Λύσεις Σεπτ. 23

Θέμα 1ο (20)

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ) και να δικαιολογήσετε σύντομα τις απαντήσεις σας.

α-10) Ημιτονοειδές σήμα πληροφορίας μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 80KHz διαμορφώνεται με φέρον 560MHz. Σύμφωνα με το ακολουθούμενο πρότυπο, το διατιθέμενο εύρος ζώνης καναλιού γύρω από τη συχνότητα φέροντος είναι 200 KHz. Η επιλογή DSB-AM διαμόρφωσης θα προτιμηθεί από διαμόρφωση FM με ευαισθησία συχνότητας 30 KHz/V.

β-10) Αν το σήμα πληροφορίας $m(t) = 0.5\cos(2\pi t) + 0.2\cos(2\pi t - \pi)$ διαμορφωθεί κατά AM από φέρον μοναδιαίου πλάτους, τότε ο δείκτης διαμόρφωσης θα είναι $\mu = 0.7$.

α). • Για το FM:

• $\beta = \dfrac{K_f \cdot \max|m(t)|}{f_m} = \dfrac{30 \cdot 1}{80} = \dfrac{3}{8}$

• $B = 2 f_m(\beta+1) = 2 \cdot 80 \cdot \left(\frac{3}{8}+1\right) = 220\,kHz > 200$

• Για το AM:

$B = 2 \cdot 80 = 160\,kHz < 200\,kHz$

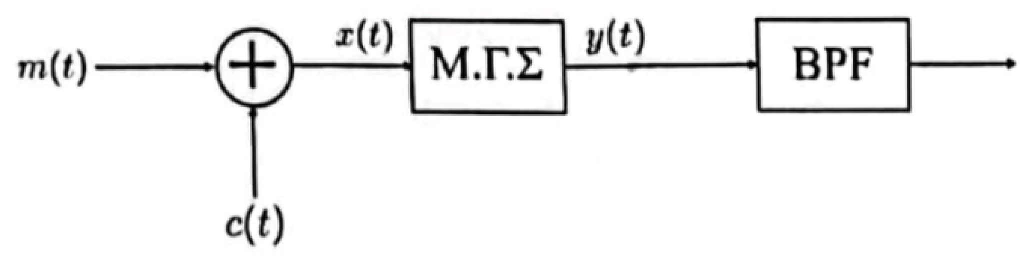
Άρα σωστό

β) • $m(t) = 0{,}5\cos(2\pi t) + 0{,}2\cos(2\pi t - \pi) = 0{,}5\cos(2\pi t) - 0{,}2\cos(2\pi t) \Leftrightarrow m(t) = 0{,}3\cos(2\pi t)$

Άρα $\mu = \dfrac{|\min(m(t))|}{A_c} = \dfrac{0{,}3}{1} \Leftrightarrow \mu = 0{,}3$ Άρα λάθος

Θέμα 2ο (25)

Το σήμα πληροφορίας $m(t) = 2W\text{sinc}(2Wt)$ διαμορφώνεται κατά AM-DSB-TC με τη βοήθεια της διάταξης του Σχήματος 1, όπου Μ.Γ.Σ. είναι ένα μη γραμμικό στοιχείο, του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση εξόδου-εισόδου δίνεται από τη σχέση $y(t) = x^2(t) + x(t)$. Το φέρον δίνεται ως $c(t) = \cos(2\pi f_c t)$ και ισχύει $2W < f_c < 3W$.



Σχήμα 1: Διάταξη διαμορφωτή.

α-15) Να υπολογισθεί αναλυτικά και να σχεδιασθεί το φάσμα $Y(f)$, στην έξοδο του Μ.Γ.Σ. Αιτιολογήστε αν θα είναι επιτυχής η διαμόρφωση για οποιοδήποτε ζωνοπερατό φίλτρο (BPF) της επιλογής σας.

β-10) Επιλέγεται $f_c = 2.5W$. Η απόκριση συχνότητας του BPF δίνεται ως

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_c - W \leq |f| \leq f_c + W \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Να υπολογισθεί η ενέργεια του τμήματος του φάσματος του όρου $m^2(t)$ που προκύπτει κατά τη διαμόρφωση, που παρεμβάλλει το (επικαλύπτεται με το) φάσμα του ιδανικά διαμορφωμένου AM-DSB-TC σήματος.

α). $x(t) = m(t) + c(t) = 2W\,\text{sinc}(2Wt) + \cos(2\pi f_c t)$

• $y(t) = x^2(t) + x(t) = 4W^2\,\text{sinc}^2(2Wt) + 4W\,\text{sinc}(2Wt)\cos(2\pi f_c t)$

$+ \cos^2(2\pi f_c t) + 2W\,\text{sinc}(2Wt) + \cos(2\pi f_c t)$

$= 4W^2\,\text{sinc}^2(2Wt) + 4W\,\text{sinc}(2Wt)\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2}$

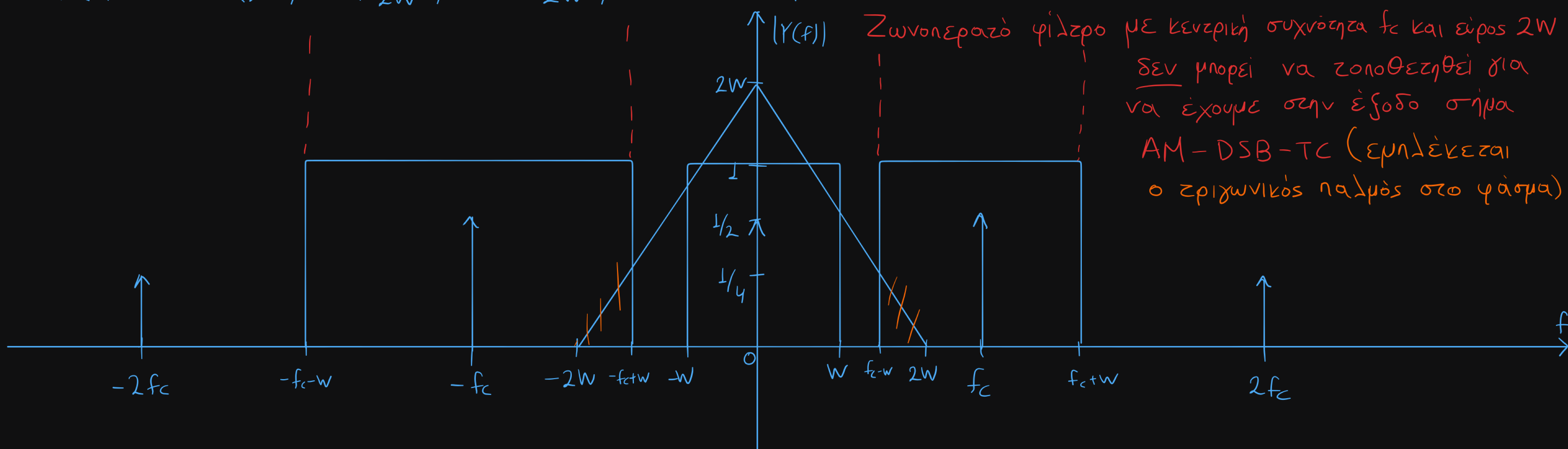
$+ \frac{1}{2}\cos(4\pi f_c t) + 2W\,\text{sinc}(2Wt) + \cos(2\pi f_c t)$

