Λύσεις Σεπτ. 2023

Θέμα 1ο (25) Ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας με διαμόρφωση BPSK λειτουργεί συνεχώς με data rate 5 Kbps χρησιμοποιώντας τα ισοπίθανα σήματα

$$s_1(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \quad \text{και} \quad s_2(t) = -A\cos(2\pi f_0 t).$$

Η rms τιμή του πλάτους των σημάτων είναι $V_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$ και η αντίσταση $R = 1\,\Omega$. Ο θόρυβος στον δέκτη είναι AWGN με $N_0 = 10^{-11}\,W/Hz$.

α-15) Να βρεθεί ο μέσος όρος των σφαλμάτων bit στη διάρκεια μιας μέρας. Δίνεται ότι $A = 1\,\text{mV}$.

β-10) Ποιος είναι ο αριθμός των σφαλμάτων, όταν το data rate είναι 5 Mbps; Σχολιάστε πολύ σύντομα την απάντησή σας.

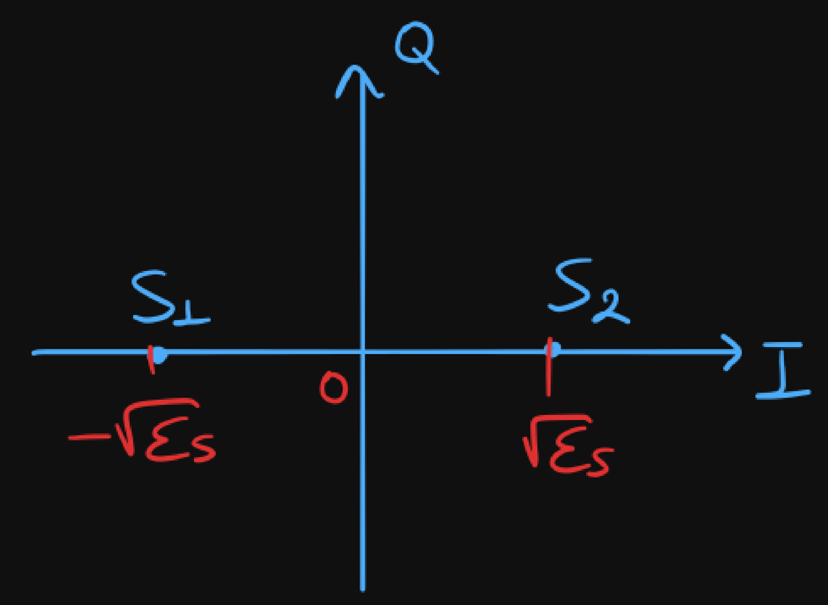
Υπόδειξη 1: Για την συνάρτηση $Q(x)$ να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $Q(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Υπόδειξη 2: Ο αριθμός των σφαλμάτων είναι ακέραιος.

α) • Ισχύει $\mathcal{E}_s = P_s \cdot T = \frac{V_{rms}^2}{\underset{\uparrow\ \text{αντίσταση}}{R}} \cdot \frac{1}{\underset{\uparrow\ \text{data rate}}{R'}} \iff$

$$\iff \mathcal{E}_s = \frac{A^2}{2R}\cdot\frac{1}{R'} = \frac{10^{-6}}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{5\cdot 10^3} \iff$$

$$\iff \mathcal{E}_s = 10^{-10}\,J = \mathcal{E}_b \quad (\text{Ενέργεια εκπομπής ενός bit})$$

• Έστω



ο αστερισμός BPSK. Οπότε έχουμε

Πιθανότητα σφάλματος αν στάλθηκε το s_1

$$P_{s|s_1} = P(r_I > 0) = P(n - \sqrt{\mathcal{E}_s} > 0)$$

$$\iff P_{s|s_1} = P(n > \sqrt{\mathcal{E}_s}) = P(n > 10^{-5}) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\frac{10^{-5}}{\sqrt{\frac{10^{-11}}{2}}}\right)$$

$$\iff P_{s|s_1} = Q(4,47) = \frac{1}{2}e^{-\frac{4,47^2}{2}} \iff P_{s|s_1} = 2,29\cdot 10^{-5}$$

Οπότε $P_s = \frac{1}{2}\left(P_{s|s_1} + P_{s|s_2}\right) \xLeftrightarrow[\text{ισοπίθανα}]{s_1,\, s_2} P_s = \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}P_{s|s_1} \iff P_s = 2,29\cdot 10^{-5}$

• Άρα αφού στη διάρκεια μιας μέρας στέλνουμε $\underbrace{5\cdot 10^3}_{R'}\cdot\underbrace{60\cdot 60\cdot 24}_{\text{secs σε 1 μέρα}}$ bits, τότε έχουμε μέσο σφάλμα

$$P = 5\cdot 10^3\cdot 60\cdot 60\cdot 24\cdot 2,29\cdot 10^{-5} \iff \boxed{P = 9892 \text{ bits}}$$

β) Με την ίδια λογική $\mathcal{E}_s' = \frac{10^{-6}}{2}\cdot\frac{1}{5\cdot 10^6} \iff \mathcal{E}_s' = 10^{-13}\,J$, $P_{s|s_1}' = P(n > \sqrt{10^{-13}}) = Q\left(\frac{10^{-6,5}}{\sqrt{\frac{10^{-11}}{2}}}\right) = Q(0,14)$

$$\iff P_{s|s_1}' = \frac{1}{2}e^{-\frac{0,14^2}{2}} = 0,495 = P_s'$$

και άρα $P' = 5\cdot 10^6\cdot 60\cdot 60\cdot 24\cdot 0,495 \iff \boxed{P' = 2,13\cdot 10^{11} \text{ bits}}$

Με την αύξηση του data rate μειώσαμε το $\mathcal{E}_s$, οπότε τα σύμβολα του αστερισμού βρίσκονται πιο κοντά το ένα στο άλλο και άρα έχουμε αύξηση των σφαλμάτων bit.

