

# ΣΑΠΗΛΟguide

Τηλεπικοινωνιακά  
Συστήματα 2

Σημείωση: Οι απαντήσεις μπορεί να μην είναι 100% σωστές

- Nontas

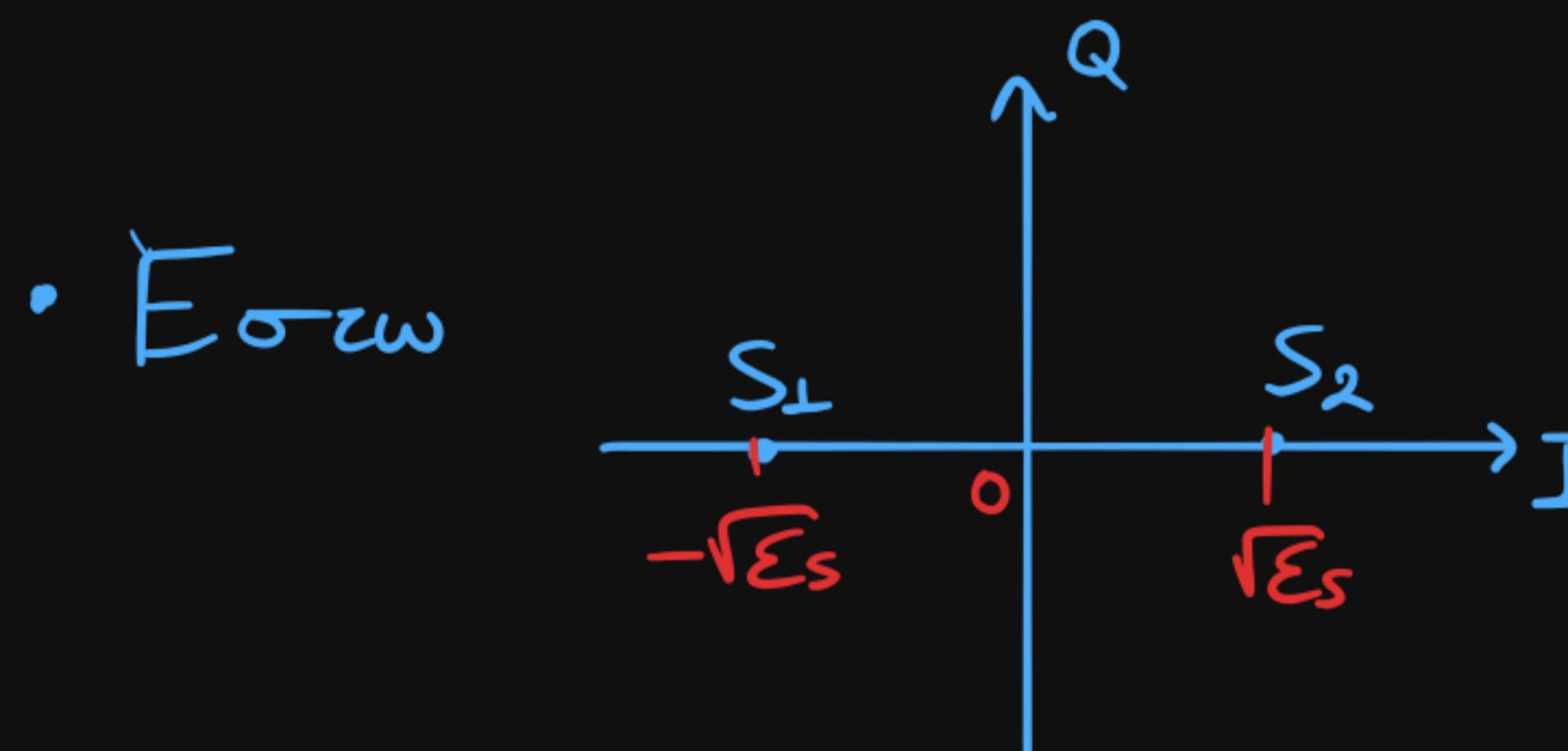
# Λύσεις Σεντ. 2023

$$\text{a). Ισχύει } \sum_s = P_s \cdot T = \frac{V_{rms}^2}{R} \cdot \frac{1}{R'} \Leftrightarrow$$

↑ αντίσταση      ↑ data rate

$$\Leftrightarrow \sum_s = \frac{A^2}{2R} \cdot \frac{1}{R'} = \frac{10^{-6}}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{5 \cdot 10^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_s = \underline{10^{-10} \text{ J}} = \sum_b \left( \begin{array}{l} \text{ενέργεια} \\ \text{εκπομπής ενός bit} \end{array} \right)$$



o ασερισμός BPSK. Όποιες

$$\Leftrightarrow P_s | s_1 = P(r_I > 0) = P(n - \sqrt{\sum_s} > 0)$$

$$\Leftrightarrow P_s | s_1 = P(n > \sqrt{\sum_s}) = P(n > 10^{-5}) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sqrt{\frac{10^{-10}}{2}}}\right)$$

$$\Leftrightarrow P_s | s_1 = Q(4,47) = \frac{1}{2} e^{-\frac{4,47^2}{2}} \Leftrightarrow \underline{P_s | s_1 = 2,29 \cdot 10^{-5}}$$

$$\text{Όποιες } P_s = \frac{1}{2} (P_s | s_1 + P_s | s_2) \xrightarrow[\text{ισοπίθανα}]{s_1, s_2} P_s = \frac{1}{2} \cdot 2 P_s | s_1 \Leftrightarrow \underline{P_s = 2,29 \cdot 10^{-5}}$$

• Άρα αφού σημειώσουμε μέσο σφάλμα  $\frac{5 \cdot 10^3}{R'} \cdot \frac{60 \cdot 60 \cdot 24}{\text{secs σε 1 μέρα}}$  bits, τότε έχουμε μέσο σφάλμα

$$P = 5 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 2,29 \cdot 10^{-5} \Leftrightarrow \boxed{P = 9892 \text{ bits}}$$

$$\beta) \text{ Με την ίδια λογική } \sum_s' = \frac{10^{-6}}{2} \cdot \frac{1}{5 \cdot 10^6} \Leftrightarrow \underline{\sum_s' = 10^{-13} \text{ J}}, \quad P_s | s_1' = P(n > \sqrt{10^{-13}}) = Q\left(\frac{10^{-6,5}}{\sqrt{\frac{10^{-11}}{2}}}\right) = Q(0,14)$$

$$\Leftrightarrow P_s | s_1' = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{0,14^2}{2}} = 0,495 = \underline{P_s'}$$

$$\text{και άρα } P' = 5 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 0,495 \Leftrightarrow \boxed{P' = 2,13 \cdot 10^{11} \text{ bits}}$$

Με την αύξηση του data rate μειώσαμε το  $\sum_s$ , οπότε τα σύμβολα του ασερισμού βρίσκονται πιο κοντά το ένα το άλλο και άρα έχουμε αύξηση των σφαλμάτων bit.

