

# ΣΑΠΗΛΟguide

Σήματα και  
Συστήματα

-Nontas

Σημείωση: Οι απαντήσεις μπορεί να μην είναι 100% σωστές

Μερικά tips (για να μην ψάχνετε στο Google και στο βιβλίο)

- Προσοχή σταν ψάχνετε συνοδόγια M/S Fourier στο google, υπάρχουν διάφοροι ορισμοί.

	Function	Fourier transform unitary, ordinary frequency	Fourier transform unitary, angular frequency	Fourier transform non-unitary, angular frequency
$f(x)$	$\hat{f}(\xi) \triangleq \hat{f}_1(\xi)$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx$	$\hat{f}(\omega) \triangleq \hat{f}_2(\omega)$ $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$	$\hat{f}(\omega) \triangleq \hat{f}_3(\omega)$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$	

( $\xi = f$ )



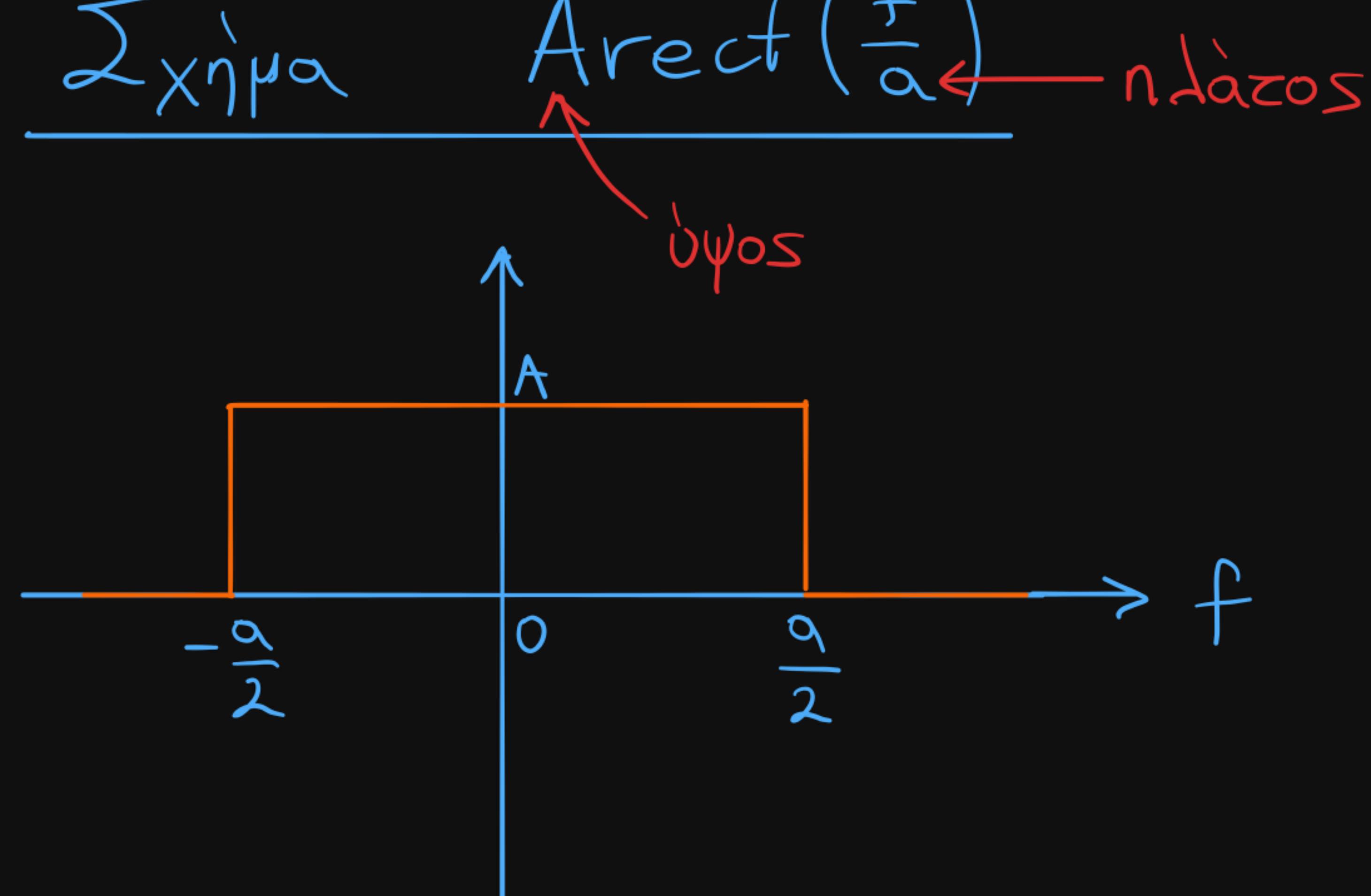
(αντζήν wikipedia)

- Εχουμε 2 ορισμούς για το sinc:  $\xrightarrow{\text{FT}} \text{sinc}(x) = \frac{\sin(nx)}{nx}$

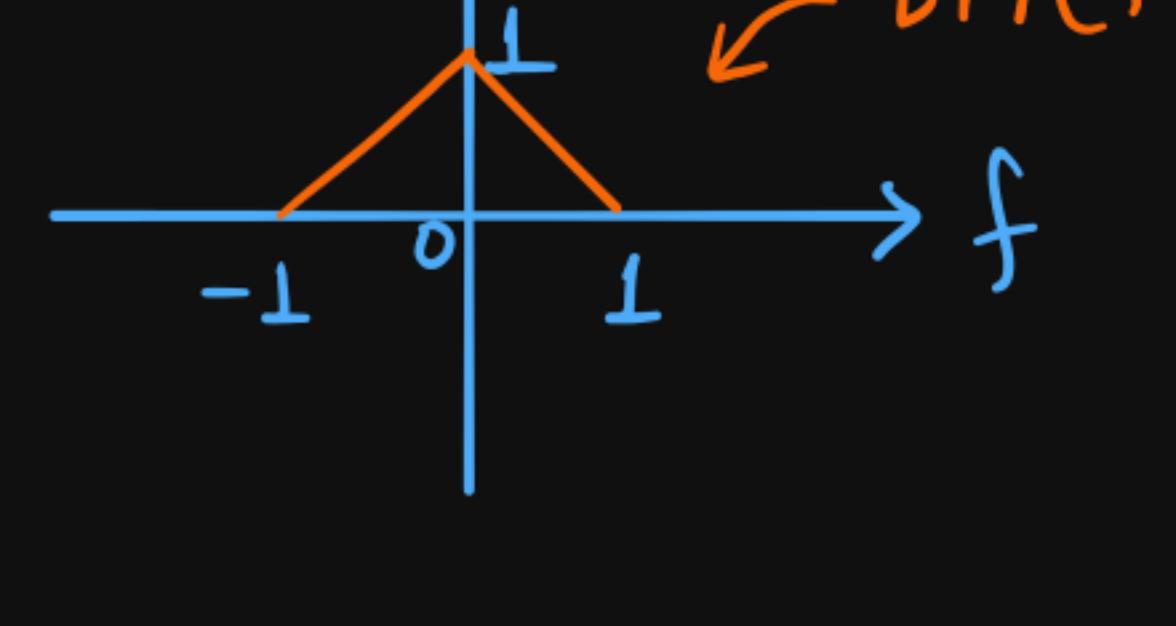
οι παρακάτω M/S Fourier ισχύουν για  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(nx)}{nx}$

- $\text{sinc}(t) \xrightarrow{\text{FT}} \text{rect}(f)$
- δηλαδή  $\text{sinc}(at) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{|a|} \text{rect}\left(\frac{f}{a}\right)$
- $\text{rect}(t) \xrightarrow{\text{FT}} \text{sinc}(f)$
- δηλαδή  $\text{rect}(at) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{|a|} \text{sinc}\left(\frac{f}{a}\right)$

SOS



- $\text{sinc}^2(t) \xrightarrow{\text{FT}} \text{tri}(f)$



- $\text{tri}(t) \xrightarrow{\text{FT}} \text{sinc}^2(f)$

$$\cdot e^{-ax^2} \xrightarrow{\text{FT}} \sqrt{\frac{n}{a}} \cdot e^{-\frac{(nf)^2}{a}}$$

Gaussian  
συνάρτηση

- Για μετατροπή από ω σε f (και το αντίστροφο) αντά αντικαθιστούμε  $\omega = 2\pi f$

$$\cdot \text{Ενέργεια: } E = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_1(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_1(\omega)|^2 d\omega \quad (= \text{Joule})$$

$$\cdot \text{Ισχύς: } P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |X(t)|^2 dt \quad (= \text{Watt})$$

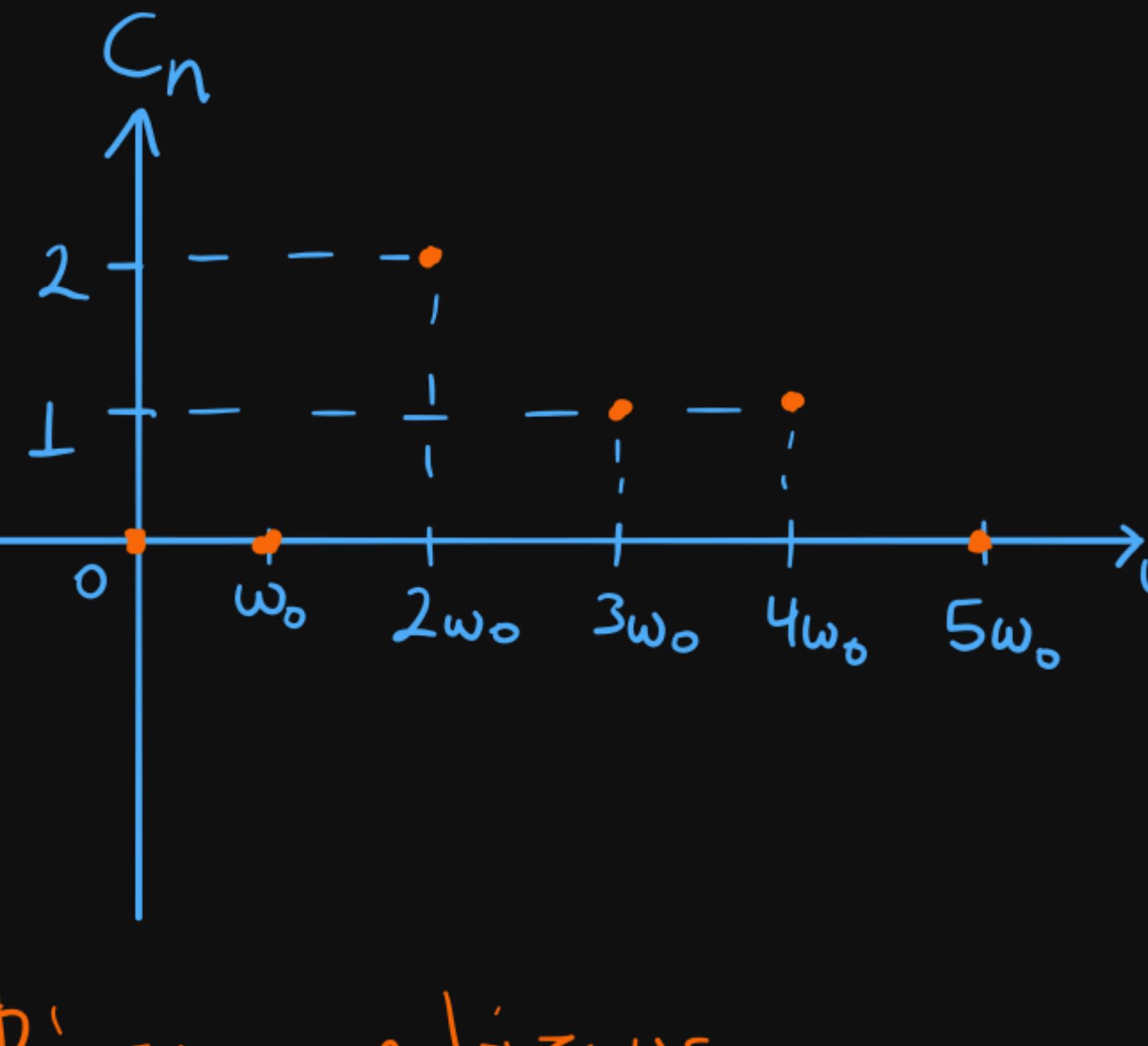
$$\cdot y(t) = h(t) \cdot x(t) \xrightarrow{\text{FT}} Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} H(\omega) * X(\omega)$$

$$\cdot \text{Όμως ηροσοχή: } y(t) = h(t) \cdot x(t) \xrightarrow{\text{FT}} Y(f) = H(f) * X(f) \quad (\text{χάρεται το } \frac{1}{2\pi})$$

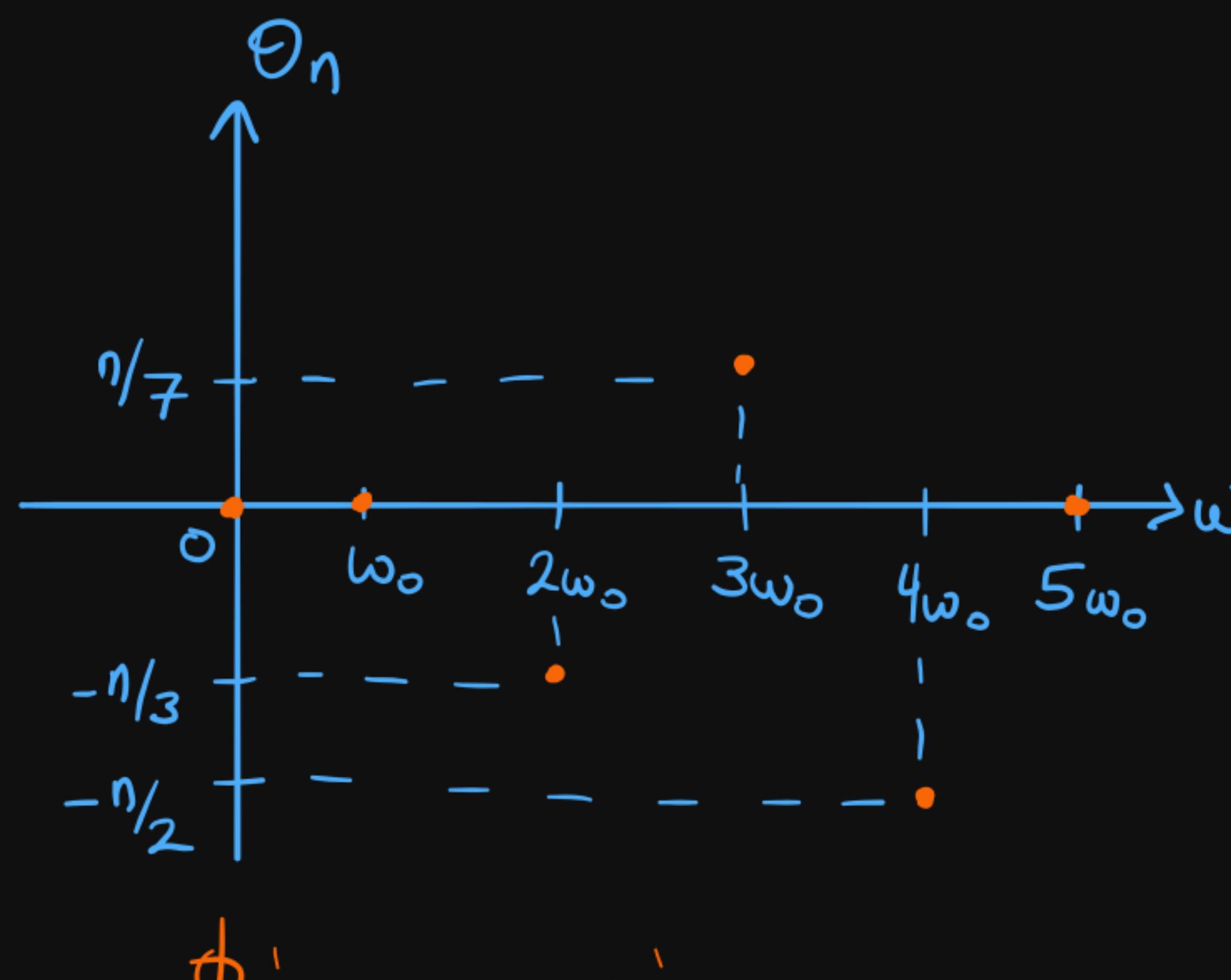
- Προσοχή σταν σημείες στα κλάσμα σε αντά κλάσματα, πρέπει βαθμός πολυωνύμου παρονομαστή > βαθμός πολυωνύμου αριθμητή

a) • Το  $x(t)$  γράφεται

$$x(t) = 2 \cos\left(2\pi 200t - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3\pi 200t + \frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(4\pi 200t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Φάσμα ηλεκτρού



Φάσμα φάσης

Θέμα 2 (4)

Έστω το περιοδικό σήμα  $x(t)$  που δίνεται από

$$x(t) = 2 \cos\left(2\pi 200t - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3\pi 300t + \frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(2\pi 400t\right) \quad (3)$$

• Υπολογίστε και σχεδιάστε τα φάσματα πλάτους και φάσης των συντελεστών της σειράς Fourier που προκύπτει.