Θέμα 2ο (20) Ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας χρησιμοποιεί τα σήματα $s_1(t) = A$, $s_2(t) = -A$ με την ίδια πιθανότητα. Το κανάλι είναι προσθετικού θορύβου με ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (ΣΠΠ)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3A} & x \in \left(-\frac{3A}{2}, \frac{3A}{2}\right) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Δηλαδή το σήμα που λαμβάνεται στον δέκτη είναι $r = s + n$, όπου το σύμβολο s είναι $-A$ ή A και το n είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την παραπάνω κατανομή. Ο δέκτης χρησιμοποιεί προσαρμοσμένο φίλτρο στη βάση.

α-10) Να υπολογίσετε την πιθανότητα σφάλματος bit, όταν ο δέκτης λειτουργεί με κριτήριο απόφασης την ελάχιστη ευκλείδεια απόσταση.

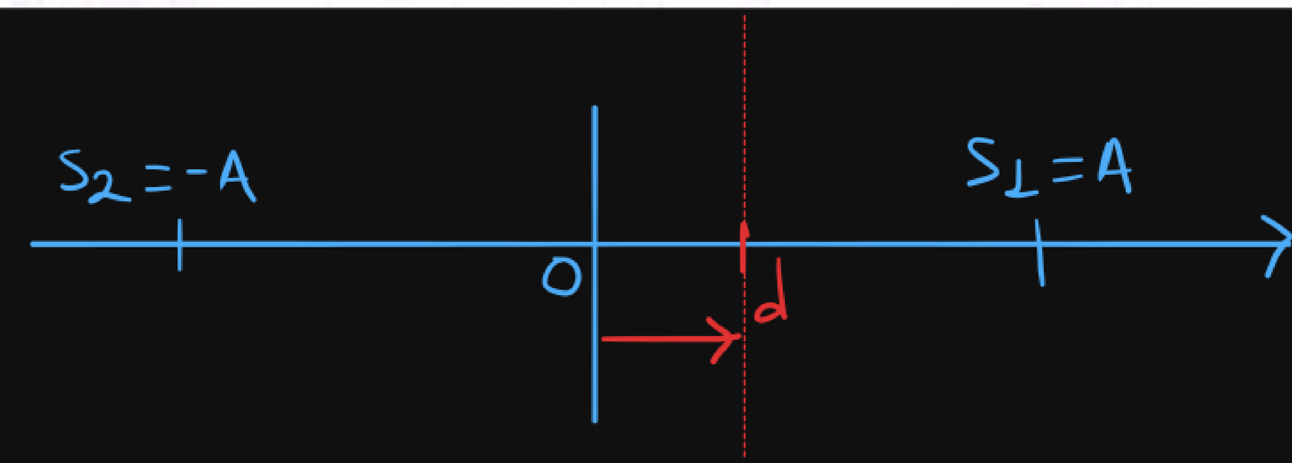
β-10) Να βρείτε το κριτήριο για την βέλτιστη απόφαση στον δέκτη, χρησιμοποιώντας γραφική ή αναλυτική μέθοδο, και να υπολογίσετε εκ νέου την πιθανότητα σφάλματος bit. Τι παρατηρείτε;

α) $P_b = P_s \overset{s_1, s_2}{\underset{\text{ισοπ.}}{=}} P_{s|s_1} = P(r<0) = P(n+A<0)$

$= P(n<-A) = \int_{-\frac{3A}{2}}^{-A} \frac{1}{3A}\,dx = \frac{1}{3A}\left(-A+\frac{3A}{2}\right)$

$= \frac{1}{3A}\cdot\frac{A}{2} \Leftrightarrow \boxed{P_b = \frac{1}{6}}$

β) • Ας θεωρήσουμε πως μετακινούμε το όριο κατά d προς τα δεξιά, δηλ.



Τότε $P_{s|s_1} = P(r<d) = P(n+A<d) = P(n<d-A) =$

$= \int_{-\frac{3A}{2}}^{d-A} \frac{1}{3A}\,dx = \frac{1}{3A}\left(d-A+\frac{3A}{2}\right) = \frac{d-A+\frac{3A}{2}}{3A}$

