

# Λύσεις Φεβρ. 2024

a). Ανοιχτός βρόχος:  $u = 0$   
 Λύνουμε το  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

Μοναδικό σημείο ισορροπίας το  $(0, 0)$

b). Εστω  $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\dot{V}(x) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_2 (-x_2^3 + x_1^4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{V}(x) = x_1 x_2 - x_2^4 + x_1^4 x_2 = x_2 (x_1 + x_1^4) - x_2^4 = x_2 (x_1 + x_1^4 - x_2^3) \quad \text{για πολύ μικρά } x_1, x_2$$

Οι όροι  $x_1^4$  και  $-x_2^3$  είναι πολύ μικροί, σούσε  $\dot{V}(x) = x_1 x_2$ , η οποία παίρνει και θετικό και αρν. πρόσημο.

Όποιες ισως το σύστημα να είναι ασταθείς κοντά στο  $0$

. Θα δοκιμάσουμε και με γραμμικοποίηση γύρω από το  $0$ .

$$z = x - x^* = x \quad \text{και} \quad \dot{z} = Az \quad \text{όπου} \quad A = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4x_1^3 & -3x_2^2 \end{bmatrix} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{\text{ηλαστή}} \quad \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \quad \text{η} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2' = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι  $x_2' = 0$ , σούσε  $x_2 = \text{const} = x_2(0) \neq 0$  (δινεται)  
 και  $x_1' = x_2 = x_2(0) \neq 0$  με  $x_1(0) \neq 0$

To  $x_1$  συνεχώς αυξάνεται ή  
 μειώνεται με σαθερό ρυθμό,  
 δεν είναι φραγμένο

Άρα το  $0$  είναι ασταθείς σημείο ισορροπίας

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \text{η} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x$$

$$\cdot \text{Βρίσκουμε ιδιότητές: } |sI - A| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} s & -1 \\ k_1 & s+k_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow s^2 + k_2 s + k_1 = 0$$

Για ολικά ασυμπτωτικά συσταθείς θέλουμε  $k_2 > 0$  και  $k_1 > 0$  (συντελεστές X.Π. ορόσημοι)  
 (Θ. Routh-Hurwitz)

c). Εστω  $u = -x_1^4 + x_2^3$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$   $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \rightarrow$  Γραμμικό σύστημα

e) Εχουμε  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v \end{cases}$  όπου  $v = -k_1 x_1 - k_2 x_2$ , σούσε

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \text{η} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x$$

$$\cdot \text{Βρίσκουμε ιδιότητές: } |sI - A| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} s & -1 \\ k_1 & s+k_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow s^2 + k_2 s + k_1 = 0$$

Θέλουμε να έρθει ση μορφή  $(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$ , σούσε  $k_2 = 3$  και  $k_1 = 2$

Θέμα 1 Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) \neq 0$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1^4 + u, \quad x_2(0) \neq 0.$$

Τα  $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$  είναι οι μεταβλητές κατάστασης,  $u \in \mathbb{R}$  η είσοδος ελέγχου.

α) (1 μονάδα) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος ανοιχτού βρόχου.

β) (2 μονάδες) Να μελετηθεί η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του ερωτήματος (α).

γ) (3 μονάδες) Να σχεδιαστεί ελεγκτής που να καθιστά το  $(0,0)$  ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου.

δ) (2 μονάδες) Να σχεδιαστεί ελεγκτής ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου που προκύπτει να είναι είναι γραμμικό.

ε) (2 μονάδες) Να σχεδιαστεί ελεγκτής για το γραμμικό σύστημα του ερωτήματος (δ), που να μεταφέρει τις ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόχου στις θέσεις -1 και -2.