• Αν το παραπάνω σήμα διέλθει μέσα από ένα γραμμικό και χρονοαμετάβλητο σύστημα με χρονοστική απόχριση ίση με

$$h(t) = \delta(t) - 800 \operatorname{sinc}(400t) \cos(2\pi 300t) \quad (4)$$

ποια θα είναι η έξοδος;

• Ποια θα είναι η μέγιστη συχνότητα δειγματοληψίας για την έξοδο του συστήματος με είσοδο το  $x(t)$  και χρονοστική απόχριση ίση με

$$z(t) = x(t)[u(t+1/2) - u(t-1/2)] \quad (5)$$

προκειμένου να ανακτηθεί χωρίς παραμόρφωση;

• Αν το  $x(t)$  καταγράφεται σε ένα συγχρεμένο χρονικό διάστημα (παράθυρο) και προκύπτει

$$z(t) = x(t)[u(t+1/2) - u(t-1/2)] \quad (6)$$

να βρεθεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για το  $z(t)$  προκειμένου να ανακτηθεί χωρίς παραμόρφωση.

$$\beta) \cdot x(t) = 2 \cos\left(400t - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(600t + \frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(800t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Onoteze } X(f) &= 2\eta[\delta(2nf - 400) + \delta(2nf + 400)] \cdot e^{-j2nf \cdot \frac{\pi}{3}} + \\ &+ n[\delta(2nf - 600) + \delta(2nf + 600)] \cdot e^{-j2nf \cdot \left(-\frac{\pi}{7}\right)} + \\ &+ n[\delta(2nf - 800) + \delta(2nf + 800)] \cdot e^{-j2nf \cdot \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\left( \delta(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t) \right)$$

$$\Leftrightarrow X(f) = [\delta(f-200) + \delta(f+200)] \cdot e^{-j\frac{2n^2 f}{3}} +$$

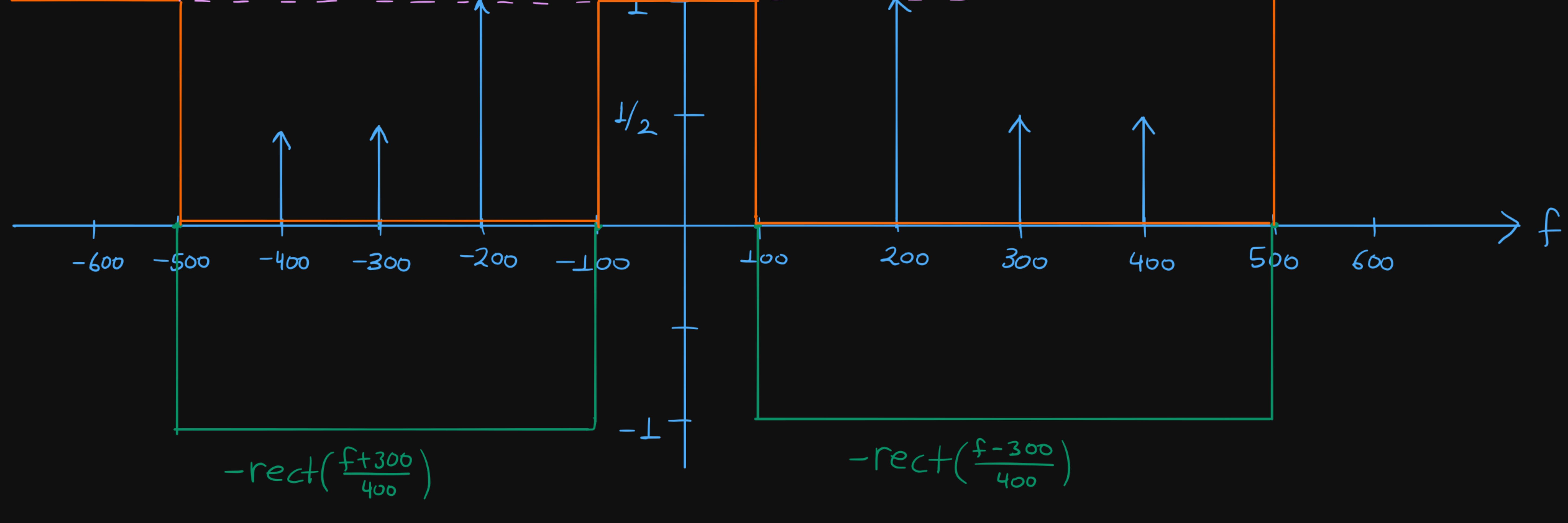
$$+ \frac{1}{2} [\delta(f-300) + \delta(f+300)] \cdot e^{-j\frac{n^2 f}{7}} +$$

$$+ \frac{1}{2} [\delta(f-400) + \delta(f+400)] \cdot e^{-j\frac{n^2 f}{2}}$$

$$\cdot Επισης \ H(f) = 1 - \frac{800}{400} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{400}\right) * n[\delta(2nf - 2300) + \delta(2nf + 2300)]$$

$$\Leftrightarrow H(f) = 1 - 2 \operatorname{rect}\left(\frac{f}{400}\right) * \frac{1}{2} [\delta(f-300) + \delta(f+300)]$$

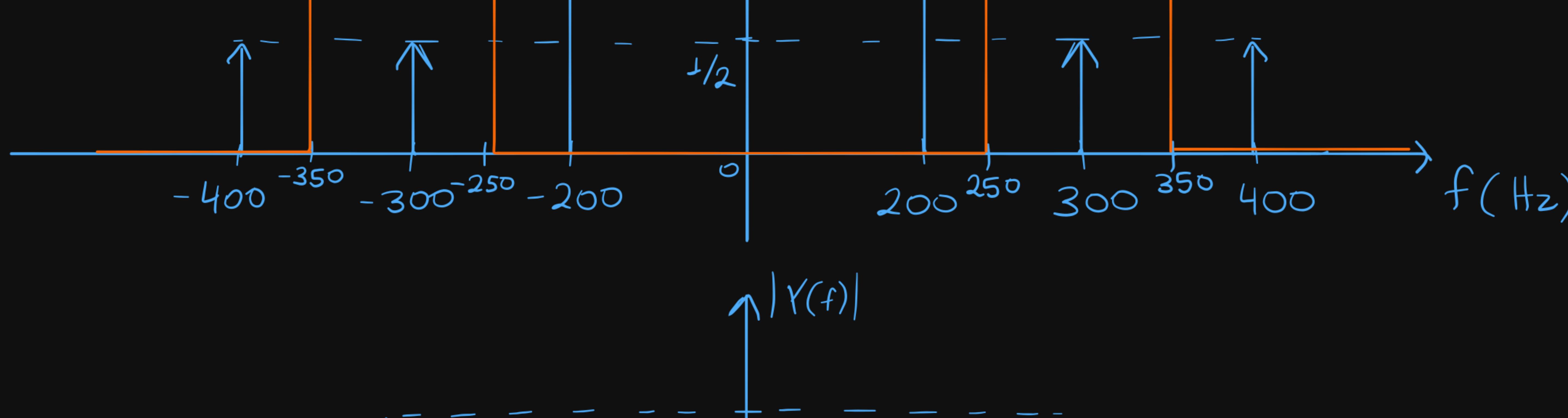
$$\Leftrightarrow H(f) = 1 - \operatorname{rect}\left(\frac{f-300}{400}\right) - \operatorname{rect}\left(\frac{f+300}{400}\right)$$



$$\cdot H \text{ εξοδος θα είναι } Y(f) = H(f) \cdot X(f) \quad , \text{ onoteze } Y(f) = 0$$

$$\gamma) \ H(f) = \frac{200}{100} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{100}\right) * \frac{1}{2} [\delta(f-300) + \delta(f+300)]$$

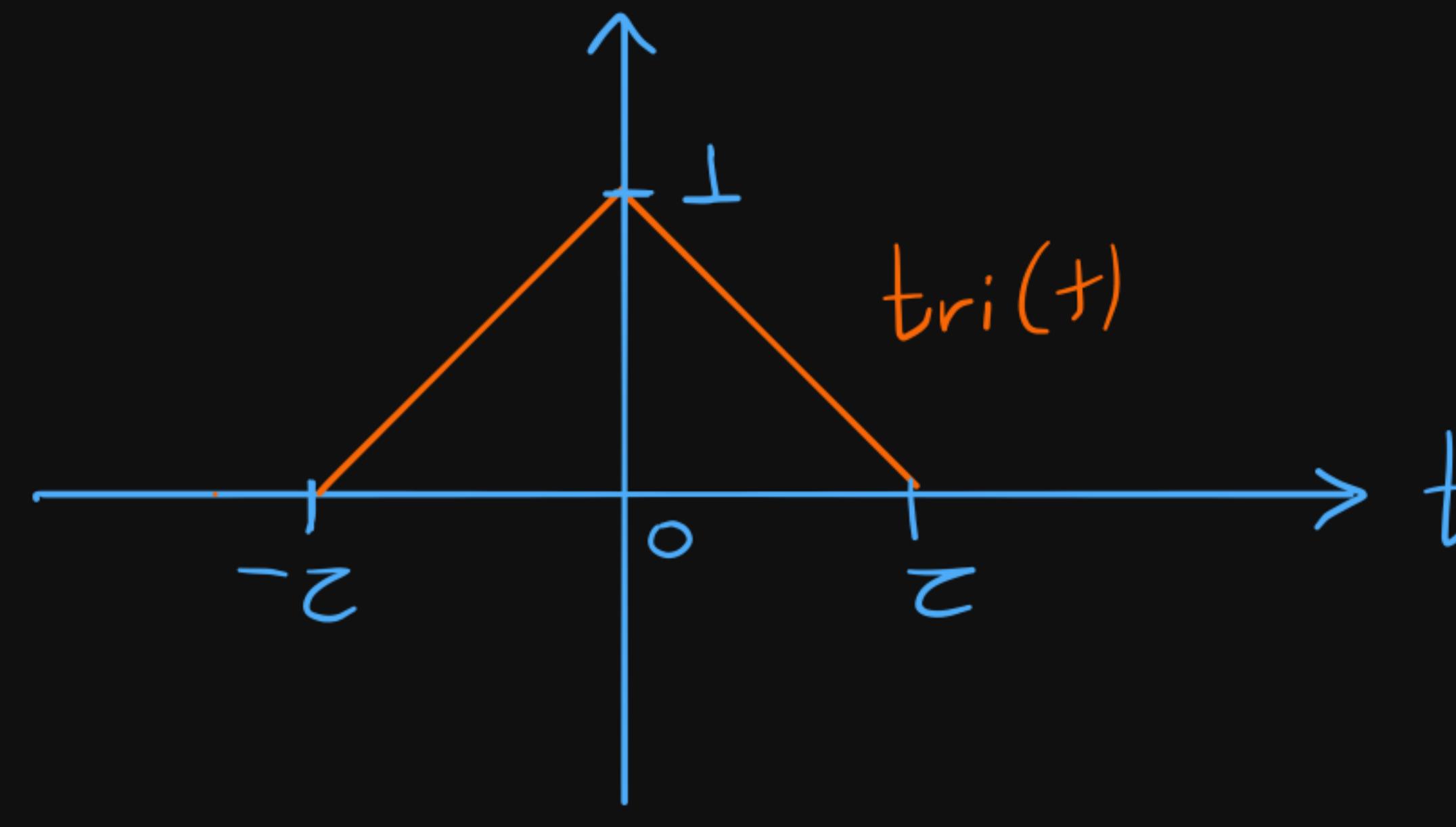
$$\Leftrightarrow H(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f \pm 300}{100}\right)$$



$$f_{max} = 300 \text{ Hz} \quad , \text{ apa } f_s = 300 \cdot 2 \Leftrightarrow f_s = 600 \text{ Hz}$$

$$\delta) \text{ To σήμα } z(t) \text{ είναι χρονοεραζό } (t_{min} = -\frac{1}{2} \text{ και } t_{max} = \frac{1}{2}) \rightarrow \text{ δεν γίνεται να είναι } \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)| dt < \infty$$

Άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ελάχιστη συχνότητα ( $f_s \rightarrow \infty$  και  $T_s \rightarrow 0$ )



Θέμα 1 (2)  
Έστω το περιοδικό σήμα  $x(t)$  που δίνεται από

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{tri}\left(\frac{t-kT_0}{2}\right) \quad (1)$$

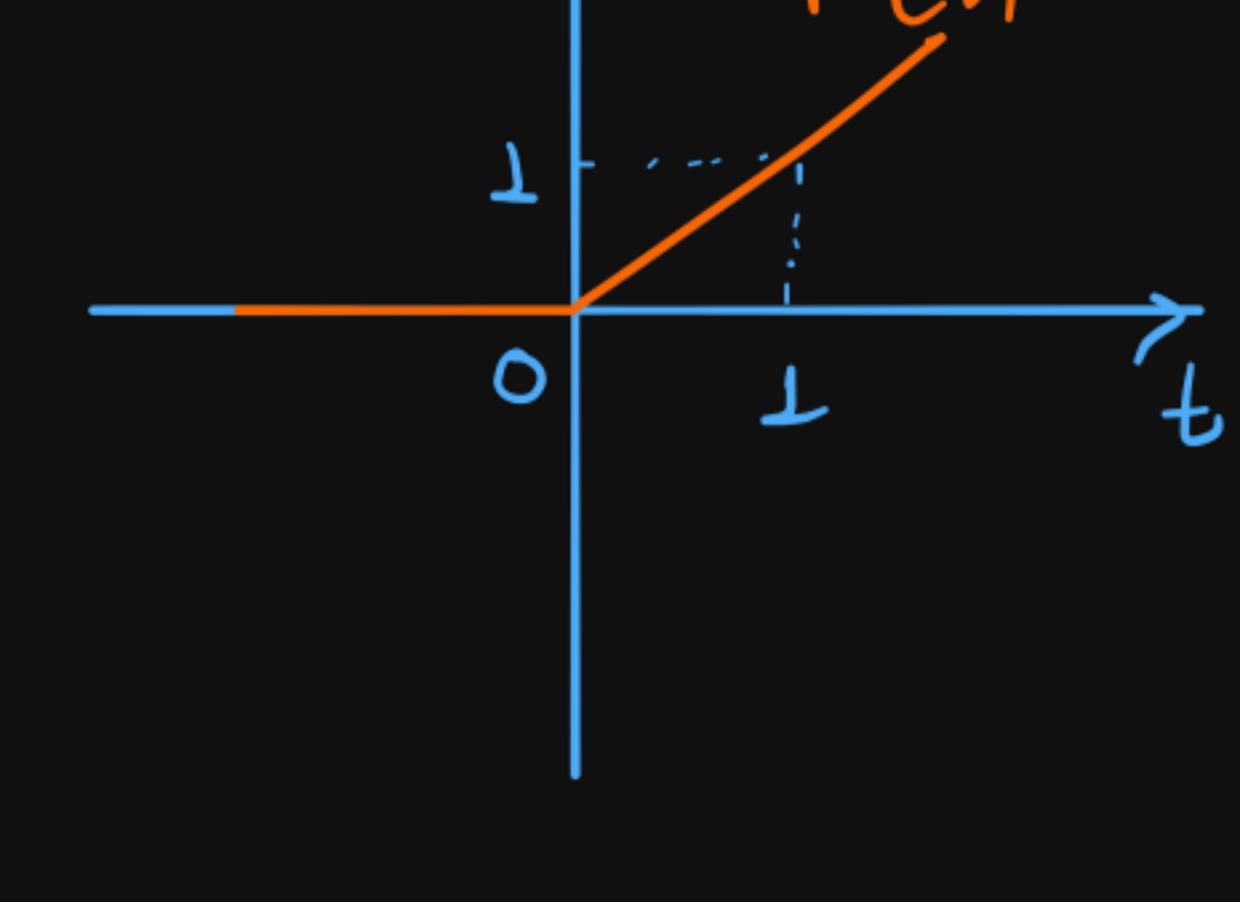
$$\text{όπου } \text{tri}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}(t+\tau), & -\tau \leq t \leq 0 \\ -\frac{1}{\tau}(t-\tau), & 0 \leq t \leq \tau \end{cases}$$

- Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος  $\text{tri}(t)$  συναρτήσει της παραμέτρου  $\tau$ .
- Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος  $x(t)$  συναρτήσει των παραμέτρων  $\tau$  και  $T_0$ .

