

ΣΑΠΗΛΟguide

Θεωρία πιθανοτήτων
και στατιστική

Σημείωση: Οι απαντήσεις μπορεί να μην είναι 100% σωστές

-Νοντας

Λύσεις Σεπτεμβρίου 2022

Εγνατία Πανεπιστημιακών και Μηχανικών Υπολογιστών

a) • Πιθανότητα καριά ασφάλεια να ήσαν καμένη:

$$\frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} = \frac{19}{30} \quad \left(\because \frac{\binom{20}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{19}{30} \right)$$

Θέμα 1°

Ένας ηλεκτρικός πίνακας περιέχει 25 ασφάλειες από τις οποίες οι 5 είναι καμένες. Αφαιρούμε τυχαία μια ασφάλεια και στη συνέχεια μια άλλη. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

(α) Τουλάχιστον μια από τις δύο ασφάλειες ήταν καμένη.

(β) Ακριβώς μια από τις δύο ασφάλειες ήταν καμένη.

[2 μονάδες]

Άρα σουλαχισούν μια καμένη: $1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$

Θέμα 2°

Ένας γρίπες

β) • Πιθανότητα και οι 2 καμένες : $\frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = \frac{1}{30} \quad \left(\because \frac{\binom{5}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{1}{30} \right)$

• Άρα ακριβώς μια καμένη: $1 - \frac{19}{30} - \frac{1}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

[2 μονάδες]

a) • Κανένας διαθέσιμος: $0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,06$ ($x=0$)

• A διαθέσιμος: $0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,06$ } ($x=1$)

• B διαθέσιμος: $0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,14$ } $0,06$

• Γ διαθέσιμος: $0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,09$ } $0,14$
+ $0,09$
 $0,29$

• A, B διαθέσιμοι: $0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,14$ } ($x=2$)

• B, Γ διαθέσιμοι: $0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,21$ } $0,14$
+ $0,09$
 $0,21$

• A, Γ διαθέσιμοι: $0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,09$ } $+ 0,09$
 $0,09$

• Όλοι διαθέσιμοι: $0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,21$ ($x=3$)

Θέμα 2°

Ένας χρήστης υπολογιστικής υποδομής μπορεί να χρησιμοποιήσει 3 υπερυπολογιστές, A, B, C, για να τρέξει προγράμματα και η πιθανότητα να είναι ο καθένας από αυτούς διαθέσιμος (για οποιαδήποτε χρονική στιγμή) είναι $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.7$ τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X να είναι το πλήθος των διαθέσιμων υπερυπολογιστών.

(α) Υπολογίστε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τ.μ. X και κάνετε το γράφημα της.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα να είναι τουλάχιστον ένας υπερυπολογιστής διαθέσιμος.

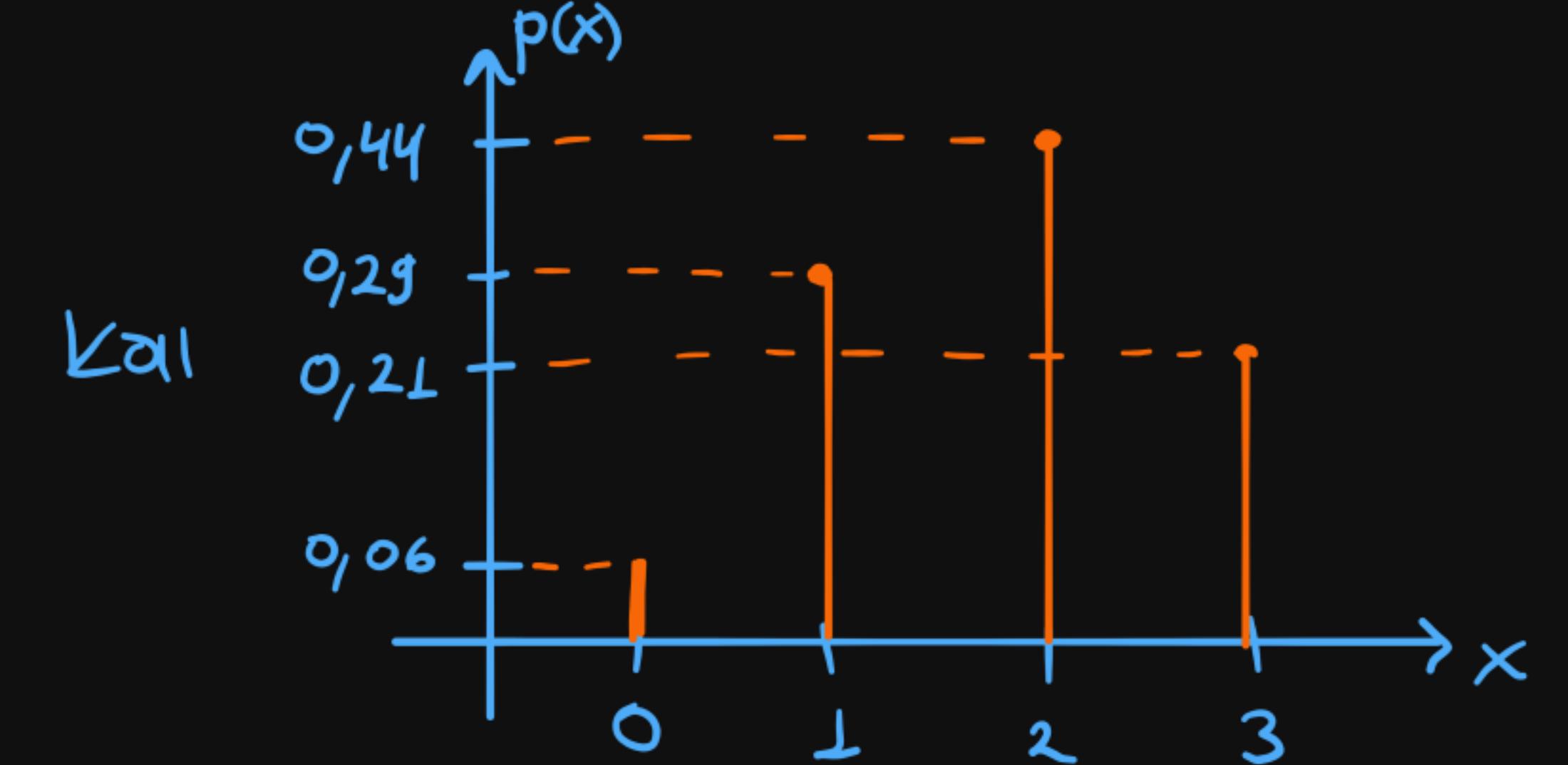
(γ) Ποια από τις παρακάτω τρεις κατανομές μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά την κατανομή της τ.μ. X που βρήκατε στο τιμή της παραμέτρου ή τις τιμές των παραμέτρων της προτεινόμενης κατανομής.