• $Y(f) = \frac{4W^2}{2W}\Lambda\left(\frac{f}{2W}\right) + \frac{4W}{2W\cdot 2}\Pi\left(\frac{f-f_c}{2W}\right) + \frac{4W}{2W\cdot 2}\Pi\left(\frac{f+f_c}{2W}\right)$

$+ \frac{1}{2}\delta(\omega) + \frac{1}{4}\delta(f-2f_c) + \frac{1}{4}\delta(f+2f_c) + \frac{2W}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$

$+ \frac{1}{2}\delta(f-f_c) + \frac{1}{2}\delta(f+f_c)$

$\Leftrightarrow Y(f) = 2W\cdot\Lambda\left(\frac{f}{2W}\right) + \Pi\left(\frac{f-f_c}{2W}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_c}{2W}\right) + \pi\delta(\omega) + \frac{1}{4}\delta(f-2f_c) + \frac{1}{4}\delta(f+2f_c) + \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) + \frac{1}{2}\delta(f-f_c) + \frac{1}{2}\delta(f+f_c)$



Ζωνοπερατό φίλτρο με κεντρική συχνότητα fc και εύρος 2W δεν μπορεί να τοποθετηθεί για να έχουμε στην έξοδο σήμα AM − DSB − TC (εμπλέκεται ο τριγωνικός παλμός στο φάσμα)

β) Στην έξοδο θα έχουμε το ιδανικά διαμορφωμένο σήμα και τον τριγωνικό παλμό $2W\cdot\Lambda\left(\frac{f}{2W}\right)$ για $1{,}5W \leq |f| \leq 2W$

$\Pi\left(\frac{f \pm f_c}{2W}\right) + \frac{1}{2}\delta(f \pm f_c)$

• Το $2W\cdot\Lambda\left(\frac{f}{2W}\right)$ γράφεται και $2W - |f|$, οπότε $P = \int_{-2W}^{-1,5W}(2W+f)^2\,df + \int_{1,5W}^{2W}(2W-f)^2\,df = 2\cdot\int_{1,5W}^{2W}(2W-f)^2\,df$ (λόγω συμμετρίας)

$\Leftrightarrow P = 2\int_{1,5W}^{2W}(4W^2 - 4Wf + f^2)\,df = 2\cdot 4W^2\left[f\right]_{1,5W}^{2W} - 2\cdot 4W\cdot\left[\frac{f^2}{2}\right]_{1,5W}^{2W} + 2\cdot\left[\frac{f^3}{3}\right]_{1,5W}^{2W} = 8W^2\cdot 0{,}5W - \frac{8W}{2}\cdot 1{,}75W^2 + \frac{2}{3}\cdot 4{,}625W^3$

$\Leftrightarrow P = 4W^3 - 7W^3 + 3{,}083W^3 \Leftrightarrow \boxed{P = 0{,}083W^3}$ (Watt)

Θέμα 3ο (20)

Δίνεται το σήμα πληροφορίας $m(t) = a\cos(2\pi f_m t)$.

α-10) Το σήμα $m(t)$ διαμορφώνεται κατά PM από φέρον συχνότητας f_c. Η διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης στιγμιαίας συχνότητας είναι ίση με 600KHz. Βρείτε το ενεργό εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος, δεδομένου ότι για τον δείκτη διαμόρφωσης ισχύει $\beta_p \gg 1$.

β-10) Το σήμα $m(t)$, με $f_m = 2$KHz, διαμορφώνεται κατά FM από φέρον συχνότητας f_c και ευαισθησία συχνότητας ίση με 12 KHz/V. Η ισχύς του σήματος $m(t)$ ικανοποιεί την συνθήκη $2\text{W} \le P_m \le 8\text{W}$. Να προσδιορισθεί το σύνολο τιμών του ενεργού εύρους ζώνης του διαμορφωμένου σήματος.

α). $f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d(K_p m(t))}{dt}$

$= f_c + \frac{K_p}{2\pi} 2\pi f_m a(-\sin(2\pi f_m t))$

$\Leftrightarrow f_i(t) = f_c - \underbrace{K_p \cdot a}_{\beta} \cdot f_m \cdot \sin(2\pi f_m t)$

$\Leftrightarrow f_i(t) = f_c - \beta f_m \sin(2\pi f_m t)$

• Για $\sin(2\pi f_m t) = 1$ έχουμε $f_{i\,min} = f_c - \beta f_m$

• Για $\sin(2\pi f_m t) = -1$ έχουμε $f_{i\,max} = f_c + \beta f_m$

$\Big\}\ f_{i\,max} - f_{i\,min} = 600 \Leftrightarrow 2\beta f_m = 600 \Leftrightarrow \underline{\beta = \frac{300}{f_m}}$

Άρα $B = 2f_m(\beta+1) \overset{\beta \gg 1}{=\!=} 2 f_m \beta = 2f_m \cdot \frac{300}{f_m} \Leftrightarrow \boxed{B = 600\ kHz}$

β) • $P_m = \frac{1}{T}\int_0^T |m(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T a^2\cos^2(2\pi f_m t)\,dt = \frac{a^2}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(4\pi f_m t)}{2}dt = \frac{a^2}{2T}[t]_0^T + \frac{a^2}{2T}\cdot\frac{1}{4\pi f_m}[\sin(4\pi f_m t)]_0^T$

$\Leftrightarrow P_m = \frac{a^2 T}{2T} + \frac{a^2}{8T\pi f_m}\sin\left(4\pi f_m \frac{1}{f_m}\right) = \frac{a^2}{2} + 0 \Leftrightarrow P_m = \frac{a^2}{2}$ Άρα $2 \le P_m \le 8 \Leftrightarrow 2 \le \frac{a^2}{2} \le 8 \Leftrightarrow 4 \le a^2 \le 16$

