Λύσεις Σεπτ. 2023

Θέμα 1ο (25) Ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας με διαμόρφωση BPSK λειτουργεί συνεχώς με data rate 5 Kbps χρησιμοποιώντας τα ισοπίθανα σήματα

$$s_1(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \quad \text{και} \quad s_2(t) = -A\cos(2\pi f_0 t).$$

Η rms τιμή του πλάτους των σημάτων είναι $V_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$ και η αντίσταση $R = 1\,\Omega$. Ο θόρυβος στον δέκτη είναι AWGN με $N_0 = 10^{-11}\, W/Hz$.

α-15) Να βρεθεί ο μέσος όρος των σφαλμάτων bit στη διάρκεια μιας μέρας. Δίνεται ότι $A = 1\,\mathrm{mV}$.

β-10) Ποιος είναι ο αριθμός των σφαλμάτων, όταν το data rate είναι 5 Mbps; Σχολιάστε πολύ σύντομα την απάντησή σας.

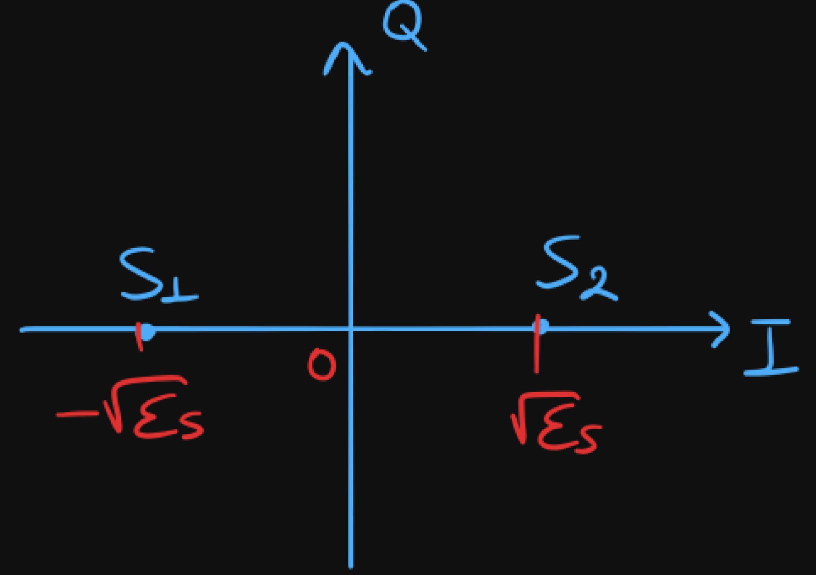
Υπόδειξη 1: Για την συνάρτηση $Q(x)$ να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $Q(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Υπόδειξη 2: Ο αριθμός των σφαλμάτων είναι ακέραιος.

α) • Ισχύει $E_s = P_s \cdot T = \frac{V_{rms}^2}{\underset{\text{αντίσταση}}{R}} \cdot \frac{1}{\underset{\text{data rate}}{R'}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow E_s = \frac{A^2}{2R} \cdot \frac{1}{R'} = \frac{10^{-6}}{2\cdot 1} \cdot \frac{1}{5\cdot 10^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_s = 10^{-10}\,J = E_b \quad \left(\text{Ενέργεια εκπομπής ενός bit}\right)$$

• Έστω



ο αστερισμός BPSK. Οπότε έχουμε

πιθανότητα σφάλματος αν στάλθηκε το s_1

$$P_{s|s_1} = P(r_I > 0) = P(n - \sqrt{E_s} > 0)$$

$$\Leftrightarrow P_{s|s_1} = P(n > \sqrt{E_s}) = P(n > 10^{-5}) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sqrt{\frac{10^{-11}}{2}}}\right)$$

$$\Leftrightarrow P_{s|s_1} = Q(4{,}47) = \frac{1}{2}e^{-\frac{4{,}47^2}{2}} \Leftrightarrow P_{s|s_1} = 2{,}29\cdot 10^{-5}$$

Οπότε $P_s = \frac{1}{2}\left(P_{s|s_1} + P_{s|s_2}\right) \xLeftrightarrow[\text{ισοπίθανα}]{s_1,\, s_2} P_s = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot \cancel{2}\, P_{s|s_1} \Leftrightarrow P_s = 2{,}29\cdot 10^{-5}$

• Άρα αφού στη διάρκεια μιας μέρας στέλνουμε $\underbrace{5\cdot 10^3}_{R'} \cdot \underbrace{60\cdot 60\cdot 24}_{\text{secs σε 1 μέρα}}$ bits, τότε έχουμε μέσο σφάλμα

$$P = 5\cdot 10^3 \cdot 60\cdot 60\cdot 24 \cdot 2{,}29\cdot 10^{-5} \Leftrightarrow \boxed{P = 9892 \text{ bits}}$$

β) Με την ίδια λογική $E_s' = \frac{10^{-6}}{2}\cdot\frac{1}{5\cdot 10^6} \Leftrightarrow E_s' = 10^{-13}\,J$, $P_{s|s_1}' = P(n > \sqrt{10^{-13}}) = Q\left(\frac{10^{-6{,}5}}{\sqrt{\frac{10^{-11}}{2}}}\right) = Q(0{,}14)$

$$\Leftrightarrow P_{s|s_1}' = \frac{1}{2}e^{-\frac{0{,}14^2}{2}} = 0{,}495 = P_s'$$

και άρα $P' = 5\cdot 10^6 \cdot 60\cdot 60\cdot 24\cdot 0{,}495 \Leftrightarrow \boxed{P' = 2{,}13\cdot 10^{11} \text{ bits}}$

Με την αύξηση του data rate μειώσαμε το E_s, οπότε τα σύμβολα του αστερισμού βρίσκονται πιο κοντά το ένα στο άλλο και άρα έχουμε αύξηση των σφαλμάτων bit.

