

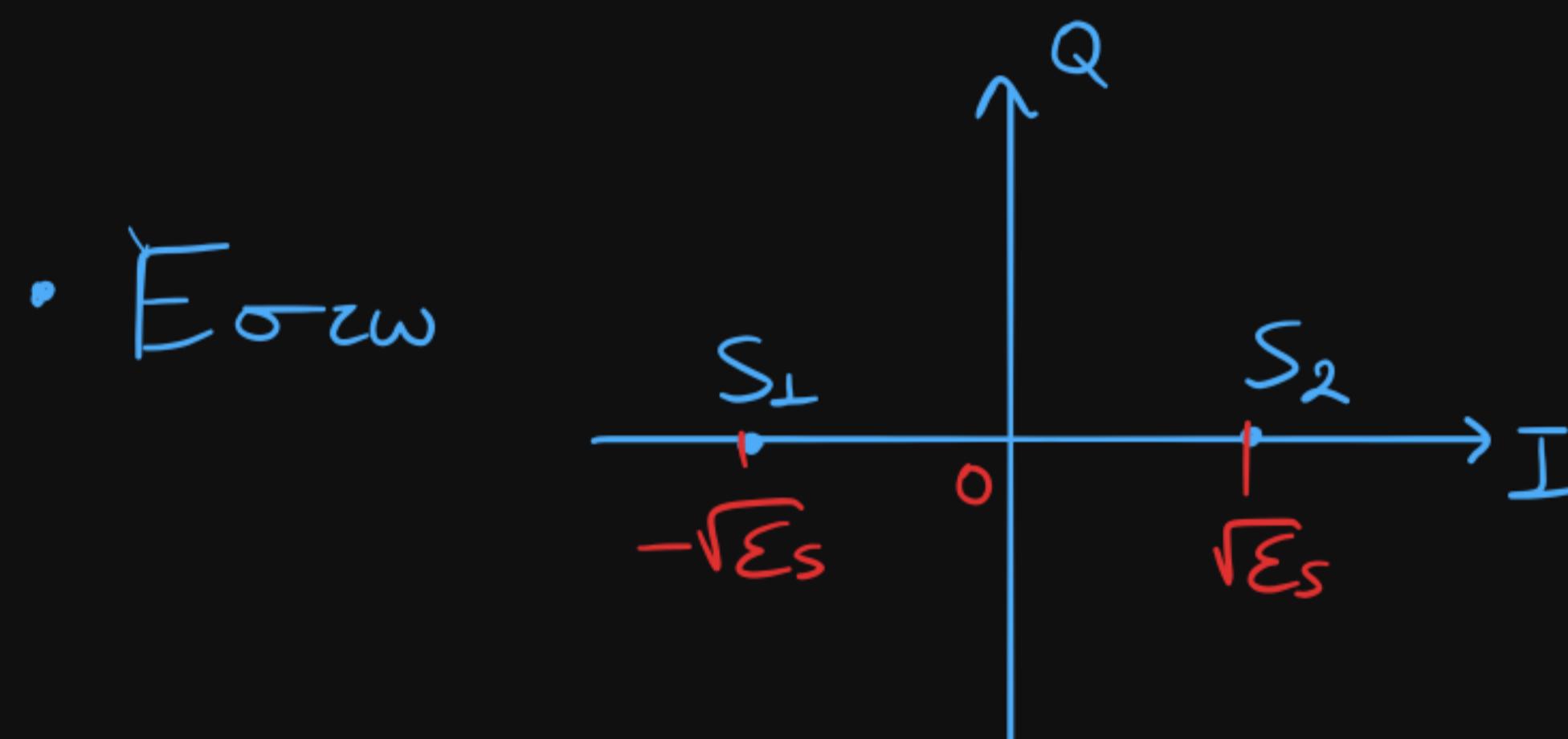
Λύσεις Σεντ. 2023

$$\text{a). Ισχύει } \mathcal{E}_S = P_S \cdot T = \frac{V_{rms}^2}{R} \cdot \frac{1}{R'} \Leftrightarrow$$

↑ αντίσταση ↗ data rate

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_S = \frac{A^2}{2R} \cdot \frac{1}{R'} = \frac{10^{-6}}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{5 \cdot 10^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_S = \underline{10^{-10} \text{ J}} = \mathcal{E}_b \left(\begin{array}{l} \text{ενέργεια} \\ \text{εκπομπής ενός bit} \end{array} \right)$$



o αυτεριούς BPSK.

Θέμα 10 (25) Ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας με διαμόρφωση BPSK λειτουργεί συνεχώς με data rate 5 Kbps χρησιμοποιώντας τα ισοπίθανα σήματα

$$s_1(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{και} \quad s_2(t) = -A \cos(2\pi f_0 t).$$

H rms τιμή του πλάτους των σημάτων είναι $V_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$ και η αντίσταση $R = 1 \Omega$. Ο θόρυβος στον δέκτη είναι AWGN με $N_0 = 10^{-11} W/Hz$.

α-15) Να βρεθεί ο μέσος όρος των σφαλμάτων bit στη διάρκεια μιας μέρας. Δίνεται ότι $A = 1 \text{ mV}$.

β-10) Ποιος είναι ο αριθμός των σφαλμάτων, όταν το data rate είναι 5 Mbps; Σχολιάστε πολύ σύντομα την απάντησή σας.

Τπόδειξη 1: Για την συνάρτηση $Q(x)$ να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $Q(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Τπόδειξη 2: Ο αριθμός των σφαλμάτων είναι ακέραιος.

Πιθανότητα σφαλμάτων αν σαλθηκε το S_L



$$P_{S|S_L} = P(r_I > 0) = P(n - \sqrt{\mathcal{E}_S} > 0)$$

$$\Leftrightarrow P_{S|S_L} = P(n > \sqrt{\mathcal{E}_S}) = P(n > 10^{-5}) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sqrt{\frac{10^{-11}}{2}}}\right)$$

$$\Leftrightarrow P_{S|S_L} = Q(4,47) = \frac{1}{2} e^{-\frac{4,47^2}{2}} \Leftrightarrow \underline{P_{S|S_L} = 2,29 \cdot 10^{-5}}$$

$$\text{Όποιες } P_S = \frac{1}{2} (P_{S|S_L} + P_{S|S_2}) \xrightarrow[\text{ισοπίθανα}]{S_L, S_2} P_S = \frac{1}{2} \cdot 2 P_{S|S_L} \Leftrightarrow \underline{P_S = 2,29 \cdot 10^{-5}}$$

• Άρα αφού σημειώσαμε $\frac{5 \cdot 10^3}{R'} \cdot \frac{60 \cdot 60 \cdot 24}{\text{secs σε 1 μέρα}}$ bits, τότε έχουμε μέσο σφάλμα

$$P = 5 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 2,29 \cdot 10^{-5} \Leftrightarrow \boxed{P = 9892 \text{ bits}}$$

$$\beta) \text{ Με την ίδια λογική } \mathcal{E}_S' = \frac{10^{-6}}{2} \cdot \frac{1}{5 \cdot 10^6} \Leftrightarrow \underline{\mathcal{E}_S' = 10^{-13} \text{ J}}, \quad P_{S|S_L}' = P(n > \sqrt{10^{-13}}) = Q\left(\frac{10^{-6,5}}{\sqrt{\frac{10^{-11}}{2}}}\right) = Q(0,14)$$

$$\Leftrightarrow P_{S|S_L}' = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{0,14^2}{2}} = 0,495 = \underline{P_S'}$$

$$\text{και άρα } P' = 5 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 0,495 \Leftrightarrow \boxed{P' = 2,13 \cdot 10^{11} \text{ bits}}$$