[2 1/2 μονάδες]

Θέμα 3°

Η διάρκεια ζωής Τ

Άρα $f_X(x) = \begin{cases} 0,06 & , x=0 \\ 0,29 & , x=1 \\ 0,44 & , x=2 \\ 0,21 & , x=3 \end{cases}$



β) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,06 = 0,94$

γ) • Η κατανομή λου περιγράφει σην τ.μ. X σε Ικανοποιητικό βαθμό είναι η διωνυμική λόγω του σχήματος καρνάνα

(έχουμε υψηλή πιθανότητα για $x=1,2$ και χαμηλής για $x=0,3$)

• Το συγκεκριμένο σχήμα μπορούμε να το ηετύχουμε για μέσες τιμές του P (n.x. $p=0,6$) και $N=3$

(δεν είμαι σίγουρος αν αυτό θελει)

[2 1/2 μονάδες]

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) dt = 1 \Leftrightarrow c \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{8}} dt = 1$$

$$\Leftrightarrow -8c \left[e^{-\frac{t}{8}} \right]_0^{+\infty} = 1 \Leftrightarrow -8c(0 - 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 8c = 1 \Leftrightarrow c = \underline{\frac{1}{8}}$$

\because Εχουμε $f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{8} e^{-\frac{t}{8}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$

εκθετική κασανομή με $\lambda = \frac{1}{8}$

Θέμα 3°
 Η διάρκεια ζωής T ενός τρανζίστορ είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (t σε μήνες)

$$f_T(t) = \begin{cases} ce^{-\frac{t}{8}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Να υπολογιστούν:
 (α) Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της τ.μ. T .
 (β) Η πιθανότητα ότι ο χρόνος ζωής του τρανζίστορ είναι μεταξύ 6 και 10 μηνών.

Θέμα 4°

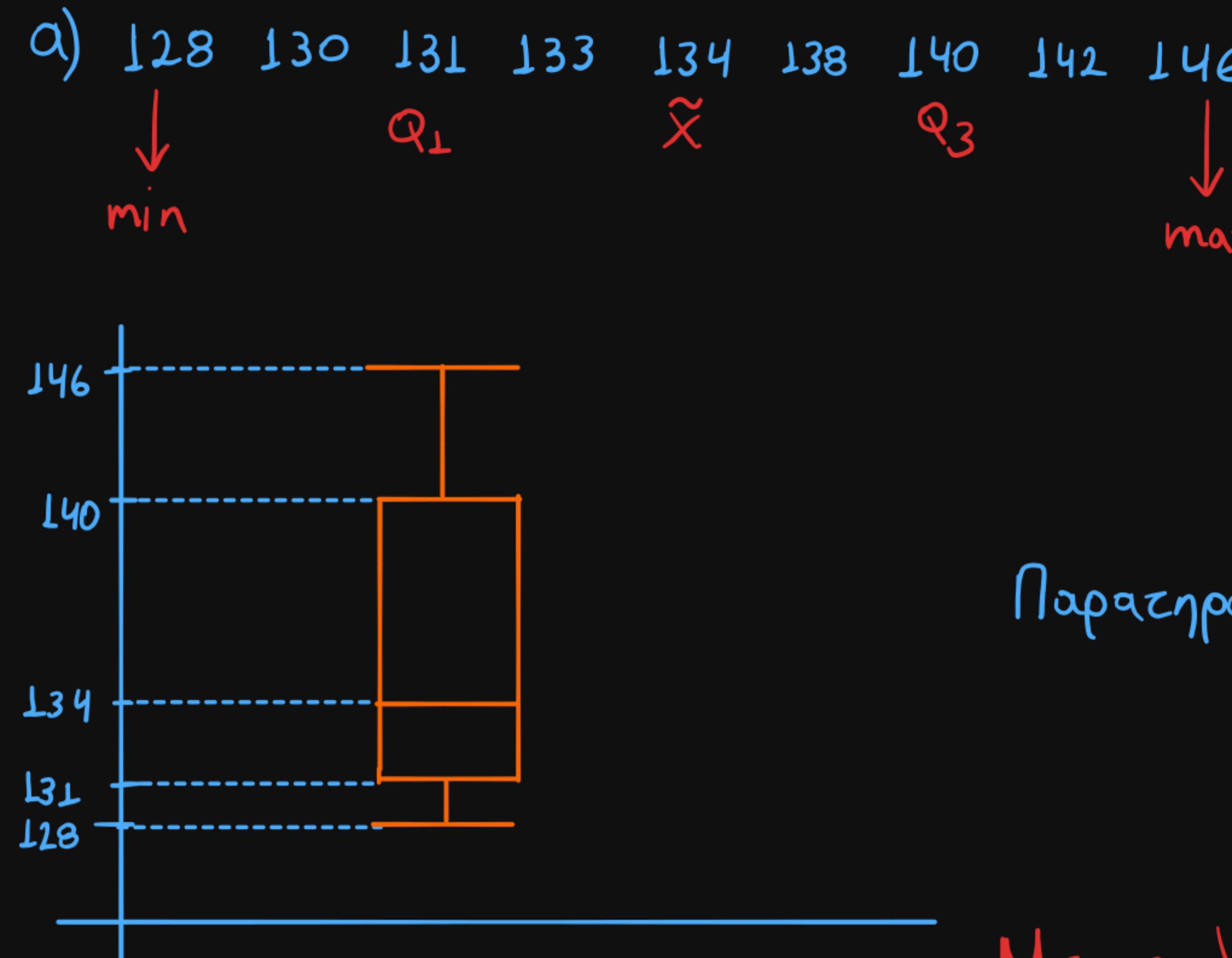
[2 μονάδες]

οπότε $E(T) = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow E(T) = 8$

και $Var(T) = \frac{1}{\lambda^2} \Leftrightarrow Var(T) = 64 \Leftrightarrow \sigma = 8$

$$\beta) \cdot F_T(t) = \int_{-\infty}^t f_T(t) dt = \int_0^t \frac{1}{8} e^{-\frac{t}{8}} = \left[-e^{-\frac{t}{8}} \right]_0^t = -e^{-\frac{t}{8}} + 1 = 1 - e^{-\frac{t}{8}}$$

$$\cdot P(6 < T < 10) = F_T(10) - F_T(6) = 1 - e^{-\frac{10}{8}} - \left(1 - e^{-\frac{6}{8}} \right) = e^{-\frac{3}{4}} - e^{-\frac{5}{4}} \simeq 0,185$$



Θέμα 4°

Μετρήθηκε η χωρητικότητα (σε αμπερώρες) 9 μπαταριών και τα αποτελέσματα δίνονται ως εξής:

130	146	140	134	138	142	128	131	133
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Από παλιότερες μετρήσεις γνωρίζουμε ότι η χωρητικότητα της μπαταρίας ακολουθεί κανονική κατανομή.

(α) Με βάση το θηκόγραμμα, που θα πρέπει να σχηματίσετε από τις παρατηρήσεις του δείγματος, σχολιάστε αν η χωρητικότητα της μπαταρίας ακολουθεί πράγματι κανονική κατανομή.

(β) Σε ποιο επίπεδο εμπιστοσύνης το διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση χωρητικότητα της μπαταρίας μπορεί να έχει ως πιμή του άνω άκρου του 140,5 αμπερώρες; Εξηγήστε πως φτάνετε στην απάντηση σας (για τις αριθμητικές πράξεις χρησιμοποιείστε στρογγυλοποίηση στο πρώτο δεκαδικό).

[2 μονάδες]

- Παρατηρούμε ότι:
- Η διάμεσος αποκλίνει προς το 1^ο τεταρτημόριο
 - Τα μήκη των 2 μύστακων έχουν διαφορετικό μέγεθος
 - Δεν υπάρχουν ακραίες τιμές

Με πολὺ μικρή βεβαίωση ότι ακολουθεί κανονική κατανομή.
Χρειαζόμαστε περισσότερες μετρήσεις για να γίνει εμφανής η κανονική κατανομή.