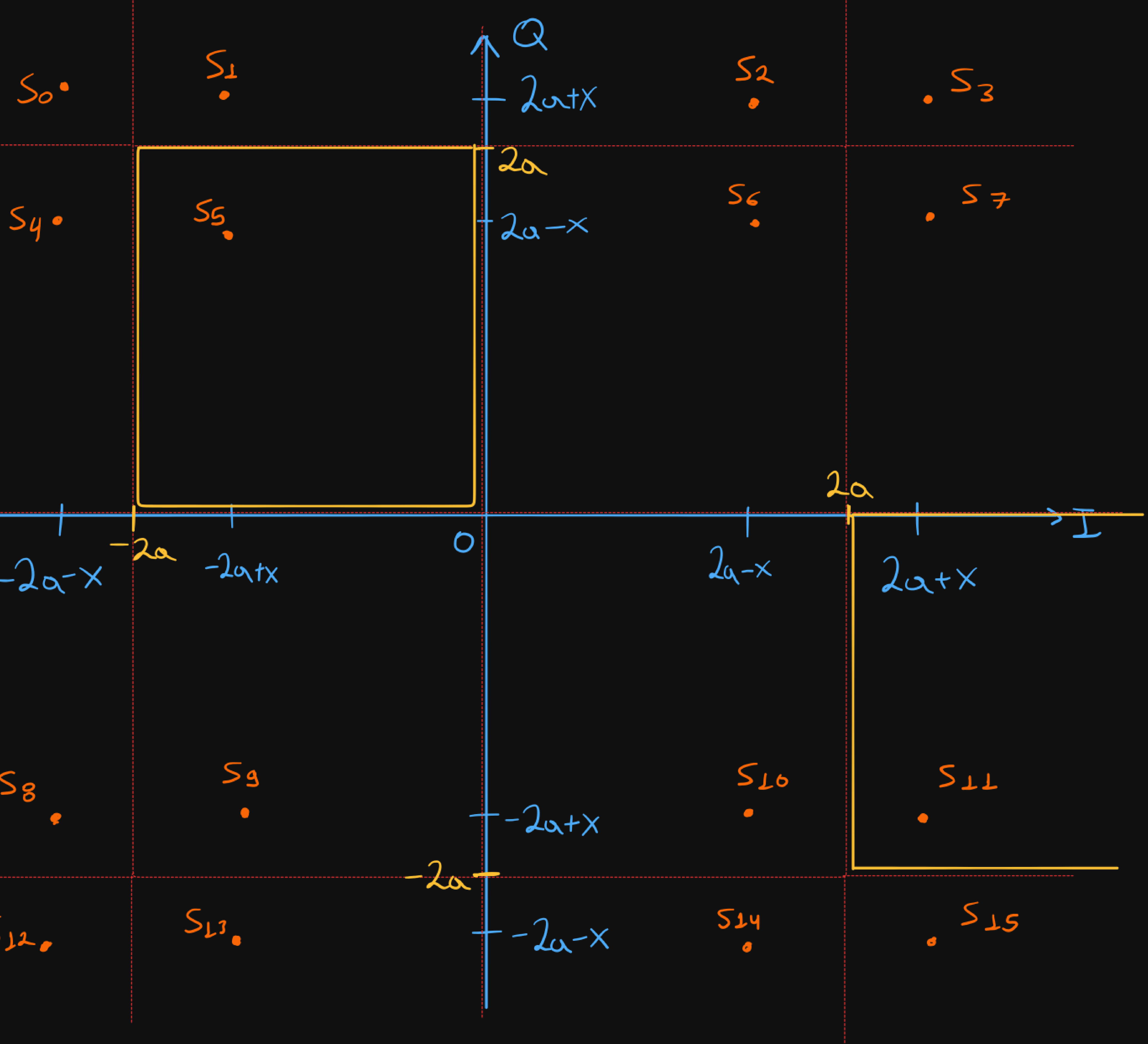
και $P_{s|s_2} = P(r>d) = P(n-A>d) = P(n>d+A) =$

$= \int_{d+A}^{3A/2} \frac{1}{3A}\,dx = \frac{1}{3A}\left(\frac{3A}{2}-d-A\right) = \frac{\frac{3A}{2}-d-A}{3A}$

• Πρέπει $P_{s|s_1} = P_{s|s_2} \Leftrightarrow \frac{d-A+\frac{3A}{2}}{3A} = \frac{\frac{3A}{2}-d-A}{3A} \Leftrightarrow d-A+\frac{3A}{2} = \frac{3A}{2}-d-A \Leftrightarrow 2d=0 \Leftrightarrow \boxed{d=0}$

Παρατηρούμε ότι το βέλτιστο σημείο απόφασης παραμένει το $d=0$ (με $P_b=\frac{1}{6}$).
Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο καθώς οι τιμές του θορύβου ($-\frac{3A}{2}$ έως $\frac{3A}{2}$) είναι συμμετρικές ως προς το 0.

a)



Θέμα 3ο (25) Ψηφιακή διαμόρφωση δύο διαστάσεων τάξης $M = 16$ χρησιμοποιεί με την ίδια πιθανότητα τα παρακάτω σύμβολα. Στην στήλη 2 φαίνονται τα bits $b_1b_2b_3b_4$ που αντιστοιχούν σε κάθε σύμβολο.

Σύμβολο	bits	s_I	s_Q
s_0	0010	$-2a-x$	$2a+x$
s_1	0110	$-2a+x$	$2a+x$
s_2	1110	$2a-x$	$2a+x$
s_3	1010	$2a+x$	$2a+x$
s_4	0011	$-2a-x$	$2a-x$
s_5	0111	$-2a+x$	$2a-x$
s_6	1111	$2a-x$	$2a-x$
s_7	1011	$2a+x$	$2a-x$
s_8	0001	$-2a-x$	$-2a+x$
s_9	0101	$-2a+x$	$-2a+x$
s_{10}	1101	$2a-x$	$-2a+x$
s_{11}	1001	$2a+x$	$-2a+x$
s_{12}	0000	$-2a-x$	$-2a-x$
s_{13}	0100	$-2a+x$	$-2a-x$
s_{14}	1100	$2a-x$	$-2a-x$
s_{15}	1000	$2a+x$	$-2a-x$

Ισχύει $a > 0$ και $0 < x < a$. Ο δέκτης λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με ΦΠΙ $\frac{N_0}{2}$ και χρησιμοποιεί MLD προκειμένου να αποφασίσει ποιο σύμβολο έχει σταλεί.

α-15) Να σχεδιαστεί συνολικά ο αστερισμός καθώς και οι περιοχές απόφασης για τα σύμβολα s_5 και s_{11} και να υπολογιστεί το $d^2_{\min}$ όταν $x = \frac{a}{2}$.

β-10) Αν r_I και r_Q είναι οι συνιστώσες του λαμβανόμενου σήματος, δηλαδή $r_I = s_I + n_I$ και $r_Q = s_Q + n_Q$ να βρείτε τις τιμές των r_I και r_Q για τις οποίες ο δέκτης θα αποφασίσει τα σύμβολα για τα οποία ισχύει $b_3 = 0$ και $b_4 = 1$.