Με την αύξηση του data rate μειώσαμε το \mathcal{E}_S , οπότε τα σύμβολα του αυτεριού βρίσκονται πιο κοντά το σέντα και άρα έχουμε αύξηση των σφαλμάτων bit.

a) $P_b = P_{S \mid S_1, S_2} = P(r < 0) = P(n + A < 0)$

$$= P(n < -A) = \int_{-\frac{3A}{2}}^{-A} \frac{1}{3A} dx = \frac{1}{3A} \left(-A + \frac{3A}{2} \right)$$

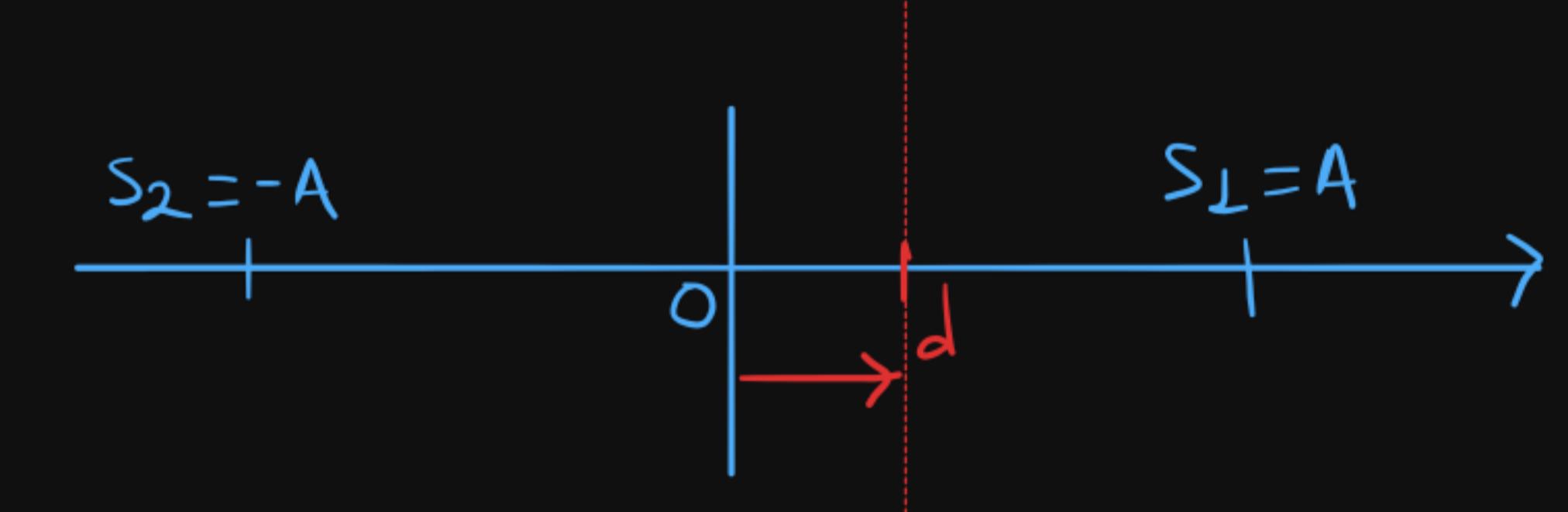
$$= \frac{1}{3A} \cdot \frac{A}{2} \Leftrightarrow P_b = \frac{1}{6}$$

Θέμα 20 (20) Ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας χρησιμοποιεί τα σήματα $s_1(t) = A$, $s_2(t) = -A$ με την ίδια πιθανότητα. Το κανάλι είναι προσθετικό ύφορύβου με ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (ΣΠΙΙ)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3A} & x \in (-\frac{3A}{2}, \frac{3A}{2}) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Δηλαδή το σήμα που λαμβάνεται στον δέκτη είναι $r = s + n$, όπου το σύμβολο s είναι $-A$ ή A και το n είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την παραπάνω κατανομή. Ο δέκτης χρησιμοποιεί προσαρμοσμένο φίλτρο στη βάση.

- α-10) Να υπολογίσετε την πιθανότητα σφάλματος bit, όταν ο δέκτης λειτουργεί με κριτήριο απόφασης την ελάχιστη ευκλείδεια απόσταση.
- β-10) Να βρείτε το κριτήριο για την βέλτιστη απόφαση στον δέκτη, χρησιμοποιώντας γραφική ή αναλυτική μέθοδο, και να υπολογίσετε εκ νέου την πιθανότητα σφάλματος bit. Τι παρατηρείτε;



β). Ας θεωρήσουμε πώς μετακινούμε το άριθμο d προς τα δεξιά, δηλ.

Tότε $P_{S \mid S_1} = P(r < d) = P(n + A < d) = P(n < d - A) =$

$$= \int_{-\frac{3A}{2}}^{d-A} \frac{1}{3A} dx = \frac{1}{3A} \left(d - A + \frac{3A}{2} \right) = \frac{d - A + \frac{3A}{2}}{3A}$$

και $P_{S \mid S_2} = P(r > d) = P(n - A > d) = P(n > d + A) =$

$$= \int_{d+A}^{\frac{3A}{2}} \frac{1}{3A} dx = \frac{1}{3A} \left(\frac{3A}{2} - d - A \right) = \frac{\frac{3A}{2} - d - A}{3A}$$

• Πρέπει $P_{S \mid S_1} = P_{S \mid S_2} \Leftrightarrow \frac{d - A + \frac{3A}{2}}{3A} = \frac{\frac{3A}{2} - d - A}{3A} \Leftrightarrow d - A + \frac{3A}{2} = \frac{3A}{2} - d - A \Leftrightarrow 2d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

Παρατηρούμε ότι το βέλτιστο σημείο απόφασης παραψεύει το $d = 0$ ($\mu \epsilon P_b = \frac{1}{6}$).

Το αντεξέσμα είναι αναμενόμενο καθώς οι zippers του Θορύβου $(-\frac{3A}{2} \text{ έως } \frac{3A}{2})$ είναι συμμετρικές ως προς το 0.

