Λύσεις Φεβρ. 2024

Θέμα 1 Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) \neq 0$$
$$\dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1^4 + u, \quad x_2(0) \neq 0.$$

Τα $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι οι μεταβλητές κατάστασης, $u \in \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου.

α) (1 μονάδα) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος ανοιχτού βρόχου.
β) (2 μονάδες) Να μελετηθεί η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του ερωτήματος (α).
γ) (3 μονάδες) Να σχεδιαστεί ελεγκτής που να καθιστά το (0,0) ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου.
δ) (2 μονάδες) Να σχεδιαστεί ελεγκτής ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου που προκύπτει να είναι είναι γραμμικό.
ε) (2 μονάδες) Να σχεδιαστεί ελεγκτής για το γραμμικό σύστημα του ερωτήματος (δ), που να μεταφέρει τις ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόχου στις θέσεις -1 και -2.

α) • Ανοιχτός βρόχος: $u=0$

• Λύνουμε το $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

Μοναδικό σημείο ισορροπίας το $\boxed{(0,0)}$

β) • Έστω $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$, τότε

$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_2(-x_2^3 + x_1^4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dot{V}(x) = x_1x_2 - x_2^4 + x_1^4x_2 = x_2(x_1 + x_1^4) - x_2^4 = x_2(x_1 + x_1^4 - x_2^3)$ για πολύ μικρά x_1, x_2

οι όροι x_1^4 και $-x_2^3$ είναι πολύ μικροί, οπότε $\dot{V}(x) = x_1x_2$, η οποία παίρνει και θετικό και αρν. πρόσημο.

Οπότε ίσως το σύστημα να είναι ασταθές κοντά στο 0

• Θα δοκιμάσουμε και με γραμμικοποίηση γύρω από το 0.

$z = x - x^* = x$ και $\dot{z} = Az$ όπου $A = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4x_1^3 & -3x_2^2 \end{bmatrix}\Bigg|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Δηλαδή $\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z$ ή $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1' = x_2 \\ x_2' = 0 \end{matrix}$

Παρατηρούμε ότι $x_2' = 0$, οπότε $x_2 = const = x_2(0) \neq 0$ (δίνεται)
και $x_1' = x_2 = x_2(0) \neq 0$ με $x_1(0) \neq 0$

Το x_1 συνεχώς αυξάνεται ή μειώνεται με σταθερό ρυθμό, δεν είναι φραγμένο

Άρα το 0 είναι ασταθές σημείο ισορροπίας

γ) • Έστω $u = -x_1^4 + x_2^3 - k_1x_1 - k_2x_2$, τότε $\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_2 \end{matrix}$ ή $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x$

• Βρίσκουμε ιδιοτιμές: $|sI - A| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} s & -1 \\ k_1 & s+k_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow s^2 + k_2 s + k_1 = 0$

Για ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές θέλουμε $\boxed{k_2 > 0}$ και $\boxed{k_1 > 0}$ (συντελεστές Χ.Π. ομόσημοι Θ. Routh-Hurwitz)

δ) • Έστω $u = -x_1^4 + x_2^3$, τότε $\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{matrix}$ $\longrightarrow$ Γραμμικό σύστημα

ε) Έχουμε $\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v \end{matrix}$ όπου $v = -k_1x_1 - k_2x_2$, οπότε $\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_2 \end{matrix}$ ή $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x$

• Βρίσκουμε ιδιοτιμές: $|sI - A| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} s & -1 \\ k_1 & s+k_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow s^2 + k_2 s + k_1 = 0$

Θέλουμε να έρθει στη μορφή $(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$, οπότε $\boxed{k_2 = 3}$ και $\boxed{k_1 = 2}$

Λύσεις Σεπτ. 2023

Θέμα 1 (6 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) \neq 0$$
$$\dot{x}_2 = -\alpha \sin x_2 + b x_1^2 + cu + d(t), \quad x_2(0) \neq 0$$

όπου τα α, b, c είναι γνωστές σταθερές παράμετροι διάφορες του μηδενός. Τα $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι οι μεταβλητές κατάστασης, $u \in \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου και $y = x_1$ η έξοδος. Με $d \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε την είσοδο των εξωτερικών διαταραχών και υποθέτουμε ότι $d(t) = \bar{d}, \quad \forall t \geq 0$. Θεωρούμε ότι η $\bar{d}$ είναι άγνωστη σταθερά.

α) (2 μονάδες) Να σχεδιαστεί ελεγκτής ανάδρασης καταστάσεων που να αναγκάζει το δοθέν σύστημα, απουσία διαταραχών, να συμπεριφέρεται όπως το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα

$$\ddot{q} = \upsilon.$$

β) (1 μονάδα) Παρουσία εξωτερικών διαταραχών, να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια το σύστημα ανοιχτού βρόχου που προκύπτει από το ερώτημα (α).

