวโดยสังเกตได้จากสมการที่ได้ และในกรณีนี้จะลดลงรวดเร็วกว่ากรณี overdamping เสียอีก เพราะค่า γ ในสมการตำแหน่งของกรณีนี้มีค่ามากกว่า $\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ ในกรณี overdamping

3) underdamping ($\gamma < \omega$)

ทำการแก้สมการด้านบนด้วยการใช้ D-operator ซึ่งในที่นี้ D จะเทียบเท่า $\frac{d}{dt}$

$$(D^2 + 2\gamma D + \omega^2)x = 0$$

$$D = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{(2\gamma)^2 - 4\omega^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

ดังนั้นจะได้ $x(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t} + Be^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t})$ ซึ่งกรณีนี้จะเกิดการสั่น เนื่องจากมีทั้งพจน์ที่ทำให้ค่าเพิ่มขึ้นและลดลง ทั้งนี้สุดท้ายแล้วค่าที่ลดลงจะชนะค่าที่เพิ่มขึ้นเป็นผลให้การสั่นจบลง

Driven Harmonic Motion

กรณีนี้เกิดเมื่อการสั่นของระบบเกิดขึ้นในกรณีที่มีแรงต้านและแรงภายนอกที่มาบังคับการเคลื่อนที่ของวัตถุ ซึ่งแรงภายนอกนี้จะมีลักษณะเป็นคาบเพื่อให้เกิดการเคลื่อนที่แบบกลับไปกลับมา ซึ่งจะสมมติให้ $F_d(t) = F_d cos\omega_d t$

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน ; $Fcos\omega_d t - kx - b\frac{dx}{dt} = m\ \frac{d^2}{dt^2}x$

$$\frac{d^2}{dt^2}x + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \mathrm{F}\cos\omega_d t$$

จาก $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\quad \frac{d^2}{dt^2}x + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F}{2}e^{i\omega_d t} + \frac{F}{2}e^{-i\omega_d t}$

สมการนี้เป็นแบบ non-homogenous second order differential equation ซึ่งจะสามารถแก้ได้โดยการหา particular solution (x_p) และ complementary solution (x_c) และนำคำตอบทั้งสองแบบมา linear combination กัน แต่สังเกตว่าด้านขวาของสมการมี 2 พจน์ดังนั้นจึงต้องเพิ่มขั้นตอนในส่วนการหา x_p เป็น 2 ขั้น ซึ่งได้แก่ กรณี (1) ด้านซ้ายของสมการเท่ากับพจน์แรกของด้านขวา กับ กรณี (2) ด้านซ้ายของสมการเท่ากับพจน์ที่สองของด้านขวา

ขั้นตอนที่ 1 หา complementary solution (x_c)

วิธีการคือเราจะบังคับให้ด้านขวาสมการ = 0

$\frac{d^2}{dt^2}x + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ จะได้สมการเดียวกันกับกรณี damped harmonic motion

ดังนั้นได้ $x_c(t) = Ae^{-\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + Be^{-(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t}$

ขั้นตอนที่ 2 หา particular solution (x_p) ในกรณี (1)

$\frac{d^2}{dt^2}x + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F}{2}e^{i\omega_d t}$ สังเกตว่า $i\omega_d \neq -\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right) \neq -(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})$

ดังนั้น $x_p(t) = ke^{i\omega_d t}$ แทนค่านี้กลับเข้าสมการเพื่อหาค่าคงที่ k จะได้ $k = \frac{F}{2(-\omega_d^2+2\gamma\omega_d i+\omega^2)}$

ดังนั้น $x_p(t) = \frac{F}{2(-\omega_d^2+2\gamma\omega_d i+\omega^2)}e^{i\omega_d t}$

ขั้นตอนที่ 3 หา particular solution (x_p) ในกรณี (2)

$\frac{d^2}{dt^2}x + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F}{2}e^{-i\omega_d t}$ สังเกตว่า $-i\omega_d \neq -\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right) \neq -(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})$

ดังนั้น $x_p(t) = ke^{-i\omega_d t}$ แทนค่านี้กลับเข้าสมการเพื่อหาค่าคงที่ k จะได้ $k = \frac{F}{2(-\omega_d^2-2\gamma\omega_d i+\omega^2)}$

ดังนั้น $x_p(t) = \frac{F}{2(-\omega_d^2-2\gamma\omega_d i+\omega^2)}e^{-i\omega_d t}$

สุดท้ายในค่าที่ได้จากขั้นตอน 1-3 มา linear combination กันจะได้

$$x(t) = \frac{F}{2(-\omega_d^2+2\gamma\omega_d i+\omega^2)}e^{i\omega_d t} + \frac{F}{2(-\omega_d^2-2\gamma\omega_d i+\omega^2)}e^{-i\omega_d t} + Ae^{-\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + Be^{-(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t}$$

เราสามารถจัดรูปสมการนี้ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติด้วยการแทนค่า Euler formula

$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ แล้วจัดรูปต่ออีกเล็กน้อย

$$x(t) = \frac{F(\omega^2-\omega_d^2)}{(\omega^2-\omega_d^2)^2+(2\gamma\omega_d)^2}\cos\omega_d t + \frac{2F\gamma\omega_d}{(\omega^2-\omega_d^2)^2+(2\gamma\omega_d)^2}\sin\omega_d t + Ae^{-\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + Be^{-(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t}$$

ข้อสังเกตที่น่าสนใจ 2 พจน์แรกของคำตอบจะคงอยู่ตลอด เรียก 2 พจน์นี้ว่า steady solution ส่วน 2 พจน์หลังเมื่อเวลาผ่านไปพักหนึ่งจะเริ่มหายไป เรียก 2 พจน์หลังนี้ว่า transient solution และความถี่สุดท้ายของระบบคือความถี่ของ drag force หรือแรงภายนอกที่บังคับการเคลื่อนที่