Θέμα 10 (25) Ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας με διαμόρφωση BPSK λειτουργεί συνεχώς με data rate 5 Kbps χρησιμοποιώντας τα ισοπίθανα σήματα

$$s_1(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \text{ και } s_2(t) = -A \cos(2\pi f_0 t).$$

Η rms τιμή του πλάτους των σημάτων είναι  $V_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$  και η αντίσταση  $R = 1 \Omega$ . Ο θόρυβος στον δέκτη είναι AWGN με  $N_0 = 10^{-11} W/Hz$ .

α-15) Να βρεθεί ο μέσος όρος των σφαλμάτων bit στη διάρκεια μιας μέρας. Δίνεται ότι  $A = 1 \text{ mV}$ .

β-10) Ποιος είναι ο αριθμός των σφαλμάτων, όταν το data rate είναι 5 Mbps; Σχολιάστε πολύ σύντομα την απάντησή σας.

Τηλεδιέξη 1: Για την συνάρτηση  $Q(x)$  να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση  $Q(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

Τηλεδιέξη 2: Ο αριθμός των σφαλμάτων είναι ακέραιος.

Πιθανότητα σφαλμάτων αν σταλθήκε το  $s_1$



$$P_s | s_1 = P(r_I > 0) = P(n - \sqrt{\sum_s} > 0)$$

$$\Leftrightarrow P_s | s_1 = P(n > \sqrt{\sum_s}) = P(n > 10^{-5}) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sqrt{\frac{10^{-10}}{2}}}\right)$$

$$a) P_b = P_{S \mid S_1, S_2} = P(r < 0) = P(n + A < 0)$$

$$= P(n < -A) = \int_{-\frac{3A}{2}}^{-A} \frac{1}{3A} dx = \frac{1}{3A} \left( -A + \frac{3A}{2} \right)$$

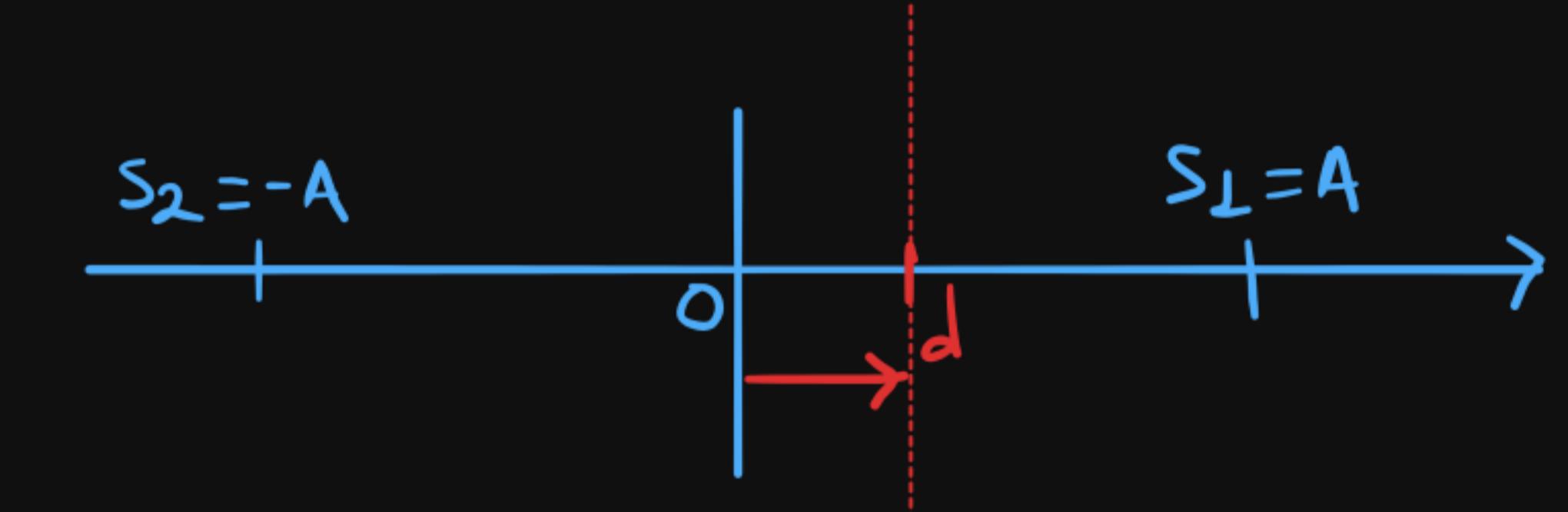
$$= \frac{1}{3A} \cdot \frac{A}{2} \Leftrightarrow P_b = \frac{1}{6}$$

Θέμα 20 (20) Ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας χρησιμοποιεί τα σήματα  $s_1(t) = A$ ,  $s_2(t) = -A$  με την ίδια πιθανότητα. Το κανάλι είναι προσθετικό ύφορύβου με ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (ΣΠΙΙ)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3A} & x \in (-\frac{3A}{2}, \frac{3A}{2}) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Δηλαδή το σήμα που λαμβάνεται στον δέκτη είναι  $r = s + n$ , όπου το σύμβολο  $s$  είναι  $-A$  ή  $A$  και το  $n$  είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την παραπάνω κατανομή. Ο δέκτης χρησιμοποιεί προσαρμοσμένο φίλτρο στη βάση.

- α-10) Να υπολογίσετε την πιθανότητα σφάλματος bit, όταν ο δέκτης λειτουργεί με χριτήριο απόφασης την ελάχιστη ευκλείδεια απόσταση.
- β-10) Να βρείτε το χριτήριο για την βέλτιστη απόφαση στον δέκτη, χρησιμοποιώντας γραφική ή αναλυτική μέθοδο, και να υπολογίσετε εκ νέου την πιθανότητα σφάλματος bit. Τι παρατηρείτε;



β). Ας θεωρήσουμε πώς μετακινούμε το άριθμο  $d$  προς τα δεξιά, δηλ.

$$\text{Τότε } P_{S \mid S_1, S_2} = P(r < d) = P(n + A < d) = P(n < d - A) =$$

$$= \int_{-\frac{3A}{2}}^{d-A} \frac{1}{3A} dx = \frac{1}{3A} \left( d - A + \frac{3A}{2} \right) = \frac{d - A + \frac{3A}{2}}{3A}$$

$$\text{και } P_{S \mid S_2} = P(r > d) = P(n - A > d) = P(n > d + A) =$$

$$= \int_{d+A}^{\frac{3A}{2}} \frac{1}{3A} dx = \frac{1}{3A} \left( \frac{3A}{2} - d - A \right) = \frac{\frac{3A}{2} - d - A}{3A}$$

$$\cdot \text{Πρέπει } P_{S \mid S_1, S_2} = P_{S \mid S_2} \Leftrightarrow \frac{d - A + \frac{3A}{2}}{3A} = \frac{\frac{3A}{2} - d - A}{3A} \Leftrightarrow d - A + \frac{3A}{2} = \frac{3A}{2} - d - A \Leftrightarrow 2d = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

Παρατηρούμε ότι το βέλτιστο σημείο απόφασης παραμένει το  $d = 0$  ( $\mu \epsilon P_b = \frac{1}{6}$ ).