$\Leftrightarrow \underline{2 \le |a| \le 4}$

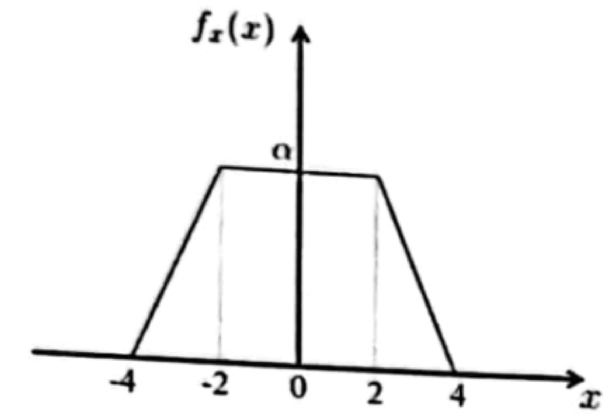
• $\beta = \frac{K_f \cdot \max|m(t)|}{f_m} = \frac{12|a|}{2} \Leftrightarrow \beta = 6|a|$

• $B = 2f_m(\beta+1) = 2f_m(6|a|+1) \Leftrightarrow \frac{B}{2f_m} = 6|a|+1 \Leftrightarrow |a| = \frac{B}{12 f_m} - \frac{1}{6} = \frac{B}{24} - \frac{1}{6} = \frac{B-4}{24} \Leftrightarrow |a| = \frac{B-4}{24}$

• Έχουμε $2 \le |a| \le 4 \Leftrightarrow 2 \le \frac{B-4}{24} \le 4 \Leftrightarrow 48 \le B-4 \le 96 \Leftrightarrow \boxed{52\,kHz \le B \le 100\,kHz}$

Θέμα 4ο (35)

Ένα σήμα πληροφορίας $x(t)$ μοντελοποιείται σαν δείγμα μιας τυχαίας διαδικασίας με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται στο Σχήμα 2. Το σήμα εισάγεται σε ομοιόμορφο κβαντιστή τύπου mid-rise, ο οποίος καλύπτει όλο το εύρος τιμών του σήματος. Η έξοδος του κβαντιστή είναι κωδικολέξη αποτελούμενη από $R = 2$ bits. Θεωρείται ότι το σφάλμα κβάντισης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα $\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$, όπου Δ είναι το βήμα κβάντισης.



Σχήμα 2: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_x(x)$.

α-10) Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α.

β-10) Να υπολογισθεί η σηματοθορυβική σχέση κβάντισης.

γ-7) Να βρεθεί η πιθανότητα κάποιο λαμβανόμενο δείγμα να πέσει σε ένα από τα δύο εξωτερικά επίπεδα κβάντισης.

δ-8) Το κανάλι μετάδοσης έχει χωρητικότητα 21Mbps και η συχνότητα δειγματοληψίας ισούται με $4 \cdot 10^6$ samples/sec. Χρησιμοποιείται ένας νέος κβαντιστής με κωδικολέξη αποτελούμενη από R' bits, ώστε να αξιοποιείται πλήρως το κανάλι μετάδοσης. Υπολογίστε την αύξηση της σηματοθορυβικής σχέσης κβάντισης σε dB, που προκύπτει από τη χρήση του νέου κβαντιστή σε σχέση με τον κβαντιστή της εκφώνησης.

α) Έχουμε $f_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{2}(x+4), & -4 \le x \le -2 \\ a, & -2 \le x \le 2 \\ -\frac{a}{2}(x-4), & 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Οπότε $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \underbrace{2\cdot}_{\text{λόγω συμμετρίας}}\int_{2}^{4} -\frac{a}{2}(x-4)\,dx + \int_{-2}^{2} a\,dx = 1$

$\Leftrightarrow -a\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 + 4a\left[x\right]_2^4 + a\left[x\right]_{-2}^{2} = 1$

$\Leftrightarrow -\frac{a}{2}(16-4) + 4a(4-2) + a(2+2) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6a + 8a + 4a = 1 \Leftrightarrow 6a = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{6}}$

β) • $\Delta = \dfrac{V_{pp}}{2^R} = \dfrac{4-(-4)}{2^2} = \dfrac{8}{4} \Leftrightarrow \underline{\Delta = 2}$

• $\mu_X = 0$ (υπολογίζεται από $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$, βγαίνει και απευθείας επειδή η $f_X(x)$ είναι άρτια)

Οπότε $\sigma_X^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = 2\cdot\int_2^4 x^2\left(-\frac{a}{2}(x-4)\right)dx + \int_{-2}^{2} x^2 a\,dx = -a\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^4 + 4a\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 + a\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$

$\Leftrightarrow \sigma_X^2 = -\frac{a}{4}(256-16) + \frac{4a}{3}(64-8) + \frac{a}{3}(8+8) = -10 + \frac{112}{9} + \frac{8}{9} \Leftrightarrow \underline{\sigma_X^2 = \frac{10}{3}}$

Άρα $(SNR)_{o,q} = \dfrac{12\sigma_X^2}{\Delta^2} = \dfrac{12\cdot\frac{10}{3}}{4} = 3\cdot\dfrac{10}{3} \Leftrightarrow \boxed{(SNR)_{o,q} = 10}$ ή $10\log(10) \boxed{= 1dB}$

γ) • Έχουμε $2^R = 4$ επίπεδα κβάντισης με τιμές $\pm\frac{\Delta}{2}$, $\pm\frac{3\Delta}{2}$ δηλαδή ± 1 και ± 3

• Τα εξωτερικά επίπεδα κβάντισης είναι τα ± 3, για να πέσει κάποιο δείγμα σε ένα από αυτά πρέπει να πάρει τιμή στο σύνολο $\left[-3-\frac{\Delta}{2}, -3+\frac{\Delta}{2}\right] \cup \left[3-\frac{\Delta}{2}, 3+\frac{\Delta}{2}\right] = \underline{[-4,-2] \cup [2,4]} = A$

Οπότε $\Pr(X \in A) = \displaystyle\int_{-4}^{-2} f_X(x)\,dx + \int_2^4 f_X(x)\,dx = 2\cdot\int_2^4 f_X(x)\,dx = 2\int_2^4 -\frac{a}{2}(x-4)\,dx = \ldots = 2a = \frac{2}{6} \Leftrightarrow \boxed{\Pr(X \in A) = \frac{1}{3}}$