• Το  $\text{tri}(t)$  γράψεται

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\tau}(t+\tau)[u(t+\tau) - u(t)] - \frac{1}{\tau}(t-\tau)[u(t) - u(t-\tau)] = \text{Κοινό ηαράγοντα } \frac{1}{\tau} \\ &= \frac{1}{\tau}[(t+\tau)u(t+\tau) - \underbrace{(t+\tau)u(t)}_{r(t+\tau)} - \underbrace{(t-\tau)u(t)}_{-2r(t)} + (t-\tau)u(t-\tau)] = \text{Κοινό ηαράγοντα } u(t) \\ &= \frac{1}{\tau}[(t+\tau)u(t+\tau) - \underbrace{2t u(t)}_{-2r(t)} + \underbrace{(t-\tau)u(t-\tau)}_{r(t-\tau)}] \end{aligned}$$

Ramp function:  $r(t) = t u(t)$



$$y(t) = \frac{1}{\tau} [r(t+\tau) - 2r(t) + r(t-\tau)]$$

$$\cdot \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [u(t+\tau) - 2u(t) + u(t-\tau)]$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

$$\cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{1}{\tau} [\delta(t+\tau) - 2\delta(t) + \delta(t-\tau)]$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

$$\cdot \text{Οπότε } \mathcal{FT} \left\{ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \right\} = \mathcal{FT} \left\{ \frac{1}{\tau} [\delta(t+\tau) - 2\delta(t) + \delta(t-\tau)] \right\}$$

Ιδιότητες ηαράγωγησ  
και χρονικής ολισθησης

$$\Leftrightarrow (j\omega)^2 Y(\omega) = \frac{1}{\tau} [e^{j\omega\tau} - 2 + e^{-j\omega\tau}]$$

$$\cos(\omega\tau) = \frac{e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 Y(\omega) = \frac{2}{\tau} [\cos(\omega\tau) - 1]$$

$$\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\omega\tau)}{2}$$

$$\Leftrightarrow Y(\omega) = \frac{4}{\tau\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

$$\Leftrightarrow Y(\omega) = \frac{4}{\tau} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow Y(\omega) = \frac{4}{\tau} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (\because Y(f) = \omega \cdot \text{sinc}^2(\pi f \tau)) \quad (\omega = 2\pi f)$$

$$\cdot \text{Εχουμε } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{tri}\left(\frac{t-kT_0}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y\left(\frac{t-kT_0}{2}\right)$$

$$\text{Και } \sum_{k=-\infty}^{\infty} y\left(\frac{t-kT_0}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(kf_0) \cdot \delta(f - kf_0) \quad \left( \text{M/S Fourier περιοδικών σημάτων} \right)$$

$$\text{Οπότε } \sum_{k=-\infty}^{\infty} y\left(\frac{t-kT_0}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y\left(\frac{t}{2} - k\frac{T_0}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{2}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y\left(\frac{k}{T_1}\right) \cdot \delta(2f - kf_1)$$

$$= \frac{2}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y\left(k\frac{1}{T_1}\right) \cdot \delta(2f - kf_1) = \frac{4}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(2kf_0) \cdot \delta(2f - 2k\frac{1}{T_0}) \xrightarrow{\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)}$$

$$= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(n2kf_0\tau\right) \cdot \delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right) = \boxed{\frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(2nk\frac{1}{T_0}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) = X(f)}$$

α) • Μ/Σ Laplace εξισώσης (2):

$$X(s) - sY(s) = W(s) \quad (4)$$

• Μ/Σ Laplace εξισώσης (3):

$$\frac{W(s)}{s} - 3Y(s) = s^2 Y(s) \xleftrightarrow{(4)}$$

Θέμα 2 (3)  
Θεωρείτε το σύστημα που προκύπτει από το σύστημα των διαχοριστών εξισώσεων

$$x(t) - \frac{dy(t)}{dt} = w(t) \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^t w(\tau) d\tau - 3y(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \quad (3)$$

όπου  $x(t)$  είναι το σήμα εισόδου και  $y(t)$  το σήμα εξόδου.

- Να βρεθεί τη συνάρτηση μεταφορής του συστήματος υπερώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες.
- Να βρεθεί τη χρονοστατική απόκριση του συστήματος.
- Να βρεθεί τη βηματική απόκριση του συστήματος.

$$\frac{X(s)}{s} - Y(s) - 3Y(s) = s^2 Y(s) \Leftrightarrow \frac{X(s)}{s} = Y(s)(4 + s^2) \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s(s^2 + 4)} \Leftrightarrow H(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}$$

$$\beta) H(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε} \quad A(s^2 + 4) + s(Bs + C) &= 1 \Leftrightarrow (A + B)s^2 + Cs + 4A = 1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ 4A = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} + B = 0 \\ C = 0 \\ A = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{4} \\ C = 0 \\ A = \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\delta_1 \lambda \delta_1 \quad H(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$\text{Πόδοι: } s=0 \quad \text{kai} \quad s^2 = -4 \Rightarrow s = \pm \sqrt{-4} \Rightarrow s = \pm 2i$$

• Υπάρχουν 2 ηθανες περιοχες συγκλισης

$\text{Re}(s) > 0$  (αιραζο και ασταθεις)

$\text{Re}(s) < 0$  (αντιαιραζο και ασταθεις) (δεν ασχολουμασε με αυτο)

$$\bullet \text{Για } \text{Re}(s) > 0 : \boxed{h(t) = \frac{1}{4} u(t) - \frac{1}{4} \cos(2t) u(t)}$$

γ) • Μεθοδολογια: Βασικη  $X(s) = \frac{1}{s}$  (αφού  $X(t) = u(t)$ )

$$\text{οποτε} \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s(s^2 + 4)} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4}$$

$$\text{έχουμε} \quad A(s^2 + 4) + B(s^2 + 4) + (Cs + D)s^2 = 1 \Leftrightarrow (C + A)s^3 + (B + D)s^2 + 4As + 4B = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C + A = 0 \\ B + D = 0 \\ 4A = 0 \\ 4B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = -\frac{1}{4} \\ A = 0 \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

οποτε

$$Y(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s^2 + 4}$$

Πόδοι:  $s=0$   
 $s = \pm 2i$

$$\bullet \text{Συνημα αιραζο:} \quad \boxed{y(t) = \frac{1}{4} t u(t) - \frac{1}{8} \sin(2t) u(t)}$$

## A' zpōnos (óxi gia tis eξετάσεις)

• Exoupe  $\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \text{rect}(f)$

Kai  $\text{sinc}(2t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$

Kai  $\text{sinc}(2t-1) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{2} e^{-j2\pi f} \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$

• Kai  $\sin(nt) \xleftrightarrow{\text{FT}} -jn \left[ \delta\left[2n\left(f - \frac{1}{2}\right)\right] - \delta\left[2n\left(f + \frac{1}{2}\right)\right] \right] = -\frac{j\pi}{2n} \left[ \delta\left(f - \frac{1}{2}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{2}\right) \right] = -\frac{j}{2} \left[ \delta\left(f - \frac{1}{2}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{2}\right) \right]$

Θέμα 3 (2)

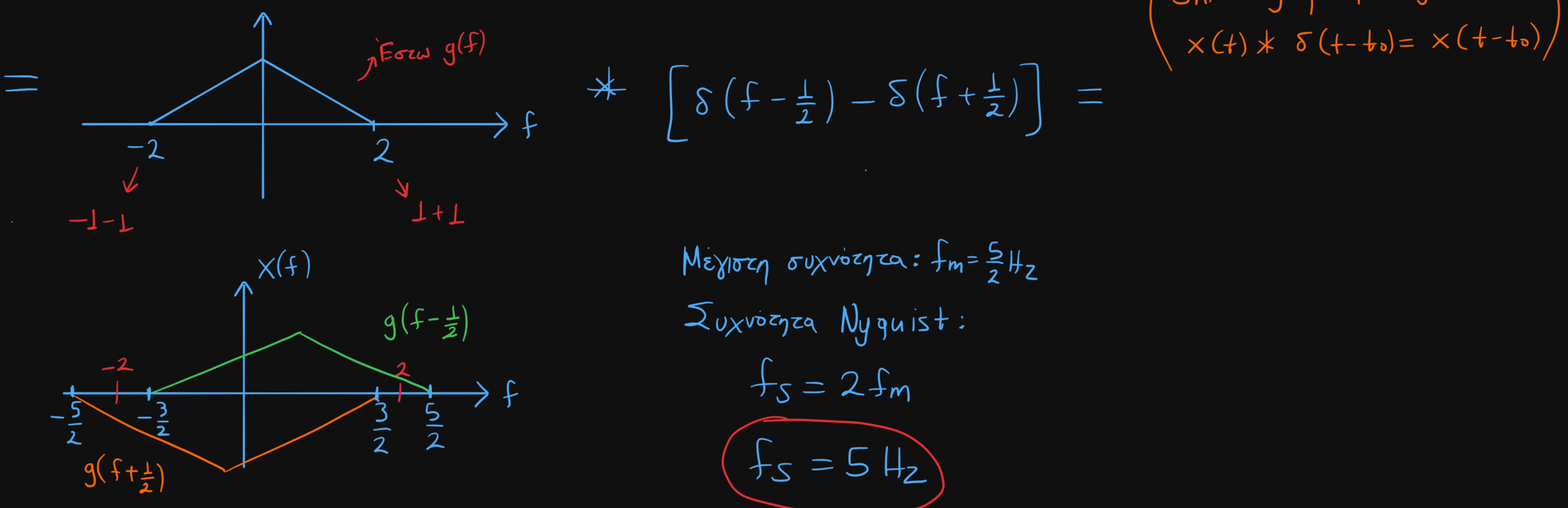
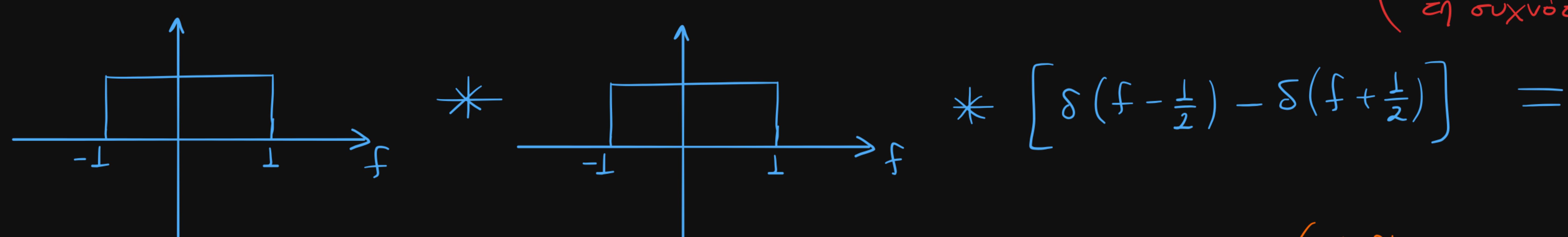
Nz θετεί τη ελάχιστη συχνότητα δεγματοληψίας για το σήμα

$$x(t) = \frac{1}{t} \text{sinc}^2(2t-1) \cdot \sin(\pi t) \quad (4)$$

προκειμένου να μπορεί να αναστρέψει πλήρως από τα δείγματά του και να υπονομεύσει τη συνθήκη του Nyquist.

Iδιότητα:  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

Σημείωση: δεν μας ενδιαφέρει το υψος των κατακόρυφών αξόνων για να βρούμε τη συχνότητα Nyquist



## B' zpōnos (gia tis eξετάσεις)

• Exoupe  $x(t) = \frac{1}{t} \text{sinc}^2(2t-1) \sin(nt) = \frac{1}{t} \left( \frac{\sin[n(2t-1)]}{n(2t-1)} \right)^2 \cdot \sin(nt)$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{\sin^2(2nt-n)}{(2nt-n)^2} \cdot \sin(nt)$$

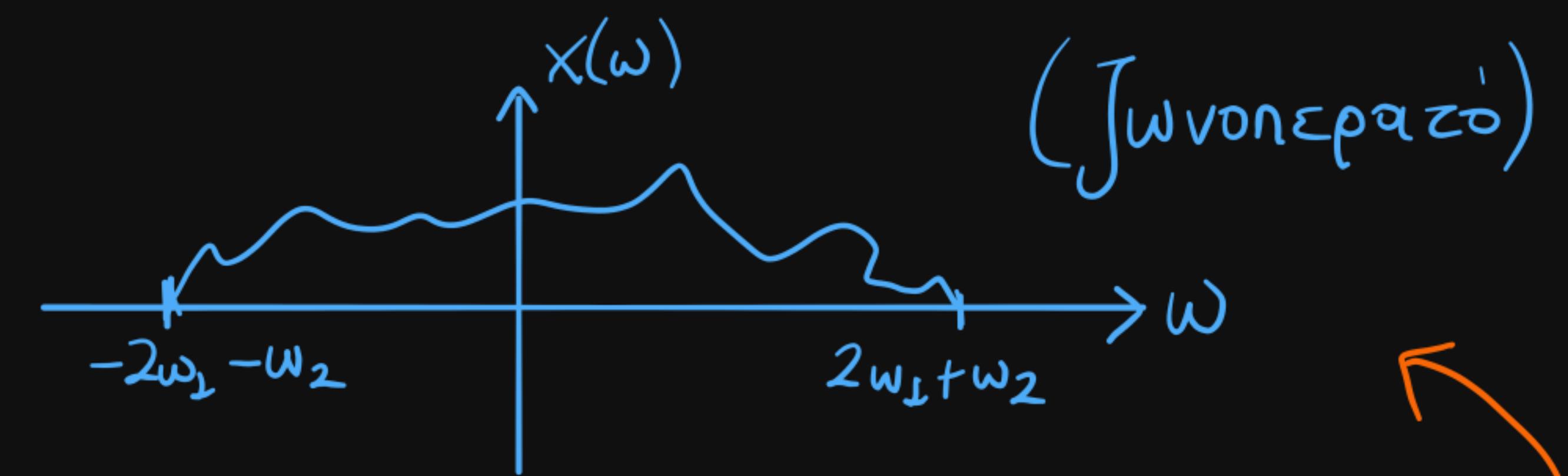
• To ndakos otov w aixova (sigma nesdio tis συχνότητας) Θa eivai anō  $-2\omega_1 - \omega_2$  με xpri  $2\omega_1 + \omega_2$  (dixw suveniagis)

δηλαδή  $\omega_m = 2\omega_1 + \omega_2 = 2 \cdot 2n + n = 5n$

Kai  $f_m = \frac{\omega_m}{2n} = \frac{5n}{2n} \Leftrightarrow f_m = \frac{5}{2}$

Nyquist rate

Apa  $f_S = 2 \cdot f_m = 2 \cdot \frac{5}{2} \Leftrightarrow f_S = 5 \text{ Hz}$



$$\cdot H(z) = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{1+z^{-1}-2z^{-2}} \cdot \frac{z^2}{z^2} = \frac{z(1+z^{-1})}{z^2+z-2}$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{z+1}{z^2+z-2} = \frac{z+1}{(z-1)(z+2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2}$$

$$\cdot \text{ΕΧΟΥΜΕ } A = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)H(z) = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad B = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2)H(z) = \frac{-2+1}{-2-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ονότες } H(z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+2} = \frac{2}{3} z^{-1} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{1}{3} z^{-1} \cdot \frac{z}{z+2}$$

• Σημα σημείο: η εριοχή συγκλισης  $|z| > 2$

$$\cdot \frac{z}{z-1} = \mathcal{Z}\{u(n)\} \xrightarrow[\text{οδισθηση}]{\text{χρονική}} z^{-1} \frac{z}{z-1} = \mathcal{Z}\{u(n-1)\}$$

$$\cdot \frac{z}{z+2} = \mathcal{Z}\left\{(-2)^n u(n)\right\} \xrightarrow[\text{οδισθηση}]{\text{χρον.}} z^{-1} \frac{z}{z-1} = \mathcal{Z}\left\{(-2)^{n-1} u(n-1)\right\}$$

Aπο 
$$h(n) = \frac{2}{3} u(n-1) + \frac{1}{3} (-2)^{n-1} u(n-1)$$

Θέμα 4 (3)

Η συνάρτηση συστήματος ενός διαχρονικού αποχού συστήματος δίνεται ως τη σχέση

$$H(z) = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{1+z^{-1}-2z^{-2}}$$

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

(5)

