Λύσεις Φεβρ. 2024

Θέμα 1 Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) \neq 0$$
$$\dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1^4 + u, \quad x_2(0) \neq 0.$$

Τα $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι οι μεταβλητές κατάστασης, $u \in \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου.

α) (1 μονάδα) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος ανοιχτού βρόχου.
β) (2 μονάδες) Να μελετηθεί η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του ερωτήματος (α).
γ) (3 μονάδες) Να σχεδιαστεί ελεγκτής που να καθιστά το (0,0) ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου.
δ) (2 μονάδες) Να σχεδιαστεί ελεγκτής ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου που προκύπτει να είναι είναι γραμμικό.
ε) (2 μονάδες) Να σχεδιαστεί ελεγκτής για το γραμμικό σύστημα του ερωτήματος (δ), που να μεταφέρει τις ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόχου στις θέσεις -1 και -2.

α) • Ανοιχτός βρόχος: $u=0$

• Λύνουμε το $\begin{cases}\dot{x}_1=0\\ \dot{x}_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=0\\ x_1^4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=0\\ x_1=0\end{cases}$

Μοναδικό σημείο ισορροπίας το $\boxed{(0,0)}$

β) • Έστω $V(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$, τότε

$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_2(-x_2^3+x_1^4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dot{V}(x) = x_1x_2 - x_2^4 + x_1^4x_2 = x_2(x_1+x_1^4) - x_2^4 = x_2(x_1+x_1^4-x_2^3)$ για πολύ μικρά x_1, x_2

οι όροι x_1^4 και $-x_2^3$ είναι πολύ μικροί, οπότε $\dot{V}(x) = x_1x_2$, η οποία παίρνει και θετικό και αρν. πρόσημο.

Οπότε ίσως το σύστημα να είναι ασταθές κοντά στο 0

• Θα δοκιμάσουμε και με γραμμικοποίηση γύρω από το 0.

$z = x - x^* = x$ και $\dot{z} = Az$ όπου $A = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=0} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 4x_1^3 & -3x_2^2\end{bmatrix}\Bigg|_{x=0} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Δηλαδή $\dot{z} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} z$ ή $\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} x \Leftrightarrow \begin{matrix}x_1' = x_2\\ x_2' = 0\end{matrix}$

Παρατηρούμε ότι $x_2'=0$, οπότε $x_2 = const = x_2(0) \neq 0$ (δίνεται)
και $x_1' = x_2 = x_2(0) \neq 0$ με $x_1(0) \neq 0$

Το x_1 συνεχώς αυξάνεται ή μειώνεται με σταθερό ρυθμό, δεν είναι φραγμένο

Άρα το 0 είναι ασταθές σημείο ισορροπίας

γ) • Έστω $u = -x_1^4 + x_2^3 - k_1x_1 - k_2x_2$, τότε $\begin{matrix}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_2\end{matrix}$ ή $\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -k_1 & -k_2\end{bmatrix} x$

• Βρίσκουμε ιδιοτιμές: $|sI-A| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}s & -1\\ k_1 & s+k_2\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow s^2 + k_2 s + k_1 = 0$

Για ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές θέλουμε $\boxed{k_2>0}$ και $\boxed{k_1>0}$ (συντελεστές Χ.Π. ομόσημοι Θ. Routh-Hurwitz)

δ) • Έστω $u = -x_1^4 + x_2^3$, τότε $\begin{matrix}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = 0\end{matrix} \longrightarrow$ Γραμμικό σύστημα

ε) Έχουμε $\begin{matrix}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = v\end{matrix}$ όπου $v = -k_1x_1 - k_2x_2$, οπότε $\begin{matrix}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_2\end{matrix}$ ή $\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -k_1 & -k_2\end{bmatrix} x$

• Βρίσκουμε ιδιοτιμές: $|sI-A| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}s & -1\\ k_1 & s+k_2\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow s^2 + k_2 s + k_1 = 0$

Θέλουμε να έρθει στη μορφή $(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$, οπότε $\boxed{k_2 = 3}$ και $\boxed{k_1 = 2}$

Λύσεις Σεπτ. 2023

Θέμα 1 (6 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) \neq 0$$
$$\dot{x}_2 = -\alpha \sin x_2 + b x_1^2 + cu + d(t), \quad x_2(0) \neq 0$$

όπου τα α, b, c είναι γνωστές σταθερές παράμετροι διάφορες του μηδενός. Τα $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι οι μεταβλητές κατάστασης, $u \in \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου και $y = x_1$ η έξοδος. Με $d \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε την είσοδο των εξωτερικών διαταραχών και υποθέτουμε ότι $d(t) = \bar{d}, \quad \forall t \geq 0$. Θεωρούμε ότι η $\bar{d}$ είναι άγνωστη σταθερά.