a) s_0

s_4

s_8

s_{12}

s_1

s_5

s_9

s_{13}

s_2

s_6

s_{10}

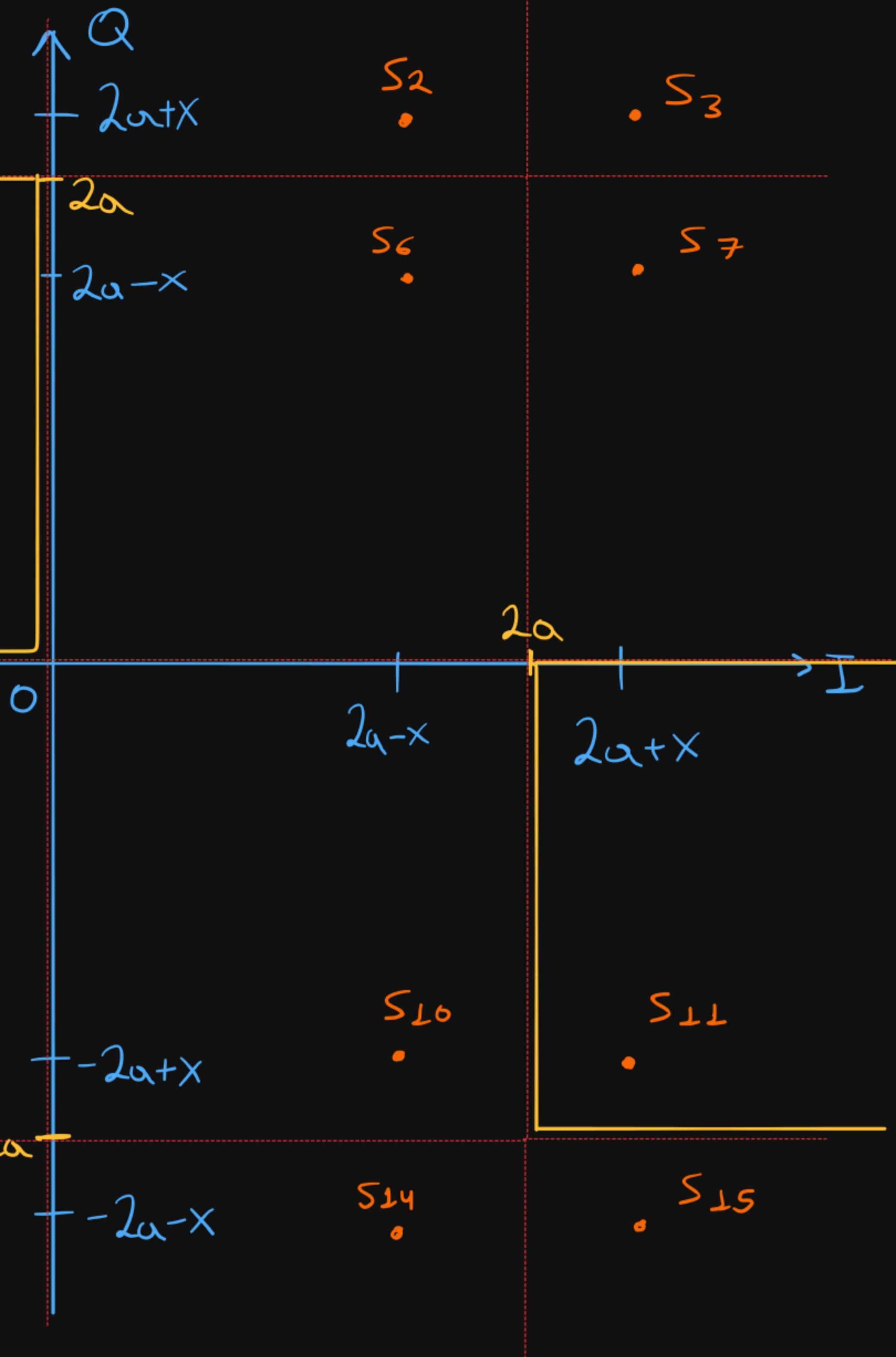
s_{14}

s_3

s_7

s_{11}

s_{15}



• Οι περιοχές απόφασης γιαν s_5 και s_{11} φαίνονται με κίτρινο

Πλοι αναλυτικά για το s_5 έχουμε $0 \leq r_I \leq \frac{-2a-x-2a+x}{2} \Leftrightarrow 0 \leq r_I \leq -2a$ και $0 \leq r_Q \leq 2a$

και για το s_{11} έχουμε $r_I \geq 2a$ και $-2a \leq r_Q \leq 0$

• $d_{min} = (2a+x) - (2a-x) = 2x = 2 \cdot \frac{a}{2} \Leftrightarrow d_{min} = a$, οπότε $d_{min}^2 = a^2$

β) $b_3=0$ και $b_4=1$ έχουν για σύμβολα s_8, s_9, s_{10}, s_{11} , οπότε ηρένει

Θέμα 3ο (25) Ψηφιακή διαμόρφωση δύο διαστάσεων τάξης $M = 16$ χρησιμοποιεί με την ίδια πιθανότητα τα παρακάτω σύμβολα. Στην στήλη 2 φαίνονται τα bits $b_1 b_2 b_3 b_4$ που αντιστοιχούν σε κάθε σύμβολο.

Σύμβολο	bits	s_I	s_Q
s_0	0010	$-2a-x$	$2a+x$
s_1	0110	$-2a+x$	$2a+x$
s_2	1110	$2a-x$	$2a+x$
s_3	1010	$2a+x$	$2a+x$
s_4	0011	$-2a-x$	$2a-x$
s_5	0111	$-2a+x$	$2a-x$
s_6	1111	$2a-x$	$2a-x$
s_7	1011	$2a+x$	$2a-x$
s_8	0001	$-2a-x$	$-2a+x$
s_9	0101	$-2a+x$	$-2a+x$
s_{10}	1101	$2a-x$	$-2a+x$
s_{11}	1001	$2a+x$	$-2a+x$
s_{12}	0000	$-2a-x$	$-2a-x$
s_{13}	0100	$-2a+x$	$-2a-x$
s_{14}	1100	$2a-x$	$-2a-x$
s_{15}	1000	$2a+x$	$-2a-x$

Ισχύει $a > 0$ και $0 < x < a$. Ο δέκτης λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με ΦΠΙ $\frac{N_0}{2}$ και χρησιμοποιεί MLD προκειμένου να αποφασίσει ποιο σύμβολο έχει σταλεί.

- α-15) Να σχεδιαστεί συνολικά ο αστερισμός καθώς και οι περιοχές απόφασης για τα σύμβολα s_5 και s_{11} και να υπολογιστεί το d_{min}^2 διανομή $x = \frac{a}{2}$.
- β-10) Αν r_I και r_Q είναι οι συνιστώσες του λαμβανόμενου σήματος, δηλαδή $r_I = s_I + n_I$ και $r_Q = s_Q + n_Q$ να βρείτε τις τιμές των r_I και r_Q για τις οποίες ο δέκτης θα αποφασίσει τα σύμβολα για τα οποία ισχύει $b_3 = 0$ και $b_4 = 1$.

$r_I \in \mathbb{R}$ και $-2a \leq r_Q \leq 0$

a) Σην εξόδο σου κάθε αποδιαμορφωσή θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & (\text{μόνο για } z_1 \times \text{συντεταγμένη} = \perp \text{ bit}) \\ & \left. \begin{array}{l} \cdot A: r_1 = h_1 \cdot x + n_1 \\ \cdot B: r_2 = h_2 \cdot x + n_2 \\ \cdot \Gamma: r_3 = h_3 \cdot x + n_3 \end{array} \right\} \text{Οπότε σην είσοδο σου} \\ & \text{ανιχνεύεται θα έχουμε} \\ & r = r_1 + r_2 + r_3 \Leftrightarrow \\ & r = (h_1 + h_2 + h_3) \cdot x + \underbrace{(n_1 + n_2 + n_3)}_{n' \sim N(0, 3\sigma^2)} \end{aligned}$$

