技术经济学
Technological Economics

潘丹
北京科技大学 机械工程学院
2021年11月

第三章 资金时间价值及其等值计算

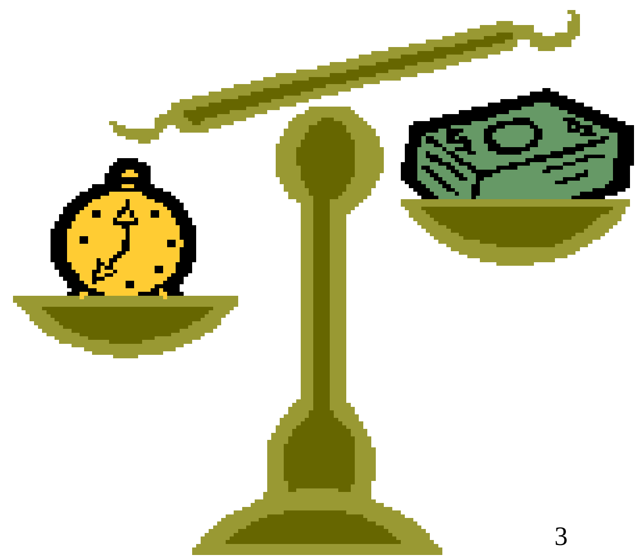
第一节 资金的时间价值——概念

一、资金的时间价值概念

资金随时间推移而增值的性质称资金的时间价值

二、资金具有时间价值的前提条件

- 经过时间的推移
- 经过劳动生产的周转



第一节 资金的时间价值——概念

三、产生条件

- 货币增值因素
- 通货膨胀因素
- 时间风险因素

四、衡量尺度

- 绝对尺度

  ——利息
- 相对尺度

  ——利率

第一节 资金的时间价值——利息和利率

（一）利息和利率

- 利息 I： 占用资金所付的代价或放弃使用资金所得的补偿
- 利率 i： 在一个计息周期内所得的利息额与借贷金额之比
- 计息周期：表示利率的时间单位
- 影响利率的主要因素
  - 社会平均利润率
  - 金融市场上借贷资本的供求关系
  - 通货膨胀
  - 期限
  - 风险

第一节 资金的时间价值——利息和利率

（二）单利和复利

- 单利：仅计算本金的利息，而本金产生的利息不再计算利息。 ——“利不生利”。

$$I_t = P \cdot i$$

$$I = P \cdot n \cdot i$$

$$F_n = P(1 + i \cdot n)$$

n——计息期数

F——本利和

$\mathbf{I_t}$—— 第t个计息期的利息

$$\boxed{I_1 = I_2 = \cdots\cdots I_n}$$

例：第0年末存入1000元，年利率6%，4年末可取多少钱？

年 末	年末利息	年末本利和
0	0	1000
1	1000×6%=60	1060
2	1000×6%=60	1120
3	1000×6%=60	1180
4	1000×6%=60	1240

$$I = 1000 \times 4 \times 6\% = 240$$

$$F = 1000 + 240 = 1240$$

第一节 资金的时间价值——利息和利率

（二）单利和复利

- 复利：当期利息计入下期本金一同计息，即利息也生息。

  ——“利滚利”

$$I_1 = P \cdot i \qquad F_1 = P + I_1 = P \cdot (1+i)$$

$$I_2 = F_1 \cdot i \qquad F_2 = F_1 + I_2 = F_1 (1+i) = P \cdot (1+i)^2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$I_n = F_{n-1} \cdot i \qquad F_n = P \cdot (1+i)^n$$

例：第0年末存入1000元，年利率6%，4年末可取多少钱？

年 末	年末利息	年末本利和
0	0	1000
1	1000×6%=60	1060
2	1060×6%=63.60	1123.60
3	1123.60×6%=67.42	1191.02
4	1191.02×6%=71.46	1262.48

- 本金越大，利率越高，年数越多时，两者差距就越大

第一节 资金的时间价值——利息和利率

（三）名义利率和实际利率

- 当利率的时间单位与计息周期不一致时，若采用复利计息，会产生名义利率与实际利率不一致问题
- 名义利率：计息周期利率乘以每年计息周期数得到的年利率
- 实际利率：考虑了资金时间价值的实际年利率

例如：年利率为12%，每年计息1次

——12%即为名义利率又为实际利率

年利率为12%，每年计息12次

——12%为名义利率，实际相当于月利率为1%

第一节 资金的时间价值——利息和利率

（三）名义利率和实际利率

名义利率和实际利率的关系

设：名义利率为r，一年中计息次数为m，则：计息周期的利率应为r / m，一年后本利和为:

$$F = P(1 + r/m)^m$$

一年内产生的利息为：

$$I = F - P = P[(1 + r/m)^m - 1]$$

按利率定义得年实际利率i为：

$$i = I/P = (1 + r/m)^m - 1$$

【例】年利率为12%，存款额1000元，期限1年。试按：1年1次复利计息；1年4次按季度计息；1年12次按月计息，这三种情况下的实际利率和本利和分别是多少？

名义利率	计息周期	年计息次数	周期利率	实际利率	本利和
12%	年	1	12%	12%	F=1000× (1+12%)=1120
	季度	4	3%		$F=1000\times(1+3\%)^4=1125.51$
	月	12	1%		$F=1000\times(1+1\%)^{12}=1126.83$

第二节 资金等值——概念

资金等值的概念

不同时点上绝对数额不等的资金具有相同的价值，或相同数额的资金在不同的时点上具有不同的价值。

例如：今天拟用于购买冰箱的1000元，与放弃购买去投资一个收益率为6%的项目，在来年获得的1060元相比，二者具有相同的经济价值。

推论：如果两笔资金等值，则这两笔资金在任何时点处都相等（简称“等值”）。

第二节 资金等值——概念

现在值（Present Value 现值）

未来时点上的资金折现到现在时点的资金价值。

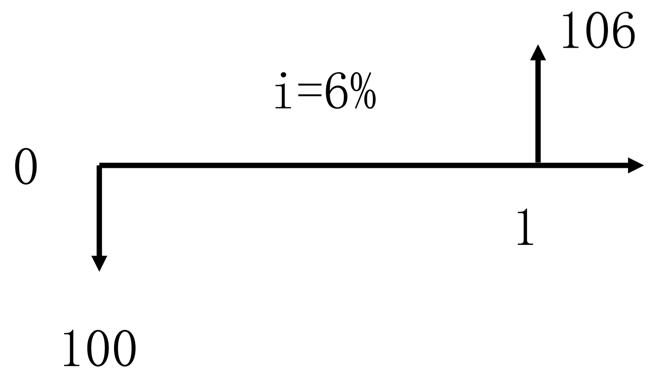
将来值（Future Value 终值）

与现值等价的未来某时点的资金价值。

折现（Discount 贴现）

把将来某一时点上的资金换算成与现在时点相等值的金额的换算过程。

例：定期一年存款100元，年利率6％，一年后本利和106元。这100元就是现值，106元是其一年后的终值。终值与现值可以相互等价交换，把一年后的106元换算成现在的值100元的折算过程就是折现：



第二节 资金等值
——现金流量和现金流量图

（一）现金流量

- 现金流出：相对某个系统，指在某一时点上流出系统的资金或货币量，如投资、成本费用等（CO——case out）

- 现金流入：相对一个系统，指在某一时点上流入系统的资金或货币量，如销售收入等。 (CI——case in)