γ) (3 μονάδες) Παρουσία εξωτερικών διαταχών, να επιλεγεί η είσοδος ελέγχου υ του γραμμικοποιημένου συστήματος του ερωτήματος (α) έτσι ώστε η έξοδος του συστήματος να συγκλίνει ασυμπτωτικά στη σταθερή επιθυμητή είσοδο r.

α) Επιλέγουμε $u = \dfrac{a\sin x_2 - b x_1^2 + v}{c}$ όπου v άλλος ελεγκτής

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a\sin x_2 + b x_1^2 + c \cdot \dfrac{a \sin x_2 - b x_1^2 + v}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x}_2 = v$$

Οπότε έχουμε $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = v$, δηλαδή είναι της μορφής $\ddot{q} = v$

β) Έχουμε $\ddot{x}_1 = v + d \xrightarrow[\text{βρόχος } (v=0)]{\text{ανοιχτός}} \ddot{x}_1 = d \Leftrightarrow L\{\ddot{x}_1\} = L\{d\} \Leftrightarrow s^2 X_1(s) - s x_1(0) - x_1'(0) = \dfrac{d}{s}$

$$\Leftrightarrow s^2 X_1(s) - s x_1(0) - x_2(0) = \frac{d}{s} \Leftrightarrow X_1(s) = \frac{d}{s^3} + \frac{x_1(0)}{s} + \frac{x_2(0)}{s^2} \Leftrightarrow x_1(t) = \frac{d}{2}t^2 + x_1(0) + x_2(0)t$$

και $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = dt + x_2(0)$ Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $d \neq 0$: Για $t \to \infty$ έχουμε $x_1(t) \to \infty$ και $x_2(t) \to \infty$
- $d = 0$: Για $t \to \infty$ έχουμε $x_1(t) = x_2(0)t + x_1(0) \longrightarrow \infty$ και $x_2(t) = x_2(0)$

Και στις 2 περιπτώσεις έχουμε αστάθεια, άρα σύστημα ασταθές

γ) • Αρχικά θα εξετάσουμε αν το σύστημα είναι ελέγξιμο $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v + d \\ \dot{z} = y - r = x_1 - r \end{cases}$ $\longrightarrow$ για δυναμική ανάδραση

$M = [B \ \ AB \ \ A^2B]$ όπου $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A^2B = A \cdot AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

οπότε $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $\det(M) = -1 \neq 0 \longrightarrow$ σύστημα ελέγξιμο

• Θα τοποθετήσουμε ελεγκτή δυναμικής ανάδρασης καταστάσεων, οπότε $v = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_i z$

έχουμε
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_i z + d \\ \dot{z} &= x_1 - r \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} d$$

• Θέλουμε οι ιδιοτιμές του $\tilde{A}$ να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο, οπότε:

$$\det(sI - \tilde{A}) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ k_1 & s+k_2 & k_i \\ -1 & 0 & s \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} s+k_2 & k_i \\ 0 & s \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} k_1 & k_i \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_i$$

Για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε πως όλες οι ιδιοτιμές είναι ίσες με $-\lambda$, $\lambda > 0$

οπότε το επιθυμητό χ.π. είναι το $(s+\lambda)^3$ ή $s^3 + 3\lambda s^2 + 3\lambda^2 s + \lambda^3$

Οπότε $\boxed{k_2 = 3\lambda}$ και $\boxed{k_1 = 3\lambda^2}$ και $\boxed{k_i = \lambda^3}$

Θέμα 2 (4 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + u$$

όπου $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι οι μεταβλητές κατάστασης και $u \in \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου.

α) (1 μονάδα) Είναι το σύστημα ελέγξιμο;

β) (1 μονάδα) Κλείνουμε το βρόχο με τη βοήθεια του ελεγκτή

$$u = -\sin x_2 .$$

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου

γ) (2 μονάδες) Να μελετηθεί η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου.

α) • Έχουμε $B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ και $AB = \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

οπότε $M=[B \ \ AB] = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ και $\det(M) = -1 \neq 0$

Άρα είναι ελέγξιμο

β) $\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -x_1 - \sin x_2$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases}\dot{x}_1=0\\ \dot{x}_2=0\end{cases}$

$\iff \begin{cases}x_2=0\\ -x_1=0\end{cases} \iff \begin{cases}x_2=0\\ x_1=0\end{cases}$ Άρα μοναδικό σημείο ισορροπίας το $\boxed{(0,0)}$

γ) • Έστω $V(x)=\frac{1}{2} x_1^2+\frac{1}{2} x_2^2$, οπότε $\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_2(-x_1-\sin x_2)$

$\iff \dot{V}(x) = -x_2\sin x_2$, επειδή $x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\dot{V}(x)\le 0 \quad \forall x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