To x λαμβάνει ψόντο τις τιμές -1 και 1, οπότε
για τις ηθανόσησες σφάλματος έχουμε:

$$\begin{aligned} \cdot P_{e|-\perp} &= P(r > 0) = P((h_1 + h_2 + h_3) \cdot (-1) + n' > 0) \\ &= P(n' > h_1 + h_2 + h_3) = Q\left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot P_{e|\perp} &= P(r < 0) = P((h_1 + h_2 + h_3) \cdot 1 + n' < 0) = \\ &= P(n' < -(h_1 + h_2 + h_3)) = 1 - P(n' > -(h_1 + h_2 + h_3)) \\ &= 1 - Q\left(\frac{-(h_1 + h_2 + h_3)}{\sqrt{3\sigma^2}}\right) = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right)\right) = Q\left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$

• To αθροισμα $h_1 + h_2 + h_3$ λαμβάνει πολλές διαφορετικές τιμές με διαφορετική ηθανόσητα. Εχουμε:

$$\begin{aligned} \cdot P(h_1 + h_2 + h_3 = 0, 9) &= 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,26 \\ \cdot P(h_1 + h_2 + h_3 = 1, 1) &= 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,46 \\ \cdot P(h_1 + h_2 + h_3 = 0, 7) &= 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,04 \\ \cdot P(h_1 + h_2 + h_3 = 1, 3) &= 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,24 \end{aligned}$$

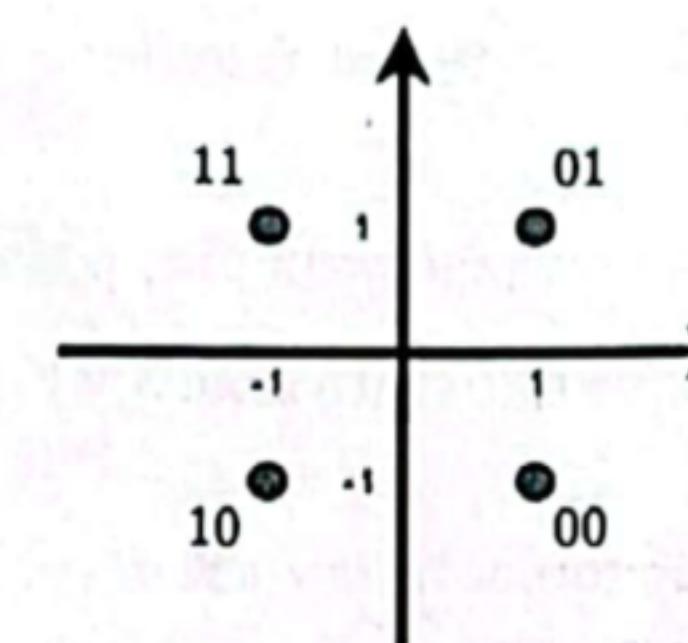
$$\text{Ισχύει } Pe = \frac{1}{2}(P_{e|-\perp} + P_{e|\perp}) = Q\left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{\sigma\sqrt{3}}\right), \text{ οπότε:}$$

$$Pe = Q\left(\frac{0,9}{\sigma\sqrt{3}}\right) \cdot 0,26 + Q\left(\frac{1,1}{\sigma\sqrt{3}}\right) \cdot 0,46 + Q\left(\frac{0,7}{\sigma\sqrt{3}}\right) \cdot 0,04 + Q\left(\frac{1,3}{\sigma\sqrt{3}}\right) \cdot 0,24$$

$$\beta) Av h_1 + h_2 + h_3 = 3, \text{ τότε } Pe' = Q\left(\frac{3}{\sigma\sqrt{3}}\right) < Pe \text{ αφού } \eta \text{ } Q \text{ είναι φθίνουσα}$$

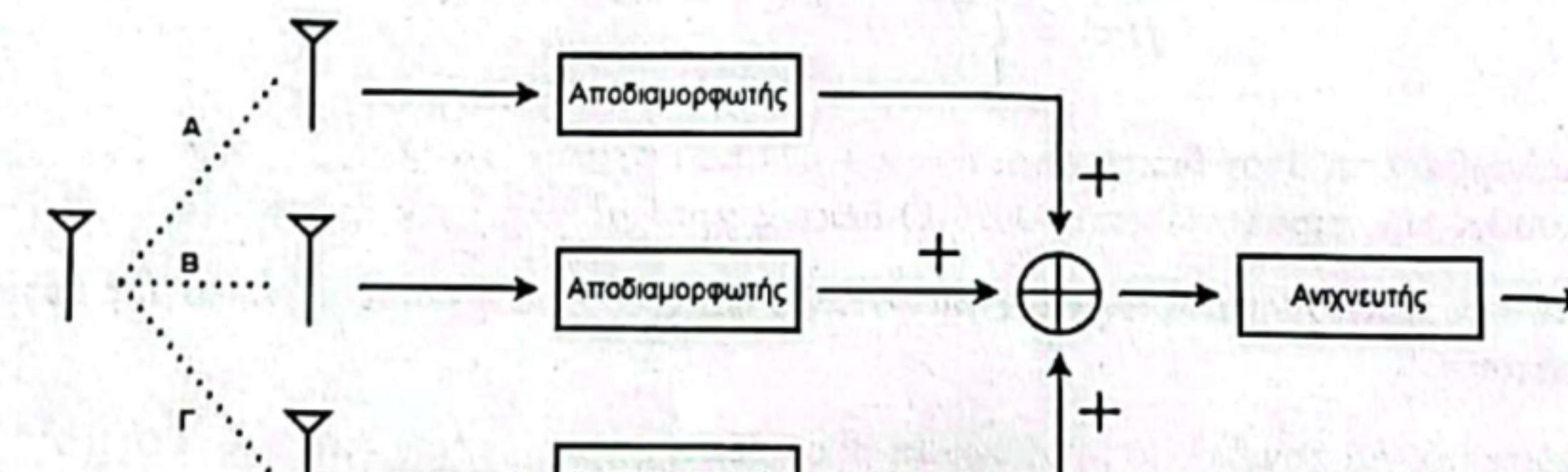
Αρα αφού $Pe' < Pe$, τότε είναι προτιμότερο να έχουμε $h_{1,2,3} = \perp$ λόγω της μικρότερης μέσης ηθανόσης σφάλματος σε bit. Στην ουσία "διώχνουμε" τον συχαίο πολύτο παραγόντα του καναλιού.

Θέμα 4ο (30) Ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα χρησιμοποιεί διαμόρφωση 4-QAM με τον αστερισμό του Σχήματος 1. Το σύστημα αποτελείται από δέκτη με τρεις κεραίες λήψης και τρεις αποδιαμορφωτές, όπως φαίνεται



Σχήμα 1: Αστερισμός 4-QAM

στο Σχήμα 2. Το κανάλι μεταξύ της κεραίας εκπομπής και των κεραιών λήψης επιδρά πολλαπλασιαστικά στο



Σχήμα 2: Δέκτης με 3 κεραίες λήψης

σήμα, δηλαδή ισχύει $r = hs + n$, όπου το h παίρνει τις διαχριτές τιμές ανά κλάδο h_1, h_2 και h_3 , με τις παρακάτω πιθανότητες:

$$\begin{aligned} \Pr\{h_1 = 0,4\} &= 0,5 \text{ και } \Pr\{h_1 = 0,6\} = 0,5 \\ \Pr\{h_2 = 0,3\} &= 0,6 \text{ και } \Pr\{h_2 = 0,1\} = 0,4 \\ \Pr\{h_3 = 0,2\} &= 0,2 \text{ και } \Pr\{h_3 = 0,4\} = 0,8 \end{aligned}$$

Τυποθέτουμε ότι η πρώτη συντεταγμένη αντιστοιχεί στο πρώτο bit και η δεύτερη στο δεύτερο bit κάθε συμβόλου. Το χρησιμοποιούμενο mapping φαίνεται επίσης στο Σχήμα 1. Ο δέκτης λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ^2 και για την ανίχνευση χρησιμοποιεί MLD. Επίσης, οι τιμές που λαμβάνουν τα κανάλια στους τρεις κλάδους είναι γνωστές στον δέκτη.