- 净现金流量:同一时点上，现金流入与现金流出的代数和。

净现金流量= 现金流入 － 现金流出

现金流量（cash flow）：在特定的经济系统内，在一定的时期内，现金流入与现金流出的总和。

理解

特定的经济系统

同一个现金流量对不同的系统有不同的结果

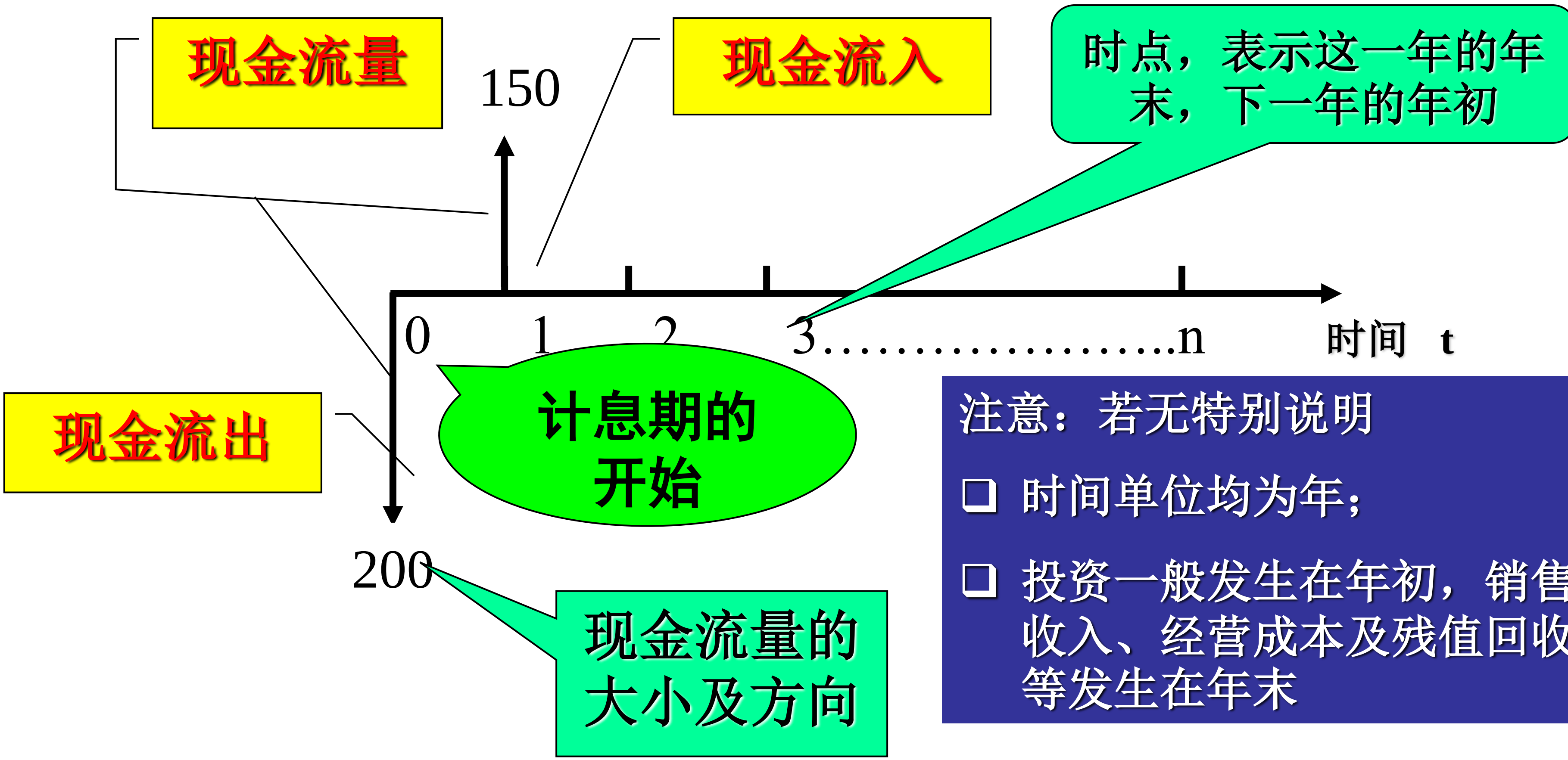
在一定的时期内

每一笔现金的流入、流出都对应着相应的时点

“现金”

真实发生所有权关系的变动

（二）现金流量图

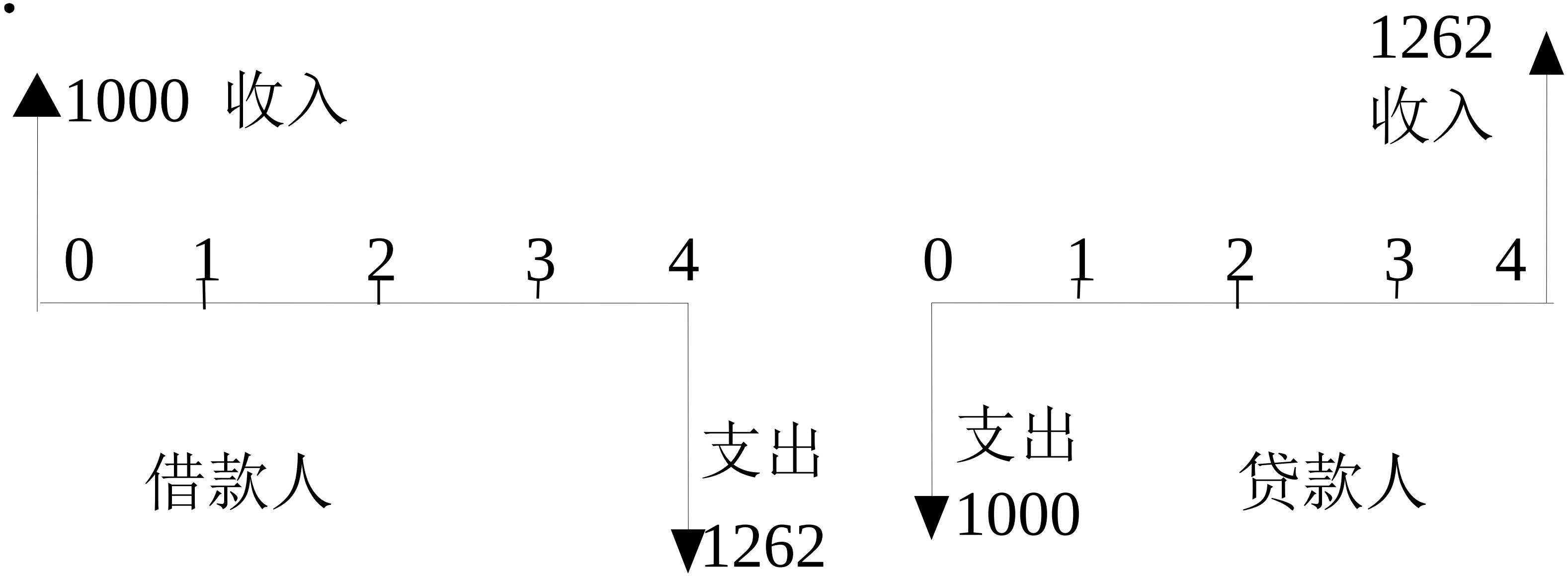


注意：若无特别说明

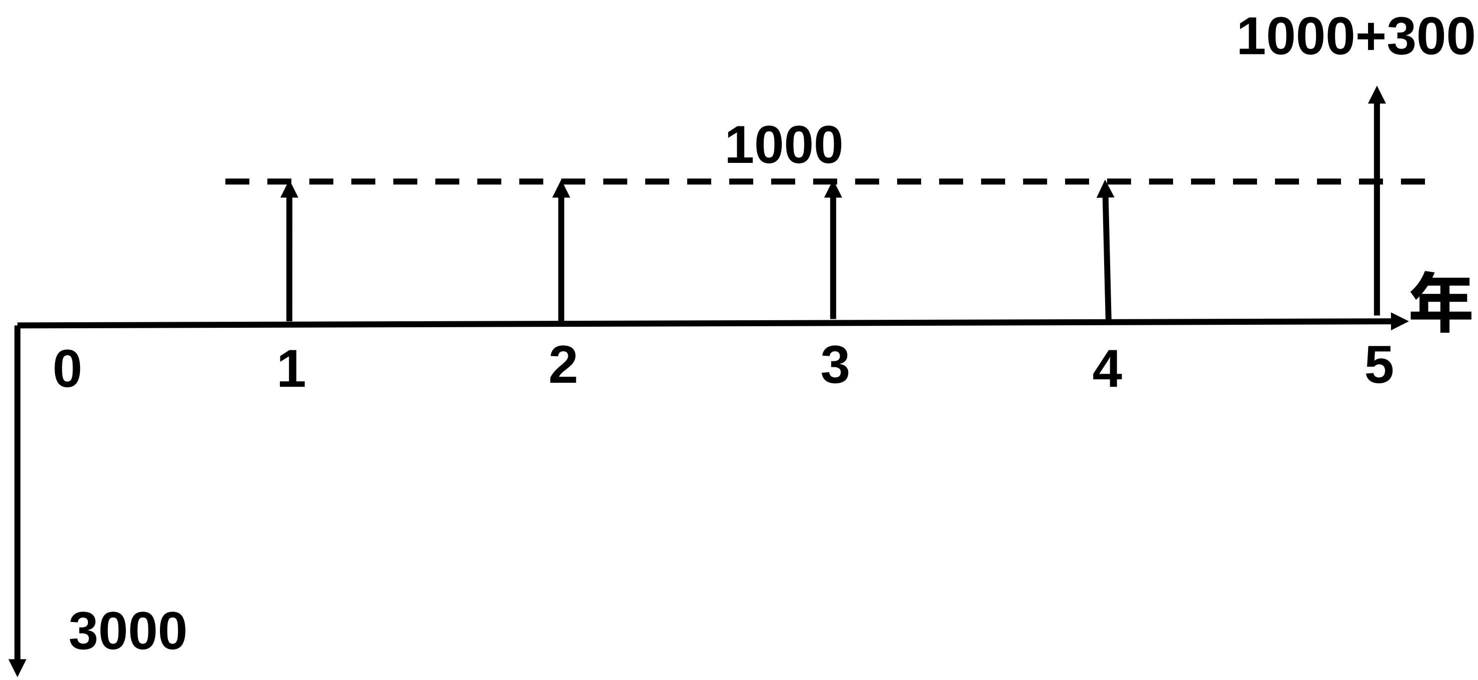
- 时间单位均为年；
- 投资一般发生在年初，销售收入、经营成本及残值回收等发生在年末