μηδενίζεται στα $(x_1,x_2)=(a,0)$

• Επειδή $V(x)$ θετικά ορισμένη και $\dot{V}(x)$ αρνητικά ημιορισμένη, τότε το $(0,0)$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας (σύμφωνα με το Θ. Lyapunov)

• Ορίζουμε το σύνολο $S = \{\underbrace{x_1\in\mathbb{R},\ x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}_{x\in\Omega} : \dot{V} = 0\} = \{x\in\Omega : x_2 = 0\}$

και για $x_2=0$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases}\dot{x}_1=0 \to \text{μηδενίζεται στα σημεία } (b,0)\\ \dot{x}_2 = -x_1 \to \text{〃 \quad 〃 \quad 〃 } (0,0)\end{cases}$

• Αν $(x_1,x_2)=(b,0)$, $b\neq0$, τότε $\dot{x}_2\neq 0$ και άρα $x_2\neq0$ → βγήκαμε από το S

• Αν $(x_1,x_2)=(0,0)$, τότε $\dot{x}_2=0$ και άρα $x_2=0$ → παραμένουμε στο S

Άρα σύμφωνα με το Θ. LaSalle το μεγαλύτερο αμετάβλητο υποσύνολο του S είναι το $(0,0)$ άρα το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές Σ.Ι. (στο Ω)

Λύσεις Ιουνίου 2023

Θέμα 1 (5 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \sin x_2 + x_2 + u \end{aligned} \tag{1.1}$$

Α) (1 μονάδα). Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος ανοιχτού βρόχου. Είναι απομονωμένα;

Β) (2 μονάδες). Να μελετησετε αν το σύστημα (1.1) μπορεί να γραμμικοποιηθεί μέσω ανάδρασης κι αν ναι να σχεδιαστεί ελεγκτής γραμμικοποίησης που να μετατρέπει το σύστημα κλειστού βρόχου σε ελέγξιμο γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα.

Γ) (3 μονάδες). Να σχεδιαστεί ελεγκτής που να επιβάλλει στο γραμμικό σύστημα του ερωτήματος (Β) συντελεστή απόσβεσης 1.5 και φυσική συχνότητα 2rad/s.

Α) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 \sin x_2 + x_2$ Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 \cdot 0 + 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Σημεία ισορ.: $\boxed{(a, 0)}$ $a \in \mathbb{R}$

Δεν είναι απομονωμένα αφού δεν υπάρχει κύκλος με κέντρο το $(a, 0)$ $\forall a \in \mathbb{R}$ και ακτίνα μη μηδενική που να μην περιέχει άλλα σημείο ισορροπίας.

Β) • Για $u = -x_1 \sin x_2 + v$ μπορούμε να γραμμικοποιήσουμε το σύστημα, οπότε $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_2 + v$

• $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, οπότε $M = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $\det(M) = -1 \neq 0$

σύστημα ελέγξιμο

• Έχουμε σταθερούς πίνακες A και B, άρα το σύστημα είναι γραμμικό χρονικά αμετάβλητο.

Γ) • Για να επέμβουμε στις ιδιοτιμές, επιλέγουμε $v = -k_1 x_1 - k_2 x_2$ ελεγκτή, οπότε:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_1 + (1 - k_2) x_2 \end{aligned} \Leftrightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & 1-k_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} x$$

με $\det(sI - \tilde{A}) = \begin{vmatrix} s & 1 \\ -k_1 & s-1+k_2 \end{vmatrix} =$

$= s(s - 1 + k_2) + k_2 = s^2 + (k_2 - 1)s + k_2$ το χαρακτ. πολυώνυμο.

Συγκρίνουμε με τη μορφή $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \xrightarrow[\omega_n = 2 r/s]{\zeta = 1,5} s^2 + 6s + 4$

Άρα θέλουμε $k_2 - 1 = 6 \Leftrightarrow \boxed{k_2 = 7}$ και $\boxed{k_2 = 4}$

Θέμα 2 (3 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\ddot{x}+2\dot{x}^3+3x=0.$$

Α) (1 μονάδα). Να επιλεγούν οι μεταβλητές κατάστασης και να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης.

Β) (0.5 μονάδες). Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Γ) (1.5 μονάδες). Να δείξετε ότι το σημείο ισορροπίας είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Α) • Έστω $x_1 = x$ και $x_2 = \dot{x}$, τότε

$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$ και $\dot{x}_2 = \ddot{x} = -2x_2^3 - 3x_1$ δηλ.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2^3 \end{cases}$$

Β) • $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -3x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ Μοναδικό σημείο ισορ. το $\boxed{(0,0)}$

Γ) • Έστω $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$, τότε $\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_2(-3x_1 - 2x_2^3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dot{V}(x) = x_1x_2 - 3x_1x_2 - 2x_2^3 \Leftrightarrow \dot{V}(x) = -2x_2^3 \underbrace{-2x_1x_2}_{\text{θέλουμε να το διώξουμε}} \longrightarrow$ δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπέρασμα για ευστάθεια