# Λύσεις Σεντ. 2023

a) Επιλεγούμε  $u = \frac{\alpha \sin x_2 - bx_1^2 + v}{c}$  όπου  $v$  αλλοίες εξεγκενής

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha \sin x_2 + bx_1^2 + c \cdot \frac{\alpha \sin x_2 - bx_1^2 + v}{c} \Leftrightarrow \dot{x}_2 = v \end{cases}$$

Όποιες εξουμε  $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = v$ , δηλαδή είναι ζητούμερης  $\ddot{q} = v$

Θέμα 1 (6 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad x_1(0) \neq 0 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha \sin x_2 + bx_1^2 + cu + d(t), \quad x_2(0) \neq 0 \end{aligned}$$

όπου τα  $\alpha, b, c$  είναι γνωστές σταθερές παράμετροι διάφορες του μηδενός. Τα  $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$  είναι οι μεταβλητές κατάστασης,  $u \in \mathbb{R}$  η είσοδος ελέγχου και  $y = x_1$  η έξοδος. Με  $d \in \mathbb{R}$  συμβολίζουμε την είσοδο των εξωτερικών διαταραχών και υποθέτουμε ότι  $d(t) = \bar{d}$ ,  $\forall t \geq 0$ . Θεωρούμε ότι η  $\bar{d}$  είναι άγνωστη σταθερά.

α) (2 μονάδες) Να σχεδιαστεί ελεγκτής ανάδρασης καταστάσεων που να αναγκάζει το δοθέν σύστημα, απουσία διαταραχών, να συμπεριφέρεται όπως το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα

$$\ddot{q} = v.$$

β) (1 μονάδα) Παρουσία εξωτερικών διαταραχών, να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια το σύστημα ανοιχτού βρόχου που προκύπτει από το ερώτημα (α).

γ) (3 μονάδες) Παρουσία εξωτερικών διαταραχών, να επιλεγεί η είσοδος ελέγχου  $v$  του γραμμικοποιημένου συστήματος του ερωτήματος (α) έτσι ώστε η έξοδος του συστήματος να συγκλίνει ασυμπτωτικά στη σταθερή επιθυμητή είσοδο  $r$ .

β) Έχουμε  $\ddot{x}_1 = v + d$   $\xrightarrow[\text{βροχος } (v=0)]{\text{ανοιχτός}} \ddot{x}_1 = d \Leftrightarrow L\{\ddot{x}_1\} = L\{d\} \Leftrightarrow s^2 X_1(s) - s x_1(0) - x_1'(0) = \frac{d}{s}$   
 $\Leftrightarrow s^2 X_1(s) - s x_1(0) - x_2(0) = \frac{d}{s} \Leftrightarrow X_1(s) = \frac{d}{s^3} + \frac{x_1(0)}{s^2} + \frac{x_2(0)}{s} \Leftrightarrow x_1(t) = \frac{d}{2} t^2 + x_1(0) + x_2(0) t$

και  $x_2(t) = x_1(t) = \frac{d}{2} t + x_2(0)$  Έχουμε τις παρακατώ περιντώσεις:

•  $d \neq 0$ : Για  $t \rightarrow \infty$  εχουμε  $x_1(t) \rightarrow \infty$  και  $x_2(t) \rightarrow \infty$

•  $d = 0$ : Για  $t \rightarrow \infty$  εχουμε  $x_1(t) = x_2(0) t + x_2(0) \rightarrow \infty$  και  $x_2(t) = x_2(0)$

και οτις 2 περιντώσεις εχουμε ασταθεια, αρα συστημα ασταθεις

γ). Αρχικά θα εξετάσουμε αν το σύστημα είναι ελεγκτικό  $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v + d \\ \dot{z} = y - r = x_1 - r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{δυναμικη}]{\text{για}} \text{ανάδραση}$

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \end{bmatrix} \text{ όπου } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^2 B = A \cdot AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

οποιει  $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  και  $\det(M) = -1 \neq 0 \rightarrow$  σύστημα ελεγκτικό

• Θα πονθείσουμε ελεγκτής ανάδρασης καταστάσεων, οπότε  $v = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_i z$

Έχουμε  $\dot{x}_1 = x_2$   
 $\dot{x}_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_i z + d$   $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d$

• Εξουμε οι διοτιμές του  $\tilde{A}$  να βρισκούνται σε αριστερό ημιεύλεδο, οπότε:

$$\det(sI - \tilde{A}) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ k_1 & s+k_2 & k_i \\ -1 & 0 & s \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} s+k_2 & k_i \\ 0 & s \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} k_1 & k_i \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_i$$

Για λόγους αντανακτας θα θεωρήσουμε πως οι διοτιμές είναι ισες με  $-\lambda$ ,  $\lambda > 0$   
 οπότε το ενθυμητό x.π. είναι το  $(s+\lambda)^3$  ή  $s^3 + 3\lambda s^2 + 3\lambda^2 s + \lambda^3$

