161130118 尹浚宇

Problem 1

1. 反设$L(n,m) \geq mn$，则一定可以从原数列中取出一段长为mn的数列，不妨令其为$a_1, \cdots, a_{mn}$，记$S=\sum_{i=1}^{mn} a_i$. 由题意有:

$$S=\sum_{i=1}^{mn} a_i=(a_1+\cdots+a_n)+\cdots+\left(a_{(m-1)n+1}+\cdots+a_{mn}\right)<0$$

同时

$$S=\sum_{i=1}^{mn} a_i=(a_1+\cdots+a_m)+\cdots+\left(a_{(n-1)m+1}+\cdots+a_{mn}\right)>0$$

矛盾，于是有$L(n,m)<mn$.

2. 反设$L(n,m) \geq m+n-1$，则一定可以从原数列中取出一段长为$m+n-1$的数列，不妨令其为$a_1, \cdots, a_{m+n-1}$. 不失一般性，令$n>m$，由题意有:

$$\begin{cases} a_1+\cdots+a_n<0 \\ a_2+\cdots+a_{n+1}<0 \\ \quad\quad\vdots \\ a_m+\cdots+a_{m+n-1}<0 \end{cases}$$

不难得到n不为m的整数倍，不失一般性，可令$n=km+r, 1 \leq r \leq m-1, k \geq 1$，其中$k$和$r$都是整数. 也就是说，可以将任意的连续$n$个数分为前$k$组连续的$m$个数和最后$r$个数. 由题意，连续$m$个数的和为正，于是有:

$$\begin{cases} a_{n-r+1}+\cdots+a_n<0 \\ a_{n-r+2}+\cdots+a_{n+1}<0 \\ \quad\quad\quad\vdots \\ a_{n-r+m}+\cdots+a_{m+n-1}<0 \end{cases}$$

记S为上面方程组不等号左边所有变量的和. 对该方程组逐行求和，易得$S<0$.
不难观察到，该方程组每一列均为连续的m个数，于是对该方程组逐列求和，有$S>0$.
矛盾，于是有$L(n,m)<m+n-1$.

Problem 2

不妨令该数列为$a_1, \cdots, a_n$，对于数列中任一元素a_i，定义三元组(x_i, y_i, z_i)，满足:
x_i：以a_i结尾的最长上升子序列的长度;
y_i：以a_i开头的最长下降子序列的长度;
z_i：以a_i结尾的最长常数子序列的长度.
在数列中任取a_i, a_j，不妨令$i<j$，有:
(1) $a_i>a_j: y_i>y_j$;
(2) $a_i<a_j: x_i<x_j$;
(3) $a_i=a_j: z_i<z_j$.
也就是说，对于数列中任意两个不同的元素，其对应的三元组也不同.
该数列一共产生n个不同的三元组，由于$n>srp$，所以这n个三元组中一定有一些位于区域$\{1, \cdots, s\} \times \{1, \cdots, r\} \times \{1, \cdots, p\}$之外，结合三元组的定义，命题得证.

Problem 3

1.

令$G(V,E)$为任意的n个顶点的d正则图. 对于V中每个顶点v, 以概率p独立地加入点集S. 令$X=|S|$, 易得$E[X]=np$. 对于V中顶点v, 定义性质1: 点v及其所有邻接点均不在S中. 定义指示变量Y_v, 满足:

$$Y_v=\begin{cases}1, & v\text{满足性质}1\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

定义随机变量Y, 表示满足性质 1 的点的数量, 易得$Y=\sum_{v\in V}Y_v$. 由期望的线性性质:

$$E[Y]=\sum_{v\in V}E[Y_v]=\sum_{v\in V}(1-p)^{d+1}=n(1-p)^{d+1}$$

注意到随机构造出的集合S不一定是支配集, 但此时如果恰当选择一些满足性质 1 的点加入集合S中就可得到一个支配集S^*, 最坏情况下需要把满足性质 1 的点全部加入集合S中, 于是有$|S^*|\le X+Y$. 由期望的线性性质:

$$E[|S^*|]\le E[X]+E[Y]=n\big(p+(1-p)^{d+1}\big)$$

$$p+(1-p)^{d+1}\le p+e^{-p(d+1)} \qquad (1-x\le e^{-x})$$

令$f(p)=\ p+e^{-p(d+1)}$, $f'(p)=1-(d+1)e^{-p(d+1)}$.

不难看出$f'(p)$为增函数, 于是其唯一零点对应$f(p)$的最小值点, 于是有:

$$f_{min}(p)=f\left(\frac{\ln(d+1)}{d+1}\right)=\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$$

同时$0<\frac{\ln(d+1)}{d+1}<1$, 于是可取$p=\frac{\ln(d+1)}{d+1}$, 有:

$$E[|S^*|]\le E[X]+E[Y]=n\big(p+(1-p)^{d+1}\big)\le nf_{min}(p)$$

即:

$$E[|S^*|]\le\frac{n[1+\ln(d+1)]}{d+1}$$

由期望的性质, 一定存在一个大小至多为$\frac{n[1+\ln(d+1)]}{d+1}$的支配集.