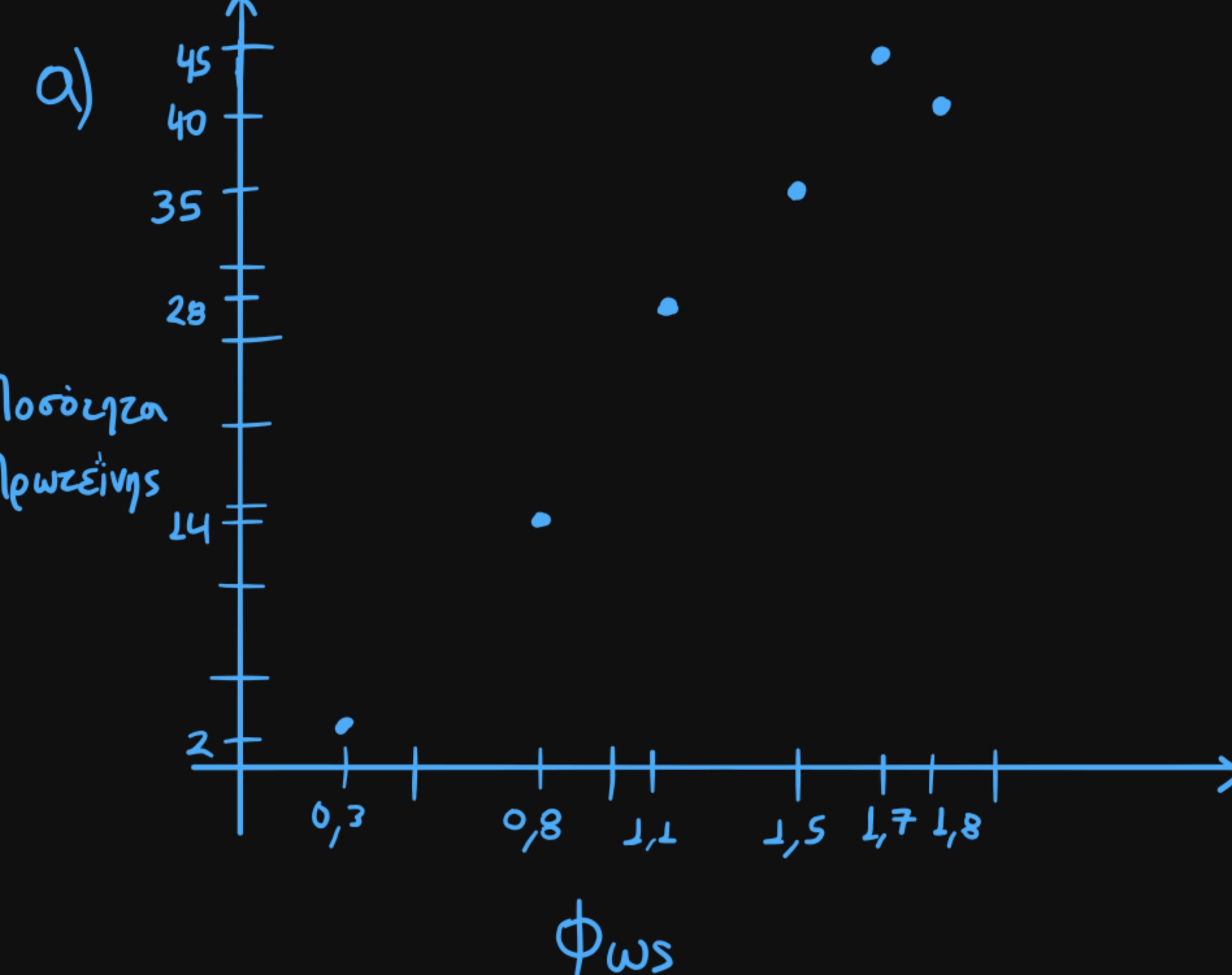
b) $\bar{x} = 135,8$

$$\cdot s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{8} (166214 - 9 \cdot 135,8^2) = 29,905 \Leftrightarrow s = 5,46 \approx 5,5$$

$$\cdot \bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \xrightarrow[\text{ανω ακρο}]{=} 140,5 \Leftrightarrow \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, 8} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 140,5 \Leftrightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}, 8} = \frac{3(140,5 - 135,8)}{5,5} = 2,56 \approx 2,6$$

$$\cdot Η τιμή 2,6 είναι μεταξύ 2,306 και 2,896 (περίου σα ρέσο), άρα θέλουμε 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9825 \left(0,975 + \frac{0,99 - 0,975}{2} \right)$$

Οπότε $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9825 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0175 \Leftrightarrow \alpha = 0,035 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0,965 \rightarrow$ Διάστημα εμπιστοσύνης 96,5%



Θέμα 5°

Η απευθείας μέτρηση της ποσότητας πρωτεΐνης στο συκώτι είναι δύσκολη και απαιτεί πολύ χρόνο. Πιστεύεται ότι η ποσότητα της πρωτεΐνης σχετίζεται με την ποσότητα του φωτός που απορροφάται από το συκώτι. Για αυτό έγινε στο εργαστήριο το ακόλουθο πείραμα. Στάλθηκε από ένα φασματόμετρο φως σε διάλυμα που περιείχε δείγμα συκωτιού και μετρήθηκε το φως που απορροφήθηκε. Αυτή η διαδικασία εφαρμόσθηκε σε 6 δείγματα συκωτιού για τα οποία η ποσότητα της πρωτεΐνης ήταν γνωστή. Τα αποτελέσματα δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Φως που απορροφήθηκε	0.3	0.8	1.1	1.5	1.7	1.8
Ποσότητα πρωτεΐνης (mg)	2	14	28	35	45	40

(a) Σχηματίστε το κατάλληλο διάγραμμα διασποράς και σχολιάστε αν η υπόθεση, ότι η ποσότητα πρωτεΐνης σε δείγμα συκωτιού εξαρτάται γραμμικά από το αντίστοιχο φως που απορροφάται από το δείγμα, φαίνεται σωστή με βάση το δείγμα των παρατηρήσεων από τον πίνακα.

(b) Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση της ευθείας παλινδρόμησης (με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων), προβλέψτε την ποσότητα πρωτεΐνης σε δείγμα συκωτιού για το οποίο η απορρόφηση του φωτός είναι 1.6.