现金流量图的观点：

例：



【例】：某工程项目预计期初投资 3000 万元，自第一年起，每年末净现金流量为 1000 万元，计算期为 5 年，期末残值 300 万元，作出该项目的现金流量图（单位：万元）。



第二节 资金等值——计算公式

- 一次支付（整付）类型公式
  - 一次支付终值公式
  - 一次支付现值公式
- 等额支付类型公式
  - 等额支付系列终值公式
  - 等额支付系列偿债基金公式
- 现值与年金的换算公式
  - 等额支付系列资金回收公式
  - 等额支付系列现值公式

符号定义：

P — 现值

F — 将来值

i — 年利率

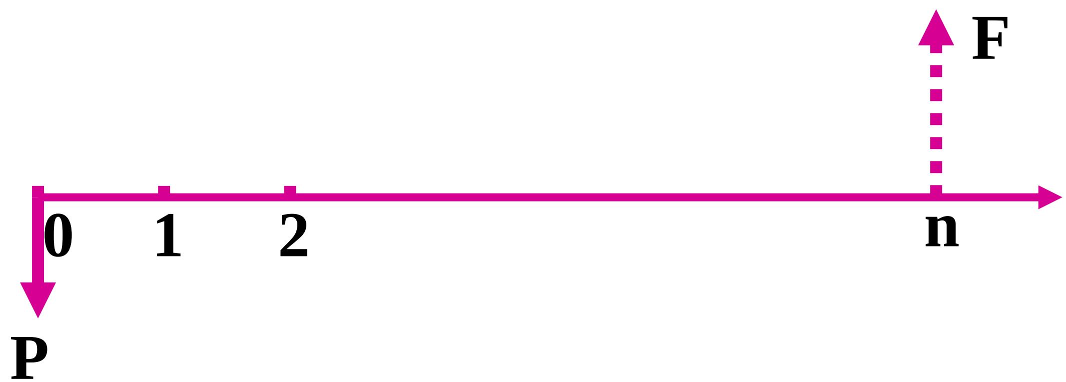
n — 计息期数

A — 年金（年值）

Annuity计息期末等额发生的现金流量

1、一次支付（整付）类型公式

——现值P与将来值（终值）F之间的换算



- 一次支付终值公式；
- 一次支付现值公式；

1、一次支付（整付）类型公式

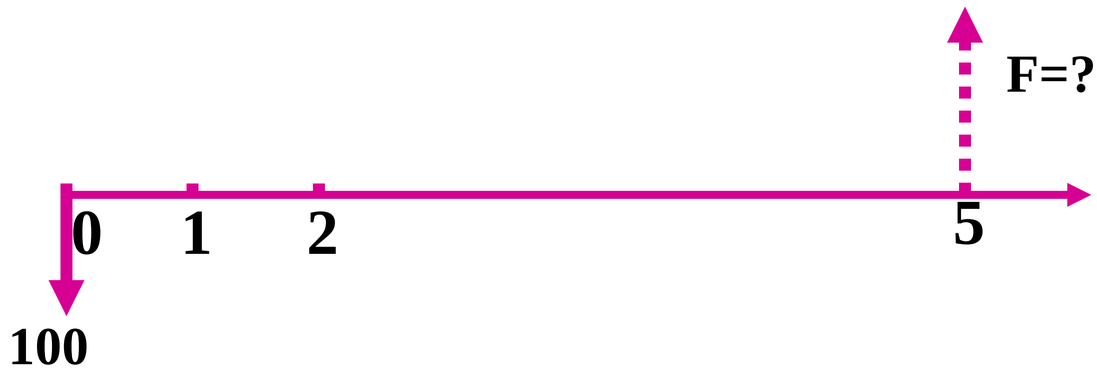
（1）一次支付终值公式

已知期初投资为*P*，利率为*i*，求第*n*年末收回的本利和（终值）*F*。

$$F = P(1+i)^n = P(F/P,i,n)$$

$(1+i)^n$ 称为一次支付终值系数，记为 $(F/P,i,n)$

例：某工程现向银行借款100万元，年利率为10%，借期5年，一次还清。问第五年末一次还银行本利和是多少？



解：$F = P(1+i)^n = 100（1+10\%）^5 = 161.05$（万元）

或 $F = P（F/P，i，n）$

$= 100（F/P，10\%，5）$(查复利表)