δ) • Έχουμε $R' \cdot f_s = C \Leftrightarrow R' \cdot 4 \cdot 10^6 = 21 \cdot 10^6 \Leftrightarrow R' = \frac{21}{4} = 5{,}25 \xrightarrow[\text{ακέραιος}]{R'} \underline{R' = 5}$

• $(SNR)_{o,q}' = \dfrac{12\sigma_X^2}{\Delta'^2} = \dfrac{12\cdot\frac{10}{3}}{\left(\frac{V_{pp}}{2^{R'}}\right)^2} = \dfrac{4\cdot 10}{\left(\frac{8}{32}\right)^2} = \dfrac{40}{\frac{1}{16}} = 16\cdot 40 \Leftrightarrow \underline{(SNR)_{o,q}' = 640}$

Άρα $10\log\dfrac{(SNR)_{o,q}'}{(SNR)_{o,q}} = 10\log\dfrac{640}{10} = 10\log 64 \boxed{= 18{,}06\ dB}$ αύξηση

Λύσεις Ιαν. 2023

Θέμα 1ο(15)

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) και να **δικαιολογήσετε σύντομα** τις απαντήσεις σας.

α-5) Ένα σήμα διαμορφωμένο κατά AM-DSB-SC εισάγεται σε έναν σύμφωνο αποδιαμορφωτή. Αν το φέρον του τοπικού ταλαντωτή του σύμφωνου αποδιαμορφωτή παρουσιάζει απόκλιση φάσης ίση με $\phi = 45^o$, σε σχέση με το φέρον της διαμόρφωσης, η ισχύς στην έξοδο του αποδιαμορφωτή είναι υποβαθμισμένη κατά 5 dB σε σχέση με την ιδανική περίπτωση.

β-5) Για ένα AM-DSB-TC διαμορφωμένο σήμα με την συνθήκη $A_c < |m(t)|, \forall t$, ο ανιχνευτής περιβάλουσας είναι ο απλούστερος τρόπος αποδιαμόρφωσης.

γ-5) Έστω ότι το σήμα πληροφορίας $m(t)$ που προκύπτει από την άθροιση δύο σημάτων $m_1(t)$ και $m_2(t)$, βρίσκεται στην είσοδο ενός FM διαμορφωτή. Η έξοδος του διαμορφωτή είναι ίση με

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

όπου $s_1(t)$ και $s_2(t)$ είναι οι έξοδοι του διαμορφωτή όταν οι είσοδοι είναι $m_1(t)$ και $m_2(t)$, αντίστοιχα.

α) • Στην έξοδο έχουμε:

$$y_1(t) = \underbrace{A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)}_{\text{AM-DSB-SC}} \cdot \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} A_c m(t) \cdot \left[\cos\left(4\pi f_c t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} A_c m(t) \left[\cos\left(4\pi f_c t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1(t) = \underbrace{\frac{1}{2} A_c m(t) \cos\left(4\pi f_c t + \frac{\pi}{4}\right)}_{(1)} + \frac{\sqrt{2}}{4} A_c m(t) \xrightarrow[\text{φεύγει ο όρος (1)}]{\text{LPF}} y_1'(t) = \frac{\sqrt{2}}{4} A_c m(t)$$

• Στην ιδανική περίπτωση έχουμε: $y_2(t) = A_c m(t) \cos^2(2\pi f_c t) = \frac{1}{2} A_c m(t) \cdot (1 + \cos(4\pi f_c t)) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y_2(t) = \frac{1}{2} A_c m(t) + \underbrace{\frac{1}{2} A_c m(t) \cdot \cos(4\pi f_c t)}_{(2)} \xrightarrow[\text{φεύγει ο όρος (2)}]{\text{LPF}} y_2'(t) = \frac{1}{2} A_c m(t)$$

Άρα $P_1 = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |y_1'(t)|^2 dt = \frac{2}{16} A_c^2 \underbrace{\lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |m(t)|^2 dt}_{P_m} = \frac{1}{8} A_c^2 \cdot P_m$

και $P_2 = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |y_2'(t)|^2 dt = \frac{1}{4} A_c^2 P_m$

Οπότε $10 \log \frac{P_1}{P_2} = 10 \log \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = 10 \log \frac{1}{2} \boxed{= -3\,dB}$ (Λ)

β) Λ, διότι θα έχουμε υπερδιαμόρφωση ($\mu > 1$)

γ) Λ, η διαμόρφωση FM δεν είναι γραμμική διαδικασία (δεν ισχύει η αρχή της υπέρθεσης)

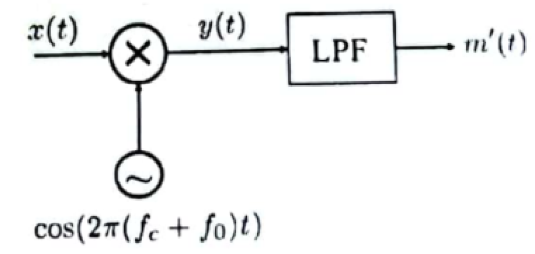
Θέμα 2ο (25)

Δίνεται το διαμορφωμένο κατά AM-DSB-SC σήμα

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t),$$

όπου $m(t) = \mathrm{sinc}(2Wt)$ είναι το μήνυμα πληροφορίας και f_c η συχνότητα φέροντος, με $f_c \gg W$. Για την αποδι[αμόρφωση] του $x(t)$, έχετε στη διάθεση σας τη διάταξη του Σχήματος 1. Για τη συχνότητα f_0, ισχύει $f_0 \in (0, W)$. Η απόκριση συχνότητας του χαμηλοπερατού φίλτρου (LPF) δίνεται ως

$$H(f) = \begin{cases} 2, & |f| \le W \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$



Σχήμα 1: Διάταξη αποδιαμορφωτή

α-15) Υπολογίστε αναλυτικά και σχεδιάστε το φάσμα $Y(f)$. Είναι δυνατή η ανάκτηση του $m(t)$ στην έξοδο του αποδιαμορφωτή;

β-10) Θεωρήστε το σήμα $z(t) = m(t) - m'(t)$, όπου $m'(t)$ το σήμα στην έξοδο του αποδιαμορφωτή. Η ενέργεια του σήματος $z(t)$ ισούται με $\frac{1}{16W}$ (Joule). Υπολογίστε τη συχνότητα f_0.