[1 1/2 μονάδες]

• Υπάρχει ισχυρή γραμμική εξάρτηση με βάση των πίνακα ($r > 0,9$).

$$\beta) \cdot S_{xy} = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^6 x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} \right) = \frac{1}{5} (243,6 - 6 \cdot 1,2 \cdot 27,3) \Leftrightarrow S_{xy} = 9,408$$

$$\cdot S_x^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^6 x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{5} (10,32 - 6 \cdot 1,2^2) \Leftrightarrow S_x^2 = 0,336$$

$$\cdot b = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \Leftrightarrow b = 28$$

$$\cdot a = \bar{y} - b \bar{x} = 27,3 - 28 \cdot 1,2 \Leftrightarrow a = -6,3$$

Άρα $y = -6,3 + 28x$

$$\cdot Για x = 1,6 : y = -6,3 + 28 \cdot 1,6 \Leftrightarrow y = 38,5$$

Λύσεις Ιουνίου 2022

a) • $P(A) = 0,9$ $P(B) = 0,85$ $P(\Gamma) = 0,9$ $P(\Delta) = 0,95$

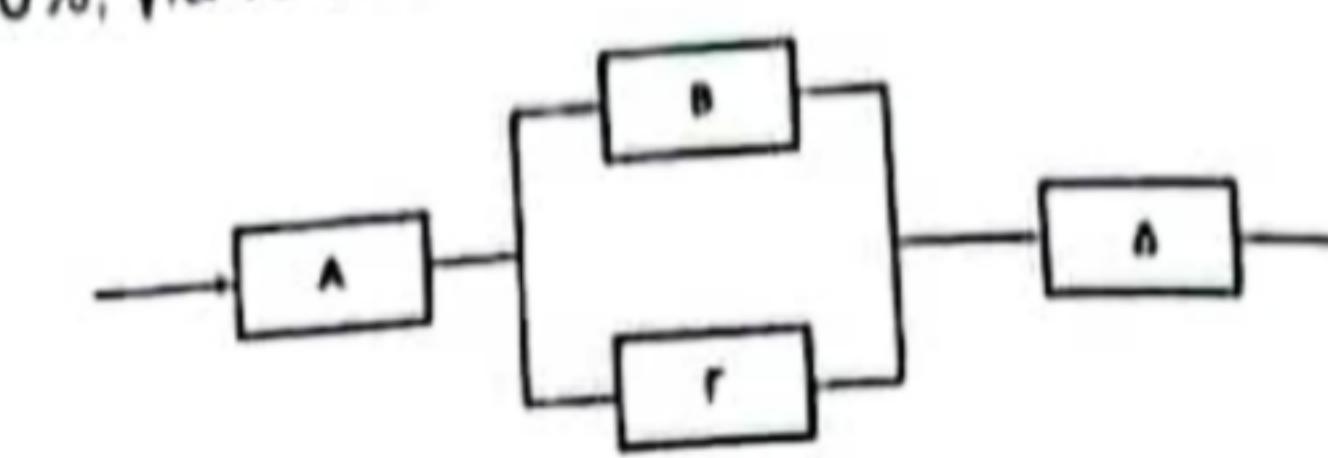
$$\cdot P(\Lambda) = P(A \cap (B \cup \Gamma) \cap \Delta) =$$

$$= P(A) \cdot P(B \cup \Gamma) \cdot P(\Delta) =$$

$$= P(A) \cdot (P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma)) \cdot P(\Delta) =$$

$$= P(A) \cdot (P(B) + P(\Gamma) - P(B) \cdot P(\Gamma)) \cdot P(\Delta) = 0,9 \cdot (0,85 + 0,9 - 0,85 \cdot 0,9) \cdot 0,95$$

$$\Leftrightarrow P(\Lambda) = 0,842$$



Θέμα 1ο

Ένα ηλεκτρικό σύστημα αποτελείται από τα τμήματα Α, Β, Γ και Δ και λειτουργεί αν λειτουργούν τα τμήματα Α, Β, Γ και Δ, δημιουργών τη συνολική λειτουργία. Τα τέσσερα τμήματα λειτουργούν με πιθανότητα 90%, για το Β 85%, για το Γ 90% και για το Δ 95%. Όπου αξιοπιστία τους είναι για το Α 90%, για το Β 85%, για το Γ 90% και για το Δ 95%, δημιουργείται η πιθανότητα να λειτουργεί.

Na upoloystoúv:

- (α) Η πιθανότητα να λειτουργεί το σύστημα.
(β) Η πιθανότητα το τμήμα Γ να μην λειτουργεί όταν το σύστημα λειτουργεί.

[2 μονάδες]

Είναι οι:

τελική πιθανότητα λειτουργίας του συστήματος

μπορείτε να το ψάξετε στο
google ws absorption Law

$$\beta) \cdot P(\bar{\Gamma} | \Lambda) = 1 - P(\Gamma | \Lambda)$$

$$\cdot P(\Gamma | \Lambda) = P(\Gamma | A \cap (B \cup \Gamma) \cap \Delta) = \frac{P(\Gamma \cap A \cap (B \cup \Gamma) \cap \Delta)}{P(A \cap (B \cup \Gamma) \cap \Delta)} = \frac{P(\Gamma \cap A \cap \Delta)}{P(A \cap (B \cup \Gamma) \cap \Delta)} = \frac{P(\Gamma) \cdot P(A) \cdot P(\Delta)}{P(A) \cdot P(B \cup \Gamma) \cdot P(\Delta)} =$$

$$= \frac{P(\Gamma)}{P(B \cup \Gamma)} = \frac{P(\Gamma)}{P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma)} = \frac{P(\Gamma)}{P(B) + P(\Gamma) - P(B) \cdot P(\Gamma)} = \frac{0,9}{0,85 + 0,9 - 0,85 \cdot 0,9} \Leftrightarrow P(\Gamma | \Lambda) = 0,913$$

$$\text{Άρα, } P(\bar{\Gamma} | \Lambda) = 1 - 0,913 \Leftrightarrow P(\bar{\Gamma} | \Lambda) = 0,087$$

B' ζρόνος

$$\cdot P(\bar{\Gamma} | \Lambda) = \frac{P(\bar{\Gamma}) \cdot P(\Lambda | \bar{\Gamma})}{P(\Lambda)} = \frac{P(\bar{\Gamma}) \cdot (P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Delta))}{P(\Lambda)} = \frac{0,1 \cdot (0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,95)}{0,842} \Leftrightarrow P(\bar{\Gamma} | \Lambda) = 0,0863$$

$$a) \cdot P(\text{Να παρουσιάσει ηρόβλημα σε 1 μέρα}) = p = 0,01$$

$$\cdot P(\text{Να μην παρουσιάσει ηρόβλημα σε 30 μέρες}) = \\ = 0,99^{30} = 0,739$$

Σημείωση: στα ερωτήματα β, γ, δ θεωρήσαμε ότι μηνοί να εμφανισεί ηρόβλημα μόνο στην 1η ημέρα κάθε μήνα.
 (μηνοί να μην είναι σωστό) = σαν επιθεώρηση

$$\beta) \cdot P(\text{Ηρόβλημα σε 40 μήνα}) = P(X=120) = \\ = (1 - 0,01)^{120} \cdot 0,01 = 3 \cdot 10^{-3}$$

$$\gamma) P(2^{\text{η}} \text{ φορά ηρόβλημα σε 7 μήνες}) = P(X=210-1)$$

$$= P(X=209) = \binom{209+2-1}{2-1} p^2 (1-p)^{209}$$

$$= \frac{210!}{1! (210-1)!} 0,01^2 \cdot 0,99^{209} = 210 \cdot 0,01^2 \cdot 0,99^{209} = 2,57 \cdot 10^{-3}$$

Πιθανότητα να εμφανισεί ηρόβλημα στην 3η 1η μέρα = μέρα που γίνεται έλεγχος

$$\delta) \cdot \text{Αρχικά θα πάρουμε γεωμετρική με } X=30 : P(X=30) = (1-p)^{30} \cdot p = 0,99^{30} \cdot 0,01 = 7,39 \cdot 10^{-3}$$

$$\cdot \Delta_{\text{Διωνυμική}} : P(X=2) = \binom{10}{2} (7,39 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (1 - 7,39 \cdot 10^{-3})^8 = 2,315 \cdot 10^{-3}$$