$= 100 \times 1.6105 = 161.05$（万元）

1、一次支付（整付）类型公式

（2）一次支付现值公式

已知未来第 n 年末将需要或获得资金F，利率为i，求期初所需的投资P 。

$$P = F(1+i)^{-n} = F（P/F，i，n）$$

$(1+i)^{-n}$— 一次支付现值系数，记作（P/F，i，n）

$F = P(F/P,i,n)$与$P = F(P/F,i,n)$互为逆运算

$(F/P,i,n)$与$(P/F,i,n)$互为倒数

例：某企业拟在今后第5年末能从银行取出20万元购置一台设备，如年利率10%，那么现应存入银行多少钱？

解：

$$P = 20 \times (1+10\%)^{-5}$$

$$= 20 \times 0.6209$$

$$= 12.418 \text{（万元）}$$

或

$$\boldsymbol{P = F\,(P/F,\ i,\ n)}$$

$$= 100\,(P/F,\ 10\%,\ 5)$$

$$= 100 \times 0.1242 = 12.42 \text{（万元）}$$

2、等额分付类型计算公式

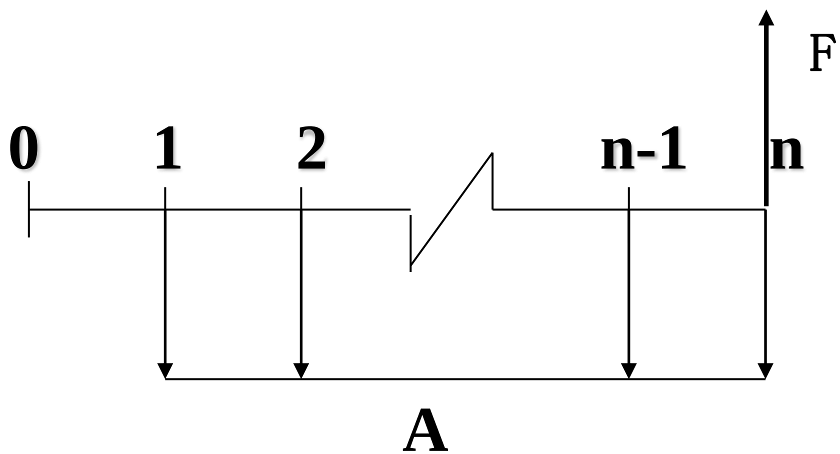
——年金A与将来值（终值）F之间的换算

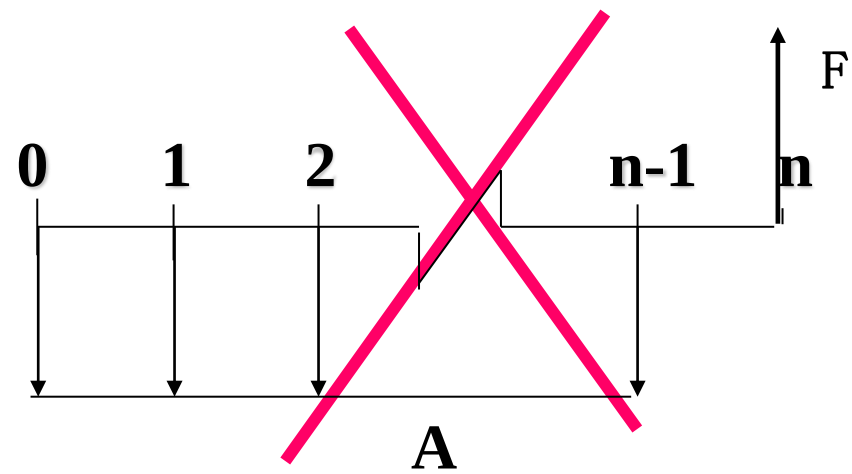
“等额分付” 的特点:在计算期内

1）每期支付是大小相等、方向相同的现金流，用年值A表示

2）支付间隔相同，通常为1年

3）每次支付均在每年年末。

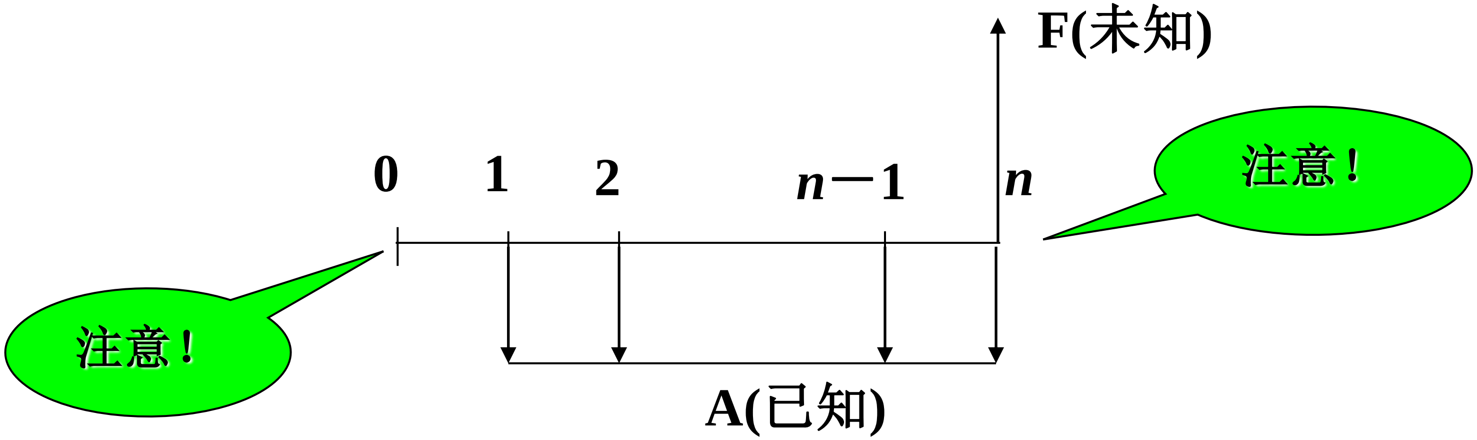




2、等额分付类型计算公式

(1) 等额支付系列终值公式

如果某人每年末存入资金A元，年利率为 i，n年后资金的本利和F为多少？



$$F = A + A(1+i) + \cdots + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-1}$$

$$F(1+i) = A(1+i) + A(1+i)^2 + \cdots + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^n$$

$$F(1+i)-F=-A+A(1+i)^n$$

$$Fi=A\left[(1+i)^n-1\right]$$

即 $F=A\dfrac{(1+i)^n-1}{i}=A$（$F/A$，$i$，$n$）

$\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$ —— **等额支付系列终值系数，记作**（F/A，i，n）

例：某人从 30岁起每年末向银行存入8000元，连续10年，若银行年利率为8%，问10年后共有多少本利和？

解：

$$F=A\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$=8000\times\frac{(1+8\%)^{10}-1}{8\%}=115892(\text{元})$$

或

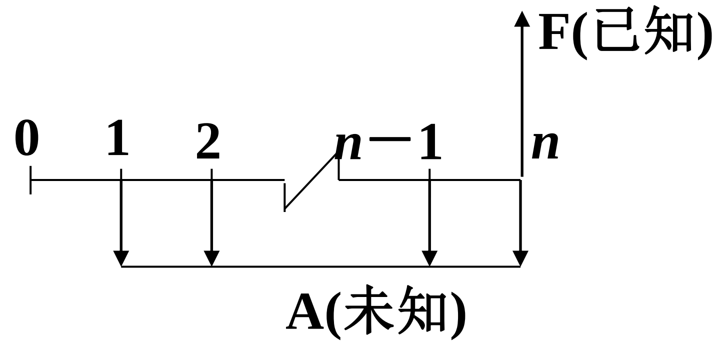
$$F=A(F/A,i,n)$$

$$=8000\times(F/A,8\%,5)=115892(\text{元})$$

2、等额分付类型计算公式

（2）等额支付系列偿债基金公式

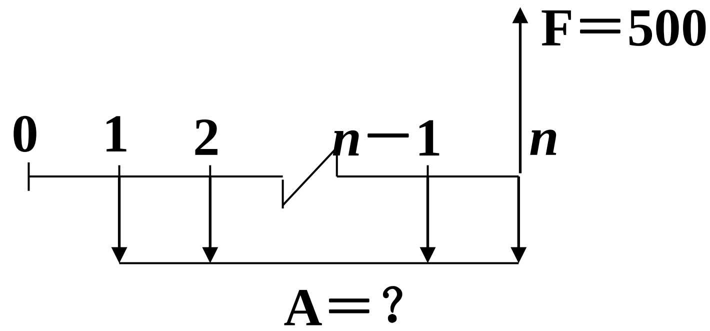
为了能在n年末筹集一笔资金来偿还到期债务F，按年利率i计算，拟从现在起至n年的每年年末等额存入一笔资金A，以便到n年末清偿。已知F，i，n，求A。



$$A = F\frac{i}{(1+i)^n-1} = F（A/F，i，n）$$

$$\frac{i}{(1+i)^n-1} = （A/F，i，n）$$ —— 等额支付系列偿债基金系数

例：某厂欲积累一笔设备更新基金，用于4年后更新设备。此项投资总额为500万元，银行利率12%，问每年末至少要存款多少？



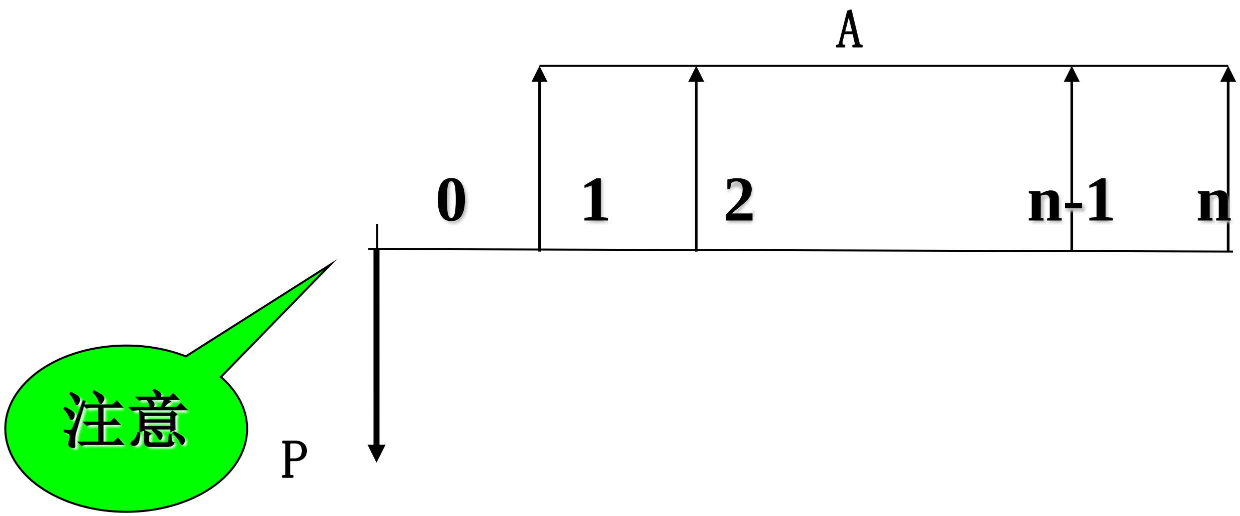
解:

$$A = 500 \times \frac{12\%}{(1+12\%)^4 - 1} = 104.62(万元)$$

或

$$A = 500 \times (A/F,12\%,4) = 104.62(万元)$$

3、现值与年金的换算公式



3、现值与年金的换算公式

（1）等额支付系列资金回收（恢复）公式

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

而 $$F = P(1+i)^n$$

于是 $$A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = P（A/P，i，n）$$

$\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$ ——资金回收系数，记作A/P，i，n)

（**capital recovery factor**）

例：某工程项目一次投资30000元，年利率8%，分5年每年年末等额回收，问每年至少回收多少才能收回全部投资?