• Ξαναεπιλέγουμε $V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$, τότε:

$\dot{V}(x) = 3x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 3x_1x_2 + x_2(-3x_1 - 2x_2^3) = 3x_1x_2 - 3x_1x_2 - 2x_2^4 \Leftrightarrow \dot{V}(x) = -2x_2^4$

• Η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη και η $\dot{V}(x)$ αρνητικά ημιορισμένη, άρα το $(0,0)$ είναι <u>ολικά ευσταθές</u> σημείο ισορροπίας (Θ. Lyapunov)

• Θεωρούμε το σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V} = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$

οπότε το σύστημα γίνεται $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 \end{cases}$

• Για $(x_1, x_2) = (b, 0)$, $b \neq 0$ έχουμε $\dot{x}_2 \neq 0$ και άρα $x_2 \neq 0 \longrightarrow$ Βγήκαμε από το S

• Για $(x_1, x_2) = (0, 0)$ έχουμε $\dot{x}_2 = 0$ και άρα $x_2 = 0 \longrightarrow$ Παραμένουμε στο S

Άρα σύμφωνα με το Θ. LaSalle το μεγαλύτερο αμετάβλητο υποσύνολο του S είναι το $(0,0)$ άρα το $(0,0)$ είναι <u>ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές</u> Σ.Ι.

Θέμα 3 (2 μονάδες). Έστω το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα:

$$\dot{x} = (A+B)x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

όπου A είναι πίνακας Hurwitz και B ένας οποιοσδήποτε σταθερός πίνακας. Αν $B=0$ τότε προφανώς το σύστημα που προκύπτει είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Έστω τώρα $B \neq 0$. Να βρεθεί ένα άνω γράγμα στη νόρμα $|B|$ του πίνακα B ώστε το μηδέν να παραμένει ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισιορροπίας.

• Αφού ο πίνακας A είναι πίνακας Hurwitz (αλλά έχει όλες του τις ιδιοτιμές με αρν. πραγμ. μέρος) τότε υπάρχει πίνακας P συμμετρικός, θετ. ορισμένος τ.ω. $-Q_A = A^T P + PA$ για κάποιον Q_A πίνακα συμμετρικό, θετικά ορισμένο.

• Έστω $V(x) = x^T P x$, τότε $\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (\tilde{A}x)^T P x + x^T P \tilde{A} x =$

$$= x^T \tilde{A}^T P x + x^T P \tilde{A} x = x^T(\tilde{A}^T P + P\tilde{A})x = x^T(A^T P + B^T P + PA + PB)x =$$

$$= x^T(A^T P + PA)x + x^T(B^T P + PB)x \leq -\lambda_{min}(Q_A)\|x\|^2 + \underbrace{\|B^T P + PB\|}_{\leq \|B^T P\| + \|PB\| \leq \|B^T\|\cdot\|P\| + \|P\|\cdot\|B\| = 2\|B\|\cdot\|P\|} \cdot \|x\|^2 \iff$$

$$\iff \dot{V}(x) \leq -\lambda_{min}(Q_A)\|x\|^2 + 2\|B\|\cdot\|P\|\cdot\|x\|^2$$

• Θέλουμε $\dot{V}(x)$ αρνητικά ορισμένη, δηλ. $\left(-\lambda_{min}(Q_A) + 2\|B\|\cdot\|P\|\right)\cdot\|x\|^2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\iff \lambda_{min}(Q_A) > 2\|B\|\cdot\|P\| \iff \boxed{\|B\| < \frac{\lambda_{min}(Q_A)}{2\|P\|}}$$

Αφού $V(x)$ θετικά ορισμένη και $\dot{V}(x)$ αρν. ορισμένη για $\|B\| < \frac{\lambda_{min}(Q_A)}{2\|P\|}$, τότε $(0,0)$ ολικά ασυμπτωματικά ευσταθές σημ. ισορ.

Λύσεις Ιουνίου 2022

Θέμα 1 (5 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

όπου a_1, a_2 κάποιες σταθερές παράμετροι, $u \in \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου, $y \in \mathbb{R}$ η έξοδος και $x \in \mathbb{R}^2$ το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης.

A) (2.5 μονάδες) Έστω $r \in \mathbb{R}$ μια σταθερή είσοδος αναφοράς. Να σχεδιαστεί, συναρτήσει των a_1, a_2, ελεγκτής δυναμικής ανάδρασης καταστάσεων, που να εγγυάται ότι $y \to r$ ασυμπτωτικά, και ότι το σύστημα κλειστού βρόχου που προκύπτει να εμφανίζει μια ιδιοτιμή κατάλληλης πολλαπλότητας στη θέση -λ με λ>0.