Θέμα 2ο (20) Ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας χρησιμοποιεί τα σήματα $s_1(t) = A$, $s_2(t) = -A$ με την ίδια πιθανότητα. Το κανάλι είναι προσθετικού θορύβου με ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (ΣΠΠ)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3A} & x \in \left(-\frac{3A}{2}, \frac{3A}{2}\right) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Δηλαδή το σήμα που λαμβάνεται στον δέκτη είναι $r = s + n$, όπου το σύμβολο s είναι $-A$ ή A και το n είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την παραπάνω κατανομή. Ο δέκτης χρησιμοποιεί προσαρμοσμένο φίλτρο στη βάση.

α-10) Να υπολογίσετε την πιθανότητα σφάλματος bit, όταν ο δέκτης λειτουργεί με κριτήριο απόφασης την ελάχιστη ευκλείδεια απόσταση.

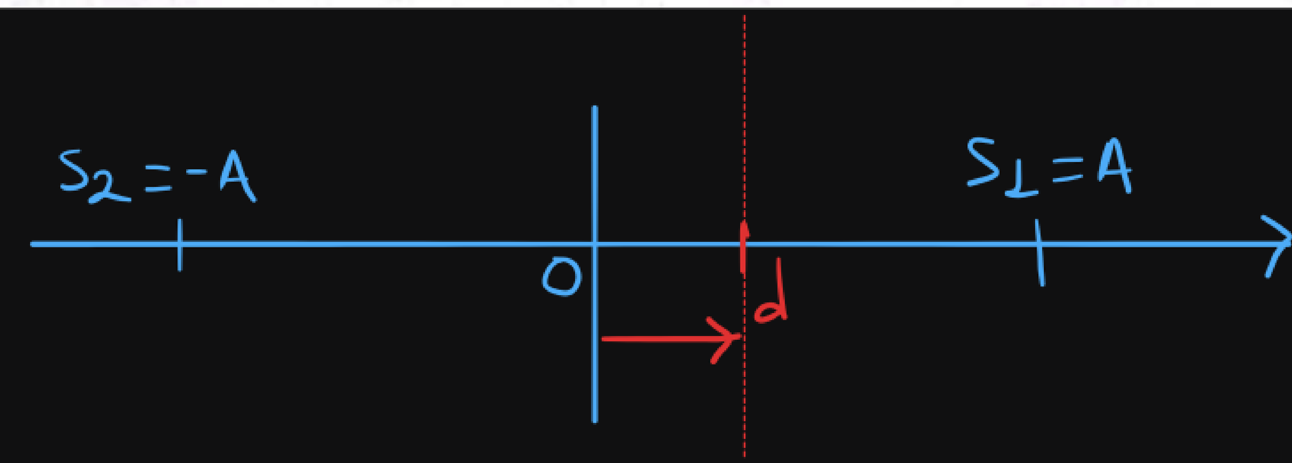
β-10) Να βρείτε το κριτήριο για την βέλτιστη απόφαση στον δέκτη, χρησιμοποιώντας γραφική ή αναλυτική μέθοδο, και να υπολογίσετε εκ νέου την πιθανότητα σφάλματος bit. Τι παρατηρείτε;

α) $P_b = P_s \overset{s_1,s_2}{\underset{\text{ισοπ.}}{=}} P_{s|s_1} = P(r<0) = P(n+A<0)$

$= P(n<-A) = \int_{-\frac{3A}{2}}^{-A} \frac{1}{3A}\,dx = \frac{1}{3A}\left(-A+\frac{3A}{2}\right)$

$= \frac{1}{3A}\cdot\frac{A}{2} \Leftrightarrow \boxed{P_b = \frac{1}{6}}$

β) • Ας θεωρήσουμε πως μετακινούμε το όριο κατά d προς τα δεξιά, δηλ.



Τότε $P_{s|s_1} = P(r<d) = P(n+A<d) = P(n<d-A) =$

$= \int_{-\frac{3A}{2}}^{d-A} \frac{1}{3A}\,dx = \frac{1}{3A}\left(d-A+\frac{3A}{2}\right) = \frac{d-A+\frac{3A}{2}}{3A}$

και $P_{s|s_2} = P(r>d) = P(n-A>d) = P(n>d+A) =$

$= \int_{d+A}^{3A/2} \frac{1}{3A}\,dx = \frac{1}{3A}\left(\frac{3A}{2}-d-A\right) = \frac{\frac{3A}{2}-d-A}{3A}$

• Πρέπει $P_{s|s_1} = P_{s|s_2} \Leftrightarrow \frac{d-A+\frac{3A}{2}}{3A} = \frac{\frac{3A}{2}-d-A}{3A} \Leftrightarrow d-A+\frac{3A}{2} = \frac{3A}{2}-d-A \Leftrightarrow 2d=0 \Leftrightarrow \boxed{d=0}$

Παρατηρούμε ότι το βέλτιστο σημείο απόφασης παραμένει το $d=0$ (με $P_b = \frac{1}{6}$).

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο καθώς οι τιμές του θορύβου ($-\frac{3A}{2}$ έως $\frac{3A}{2}$) είναι συμμετρικές ως προς το 0.

Θέμα 3ο (25) Ψηφιακή διαμόρφωση δύο διαστάσεων τάξης $M = 16$ χρησιμοποιεί με την ίδια πιθανότητα τα παρακάτω σύμβολα. Στην στήλη 2 φαίνονται τα bits $b_1b_2b_3b_4$ που αντιστοιχούν σε κάθε σύμβολο.