Οπότε  $k_2 = 3\lambda$  και  $k_1 = 3\lambda^2$  και  $k_i = \lambda^3$

$$\alpha) \cdot \text{Έχουμε } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{οπότε } M = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \det(M) = -1 \neq 0$$

Άρα είναι ελεγκτής

$$\beta) \dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - \sin x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{Άρα μοναδικό σημείο ισορροπίας το } (0,0)$$

$$\gamma) \cdot \text{Έστω } V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \text{ οπότε } \dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_2(-x_1 - \sin x_2)$$

$$\Leftrightarrow \dot{V}(x) = -x_2 \sin x_2, \text{ επειδή } x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ τότε } \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

• Επειδή  $V(x)$  θετικά οριούνται και  $\dot{V}(x)$  αρνητικά γηριορισμένη, τότε το  $(0,0)$  είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας (σύμφωνα με το Θ-Lyapunov)

$$\cdot \text{Ορίζουμε το σύνολο } S = \left\{ \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{x_1 \in \mathbb{R}}, x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) : \dot{V} = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x_2 = 0 \right\}$$

$$\text{Και για } x_2 = 0 \text{ το σύστημα γίνεται } \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \rightarrow \text{μηδενίζεται στη σημείο } (b, 0) \\ \dot{x}_2 = -x_1 \rightarrow " " " " "(0, 0) \end{cases}$$

$$b \neq 0$$

• Άντοντας  $(x_1, x_2) = (b, 0)$ , τότε  $x_2 \neq 0$  και αρά  $x_2 \neq 0 \rightarrow$  βγήκαμε από το  $S$

• Άντοντας  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ , τότε  $\dot{x}_2 = 0$  και αρά  $x_2 = 0 \rightarrow$  παραμένουμε στο  $S$

Άρα σύμφωνα με το Θ-LaSalle το μεχανισμό αψεψάβησε υποσύνολο του  $S$   
είναι το  $(0,0)$  αρά το  $(0,0)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές S.I.(στο  $\Omega$ )

Θέμα 2 (4 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u$$

όπου  $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$  είναι οι μεταβλητές κατάστασης και  $u \in \mathbb{R}$  η είσοδος ελέγχου.

α) (1 μονάδα) Είναι το σύστημα ελέγχιμο;

β) (1 μονάδα) Κλείνουμε το βρόχο με τη βοήθεια του ελεγκτή

$$u = -\sin x_2.$$

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου

γ) (2 μονάδες) Να μελετηθεί η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου.

# Άσεις Ιουνίου 2023

A)  $\dot{x}_1 = x_2$   
 $\dot{x}_2 = x_1 \sin x_2 + x_2$

Λύνουμε το σύστημα  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 \cdot 0 + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Σημεία ισορ.:  $(a, 0)$   
 $a \in \mathbb{R}$

ΔΕΥ Σίναι απομονωμένα αφού δεν υπάρχει κύκλος  
με κέντρο το  $(a, 0)$   $\forall a \in \mathbb{R}$  και ακριβά μη  
μηδενική που να μην περιέχει άλλα σημεία ισορροπίας.

Θέμα 1 (5 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \sin x_2 + x_2 + u \end{aligned} \quad (1.1)$$

A) (1 μονάδα). Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος ανοιχτού βρύχου. Είναι απομονωμένα;

B) (2 μονάδες). Να μελετηστεί αν το σύστημα (1.1) μπορεί να γραμμικοποιηθεί μέσω ανάδρασης κι αν ναι να σχεδιαστεί ελεγκτής γραμμικοποίησης που να μετατρέπει το σύστημα κλειστού βρύχου σε ελέγχιμο γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα.

C) (3 μονάδες). Να σχεδιαστεί ελεγκτής που να επιβάλλει στο γραμμικό σύστημα του ερωτήματος (B) συντελεστή απόσβεσης 1.5 και φυσική συχνότητα 2 rad/s.

B) • Για  $u = -x_1 \sin x_2 + v$  μπορούμε να γραμμικοποιήσουμε το σύστημα, οπότε

•  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  και  $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , οπότε  $M = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  και  $\det(M) = -1 \neq 0$   
σύστημα ελέγχιμο

• Έχουμε σταθερούς λίνακες  $A$  και  $B$ , αφού το σύστημα είναι γραμμικό χρονικά αμετάβλητο.