α) $y(t) = x(t)\cdot\cos(2\pi(f_c+f_0)t)$, άρα

$$Y(f) = X(f) * \frac{1}{2}\left[\delta(f+f_c+f_0) + \delta(f-f_c-f_0)\right]$$

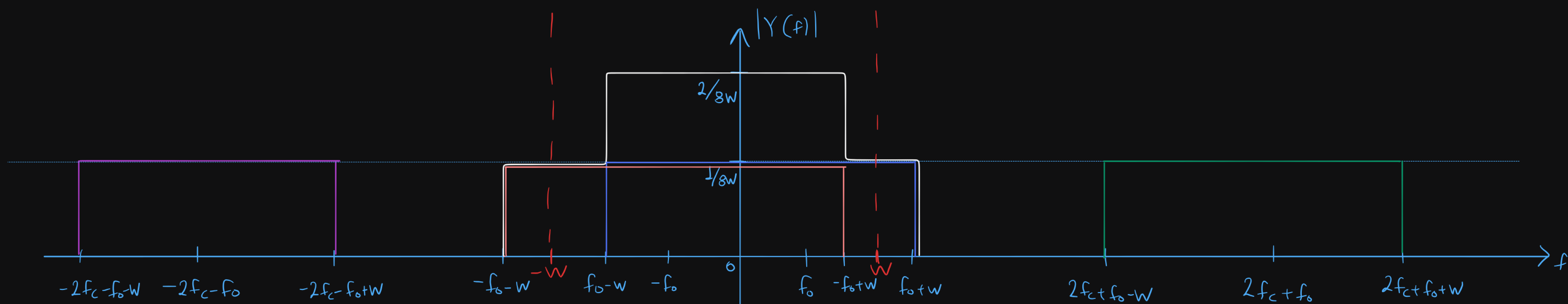
$$= \frac{1}{2}X(f+f_c+f_0) + \frac{1}{2}X(f-f_c-f_0)$$

όπου $X(f) = M(f) * \frac{1}{2}\left[\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)\right]$

$$= \frac{1}{2}M(f+f_c) + \frac{1}{2}M(f-f_c)$$

$$M(f) = \frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right) \Longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{4W}\Pi\left(\frac{f+f_c}{2W}\right) + \frac{1}{4W}\Pi\left(\frac{f-f_c}{2W}\right)$$

οπότε $Y(f) = \frac{1}{8W}\Pi\left(\frac{f+2f_c+f_0}{2W}\right) + \frac{1}{8W}\Pi\left(\frac{f+f_0}{2W}\right) + \frac{1}{8W}\Pi\left(\frac{f-f_0}{2W}\right) + \frac{1}{8W}\Pi\left(\frac{f-2f_c-f_0}{2W}\right)$



Δεν είναι δυνατή η ανάκτηση του $m(t)$
(ανάμεσα στις συχνότητες $-W$ έως W δεν έχουμε σταθερή τιμή, δεν έχουμε δηλ. $\mathrm{rect}\left(\frac{1}{2W}\right)$)

β). Έχουμε $M'(f) = \frac{1}{4W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right) + \frac{1}{4W}\Pi\left(\frac{f}{-2f_0+2W}\right)$

οπότε $Z(f) = M(f) - M'(f) = \frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right) - \frac{1}{4W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right) - \frac{1}{4W}\Pi\left(\frac{f}{2W-2f_0}\right) = \frac{1}{4W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right) - \frac{1}{4W}\Pi\left(\frac{f}{2W-2f_0}\right)$

Άρα $E = \int_{-\infty}^{+\infty}|Z(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{16W^2}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right) - 2\cdot\frac{1}{4W}\frac{1}{4W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)\cdot\Pi\left(\frac{f}{2W-2f_0}\right) + \frac{1}{16W^2}\Pi\left(\frac{f}{2W-2f_0}\right)\, df =$

$$= \int_{-W}^{W}\frac{1}{16W^2}df - \int_{f_0-W}^{-f_0+W}\frac{1}{8W^2}df + \int_{f_0-W}^{-f_0+W}\frac{1}{16W^2}df = \frac{1}{16W^2}\left[f\right]_{-W}^{W} - \frac{1}{16W^2}\left[f\right]_{f_0-W}^{-f_0+W} = \frac{2W}{16W^2} - \frac{-2f_0+2W}{16W^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{8W} + \frac{f_0-W}{8W^2} = \frac{1}{16W} \Longleftrightarrow \frac{f_0-W}{8W^2} = -\frac{1}{16W} \Longleftrightarrow \frac{f_0-W}{W} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2f_0+2W = W \Leftrightarrow \boxed{f_0 = \frac{W}{2}}$$

Θέμα 3ο (30)

Δίνεται το σήμα πληροφορίας $m(t) = \cos(2\pi 10^5 t)$. Το σήμα $m(t)$ διαμορφώνεται κατά FM από φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 88MHz.

α-10) Για το διαμορφωμένο σήμα γνωρίζουμε ότι η συνιστώσα που βρίσκεται στη συχνότητα φέροντος έχει μηδενική ισχύ, ενώ όλες οι συνιστώσες εκ των δεξιών αυτής, έχουν θετικό πλάτος. Προσδιορίστε το δείκτη διαμόρφωσης, το ενεργό εύρος ζώνης και σχεδιάστε το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος εντός του ενεργού εύρους ζώνης.