B) (2.5 μονάδες) Να θεωρήσετε τώρα πως η παράμετρος a_1 δεν είναι πλήρως γνωστή. Έστω ότι η πραγματική τιμή της είναι $\bar{a}_1 + \delta$, με το $\bar{a}_1$ γνωστό και το δ μια άγνωστη σταθερά. Ποια η περιοχή τιμών της παραμετρικής ασάφειας δ για την οποία ο ελεγκτής που σχεδιάστηκε στο ερώτημα (α) εξακολουθεί να εγγυάται ότι $y \to r$ ασυμπτωτικά;

A) Επιλέγουμε $\cdot\ u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_i \cdot z$

$\cdot\ \dot{z} = y - r = x_2 - r$ οπότε

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1-k_1 & -a_2-k_2 & -k_i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r$$

$\cdot\ \det(sI - \tilde{A}) = \begin{vmatrix} s+a_1+k_1 & a_2+k_2 & k_i \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} =$

$= (s+a_1+k_1)\begin{vmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} a_2+k_2 & k_i \\ -1 & s \end{vmatrix} + 0 = (s+a_1+k_1)s^2 + s(a_2+k_2) + k_i = s^3 + (a_1+k_1)s^2 + (a_2+k_2)s + k_i \ (1)$

$\cdot$ 3 ιδιοτιμές με τιμή $-\lambda \longrightarrow$ Χ.Π. της μορφής $(s+\lambda)^3 = s^3 + 3\lambda s^2 + 3\lambda^2 s + \lambda^3$

Οπότε
$$\begin{aligned} a_1+k_1 &= 3\lambda \\ a_2+k_2 &= 3\lambda^2 \\ k_i &= \lambda^3 \end{aligned} \iff \boxed{\begin{aligned} k_1 &= 3\lambda - a_1 \\ k_2 &= 3\lambda^2 - a_2 \\ k_i &= \lambda^3 \end{aligned}}$$

B) $\cdot$ Το $k_1 = 3\lambda - a_1$ θα γίνει $k_1 = 3\lambda - \bar{a}_1$ αφού γνωρίζουμε μόνο το $\bar{a}_1$

$\cdot$ Από την (1) αντικαθιστούμε τα k_1, k_2 και k_i και έχουμε Χ.Π. $s^3 + (\bar{a}_1 + \delta + 3\lambda - \bar{a}_1)s^2 + (a_2 + 3\lambda^2 - a_2)s + \lambda^3$ $= s^3 + (3\lambda+\delta)s^2 + 3\lambda^2 s + \lambda^3$ και θα πρέπει οι ιδιοτιμές να εξακολουθούν να βρίσκονται αριστερά, ώστε να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και άρα να τείνουμε στο σημείο ισορροπίας $(y \to r)$

$\cdot$ Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 3\lambda^2 & 0 \\ s^2 & 3\lambda+\delta & \lambda^3 & 0 \\ s^1 & 3\lambda^2 - \frac{\lambda^3}{3\lambda+\delta} & 0 & \\ s^0 & \lambda^3 & & \end{array}$$

$\cdot\ \dfrac{(3\lambda+\delta)3\lambda^2 - \lambda^3}{3\lambda+\delta} = 3\lambda^2 - \dfrac{\lambda^3}{3\lambda+\delta}$

$\cdot\ \dfrac{\left(3\lambda^2 - \frac{\lambda^3}{3\lambda+\delta}\right)\lambda^3 - 0}{3\lambda^2 - \frac{\lambda^3}{3\lambda+\delta}} = \lambda^3$

Πρέπει όλα θετικά
(να μην έχουμε εναλλαγές προσήμων)

Άρα $3\lambda + \delta > 0 \iff \delta > -3\lambda$ και $3\lambda^2 - \dfrac{\lambda^3}{3\lambda+\delta} > 0 \iff 3 > \dfrac{\lambda}{3\lambda+\delta} \iff 9\lambda + 3\delta > \lambda \iff \delta > -\dfrac{8}{3}\lambda$

Οπότε $\boxed{\delta > -\dfrac{8}{3}\lambda}$

Λύσεις Ιουνίου 2022

Θέμα 1 (5 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2\\ 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x$$

όπου a_1, a_2 κάποιες σταθερές παράμετροι, $u\in\mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου, $y\in\mathbb{R}$ η έξοδος και $x\in\mathbb{R}^2$ το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης.

A) (2.5 μονάδες) Έστω $r\in\mathbb{R}$ μια σταθερή είσοδος αναφοράς. Να σχεδιαστεί, συναρτήσει των a_1, a_2, ελεγκτής δυναμικής ανάδρασης καταστάσεων, που να εγγυάται ότι $y\to r$ ασυμπτωτικά, και ότι το σύστημα κλειστού βρόχου που προκύπτει να εμφανίζει μια ιδιοτιμή κατάλληλης πολλαπλότητας στη θέση -λ με λ>0.