C) • Για να ελέγχουμε στις 18.0 τιμές, επιλέγουμε  $v = -k_1 x_1 - k_2 x_2$  ελεγκτή, οπότε:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_1 + (1 - k_2) x_2 \end{aligned} \Leftrightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & 1 - k_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} x \quad \text{με } \det(SI - \tilde{A}) = \begin{vmatrix} s & 1 \\ -k_1 & s - 1 + k_2 \end{vmatrix} =$$

$$= s(s - 1 + k_2) + k_2 = s^2 + (k_2 - 1)s + k_2 \text{ ο οποιος πολυώνυμος.}$$

$$\text{Συγκρινούμε με τη μορφή } s^2 + 2J\omega_n s + \omega_n^2 \xrightarrow{\substack{J=1, S \\ \omega_n=2r/s}} s^2 + 6s + 4$$

$$\text{Αρα θέλουμε } k_2 - 1 = 6 \Leftrightarrow k_2 = 7 \quad \text{και} \quad k_2 = 4$$

A) • Εστω  $\dot{x}_1 = x$  και  $\dot{x}_2 = \dot{x}$ , τότε  
 $\ddot{x}_1 = \ddot{x} = 2$  και  $\ddot{x}_2 = \ddot{\dot{x}} = -2x_2^3 - 3x_1$  δηλ.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2^3 \end{cases}$$

B) •  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -3x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

**Θέμα 2 (3 μονάδες).** Δίνεται το σύστημα:  
 $\ddot{x} + 2\dot{x}^3 + 3x = 0$ .

A) (1 μονάδα). Να επιλεγούν οι μεταβλητές κατάστασης και να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης.

B) (0.5 μονάδες). Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Γ) (1.5 μονάδες). Να δείξετε ότι το σημείο ισορροπίας είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Μοναδικό σημείο 150φ.  $\Rightarrow (0, 0)$

Γ) • Εστω  $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ , τότε  $\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_2(-3x_1 - 2x_2^3) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \dot{V}(x) = x_1x_2 - 3x_1x_2 - 2x_2^3 \Leftrightarrow \dot{V}(x) = -2x_2^3 - 2x_1x_2 \rightarrow$  δεν μπορούμε να εξαγούμε συμπέρασμα για ευστάθεια  
 Θελουμε να το διαλέξουμε

• Ξαναενιάζομε  $V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ , τότε:

$$\dot{V}(x) = 3x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 3x_1x_2 + x_2(-3x_1 - 2x_2^3) = 3x_1x_2 - 3x_1x_2 - 2x_2^4 \Leftrightarrow \dot{V}(x) = -2x_2^4$$

• Η  $V(x)$  είναι θετικά ορισμένη και η  $\dot{V}(x)$  αρνητικά ήμιορισμένη, άρα το  $(0, 0)$  είναι ολικά ευσταθές σημείο ισορροπίας (θ. Lyapunov)

• Θεωρούμε το σύνολο  $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V} = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$

οπότε το σύστημα γίνεται  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 \end{cases}$   
 $b \neq 0$

• Για  $(x_1, x_2) = (b, 0)$  έχουμε  $\dot{x}_2 \neq 0$  και άρα  $x_2 \neq 0 \rightarrow$  Βγήκαμε από το  $S$

• Για  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  έχουμε  $\dot{x}_2 = 0$  και άρα  $x_2 = 0 \rightarrow$  Παραμένουμε στο  $S$

Αρα σύμφωνα με το θ. LaSalle το μεγαλύτερο αψερβήσανο του  $S$   
 είναι το  $(0, 0)$  αρα το  $(0, 0)$  είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές Σ.Ι.

• Αφού ο πίνακας  $A$  είναι πίνακας Hurwitz  
 (αντά έχει όλες του τις 1διοτιμές με αρν. πραγμ. μέρος)  
 τότε υπάρχει πίνακας  $P$  συμμετρικός, θετ. ορισμένος  
 z.w.  $\underline{-Q_A = A^T P + PA}$  για κάποιον  $Q_A$   
 πίνακα συμμετρικό, θετικά ορισμένο.