解：

$$A=P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}=30000\frac{0.08(1+0.08)^5}{(1+0.08)^5-1}$$

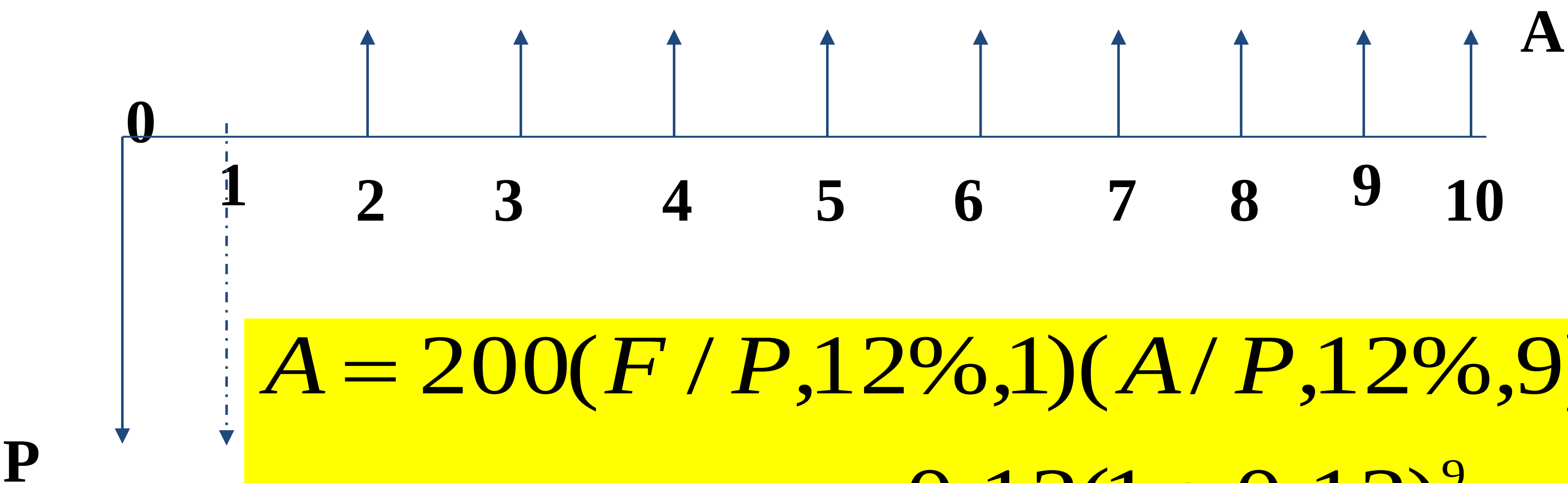
$$=7514\text{（元）}$$

- 例：某设备经济寿命为8年，预计年净收益20万元，残值为0，若投资者要求的收益率为20%，问投资者最多愿意出多少的价格购买该设备？
- 这一问题等同于在银行的利率为20%条件下，若存款者连续8年每年从银行取出20万元，则现在应存入银行多少钱？

$$P = 20 \times \frac{(1+20\%)^8 - 1}{20\%(1+20\%)^8} = 76.74$$

$$P = 20 \times (P/A, 20\%, 8) = 76.74$$

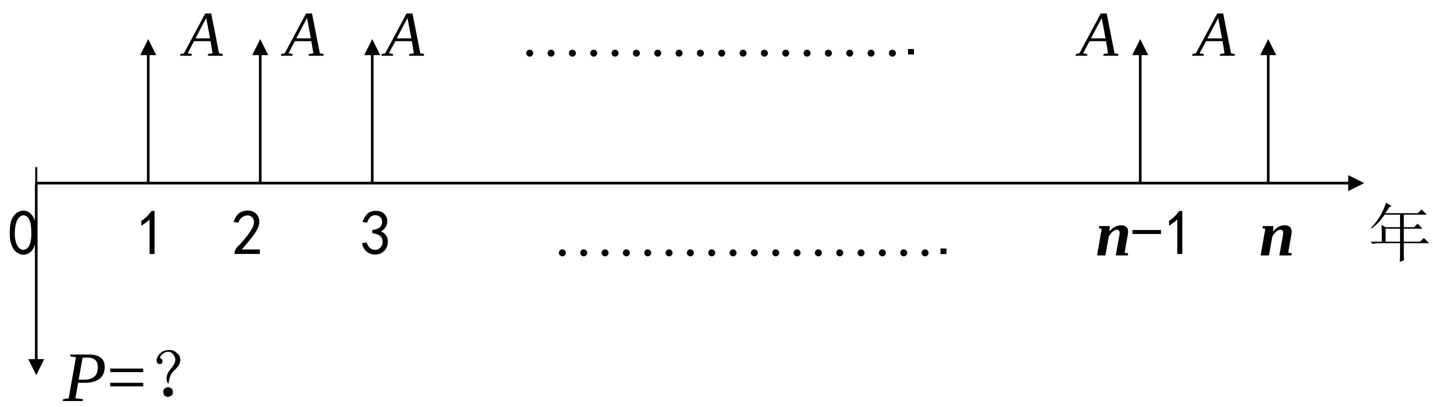
例：某新工程项目欲投资200万元，工程1年建成，生产经营期为9年，期末不计算余值。期望投资收益率为12%，问每年至少应等额回收多少金额？



$$
\begin{aligned}
A &= 200(F/P,12\%,1)(A/P,12\%,9) \\
&= 200(1+0.12)^{1}\left[\frac{0.12(1+0.12)^{9}}{(1+0.12)^{9}-1}\right] \\
&= 42.041（万元）
\end{aligned}
$$

3、现值与年金的换算公式

（2）等额支付系列现值公式



$$P=A\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}=A（P/A，i，n）$$

$\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$——等额支付系列现值系数，

记作（P/A，i，n）

例：某投资项目贷款200万元，银行4年内等额收回全部贷款，贷款利率为10%，那么项目每年的净收益不应少于多少万元？

解：

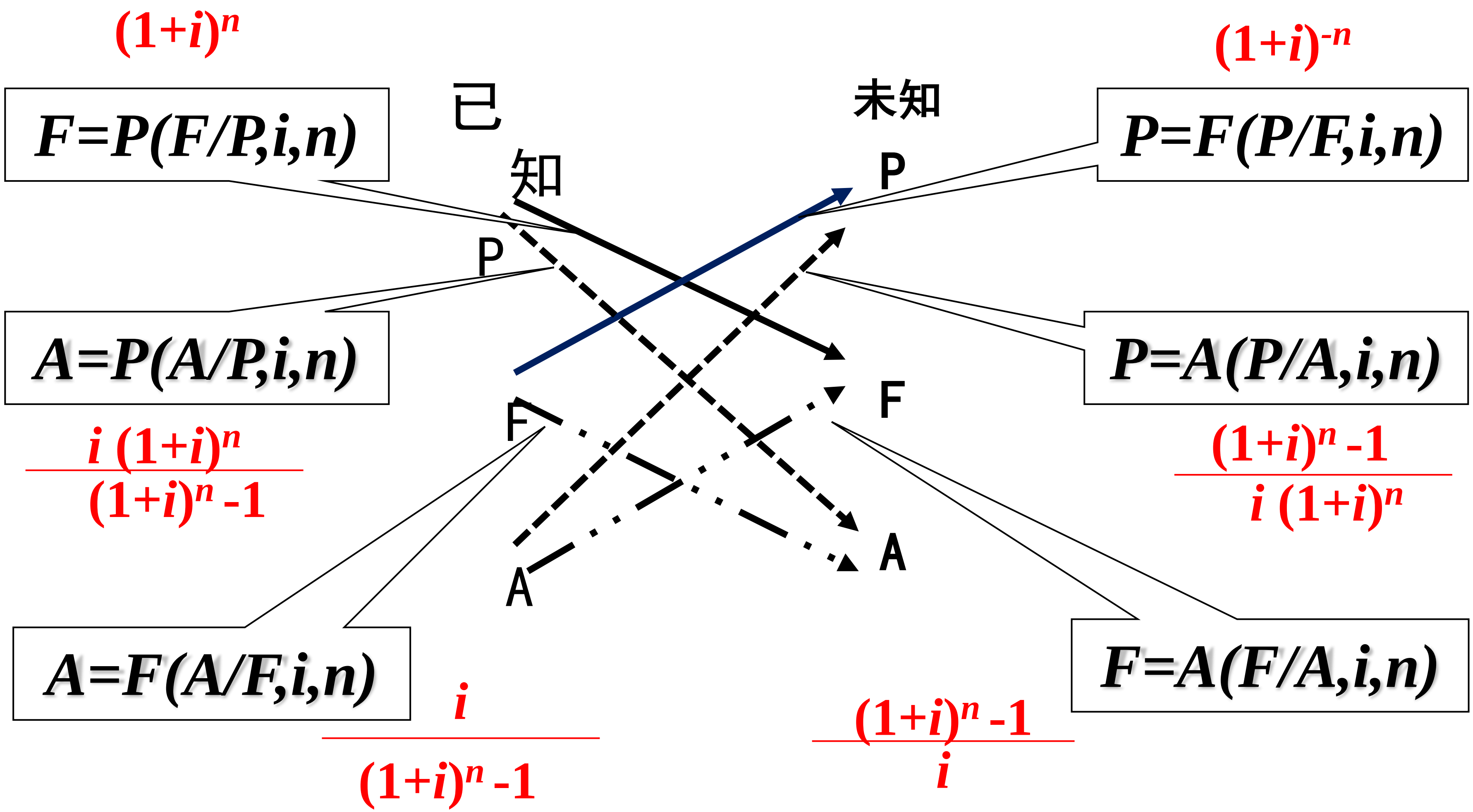
$$A = 200 \times \frac{10\%(1+10\%)^4}{(1+10\%)^4 - 1} = 63.09(万元)$$