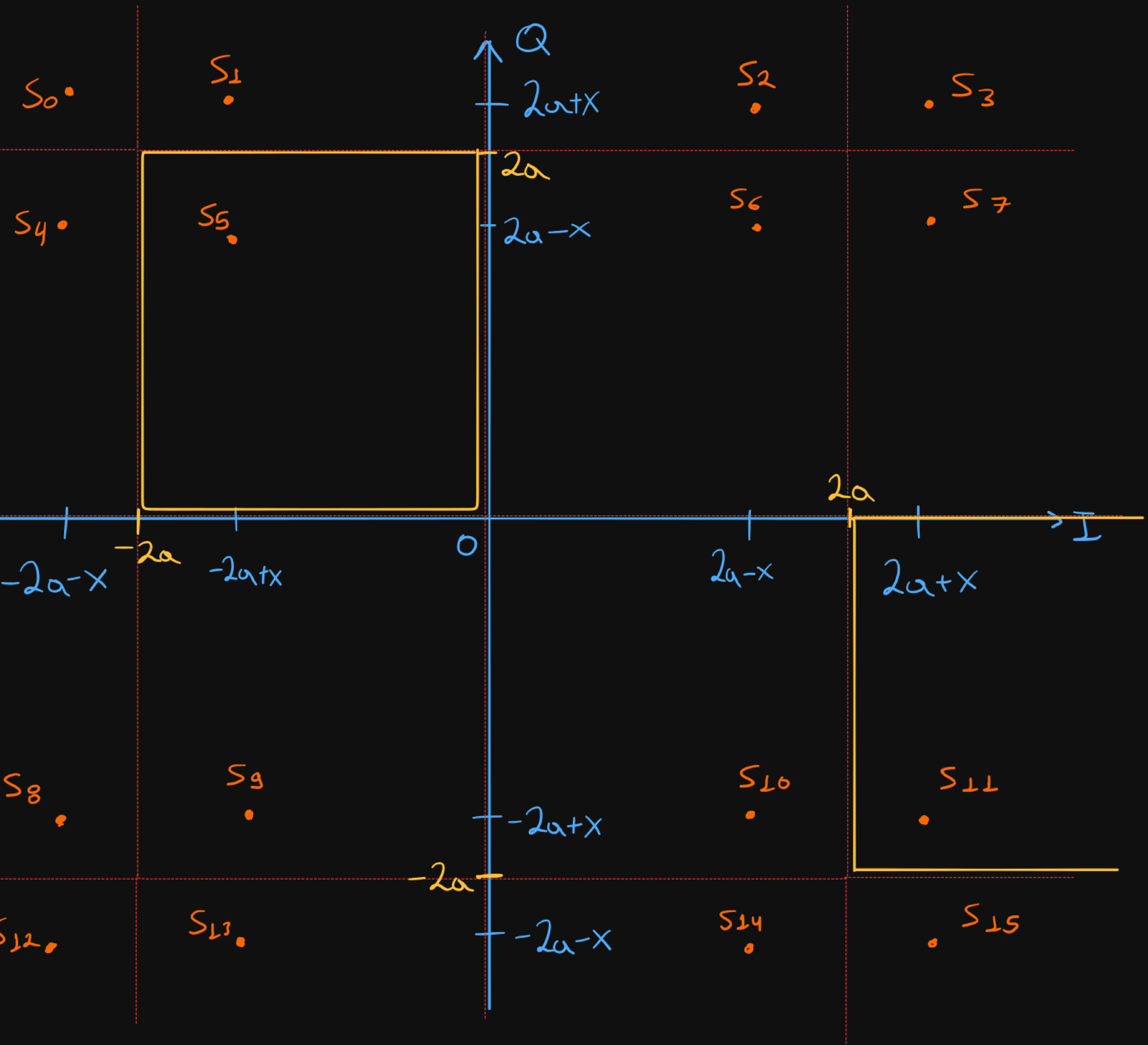
Σύμβολο	bits	s_I	s_Q
s_0	0010	$-2a-x$	$2a+x$
s_1	0110	$-2a+x$	$2a+x$
s_2	1110	$2a-x$	$2a+x$
s_3	1010	$2a+x$	$2a+x$
s_4	0011	$-2a-x$	$2a-x$
s_5	0111	$-2a+x$	$2a-x$
s_6	1111	$2a-x$	$2a-x$
s_7	1011	$2a+x$	$2a-x$
s_8	0001	$-2a-x$	$-2a+x$
s_9	0101	$-2a+x$	$-2a+x$
s_{10}	1101	$2a-x$	$-2a+x$
s_{11}	1001	$2a+x$	$-2a+x$
s_{12}	0000	$-2a-x$	$-2a-x$
s_{13}	0100	$-2a+x$	$-2a-x$
s_{14}	1100	$2a-x$	$-2a-x$
s_{15}	1000	$2a+x$	$-2a-x$

Ισχύει $a > 0$ και $0 < x < a$. Ο δέκτης λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με ΦΠΙ $\frac{N_0}{2}$ και χρησιμοποιεί MLD προκειμένου να αποφασίσει ποιο σύμβολο έχει σταλεί.

α-15) Να σχεδιαστεί συνολικά ο αστερισμός καθώς και οι περιοχές απόφασης για τα σύμβολα s_5 και s_{11} και να υπολογιστεί το $d^2_{\min}$ όταν $x = \frac{a}{2}$.

β-10) Αν r_I και r_Q είναι οι συνιστώσες του λαμβανόμενου σήματος, δηλαδή $r_I = s_I + n_I$ και $r_Q = s_Q + n_Q$ να βρείτε τις τιμές των r_I και r_Q για τις οποίες ο δέκτης θα αποφασίσει τα σύμβολα για τα οποία ισχύει $b_3 = 0$ και $b_4 = 1$.

a)



• Οι περιοχές απόφασης των s_5 και s_{11} φαίνονται με κίτρινο

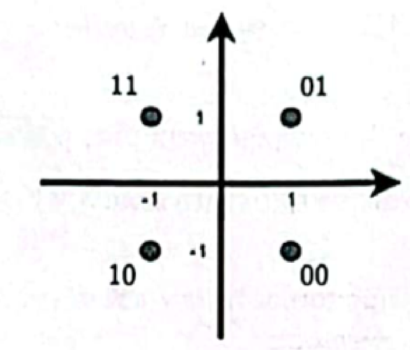
Πιο αναλυτικά για το s_5 έχουμε $0 \le r_I \le \frac{-2a-x-2a+x}{2} \Leftrightarrow \underline{0 \le r_I \le -2a}$ και $\underline{0 \le r_Q \le 2a}$

και για το s_{11} έχουμε $\underline{r_I \ge 2a}$ και $\underline{-2a \le r_Q \le 0}$

• $d_{min} = (2a+x)-(2a-x) = 2x = 2\cdot\frac{a}{2} \Leftrightarrow d_{min} = a$, οπότε $\boxed{d_{min}^2 = a^2}$