• Οι περιοχές απόφασης των S_5 και S_{11} φαίνονται με κίτρινο

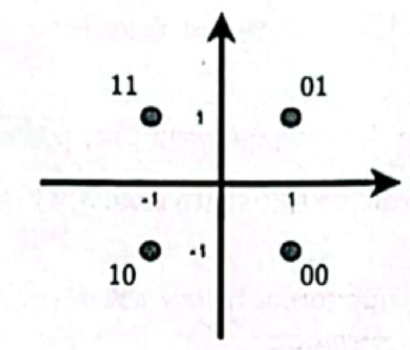
Πιο αναλυτικά για το S_5 έχουμε $0 \le r_I \le \frac{-2a-x-2a+x}{2} \Leftrightarrow 0 \le r_I \le -2a$ και $0 \le r_Q \le 2a$

και για το S_{11} έχουμε $r_I \ge 2a$ και $-2a \le r_Q \le 0$

• $d_{min} = (2a+x)-(2a-x) = 2x = 2\cdot\frac{a}{2} \Leftrightarrow d_{min} = a$, οπότε $\boxed{d_{min}^2 = a^2}$

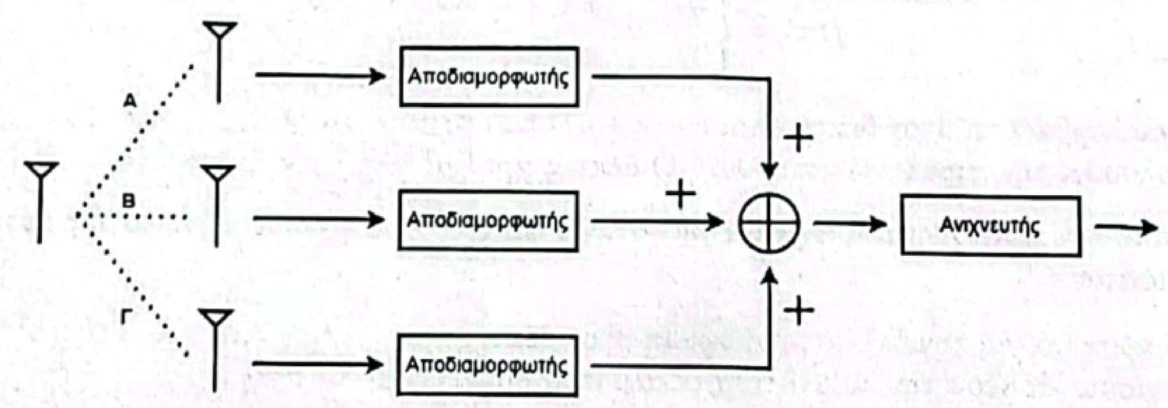
β) $b_3 = 0$ και $b_4 = 1$ έχουν τα σύμβολα S_8, S_9, S_{10}, S_{11} , οπότε πρέπει $\boxed{r_I \in \mathbb{R} \text{ και } -2a \le r_Q \le 0}$

Θέμα 4ο (30) Ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα χρησιμοποιεί διαμόρφωση 4-QAM με τον αστερισμό του Σχήματος 1. Το σύστημα αποτελείται από δέκτη με τρεις κεραίες λήψης και τρεις αποδιαμορφωτές, όπως φαίνεται



Σχήμα 1: Αστερισμός 4-QAM

στο Σχήμα 2. Το κανάλι μεταξύ της κεραίας εκπομπής και των κεραιών λήψης επιδρά πολλαπλασιαστικά στο



Σχήμα 2: Δέκτης με 3 κεραίες λήψης

σήμα, δηλαδή ισχύει $r = hs + n$, όπου το h παίρνει τις διακριτές τιμές ανά κλάδο h_1, h_2 και h_3, με τις παρακάτω πιθανότητες:

$$\Pr\{h_1 = 0.4\} = 0.5 \quad \text{και} \quad \Pr\{h_1 = 0.6\} = 0.5$$
$$\Pr\{h_2 = 0.3\} = 0.6 \quad \text{και} \quad \Pr\{h_2 = 0.1\} = 0.4$$
$$\Pr\{h_3 = 0.2\} = 0.2 \quad \text{και} \quad \Pr\{h_3 = 0.4\} = 0.8$$

Υποθέτουμε ότι η πρώτη συντεταγμένη αντιστοιχεί στο πρώτο bit και η δεύτερη στο δεύτερο bit κάθε συμβόλου. Το χρησιμοποιούμενο mapping φαίνεται επίσης στο Σχήμα 1. Ο δέκτης λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ^2 και για την ανίχνευση χρησιμοποιεί MLD. Επίσης, οι τιμές που λαμβάνουν τα κανάλια στους τρεις κλάδους είναι γνωστές στον δέκτη.

α-20) Να υπολογιστεί η μέση πιθανότητα σφάλματος του πρώτου bit.

β-10) Να υπολογιστεί η μέση πιθανότητα σφάλματος του πρώτου bit στο ίδιο σύστημα, όταν $h_1 = h_2 = h_3 = 1$. Να συγκρίνετε και να σχολιάσετε σύντομα τα δύο αποτελέσματα.

α) Στην έξοδο του κάθε αποδιαμορφωτή θα έχουμε:
(μόνο για την x συντεταγμένη = 1ο bit)

- A: $r_1 = h_1 \cdot x + n_1$
- B: $r_2 = h_2 \cdot x + n_2$
- Γ: $r_3 = h_3 \cdot x + n_3$

Οπότε στην είσοδο του ανιχνευτή θα έχουμε

$$r = r_1 + r_2 + r_3 \Leftrightarrow r = (h_1+h_2+h_3)x + \underbrace{(n_1+n_2+n_3)}_{n' \sim N(0, 3\sigma^2)}$$

Το x παίρνει μόνο τις τιμές −1 και 1, οπότε για τις πιθανότητες σφάλματος έχουμε:

- $P_{e|-1} = P(r>0) = P\left((h_1+h_2+h_3)\cdot(-1) + n' > 0\right) = P(n' > h_1+h_2+h_3) = Q\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right)$

- $P_{e|1} = P(r<0) = P\left((h_1+h_2+h_3)\cdot 1 + n' < 0\right) = P\left(n' < -(h_1+h_2+h_3)\right) = 1 - P\left(n' > -(h_1+h_2+h_3)\right) = 1 - Q\left(\frac{-(h_1+h_2+h_3)}{\sqrt{3\sigma^2}}\right) = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right)\right) = Q\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\right)$

- Το άθροισμα $h_1+h_2+h_3$ παίρνει πολλές διαφορετικές τιμές με διαφορετική πιθανότητα. Έχουμε:

  - $P(h_1+h_2+h_3 = 0{,}9) = \overset{h_1=0,4\ h_2=0,3\ h_3=0,2}{0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}2} + \overset{h_1=0,6\ h_2=0,1\ h_3=0,2}{0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2} + \overset{h_1=0,4\ h_2=0,1\ h_3=0,4}{0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}8} = 0{,}26$
  - $P(h_1+h_2+h_3 = 1{,}1) = \overset{h_1=0,4\ h_2=0,3\ h_3=0,4}{0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8} + \overset{h_1=0,6\ h_2=0,3\ h_3=0,2}{0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}2} + \overset{h_1=0,6\ h_2=0,1\ h_3=0,4}{0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}8} = 0{,}46$
  - $P(h_1+h_2+h_3 = 0{,}7) = \overset{h_1=0,4\ h_2=0,1\ h_3=0,2}{0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2} = 0{,}04$
  - $P(h_1+h_2+h_3 = 1{,}3) = \overset{h_1=0,6\ h_2=0,3\ h_3=0,4}{0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8} = 0{,}24$

Για επαλήθευση $P_{ολ} = 1$

Ισχύει $P_e = \frac{1}{2}\left(P_{e|-1} + P_{e|1}\right) = Q\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{\sigma\sqrt{3}}\right)$, οπότε:

$$\boxed{P_e = Q\left(\frac{0{,}9}{\sigma\sqrt{3}}\right)\cdot 0{,}26 + Q\left(\frac{1{,}1}{\sigma\sqrt{3}}\right)\cdot 0{,}46 + Q\left(\frac{0{,}7}{\sigma\sqrt{3}}\right)\cdot 0{,}04 + Q\left(\frac{1{,}3}{\sigma\sqrt{3}}\right)\cdot 0{,}24}$$

β) Αν $h_1+h_2+h_3 = 3$, τότε $\boxed{P_e' = Q\left(\frac{3}{\sigma\sqrt{3}}\right) < P_e}$ αφού η Q είναι φθίνουσα

Άρα αφού $P_e' < P_e$, τότε είναι προτιμότερο να έχουμε $h_{1,2,3} = 1$ λόγω της μικρότερης μέσης πιθανότητας σφάλματος στα bit. Στην ουσία "διώχνουμε" τον τυχαίο πολ/κο παράγοντα του καναλιού.

Λύσεις Φεβ. 2023

α) Λ, σε τρισδιάστατο χώρο θα έχουμε 3 συναρτήσεις βάσης (όχι 4)

β) Λ, οι αστερισμοί BPAM και BPSK έχουν ίδια πιθανότητα σφάλματος συμβόλου για ίδιο $\mathcal{E}_b$

Θέμα 1ο (15)
Να επιλέξετε "Σωστό" ή "Λάθος" στις παρακάτω ερωτήσεις και να αιτιολογήσετε σύντομα τις απαντήσεις σας.

α-5) Το πλήθος των συναρτήσεων βάσης ενός τρισδιάστατου χώρου που ορίζεται από 4 σήματα είναι ίσο με τον αριθμό των σημάτων.

-10) Έστω τηλεπικοινωνιακό σύστημα που χρησιμοποιεί αποκλειστικά αστερισμούς BPAM ή BPSK ίδιας ενέργειας. Εάν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα σφάλματος ανίχνευσης συμβόλου, θα πρέπει να επιλεχθεί ο αστερισμός BPSK.

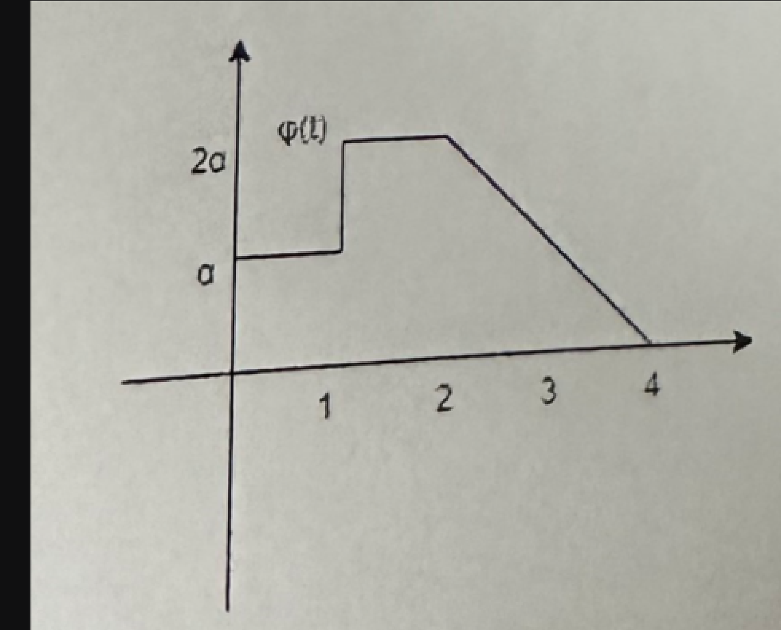
Θέμα 2ο (35)

Έστω BPAM διαμόρφωση με ισοπίθανα σύμβολα για την οποία ισχύει ότι $s_1(t)=\phi(t)$, όπου το $\phi(t)$ δίνεται στο Σχήμα 1. Ο δέκτης λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με $\sigma^2=\frac{N_0}{2}$.

α-10) Γνωρίζοντας ότι το $\phi(t)$ είναι βάση των σημάτων $s_1(t)$ και $s_2(t)$, να υπολογιστεί η τιμή του a.

β-10) Να σχεδιαστεί το σήμα $s_2(t)$ και να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος συναρτήσει του N_0, όταν ο δέκτης χρησιμοποιεί ML ανιχνευτή.

γ-15) Αν $s_1(t)=\frac{1}{2}\phi(t)$ με την τιμή του a που υπολογίστηκε, να συγκριθεί ποιοτικά η επίδοση ως προς την πιθανότητα σφάλματος με τον αστερισμό του προηγούμενου ερωτήματος.