• Ισχυει  $(-jt)^3 a(t) \xrightarrow{FT} \frac{d^3 A(\omega)}{d\omega^3}$

ονού  $A(\omega) = \left( \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) (1 - e^{j\omega})$

• Επισης  $u(t) \xrightarrow{FT} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} = A_1(\omega)$

και  $\delta(t) - \delta(t+1) \xrightarrow{FT} 1 - e^{j\omega} = A_2(\omega)$

διάδοση  $A(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega)$

• Από τελικά:  $x(t) = -(-jt)^3 \cdot (a_1(t) * a_2(t)) \xrightarrow{FT} -\frac{d^3(A_1(\omega) \cdot A_2(\omega))}{d\omega^3}$

διάδοση  $x(t) = -jt^3 \left[ u(t) * (\delta(t) - \delta(t+1)) \right] = -jt^3 (u(t) - u(t+1)) = jt^3 (u(t+1) - u(t))$

• Εξουψε ωνοδογισουμε στη σημερινη ρωμα  $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |j^2 t^6 (u(t+1) - u(t))|^2 dt \Leftrightarrow (1)$   
για β' ερώτηση

$$\Leftrightarrow E = \int_{-\infty}^{+\infty} [t^6 (u(t+1) - u(t))^2] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^6 u^2(t+1) dt - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^6 \cdot u(t+1) \cdot u(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} t^6 u^2(t) dt$$

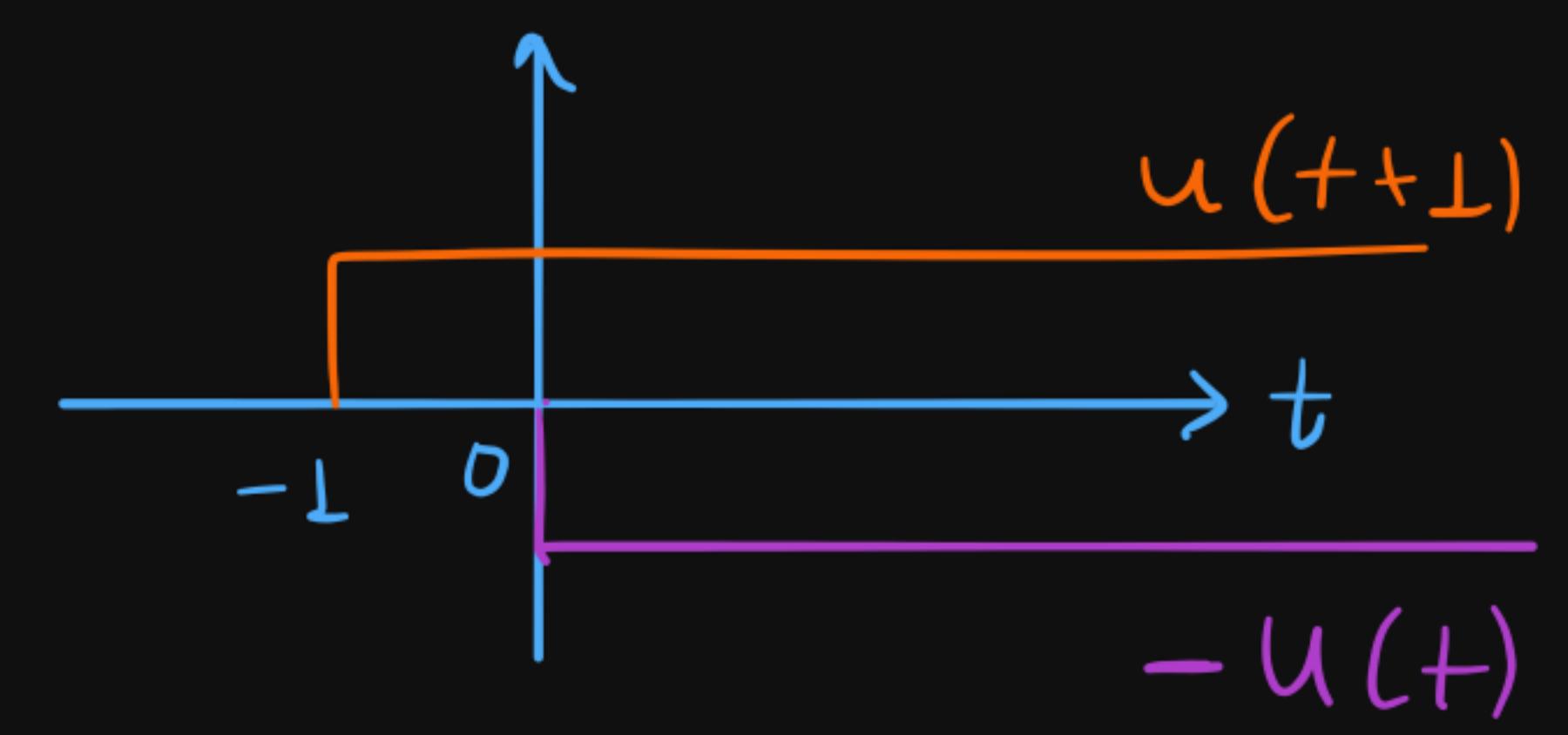
$$= \int_{-1}^{+\infty} t^6 dt - 2 \int_0^{+\infty} t^6 dt + \int_0^{+\infty} t^6 dt = \int_{-1}^{+\infty} t^6 dt - \int_0^{+\infty} t^6 dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \int_{-1}^k t^6 dt - \int_0^k t^6 dt \right) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \left[ \frac{t^7}{7} \right]_{-1}^k - \left[ \frac{t^7}{7} \right]_0^k \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{k^7}{7} + \frac{1}{7} - \frac{-1^7}{7} \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{7} \Leftrightarrow E = \frac{1}{7} \quad J$$

B' ερώτηση

• Αντα (1) εξουψε  $u(t+1) - u(t) \rightarrow αλλάζουμε όρια οδοκλήρωσης σε  $\int_{-1}^0$$

Ονοτες (1)  $\Leftrightarrow \int_{-1}^0 t^6 dt = \left[ \frac{t^7}{7} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{7} \quad J$



• Βήμα 1: αλλάζουμε τις μεταβλητές από  $t$  σε  $\tau$ :

Θέμα 2 (3)

Αν  $x(t) = e^{-t}(u(t-1) - u(t-4))$  και  $y(t) = e^{-t}u(t+2)$ , να υπολογιστεί η συνέλιξη  $z(t) = x(t) * y(t)$

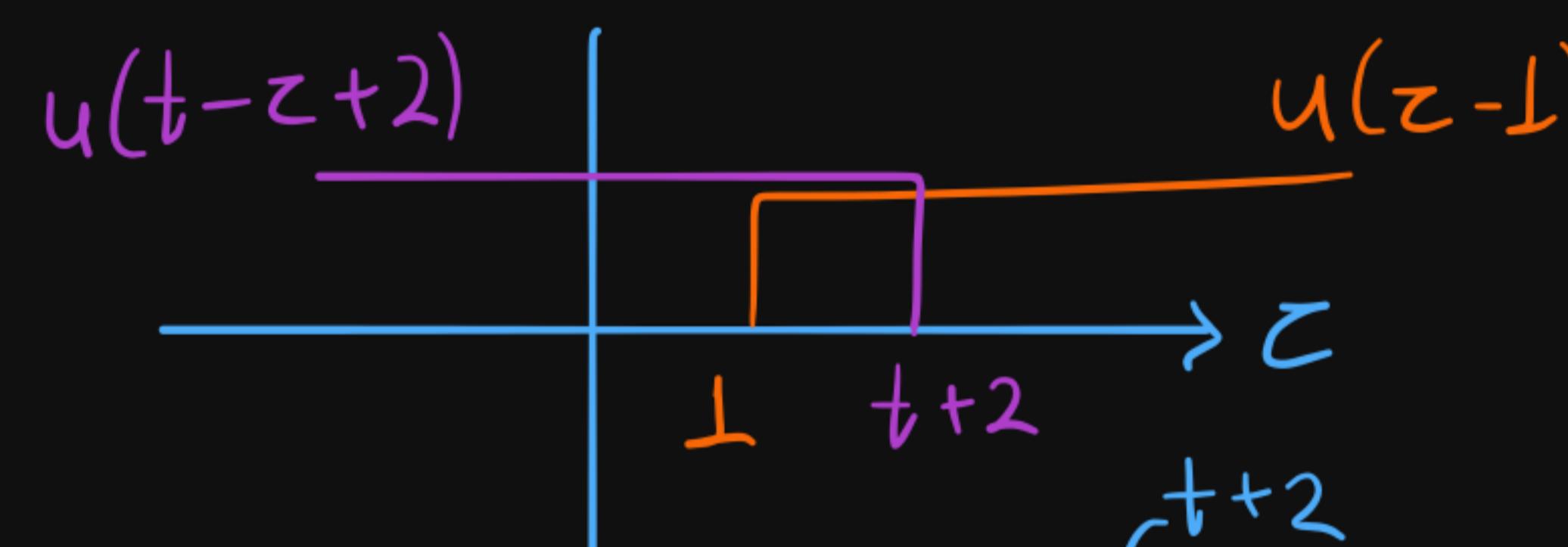
$$x(\tau) = e^{-\tau}(u(\tau-1) - u(\tau-4)) \text{ και } y(\tau) = e^{-\tau}u(\tau+2)$$

• Βήμα 2: γνωρίζουμε ότι  $y(t-\tau) = e^{-(t-\tau)}u(t-\tau+2)$

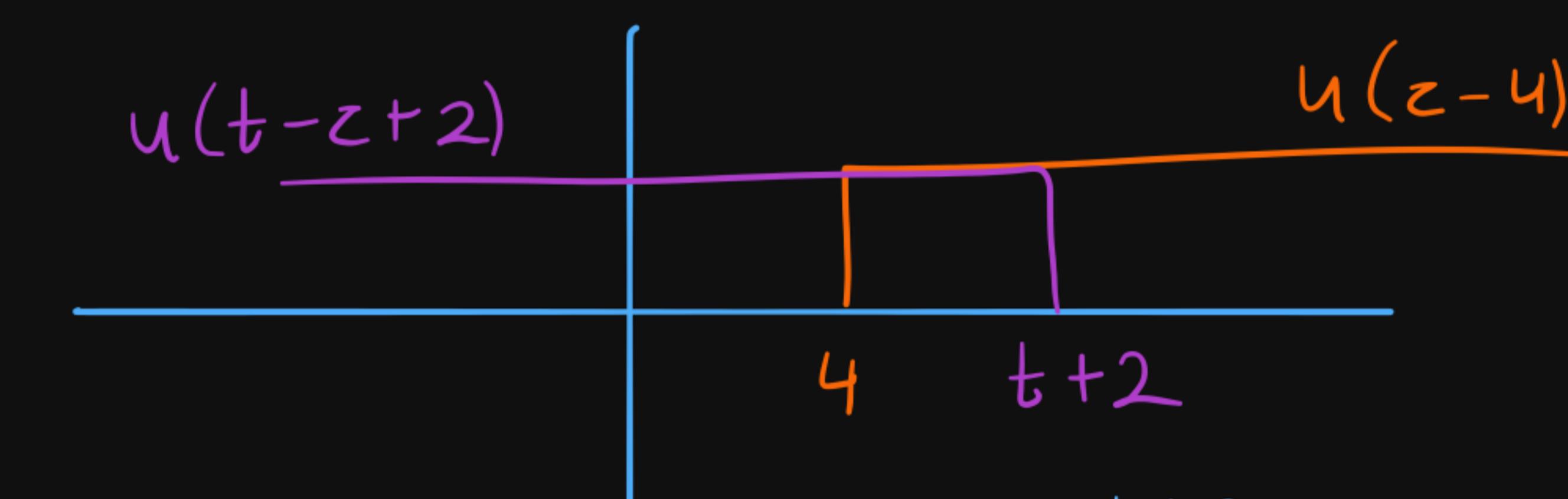
• Βήμα 3: γνωρίζουμε ότι  $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}[u(\tau-1) - u(\tau-4)] \cdot e^{t-\tau}u(t-\tau+2) d\tau$

αγνωστος είναι  $\tau$ , όχι  $t$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} e^{t-\tau} u(\tau-1) u(t-\tau+2) d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} e^{t-\tau} u(\tau-4) u(t-\tau+2) d\tau$$



• Όπια οδοκλήρωσης:



Προγραμματίσεις  
Χρειάζεται να ζητηθεί η  
γράψουμε ήλα αυτά

• step func:  $u(\underline{t+2} - \underline{1})$  (αφαιρείται η άριστη οδοκλήρωση)

• Όπια οδοκλήρωσης:

• step func:  $u(\underline{t+2} - \underline{4})$

$$\begin{aligned} \Delta \eta \text{ λαργή } z(t) &= \int_{\underline{1}}^{t+2} e^{-\tau} e^{t-\tau} u(t+1) d\tau - \int_{\underline{4}}^{t+2} e^{-\tau} e^{t-\tau} u(t-2) d\tau = \\ &= \int_{\underline{1}}^{t+2} e^{-\tau} u(t+1) d\tau - \int_{\underline{4}}^{t+2} e^{-\tau} u(t-2) d\tau = e^{-\tau} u(t+1) \Big|_{\underline{1}}^{t+2} - e^{-\tau} u(t-2) \Big|_{\underline{4}}^{t+2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow z(t) = e^{-t} u(t+1) \cdot (t+1) - e^{-t} u(t-2) \cdot (t-2)$$

$$\bullet H(z) = \frac{Az^{-1}}{1 - 2z^{-1} + Bz^{-2}} = \frac{Az}{z^2 - 2z + B}$$

$$\Delta = 1 - 4B = 1(1-B)$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1-B}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-B}$$

Θέμα 4 (3)

Έστω

$$H(z) = \frac{Az^{-1}}{1 - 2z^{-1} + Bz^{-2}} \quad (A, B \in \mathbf{R}^*)$$

η συνάρτηση συστήματος ενός διαχριτού, γραμμικού, αμετάβλητου κατά τη μετατόπιση και αυτιστικού ματος. Να βρεθούν οι επιτρεπτές τιμές των σταθερών παραμέτρων  $A$  και  $B$ , ώστε το σύστημα ευσταθές. Αν  $A = B = 1$ , να βρεθεί η χρονική απόχριση του συστήματος.

$$\bullet \text{Έχουμε 2 ιεροτεράστισης: } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - B \geq 0 \Leftrightarrow B \leq 1 \rightarrow \text{Πόλοι: } z_1 = 1 + \sqrt{1-B} \quad \mu \varepsilon \quad |z_1| > |z_2| \\ z_2 = 1 - \sqrt{1-B}$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - B < 0 \Leftrightarrow B > 1 \rightarrow \text{Πόλοι: } z_1 = 1 + j\sqrt{B-1} \quad \mu \varepsilon \quad |z_1| = |z_2| \\ z_2 = 1 - j\sqrt{B-1}$$

$$(αφού \quad 1 \pm \sqrt{1-B} = 1 \pm \sqrt{-\underbrace{(B-1)}_{>0}} = 1 \pm j\sqrt{B-1})$$

Για  $\Delta \geq 0$

$$\bullet \text{Σύσημα ευσταθεσ: } |z_1| < 1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1-B} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-B} < 0 \quad (\text{αδύνατο}) \rightarrow \Delta \text{ εν γένεσαι στο σύστημα να είναι και αιτιαζό και ευσταθεσ} \\ \text{αν } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow B \leq 1$$

Για  $\Delta < 0$

$$\bullet \text{Σύσημα ευσταθεσ: } |z_{1,2}| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + \sqrt{B-1}^2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+B-1} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{B} < 1 \Leftrightarrow B < 1 \left( \text{όμως } \begin{array}{c} \Delta < 0 \\ \downarrow \\ B > 1 \end{array} \right)$$

Για καρια τημή των  $A, B$  στο σύστημα είναι ευσταθεσ.

$$\bullet \text{Για } A=B=1: \frac{H(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{(z-1)^2} \Leftrightarrow H(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (\text{αιτιαζό, } |z| > 1)$$

Από  $h(n) = n \cdot u(n)$

- Μ/Σ Laplace 1<sup>ης</sup> εξισωσης (αρχικές συνθήκες=0)

$$s^2W(s) + 2,5sW(s) + W(s) = X(s)$$

$$\Leftrightarrow W(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 2,5s + 1} \quad (3)$$

Θέμα 1

Μία διαδικασία περιγράφεται από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2} + 2.5 \frac{dw(t)}{dt} + w(t) = x(t)$$

$$\frac{d[y(t) - w(t)]}{dt} = 2x(t)$$

όπου  $t \geq 0$ . Αν  $x(t)$  και  $y(t)$  είναι αντίστοιχα η είσοδος και η έξοδος της διαδικασίας, να βρεθεί η χρονιστική απόκριση της διαδικασίας.