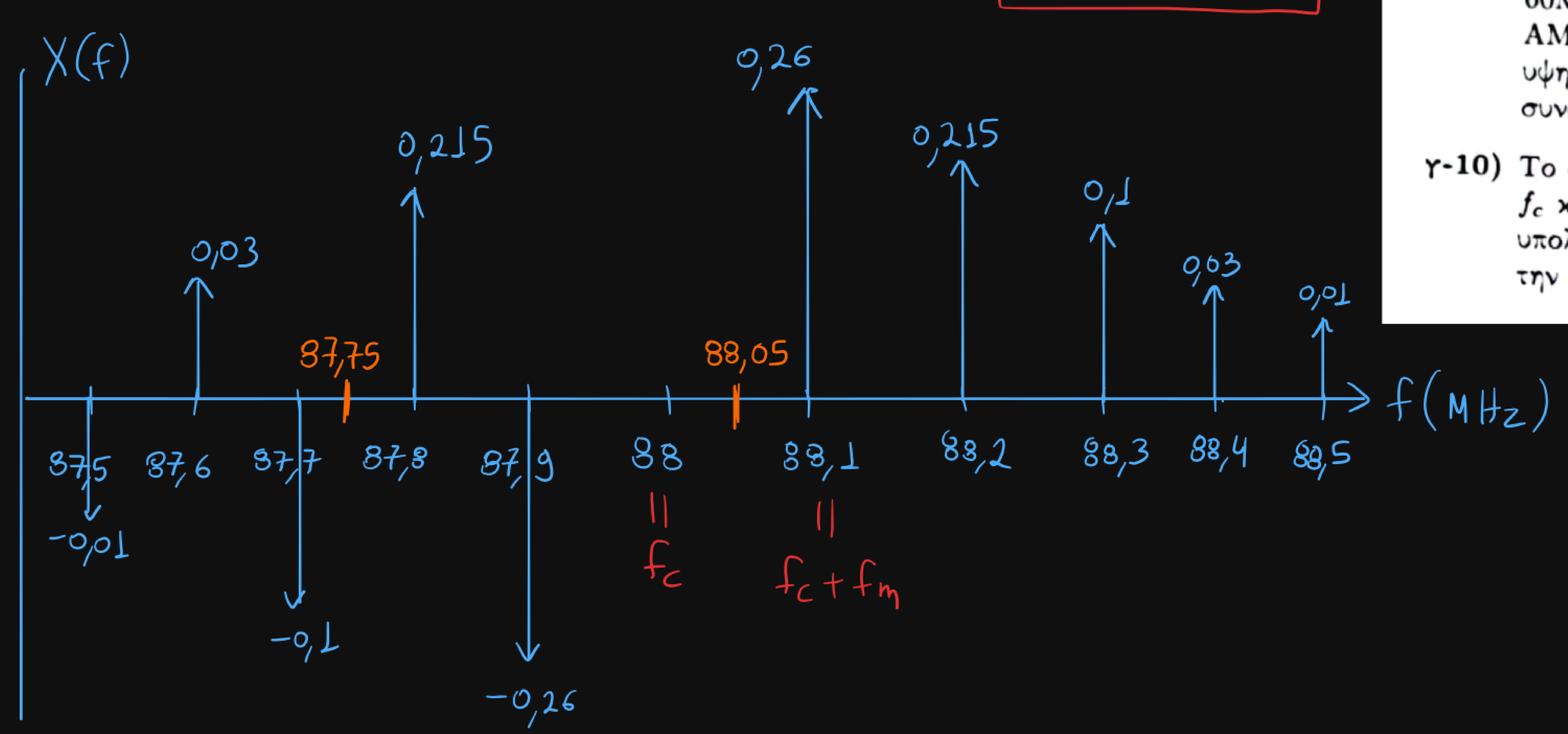
β-10) Ένα σήμα βασικής ζώνης g με εύρος ζώνης $B_g = 0.25$MHz, διαμορφώνεται κατά AM με συχνότητα φέροντος 60MHz. Το AM σήμα εκπέμπεται ταυτόχρονα με το FM σήμα του ερωτήματος α). Για την αποδιαμόρφωση του AM σήματος, χρησιμοποιείται υπερετερόδυνος δέκτης με συχνότητα τοπικού ταλαντωτή $f_l = 74$MHz, έγχυση υψηλής ζώνης, και σταθερό RF φίλτρο εισόδου με ζώνη διέλευσης 50MHz - 88.05MHz. Να υπολογιστεί η συνολική ισχύς του FM σήματος που παρεμβάλει το διαμορφωμένο κατά AM σήμα.

γ-10) Το σήμα $m(t)$ διαμορφώνεται κατά FM στενής ζώνης (NBFM) από φέρον μοναδιαίου πλάτους, συχνότητας f_c και δείκτη διαμόρφωσης β. Προσδιορίστε τη περιβάλλουσα του NBFM σήματος συναρτήσει του β και υπολογίστε τον λόγο της μέγιστης τιμής προς την ελάχιστη τιμή της περιβάλλουσας. Επιπλέον, υπολογίστε την ισχύ του NBFM σήματος. Ικανοποιείται η ιδιότητα της σταθερής ισχύος των FM σημάτων;

α) • Μηδενική ισχύς $\rightarrow$ Μηδενικό πλάτος $(J_0(\beta) = 0)$

Άρα απ' τον πίνακα τιμών J_n βρίσκουμε $\boxed{\beta = 2{,}41}$

• $B = 2W(\beta+1) = 2\cdot 10^5 (2{,}41+1) \Leftrightarrow \boxed{B = 682\text{kHz}}$



(• ύψος υπολογίζεται από $\frac{A_c J_k(\beta)}{2} = \frac{J_k(2{,}41)}{2}$
• πρόσημο των J_{-k} από τύπο 4.152)

β) • Έγχυση υψηλής ζώνης: $f_l = f_c + f_{IF} \Leftrightarrow 74 = 60 + f_{IF} \Leftrightarrow f_{IF} = 14\text{MHz}$

• $f_{i,min} = f_c - W + 2f_{IF} = 60 - 0{,}25 + 2\cdot 14 \Leftrightarrow f_{i,min} = 87{,}75$ MHz

• $f_{i,max} = f_c + W + 2f_{IF} = 60 + 0{,}25 + 2\cdot 14 \Leftrightarrow f_{i,max} = 88{,}25$ MHz

• Από το εύρος $[87{,}75\,,\ 88{,}25]$ θα περάσουν μόνο οι συχνότητες $[87{,}75\,,\ 88{,}05]$ λόγω του RF φίλτρου

Άρα $P_{FM} = \frac{1}{2}A_c^2\left[J_0^2(\beta) + J_1^2(\beta) + J_2^2(\beta)\right] = \frac{1}{2}\cdot 1^2\left[0^2 + 0{,}52^2 + 0{,}43^2\right] \Leftrightarrow \boxed{P_{FM} = 0{,}227 \text{ W}}$

γ) • $\varphi(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau = 2\pi \frac{\beta\cdot f_m}{a}\int_{-\infty}^{t}\cos(2\pi 10^5\tau)d\tau = 2\pi\cdot\frac{\beta\cdot 10^5}{1}\frac{1}{2\pi 10^5}\left[\sin(2\pi 10^5\tau)\right]_{-\infty}^{t} \Leftrightarrow \varphi(t) = \beta\sin(2\pi 10^5 t)$

• NBFM διαμόρφωση: $x(t) = 1\cos(2\pi f_c t) - \beta\sin(2\pi 10^5 t)\cdot\sin(2\pi f_c t) = \cos(2\pi f_c t) - \frac{\beta}{2}\cos(2\pi(10^5 - f_c)t) + \frac{\beta}{2}\cos(2\pi(10^5 + f_c)t)$