Σχήμα 1. Σήμα φ(t)

α) • Αφού $s_1(t)=\varphi(t)$, τότε στον αστερισμό το s_1 έχει συντεταγμένη $s_1=\{1\}$, οπότε $\sqrt{E_b}=1 \Leftrightarrow E_b=1=E_\varphi$

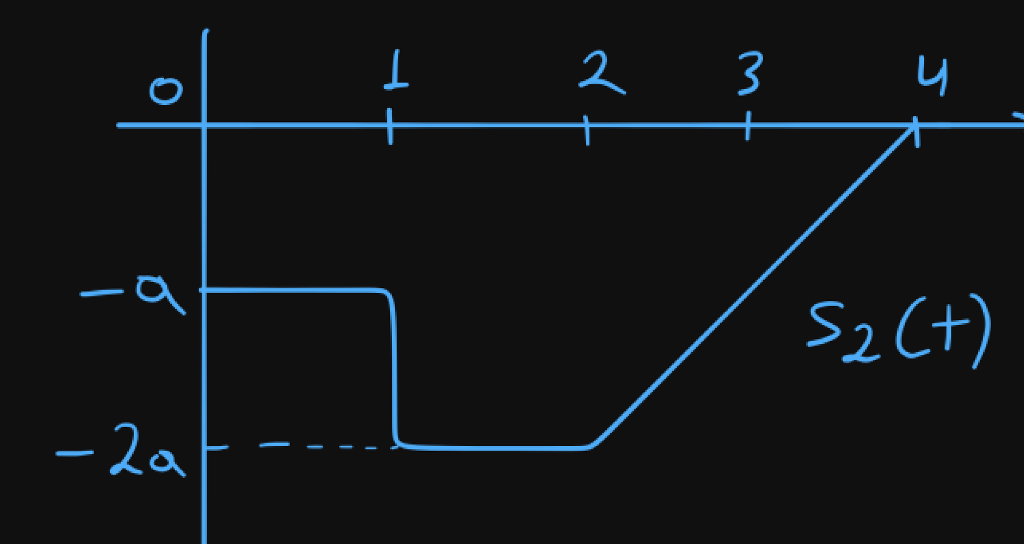
• Άρα $\int_0^4 |\varphi(t)|^2 dt = 1 \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 a^2dt+\int_1^2 4a^2dt+\int_2^4(-at+4a)^2dt=1 \Leftrightarrow \int_0^1 a^2dt+\int_1^2 4a^2dt+\int_2^4 a^2t^2dt+\int_2^4 16a^2dt+\int_2^4 -4a^2t\,dt=1$$

$$\Leftrightarrow a^2+4a^2+a^2\left(\frac{4^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right)+32a^2-4a^2\left(\frac{4^2}{2}-\frac{2^2}{2}\right)=1 \Leftrightarrow 37a^2+\frac{56}{3}a^2-24a^2=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{95}{3}a^2=1 \Leftrightarrow a^2=\frac{3}{95} \Leftrightarrow \boxed{a=0,177}$$

β) • Το σήμα s_2 θα έχει συντεταγμένη $-\sqrt{E_b}=-1$, οπότε $s_2=-\varphi(t)$



• Με ML ανιχνευτή θα έχουμε $P_{b|s_1}=P(r<0)=P(n+1<0)$

$$=P(n<-1)=1-P(n\geq -1)=1-Q\left(\frac{-1}{\sigma}\right)=1-\left(1-Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)$$

$$=Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)\Leftrightarrow P_{b|s_1}=Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)$$

Άρα $P_b=\frac{1}{2}\left(P_{b|s_1}+P_{b|s_2}\right)\xlongequal[\text{ισοπίθανα}]{s_1,\,s_2}\boxed{P_b=Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)}$

γ) • Επειδή $s_1(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)$, τότε $s_1=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ και $s_2=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, οπότε με την ίδια λογική

$$P'_{b|s_1}=P(r<0)=P\left(n+\frac{1}{2}<0\right)=\dots=Q\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sigma}\right)=Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)=P'_b$$

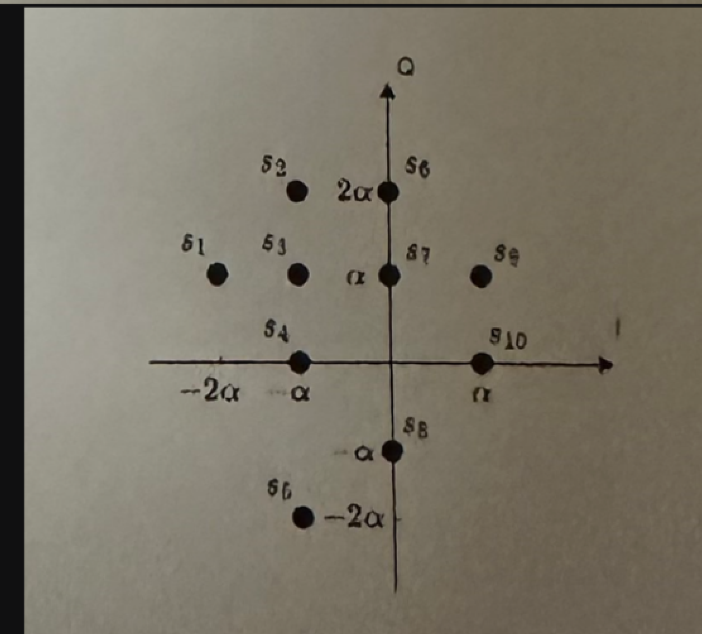
• Άρα $\boxed{P_b<P_b'}$ αφού η Q είναι φθίνουσα. Αναμενόμενο καθώς στην 2η περίπτωση τα σύμβολα έχουν μικρότερη ενέργεια (βρίσκονται πιο κοντά μεταξύ τους)

Θέμα 3ο (50)
Ένα ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα χρησιμοποιεί τον αστερισμό του Σχήματος 2.