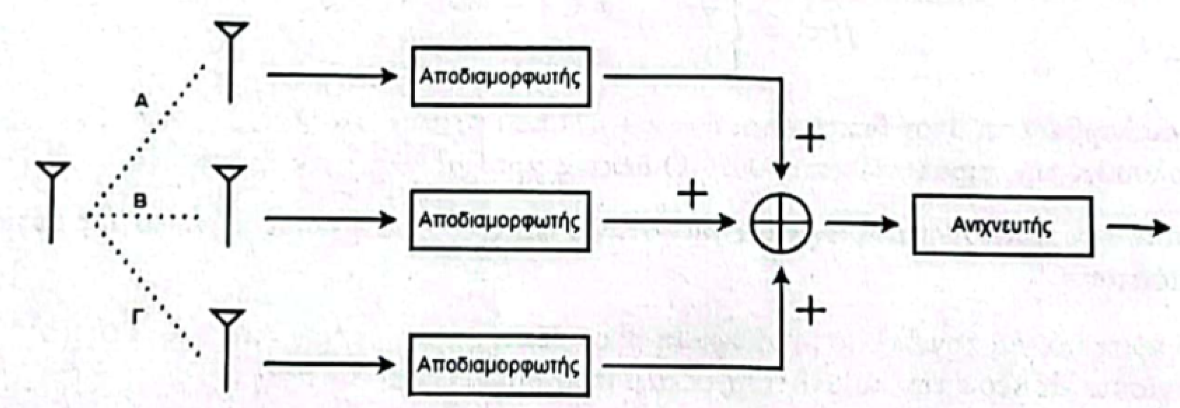
β) $b_3=0$ και $b_4=1$ έχουν τα σύμβολα s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, οπότε πρέπει $\boxed{r_I \in \mathbb{R} \text{ και } -2a \le r_Q \le 0}$

Θέμα 4ο (30) Ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα χρησιμοποιεί διαμόρφωση 4-QAM με τον αστερισμό του Σχήματος 1. Το σύστημα αποτελείται από δέκτη με τρεις κεραίες λήψης και τρεις αποδιαμορφωτές, όπως φαίνεται



Σχήμα 1: Αστερισμός 4-QAM

στο Σχήμα 2. Το κανάλι μεταξύ της κεραίας εκπομπής και των κεραιών λήψης επιδρά πολλαπλασιαστικά στο



Σχήμα 2: Δέκτης με 3 κεραίες λήψης

σήμα, δηλαδή ισχύει $r = hs + n$, όπου το h παίρνει τις διακριτές τιμές ανά κλάδο h_1, h_2 και h_3, με τις παρακάτω πιθανότητες:

$$\Pr\{h_1 = 0.4\} = 0.5 \quad \text{και} \quad \Pr\{h_1 = 0.6\} = 0.5$$
$$\Pr\{h_2 = 0.3\} = 0.6 \quad \text{και} \quad \Pr\{h_2 = 0.1\} = 0.4$$
$$\Pr\{h_3 = 0.2\} = 0.2 \quad \text{και} \quad \Pr\{h_3 = 0.4\} = 0.8$$

Υποθέτουμε ότι η πρώτη συντεταγμένη αντιστοιχεί στο πρώτο bit και η δεύτερη στο δεύτερο bit κάθε συμβόλου. Το χρησιμοποιούμενο mapping φαίνεται επίσης στο Σχήμα 1. Ο δέκτης λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ^2 και για την ανίχνευση χρησιμοποιεί MLD. Επίσης, οι τιμές που λαμβάνουν τα κανάλια στους τρεις κλάδους είναι γνωστές στον δέκτη.

α-20) Να υπολογιστεί η μέση πιθανότητα σφάλματος του πρώτου bit.

β-10) Να υπολογιστεί η μέση πιθανότητα σφάλματος του πρώτου bit στο ίδιο σύστημα, όταν $h_1 = h_2 = h_3 = 1$. Να συγκρίνετε και να σχολιάσετε σύντομα τα δύο αποτελέσματα.

α) Στην έξοδο του κάθε αποδιαμορφωτή θα έχουμε:
(μόνο για την x συντεταγμένη = 1ο bit)

- A: $r_1 = h_1 \cdot x + n_1$
- B: $r_2 = h_2 \cdot x + n_2$
- Γ: $r_3 = h_3 \cdot x + n_3$

Οπότε στην είσοδο του ανιχνευτή θα έχουμε

$$r = r_1 + r_2 + r_3 \iff r = (h_1+h_2+h_3)x + \underbrace{(n_1+n_2+n_3)}_{n' \sim N(0,3\sigma^2)}$$

Το x παίρνει μόνο τις τιμές -1 και 1, οπότε για τις πιθανότητες σφάλματος έχουμε:

- $P_{e|-1} = P(r>0) = P\big((h_1+h_2+h_3)\cdot(-1) + n' > 0\big) = P(n' > h_1+h_2+h_3) = Q\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right)$

- $P_{e|1} = P(r<0) = P\big((h_1+h_2+h_3)\cdot 1 + n' < 0\big) = P\big(n' < -(h_1+h_2+h_3)\big) = 1 - P\big(n' > -(h_1+h_2+h_3)\big) = 1 - Q\left(\frac{-(h_1+h_2+h_3)}{\sqrt{3\sigma^2}}\right) = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right)\right) = Q\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right)$