B) (2.5 μονάδες) Να θεωρήσετε τώρα πως η παράμετρος a_1 δεν είναι πλήρως γνωστή. Έστω ότι η πραγματική τιμή της είναι $\bar{a}_1+\delta$, με το $\bar{a}_1$ γνωστό και το δ μια άγνωστη σταθερά. Ποια η περιοχή τιμών της παραμετρικής ασάφειας δ για την οποία ο ελεγκτής που σχεδιάστηκε στο ερώτημα (α) εξακολουθεί να εγγυάται ότι $y\to r$ ασυμπτωτικά;

A) Επιλέγουμε
- $u=-k_1x_1-k_2x_2-k_i\cdot z$
- $\dot{z}=y-r=x_2-r$

οπότε

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-a_1-k_1 & -a_2-k_2 & -k_i\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{\tilde{A}}+\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}r$$

- $\det(sI-\tilde{A})=\begin{vmatrix}s+a_1+k_1 & a_2+k_2 & k_i\\ -1 & s & 0\\ 0 & -1 & s\end{vmatrix}=$

$$=(s+a_1+k_1)\begin{vmatrix}s & 0\\ -1 & s\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}a_2+k_2 & k_i\\ -1 & s\end{vmatrix}+0=(s+a_1+k_1)s^2+s(a_2+k_2)+k_i=s^3+(a_1+k_1)s^2+(a_2+k_2)s+k_i \quad (1)$$

- 3 ιδιοτιμές με τιμή $-\lambda$ $\longrightarrow$ Χ.Π. της μορφής $(s+\lambda)^3=s^3+3\lambda s^2+3\lambda^2 s+\lambda^3$

Οπότε
$$\begin{aligned}a_1+k_1&=3\lambda\\ a_2+k_2&=3\lambda^2\\ k_i&=\lambda^3\end{aligned}\iff\boxed{\begin{aligned}k_1&=3\lambda-a_1\\ k_2&=3\lambda^2-a_2\\ k_i&=\lambda^3\end{aligned}}$$

B)
- Το $k_1=3\lambda-a_1$ θα γίνει $k_1=3\lambda-\bar{a}_1$ αφού γνωρίζουμε μόνο το $\bar{a}_1$
- Από την (1) αντικαθιστούμε τα k_1, k_2 και k_i και έχουμε Χ.Π. $s^3+(\bar{a}_1+\delta+3\lambda-\bar{a}_1)s^2+(a_2+3\lambda^2-a_2)s+\lambda^3$ $=s^3+(3\lambda+\delta)s^2+3\lambda^2 s+\lambda^3$ και θα πρέπει οι ιδιοτιμές να εξακολουθούν να βρίσκονται αριστερά, ώστε να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και άρα να τείνουμε στο σημείο ισορροπίας ($y\to r$)
- Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh-Hurwitz:

s^3	1	$3\lambda^2$	0
s^2	$3\lambda+\delta$	λ^3	0
s^1	$3\lambda^2-\frac{\lambda^3}{3\lambda+\delta}$	0	
s^0	λ^3		

- $\dfrac{(3\lambda+\delta)3\lambda^2-\lambda^3}{3\lambda+\delta}=3\lambda^2-\dfrac{\lambda^3}{3\lambda+\delta}$
- $\dfrac{\left(3\lambda^2-\frac{\lambda^3}{3\lambda+\delta}\right)\lambda^3-0}{3\lambda^2-\frac{\lambda^3}{3\lambda+\delta}}=\lambda^3$

Πρέπει όλα θετικά
(να μην έχουμε εναλλαγές προσήμων)

Άρα $3\lambda+\delta>0\iff\delta>-3\lambda$ και $3\lambda^2-\dfrac{\lambda^3}{3\lambda+\delta}>0\iff 3>\dfrac{\lambda}{3\lambda+\delta}\iff 9\lambda+3\delta>\lambda\iff\delta>-\dfrac{8}{3}\lambda$

Οπότε $\boxed{\delta>-\dfrac{8}{3}\lambda}$

Λύσεις Φεβρ. 2022

Θέμα 1 (3 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\ddot{y} + \dot{y}^3 + y = 0.$$

Να δείξετε ότι το μηδέν είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

• Θέτουμε $x_1 = y$ και $x_2 = \dot{y}$, οπότε

$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$ και $\dot{x}_2 = \ddot{y} = -y - \dot{y}^3 = -x_1 - x_2^3$ δηλ.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow (0,0) \text{ σημείο ισορροπίας}$$

• Έστω $V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$, οπότε $\dot{V}(x) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 \cdot x_2 + x_2(-x_1 - x_2^3) = -x_2^4 \leq 0$

Αφού $V(x)$ θετικά ορισμένη και $\dot{V}(x)$ αρν. ορισμένη, τότε το $(0,0)$ είναι ολικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

• Θεωρούμε το σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V} = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$

οπότε το σύστημα γίνεται $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$

• Για $(x_1, x_2) = (\underset{b \neq 0}{b}, 0)$ έχουμε $\dot{x}_2 \neq 0$ και άρα $x_2 \neq 0 \longrightarrow$ Βγήκαμε από το S

• Για $(x_1, x_2) = (0,0)$ έχουμε $\dot{x}_2 = 0$ και άρα $x_2 = 0 \longrightarrow$ Παραμένουμε στο S

Άρα σύμφωνα με το Θ. LaSalle το μεγαλύτερο αμετάβλητο υποσύνολο του S είναι το $(0,0)$ άρα το $(0,0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές Σ.Ι.