Θέμα 2^ο

Έστω ότι η πιθανότητα να παρουσιάσει τεχνικό πρόβλημα μια ηλεκτρική μηχανή κατά της διάρκεια συνεχούς λειτουργίας της σε μια ημέρα είναι 0,01. Μας ενδιαφέρει αν η μηχανή παρουσιάζει τεχνικό πρόβλημα κατά τη διάρκεια συνεχούς λειτουργίας σε ένα μήνα (γίνεται επιθεώρηση για εντοπισμό τεχνικών προβλημάτων με τη συμπλήρωση της διάρκεια συνεχούς λειτουργίας). Βρεθεί η μηχανή να έχει τεχνικό πρόβλημα αντικαθίσταται από μια άλλη (την πρώτη ημέρα του μήνα). Αν ο μήνας έχει 30 ημέρες να βρεθούν τα ακόλουθα:

- (α) Η πιθανότητα η μηχανή να μην παρουσιάσει τεχνικό πρόβλημα σε ένα μήνα συνεχούς καθημερινής λειτουργίας.
- (β) Η πιθανότητα η μηχανή να παρουσιάσει για πρώτη φορά τεχνικό πρόβλημα τον τέταρτο μήνα συνεχούς καθημερινής λειτουργίας (εντοπίζεται τεχνικό πρόβλημα στην επιθεώρηση που γίνεται με τη συμπλήρωση του τέταρτου μήνα).
- (γ) Η πιθανότητα να πρέπει να γίνει αντικατάσταση μηχανής ακριβώς για δεύτερη φορά στους επόμενους δηλαδή να παρουσιαστεί τεχνικό πρόβλημα για δεύτερη φορά στην έβδομη επιθεώρηση.

(δ) Σε ένα σύστημα λειτουργούν 10 τέτοιες ηλεκτρικές μηχανές. Ποια είναι η πιθανότητα να παρουσιάσουν τεχνικό πρόβλημα δύο από αυτές στο τέλος του μήνα (στην επιθεώρηση των 10 μηχανών που γίνεται με τη συμπλήρωση ενός μήνα συνεχούς καθημερινής λειτουργίας).

Βοήθημα: 1. Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σμπ) της γεωμετρικής κατανομής της τ.μ. X που μετράει τις αποτυχίες πριν την πρώτη επιτυχία είναι $P(X=x) = (1-p)^x p, x \in \{0,1,2,\dots\}$. Αντίστοιχα η σμπ της γεωμετρικής κατανομής της τ.μ. $Y=X+1$ που μετράει τις προσπάθειες ως και την πρώτη επιτυχία είναι $P(Y=y) = (1-p)^{y-1} p, y \in \{1,2,\dots\}$.

2. Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σμπ) της αρνητικής διωνυμικής κατανομής της τ.μ. X που μετράει τις αποτυχίες πριν την r -στή επιτυχία είναι $P(X=x) = \binom{x+r-1}{r-1} p^r (1-p)^x, x \in \{0,1,2,\dots\}$. Αντίστοιχα η σμπ της αρνητικής διωνυμικής κατανομής της τ.μ. $Y=X+r$ που μετράει τις προσπάθειες ως και την r -στή επιτυχία είναι $P(Y=y) = \binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{y-r}, y \in \{r, r+1, r+2, \dots\}$.

[2 1/2 μονάδες]

Εάν τας 200 ώρες

a) • $P(X > 180) \geq 0,9$

• $P(X > 180) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{180-\mu}{\sigma}\right)$

$= P\left(Z > \frac{-20}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z < -\frac{20}{\sigma}\right)$

$P(Y = y) = \binom{r}{y} p^y (1-p)^{r-y}, \quad y = 0, 1, \dots, r$

Θέμα 3^ο

(α) Η διάρκεια ζωής X ενός ηλεκτρικού εξαρτήματος ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 200 ώρες. Εάν ένας αγοραστής απαιτεί τουλάχιστον το 90% των εξαρτημάτων του να έχουν διάρκεια ζωής πάνω από 180 ώρες, ποια είναι η μέγιστη δυνατή τιμή της τυπικής απόκλισης στης μεταβλητής X ώστε να ικανοποιείται αυτή η απαιτηση;

(β) Ένας φωτοβολταϊκός σταθμός παράγει ημερήσια ρεύμα με μέση τιμή 40 kWh (κιλοβατώρες) και τυπική απόκλιση 4 kWh, και υποτίθεται ότι ακολουθεί κανονική κατανομή. Ποια η πιθανότητα, σε 10 διαφορετικές ημέρες που ελέγχθηκε η ημερήσια παραγωγή ρεύματος, 6 τιμές να βρεθούν στο διάστημα από 36 kWh μέχρι 44 kWh.

[2 μονάδες]

οπότε $1 - P\left(Z < -\frac{20}{\sigma}\right) \geq 0,9 \Leftrightarrow P\left(Z < -\frac{20}{\sigma}\right) \leq 0,1 \Leftrightarrow \Phi\left(-\frac{20}{\sigma}\right) \leq 0,1 \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right) \leq 0,1$

$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right) \geq 0,9$ ↔ ἀπό πίνακα $\frac{20}{\sigma} \geq 1,28 \Leftrightarrow \sigma \leq \frac{20}{1,28} \Leftrightarrow \sigma \leq 15,625 \Leftrightarrow \sigma_{\max} = 15,625$

$\Phi(1,28) = 0,9$

β) • $\mu = 40, \sigma = 4$

• $P(36 < X < 44) = F_X(44) - F_X(36) = \Phi\left(\frac{44-40}{4}\right) - \Phi\left(\frac{36-40}{4}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1))$

$= 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 \Leftrightarrow \underline{P(36 < X < 44) = 0,6826}$

• Άρα $P(6 \text{ ζιμές από } 10 \text{ ζιμή } 36 < X < 44) = \binom{10}{6} \cdot 0,6826^6 \cdot (1 - 0,6826)^4 = 0,2155$

a) Παραγρούψε ότι η διάφεσης δεν αποκλίνει σημαντικά προς το 1^ο ή 3^ο τεταρτημόριο (Q1 και Q3) και ότι τα μέγη των μυστικών είναι περιού το. Όμως υπάρχουν ακραίες τιμές και στα 2 θηκογράμματα.

• Αν' το ιστογράμμα παραγρούμε ότι έχουμε πολλές παραγρήσεις στο μέσο και οι υπόλοιπες τιμές απλώνονται με κονια συμμετρία γύρω από το μέσο.

Η εικόνα του ιστογράμματος συμφωνεί με τη γραφική παράσταση της κανονικής κατανομής (σχήμα καμπάνα).

• Επίσης απ' το πινακικό παραγρούμε ότι έχουμε μεγάλο n ($n \geq 30$)

Οι κατανομές φαίνεται να είναι κανονικές.