Θέμα 3 (2 μονάδες). Έστω το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα:  
 $\dot{x} = (A+B)x, \quad x \in \mathbb{R}^n$

όπου  $A$  είναι πίνακας Hurwitz και  $B$  ένας οποιοσδήποτε σταθερός πίνακας. Αν  $B=0$  τότε προφανώς το σύστημα που προκύπτει είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Έστω τώρα  $B \neq 0$ . Να βρεθεί ένα άνω γράγμα στη νόρμα  $|B|$  του πίνακα  $B$  ώστε το μηδέν να παραμένει ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισιορροπίας.

• Εστω  $\underline{V(x) = x^T Px}$ , τότε  $\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} = (\tilde{A}x)^T Px + x^T P \tilde{A}x =$   
 $= x^T \tilde{A}^T Px + x^T P \tilde{A}x = x^T (\tilde{A}^T P + P \tilde{A})x = x^T (A^T P + B^T P + PA + PB)x =$   
 $= x^T (A^T P + PA)x + x^T (B^T P + PB)x \leq -\lambda_{min}(Q_A) \|x\|^2 + \underbrace{\|B^T P + PB\| \cdot \|x\|^2}_{\leq \|B^T P\| + \|PB\|} \Leftrightarrow$   
 $\leq \|B^T P\| + \|PB\| \leq \|B^T\| \cdot \|P\| + \|P\| \cdot \|B\| = 2\|B\| \cdot \|P\|$

$\Leftrightarrow \dot{V}(x) \leq -\lambda_{min}(Q_A) \|x\|^2 + 2\|B\| \cdot \|P\| \cdot \|x\|^2$

• Θέλουμε  $\dot{V}(x)$  αρνητικά ορισμένη, δηλ.  $(-\lambda_{min}(Q_A) + 2\|B\| \cdot \|P\|) \cdot \|x\|^2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \lambda_{min}(Q_A) > 2\|B\| \cdot \|P\| \Leftrightarrow \|B\| < \frac{\lambda_{min}(Q_A)}{2\|P\|}$

Αφού  $V(x)$  θετικά ορισμένη και  $\dot{V}(x)$  αρν. ορισμένη για  $\|B\| < \frac{\lambda_{min}(Q_A)}{2\|P\|}$ , τότε  
 $(0,0)$  ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημ. Ισορ.

# Λύσεις Ιουνίου 2022

- A) Ενδεχομένες
  - $\dot{u} = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_i z$  οπότε
  - $\dot{z} = y - r = x_2 - r$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_1 - k_1 & -\alpha_2 - k_2 & -k_i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r$$

$$\cdot \det(sI - \tilde{A}) = \begin{vmatrix} s + \alpha_1 + k_1 & \alpha_2 + k_2 & k_i \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} =$$

$$= (s + \alpha_1 + k_1) \begin{vmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} \alpha_2 + k_2 & k_i \\ -1 & s \end{vmatrix} + 0 = (s + \alpha_1 + k_1)s^2 + s(\alpha_2 + k_2) + k_i = s^3 + (\alpha_1 + k_1)s^2 + (\alpha_2 + k_2)s + k_i(1)$$

. Τριδιαύτης με ρίζη  $-\lambda \rightarrow$  X.Π. της μορφής  $(s + \lambda)^3 = s^3 + 3\lambda s^2 + 3\lambda^2 s + \lambda^3$

Οπότε  $\alpha_1 + k_1 = 3\lambda$

$$\alpha_2 + k_2 = 3\lambda^2 \iff \begin{cases} k_1 = 3\lambda - \alpha_1 \\ k_2 = 3\lambda^2 - \alpha_2 \\ k_i = \lambda^3 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= 3\lambda - \alpha_1 \\ k_2 &= 3\lambda^2 - \alpha_2 \\ k_i &= \lambda^3 \end{aligned}}$$

B) · Το  $k_1 = 3\lambda - \alpha_1$  θα γίνει  $k_1 = 3\lambda - \bar{\alpha}_1$  αφού γνωρίζουμε μόνο το  $\bar{\alpha}_1$