Το αντετέλεσμα είναι αναμενόμενο καθώς οι zippers του Θορύβου  $(-\frac{3A}{2} \text{ έως } \frac{3A}{2})$  είναι συμμετρικές ως προς το 0.

a)  $s_0$

$s_4$

$s_1$

$s_5$

$s_2$

$s_6$

$s_3$

$s_7$

$-2a-x$

0

$2a-x$

$2a$

$2a+x$

$> I$

$s_8$

$s_9$

$s_{10}$

$s_{11}$

$s_{12}$

$s_{13}$

$-2a$

$-2a-x$

$s_{14}$

$s_{15}$

• Οι περιοχές απόφασης των  $s_5$  και  $s_{11}$  φαίνονται με κίτρινο

Πιο αναλυτικά για το  $s_5$  έχουμε  $0 \leq r_I \leq \frac{-2a-x - 2a+x}{2} \Leftrightarrow 0 \leq r_I \leq -2a$  και  $0 \leq r_Q \leq 2a$

και για το  $s_{11}$  έχουμε  $r_I \geq 2a$  και  $-2a \leq r_Q \leq 0$

•  $d_{min} = (2a+x) - (2a-x) = 2x = 2 \cdot \frac{a}{2} \Leftrightarrow d_{min} = a$ , οπότε  $d_{min}^2 = a^2$

β)  $b_3=0$  και  $b_4=1$  έχουν τα σύμβολα  $s_8, s_9, s_{10}, s_{11}$ , οπότε πρέπει

Θέμα 30 (25) Ψηφιακή διαμόρφωση δύο διαστάσεων τάξης  $M = 16$  χρησιμοποιεί με την ίδια πιθανότητα τα παρακάτω σύμβολα. Στην στήλη 2 φαίνονται τα bits  $b_1 b_2 b_3 b_4$  που αντιστοιχούν σε κάθε σύμβολο.

Σύμβολο	bits	$s_I$	$s_Q$
$s_0$	0010	$-2a-x$	$2a+x$
$s_1$	0110	$-2a+x$	$2a+x$
$s_2$	1110	$2a-x$	$2a+x$
$s_3$	1010	$2a+x$	$2a+x$
$s_4$	0011	$-2a-x$	$2a-x$
$s_5$	0111	$-2a+x$	$2a-x$
$s_6$	1111	$2a-x$	$2a-x$
$s_7$	1011	$2a+x$	$2a-x$
$s_8$	0001	$-2a-x$	$-2a+x$
$s_9$	0101	$-2a+x$	$-2a+x$
$s_{10}$	1101	$2a-x$	$-2a+x$
$s_{11}$	1001	$2a+x$	$-2a+x$
$s_{12}$	0000	$-2a-x$	$-2a-x$
$s_{13}$	0100	$-2a+x$	$-2a-x$
$s_{14}$	1100	$2a-x$	$-2a-x$
$s_{15}$	1000	$2a+x$	$-2a-x$

Ισχύει  $a > 0$  και  $0 < x < a$ . Ο δέκτης λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με ΦΠΙ  $\frac{N_0}{2}$  και χρησιμοποιεί MLD προκειμένου να αποφασίσει ποιο σύμβολο έχει σταλεί.

- α-15) Να σχεδιαστεί συνολικά ο αστερισμός καθώς και οι περιοχές απόφασης για τα σύμβολα  $s_5$  και  $s_{11}$  και να υπολογιστεί το  $d_{min}^2$  διανομή  $x = \frac{a}{2}$ .
- β-10) Αν  $r_I$  και  $r_Q$  είναι οι συνιστώσες του λαμβανόμενου σήματος, δηλαδή  $r_I = s_I + n_I$  και  $r_Q = s_Q + n_Q$  να βρείτε τις τιμές των  $r_I$  και  $r_Q$  για τις οποίες ο δέκτης θα αποφασίσει τα σύμβολα για τα οποία ισχύει  $b_3 = 0$  και  $b_4 = 1$ .

$r_I \in \mathbb{R}$  και  $-2a \leq r_Q \leq 0$

a) Σημείωση για την εξόδο του καθεύδητου αποδιαμορφωτή θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & \text{(μόνο για } z_1 \times \text{ συντεταγμένη } = 1^{\circ} \text{ bit)} \\ & \left. \begin{array}{l} \bullet A: r_1 = h_1 \cdot x + n_1 \\ \bullet B: r_2 = h_2 \cdot x + n_2 \\ \bullet C: r_3 = h_3 \cdot x + n_3 \end{array} \right\} \text{ Οπότε σημείωση για την είσοδο του} \\ & \text{ανιχνευτή θα έχουμε} \\ & r = r_1 + r_2 + r_3 \Leftrightarrow \\ & r = (h_1 + h_2 + h_3) \cdot x + \underbrace{(n_1 + n_2 + n_3)}_{n \sim N(0, 3\sigma^2)} \end{aligned}$$

To x λαμβάνει μόνο τις τιμές -1 και 1, οπότε για τις πιθανότητες σφάλματος έχουμε:

$$\begin{aligned} & P_{e|1-1} = P(r > 0) = P((h_1 + h_2 + h_3) \cdot (-1) + n' > 0) \\ & = P(n' > h_1 + h_2 + h_3) = Q\left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_{e|11} = P(r < 0) = P((h_1 + h_2 + h_3) \cdot 1 + n' < 0) = \\ & = P(n' < -(h_1 + h_2 + h_3)) = 1 - P(n' > -(h_1 + h_2 + h_3)) \\ & = 1 - Q\left(\frac{-(h_1 + h_2 + h_3)}{\sqrt{3\sigma^2}}\right) = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right)\right) = Q\left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$

• To αθροισμα  $h_1 + h_2 + h_3$  λαμβάνει πολλές διαφορετικές τιμές με διαφορετική πιθανότητα. Έχουμε:

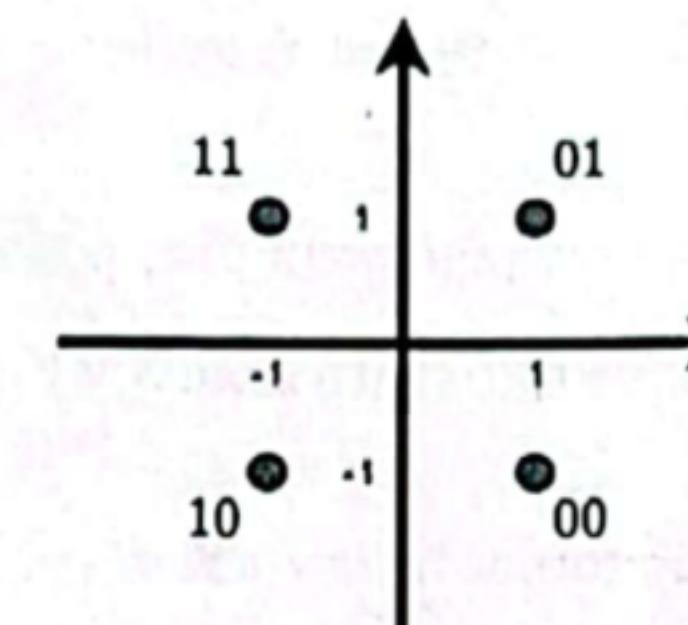
$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & P(h_1 + h_2 + h_3 = 0,9) = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,26 \\ & P(h_1 + h_2 + h_3 = 1,1) = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,46 \\ & P(h_1 + h_2 + h_3 = 0,7) = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,04 \\ & P(h_1 + h_2 + h_3 = 1,3) = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,24 \end{aligned} \right] \quad \text{Για εναλλαγή θεώρηση} \\ & P_{e|1} = \frac{1}{2}(P_{e|1-1} + P_{e|11}) = Q\left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right), \text{ οπότε:} \end{aligned}$$

$$P_e = Q\left(\frac{0,9}{\sqrt{3\sigma^2}}\right) \cdot 0,26 + Q\left(\frac{1,1}{\sqrt{3\sigma^2}}\right) \cdot 0,46 + Q\left(\frac{0,7}{\sqrt{3\sigma^2}}\right) \cdot 0,04 + Q\left(\frac{1,3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right) \cdot 0,24$$

$$\beta) Av \ h_1 + h_2 + h_3 = 3, \text{ τότε } P_e' = Q\left(\frac{3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right) < P_e \quad \text{ αφού } \eta \text{ } Q \text{ είναι φθίνουσα}$$

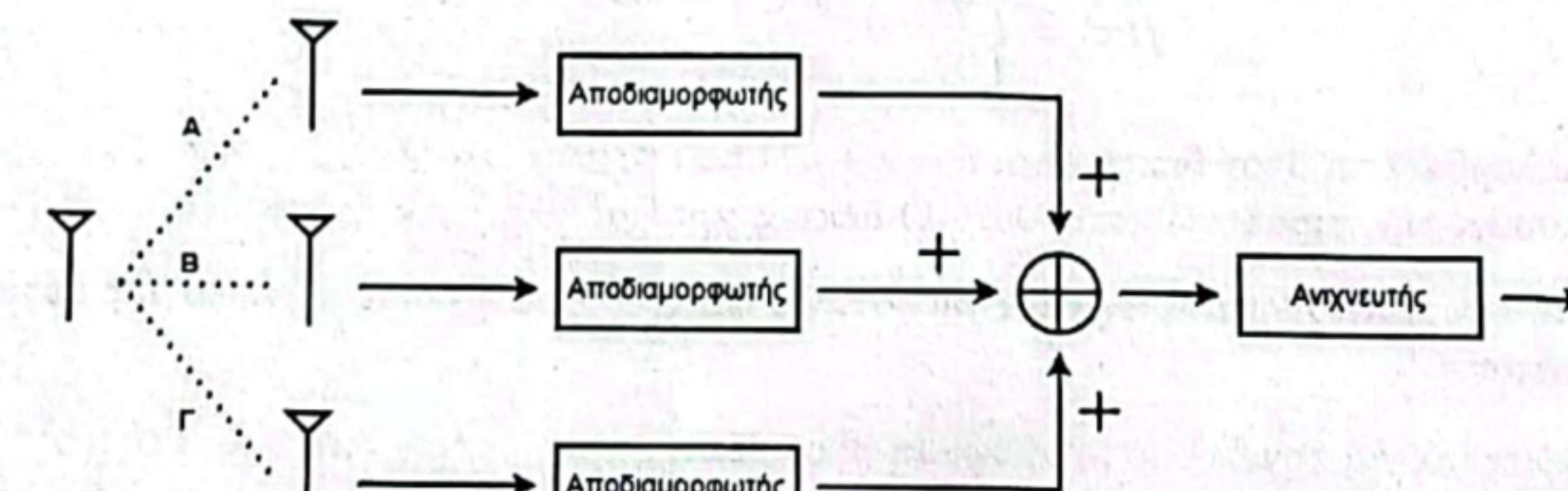
Αρα αφού  $P_e' < P_e$ , τότε είναι προτιμότερο να έχουμε  $h_{1,2,3} = 1$  λόγω της μικρότερης μέσης πιθανότητας σφάλματος σε 1 bit. Στην ουσία "διώχνουμε" τον συχναίο πολύτο παράγοντα του καναλιού.

Θέμα 4ο (30) Ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα χρησιμοποιεί διαμόρφωση 4-QAM με τον αστερισμό του Σχήματος 1. Το σύστημα αποτελείται από δέκτη με τρεις κεραίες λήψης και τρεις αποδιαμορφωτές, όπως φαίνεται



Σχήμα 1: Αστερισμός 4-QAM

στο Σχήμα 2. Το κανάλι μεταξύ της κεραίας εκπομπής και των κεραιών λήψης επιμέρους πολλαπλασιαστικά στο



Σχήμα 2: Δέκτης με 3 κεραίες λήψης

σήμα, δηλαδή ισχύει  $r = hs + n$ , όπου το  $h$  παίρνει τις διαχριτές τιμές ανά κλάδο  $h_1, h_2$  και  $h_3$ , με τις παρακάτω πιθανότητες:

$$\begin{aligned} Pr\{h_1 = 0,4\} &= 0,5 \text{ και } Pr\{h_1 = 0,6\} = 0,5 \\ Pr\{h_2 = 0,3\} &= 0,6 \text{ και } Pr\{h_2 = 0,1\} = 0,4 \\ Pr\{h_3 = 0,2\} &= 0,2 \text{ και } Pr\{h_3 = 0,4\} = 0,8 \end{aligned}$$

Τυποθέτουμε ότι η πρώτη συντεταγμένη αντιστοιχεί στο πρώτο bit και η δεύτερη στο δεύτερο bit κάθε συμβόλου. Το χρησιμοποιούμενο mapping φαίνεται επίσης στο Σχήμα 1. Ο δέκτης λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με μέση τιμή μηδέν και διασπορά  $\sigma^2$  και για την ανίχνευση χρησιμοποιεί MLD. Επίσης, οι τιμές που λαμβάνουν τα κανάλια στους τρεις κλάδους είναι γνωστές στον δέκτη.

α-20) Να υπολογιστεί η μέση πιθανότητα σφάλματος του πρώτου bit.

β-10) Να υπολογιστεί η μέση πιθανότητα σφάλματος του πρώτου bit στο ίδιο σύστημα, όταν  $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ . Να συγχρίνετε και να σχολιάσετε σύντομα τα δύο αποτέλεσματα.

# Λύσεις Φεβ. 2023

α) Α, σε τρισδιάστατο χώρο θα έχουμε  
3 συναρτήσεις βάσης (όχι 4)

β) Α, οι αστερισμοί BPAM και BPSK  
έχουν ίδια πιθανότητα σφάλματος συμβόλου  
για ίδιο εβ

Θέμα 1ο (15)

Να επιλέξετε "Σωστό" ή "Λάθος" στις παρακάτω ερωτήσεις και να αιτιολογήσετε σύντομα τις απαντήσεις σας.