- Μ/Σ Laplace 2<sup>ης</sup> εξισωσης  $\left( \text{ζω } \frac{d(y(t) - w(t))}{dt} \text{ γραφεται } \frac{dy(t)}{dt} - \frac{dw(t)}{dt} \right)$

$$sY(s) - sW(s) = 2X(s) \xrightarrow{(3)} sY(s) - \frac{sX(s)}{s^2 + 2,5s + 1} = 2X(s) \Leftrightarrow sY(s) = X(s) \cdot \left( 2 + \frac{s}{s^2 + 2,5s + 1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2 + \frac{s}{s^2 + 2,5s + 1}}{s} = \frac{2s^2 + 6s + 2}{s(s^2 + 2,5s + 1)} = H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0,5} + \frac{C}{s+2}$$

$\Delta = 2,5^2 - 4 = 2,25$

$$s_{1,2} = \frac{-2,5 \pm 1,5}{2} = \begin{matrix} -0,5 \\ -2 \end{matrix}$$

$$\bullet A = \lim_{s \rightarrow \infty} [sH(s)] = \frac{2}{(0+0,5)(0+2)} = 2$$

$$\text{Όποτε } H(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+0,5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$\bullet B = \lim_{s \rightarrow -0,5} [(s+0,5)H(s)] = \frac{2 \cdot 0,5^2 - 6 \cdot 0,5 + 2}{-0,5 \cdot (-0,5+2)} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Πόλοι: } s=0, \quad s=-0,5, \quad s=-2$$

$$\bullet C = \lim_{s \rightarrow -2} [(s+2)H(s)] = \frac{2 \cdot 4 - 6 \cdot 2 + 2}{-2(-2+0,5)} = -\frac{2}{3}$$

- Μας δινεται  $t \geq 0$ , δηλαδή  $s \geq 0$  σύσημα ειναι αιτιαζό και όπα περιοχή σύγκλισης  $\text{Re}(s) > 0$

Apa 
$$h(t) = \left[ 2 + \frac{2}{3} e^{-0,5t} - \frac{2}{3} e^{-2t} \right] u(t)$$

- Μ/Σ Laplace στην  $\mathbb{L}$  εξίσωση:

$$sY(s) + \alpha Y(s) = X(s) \quad (1)$$

$$\bullet X(t) = e^{-t} u(t) \xrightarrow[\text{Laplace}]{\text{M/S}} \frac{1}{s+1}$$

Apa (1)  $\xrightleftharpoons[X(s)=\frac{1}{s+1}]{} Y(s)(s+\alpha) = \frac{1}{s+1}$

### Θέμα 2

Ένα πραγματικό, ευσταθές και αιτιατό σύστημα συνεχούς χρόνου περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t), \quad t \geq 0,$$

όπου  $x(t)$  και  $y(t)$  είναι τα σήματα εισόδου και εξόδου, αντίστοιχα. Αν  $x(t) = e^{-t}u(t)$  και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, να βρεθεί η έξοδος,  $y(t)$ , του συστήματος. Έστω ότι η διαφορική εξίσωση προσεγγίζεται από εξίσωση διαφορών, οπότε προκύπτει το σύστημα διαχριτού χρόνου

$$\frac{y[n+1] - y[n]}{\Delta t} + ay[n] = x[n], \quad n \geq 0,$$

Να εξεταστεί η ευστάθεια του διαχριτού συστήματος.

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+\alpha)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+\alpha}$$

$$\bullet A = \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)Y(s)] = \frac{1}{\alpha-1} \quad \bullet B = \lim_{s \rightarrow -\alpha} [(s+\alpha)Y(s)] = \frac{1}{1-\alpha}$$

Όποιες  $Y(s) = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{s+\alpha}$  Πόλοι s=-1  
s=-\alpha

Apa  $y(t) = \left[ \frac{1}{\alpha-1} e^{-t} + \frac{1}{1-\alpha} e^{-\alpha t} \right] u(t)$

$$\bullet Αν η εqνv (1) εχουμε  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+\alpha}$  και ενειδή το σύστημα είναι$$

αιτιατό και ευσταθές, τότε  $\alpha > 0$  (θα εχουμε πόλο στο  $-\alpha < 0$ )

ηρέτει να περιλαμβάνεται  
στην ΠΣ ο κάθετος αξονας

$$\bullet \frac{y[n+1] - y[n]}{\Delta t} + \alpha y[n] = x[n] \xrightarrow[\text{M/S}]{\mathbb{Z}} \frac{1}{\Delta t} Y(z) \cdot z^1 - \frac{1}{\Delta t} Y(z) + \alpha Y(z) = X(z)$$

$$Y(z) \left( \frac{z-1}{\Delta t} + \alpha \right) = X(z) \Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\frac{z-1}{\Delta t} + \alpha} = \frac{\Delta t}{z-1 + \alpha \Delta t} = H(z) = \frac{\Delta t}{z-(1-\alpha \Delta t)}$$

Πόλος:  $z_1 = 1 - \alpha \Delta t$  • Για να είναι το σύστημα ευσταθές ηρέτει  $|z_1| < 1 \Leftrightarrow -1 < z_1 < 1$

$$\Leftrightarrow -1 < 1 - \alpha \Delta t < 1 \Leftrightarrow -2 < -\alpha \Delta t < 0 \stackrel{-\alpha < 0}{\Leftrightarrow} \frac{2}{\alpha} > \Delta t > 0 \Leftrightarrow \Delta t \in (0, \frac{2}{\alpha})$$

$$\cdot H(z) = \frac{z^2(2z-2)}{(z-1)(z+0,5)} = \frac{2z^2(z-1)}{(z-1)(z+0,5)}$$

(μπορούμε κανονικά να το απλοσιήσουμε,  
με αντά κλασματικά θα βγει  $\frac{A}{z-1} \rightarrow A=0$ )

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{2z^2}{z+0,5}$$

Πόλος:  $z = -0,5$

• Για  $|z| > 0,5$ : 
$$h(n) = 2(-0,5)^{n+1} u(n+1)$$

λόγω χρονικής οδισθησης

H Περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τον μοναδιαίο  
κύκλο, άρα σύστημα ευστάθες

• Για  $|z| < 0,5$ :  $h(n) = -2 \cdot (-0,5)^{n+1} \cdot u(-(n+1)-1) \Leftrightarrow$

$$h(n) = -2(-0,5)^{n+1} u(-n-2)$$

Εφόσον δεν περιλαμβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος, το σύστημα είναι ασταθές.

### Θέμα 3

Av

$$H(z) = \frac{z^2(2z-2)}{(z-1)(z+0,5)}$$

είναι η συνάρτηση ενός συστήματος, να βρεθεί η χρονική απόχριση (για κάθε πιθανή περιοχή σύγκλισης της  $H(z)$ ) και να χαρακτηριστεί το σύστημα ως προς την ευστάθειά του.

στο βιβλίο σχετικά με τον θέμα

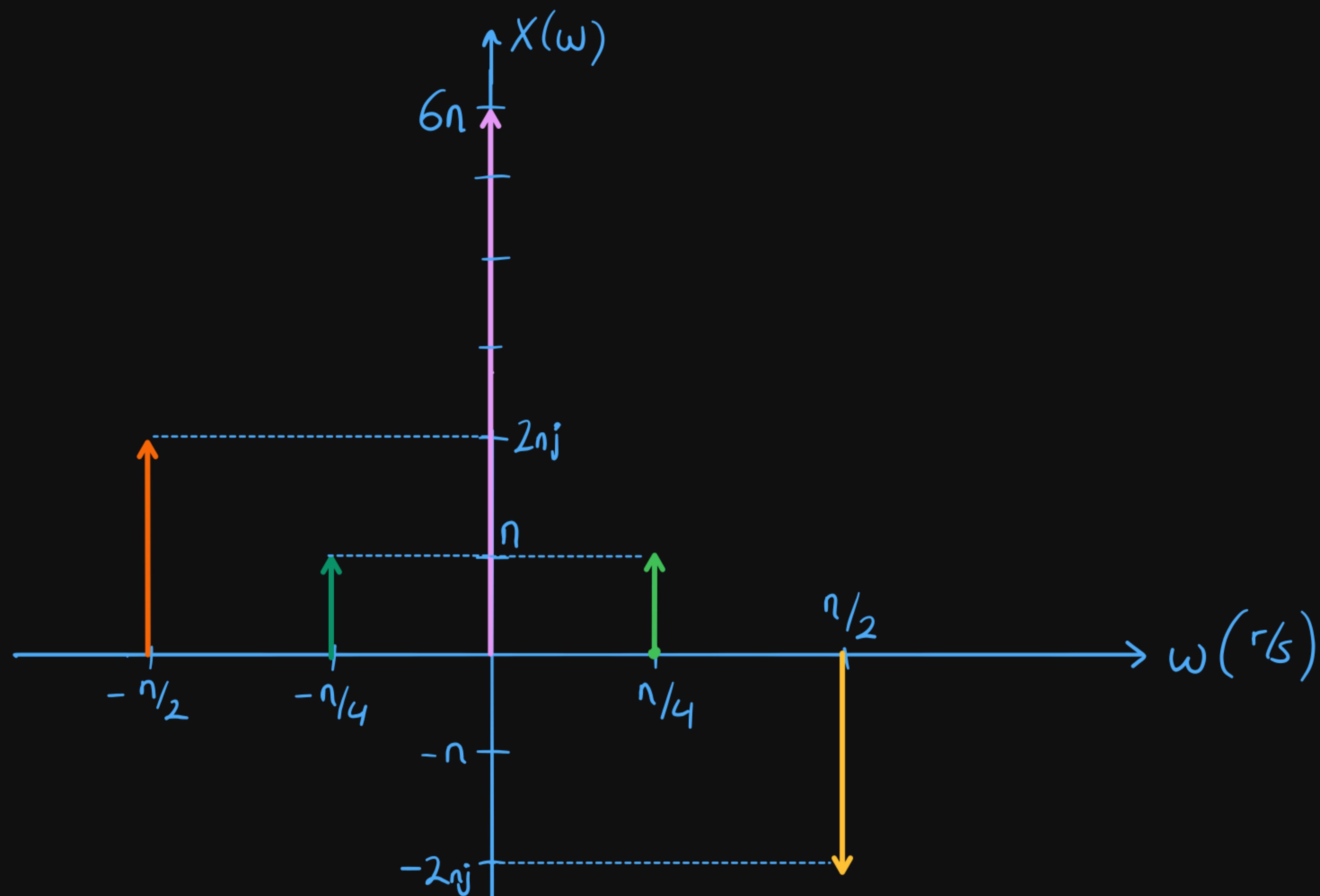
$$1). \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \xrightarrow{FT} n\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \xrightarrow{FT} -2n\jmath\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\cdot 3 \xrightarrow{FT} 6n\delta(\omega)$$

Άρα  $\mathcal{F}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 3\right\} =$

$$= n\left[\underbrace{\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)}_{\text{green}} + \underbrace{\delta\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)}_{\text{green}}\right] - 2n\jmath\left[\underbrace{\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{orange}} - \underbrace{\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{orange}}\right] + \underbrace{6n\delta(\omega)}_{\text{orange}}$$



$$2) \cdot T_s = 4s \Leftrightarrow \frac{1}{f_s} = 4 \Leftrightarrow f_s = \frac{1}{4} \text{ Hz}$$

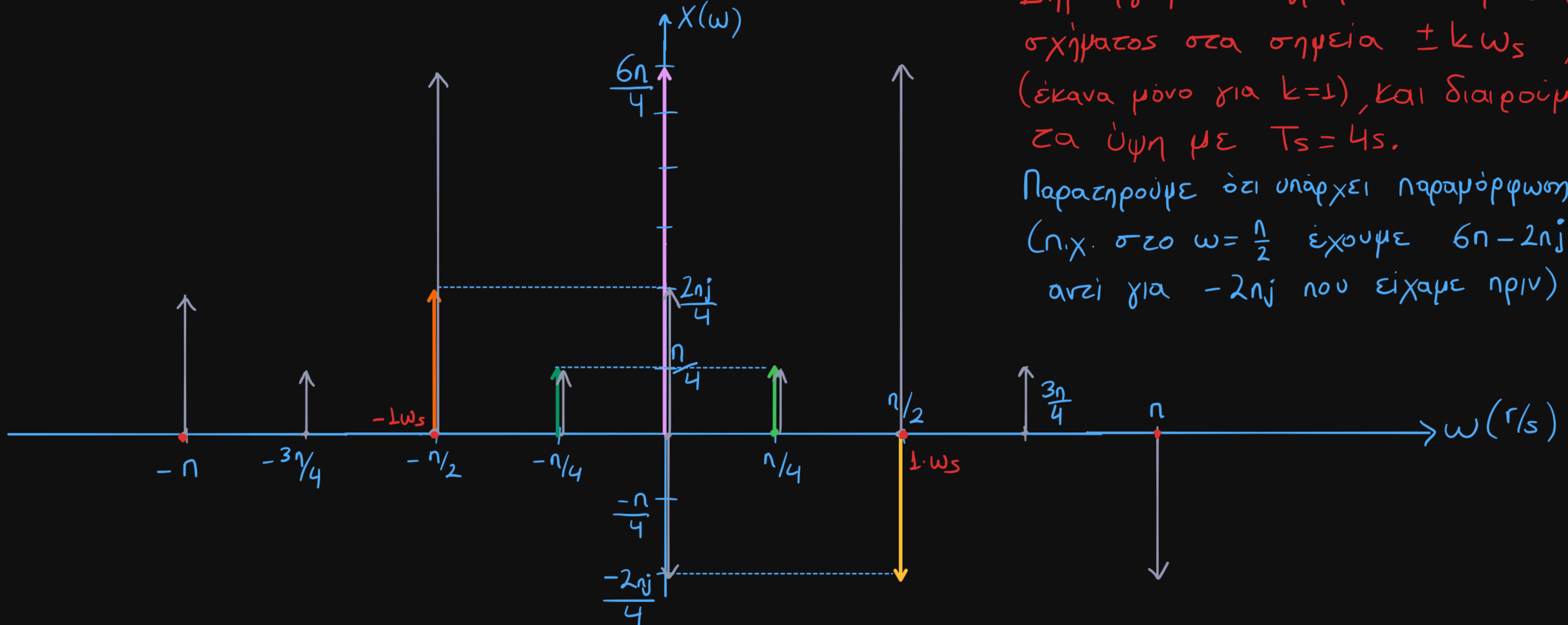
• Εχουμε  $\omega_m = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$  και  $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{1}{4} \text{ Hz}$

• Ενεδή  $f_s < 2f_m$  ( $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ ),  
ζετε δεν ικανοποιείται η συνθήκη του Nyquist και θα έχουμε παραμόρφωση.

$$\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

Δημιουργούμε αντιγραφα του προηγουμένου σχήματος στα σημεία  $\pm k\omega_s$ ,  $k=1, 2, \dots$   
(έκανα μόνο για  $k=1$ ), και διαιρούμε  
τη ύψη με  $T_s = 4s$ .

Παραπομπής οι οπαρχει παραμόρφωση  
(π.χ. στο  $\omega = \frac{\pi}{2}$  έχουμε  $6n - 2n\jmath$   
αρι ή -2n $\jmath$  να ειχαμε πριν)



Σημείωση: Τα παραπάνω φάσματα δεν θεωρούνται 100% σωστά γιατί μπορούμε πραγματικούς με φανταστικούς αριθμούς. Το σωστό θα ήταν να κάνουμε 2 ξεχωριστά φάσματα, ένα για τα πάζας και ένα για την φάση.

3). Το σήμα  $y(t)$  είναι χρονοερατό ( $t_{min} = -\frac{1}{2}$  και  $t_{max} = \frac{1}{2}$ ) → δεν γίνεται να είναι ίωνονερατό.