• Το 2008 το κέντρο είναι υψηλότερο απ' του 2013 (κατά μικρό βαθμό), ενώ η μεταβλητικότητα των τιμών είναι μεγαλύτερη το 2013. Γενικά έχουμε μικρή (αλλά εμφανή) διαφορά στις 2 κατανομές.

$$\beta) \cdot 1 - \alpha = 0,95 \Leftrightarrow \alpha = 0,05 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

$$\cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,975} = 1,96 \quad (\text{παίρνουμε Normal και όχι Student λόγω μεγαλού } n)$$

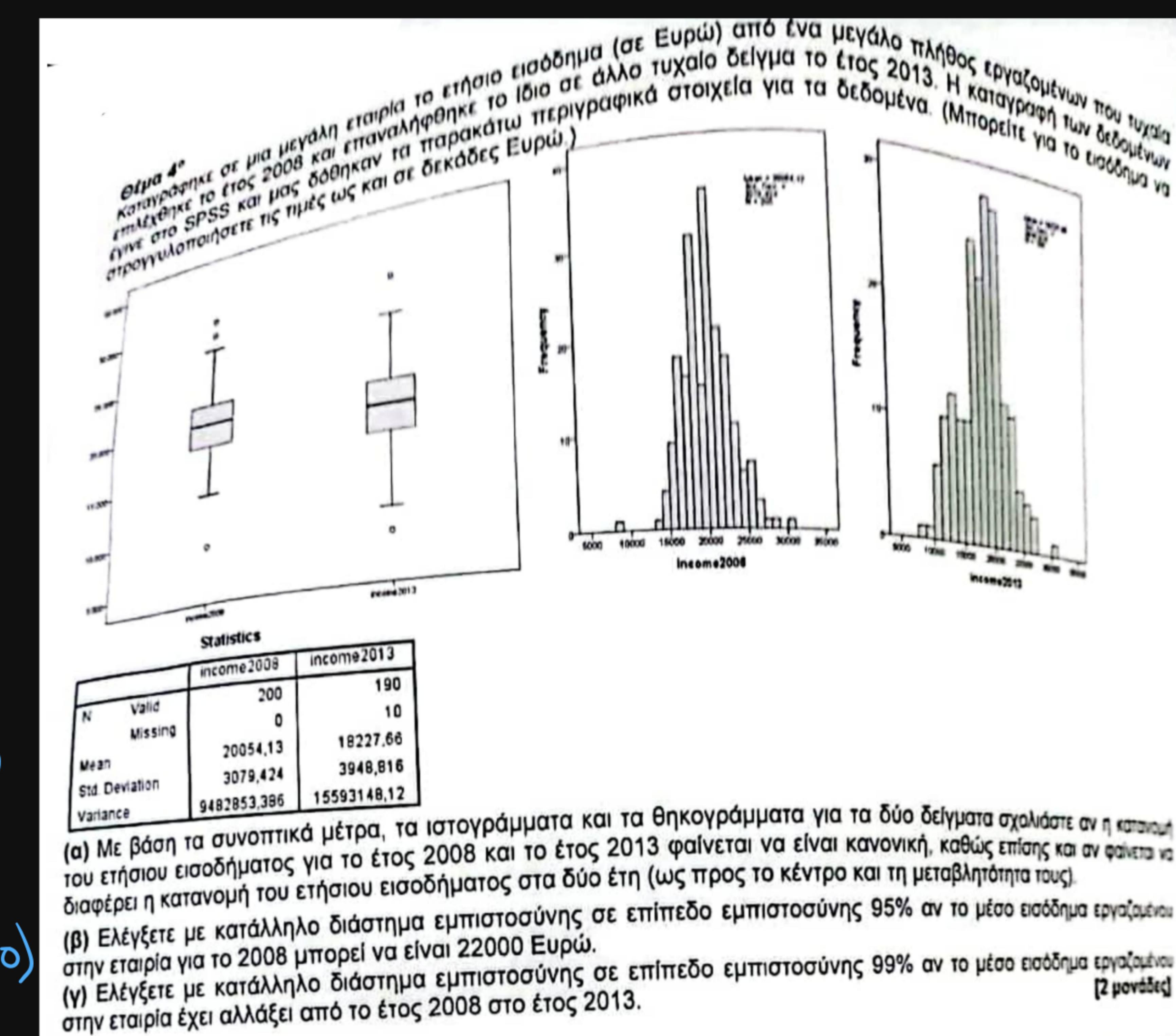
$$\cdot \bar{x} \pm Z_{0,975} \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} = 20050 \pm 1,96 \frac{3080}{\sqrt{200}} \rightarrow [19623, 20476] \quad \text{το μέσο εισόδημα δεν γίνεται να είναι } 22.000 \text{ €}$$

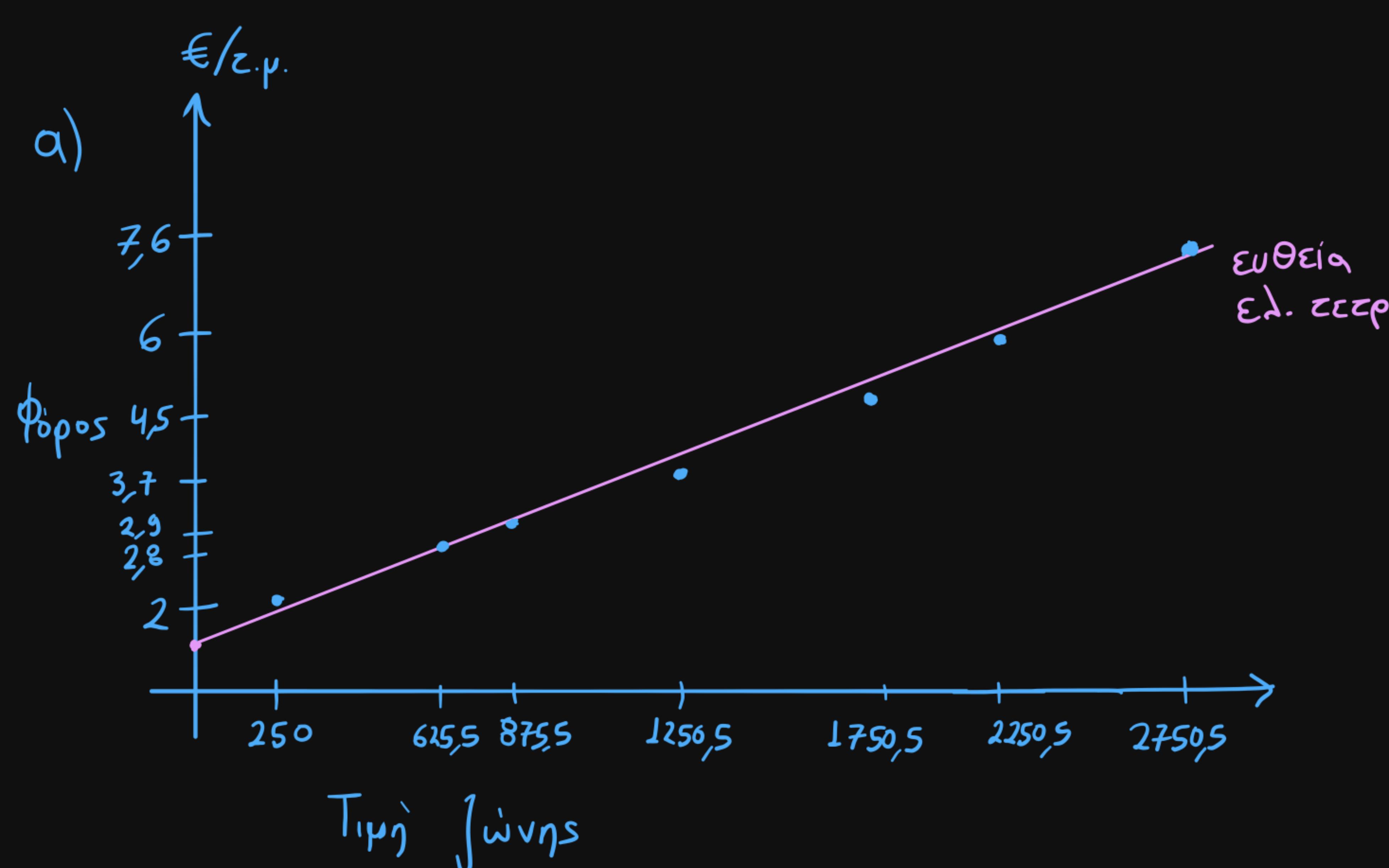
$$\gamma) \cdot 1 - \alpha = 0,99 \Leftrightarrow \alpha = 0,01 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$$

