Λύσεις Σεπτ. 2023

Θέμα 1 (6 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0)\neq 0$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha \sin x_2 + b x_1^2 + cu + d(t), \quad x_2(0)\neq 0$$

όπου τα α,b,c είναι γνωστές σταθερές παράμετροι διάφορες του μηδενός. Τα $x_1\in\mathbb{R}, x_2\in\mathbb{R}$ είναι οι μεταβλητές κατάστασης, $u\in\mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου και $y=x_1$ η έξοδος. Με $d\in\mathbb{R}$ συμβολίζουμε την είσοδο των εξωτερικών διαταραχών και υποθέτουμε ότι $d(t)=\bar{d}, \ \forall t\ge 0$. Θεωρούμε ότι η $\bar{d}$ είναι άγνωστη σταθερά.

α) (2 μονάδες) Να σχεδιαστεί ελεγκτής ανάδρασης καταστάσεων που να αναγκάζει το δοθέν σύστημα, απουσία διαταραχών, να συμπεριφέρεται όπως το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα

$$\ddot{q} = \upsilon.$$

β) (1 μονάδα) Παρουσία εξωτερικών διαταραχών, να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια το σύστημα ανοιχτού βρόχου που προκύπτει από το ερώτημα (α).

γ) (3 μονάδες) Παρουσία εξωτερικών διαταχών, να επιλεγεί η είσοδος ελέγχου υ του γραμμικοποιημένου συστήματος του ερωτήματος (α) έτσι ώστε η έξοδος του συστήματος να συγκλίνει ασυμπτωτικά στη σταθερή επιθυμητή είσοδο r.

α) Επιλέγουμε $u = \dfrac{a\sin x_2 - b x_1^2 + v}{c}$ όπου v άλλος ελεγκτής

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -a\sin x_2 + b x_1^2 + c\cdot\dfrac{a\sin x_2 - bx_1^2+v}{c}\end{cases} \Leftrightarrow \dot{x}_2 = v$$

Οπότε έχουμε $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = v$, δηλαδή είναι της μορφής $\ddot{q} = v$

β) Έχουμε $\ddot{x}_1 = v+\bar{d} \xrightarrow[\text{βρόχος } (v=0)]{\text{ανοιχτός}} \ddot{x}_1 = \bar{d} \Leftrightarrow L\{\ddot{x}_1\} = L\{\bar{d}\} \Leftrightarrow s^2X_1(s) - s x_1(0) - x_1'(0) = \dfrac{\bar{d}}{s}$

$$\Leftrightarrow s^2X_1(s) - sx_1(0) - x_2(0) = \frac{\bar{d}}{s} \Leftrightarrow X_1(s) = \frac{\bar{d}}{s^3} + \frac{x_1(0)}{s} + \frac{x_2(0)}{s^2} \Leftrightarrow x_1(t) = \frac{\bar{d}}{2}t^2 + x_1(0) + x_2(0)t$$

και $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \bar{d}\,t + x_2(0)$ Για $t\to\infty$ έχουμε $x_1(t)\to\infty$ και $x_2\to\infty$, οπότε ασταθές

γ) • Αρχικά θα εξετάσουμε αν το σύστημα είναι ελέγξιμο $\begin{pmatrix}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = v+\bar{d}\end{pmatrix}$

$M=[B \ \ AB]$ όπου $B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ και $AB = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ οπότε $M=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

$\det(M) = -1\neq 0 \longrightarrow$ σύστημα ελέγξιμο

• Θα τοποθετήσουμε ελεγκτή δυναμικής ανάδρασης καταστάσεων, οπότε $v = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_i z$

$\dot{z} = y - r = x_1 - r$

έχουμε

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -k_1x_1 - k_2x_2 - k_i z + \bar{d}\\ \dot{z} &= x_1 - r\end{aligned} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\-k_1&-k_2&-k_i\\1&0&0\end{bmatrix}}_{\tilde{A}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}r + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\bar{d}$$

• Θέλουμε οι ιδιοτιμές του $\tilde{A}$ να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο, οπότε:

$$\det(sI-\tilde{A}) = \begin{vmatrix}s&-1&0\\k_1&s+k_2&k_i\\-1&0&s\end{vmatrix} = s\begin{vmatrix}s+k_2&k_i\\0&s\end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix}k_1&k_i\\-1&s\end{vmatrix} = s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_i$$

Για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε πως όλες οι ιδιοτιμές είναι ίσες με $-\lambda$, $\lambda>0$

οπότε το επιθυμητό Χ.Π. είναι το $(s+\lambda)^3$ ή $s^3+3\lambda s^2+3\lambda^2 s+\lambda^3$

Οπότε $\boxed{k_2 = 3\lambda}$ και $\boxed{k_1 = 3\lambda^2}$ και $\boxed{k_i = \lambda^3}$

Θέμα 2 (4 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + u$$

όπου $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι οι μεταβλητές κατάστασης και $u \in \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου.

α) (1 μονάδα) Είναι το σύστημα ελέγξιμο;

β) (1 μονάδα) Κλείνουμε το βρόχο με τη βοήθεια του ελεγκτή

$$u = -\sin x_2.$$

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου

γ) (2 μονάδες) Να μελετηθεί η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου.

α) • Έχουμε $B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ και $AB=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

οπότε $M=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ και $\det(M)=-1\neq 0$

Άρα είναι ελέγξιμο

β) $\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -x_1 - \sin x_2$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases}\dot{x}_1=0\\ \dot{x}_2=0\end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases}x_2=0\\ -x_1=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x_2=0\\ x_1=0\end{cases}$ Άρα μοναδικό σημείο ισορροπίας το $\boxed{(0,0)}$

γ) • Έστω $V(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$, οπότε $\dot{V}(x)=x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2=x_1x_2+x_2(-x_1-\sin x_2)$

$\Longleftrightarrow \dot{V}(x)=-x_2\sin x_2$, επειδή $x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\dot{V}(x)\leq 0 \quad \forall x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

• Επειδή $V(x)$ θετικά ορισμένη και $\dot{V}(x)$ αρνητικά ορισμένη, τότε το $(0,0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας (σύμφωνα με το Θ. Lyapunov)