- Το άθροισμα $h_1+h_2+h_3$ παίρνει πολλές διαφορετικές τιμές με διαφορετική πιθανότητα. Έχουμε:
  - $P(h_1+h_2+h_3 = 0{,}9) = \overset{h_1=0,4}{0{,}5} \cdot \overset{h_2=0,3}{0{,}6} \cdot \overset{h_3=0,2}{0{,}2} + \overset{h_1=0,6}{0{,}5} \cdot \overset{h_2=0,1}{0{,}4} \cdot \overset{h_3=0,2}{0{,}2} + \overset{h_1=0,4}{0{,}5} \cdot \overset{h_2=0,1}{0{,}4} \cdot \overset{h_3=0,4}{0{,}8} = 0{,}26$
  - $P(h_1+h_2+h_3 = 1{,}1) = \overset{h_1=0,4}{0{,}5} \cdot \overset{h_2=0,3}{0{,}6} \cdot \overset{h_3=0,4}{0{,}8} + \overset{h_1=0,6}{0{,}5} \cdot \overset{h_2=0,3}{0{,}6} \cdot \overset{h_3=0,2}{0{,}2} + \overset{h_1=0,6}{0{,}5} \cdot \overset{h_2=0,1}{0{,}4} \cdot \overset{h_3=0,4}{0{,}8} = 0{,}46$
  - $P(h_1+h_2+h_3 = 0{,}7) = \overset{h_1=0,4}{0{,}5} \cdot \overset{h_2=0,1}{0{,}4} \cdot \overset{h_3=0,2}{0{,}2} = 0{,}04$
  - $P(h_1+h_2+h_3 = 1{,}3) = \overset{h_1=0,6}{0{,}5} \cdot \overset{h_2=0,3}{0{,}6} \cdot \overset{h_3=0,4}{0{,}8} = 0{,}24$

Για επαλήθευση $P_{ολ} = 1$

Ισχύει $P_e = \frac{1}{2}(P_{e|-1} + P_{e|1}) = Q\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{\sigma\sqrt{3}}\right)$, οπότε:

$$\boxed{P_e = Q\left(\frac{0{,}9}{\sigma\sqrt{3}}\right)\cdot 0{,}26 + Q\left(\frac{1{,}1}{\sigma\sqrt{3}}\right)\cdot 0{,}46 + Q\left(\frac{0{,}7}{\sigma\sqrt{3}}\right)\cdot 0{,}04 + Q\left(\frac{1{,}3}{\sigma\sqrt{3}}\right)\cdot 0{,}24}$$

β) Αν $h_1+h_2+h_3 = 3$, τότε $\boxed{P_e' = Q\left(\frac{3}{\sigma\sqrt{3}}\right) < P_e}$ αφού η Q είναι φθίνουσα

Άρα αφού $P_e' < P_e$, τότε είναι προτιμότερο να έχουμε $h_{1,2,3} = 1$ λόγω της μικρότερης μέσης πιθανότητας σφάλματος στα bit. Στην ουσία "διώχνουμε" τον τυχαίο πολ/κο παράγοντα του καναλιού.

Λύσεις Φεβ. 2023

Θέμα 1ο (15)
Να επιλέξετε "Σωστό" ή "Λάθος" στις παρακάτω ερωτήσεις και να αιτιολογήσετε σύντομα τις απαντήσεις σας.

α-5) Το πλήθος των συναρτήσεων βάσης ενός τρισδιάστατου χώρου που ορίζεται από 4 σήματα είναι ίσο με τον αριθμό των σημάτων.

-10) Έστω τηλεπικοινωνιακό σύστημα που χρησιμοποιεί αποκλειστικά αστερισμούς BPAM ή BPSK ίδιας ενέργειας. Εάν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα σφάλματος ανίχνευσης συμβόλου, θα πρέπει να επιλεχθεί ο αστερισμός BPSK.

α) Λ, σε τρισδιάστατο χώρο θα έχουμε 3 συναρτήσεις βάσης (όχι 4)

β) Λ, οι αστερισμοί BPAM και BPSK έχουν ίδια πιθανότητα σφάλματος συμβόλου για ίδιο $\mathcal{E}_b$

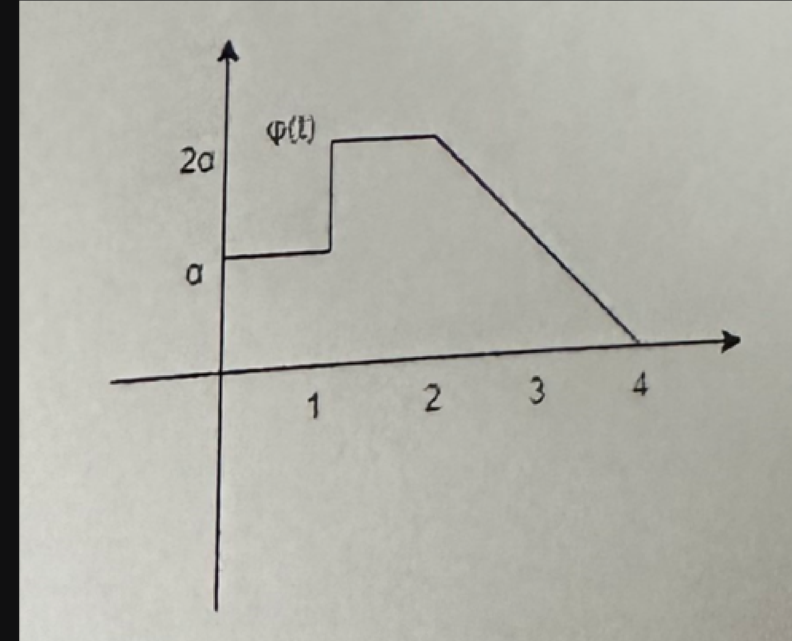
Θέμα 2ο (35)

Έστω BPAM διαμόρφωση με ισοπίθανα σύμβολα για την οποία ισχύει ότι $s_1(t)=\phi(t)$, όπου το $\phi(t)$ δίνεται στο Σχήμα 1. Ο δέκτης λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με $\sigma^2=\frac{N_0}{2}$.

α-10) Γνωρίζοντας ότι το $\phi(t)$ είναι βάση των σημάτων $s_1(t)$ και $s_2(t)$, να υπολογιστεί η τιμή του a.

β-10) Να σχεδιαστεί το σήμα $s_2(t)$ και να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος συναρτήσει του N_0, όταν ο δέκτης χρησιμοποιεί ML ανιχνευτή.

γ-15) Αν $s_1(t)=\frac{1}{2}\phi(t)$ με την τιμή του a που υπολογίστηκε, να συγκριθεί ποιοτικά η επίδοση ως προς την πιθανότητα σφάλματος με τον αστερισμό του προηγούμενου ερωτήματος.