$$\cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,995} = 2,57$$

$$\cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{0,995} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = (20050 - 18230) \pm 2,57 \sqrt{\frac{3080^2}{200} + \frac{3950^2}{190}}$$

$$\rightarrow [894, 2745], \text{ δηλαδή οι μισθοί έχουν μειωθεί κατά μεγάλο βαθμό.}$$





Φαίνεται πως υπάρχει ισχυρή γραμμική σχέση ($r > 0,9$).

Θέμα 5^ο
Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η φορολογική κλίμακα για τον ΕΝΙΑΙΟ Φόρο Ιδιοκτησίας Ακινήτων (ΕΝΦΙΑ). Για τη 7 φορολογικές ζώνες ακινήτων (στήλη 1) δίνεται το διάστημα τιμών ζώνης (από / εώς) σε Ευρώ ανά τετραγωνικό μέτρο (τ.μ.) (στήλη 2 και 3) και ο αντίστοιχος φόρος σε Ευρώ ανά τετραγωνικό μέτρο (τ.μ.) (στήλη 4).

Φορολογική Ζώνη	Τιμή Ζώνης (Ευρώ/τμ) από	Τιμή Ζώνης (Ευρώ/τμ) εώς	Φόρος (Ευρώ/τμ)
1	0	500	2
2	501	750	2,8
3	751	1000	2,9
4	1001	1500	3,7
5	1501	2000	4,5
6	2001	2500	6
7	2501	3000	7,6

(α) Κάνετε ένα κατάλληλο διάγραμμα (διάγραμμα διασποράς) που δείχνει την αύξηση του φόρου με την τιμή ζώνης για την τιμή ζώνης χρησιμοποιούμενη το μέσο όρο της τιμής ζώνης (ημιάθροισμα τιμής «από» και «εώς»). Φαίνεται η αύξηση να είναι γραμμική;

(β) Σε συνέχεια του (α), βρείτε κατάλληλο μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης που να υπολογίζει το φόρο για κάθε τιμή ζώνης (με τη μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων). Σχηματίστε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων στο σχήμα του (α).

(γ) Υπολογίστε, αν γίνεται, το φόρο που θα πρέπει να πληρώσει κάποιος για ακίνητο σε περιοχή με τιμή ζώνης 1200 Ευρώ/τμ σύμφωνα με το μοντέλο που βρήκατε στο (β). Το ίδιο για τιμής ζώνης 4000 Ευρώ/τμ.

[1/2 μονάδες]

$$\beta) \cdot \sum_{i=1}^7 x_i y_i = 51699,8 \quad \cdot \bar{x} = 1393,28 \quad \cdot \bar{y} = 4,214$$

$$\cdot S_{XY} = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} \right) = \frac{1}{6} (51699,8 - 7 \cdot 1393,28 \cdot 4,214) \Leftrightarrow S_{XY} = 1766,8$$

$$\cdot S_x^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{6} (18478251,5 - 7 \cdot 1941229,158) \Leftrightarrow S_x^2 = 814941,23$$

$$\cdot b = \frac{S_{XY}}{S_x^2} \Leftrightarrow b = 2,16 \cdot 10^{-3}$$

$$\cdot a = \bar{y} - b \bar{x} = 4,214 - 2,16 \cdot 10^{-3} \cdot 1393,28 \Leftrightarrow a = 1,204$$

Aπο y = 1,204 + 2,16 \cdot 10^{-3} x

$$\gamma) \cdot Για x=1200 : y = 1,204 + 2,16 \cdot 10^{-3} \cdot 1200 \Leftrightarrow \boxed{y = 3,796}$$

• Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε για x = 4000 επειδή έχουμε δεδομένα για x από 0 έως 3000.
(Δεν θα είναι καλή η εκτίμηση)

Λύσεις Φεβρουαρίου 2020

(για τις υπόλοιπες λύσεις δες στην αρχείο "Συλλογή Λυμένων Θεμάτων")

A

$$a) P = (1 - 0,2)^4 \cdot 0,2 = 0,8^4 \cdot 0,2 \Leftrightarrow P = 0,081$$

(Τύπος γεωμετρικής)

$$\beta) E(x) = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} = \frac{0,8}{0,2} = 4 \quad \left(\begin{array}{l} \text{μέσος αριθμός} \\ \text{αποευκλών} \end{array} \right)$$

$$\text{άρα } 4 + 1 = 5 \quad (\text{μέσος αριθμός κλήσεων})$$

Θέμα 2°

(A)

Υποθέστε ότι κάθε τηλεφωνική κλήση σας προς ένα δημοφιλή ραδιοφωνικό σταθμό έχει πιθανότητα 0,20 για σύνδεση, δηλαδή να μην είναι απασχολημένη η γραμμή. Υποθέτουμε, ακόμη, ότι οι τηλεφωνικές κλήσεις είναι στατιστικά ανεξάρτητες.

- (α) Ποια η πιθανότητα να συνδεθείτε με το ραδιοφωνικό σταθμό στην πέμπτη τηλεφωνική σας κλήση;
- (β) Ποιος ο μέσος αριθμός τηλεφωνικών κλήσεων για να συνδεθείτε με τον ραδιοφωνικό σταθμό;

(B)

Σε μία συσκευή λήψης σημάτων, ο αριθμός σημάτων ακολουθεί Poisson κατανομή με μέση συχνότητα πέντε σήματα ανά λεπτό.

- (α) Ποια η πιθανότητα ότι σε διάστημα μισού λεπτού η συσκευή δεν λαμβάνει κανένα σήμα;
- (β) Ποια η πιθανότητα ότι η πρώτη λήψη συμβαίνει μεταξύ 10 και 20 δευτερόλεπτα μετά την έναρξη λειτουργίας της συσκευής;
- (γ) Με προσέγγιση Κανονικής Κατανομής να εκτιμηθεί η πιθανότητα ότι σε διάστημα 5 λεπτών η συσκευή θα λάβει το πολύ 25 σήματα.