或

$$A = 200 \times (A/P, 10\%, 4) = 63.09(万元)$$

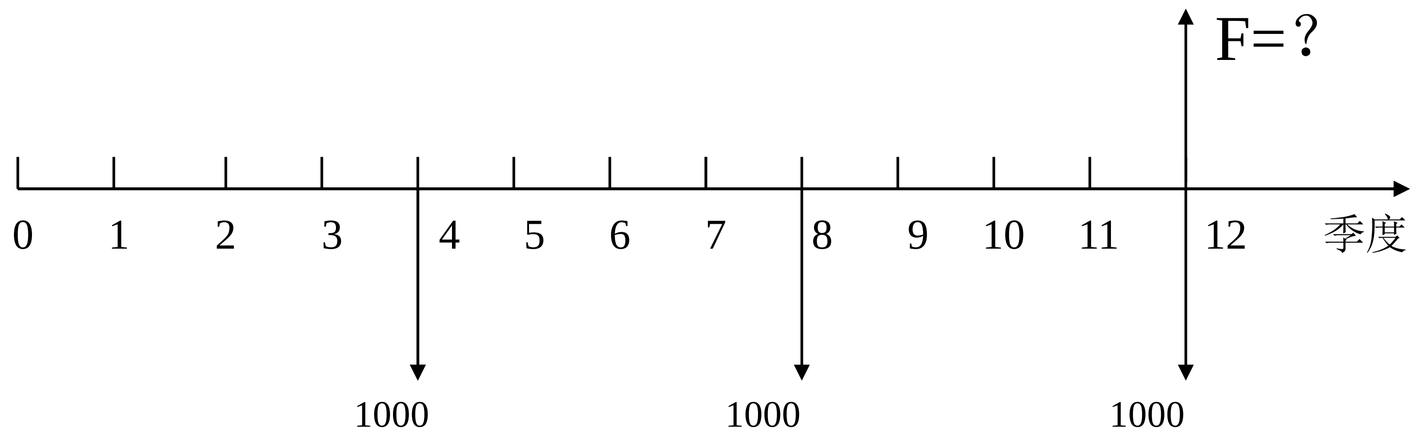
⑩ 3组互为逆运算的公式

⑩ 3对互为倒数的等值计算系数（复合利率）

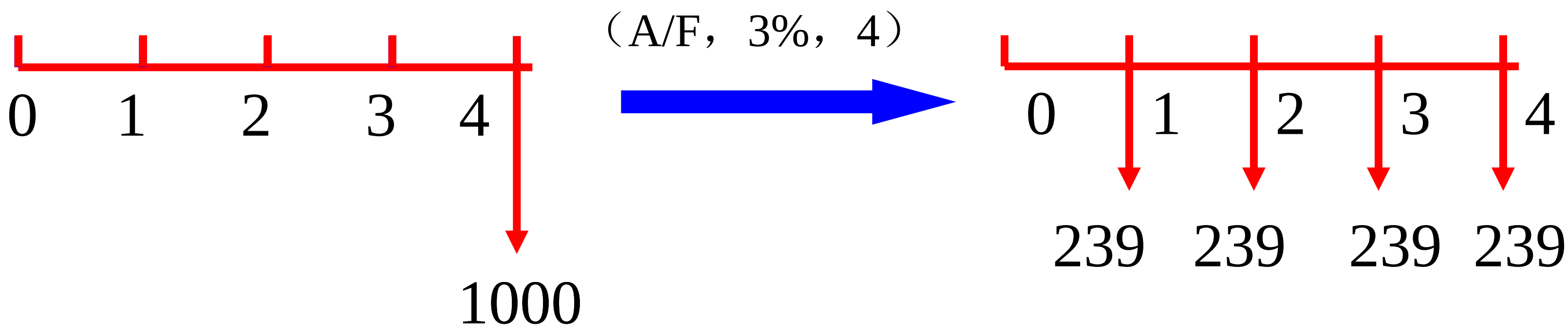


习题1：按年利率为12%，每季度计息一次计算利息，从现在起连续3年的年末等额支付借款为1000元，问与其等值的第3年年末的借款金额为多大？

解：　其现金流量如下图

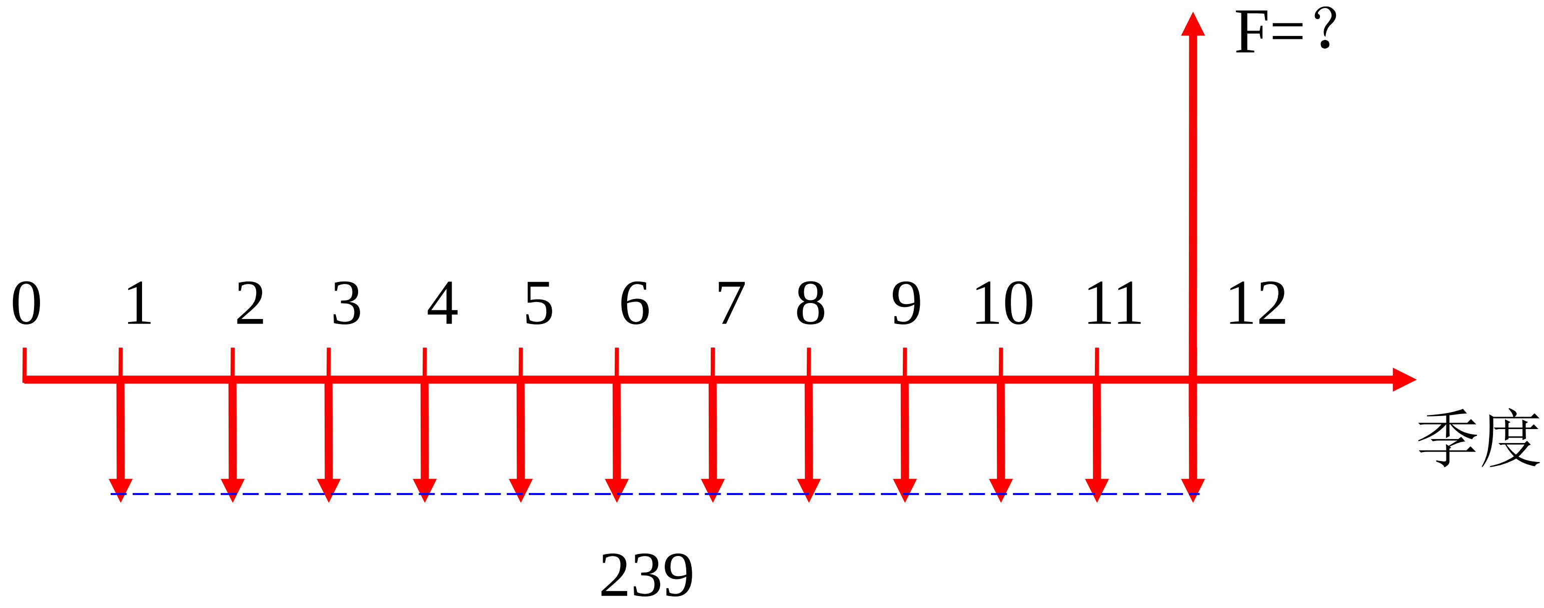


- 第一种方法：取一个循环周期，使这个周期的年末支付转变成等值的计息期末的等额支付系列，其现金流量见下图：



将年度支付转化为计息期末支付（单位：元）

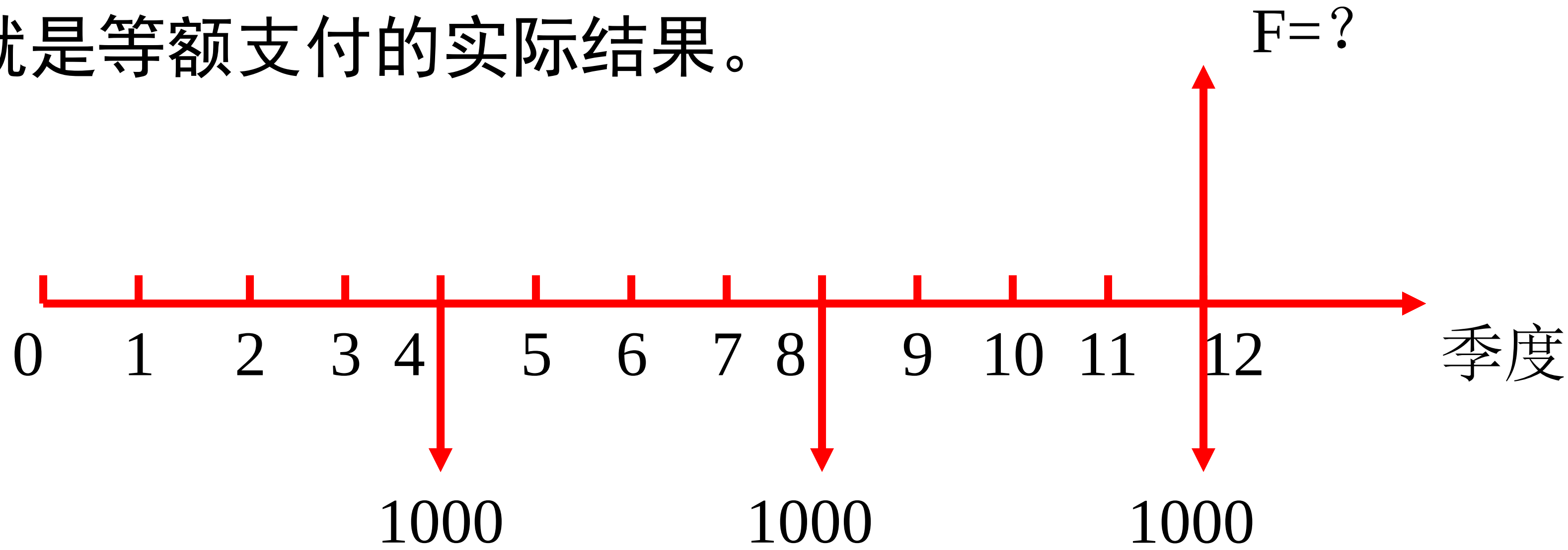
A=F（A/F，3%，4）=1000 ×0.2390=239元