Σχήμα 1. Σήμα φ(t)

α) • Αφού $s_1(t)=\varphi(t)$, τότε στον αστερισμό το s_1 έχει συντεταγμένη $s_1=\{1\}$, οπότε $\sqrt{E_b}=1 \Leftrightarrow E_b=1=E_\varphi$

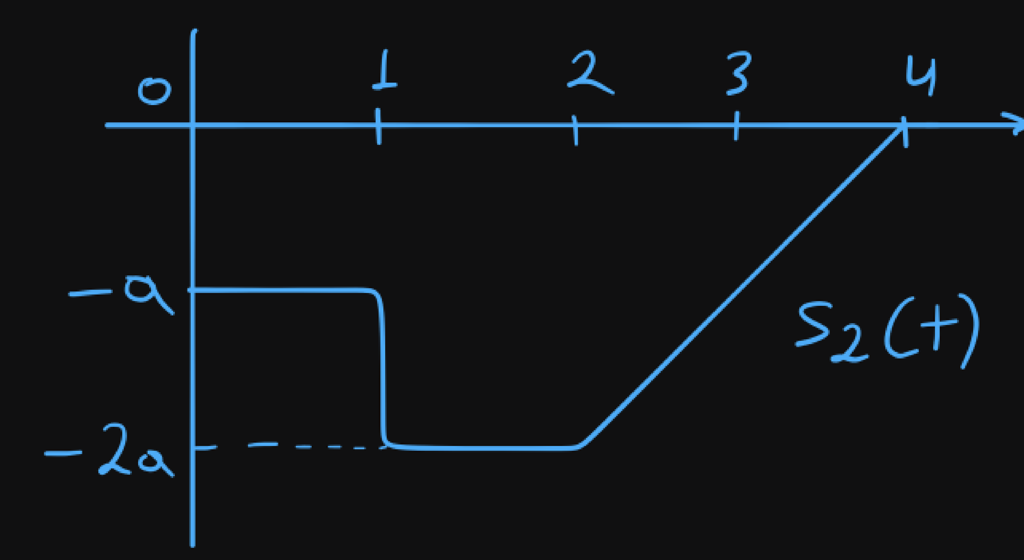
• Άρα $\int_0^4 |\varphi(t)|^2\,dt = 1 \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 a^2dt+\int_1^2 4a^2dt+\int_2^4(-at+4a)^2dt=1 \Leftrightarrow \int_0^1 a^2dt+\int_1^2 4a^2dt+\int_2^4 a^2t^2dt+\int_2^4 16a^2dt+\int_2^4 -4a^2t\,dt=1$$

$$\Leftrightarrow a^2+4a^2+a^2\left(\frac{4^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right)+32a^2-4a^2\left(\frac{4^2}{2}-\frac{2^2}{2}\right)=1 \Leftrightarrow 37a^2+\frac{56}{3}a^2-24a^2=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{95}{3}a^2=1 \Leftrightarrow a^2=\frac{3}{95} \Leftrightarrow \boxed{a=0{,}177}$$

β) • Το σήμα s_2 θα έχει συντεταγμένη $-\sqrt{E_b}=-1$, οπότε $s_2=-\varphi(t)$



• Με ML ανιχνευτή θα έχουμε $P_{b|s_1}=P(r<0)=P(n+1<0)$

$=P(n<-1)=1-P(n\geq -1)=1-Q\left(\frac{-1}{\sigma}\right)=1-\left(1-Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)$

$=Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) \Leftrightarrow P_{b|s_1}=Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)$

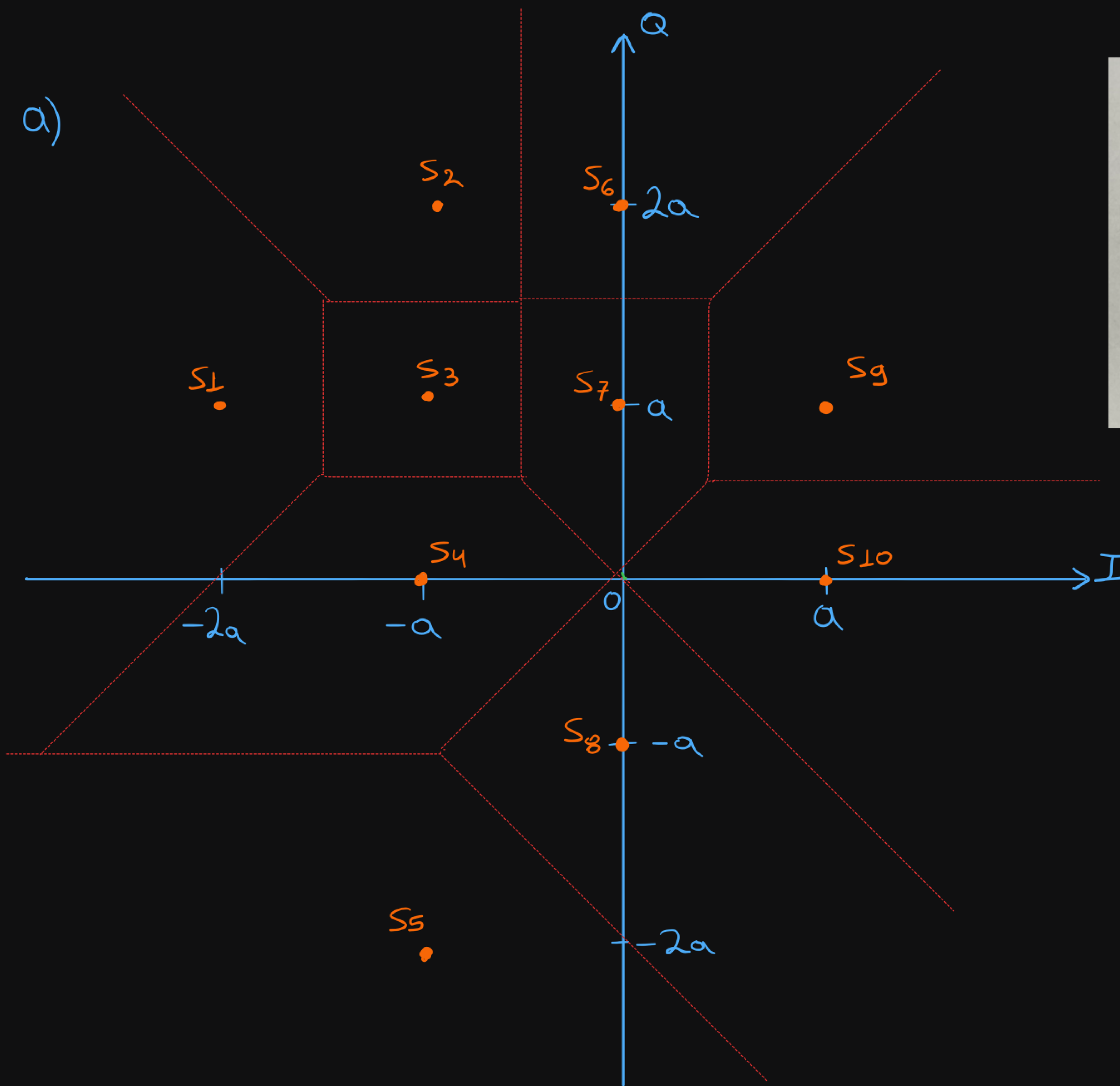
Άρα $P_b=\frac{1}{2}\left(P_{b|s_1}+P_{b|s_2}\right) \xrightarrow[\text{ισοπίθανα}]{s_1,\,s_2} \boxed{P_b=Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)}$