Άρα δεν γίνεται να υπολογίσουμε τη συχνότητα Nyquist. ( $f_s \rightarrow +\infty$  και  $T_s \rightarrow 0$ )

$$\text{Επειδή } \cos(\omega_c t) \xrightarrow{\text{FT}} \eta [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

$$\text{και } \sin(\omega_c t) \xrightarrow{\text{FT}} -\eta j [\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)]$$

$$\text{και } \text{λόγω της } 180^\circ \text{ ζητας } X_I(t) \cdot a_I(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\eta} X_I(\omega) * A_I(\omega)$$

$$\text{και } \text{ζης } 180^\circ \text{ ζητας } X(t) * \delta(t - t_0) = X(t - t_0)$$

$$\text{Θα } \text{έχουμε } Z_I(\omega) = \frac{1}{2} [X_I(\omega - \omega_c) + X_I(\omega + \omega_c)]$$

$$\text{και } Z_Q(\omega) = -\frac{1}{2} j [X_Q(\omega - \omega_c) - X_Q(\omega + \omega_c)]$$

$$\cdot \text{Γραμμικότητα: } Z_I(t) + Z_Q(t) \xrightarrow{\text{FT}} Z_I(\omega) + Z_Q(\omega) = Z(\omega)$$

Θέμα 5

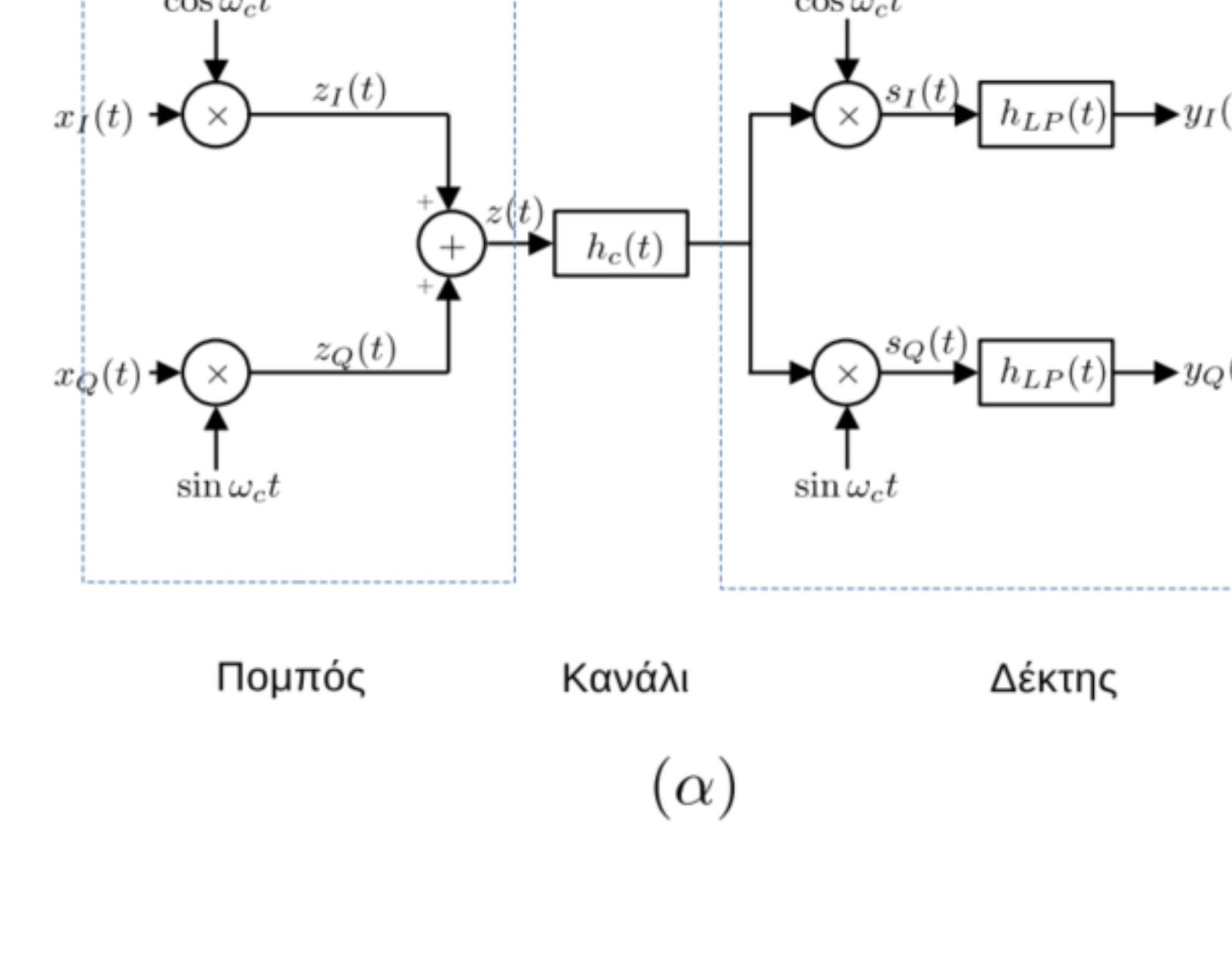
Το παρακάτω δίγραμμα, Σχήμα 1-(α), απεικονίζει ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα όπου ο πομπός, το κανάλι και ο δέκτης αναπαριτόνται ως συστήματα συνθετέμενα σε σειρά. Στο δίγραμμα αυτό τα χαμηλούπερατά φίλτρα (με την ένδειξη LP) έχουν συχνότητα αποκοπής ίση με  $\omega_m$ , ενώ το κανάλι έχει χρονιστική απόσταση ίση με  $h_c(t)$ .

Αν στην είσοδο του πομπού τα σήματα πληροφορίας  $x_I(t)$  και  $x_Q(t)$  έχουν το φάσμα που απεικονίζεται στο σχήμα 1-(β) και θεωρούνται ότι  $\omega_m << \omega_c$ , να βρεθούν και να σχεδιαστούν:

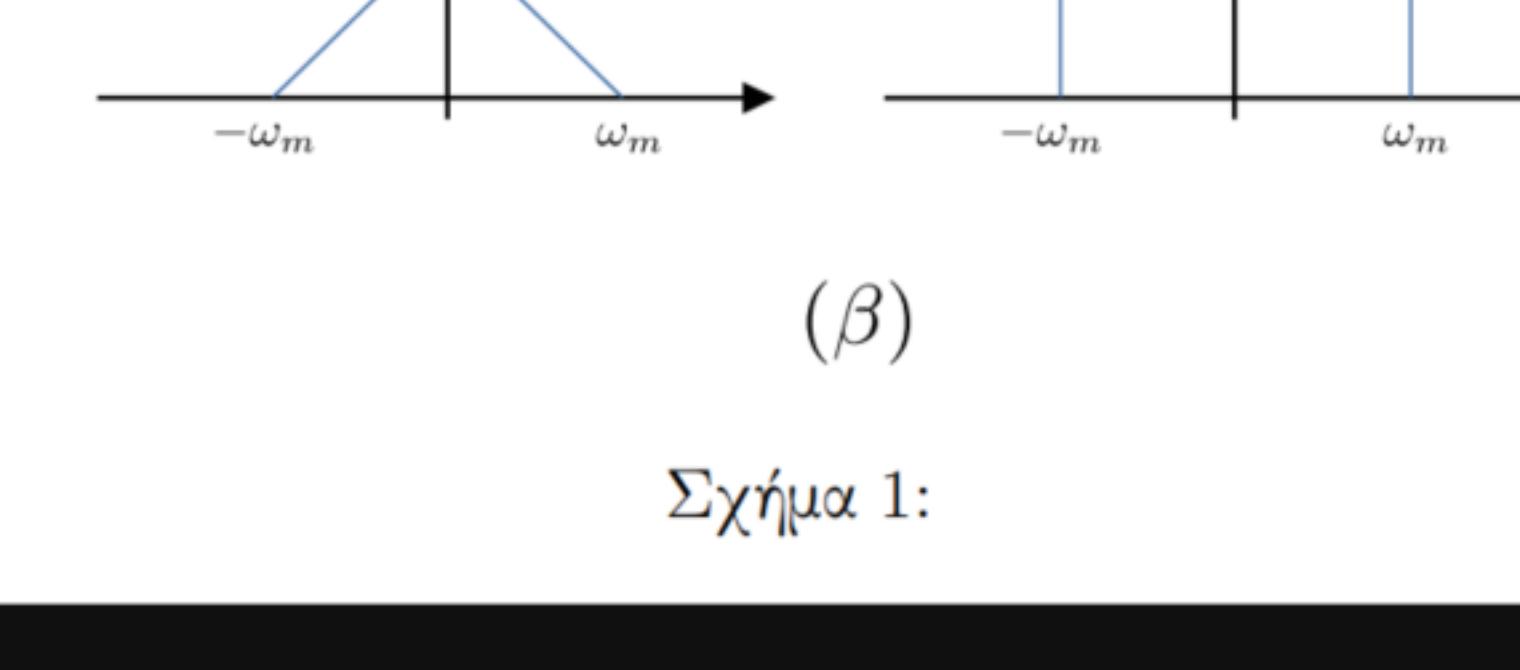
1. Τα φάσματα  $Z_I(\omega)$ ,  $Z_Q(\omega)$  και  $Z(\omega)$  συναρτήσει των  $X_I(\omega)$  και  $X_Q(\omega)$ .

2. Τα φάσματα  $S_I(\omega)$ ,  $S_Q(\omega)$  συναρτήσει των  $X_I(\omega)$  και  $X_Q(\omega)$ .

3. Τα φάσματα  $Y_I(\omega)$ ,  $Y_Q(\omega)$  και  $Y(\omega)$  συναρτήσει των  $X_I(\omega)$  και  $X_Q(\omega)$ .

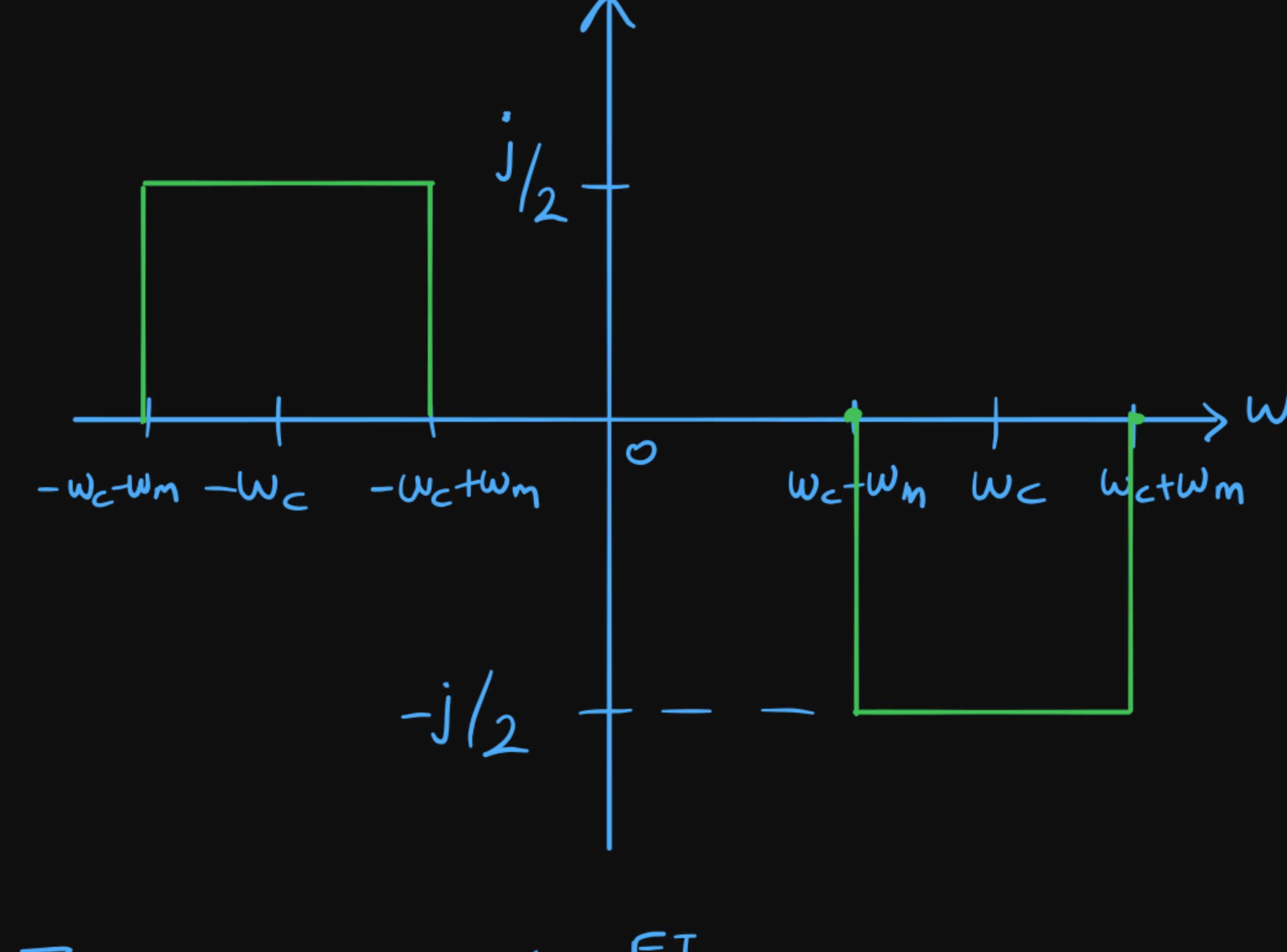
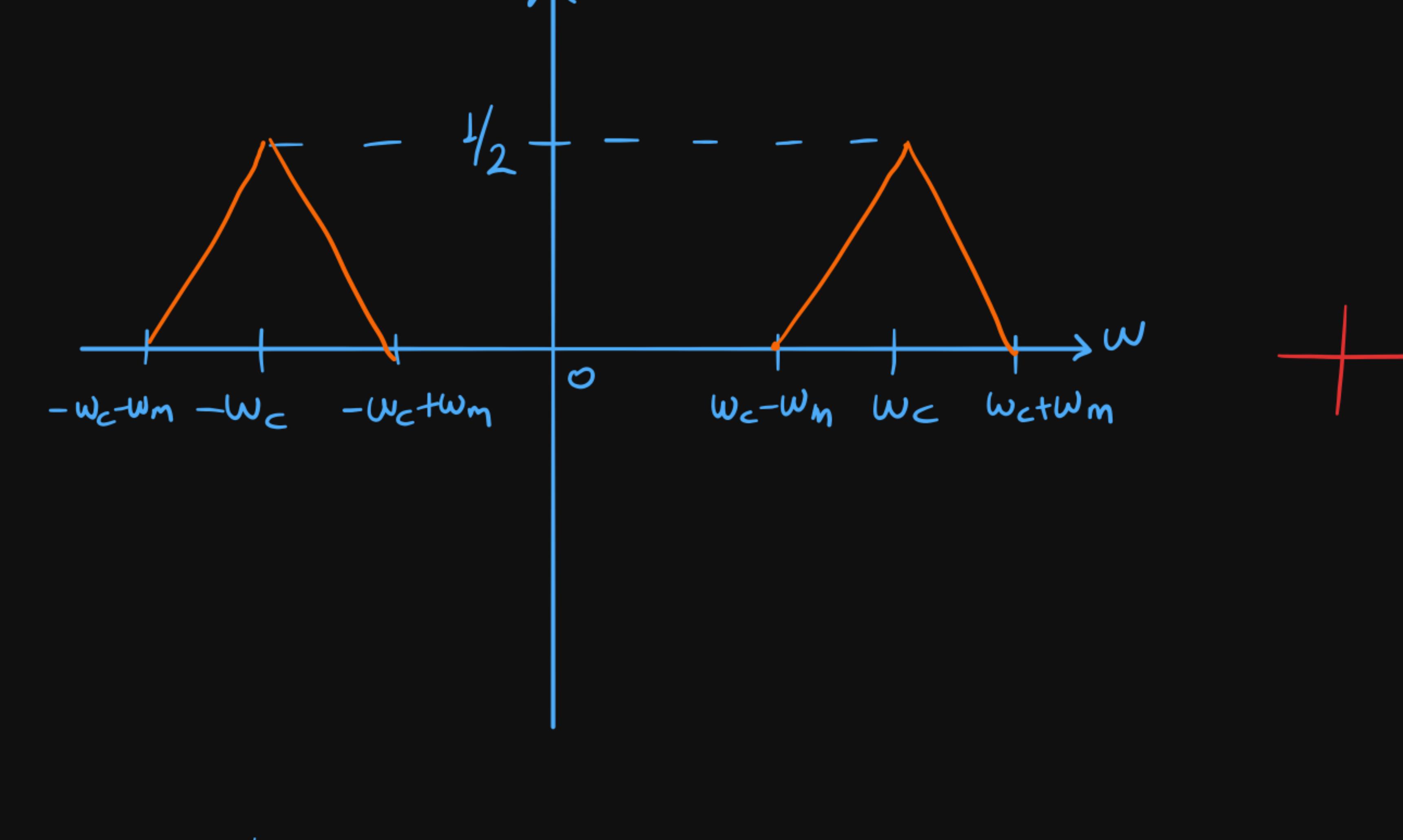


(α)



(β)

Σχήμα 1:



$$= Z(\omega)$$

↓  
τα ιδια 2 σχήματα  
(το  $Z_I$  έχει πραγματικό<sup>αποκοπής</sup> όρο στο  $Z_Q$  έχει<sup>μη γαδί</sup> όρο.)