· Ανò την (1) αντικαθιστούμε za  $k_1, k_2$  και  $k_i$  και έχουμε X.Π.  $s^3 + (\bar{\alpha}_1 + \delta + 3\lambda - \bar{\alpha}_1)s^2 + (\alpha_2 + 3\lambda^2 - \alpha_2)s + \lambda^3 = s^3 + (3\lambda + \delta)s^2 + 3\lambda^2 s + \lambda^3$  και θα πρέπει οι ιδιοτητές να εξακολουθούν να βρίσκονται αριστερά, ώστε να είναι ασυρνωσικά ευσαθής και άρα να ζεινούμε στο σημείο ισοροίας ( $y \rightarrow r$ )

· Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh-Hurwitz:

$s^3$	$1$	$3\lambda^2$	$0$
$s^2$	$3\lambda + \delta$	$\lambda^3$	$0$
$s^1$	$3\lambda^2 - \frac{\lambda^3}{3\lambda + \delta}$	$0$	
$s^0$	$\lambda^3$		

$$\begin{aligned} \cdot \frac{(3\lambda + \delta)3\lambda^2 - \lambda^3}{3\lambda + \delta} &= 3\lambda^2 - \frac{\lambda^3}{3\lambda + \delta} \\ \cdot \frac{\left(3\lambda^2 - \frac{\lambda^3}{3\lambda + \delta}\right)\lambda^3 - 0}{3\lambda^2 - \frac{\lambda^3}{3\lambda + \delta}} &= \lambda^3 \end{aligned}$$

Πρέπει όλα θετικά  
(να μην έχουμε εναλλαγές προσήμων)

Άρα  $3\lambda + \delta > 0 \Leftrightarrow \delta > -3\lambda$

Οπότε  $\boxed{\delta > -\frac{8}{3}\lambda}$

Θέμα 1 (5 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

όπου  $a_1, a_2$  κάποιες σταθερές παράμετροι,  $u \in \mathbb{R}$  η είσοδος ελέγχου,  $y \in \mathbb{R}$  η έξοδος και  $x \in \mathbb{R}^2$  το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης.

A) (2.5 μονάδες) Έστω  $r \in \mathbb{R}$  μια σταθερή είσοδος αναφοράς. Να σχεδιαστεί, συναρτήσει των  $a_1, a_2$ , ελεγκτής δυναμικής ανάδρασης καταστάσεων, που να εγγυάται ότι  $y \rightarrow r$  ασυμπτωτικά, και ότι το σύστημα κλειστού βρόχου που προκύπτει να εμφανίζει μια ιδιοτιμή κατάλληλης πολλαπλότητας στη θέση  $-\lambda$  με  $\lambda > 0$ .

B) (2.5 μονάδες) Να θεωρήσετε τώρα πως η παράμετρος  $a_1$  δεν είναι πλήρως γνωστή. Έστω ότι η πραγματική τιμή της είναι  $\bar{\alpha}_1 + \delta$ , με το  $\bar{\alpha}_1$  γνωστό και το  $\delta$  μια άγνωστη σταθερά. Ποια η περιοχή τιμών της παραμετρικής ασάφειας  $\delta$  για την οποία ο ελεγκτής που σχεδιάστηκε στο ερώτημα (a) εξακολουθεί να εγγυάται ότι  $y \rightarrow r$  ασυμπτωτικά;

$$\text{Και } 3\lambda^2 - \frac{\lambda^3}{3\lambda + \delta} > 0 \Leftrightarrow 3 > \frac{\lambda}{3\lambda + \delta} \Leftrightarrow 9\lambda + 3\delta > \lambda \Leftrightarrow \delta > -\frac{8}{3}\lambda$$

$$A) \text{ Αναρριχεται } \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}=0 \\ \dot{\kappa}=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(y)-\kappa y=0 \\ \gamma y^2=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(0)=0 \\ y=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y=0$$

$$\text{αφού } |f(y)| \leq \lambda |y| \Leftrightarrow |f(0)| \leq 0 \Leftrightarrow f(0)=0$$

$$\text{Άρα τα σημεία ισορροπίας είναι τα } (y, \kappa) = (0, \alpha) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Δεν είναι απομονωμένα (δες εξήγηση σε προηγούμενη λίστη)

$$B) \cdot \text{Θεωρούμε } V = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2\gamma} (\kappa - \lambda)^2, \text{ οπότε}$$

$$\dot{V} = y \dot{y} + \frac{1}{\gamma} (\kappa - \lambda) \cdot \dot{\kappa} = y(f(y) - \kappa y) + \frac{1}{\gamma} (\kappa - \lambda) \cdot \gamma y^2$$

$$= y f(y) - \kappa y^2 + \kappa y^2 - \lambda y^2 \Leftrightarrow \dot{V} = y f(y) - \lambda y^2$$

$$\text{και άρα } \dot{V} \leq \lambda y^2 - \lambda y^2 \Leftrightarrow \dot{V} \leq 0$$