α-20) Να υπολογιστεί η μέση πιθανότητα σφάλματος του πρώτου bit.

β-10) Να υπολογιστεί η μέση πιθανότητα σφάλματος του πρώτου bit στο ίδιο σύστημα, όταν $h_1 = h_2 = h_3 = 1$. Να συγχρίνετε και να σχολιάσετε σύντομα τα δύο αποτέλεσματα.

Λύσεις ΦΕΒ. 2023

α) Α, σε τρισδιάστατο χώρο θα έχουμε
3 συναρτήσεις βάσης (όχι 4)

β) Α, οι αστερισμοί BPAM και BPSK
έχουν ίδια πιθανότητα σφάλματος συμβόλου
για ίδιο Σ_b

Θέμα 1ο (15)

Να επιλέξετε "Σωστό" ή "Λάθος" στις παρακάτω ερωτήσεις και να αιτιολογήσετε σύντομα τις απαντήσεις σας.

α-5) Το πλήθος των συναρτήσεων βάσης ενός τρισδιάστατου χώρου που ορίζεται από 4 σήματα είναι ίσο με τον αριθμό των σημάτων.

β-10) Έστω τηλεπικοινωνιακό σύστημα που χρησιμοποιεί αποκλειστικά αστερισμούς BPAM ή BPSK [διας ενέργειας]. Εάν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα σφάλματος ανίχνευσης συμβόλου, θα πρέπει να επιλεχθεί ο αστερισμός BPSK.

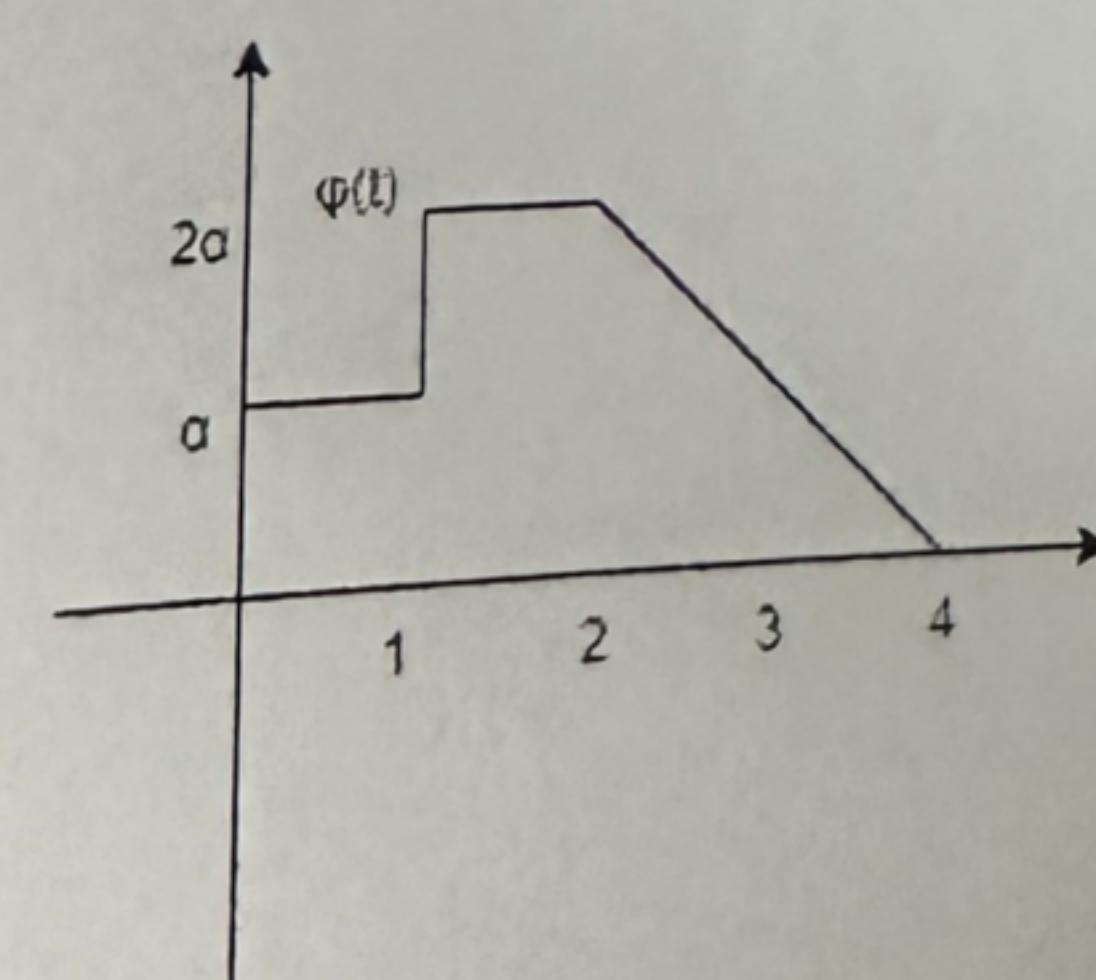
a). Αφού $s_1(t) = \varphi(t)$, τότε συν αστερισμό
το s_1 έχει συνεπαγμένη $s_1 = \{\perp\}$,
οπότε $\sqrt{\sum_b} = \perp \Leftrightarrow \sum_b = \perp = \sum_{\varphi}$

• Άρα $\int_0^4 |\varphi(t)|^2 dt = \perp \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 a^2 dt + \int_1^2 4a^2 dt + \int_2^4 (-at + 4a)^2 dt = \perp \Leftrightarrow \int_0^1 a^2 dt + \int_1^2 4a^2 dt + \int_2^4 a^2 t^2 dt + \int_2^4 16a^2 dt - \int_2^4 8a^2 t dt = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a^2 + a^2 \left(\frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} \right) + 32a^2 - 8a^2 \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = \perp \Leftrightarrow 37a^2 + \frac{56}{3}a^2 - 48a^2 = \perp \Leftrightarrow$$