• Περιβάλλουσα: $\boxed{V(t) = \sqrt{1^2 + \beta^2\sin^2(2\pi 10^5 t)}}$

• Για $\sin^2(2\pi 10^5 t) = 0$: $V_{min} = \sqrt{1} = 1$

• Για $\sin^2(2\pi 10^5 t) = 1$: $V_{max} = \sqrt{1+\beta^2}$

Άρα $\boxed{\frac{V_{max}}{V_{min}} = \sqrt{1+\beta^2}}$

• Ισχύς: $P = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\cos(2\pi f_c t) - \frac{\beta}{2}\cos(2\pi(10^5 - f_c)t) + \frac{\beta}{2}\cos(2\pi(10^5+f_c)t)\right]^2 dt$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big[\underbrace{\cos^2(2\pi f_c t)}_{=T} \underbrace{- \frac{\beta}{2}\cos(2\pi(10^5-f_c)t)\cos(2\pi f_c t)}_{=0} + \underbrace{\frac{\beta}{2}\cos(2\pi(10^5+f_c)t)\cos(2\pi f_c t)}_{=0} + \underbrace{\frac{\beta^2}{4}\cos^2(2\pi(10^5-f_c)t)}_{=\frac{\beta^2}{4}T} \underbrace{- \frac{\beta^2}{4}\cos(2\pi(10^5-f_c)t)\cos(2\pi(10^5+f_c)t)}_{=0}$$

$$\underbrace{+\frac{\beta^2}{4}\cos^2(2\pi(10^5+f_c)t)}_{=\frac{\beta^2}{4}T}\Big]dt$$

$= \ldots = \frac{1}{2T}\left(T + \frac{\beta^2}{4}T + \frac{\beta^2}{4}T\right) \Leftrightarrow \boxed{P = \frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{4} \text{ W}} = \text{cosnt.}$ Άρα ναι διατηρείται η ιδιότητα της σταθερής ισχύος

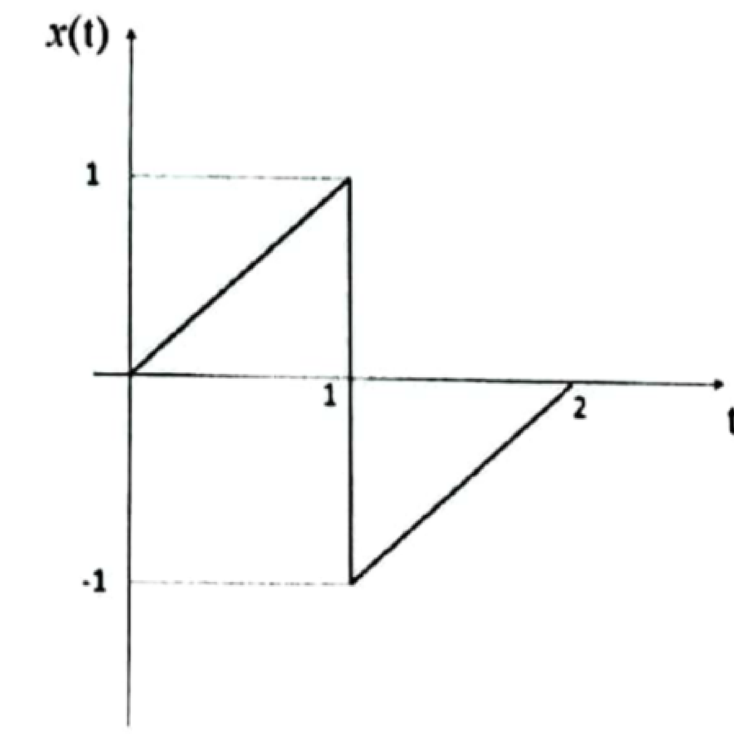
Θέμα 4ο (30)

Δίνεται σήμα πληροφορίας, του οποίου τα δείγματα ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$. Το σήμα εισάγεται σε έναν ομοιόμορφο κβαντιστή, του οποίου η έξοδος είναι κωδικολέξη αποτελούμενη από R bits. Θεωρήστε ότι το σφάλμα κβάντισης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$, όπου Δ το βήμα κβάντισης.

α-10) Αποδείξτε ότι η σηματοθορυβική σχέση κβάντισης ισούται με 2^{2R}.

β-10) Το σήμα πληροφορίας εισάγεται σε έναν νέο ομοιόμορφο κβαντιστή, του οποίου η έξοδος είναι κωδικολέξη αποτελούμενη από R' bits. Απαιτείται η σηματοθορυβική σχέση κβάντισης για τον νέο κβαντιστή να είναι τουλάχιστον κατά 15dB αυξημένη απο αυτήν του κβαντιστή στο ερώτημα α). Υπολογίστε τον αριθμό των επιπλέον bits που θα πρέπει να περιέχει η κωδικολέξη του νέου κβαντιστή, σε σχέση με την κωδικολέξη του κβαντιστή στο ερώτημα α).

γ-10) Το σήμα $x(t)$ του Σχήματος 2, εισάγεται σε έναν ομοιόμορφο κβαντιστή τύπου mid-rise, του οποίου η έξοδος αποτελείται από L επίπεδα κβάντισης. Για το διάστημα $t \in [0, 1]$, προσδιορίστε όλες τις χρονικές στιγμές, ως συνάρτηση του L, για τις οποίες το απόλυτο σφάλμα κβάντισης ισούται με 0.1Δ.