Θέμα 2 (5 μονάδες). Έστω το σύστημα:

$$\dot{y} = f(y) + u, \quad y(0) = y_0, \quad y, u \in \mathbb{R}.$$

Με  $u$  συμβολίζεται η είσοδος ελέγχου. Η μη-γραμμική συνάρτηση  $f$  έχει άγνωστο τύπο και είναι ολικά συνεχής κατά Lipschitz, ικανοποιεί δηλαδή τη σχέση  $|f(y)| \leq \lambda |y|, \forall y \in \mathbb{R}$  και  $\lambda > 0$  μια άγνωστη σταθερά. Κλείνουμε το βρόχο με τον ελεγκτή:

$$u = -\kappa y$$

$$\dot{\kappa} = \gamma y^2, \quad \kappa(0) = \kappa_0 \geq 0,$$

με  $\gamma > 0$  μια σταθερά.

A) (1.5 μονάδες) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου. Είναι απομονωμένα;

B) (2.5 μονάδες) Να γίνει η μελέτη ευστάθειας του συστήματος κλειστού βρόχου.

C) (1 μονάδα) Αν η  $f$  είναι γνωστή μη-γραμμική συνάρτηση, να σχεδιάσετε ελεγκτή (διαφορετικό του ερωτήματος (B)), που να εγγυάται την εκθετική σύγκλιση του  $y$  στο μηδέν, με ρυθμό σύγκλισης  $\rho > 0$ .

$$\text{όμως } |f(y)| \leq \lambda |y|, \text{ δηλαδή } y f(y) \leq \lambda y^2$$

• Εχουμε  $\kappa(0) \geq 0$  και  $\dot{\kappa} = \gamma y^2 \geq 0$ , άρα  $\underline{\kappa(t) \geq 0}$ . Το  $\kappa$  δεν μειώνεται, οπότε  $0$

ελεγκτής  $u = -\kappa y$  γίνεται ολοκληρωμένος

• Αν το  $y$  είναι μη μηδενικό, τότε  $\dot{y} \leq 0$  το μέρος του  $y$  θα μειώνεται μέχρι  $y \rightarrow 0$

• Όταν  $y=0$ , τότε  $\dot{\kappa}=0$  και το  $\kappa$  θα σαραπάζεται να αυξάνεται

Όποτε το σύστημα είναι ολικά ευσταθές, και ασυρητωσικά συγκλίνει σε κάποιο σημείο ισορ.  $(y, \kappa) = (0, \alpha)$

$$\Gamma) \cdot \text{Έχουμε } \dot{y} = f(y) + u \text{ οπου } f(y) \text{ γνωστή, οπότε επιλέγουμε } u = -f(y) + V \quad (\text{ελεγκτής γραμμικοποίησης})$$

και για να έχουμε εκθετική σύγκλιση με ρυθμό  $\rho > 0$  επιλέγουμε  $V = -\rho y$ , οπότε

$$\dot{y} = -\rho y \Leftrightarrow sY - y(0) = -\rho Y \Leftrightarrow Y(s+\rho) = y(0) \Leftrightarrow Y = \frac{y(0)}{s+\rho} \Leftrightarrow y(t) = e^{-\rho t} \cdot y(0)$$

# Λύσεις φεβρ. 2022

• Θέτουμε  $x_1 = y$  και  $x_2 = \dot{y}$ , οπότε

$$\dot{x}_1 = \ddot{y} = x_2 \quad \text{και} \quad \dot{x}_2 = \ddot{\dot{y}} = -y - \dot{y}^3 = -x_1 - x_2^3 \quad \text{δηλ.}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow (0,0) \text{ σημείο ταπετζίας}$$

$$\cdot \text{Έστω } V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \text{ οπότε } \dot{V}(x) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 \cdot x_2 + x_2(-x_1 - x_2^3) = -x_2^4 \leq 0$$