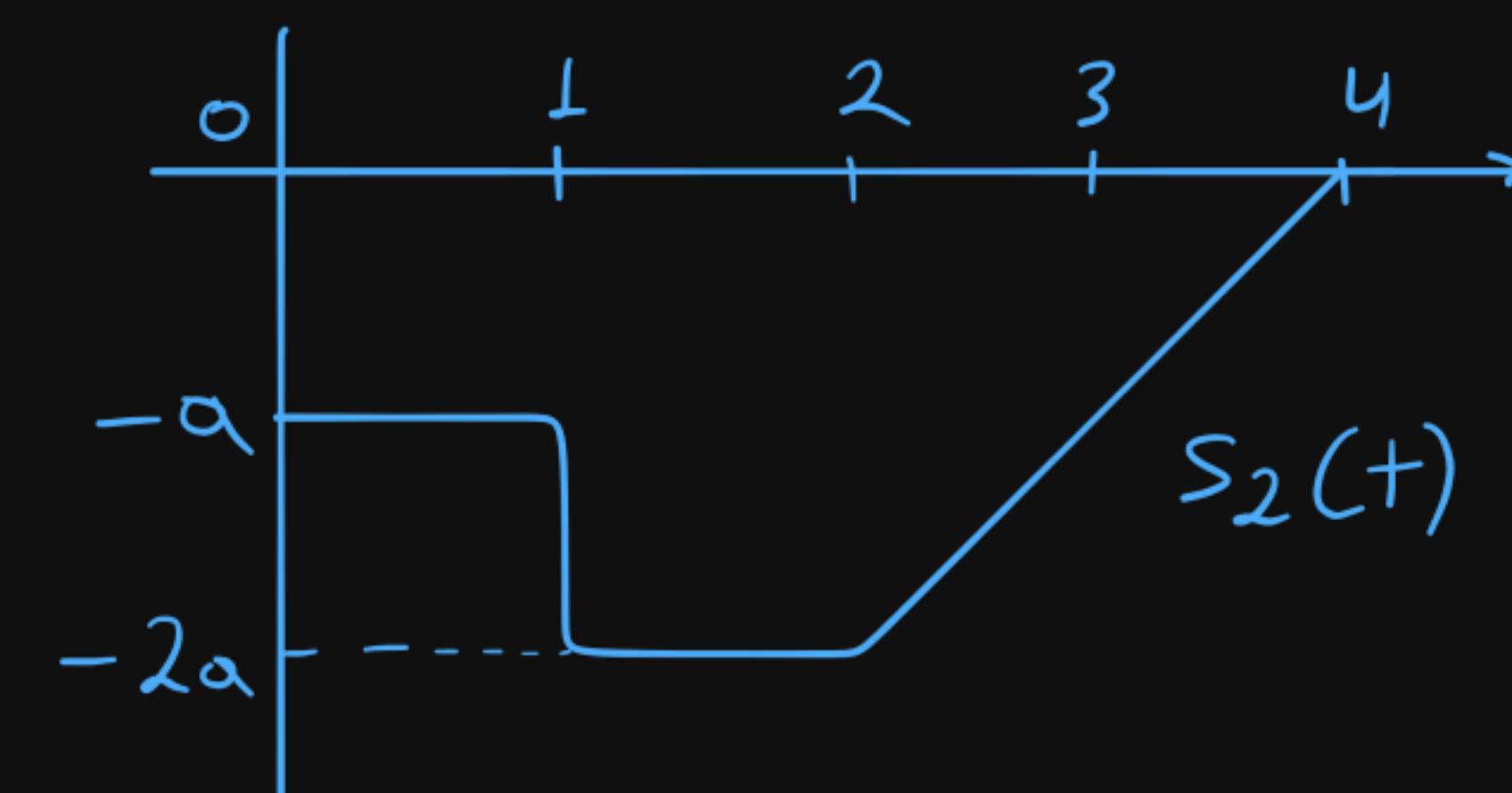
$$\Leftrightarrow \frac{23}{3}a^2 = \perp \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{23} \Leftrightarrow a = 0,36\perp$$



Σχήμα 1. Σήμα φ(t)

b). Το σήμα s_2 θα έχει συνεπαγμένη $-\sqrt{\sum_b} = -\perp$, οπότε $s_2 = -\varphi(t)$

$$\begin{aligned} &\text{Με ML ανιχνευτή θα } \\ &\text{exoume } P_{b|s_1} = P(r < 0) = P(n + \perp < 0) \\ &= P(n < -\perp) = \perp - P(n \geq -\perp) = \perp - Q\left(\frac{-\perp}{\sigma}\right) = \perp - \left(1 - Q\left(\frac{\perp}{\sigma}\right)\right) \\ &= Q\left(\frac{\perp}{\sigma}\right) \Leftrightarrow P_{b|s_1} = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) \end{aligned}$$



$$\text{Άρα } P_b = \frac{1}{2} \left(P_{b|s_1} + P_{b|s_2} \right) \xrightarrow{\text{Ισονιθανάτωση}} P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)$$

c). Επειδή $s_1(t) = \frac{1}{2}\varphi(t)$, τότε $s_1 = \left\{ \frac{\perp}{2} \right\}$ και $s_2 = \left\{ -\frac{\perp}{2} \right\}$, οπότε με σην ιδια λογική

$$P_{b|s_1} = P(r < 0) = P\left(n + \frac{\perp}{2} < 0\right) = \dots = Q\left(\frac{\frac{\perp}{2}}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{\perp}{2}\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) = P_b'$$

• Άρα $P_b < P_b'$ αφού η Q είναι φθινουσα. Αναμενόμενο καθώς σην 2^n ηφίλτωση
τα σύμβολα έχουν μικρότερη ενέργεια (βρίσκονται πιο κοντά μεταξύ τους)

Θέμα 20 (35)

Έστω BPAM διαμόρφωση με ισοπίθανα σύμβολα για την οποία ισχύει ότι $s_1(t) = \phi(t)$, δηλαδή $\phi(t)$ δίνεται στο

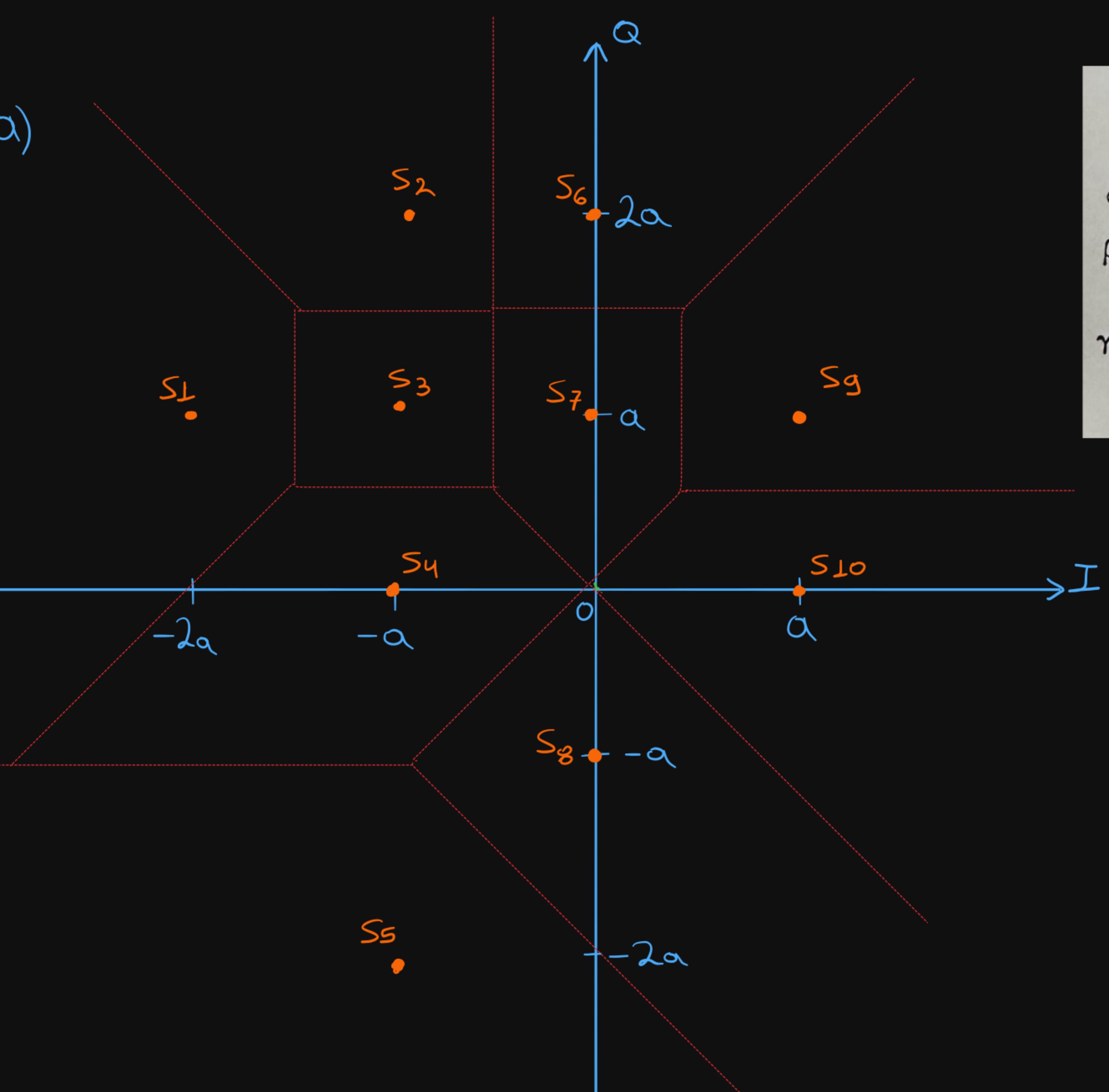
Σχήμα 1. Ο δέκτης λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$.