α) (2 μονάδες) Να σχεδιαστεί ελεγκτής ανάδρασης καταστάσεων που να αναγκάζει το δοθέν σύστημα, απουσία διαταραχών, να συμπεριφέρεται όπως το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα

$$\ddot{q} = \upsilon.$$

β) (1 μονάδα) Παρουσία εξωτερικών διαταραχών, να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια το σύστημα ανοιχτού βρόχου που προκύπτει από το ερώτημα (α).

γ) (3 μονάδες) Παρουσία εξωτερικών διαταχών, να επιλεγεί η είσοδος ελέγχου υ του γραμμικοποιημένου συστήματος του ερωτήματος (α) έτσι ώστε η έξοδος του συστήματος να συγκλίνει ασυμπτωτικά στη σταθερή επιθυμητή είσοδο r.

α) Επιλέγουμε $u = \dfrac{a\sin x_2 - b x_1^2 + v}{c}$ όπου v άλλος ελεγκτής

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a\sin x_2 + b x_1^2 + c \cdot \dfrac{a\sin x_2 - b x_1^2 + v}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x}_2 = v$$

Οπότε έχουμε $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = v$, δηλαδή είναι της μορφής $\ddot{q} = v$

β) Έχουμε $\ddot{x}_1 = v + d \xrightarrow[\text{βρόχος } (v=0)]{\text{ανοιχτός}} \ddot{x}_1 = d \Leftrightarrow L\{\ddot{x}_1\} = L\{d\} \Leftrightarrow s^2 X_1(s) - s x_1(0) - x_1'(0) = \dfrac{d}{s}$

$$\Leftrightarrow s^2 X_1(s) - s x_1(0) - x_2(0) = \frac{d}{s} \Leftrightarrow X_1(s) = \frac{d}{s^3} + \frac{x_1(0)}{s} + \frac{x_2(0)}{s^2} \Leftrightarrow x_1(t) = \frac{d}{2} t^2 + x_1(0) + x_2(0) t$$

και $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = dt + x_2(0)$. Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $d \neq 0$: Για $t \to \infty$ έχουμε $x_1(t) \to \infty$ και $x_2(t) \to \infty$
- $d = 0$: Για $t \to \infty$ έχουμε $x_1(t) = x_2(0) t + x_1(0) \to \infty$ και $x_2(t) = x_2(0)$

Και στις 2 περιπτώσεις έχουμε αστάθεια, άρα σύστημα ασταθές

γ) • Αρχικά θα εξετάσουμε αν το σύστημα είναι ελέγξιμο $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v + \bar{d} \end{pmatrix}$

$M = [B \ \ AB]$ όπου $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ οπότε $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(M) = -1 \neq 0 \longrightarrow$ σύστημα ελέγξιμο

• Θα τοποθετήσουμε ελεγκτή δυναμικής ανάδρασης καταστάσεων, οπότε $v = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_i z$
$\dot{z} = y - r = x_1 - r$

έχουμε
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_i z + d \\ \dot{z} &= x_1 - r \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} d$$

• Θέλουμε οι ιδιοτιμές του $\tilde{A}$ να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο, οπότε:

$$\det(sI - \tilde{A}) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ k_1 & s+k_2 & k_i \\ -1 & 0 & s \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} s+k_2 & k_i \\ 0 & s \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} k_1 & k_i \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_i$$

Για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε πως όλες οι ιδιοτιμές είναι ίσες με $-\lambda$, $\lambda > 0$

οπότε το επιθυμητό χ.π. είναι το $(s+\lambda)^3$ ή $s^3 + 3\lambda s^2 + 3\lambda^2 s + \lambda^3$

Οπότε $\boxed{k_2 = 3\lambda}$ και $\boxed{k_1 = 3\lambda^2}$ και $\boxed{k_i = \lambda^3}$

Θέμα 2 (4 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + u$$

όπου $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι οι μεταβλητές κατάστασης και $u \in \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου.

α) (1 μονάδα) Είναι το σύστημα ελέγξιμο;

β) (1 μονάδα) Κλείνουμε το βρόχο με τη βοήθεια του ελεγκτή

$$u = -\sin x_2.$$

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου

γ) (2 μονάδες) Να μελετηθεί η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου.

α) • Έχουμε $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

οπότε $M = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $\det(M) = -1 \neq 0$

Άρα είναι ελέγξιμο

β) $\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -x_1 - \sin x_2$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ Άρα μοναδικό σημείο ισορροπίας το $\boxed{(0,0)}$

γ) • Έστω $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$, οπότε $\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_2(-x_1 - \sin x_2)$

$\Leftrightarrow \dot{V}(x) = -x_2 \sin x_2$, επειδή $x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

• Επειδή $V(x)$ θετικά ορισμένη και $\dot{V}(x)$ αρνητικά ορισμένη, τότε το $(0,0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας (σύμφωνα με το Θ. Lyapunov)