经转变后计息期与支付期重合（单位：元）

F=A（F/A，3%，12）=239 ×14.192=3392元

第二种方法：把等额支付的每一个支付看作为一次支付，求出每个支付的将来值，然后把将来值加起来，这个和就是等额支付的实际结果。



F=1000(F/P，3%，8)+1000(F/P，3%,4)+1000=3392元

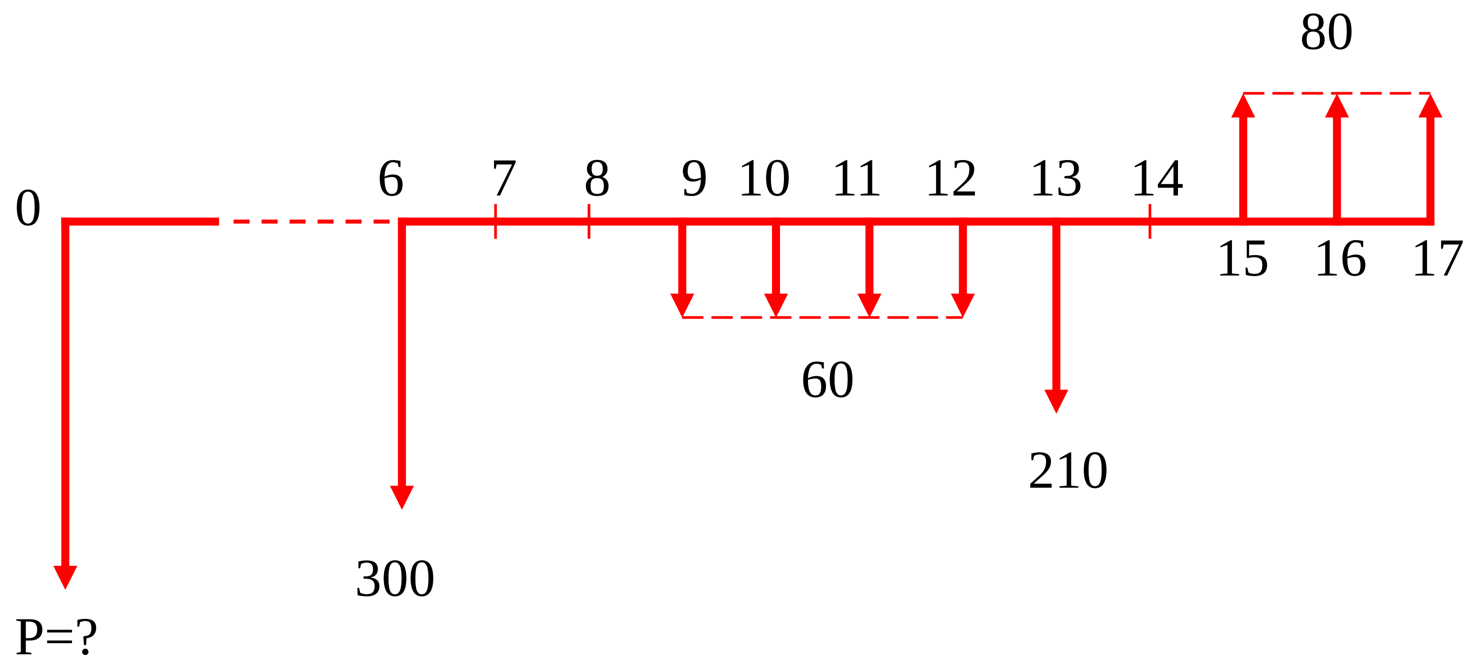
第三种方法：将名义利率转化为年有效利率，以一年为基础进行计算。

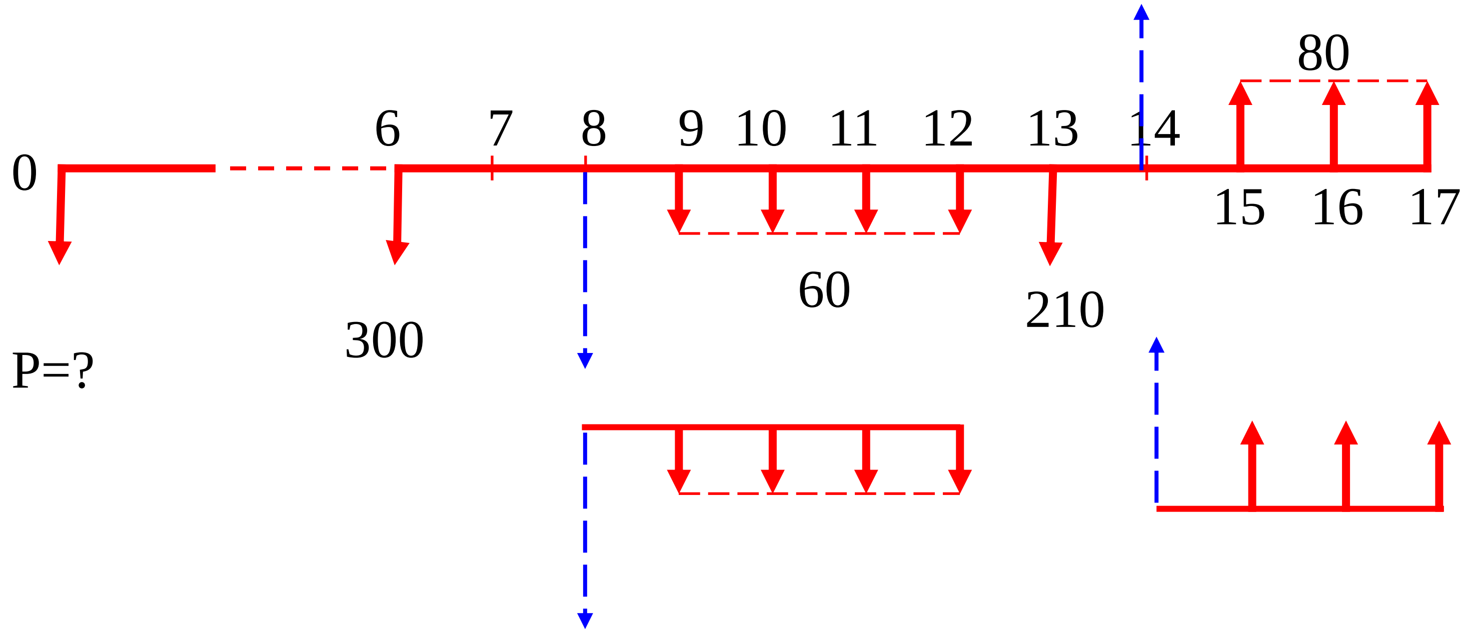
年实际利率是：

$$i=\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}-1=\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4}-1=12.55\%$$