α-10) Γνωρίζοντας ότι το $\phi(t)$ είναι βάση των σημάτων $s_1(t)$ και $s_2(t)$, να υπολογιστεί η τιμή του a .

β-10) Να σχεδιαστεί το σήμα $s_2(t)$ και να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος συναρτήσει του N_0 , δηλαδή ο δέκτης χρησιμοποιεί ML ανιχνευτή.

γ-15) Αν $s_1(t) = \frac{1}{2}\phi(t)$ με την τιμή του a που υπολογίστηκε, να συγχριθεί ποιοτικά η επίδοση ως προς την πιθανότητα σφάλματος με τον αστερισμό του προηγούμενου ερωτήματος.

a)



Θέμα 3ο (50)
Ένα ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα χρησιμοποιεί τον αστερισμό του Σχήματος 2.

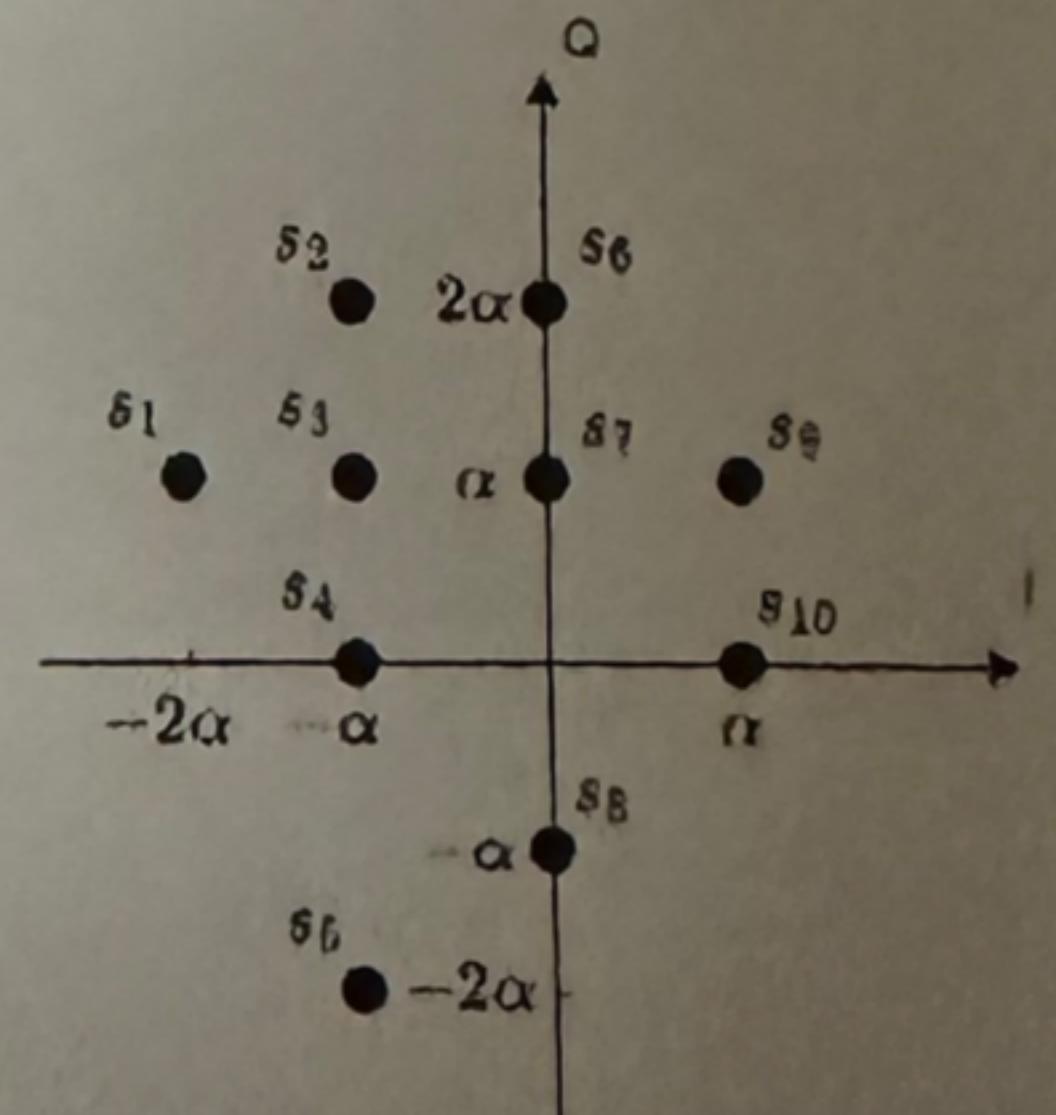
- α-10) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του αστερισμού συναρτήσει του α και να σχεδιαστούν οι περιοχές απόφασης.
β-30) Εστω ότι αποστέλλεται η ακολουθία συμβόλων $s_3 s_8$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να ληφθεί σωστά τουλάχιστον ένα από τα δύο σύμβολα σε περιβάλλον AWGN μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης σ^2 .
γ-10) Εστω πως τα εκπεμπόμενα σύμβολα είναι στραμμένα κατά 45° (ωρολογιακά) λόγω ενός σφάλματος στον πομπό. Εάν ο δέκτης γνωρίζει το σφάλμα, πώς θεωρείτε ότι πρέπει να ενεργήσει ώστε οι πιθανότητες σφάλματος των συμβόλων να μην επηρεαστούν;

•Η μέση ενέργεια του αστερισμού είναι:

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \|s_i\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{10} \left(\underbrace{s_1}_{4\alpha^2 + \alpha^2} + \underbrace{s_2}_{\alpha^2 + 4\alpha^2} + \underbrace{s_3}_{2\alpha^2 + \alpha^2} + \underbrace{s_4}_{\alpha^2 + 4\alpha^2} + \underbrace{s_5}_{4\alpha^2 + \alpha^2} + \underbrace{s_6}_{2\alpha^2 + \alpha^2} + \underbrace{s_7}_{\alpha^2 + 4\alpha^2} + \underbrace{s_8}_{4\alpha^2 + \alpha^2} + \underbrace{s_9}_{\alpha^2 + 4\alpha^2} + \underbrace{s_{10}}_{2\alpha^2 + \alpha^2} \right)$$

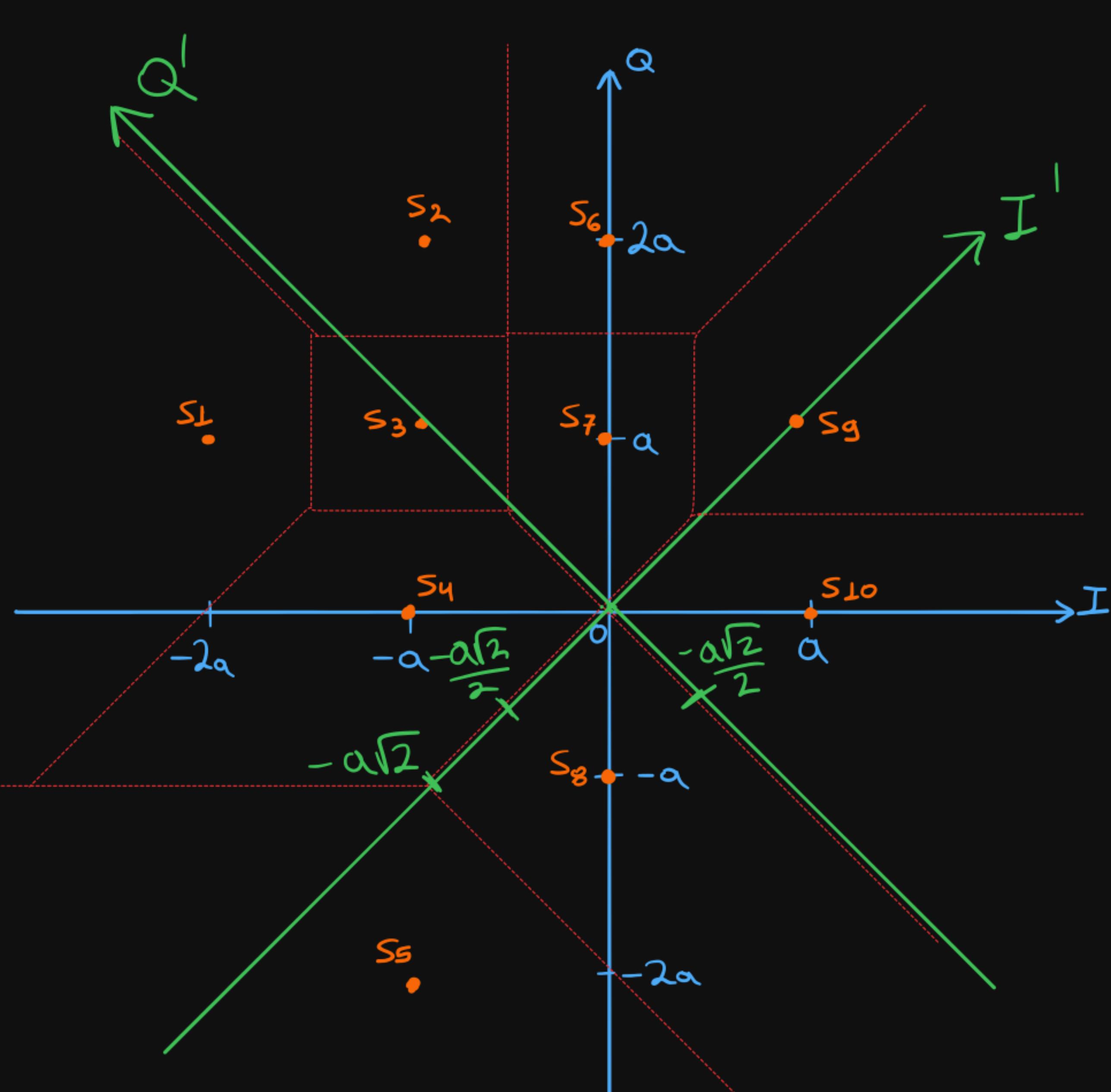
$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_S = 2,7\alpha^2}$$



Σχήμα 2. Αστερισμός.

$$\begin{aligned} \beta) \cdot P_3 &= P\left(-\frac{\alpha}{2} < r_I < -\frac{3\alpha}{2} \wedge \frac{\alpha}{2} < r_Q < \frac{3\alpha}{2}\right) = P\left(-\frac{\alpha}{2} < -\alpha + n < -\frac{3\alpha}{2}\right) \cdot P\left(\frac{\alpha}{2} < \alpha + n < \frac{3\alpha}{2}\right) = \\ &= P\left(\frac{\alpha}{2} > n > -\frac{\alpha}{2}\right) \cdot P\left(-\frac{\alpha}{2} < n < \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(-\frac{\alpha}{2} < n < \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left[Q\left(\frac{-\frac{\alpha}{2}}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sigma}\right)\right]^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P_3 = \left[1 - Q\left(\frac{\alpha}{2\sigma}\right) - Q\left(\frac{\alpha}{2\sigma}\right)\right]^2 \Leftrightarrow P_3 = \underline{\underline{\left[1 - 2Q\left(\frac{\alpha}{2\sigma}\right)\right]^2}} \end{aligned}$$

•Για να βρούμε το P_8 θα περιστρέψουμε τους άξονες κατά 45° αριστοροδρομικά:



$$\begin{aligned} \text{Όποτε } P_8 &= P(-\alpha\sqrt{2} < r_{I'} < 0 \wedge r_{Q'} < 0) = \\ &= P\left(-\alpha\sqrt{2} < -\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + n < 0\right) \cdot P\left(-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + n < 0\right) = \\ &= P\left(-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} < n < \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right) \cdot P\left(n < \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right) = \\ &= \left[Q\left(\frac{-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}{\sigma}\right)\right] \cdot \left[1 - Q\left(\frac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}{\sigma}\right)\right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P_8 = \left[1 - 2Q\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2\sigma}\right)\right] \left[1 - Q\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

Άρα πιθανότητα να ληφθεί ένα συλλαχτόν από τα s_3, s_8 σωρά:

$$P = P_3(1 - P_8) + P_8(1 - P_3) + P_3 \cdot P_8$$

γ) Αν τα σύμβολα περιστραφούν κατά 45° αριστοροδρομικά, τότε ο δέκτης θα πρέπει να τα περιστρέψει κατά 45° αριστοροδρομικά. Δηλαδή αν λάβει τις συνιστώσες r_I και r_Q , θα πρέπει να τις μεταστρέψει σε $r_{I'}$ και $r_{Q'}$ σύμφωνα με τον τύπο (αν το Σ ζειστεί):

$$\begin{pmatrix} r_{I'} \\ r_{Q'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_I \\ r_Q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} r_{I'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(r_I - r_Q) \\ r_{Q'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(r_I + r_Q) \end{cases}$$