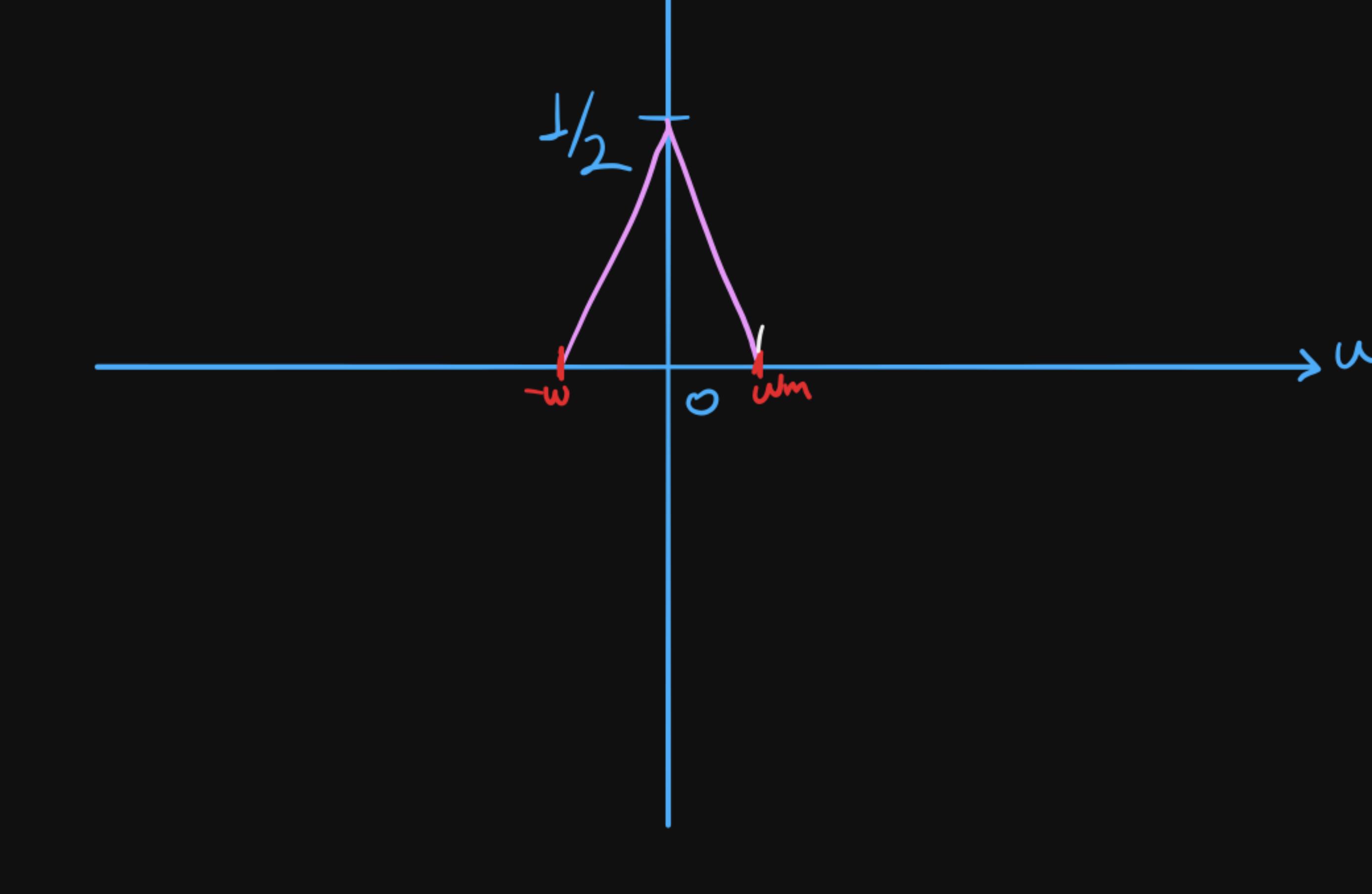
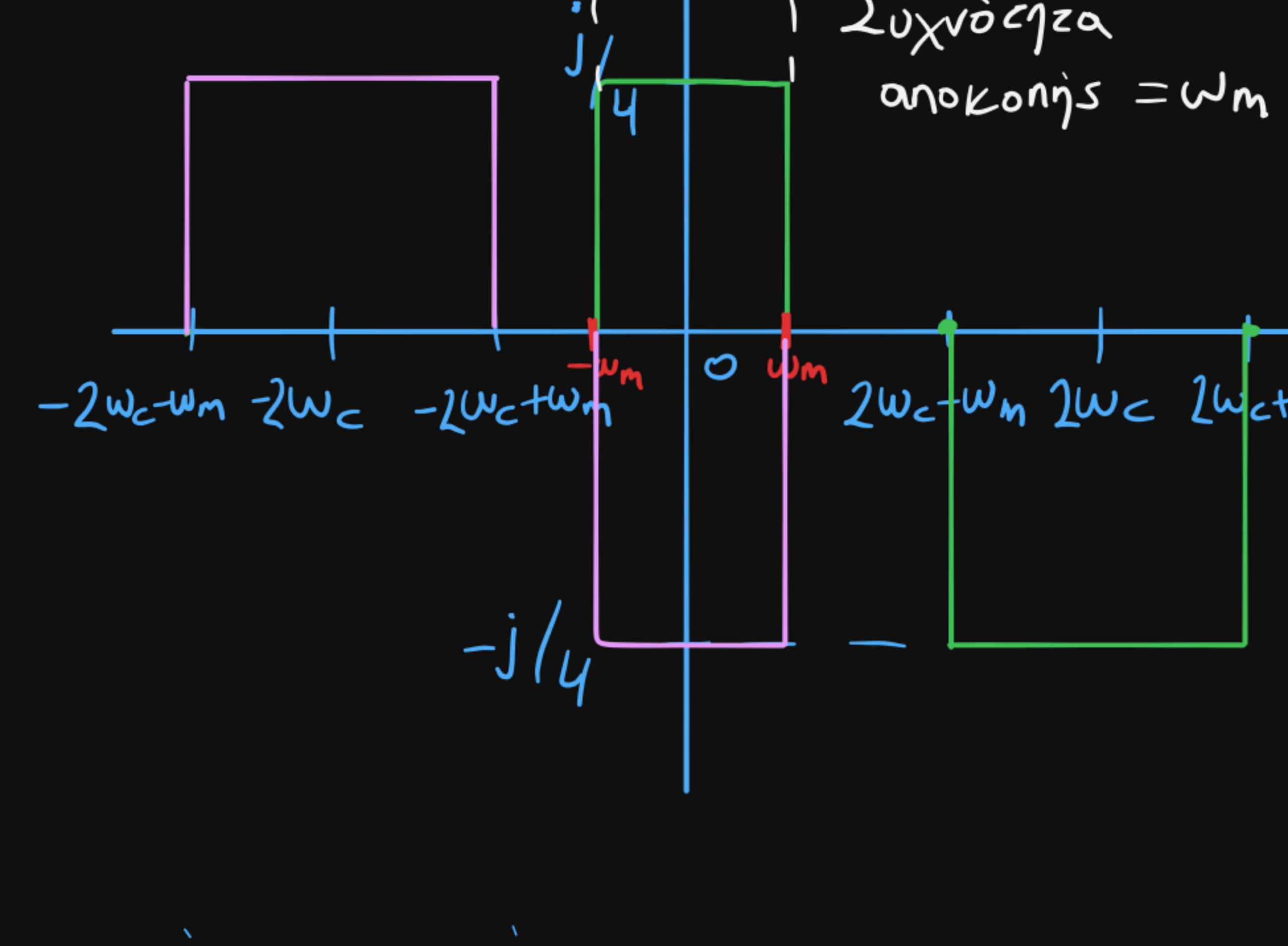
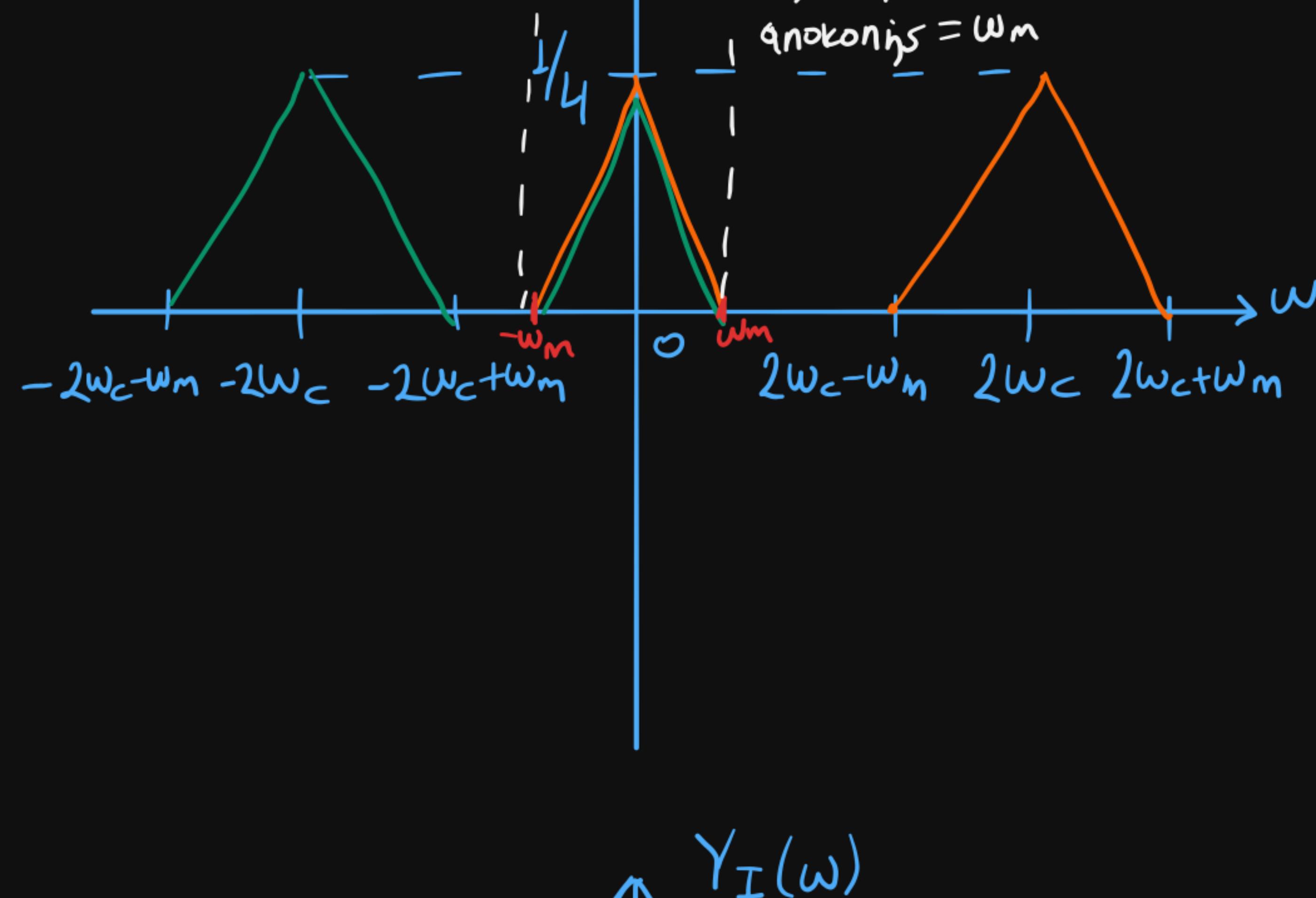
$$\cdot \text{Το } h_c(t) = \delta(t) \text{ δεν επηρεάζει το φάσμα του } Z(\omega) \text{ αφού } \delta(t) \xrightarrow{\text{FT}} \perp$$

$$\text{και } Z(t) * h_c(t) \leftrightarrow Z(\omega) H_c(\omega) = Z(\omega) \cdot \perp = Z(\omega)$$

$$\cdot \text{Ομοίως } \text{με } \eta \text{ πριν } S_I(\omega) = \frac{1}{2} [Z(\omega - \omega_c) + Z(\omega + \omega_c)]$$