γ) • Επειδή $s_1(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)$, τότε $s_1=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ και $s_2=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, οπότε με την ίδια λογική

$P'_{b|s_1}=P(r<0)=P\left(n+\frac{1}{2}<0\right)=\dots=Q\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sigma}\right)=Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)=P_b'$

• Άρα $\boxed{P_b<P_b'}$ αφού η Q είναι φθίνουσα. Αναμενόμενο καθώς στην 2η περίπτωση τα σύμβολα έχουν μικρότερη ενέργεια (βρίσκονται πιο κοντά μεταξύ τους)

α)

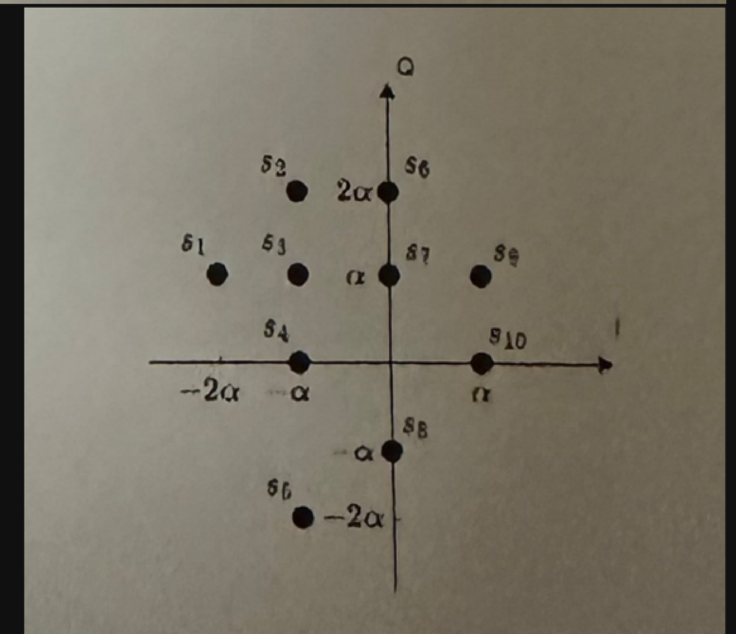


Θέμα 3ο (50)
Ένα ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα χρησιμοποιεί τον αστερισμό του Σχήματος 2.

α-10) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του αστερισμού συναρτήσει του α και να σχεδιαστούν οι περιοχές απόφασης.

β-30) Έστω ότι αποστέλλεται η ακολουθία συμβόλων s_3s_8. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να ληφθεί σωστά τουλάχιστον ένα από τα δύο σύμβολα σε περιβάλλον AWGN μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης σ^2.

γ-10) Έστω πως τα εκπεμπόμενα σύμβολα είναι στραμμένα κατά 45° (ωρολογιακά) λόγω ενός σφάλματος στον πομπό. Εάν ο δέκτης γνωρίζει το σφάλμα, πώς θεωρείτε ότι πρέπει να ενεργήσει ώστε οι πιθανότητες σφάλματος των συμβόλων να μην επηρεαστούν;



Σχήμα 2. Αστερισμός.

• Η μέση ενέργεια του αστερισμού είναι:

$$E_s = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\|s_i\|^2 \iff$$

$$E_s = \frac{1}{10}\Big(\overbrace{4a^2+a^2}^{s_1} + \overbrace{a^2+4a^2}^{s_2} + \overbrace{2a^2}^{\text{κτλ.}} + a^2 + a^2+4a^2+4a^2+a^2+a^2+2a^2+a^2\Big)$$