Θέμα 2 (7 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\ddot{y} + \left(y^2 + \dot{y}^2 - 1\right)\dot{y} - y - \left(1 + \dot{y}^2\right)u = 0,$$

όπου $u \in \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου και $y \in \mathbb{R}$ η έξοδος.

α) (1 μονάδα). Να επιλεγούν μεταβλητές κατάστασης και να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης και εξόδου.

β) (3 μονάδες). Με τη βοήθεια ανάδρασης να μετατραπεί σε ελέγξιμο γραμμικό σύστημα που στον ανοιχτό βρόχο να εμφανίζει συντελεστή απόσβεσης 1 και φυσική συχνότητα 1rad/s.

γ) (3 μονάδες). Για το γραμμικό σύστημα του ερωτήματος β), να σχεδιαστεί γραμμική ανάδραση εξόδου, χωρίς τη χρήση παρατηρητών, ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου που προκύπτει να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

α) • Έστω $x_1 = y$ και $x_2 = \dot{y}$, οπότε

$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$ και $\dot{x}_2 = \ddot{y} = x_1 + (1 + x_2^2)u - (x_1^2 + x_2^2 - 1)x_2$

δηλ. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 x_2 - x_2^3 + x_2 + x_1 + (1 + x_2^2)u \end{cases}$

και εξίσωση εξόδου $y = x_1$

β) • Επιλέγουμε $u = \dfrac{x_1^2 x_2 + x_2^3 + v}{1 + x_2^2}$, οπότε $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + v \end{cases}$ όπου $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

άρα $M = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ με $\det(M) = -1 \neq 0 \rightarrow$ σύστημα ελέγξιμο.

• Ορίζουμε $v = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + p$ όπου p άλλος ελεγκτής. Έχουμε ανοιχτό βρόχο $\rightarrow p = 0$

οπότε $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (1 - k_1)x_1 + (1 - k_2)x_2 \end{cases}$ με $\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ k_1 - 1 & s + k_2 - 1 \end{vmatrix} = s(s + k_2 - 1) + k_1 - 1 =$

$= s^2 + (k_2 - 1)s + k_1 - 1$, το συγκρίνουμε με τη μορφή $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \xrightarrow[\omega_n = 1 r/s]{\zeta = 1} s^2 + 2s + 1$

οπότε $k_2 - 1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{k_2 = 3}$ και $k_1 - 1 = 1 \Leftrightarrow \boxed{k_1 = 2}$

γ) • Έχουμε $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + p \end{cases}$ επιλέγουμε $p = -ky = -kx_1$, οπότε $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (-k - 1)x_1 - 2x_2 \end{cases}$

με $\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ k + 1 & s + 2 \end{vmatrix} = s(s + 2) + k + 1 = s^2 + 2s + k + 1$

Σύμφωνα με κριτήριο Routh, για ασυμπτωτική ευστάθεια θέλουμε $k + 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{k > -1}$

Λύσεις Σεπτ. 2021

Θέμα 1 (5 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 + u\end{aligned}, x_1, x_2, u \in \mathbb{R},$$

για το οποίο ο ελεγκτής είναι:

$$u = -sat(2x_1 + x_2)$$

όπου

$$sat(y) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ y \ge 1 \\ y, & \alpha\nu\ -1 < y < 1 \\ -1, & \alpha\nu\ y \le -1 \end{cases}$$

με τη βοήθεια του οποίου κλείνει ο βρόχος.

α) (1 μονάδα) Να δείξετε ότι το (0,0) είναι ασταθές σημείο ισορροπίας για το σύστημα ανοιχτού βρόχου.

β) (1 μονάδα) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου.

γ) (3 μονάδες) Να δείξετε ότι το (0,0) είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

α) • Έχουμε $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = x_1\end{cases}$ και $\begin{cases}\dot{x}_1 = 0\\ \dot{x}_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2 = 0\\ x_1 = 0\end{cases}$ Άρα (0,0) είναι Σ.Ι.

• $\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 1 = (s-1)(s+1)$

Ιδιοτιμές -1 και $+1$ $\longrightarrow$ αφού έχουμε θετική ιδιοτιμή, τότε το (0,0) είναι ασταθές Σ.Ι.