$$F=A(F/A,12.55\%,3)=1000\times\frac{(1+i)^{n}-1}{i}=3392$$

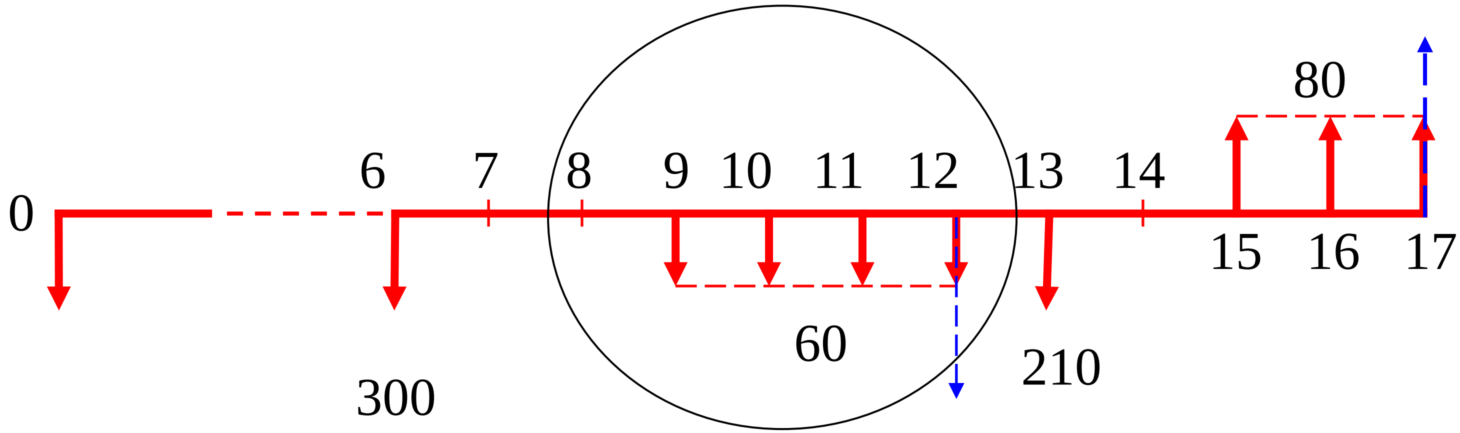
习题2：假定现金流量是：第6年年末支付300元，第9、10、11、12年末各支付60元，第13年年末支付210元，第15、16、17年年末各获得80元。按年利率5%计息，与此等值的现金流量的现值P为多少？



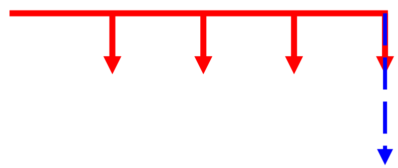


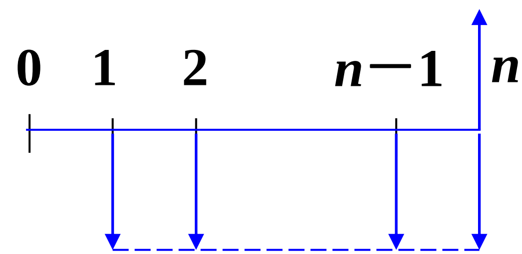
解:

$$P = -300(P/F,5\%,6) - 210(P/F,5\%,13) - 60(P/A,5\%,4)(P/F,5\%,8) + 80(P/A,5\%,3)(P/F,5\%,14) = -369.16$$



P=?

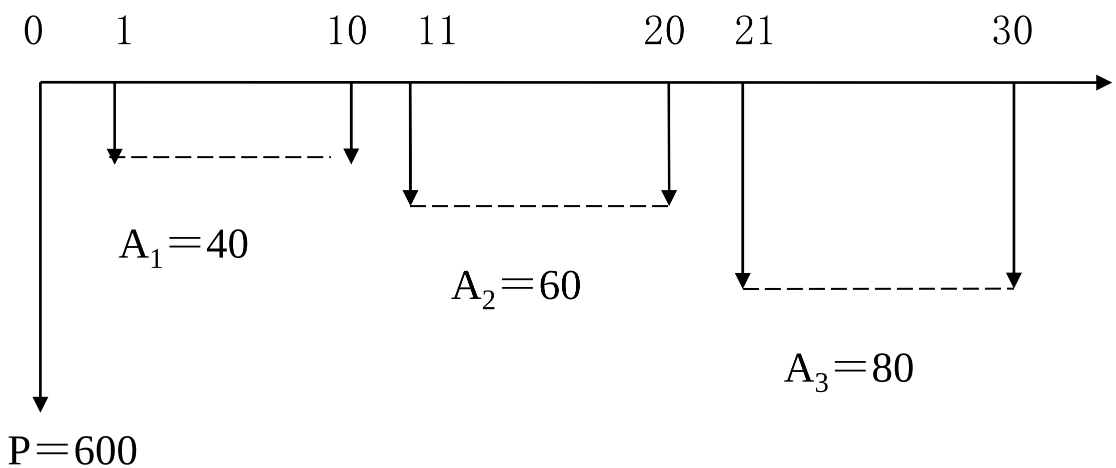




解：

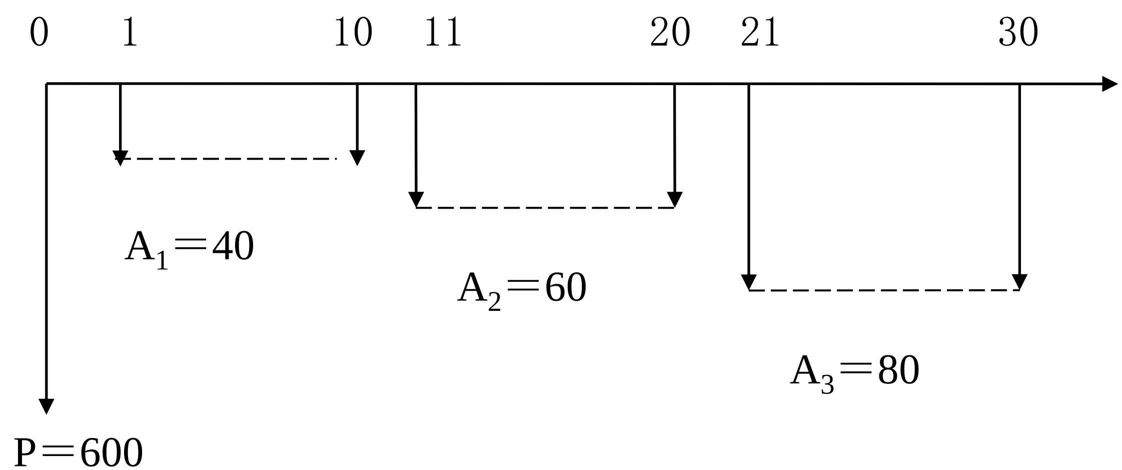
$$P=-300(P/F,\ 5\%,6)-210(P/F,\ 5\%,13)$$
$$-60(F/A,\ 5\%,4)(P/F,\ 5\%,12)$$
$$+80(F/A,\ 5\%,3)(P/F,\ 5\%,17)$$
$$=-369.16$$

习题3：某房地产开发商拟购买土地进行房地产开发，与土地开发商签订的土地出让协议如下：现时点支付600万元；第一个五年每半年支付40万；第二个五年每半年支付60万；第三个五年每半年支付80万。按复利计息，每半年利率4%。则按房地产开发商支付的土地出让价格相当于现时点的价值是多少？



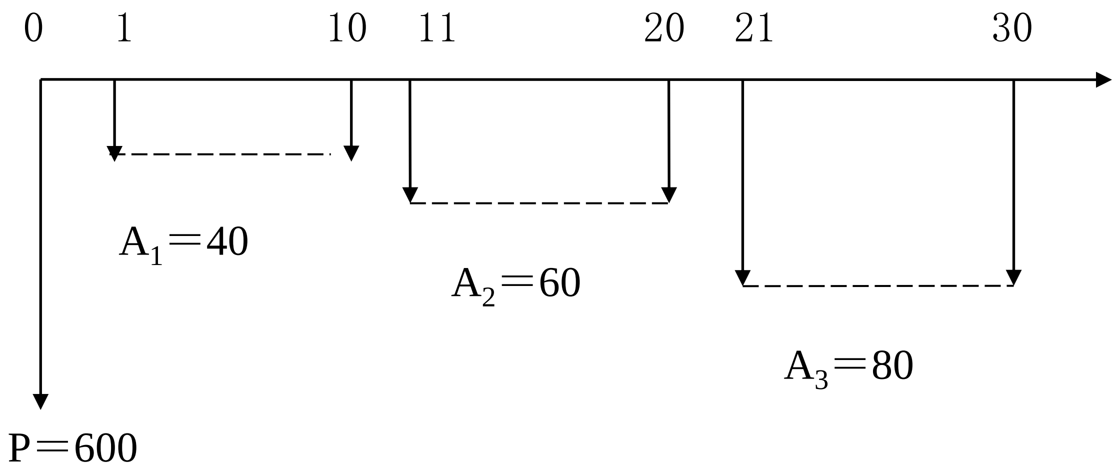
解法一：

$$P = 600 + 40\times(P/A,4\%,10) + 60\times(P/A,4\%,10)\times(P/F,4\%,10) + 80\times(P/A,4\%,10)\times(P/F,4\%,20) \approx 1549$$



解法二：

$$P = 600 + 80\times(P/A,4\%,30) - 20\times(P/A,4\%,20) - 20\times(P/A,4\%,10) \approx 1549$$



解法三：

$$P = 600 + 40 \times (P/A,4\%,30) + 20 \times (P/A,4\%,20) \times (P/F,4\%,10) + 20 \times (P/A,4\%,10) \times (P/F,4\%,20) \approx 1549$$