$$\iff \boxed{E_s = 2{,}7a^2}$$

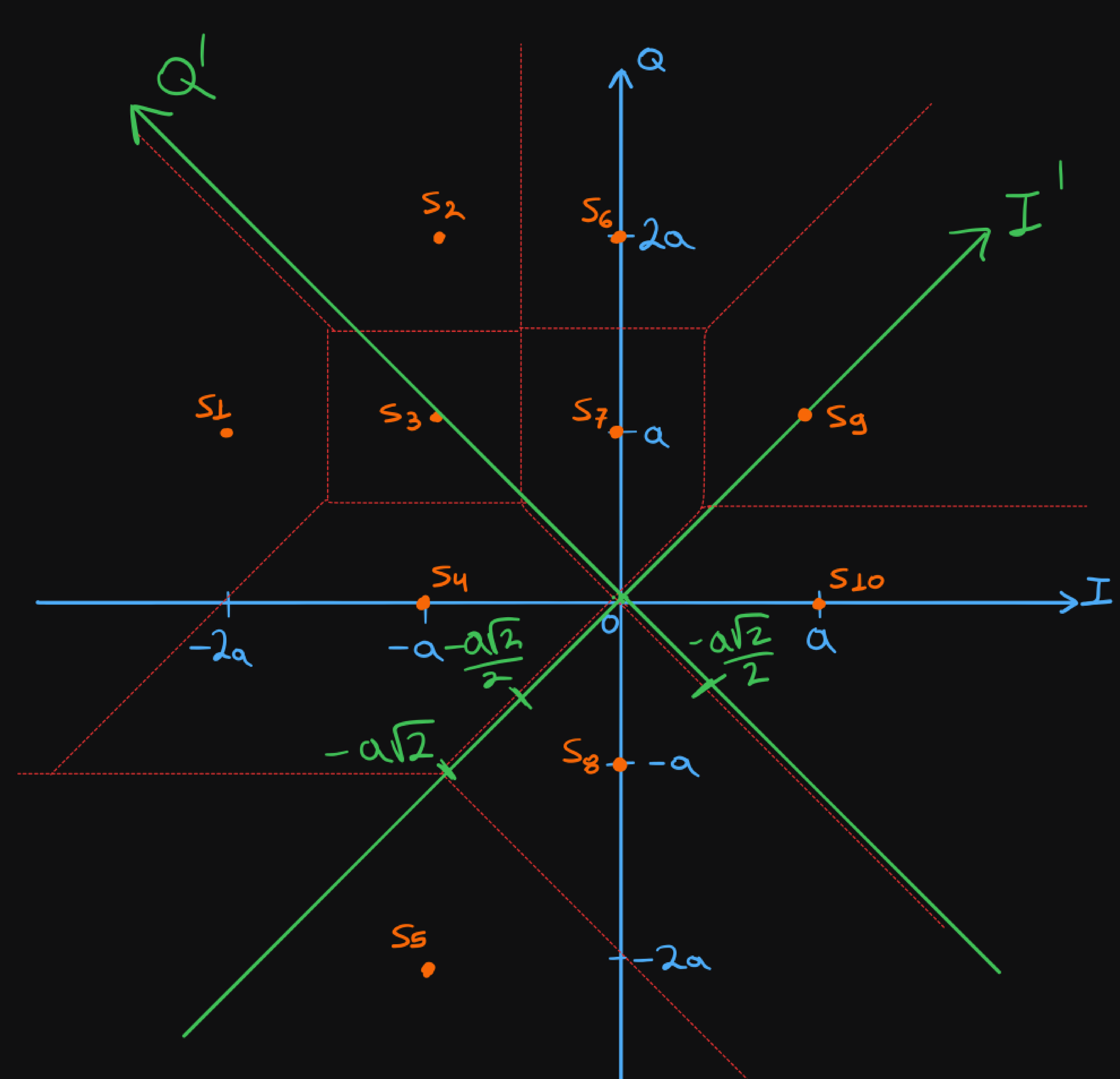
β) $\cdot\ P_3 = P\left(-\frac{a}{2} > r_I > -\frac{3a}{2} \cap \frac{a}{2} < r_Q < \frac{3a}{2}\right) = P\left(-\frac{a}{2} > -a+n > -\frac{3a}{2}\right)\cdot P\left(\frac{a}{2} < a+n < \frac{3a}{2}\right) =$

$$= P\left(\frac{a}{2} > n > -\frac{a}{2}\right)\cdot P\left(\frac{3a}{2} < n < \frac{5a}{2}\right) = P\left(-\frac{a}{2} < n < \frac{a}{2}\right)\cdot P\left(\frac{3a}{2} < n < \frac{5a}{2}\right) \iff$$

$$\iff P_3 = \left[Q\left(\frac{-\frac{a}{2}}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\frac{a}{2}}{\sigma}\right)\right]\cdot\left[Q\left(\frac{\frac{3a}{2}}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\frac{5a}{2}}{\sigma}\right)\right] \iff P_3 = \left[1 - Q\left(\frac{a}{2\sigma}\right) - Q\left(\frac{a}{2\sigma}\right)\right]\left[Q\left(\frac{3a}{2\sigma}\right) - Q\left(\frac{5a}{2\sigma}\right)\right]$$

$$\iff P_3 = \left[1 - 2Q\left(\frac{a}{2\sigma}\right)\right]\cdot\left[Q\left(\frac{3a}{2\sigma}\right) - Q\left(\frac{5a}{2\sigma}\right)\right]$$

• Για να βρούμε το P_8 θα περιστρέψουμε τους άξονες κατά 45° αντιωρολογιακά:



Όποτε $P_8 = P(-a\sqrt{2} < r_I' < 0 \cap r_Q' < 0) =$

$$= P\left(-a\sqrt{2} < -\frac{a\sqrt{2}}{2} + n < 0\right)\cdot P\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2} + n < 0\right) =$$

$$= P\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2} < n < \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\cdot P\left(n < \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \left[Q\left(\frac{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sigma}\right)\right]\cdot\left[1 - Q\left(\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sigma}\right)\right] \iff$$

$$\iff P_8 = \left[1 - 2Q\left(\frac{a\sqrt{2}}{2\sigma}\right)\right]\left[1 - Q\left(\frac{a\sqrt{2}}{2\sigma}\right)\right]$$

Άρα πιθανότητα να ληφθεί ένα τουλάχιστον από τα s_3, s_8 σωστά:

$$\boxed{P = P_3(1-P_8) + P_8(1-P_3) + P_3\cdot P_8}$$

γ) Αν τα σύμβολα περιστραφούν κατά 45° ωρολογιακά, τότε ο δέκτης θα πρέπει να τα περιστρέψει κατά 45° αντιωρολογιακά. Δηλαδή αν λάβει τις συνιστώσες r_I και r_Q, θα πρέπει να τις μετατρέψει σε r_I' και r_Q' σύμφωνα με τον τύπο (αν το ζητούσε):

$$\begin{pmatrix} r_I' \\ r_Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_I \\ r_Q \end{pmatrix} \iff \dots \iff \begin{cases} r_I' = \frac{\sqrt{2}}{2}(r_I - r_Q) \\ r_Q' = \frac{\sqrt{2}}{2}(r_I + r_Q) \end{cases}$$