α-5) Το πλήθος των συναρτήσεων βάσης ενός τρισδιάστατου χώρου που ορίζεται από 4 σήματα είναι ίσο με τον αριθμό των σημάτων.

β-10) Έστω τηλεπικοινωνιακό σύστημα που χρησιμοποιεί αποκλειστικά αστερισμούς BPAM ή BPSK ίδιας ενέργειας.  
Εάν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα σφάλματος ανίχνευσης συμβόλου, θα πρέπει να επιλεχθεί ο αστερισμός BPSK.

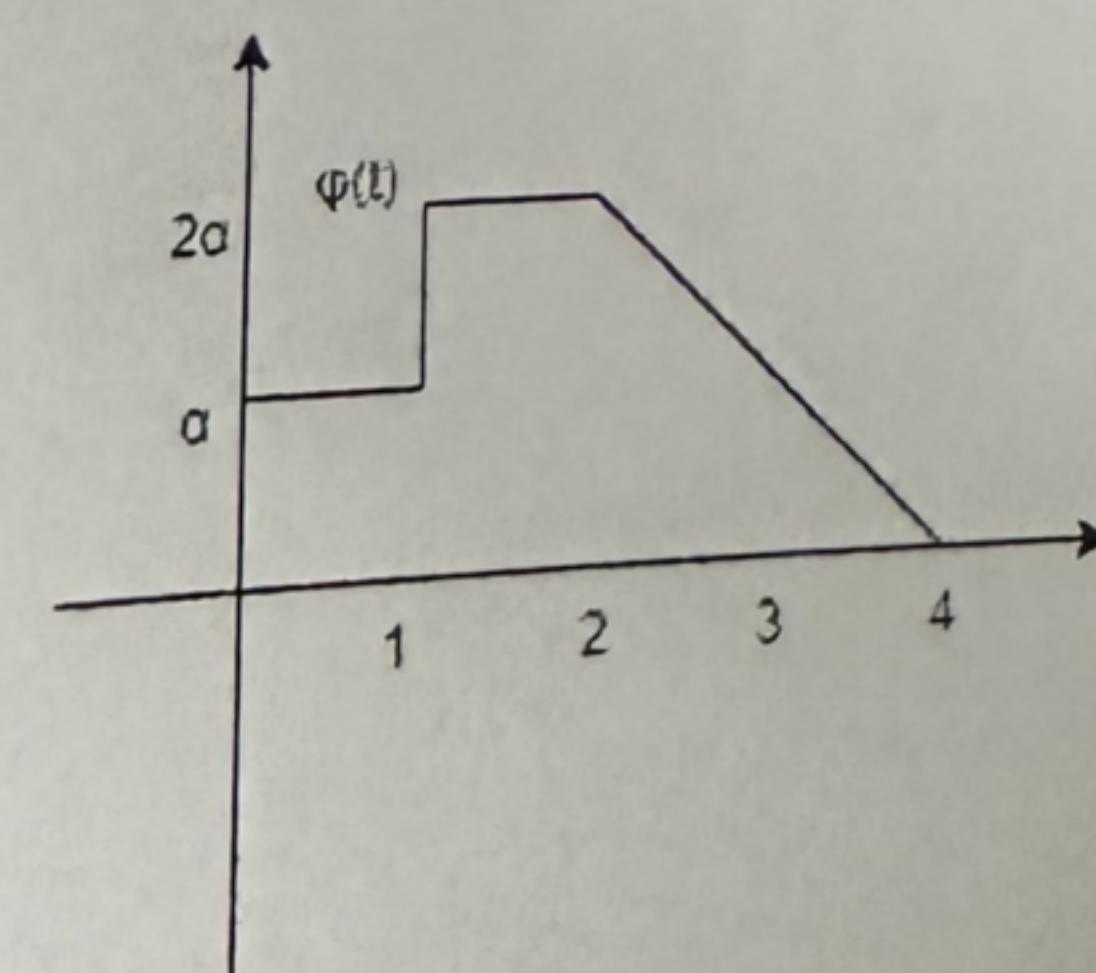
a). Αφού  $s_1(t) = \varphi(t)$ , τότε σαν αστερισμό  
το  $s_1$  έχει συντεταγμένη  $s_1 = \{\perp\}$ ,  
οπότε  $\sqrt{E_b} = \perp \Leftrightarrow E_b = \perp = E_\varphi$

• Άρα  $\int_0^4 |\varphi(t)|^2 dt = \perp \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 a^2 dt + \int_1^2 4a^2 dt + \int_2^4 (-at + 4a)^2 dt = \perp \Leftrightarrow \int_0^1 a^2 dt + \int_1^2 4a^2 dt + \int_2^4 a^2 t^2 dt + \int_2^4 16a^2 dt + \int_2^4 -8a^2 t dt = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a^2 + a^2 \left( \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} \right) + 32a^2 - 8a^2 \left( \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = \perp \Leftrightarrow 37a^2 + \frac{56}{3}a^2 - 48a^2 = \perp \Leftrightarrow$$