β) • $\begin{cases}\dot{x}_1 = 0\\ \dot{x}_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2 = 0\\ x_1 - sat(2x_1) = 0 \Leftrightarrow sat(2x_1) = x_1 \quad (1)\end{cases}$

• Αν $2x_1 \geq 1 \Leftrightarrow x_1 \geq \frac{1}{2}$, τότε $(1) \Leftrightarrow 1 = x_1$ (δεκτό)

• Αν $-1 \leq 2x_1 \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2}$, τότε $(1) \Leftrightarrow 2x_1 = x_1 \Leftrightarrow x_1 = 0$ (δεκτό)

• Αν $2x_1 \leq -1 \Leftrightarrow x_1 \leq -\frac{1}{2}$, τότε $(1) \Leftrightarrow -1 = x_1$ (δεκτό)

Άρα Σ.Ι. είναι τα (1,0), (0,0) και (−1,0)

γ) • Έστω $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$, οπότε $\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_2(x_1 + u)$

όπου κοντά στο (0,0) έχουμε $u = -sat(2x_1 + x_2) = -(2x_1 + x_2) = -2x_1 - x_2$

$\Leftrightarrow \dot{V}(x) = x_1x_2 + x_1x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \Leftrightarrow \dot{V}(x) = -x_2^2 \leq 0$

• Αφού V θετικά ορισμένη και $\dot{V}$ αρνητικά ημιορισμένη κοντά στο (0,0), τότε το (0,0) είναι τοπικά ευσταθές Σ.Ι.

• Θεωρούμε το σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V} = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$

οπότε το σύστημα γίνεται $\begin{cases}\dot{x}_1 = 0\\ \dot{x}_2 = x_1 - sat(2x_1)\end{cases}$

b κοντά στο 0

• Για $(x_1, x_2) = (b, 0)$ έχουμε $\dot{x}_2 \neq 0$ και άρα $x_2 \neq 0 \longrightarrow$ Βγήκαμε από το S

• Για $(x_1, x_2) = (0, 0)$ έχουμε $\dot{x}_2 = 0$ και άρα $x_2 = 0 \longrightarrow$ Παραμένουμε στο S

Άρα σύμφωνα με το Θ. LaSalle το μεγαλύτερο αμετάβλητο υποσύνολο του S είναι το (0,0) άρα το (0,0) είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές Σ.Ι.

Θέμα 2 (5 μονάδες). Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x)$$

Για το οποίο γνωρίζουμε ότι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, |\varphi(x)| \le k|x|, \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Να βρεθεί ένα $\overline{k} > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\overline{k} > k > 0$ το $x^* = 0$ να είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

• $\det(sI-A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{1}{2} & s+\frac{3}{2} \end{vmatrix} = s\left(s+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2} = s^2+\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}$

$= (s+0{,}5)(s+1) \rightarrow$ ιδιοτιμές $\left.\begin{matrix} \lambda=-0{,}5 \\ \lambda=-1 \end{matrix}\right]$ ο A είναι πίνακας Hurwitz

• Άρα υπάρχει πίνακας P συμμετρ., θετ. ορισμένος τ.ω. $-Q = A^T P + PA$ για κάποιον συμμετρ., θετ. ορ. πίνακα Q

• Έστω $V(x) = x^T P x$, οπότε $\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax+\varphi(x))^T Px + x^T P(Ax+\varphi(x)) =$

$\Leftrightarrow \dot{V}(x) = (x^T A^T + \varphi^T(x))Px + x^T P(Ax+\varphi(x)) = x^T(A^T P x + PA)x + \varphi^T(x)Px + x^T P\varphi(x) =$

$\Leftrightarrow \dot{V}(x) \le -\lambda_{min}(Q)\cdot\|x\|^2 + \|\varphi^T(x)\|\cdot\|P\|\cdot\|x\| + \|x^T\|\cdot\|P\|\cdot\|\varphi(x)\| \Leftrightarrow \dot{V}(x) \le \|x\|\left(-\lambda_{min}(Q)\|x\| + 2\|\varphi(x)\|\cdot\|P\|\right)$

Όμως $\|\varphi(x)\| \le k\|x\|$, οπότε $\dot{V}(x) \le \|x\|^2\left(-\lambda_{min}(Q) + 2k\|P\|\right)$

• Για ολική ασυμπτωτική ευστάθεια θέλουμε $\dot{V}(x) < 0$ για $x \neq 0$, δηλ. $-\lambda_{min}(Q) + 2k\|P\| < 0$

$\Leftrightarrow k < \dfrac{\lambda_{min}(Q)}{2\|P\|}$

• Έστω $Q = I_2$, τότε $-Q = A^T P + PA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

μετά από αρκετές πράξεις $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ θετικά ορισμένος (έχει θετικές ιδιοτιμές) και συμμετρικός

Άρα $\lambda_{min}(Q) = 1$, $\|P\| = \sqrt{2^2+1^2+1^2+1^2} = \sqrt{7}$ και άρα $k < \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$ οπότε επιλέγουμε $\boxed{\overline{k} = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}}$