Σχήμα 2

α) • $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{a}{2}-(-\frac{a}{2})}, & |x| \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{a}, & |x| \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

• $\Delta = \frac{V_{pp}}{2^R} = \frac{\frac{a}{2} - (-\frac{a}{2})}{2^R} \Leftrightarrow \Delta = \frac{a}{2^R}$

• $\sigma_X^2 = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 f_X(x)\, dx = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \frac{1}{a}\, dx = \frac{1}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2}$

$= \frac{1}{a} \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{24} \Leftrightarrow \sigma_X^2 = \frac{a^2}{12}$

Άρα $(SNR)_{o,q} = \frac{12\sigma_X^2}{\Delta^2} = \frac{12 \cdot \frac{a^2}{12}}{\frac{a^2}{2^{2R}}} \Leftrightarrow \boxed{(SNR)_{o,q} = 2^{2R}}$

β) • $10\log\frac{(SNR)'_{o,q}}{(SNR)_{o,q}} = 15 \Leftrightarrow 10^{1,5} = \frac{(SNR)'_{o,q}}{(SNR)_{o,q}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (SNR)'_{o,q} = 31,62 \cdot 2^{2R}$

• $(SNR)'_{o,q} = 2^{2R'} \Leftrightarrow 31,62 \cdot 2^{2R} = 2^{2R'} \Leftrightarrow \log_2 31,62 + 2R = 2R' \Leftrightarrow 5 + 2R = 2R' \Leftrightarrow R' = 2,5 + R$

$\Downarrow$ R ακέραιος

$\boxed{R' = 3 + R}$

γ) • $\Delta = \frac{V_{pp}}{L} = \frac{1-(-1)}{L} \Leftrightarrow \Delta = \frac{2}{L}$

• $|q(t_0)| = |x(t_0) - y_n| \Leftrightarrow 0,1\Delta = |t_0 - (n-\frac{1}{2})\Delta| \Leftrightarrow 0,1\Delta = |t_0 - n\Delta + \frac{1}{2}\Delta| \Leftrightarrow \begin{cases} 0,1\Delta = t_0 - n\Delta + \frac{1}{2}\Delta, & t_0 \ge (n-\frac{1}{2})\Delta \\ \text{ή} & \\ 0,1\Delta = -t_0 + n\Delta - \frac{1}{2}\Delta, & t_0 < (n-\frac{1}{2})\Delta \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = \Delta(0,1 + n - \frac{1}{2}) \\ \text{ή} \\ t_0 = \Delta(-0,1 + n - \frac{1}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = \frac{2}{L}(n - 0,4) \\ t_0 = \frac{2}{L}(n - 0,6) \end{cases}$ Για κάθε $n \in (0, \frac{L}{2}]$ τ.ω. $t_0 \le 1$

$(n \in \mathbb{Z})$

Θέμα 4ο (25)

Απαιτείται ο σχεδιασμός έναν υπερετερόδυνο δέκτη για λήψη ραδιοφωνικών σταθμών FM στην περιοχή συχνοτήτων 88 MHz - 104 MHz με δείκτη διαμόρφωσης ίσο με 5. Οι σταθμοί βρίσκονται σε συχνότητες φέροντος 88 MHz, 88.4 MHz, 88.8 MHz, 89.2 MHz, κτλ. Μετά το φίλτρο IF ακολουθεί αποδιαμορφωτής FM ο οποίος είναι συντονισμένος στη συχνότητα f_{IF}. Το ηχητικό φάσμα θεωρείται ότι περιέχει συχνότητες στη βασική ζώνη από 300 Hz ως 3 kHz.

α-10) Είναι διαθέσιμα δύο φίλτρα, ένα με ενδιάμεση συχνότητα $f_{IF1} = 7$ MHz και ένα με ενδιάμεση συχνότητα $f_{IF1} = 9$ MHz. Θεωρώντας ότι η συχνότητα τοπικού ταλαντωτή είναι μικρότερη από τη συχνότητα φέροντος, να επιλεγεί το κατάλληλο από τα δύο φίλτρα.

β-10) Να υπολογιστεί το ελάχιστο και το μέγιστο δυνατό εύρος ζώνης του φίλτρου ενδιάμεσης συχνότητας.

γ-5) Αν κάθε φίλτρο εισάγει απώλειες 2 dB, οι ταλαντωτές εισάγουν απώλεια 5 dB και μετά από κάθε ταλαντωτή υπάρχει ενισχυτής με κέρδος 9 dB, να υπολογιστεί η στάθμη ισχύος σε Watt στην έξοδο του ΤΔ αν η στάθμη του σήματος στην είσοδο του δέκτη είναι -99 dBm.

συχνότητα τοπ. ταλ.

α) • Έχουμε έγχυση χαμηλής ζώνης (LSI) αφού $f_L < f_c$

• $B_{eff} = 2f_m(\beta+1) = 2\cdot 3(5+1) \Leftrightarrow B_{eff} = 36\,kHz$

• Για $f_{IF_1} = 7MHz$ έχουμε:

• $f_{im,min_1} = \left|f_{c_{min}} - \frac{B_{eff}}{2} - 2f_{IF_1}\right| = |88 - 0{,}018 - 2\cdot 7| \simeq 74MHz$

• $f_{im,max_1} = \left|f_{c_{max}} + \frac{B_{eff}}{2} - 2f_{IF_1}\right| = |104 + 0{,}018 - 2\cdot 7| \simeq 90MHz$

Δηλαδή οι σταθμοί 88-90MHz μπορεί να παρεμβάλουν τους άλλους σταθμούς στις υψηλές συχνότητες (π.χ. 100-104MHz)

• Για $f_{IF_2} = 9MHz$ έχουμε:

• $f_{im,min_2} = \left|f_{c_{min}} - \frac{B_{eff}}{2} - 2f_{IF_2}\right| = |88 - 0{,}018 - 2\cdot 9| \simeq 70MHz$

• $f_{im,max_2} = \left|f_{c_{max}} + \frac{B_{eff}}{2} - 2f_{IF_2}\right| = |104 + 0{,}018 - 2\cdot 9| \simeq 86MHz$

Δεν υπάρχουν παρεμβολές αν επιλέξουμε το φίλτρο με $\boxed{f_{IF_2}}$

β) • Το ελάχιστο εύρος είναι $B_{min} = B_{eff} \Leftrightarrow \boxed{B_{min} = 36\,kHz}$

• Το μέγιστο εύρος είναι $B_{max} = 2\left(f_{c_{min}} - f_{im,max_2}\right) = 2(88-86) \Leftrightarrow \boxed{B_{max} = 4\,MHz}$

(Σημείωση: για το B_{max} δεν θέλουμε εικονικές συχνότητες με τιμές 88MHz και πάνω, άρα το φίλτρο πρέπει να εκτείνεται μέχρι 2MHz προς την κάθε κατεύθυνση.)

γ) Έχουμε $-99 - 3\cdot 2 + (9-5)\cdot 2 = -99 - 6 + 8 = -97 = 10\log\left(\frac{P}{10^{-3}}\right) \Leftrightarrow 10^{-9,7} = \frac{P}{10^{-3}} \Leftrightarrow \boxed{P = 2\cdot 10^{-13}\,W}$

3 φίλτρα: RF, IF, LPF

2 ταλαντωτές: ΤΤ και ταλαντωτής PLL