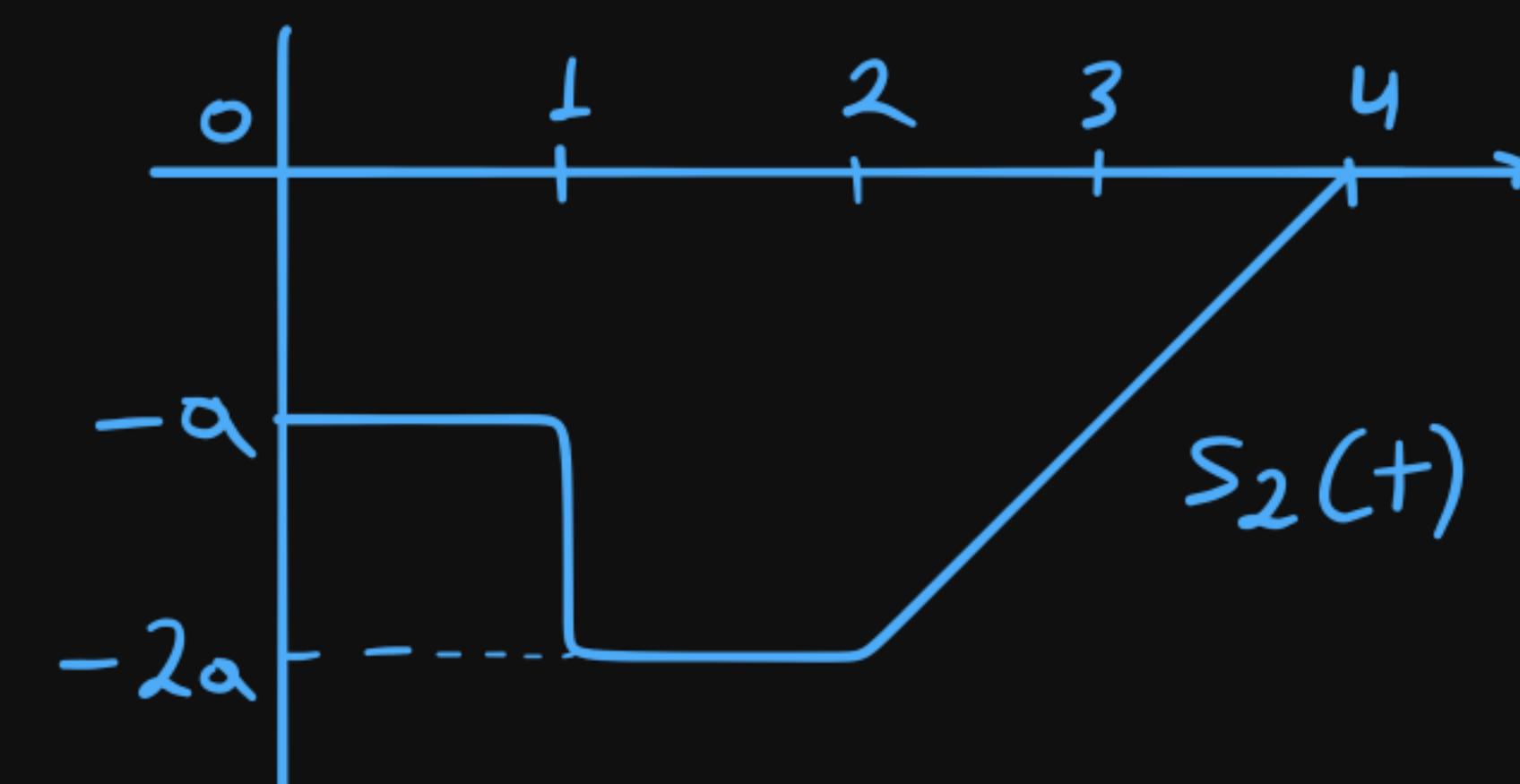
$$\Leftrightarrow \frac{23}{3}a^2 = \perp \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{23} \Leftrightarrow a = 0,36\perp$$



Σχήμα 1. Σήμα φ(t)

b). Το σήμα  $s_2$  θα έχει συντεταγμένη  $-\sqrt{E_b} = -\perp$ , οπότε  $s_2 = -\varphi(t)$

$$\begin{aligned} &\text{Με ML ανιχνευτή θα έχουμε } P_{b|s_1} = P(r < 0) = P(n + \perp < 0) \\ &= P(n < -\perp) = \perp - P(n \geq -\perp) = \perp - Q\left(\frac{-\perp}{\sigma}\right) = \perp - \left(1 - Q\left(\frac{\perp}{\sigma}\right)\right) \\ &= Q\left(\frac{\perp}{\sigma}\right) \Leftrightarrow P_{b|s_1} = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) \end{aligned}$$



$$\text{Άρα } P_b = \frac{1}{2} \left( P_{b|s_1} + P_{b|s_2} \right) \xrightarrow{\text{Ισονομία}} P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)$$

c). Επειδή  $s_1(t) = \frac{1}{2}\varphi(t)$ , τότε  $s_1 = \left\{ \frac{\perp}{2} \right\}$  και  $s_2 = \left\{ -\frac{\perp}{2} \right\}$ , οπότε με σην ιδια λογική

$$P_{b|s_1} = P(r < 0) = P\left(n + \frac{\perp}{2} < 0\right) = \dots = Q\left(\frac{\frac{\perp}{2}}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{\perp}{2}\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) = P_b'$$

• Άρα  $P_b < P_b'$  αφού η  $Q$  είναι φθίνουσα. Αναμενόμενο καθώς σην  $2^n$  ηφίλτωση  
τα σύμβολα έχουν μικρότερη ενέργεια (βρίσκονται πιο κοντά μεταξύ τους)

Θέμα 20 (35)

Έστω BPAM διαμόρφωση με ισοπίθανα σύμβολα για την οποία ισχύει ότι  $s_1(t) = \phi(t)$ , δηλαδή  $\phi(t)$  δίνεται στο

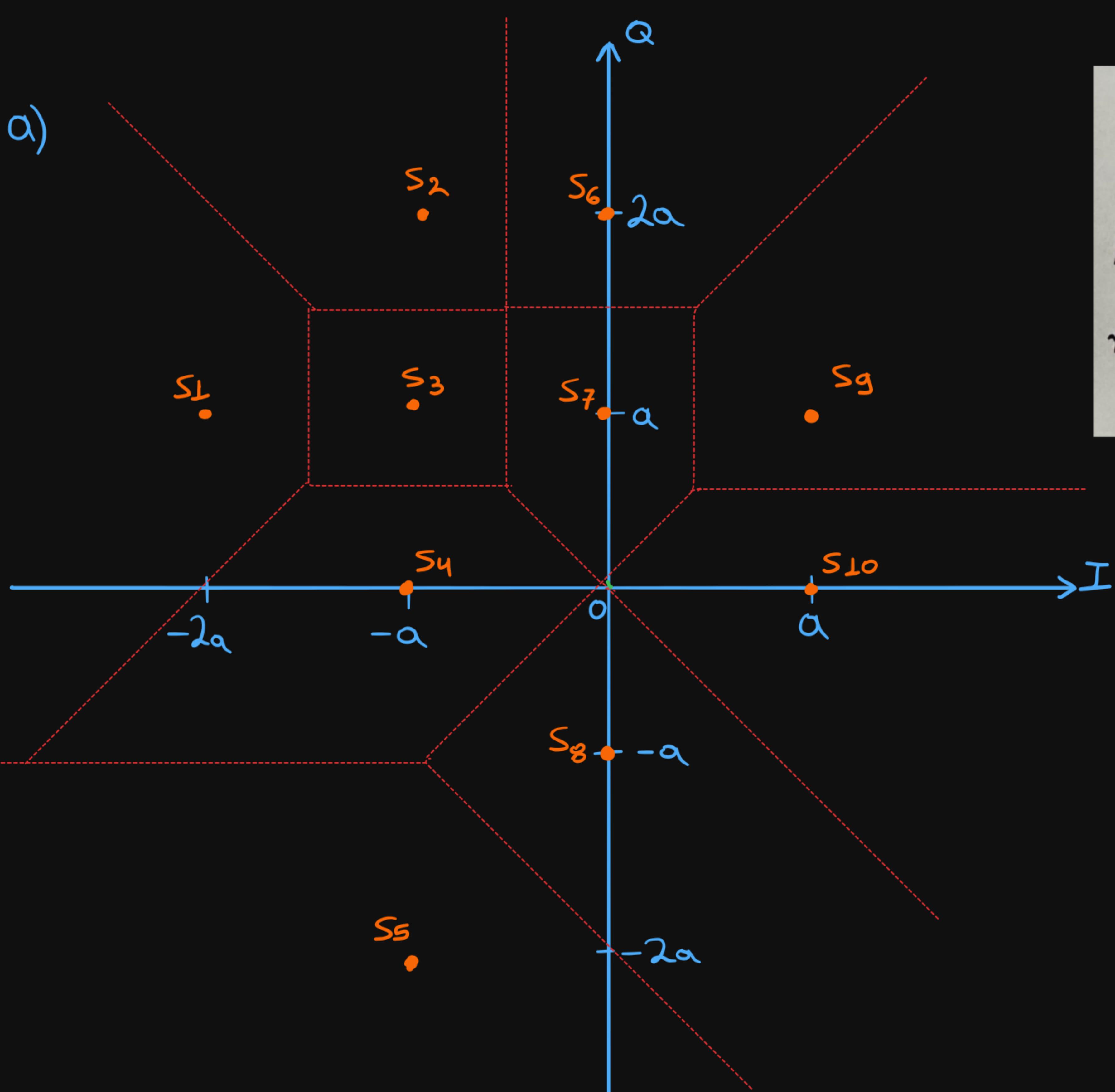
Σχήμα 1. Ο δέκτης λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ .

α-10) Γνωρίζοντας ότι το  $\phi(t)$  είναι βάση των σημάτων  $s_1(t)$  και  $s_2(t)$ , να υπολογιστεί η τιμή του  $a$ .

β-10) Να σχεδιαστεί το σήμα  $s_2(t)$  και να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος συναρτήσει του  $N_0$ , δηλαδή ο δέκτης χρησιμοποιεί ML ανιχνευτή.

γ-15) Αν  $s_1(t) = \frac{1}{2}\phi(t)$  με την τιμή του  $a$  που υπολογίστηκε, να συγχριθεί ποιοτικά η επίδοση ως προς την πιθανότητα σφάλματος με τον αστερισμό του προηγούμενου ερωτήματος.

a)



Θέμα 3ο (50)  
Ένα ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα χρησιμοποιεί τον αστερισμό του Σχήματος 2.

- α-10) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του αστερισμού συναρτήσει του  $\alpha$  και να σχεδιαστούν οι περιοχές απόφασης.  
 β-30) Εστω ότι αποστέλλεται η συκολουθία συμβόλων  $s_3, s_8$ . Να υπολογιστεί η πιθανότητα να ληφθεί σωστά τουλάχιστον ένα από τα δύο σύμβολα σε περιβάλλον AWGN μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης  $\sigma^2$ .  
 γ-10) Εστω πως τα εκπεμπόμενα σύμβολα είναι στραμμένα κατά 45° (ωρολογιακά) λόγω ενός σφάλματος στον πομπό. Εάν ο δέκτης γνωρίζει το σφάλμα, πώς θεωρείτε ότι πρέπει να ενεργήσει ώστε οι πιθανότητες σφάλματος των συμβόλων να μην επηρεαστούν;

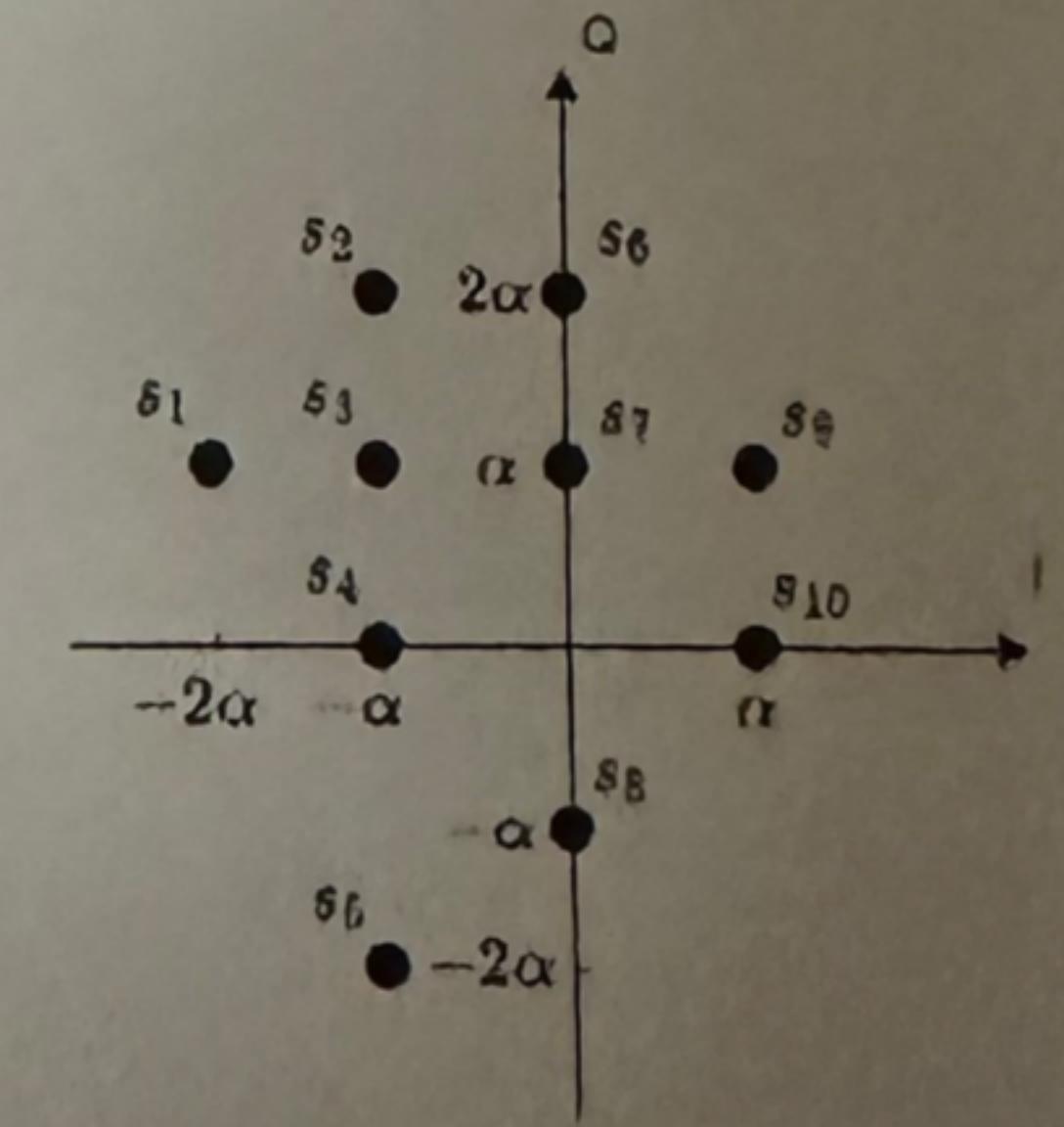
• Η μέση ενέργεια του αστερισμού είναι:

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \|s_i\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{10} \left( \sqrt{4a^2 + a^2} + \sqrt{a^2 + 4a^2} + \sqrt{2a^2 + a^2} \right. \text{κτλ.}$$

$$+ a^2 + 4a^2 + 4a^2 + a^2 + a^2 + 2a^2 + a^2 \Leftrightarrow$$

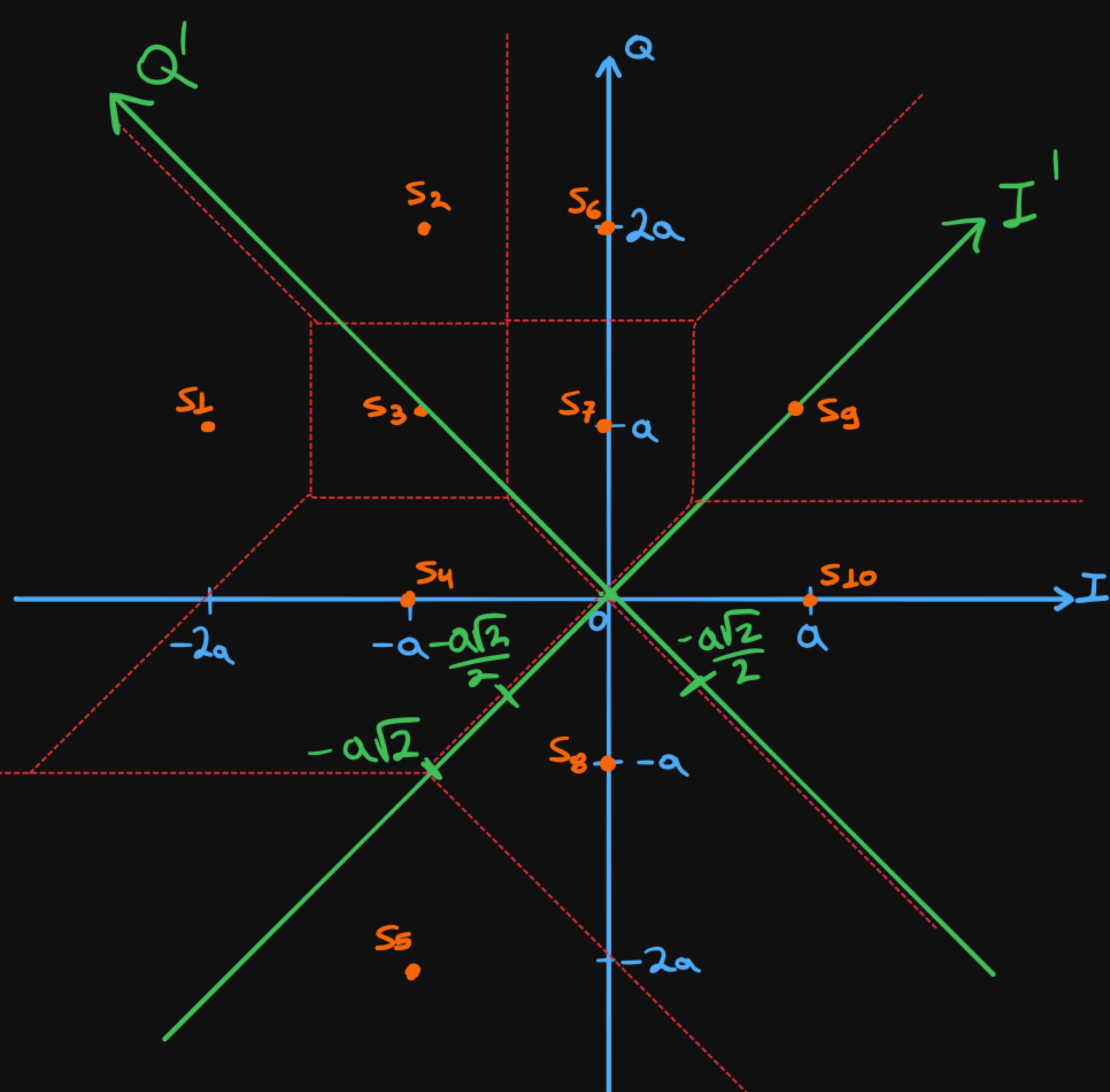
$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_S = 2.7a^2}$$



Σχήμα 2. Αστερισμός.

$$\beta) \cdot P_3 = P\left(-\frac{\alpha}{2} < r_I < -\frac{3\alpha}{2} \wedge \frac{\alpha}{2} < r_Q < \frac{3\alpha}{2}\right) = P\left(-\frac{\alpha}{2} < -\alpha + n < -\frac{3\alpha}{2}\right) \cdot P\left(\frac{\alpha}{2} < \alpha + n < \frac{3\alpha}{2}\right) = \\ = P\left(\frac{\alpha}{2} > n > -\frac{\alpha}{2}\right) \cdot P\left(-\frac{\alpha}{2} < n < \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(-\frac{\alpha}{2} < n < \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left[Q\left(\frac{-\frac{\alpha}{2}}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sigma}\right)\right]^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P_3 = \left[1 - Q\left(\frac{\alpha}{2\sigma}\right) - Q\left(\frac{\alpha}{2\sigma}\right)\right]^2 \Leftrightarrow P_3 = \boxed{1 - 2Q\left(\frac{\alpha}{2\sigma}\right)}$$

• Για να βρούμε το  $P_8$  θα λειτουργήσουμε τους άξονες κατά 45° αριθμολογιακά:



$$\text{Οπότε } P_8 = P(-\alpha\sqrt{2} < r_{I'} < 0 \wedge r_{Q'} < 0) =$$

$$= P\left(-\alpha\sqrt{2} < -\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + n < 0\right) \cdot P\left(-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + n < 0\right) =$$

$$= P\left(-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} < n < \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right) \cdot P\left(n < \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \left[Q\left(\frac{-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}{\sigma}\right)\right] \cdot \left[1 - Q\left(\frac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}{\sigma}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_8 = \boxed{1 - 2Q\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2\sigma}\right)} \left[1 - Q\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2\sigma}\right)\right]$$

Άρα πιθανότητα να ληφθεί ένα συγκατιούντος από τα  $s_3, s_8$  συνολικά:

$$P = P_3(1 - P_8) + P_8(1 - P_3) + P_3 \cdot P_8$$

γ) Αν τα σύμβολα περιστραφούν κατά 45° αριθμολογιακά, τότε ο δέκτης θα πρέπει να τα λειτουργήσει κατά 45° αριθμολογιακά. Δηλαδή αν λάβει τις συνιστώσες  $r_I$  και  $r_Q$ , θα πρέπει να τις μετασχηματίσει σε  $r_{I'}$  και  $r_{Q'}$  σύμφωνα με τον τύπο (αν το  $\Sigma$  ισχύει):

$$\begin{pmatrix} r_{I'} \\ r_{Q'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_I \\ r_Q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} r_{I'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(r_I - r_Q) \\ r_{Q'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(r_I + r_Q) \end{cases}$$

Ενδιαφέροντα, μπορεί να δημιουργήσει νέες περιοχές αποφάσεων.