[2,5 μονάδες]

B

$$a) \cdot E(x) = \lambda = 5$$

$$\cdot P(x=0) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^x}{x!} \underset{\text{και } t=0,5}{\xrightarrow{x=0}} e^{-5 \cdot 0,5} \cdot \frac{(5 \cdot 0,5)^0}{0!} = e^{-2,5} \underset{\simeq 0,082}{\circlearrowright}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{β' τρόπος,} \\ \text{χρήση} \\ \text{εκθετικής} \end{array} \quad P(x \geq 0,5) = 1 - P(x < 0,5) = 1 - (1 - e^{-5 \cdot 0,5}) = e^{-5 \cdot 0,5} = e^{-2,5} \simeq 0,082 \right)$$

$$\beta) \cdot \underbrace{P(x=0)}_{\begin{array}{l} \text{καμία λήψη} \\ \text{για } t=\frac{1}{6} \end{array}} \cdot \underbrace{P(x \geq 1)}_{\begin{array}{l} \text{πρώτη λήψη} \\ \text{για } t=\frac{1}{6} \end{array}} = e^{-5 \cdot \frac{1}{6}} \cdot \frac{(5 \cdot \frac{1}{6})^0}{0!} \cdot (1 - P(x=0)) = e^{-\frac{5}{6}} \cdot (1 - e^{-\frac{5}{6}}) \underset{\simeq 0,245}{\circlearrowright}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{β' τρόπος,} \\ \text{χρήση} \\ \text{εκθετικής} \end{array} \quad P\left(\frac{1}{6} < X < \frac{2}{6}\right) = P\left(\frac{2}{6}\right) - P\left(\frac{1}{6}\right) = 1 - e^{-\frac{5 \cdot 2}{6}} - (1 - e^{-\frac{5 \cdot 1}{6}}) = -e^{-\frac{10}{6}} + e^{-\frac{5}{6}} \simeq 0,245 \right)$$

$$\gamma) \cdot P(X \leq 25) \quad \mu \epsilon \lambda t = 5 \cdot 5 = 25$$

$$\frac{\lambda t}{2} \quad \frac{\lambda t}{2}$$

• Προσεγγιση κανονικής κατανομής: $Y \sim N(25, 25)$

$$\text{οπότε } P(X \leq 25) \simeq P(Y \leq 25 + 0,5) = P(Y \leq 25,5) = \Phi\left(\frac{25,5 - 25}{\sqrt{25}}\right) = \Phi(0,1) \underset{= 0,5398}{\circlearrowright}$$

continuity correction (εφαρμόζεται όταν έχουμε
η προσεγγιση διακρίσης σε συνεχή)

- If $P(X=n)$ use $P(n-0,5 < X < n+0,5)$
- If $P(X > n)$ use $P(X > n+0,5)$
- If $P(X \leq n)$ use $P(X < n+0,5)$
- If $P(X < n)$ use $P(X < n-0,5)$
- If $P(X \geq n)$ use $P(X > n-0,5)$

$$a) \cdot F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\frac{x}{50}}$$

$$\cdot \text{Για } X=60 : F(60) = 1 - e^{-\frac{60}{50}} \approx 0,698$$

$$\cdot P(A) = P((C_1 \cap C_2) \cup (C_3 \cap C_4))$$

$$= P(C_1 \cap C_2) + P(C_3 \cap C_4) - P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4)$$

$$= P(C_1) \cdot P(C_2) + P(C_3) \cdot P(C_4) - P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_3) \cdot P(C_4) \xrightleftharpoons[P(C_1)=P(C_2)=P(C_3)=P(C_4)=P(X \geq 60)]{=} (1 - P(X < 60)) = 1 - 0,698 = 0,302$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0,302^2 + 0,302^2 - 0,302^4 \Leftrightarrow \boxed{P(A) = 0,174}$$

$$\beta) \cdot \text{Έχουμε } P(X > x) = 1 - P(X < x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\frac{x}{50}} \quad \left(\begin{array}{l} x = \text{χρόνος λειτουργίας} \\ \text{διακόπτη} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = P(C_4) \\ = e^{-\frac{x}{50}} \end{array} \right)$$

$$\cdot \text{Όποιες } (1) \Leftrightarrow F(x) = 2 \cdot e^{-\frac{2x}{50}} - e^{-\frac{4x}{50}}$$

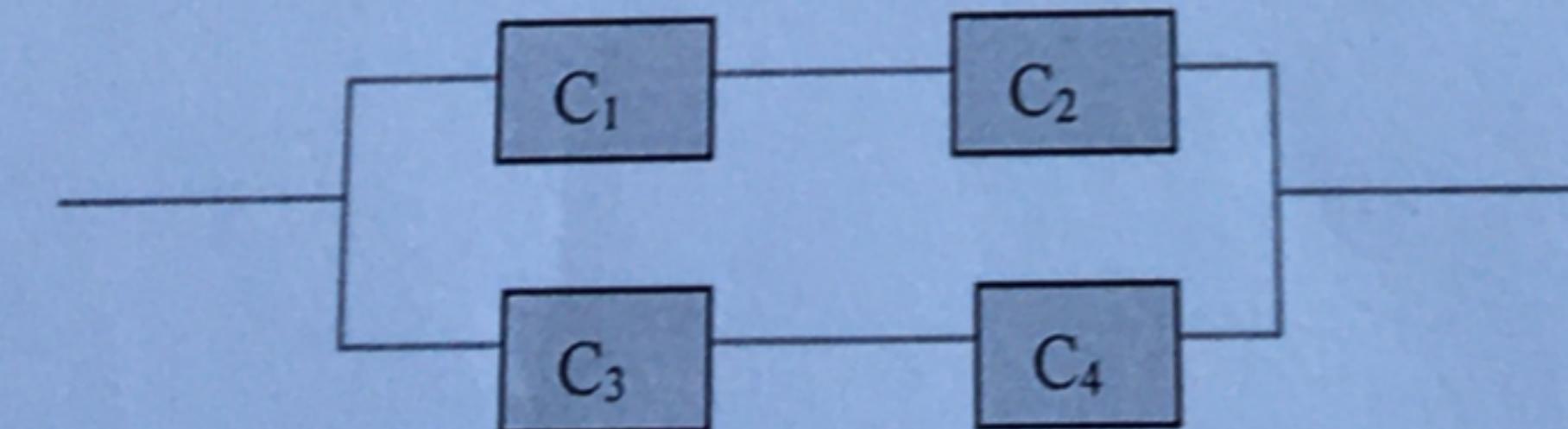
$$\text{και } f(x) = \frac{dF}{dx} = 2 \cdot \left(-\frac{2}{50}\right) \cdot e^{-\frac{2x}{50}} + \frac{4}{50} \cdot e^{-\frac{4x}{50}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{50} \cdot e^{-\frac{2x}{50}} \left(e^{-\frac{2x}{50}} - 1 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{2}{25} e^{-\frac{x}{25}} \left(e^{-\frac{x}{25}} - 1 \right)}$$

Θέμα 3^o

Στο παρακάτω σύστημα ο χρόνος καλής λειτουργίας, T , των διακοπτών C_1, C_2, C_3, C_4 είναι τυχαία μεταβλητή με σ.π.π. εκθετικής μορφής, $f(x) = (1/50)e^{-(1/50)x}$. Οι διακόπτες λειτουργούν στατιστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους.

- (α) Ποια η πιθανότητα ότι το σύστημα δεν έχει σταματήσει μετά από 60 ώρες συνεχούς λειτουργίας του;
 (β) Να ευρεθεί η σ.π.π. $f_T(t)$ του χρόνου λειτουργίας του συστήματος.



[2 μονάδες]