2.

令$G(V,E)$为任意的n个顶点的d正则图. 对于V中每个顶点v, 以概率p独立地加入点集S. 令$X=|S|$, 易得$E[X]=np$. 对于V中顶点v, 定义性质1: 点v及其所有邻接点均不在S中. 不失一般性, 给V中顶点编号为$v_1,\cdots,v_n$, 定义坏事件A_i为v_i满足性质 1.

不难得到$\Pr(A_i)=(1-p)^{d+1}\le e^{-p(d+1)}$, 且$\wedge_{i=1}^{n}\overline{A_i}$发生意味着$S$为支配集.

观察到A_i和A_j相关当且仅当$distance\big(v_i,v_j\big)\le 2$.

对于d正则图任一点v_i, 与其距离小于等于2的点的数量至多为$d+d(d-1)=d^2$. 换言之, LLL中的最大依赖度小于等于d^2. 为使$\Pr(\wedge_{i=1}^{n}\overline{A_i})>0$, 由$LLL$有:

$$e^{1-p(d+1)}(d^2+1)\le 1$$

$$p\ge\frac{1+\ln(d^2+1)}{d+1} \qquad (1)$$

注意到$E[X]=np$, 为得到支配集大小的最小上界, 需要求出使得(1)恒成立的最小p.

这里在(1)式中取等号即可，也就是取

$$p = \frac{1 + \ln(d^2 + 1)}{d + 1}$$

此时有:

$$E[X] = np = n\frac{1 + \ln(d^2 + 1)}{d + 1}$$

这个上界显然比上一问得到上界要差($\ln(d^2 + 1) \geq \ln(d + 1)$).

考虑不对$\Pr(A_i)$进行放缩，有:

$$e(1 - p)^{d+1}(d^2 + 1) \leq 1$$

即这里取

$$p = 1 - \frac{1}{\sqrt[d+1]{e(d^2 + 1)}}$$

此时有:

$$E[X] = np = n(1 - \frac{1}{\sqrt[d+1]{e(d^2 + 1)}})$$

注意到d增大的过程中，$E[X]$也即支配集大小的上界也在不断变小，d最大取$n - 1$. 此时图退化成完全图，此时上一问的上界为:

$$U_1 = 1 + lnn$$

这里求出的上界为:

$$U_2 = n(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{e(n^2 - 2n + 2)}})$$

这里借助 matlab 得到

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_1}{U_2} = 0$$

所以在渐进意义上，这个上界依然比上一问的上界要差.

Problem 4

考虑对$K_{m,n}$每一条边独立地以概率0.5选择颜色进行染色，得到一个随机的 2-边染色图. 由于$K_{m,n}$为完全二部图，考虑随机选$K_{m,n}$的一边取出任意a个点，再从另一边取出任意b个点，不难看出这些点的导出子图为$K_{a,b}$. 定义事件$A_{a,b}$为$K_{a,b}$是单色图，则:

$$\Pr(A_{a,b}) = 2^{1-ab}$$

因为这样的导出子图$K_{a,b}$一共有$\binom{m}{a}\binom{n}{b} + \binom{n}{a}\binom{m}{b}$个，由 union bound:

$$\Pr(\exists K_{a,b}, A_{a,b}) \leq \left[\binom{m}{a}\binom{n}{b} + \binom{n}{a}\binom{m}{b}\right]\Pr(A_{a,b}) = \left[\binom{m}{a}\binom{n}{b} + \binom{n}{a}\binom{m}{b}\right]2^{1-ab}$$

由题意，$\left[\binom{m}{a}\binom{n}{b} + \binom{n}{a}\binom{m}{b}\right]2^{1-ab} < 1$，于是

$$\Pr(\forall K_{a,b}, \overline{A_{a,b}}) = 1 - \Pr(\exists K_{a,b}, A_{a,b}) > 0$$

这说明了一定存在一个 2-边染色的$K_{m,n}$满足其没有单色的$K_{a,b}$作为子图.

Problem 5

考虑按如下方式构建一个点集S，满足$|S| = n$:

从V_1里等概率地随机选择一个点加入S，接着对$V_2 \sim V_n$重复上述过程.

不妨令E中的边为$e_1, \cdots, e_{kn}$，定义坏事件A_i为: e_i的两端点均在S中.

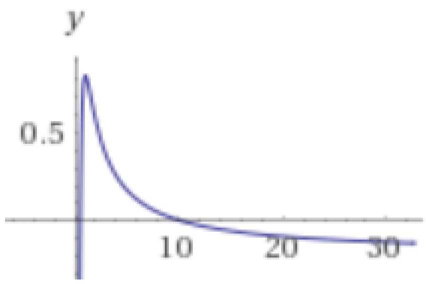
不难得到$\Pr(A_i) \le \frac{1}{k^2}$，且$\wedge_{i=1}^{kn} \overline{A_i}$发生意味着$S$为独立集.