α-10) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του αστερισμού συναρτήσει του α και να σχεδιαστούν οι περιοχές απόφασης.

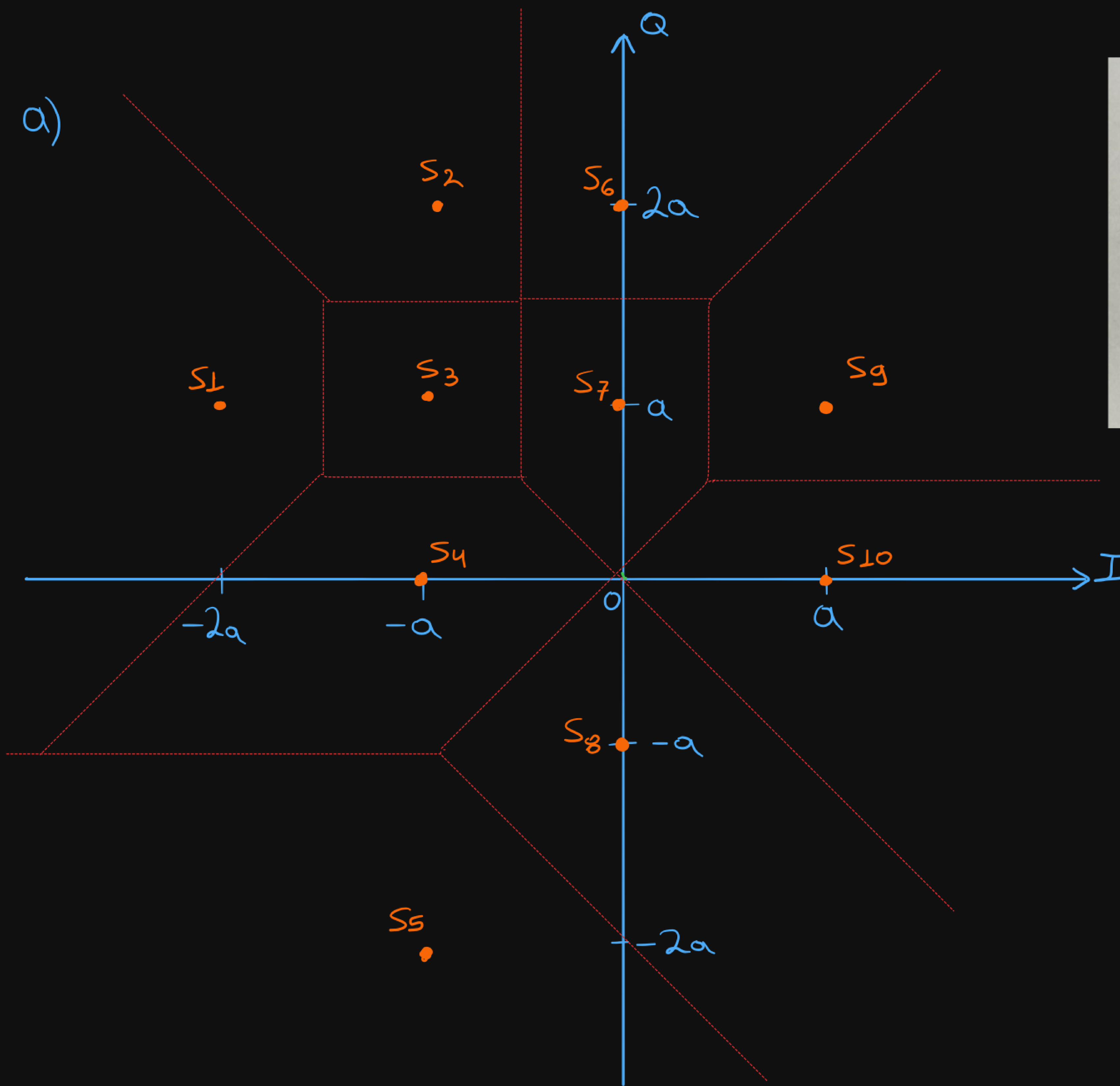
β-30) Έστω ότι αποστέλλεται η ακολουθία συμβόλων $s_3 s_8$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να ληφθεί σωστά τουλάχιστον ένα από τα δύο σύμβολα σε περιβάλλον AWGN μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης σ^2.

γ-10) Έστω πως τα εκπεμπόμενα σύμβολα είναι στραμμένα κατά 45° (ωρολογιακά) λόγω ενός σφάλματος στον πομπό. Εάν ο δέκτης γνωρίζει το σφάλμα, πώς θεωρείτε ότι πρέπει να ενεργήσει ώστε οι πιθανότητες σφάλματος των συμβόλων να μην επηρεαστούν;



Σχήμα 2. Αστερισμός.

α)



•Η μέση ενέργεια του αστερισμού είναι:

$$E_s=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\|s_i\|^2 \Leftrightarrow$$

$$E_s=\frac{1}{10}\Big(\overbrace{4a^2+a^2}^{s_1}+\overbrace{a^2+4a^2}^{s_2}+2a^2+a^2 \quad \text{κτλ.}$$