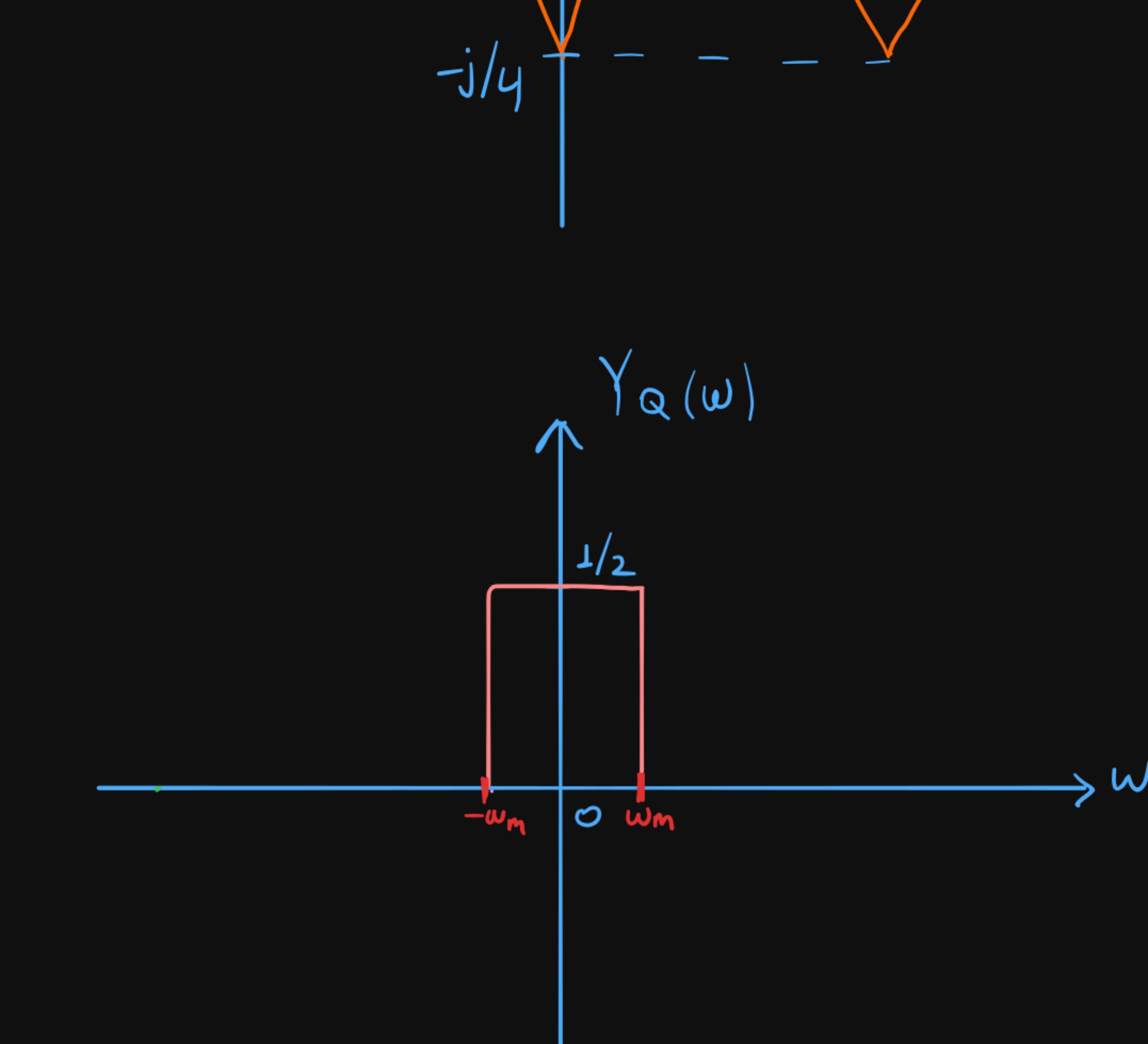
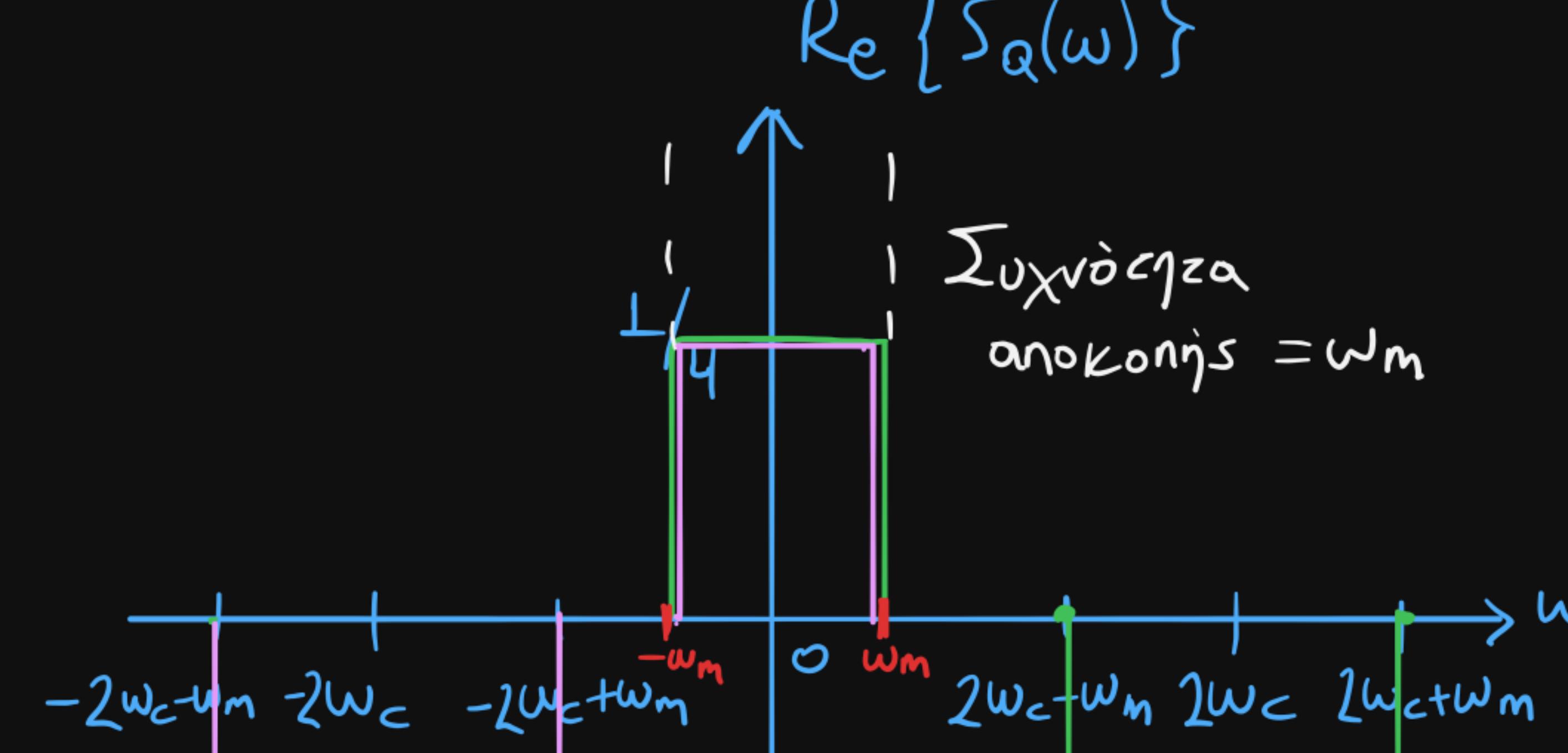
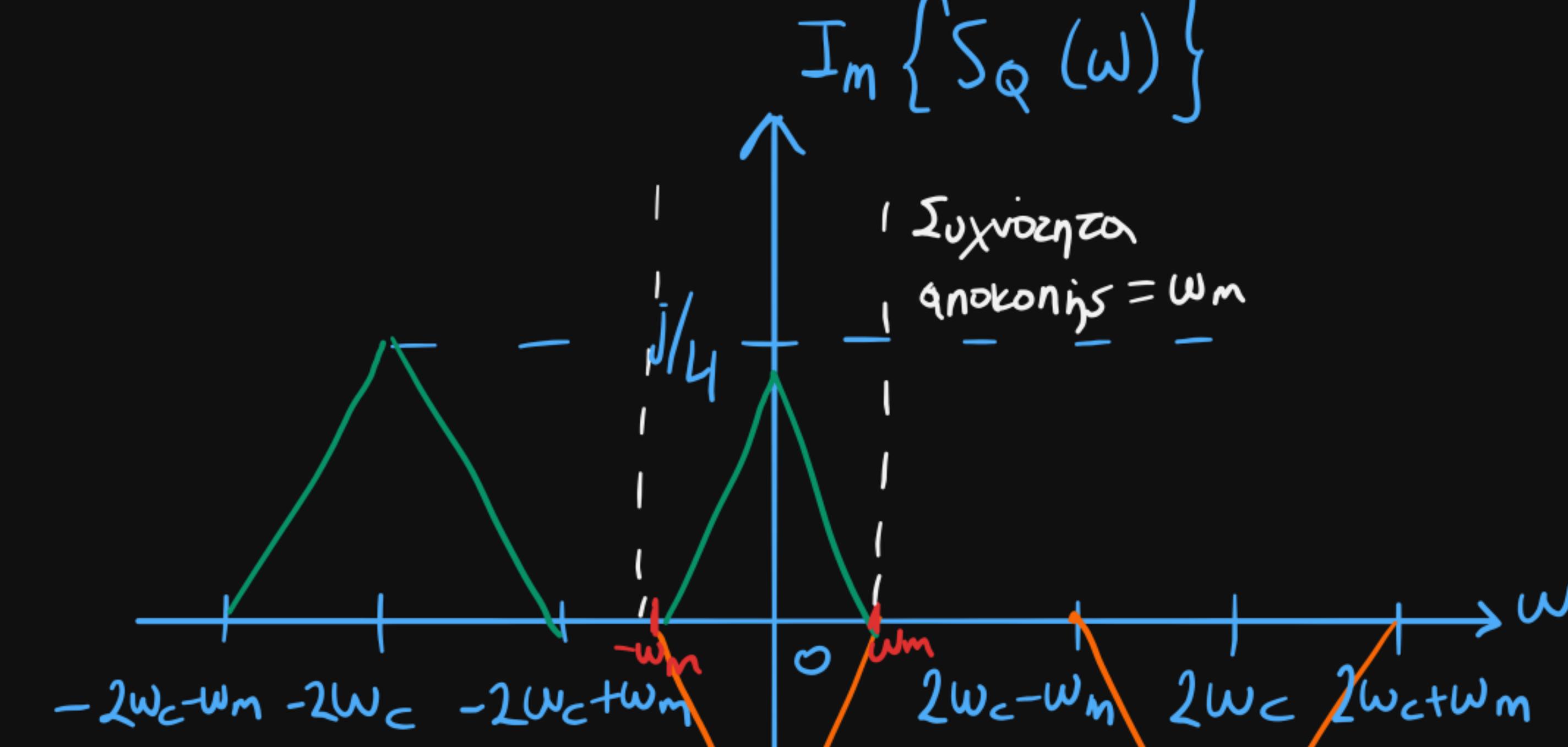
$$\text{και } S_Q(\omega) = -\frac{1}{2} j [Z(\omega - \omega_c) - Z(\omega + \omega_c)]$$

Για το  $S_I(\omega)$



Δεν έχουμε φάσμα στον φαντασικό άξονα (για το  $Y_I(\omega)$ )

Για το  $S_Q(\omega)$



Δεν έχουμε φάσμα στον φαντασικό άξονα (για το  $Y_Q(\omega)$ )

# A' zpōnos (όχι για τις εξετάσεις)

$$\cdot x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 3$$

$\underbrace{\omega_1}_{\omega_1}$        $\underbrace{\omega_2}_{\omega_2}$

$$\cdot T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8s.$$

$$\cdot T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4s.$$

## Iavouapioi 21

Θέμα 1 (4)

Έστω το σήμα  $x(t) = \cos(\frac{\pi}{4}t) + 2\cos(\frac{\pi}{2}t) + 3$ .

- Καθορίστε τη σειρά Fourier και τη θεμελιώδη γωνιακή συχνότητα του σήματος.

(σα υπόδοιπα ερωτήματα τα λύσαμε πριν)

$$\cdot T_1 = 2T_2 \rightarrow \text{Θεμελιώδης περίοδος του } x(t): T_0 = 8s. (\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{4}) \rightarrow \text{Θεμελιώδης γωνιακή συχνότητα}$$

$$\cdot a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{8} \int_{-4}^4 (\cos(\frac{\pi}{4}t) + 2\cos(\frac{\pi}{2}t) + 3) dt = \frac{1}{8} \left( \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\frac{\pi}{4}t) \right]_{-4}^4 + 2 \cdot \frac{2}{\pi} \left[ \sin(\frac{\pi}{2}t) \right]_{-4}^4 + 3[4] \right) \Leftrightarrow a_0 = 3$$

$$\cdot a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 \left[ \underbrace{\cos(\frac{\pi}{4}t) \cos(n\frac{\pi}{4}t)}_{\downarrow} + 2 \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2}t) \cos(n\frac{\pi}{2}t)}_{\downarrow} + \underbrace{3 \cos(n\frac{\pi}{4}t)}_{\downarrow} \right] dt = 0 \text{ για κάθε } n > 0$$

$$\frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}t + n\frac{\pi}{4}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}t - n\frac{\pi}{4}t\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}t(1+n)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}t(1-n)\right) \right]$$

$$\delta_{η λαδή} \int_{-4}^4 \cos(\frac{\pi}{4}t) \cos(n\frac{\pi}{4}t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\frac{n}{4}(1+n)} \sin\left(\frac{\pi}{4}t(1+n)\right) \right]_{-4}^4 + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\frac{n}{4}(1-n)} \sin\left(\frac{\pi}{4}t(1-n)\right) \right]_{-4}^4 = 0$$

$n \neq 1$

$$\cdot \text{Για } n=1: \int_{-4}^4 \cos^2(\frac{\pi}{4}t) dt = \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}t)}{\frac{\pi}{4}} \right]_{-4}^4 = 4$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}t + n\frac{\pi}{4}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t - n\frac{\pi}{4}t\right) \right] \\ = \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}t(n+2)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}t(2-n)\right) \right] \\ \delta_{η λαδή} \int_{-4}^4 \cos(\frac{\pi}{2}t) \cos(n\frac{\pi}{4}t) dt = \\ = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\frac{n}{4}n+2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t(n+2)\right) \right]_{-4}^4 + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\frac{n}{4}(2-n)} \sin\left(\frac{\pi}{4}t(2-n)\right) \right]_{-4}^4 = 0 \\ n \neq 2 \end{array} \right.$$

$$\cdot \text{Για } n=2: \int_{-4}^4 \cos^2(\frac{\pi}{2}t) dt = \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}t)}{\frac{\pi}{2}} \right]_{-4}^4 = 4$$

$$\xrightarrow{\quad} a_1 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

$$\xrightarrow{\quad} a_2 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 4 = 2$$

$$\cdot b_n = 0 \quad \text{διότι } x(-t) = x(t) \quad (\text{x αρια})$$

$$\text{Άρα } x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) \Leftrightarrow \boxed{x(t) = 3 + \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}$$

(ολοιςα η x(t))

# B' zpōnos

$$\cdot x(t) = \cos(\frac{\pi}{4}t) + 2\cos(\frac{\pi}{2}t) + 3 = \underbrace{\cos\left(1 \cdot \frac{\pi}{4}t\right)}_{\alpha_1} + 2\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}t\right) + 3$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$

$n=1 \quad n=2 \quad \alpha_0$

$\left( \begin{array}{l} \text{Θεμελιώδης γωνιακή} \\ \text{συγχρόνια: } \omega_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s} \end{array} \right)$

Άρα έχουμε ήδη πριγωνιμέτριη σειρά Fourier με  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$

και  $a_n = 0$  για  $n > 2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

και  $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (x(t) \text{ αρια})$

# Λύσεις Φεβρουαρίου 2021

- $x(t)$  περιοδικό:  $x(t) = x(t + T_{0x}) \quad (\perp)$
- $y(t)$  είναι περιοδικό αν. v.

Θέμα 2 (2)

Έστω περιοδικό σήμα  $x(t)$  με θεμελιώδη περίοδο  $T_{0x}$ . Αν  $y(t) = x(t + T_{0x}/2)$  να αποδειχθεί ότι η θεμελιώδης περίοδός του,  $T_{0y}$ , ισούται με  $T_{0x}$ . Εξετάστε αν το σήμα  $z(t) = x(t) + y(t)$  είναι περιοδικό και αν η θεμελιώδης περίοδός του,  $T_{0z}$ , είναι ίση με  $T_{0x}$ .

$$y(t + T_{0y}) = y(t) \Leftrightarrow x(t + \frac{T_{0x}}{2} + T_{0y}) = x(t + \frac{T_{0x}}{2}) \xrightleftharpoons[\text{(1)}]{\begin{matrix} \text{Θέσω } t + \frac{T_{0x}}{2} = u \\ \text{Λόγω } \tau \end{matrix}} x(u + T_{0y}) = x(u) \xrightleftharpoons[\text{(1)}]{\begin{matrix} \text{Λόγω } \tau \\ T_{0y} = T_{0x} \end{matrix}}$$

$$\bullet z(t + T_{0x}) = x(t + T_{0x}) + y(t + T_{0x}) = x(t) + y(t) \Leftrightarrow z(t + T_{0x}) = z(t)$$

Ζ περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο  $T_{0x}$

• Ενέργεια  $E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} u^2(t-1) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow E = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \left[ \ln t \right]_1^k \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\ln k - \ln 1) = +\infty$$

(δεν είναι σήμα ενέργειας) → Πρέπει  $0 < E < +\infty$

• Ισχύς  $P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \right] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{t} u^2(t-1) dt \right] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_1^T \frac{1}{t} dt \right] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2T} \cdot \ln T \right]$

$\frac{+\infty}{+\infty}$   $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{T}}{2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} = 0$  (δεν είναι σήμα ισχύος) → Πρέπει  $0 < P < +\infty$

DLH

Θέμα 3 (2)  
Έστω το σήμα

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} u(t-1).$$

Να βρεθεί η ενέργεια και η ισχύς του. Να εξετάσετε αν το  $x(t)$  είναι σήμα ενέργειας ή ισχύος.

Δεν ξέρω χρονιά

Θέμα 3 (2)

Ένα γραμμικό και αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$0.5y[n] + y[n+1] = x[n+1] - 0.5x[n], \quad n \geq -1.$$

Να βρεθεί η χρονιστική απόκριση του συστήματος. Ποια θα είναι η έξοδος στη μόνιμη κατάσταση,  $y[n]$ , αν η είσοδος είναι  $x[n] = \cos(n\pi/3)u[n]$  και οι αρχικές συνθήκες μηδενικές;

οπού  $\circ M/S \geq$  είναι

$$\begin{array}{c} k \geq 0 \\ \text{aizazò} \end{array}$$

$$0.5Y(z) \cdot z^{-1} + Y(z) = X(z) - 0.5X(z)z^{-1} \Leftrightarrow Y(z) \left( \frac{0.5}{z} + 1 \right) = X(z) \left( 1 - \frac{0.5}{z} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1 - \frac{0.5}{z}}{\frac{0.5}{z} + 1} = \frac{z - 0.5}{0.5 + z} \Leftrightarrow H(z) = \frac{z}{z + 0.5} - 0.5z^{-1} \frac{z}{z + 0.5}$$

Άρα 
$$h(n) = (-0.5)^n u(n) - 0.5(-0.5)^{n-1} u(n-1)$$

• Έχουμε ημιτονοειδή είσοδο  $x(n) = \cos(n\frac{\pi}{3})u(n)$ , οπού η έξοδος είναι ίση με

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \varphi + \Theta) = |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \Theta)$$

$\downarrow$   
αρχική φάση = 0

$$H(e^{j\omega_0}) = \frac{e^{j\omega_0} - 0.5}{e^{j\omega_0} + 0.5} = \frac{e^{j\frac{\pi}{3}} - 0.5}{e^{j\frac{\pi}{3}} + 0.5} = \frac{\cos(\frac{\pi}{3}) + j\sin(\frac{\pi}{3}) - 0.5}{\cos(\frac{\pi}{3}) + j\sin(\frac{\pi}{3}) + 0.5} = \frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.5}{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.5}$$

$$\Leftrightarrow H(e^{j\omega_0}) = \frac{j\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{j\sqrt{3}}{2 + j\sqrt{3}} = \dots = \frac{3}{7} + \frac{2\sqrt{3}}{7} j$$

Οπού  $|H(e^{j\omega_0})| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{7}\right)^2} = \dots = \frac{\sqrt{21}}{7}$

• Και  $\Theta = \angle H(e^{j\omega_0}) = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 49,10^\circ$

Άρα 
$$y(n) = \frac{\sqrt{21}}{7} \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 49,10^\circ\right)$$