尹浚宇 161130118 计算机科学与技术 本科生

Problem 1

(a) $a \geq 0.125$.

(b) 1.

(c) 记该公式为f，当$a = 0.5$时，$f = 1 + 0 = 1$. 于是这里猜想$f \equiv 1$.

(d) $1.2182 + 0.1260i$.

(e) 出错的原因：在 matlab 中使用^运算对某数进行开方时，会求出其在虚数平面上对应的相位角最小的那个向量，并通过欧拉公式转换表示. 这里在$a = 0.75$时，公式 1 第二部分立方根下出现了负数，所以产生了上述 bug.

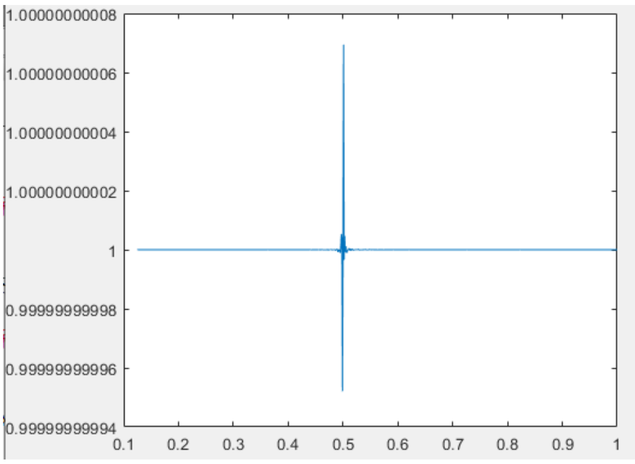
使用如下代码即可修正问题，并得到正确值1.

```
>> a = 3/4;
>> f = nthroot(a + (a+1)/3 * sqrt((8*a-1)/3), 3) + nthroot(a - (a+1)/3 * sqrt((8*a-1)/3), 3)

f =

    1.0000
```

在画出f的部分图像后，我认为我的猜想是正确的，这里在$a = 0.5$处出现细微波动的原因我认为是计算机表示精度不够造成的.



(f) 令$t = \sqrt{\frac{8a-1}{3}}$，于是有$a = \frac{3t^2+1}{8}$，代入$f$中有:

$$f = \sqrt[3]{\frac{3t^2+1}{8} + \frac{t^2+3}{8}t} + \sqrt[3]{\frac{3t^2+1}{8} - \frac{t^2+3}{8}t}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{t^3+3t^2+3t+1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{-(t^3-3t^2+3t-1)}{8}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(t+1)^3}{8}} + \sqrt[3]{\frac{(1-t)^3}{8}} = \frac{t+1}{2} + \frac{1-t}{2} = 1$$

(g) 将$a = 2$代入f，有$f = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. 结合上一问结论，可得所求表达式为$1$.

(h) 构造如下三次方程:

$$z^3 + (2a-1)z - 2a = 0$$

不难验证1是上述方程的实根. 同时由卡尔达诺公式，该方程的实根为:

$$1=\sqrt[3]{-\frac{-2a}{2}+\sqrt{\frac{(2a-1)^3}{27}+\frac{(-2a)^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{-2a}{2}-\sqrt{\frac{(2a-1)^3}{27}+\frac{(-2a)^2}{4}}}$$

化简有

$$1=\sqrt[3]{a+\sqrt{\frac{(2a-1)^3}{27}+a^2}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{\frac{(2a-1)^3}{27}+a^2}}$$

$$1=\sqrt[3]{a+\sqrt{\frac{(a+1)^2(8a-1)}{9\times 3}}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{\frac{(a+1)^2(8a-1)}{9\times 3}}}$$

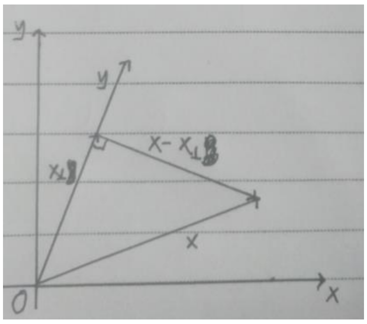
$$1=\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=f$$

通过此问题可以发现，利用卡尔达诺公式求根时会出现用无理数表示有理根的情形，因此在实际求根时，卡尔达诺公式有一定的局限性.

Problem 2

(a) $\boldsymbol{x}_\perp=\frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)^T$，$\|\boldsymbol{x}_\perp\|=\sqrt{\boldsymbol{x}_\perp^T\boldsymbol{x}_\perp}=\sqrt{3}$.

(b) $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\perp)=1\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\left(1-\frac{3}{2}\right)=0$，又有$\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\perp\neq\boldsymbol{0}$，命题得证.

(c) 

(d) 因为向量的范数非负，等价于证$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\perp\|^2\leq\|\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{y}\|^2$. 由几何关系有:

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\perp\|^2+\|\boldsymbol{x}_\perp-\lambda\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{y}\|^2$$

$$\because\|\boldsymbol{x}_\perp-\lambda\boldsymbol{y}\|^2\geq 0$$

$$\therefore\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\perp\|^2\leq\|\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{y}\|^2$$

综上，命题得证.

Problem 3

(a) $x>0$.

(b) $12x=72$，$x=6$.

Problem 4

(a) $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \beta x e^{-\beta x} dx = -\int_0^{+\infty} x de^{-\beta x} = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} dx - x e^{-\beta x}|_0^{+\infty} = \frac{1}{\beta}$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{+\infty} \beta x^2 e^{-\beta x} dx = -\int_0^{+\infty} x^2 de^{-\beta x} = \int_0^{+\infty} 2x e^{-\beta x} dx - x^2 e^{-\beta x}|_0^{+\infty} = \frac{2}{\beta^2}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \frac{1}{\beta^2}$$

(b) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta x}, x \geq 0 \\ 0 \quad\quad\quad, x < 0 \end{cases}$

(c) $\Pr(X \geq a + b | X \geq a) = \frac{\Pr(X \geq a+b)}{\Pr(X \geq a)} = \frac{1-\Pr(X<a+b)}{1-\Pr(x<a)} = \frac{e^{-\beta(a+b)}}{e^{-\beta a}} = e^{-\beta b}$

$$\Pr(X \geq b) = 1 - \Pr(X < b) = e^{-\beta b}$$

$$\therefore \Pr(X \geq a + b | X \geq a) = \Pr(X \geq b)$$

(d) 由(a)易得，灯泡的期望工作时长为 1000 小时. 由指数分布的无记忆性易得，该灯泡的期望剩余工作时长为 1000 小时.

Problem 5

(a) $f''(x) = a^2 e^{ax} \geq 0$，所以$f(x)$为凸函数.

(b) $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ on \ \{x | x > 0\}$，所以$g(x)$为凹函数.

(c) $h''(x) = \frac{1}{x} > 0 \ on \ \{x | x > 0\}$，又有$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} > 0$，所以$h(x)$在其定义域上为凸函数.

(d) 根据上一问，易得H为凹函数，于是用拉格朗日乘子法求其全局最大值. 不妨令:

$$L(p_1, \cdots, p_n, \lambda) = H + \lambda(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1)$$

于是根据

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial p_i} = -\log_2 p_i + \lambda - 1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} p_i - 1 = 0 \end{cases}, 1 \leq i \leq n$$

解得

$$p_i = \frac{1}{n}, 1 \leq i \leq n$$

综上

$$H_{max} = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i = \log_2 n$$