$$+a^2+4a^2+4a^2+a^2+a^2+2a^2+a^2\Big)$$

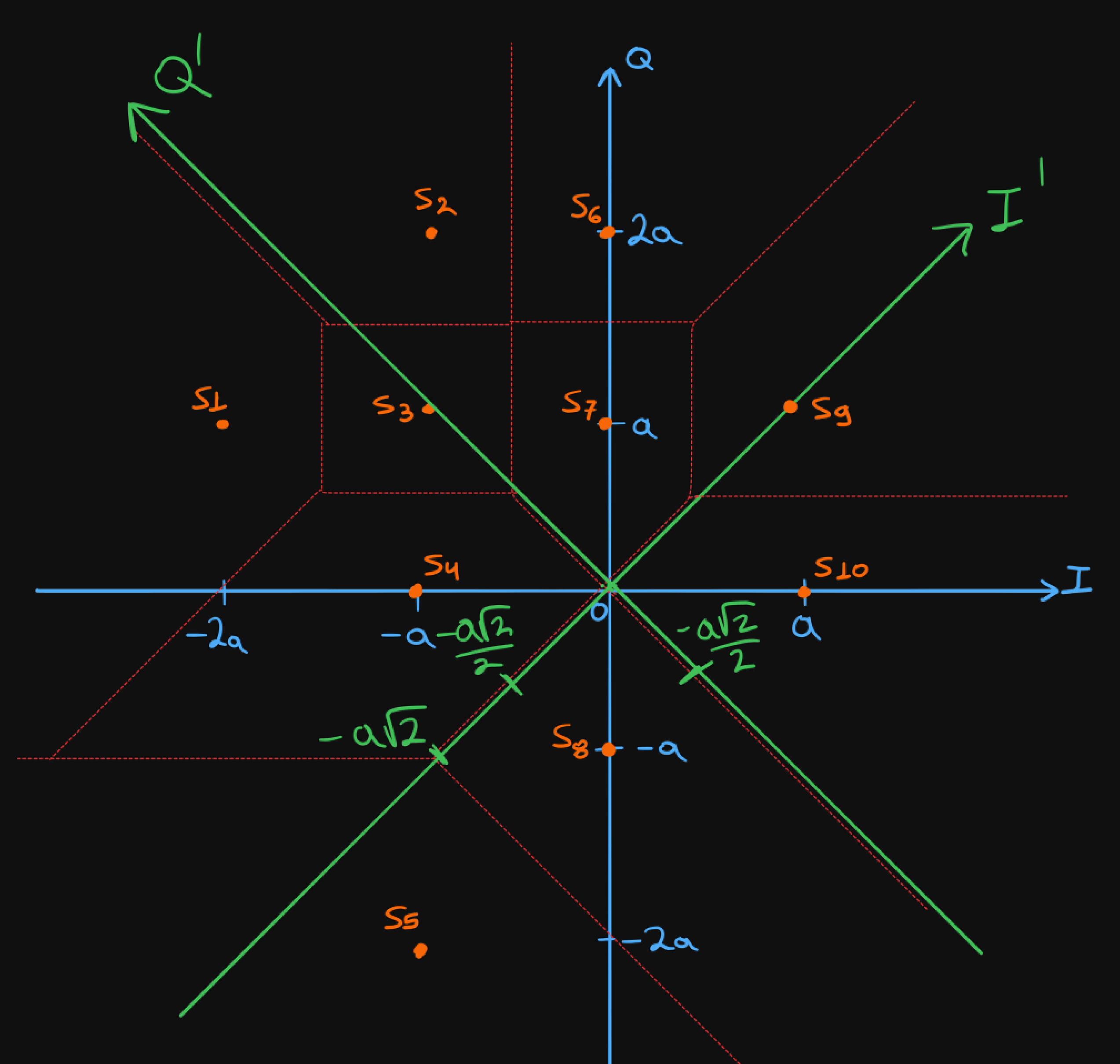
$$\Leftrightarrow \boxed{E_s=2{,}7a^2}$$

β) $\cdot\ P_3=P\left(-\frac{a}{2}>r_I>-\frac{3a}{2}\cap\frac{a}{2}<r_Q<\frac{3a}{2}\right)=P\left(-\frac{a}{2}>-a+n>-\frac{3a}{2}\right)\cdot P\left(\frac{a}{2}<a+n<\frac{3a}{2}\right)=$

$$=P\left(\frac{a}{2}>n>-\frac{a}{2}\right)\cdot P\left(-\frac{a}{2}<n<\frac{a}{2}\right)=P\left(-\frac{a}{2}<n<\frac{a}{2}\right)^2=\left[Q\left(\frac{-\frac{a}{2}}{\sigma}\right)-Q\left(\frac{\frac{a}{2}}{\sigma}\right)\right]^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_3=\left[1-Q\left(\frac{a}{2\sigma}\right)-Q\left(\frac{a}{2\sigma}\right)\right]^2\Leftrightarrow P_3=\left[1-2Q\left(\frac{a}{2\sigma}\right)\right]^2$$

•Για να βρούμε το P_8 θα περιστρέψουμε τους άξονες κατά 45° αντιωρολογιακά:



Οπότε $P_8=P\left(-a\sqrt{2}<r_I'<0\cap r_Q'<0\right)=$

$$=P\left(-a\sqrt{2}<-\frac{a\sqrt{2}}{2}+n<0\right)\cdot P\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}+n<0\right)=$$

$$=P\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}<n<\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\cdot P\left(n<\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\left[Q\left(\frac{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sigma}\right)-Q\left(\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sigma}\right)\right]\cdot\left[1-Q\left(\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sigma}\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_8=\left[1-2Q\left(\frac{a\sqrt{2}}{2\sigma}\right)\right]\left[1-Q\left(\frac{a\sqrt{2}}{2\sigma}\right)\right]$$

Άρα πιθανότητα να ληφθεί ένα τουλάχιστον από τα s_3, s_8 σωστά:

$$\boxed{P=P_3(1-P_8)+P_8(1-P_3)+P_3\cdot P_8}$$

γ) Αν τα σύμβολα περιστραφούν κατά 45° ωρολογιακά, τότε ο δέκτης θα πρέπει να τα περιστρέψει κατά 45° αντιωρολογιακά. Δηλαδή αν λάβει τις συνιστώσες r_I και r_Q, θα πρέπει να τις μετατρέψει σε r_I' και r_Q' σύμφωνα με τον τύπο (αν το ζητούσε):

$$\begin{pmatrix} r_I' \\ r_Q' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(45°) & -\sin(45°) \\ \sin(45°) & \cos(45°)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_I \\ r_Q \end{pmatrix}\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} r_I'=\frac{\sqrt{2}}{2}(r_I-r_Q) \\ r_Q'=\frac{\sqrt{2}}{2}(r_I+r_Q)\end{cases}$$