Αφού  $V(x)$  θετικά οριομένη και  $\dot{V}(x)$  αριθμητική, τότε το  $(0,0)$  είναι ολικά ευσταθές σημείο ταπετζίας.

$$\cdot \text{Θεωρούμε το σύνολο } S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V} = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \right\}$$

$$\text{οπότε το σύστημα γίνεται} \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad b \neq 0$$

• Για  $(x_1, x_2) = (b, 0)$  έχουμε  $\dot{x}_2 \neq 0$  και αρά  $x_2 \neq 0 \rightarrow$  Βγίκαμε από το  $S$

• Για  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  έχουμε  $\dot{x}_2 = 0$  και αρά  $x_2 = 0 \rightarrow$  Παραμένουμε στο  $S$

Από σύμφωνα με το Θ. LaSalle το μεγαλύτερο αψεράβη το υποσύνολο του  $S$  είναι το  $(0,0)$  αρά το  $(0,0)$  είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές Σ.Ι.

**Οίμα 1 (3 μονάδες).** Δίνεται το ούτημα:

$$\ddot{y} + \dot{y}^3 + y = 0.$$

Να δείξετε ότι το μηδέν είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

a) • Εστω  $x_1 = y$  και  $x_2 = \dot{y}$ , οπότε

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \quad \text{και} \quad \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_1 + (1+x_2^2)u - (x_1^2 + x_2^2 - 1)x_2$$

$$\delta\eta \downarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 x_2 - x_2^3 + x_2 + x_1 + (1+x_2^2)u \end{cases}$$

και εξισώση εξάδου  $y = x_1$

$$\beta) \cdot \text{Επιλέγουμε } u = \frac{x_1^2 x_2 + x_2^3 + v}{1+x_2^2}, \text{ οπότε}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + v \end{cases} \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{όποια } M = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ με } \det(M) = -1 \neq 0 \rightarrow \text{συστήμα } \underline{\text{ελέγξιμο}}.$$

• Ορίζουμε  $v = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + p$  όπου  $p$  άλλος ελεγκτής. Έχουμε ανοιχτό βρόχο  $\rightarrow p = 0$

$$\text{οπότε} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (1-k_1)x_1 + (1-k_2)x_2 \end{cases}$$

$$= s^2 + (k_2 - 1)s + k_1 - 1, \text{ το συγκρινούμε με τη μορφή } s^2 + 2\{ \omega_n s + \omega_n^2 \} \frac{s+1}{s+\omega_n} = s^2 + 2s + 1$$

$$\text{οπότε } k_2 - 1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{k_2 = 3} \quad \text{και } k_1 - 1 = 1 \Leftrightarrow \boxed{k_1 = 2}$$

g) • Εχουμε

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + p \end{cases}$$

$$\text{επιλέγουμε } p = -ky = -kx_1, \text{ οπότε}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (-k - 1)x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$\text{με } \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ k+1 & s+2 \end{vmatrix} = s(s+2) + k + 1 = s^2 + 2s + k + 1$$

Σύμφωνα με κριτήριο Routh, για ασυμπτωτική ευστάθεια θέλουμε  $k+1 > 0 \Leftrightarrow k > -1$

Θέμα 2 (7 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\ddot{y} + (y^2 + \dot{y}^2 - 1)\dot{y} - y - (1 + \dot{y}^2)u = 0,$$

δημο η είσοδος ελέγχου και  $y \in \mathbb{R}$  η έξοδος.

α) (1 μονάδα). Να επιλεγούν μεταβλητές κατάστασης και να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης και εξόδου.

β) (3 μονάδες). Με τη βοήθεια ανάδρασης να μετατραπεί σε ελέγχιμο γραμμικό σύστημα που στον ανοιχτό βρόχο να εμφανίζει συντελεστή απόσβεσης 1 και φυσική συχνότητα 1 rad/s.

γ) (3 μονάδες). Για το γραμμικό σύστημα του ερωτήματος β), να σχεδιαστεί γραμμική ανάδραση εξόδου, χωρίς τη χρήση παρατηρητών, ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου που προκύπτει να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.