注意到$V_1 \sim V_n$实际上把点集V划分成了n个不相交的类.
对于任一A_i而言，与其相关的坏事件A_j满足：e_j两端点中至少一个和e_i的两端点中的任一个属于同一类.
不妨令$e_i = (u, v)$，由题意，和u同类的点(包括u)共有k个，由环图的性质，每个点都关联两条边，则和u同类的点(包括u)共关联$2k$条边，其中需要去掉边e_i，则这$2k-1$条边就对应着$2k-1$个和A_i关联的坏事件. 同理，和v同类的点(包括v)也对应着$2k-1$个和A_i关联的坏事件.
最坏情况下，这些坏事件对应的边均不同，换言之，LLL中的最大依赖度$\le 2(2k-1)$.

为使$\Pr\left(\wedge_{i=1}^{kn} \overline{A_i}\right) > 0$，由$LLL$可知，要使得如下不等式恒成立:

$$e\frac{1}{k^2}2(2k-1) \le 1$$
$$\frac{2k-1}{k^2} - \frac{1}{2e} \le 0 \tag{1}$$

由 wolfram 可知(1)左边函数的图像为:



即这里只需要满足$k \ge 2e + \sqrt{2e(2e-1)}$即可使得(1)恒成立. 考虑到$k$的定义域为正整数，所以这里需要满足$k \ge \left\lceil 2e + \sqrt{2e(2e-1)} \right\rceil = 11$.
由题目已知$k \ge 11$，故(1)恒成立.
这意味着一定存在一个独立集且其恰由每个V_i取一点构成.

Problem 6

1.

在图$G(V,E)$上考虑$Turan\ theorem$：$ex(n, K_{r+1}) \le \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$. 不妨令$G$中有$r-clique$.
令其补图为$\bar{G}(V,\bar{E})$，$|E| = m, |\bar{E}| = m'$. 则有$\alpha(\bar{G}) \ge r$.
下面不等式互相等价:

$$m \le \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$$
$$m' \ge \frac{n(n-1)}{2} - \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$$
$$\frac{2m'}{n} \ge \frac{n}{r} - 1$$

$$r \geq \frac{n^2}{2m'+n}$$

又有$\alpha(\bar{G}) \geq r$，可知证毕.

2.

对V中的顶点进行一次随机排列，对排列后的顶点从左到右编号为$v_1, \cdots, v_n$.

按如下方式构造一个独立集S:

从左到右遍历排列后的顶点，对任意顶点v_i，将其加入S中当且仅当v_i与在它之后的顶点之间没有边相连. 对任意顶点v_i，不难得到:

$$\Pr(v_i \in S) = \frac{d_v!}{(d_v+1)!} = \frac{1}{d_v+1}$$

由期望的线性性质,有:

$$E[|S|] = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v+1}$$

根据握手引理，有:

$$\sum_{v \in V} d_v = 2m$$

令$d_{v_i}+1 = x_i$，现在问题变为在约束$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2m+n$下，求$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$的最小值.

由基本不等式(调和平均数小于算术平均数):

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

可以得到:

$$E[|S|] = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{2m+n}$$

也就是说G中一定存在一个大小至少为$\frac{n^2}{2m+n}$的独立集.

Problem 7.1

考虑复制k份相同的G，令为$G_1 \sim G_k$，满足G_i中的边均用i进行染色.

考虑按如下方式对K_n进行k-边染色:

从G_1开始，随机地从K_n中选择一个和G同构的子图，对该子图所有边染上颜色1.

对于$G_2 \sim G_k$重复上述步骤，注意后面的颜色可以覆盖前面的颜色.

对K_n染色完毕后，注意到若K_n含有一个同色子图，则该子图也必定是G的子图.

同时，我们已知G不含子图H，于是按上述方案染色的K_n也不含同色子图H.

下面只需证明该染色方法确实可以对整个K_n进行染色. 令K_n的边集为M.

对于M中任一边e，定义事件A_e为e不被所有G_i所染色，即e未染色，不难得到:

$$\Pr(A_e) = \left(1 - \frac{m}{\binom{n}{2}}\right)^k$$

令随机变量X表示K_n中未染色的边的数量，由期望的线性性质:

$$E[X]=\sum_{e\in M}\Pr(A_e)=\binom{n}{2}\left(1-\frac{m}{\binom{n}{2}}\right)^k\le\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{2m}{n^2}\right)^k$$

由不等式$1-x\le e^{-x}$:

$$\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{2m}{n^2}\right)^k\le\frac{n^2}{2}e^{-\frac{2km}{n^2}}$$

由题目条件$k>\frac{n^2 lnn}{m}$

$$\frac{n^2}{2}e^{-\frac{2km}{n^2}}<\frac{n^2}{2}e^{-2lnn}=\frac{1}{2}$$

综上

$$E[X]<\frac{1}{2}$$

于是我们知道一定存在某个X满足$X<\frac{1}{2}$, 结合X的定义, 这里只能有$X=0$.

这就是说, 该染色方法确实可以对整个K_n进行染色.