Problem 1

1.

由题目给出的限制条件，考虑分以下三种情况:

a. 全红: 由于红球均相同，显然只有 1 种取法.

b. 全蓝: 易得共$\binom{m}{r}$种取法.

c. 红蓝: 令红球个数为 k，则取法数量满足:

$$\sum_{k=1}^{r-1}\binom{m}{r-k}=\sum_{k=1}^{r-1}\binom{m}{k}$$

则取法总数满足:

$$1+\binom{m}{r}+\sum_{k=1}^{r-1}\binom{m}{k}=\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}$$

2.

由题目给出的限制条件，分以下两种情况:

a. 全蓝: 易得共$\binom{m}{r}$种取法.

b. 红蓝: 令红球个数为 k，则取法数量满足:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m}{r-k}=\sum_{k=r-n}^{r-1}\binom{m}{k}$$

则取法总数满足:

$$\sum_{k=r-n}^{r-1}\binom{m}{k}+\binom{m}{r}=\sum_{k=r-n}^{r}\binom{m}{k}$$

3.

由题目给出的限制条件，分以下两种情况:

a. 全红: 1 种取法.

b. 红蓝: 令红球个数为 k，则取法数量满足:

$$\sum_{k=r-m}^{r-1}\binom{m}{r-k}=\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}$$

则取法总数满足:

$$\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}+1=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}$$

Problem 2

考虑如下的等价问题 1:

令$\{a_{p+q}\}$为一个由p个+1 和q个-1 组成的序列，且该序列任意的部分和均满足:

$$a_1+\cdots+a_k>0$$

其中k满足 $1\le k\le p+q$，且有$p>q$.

首先显然有$a_1=1$，那么我们可进一步考虑如下的等价问题 2:

令$\{a_{p+q-1}\}$为一个由$p-1$个+1 和q个-1 组成的序列，且该序列任意的部分和均满足:

$$a_1+\cdots+a_k\ge 0$$

其中k满足 $1\le k\le p+q-1$，且有$p>q$.

1. 首先计算由$p-1$个+1 和q个-1 组成的序列的总数，显然有:

$$\binom{p+q-1}{p-1}$$

2. 下面我们考虑不满足题目要求的序列的总数. 任取一个不满足题目要求的序列，则一定存在一个最小的k满足:

$$a_1+\cdots+a_k<0$$
$$a_1+\cdots+a_{k-1}=0$$

由于序列只能由+1 和-1 构成，所以这里k一定是奇数，且满足$a_k=-1$.

则前面这k个数里共有$\frac{k+1}{2}$个-1 和$\frac{k-1}{2}$个+1. 将前面这k个数里的+1 和-1 互换，那么整个序列共有 p 个+1 和 q-1 个-1 构成.

考虑由 p 个+1 和 q-1 个-1 构成的任意新序列$\{b_{p+q-1}\}$，由于$p>q-1$，所以一

定存在一个最小的k，满足:

$$b_1 + \cdots + b_k = 1$$
$$b_1 + \cdots + b_{k-1} = 0$$

这里显然也有 k 为奇数，且满足$b_k = 1$.

将b_1至b_k里的-1 和+1 互换，则我们就可以构造出一个不满足题目要求的序列.

综上，不满足题目要求的序列的数量等于由 p 个+1 和 q-1 个-1 构成的序列的数量. 我们对其进行计数，有:

$$\binom{p+q-1}{p}$$

于是满足题目要求的序列的数量为:

$$\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p} = \frac{(p+q-1)!}{p!\,q!}(p-q)$$

由p个+1 和q个-1 组成的序列的数量为:

$$\binom{p+q}{p}$$

于是有$\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p} = \frac{(p+q-1)!}{p!q!}(p-q)$种选票的排序方式使得在整个点票过程中，韩梅梅的票数一直高于李雷的票数.

同时等价地，假设选票均匀分布的随机排列，有$\frac{\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}}{\binom{p+q}{p}} = \frac{p-q}{p+q}$的概率在整个点票过程中，韩梅梅的票数一直高于李雷的票数.

Problem 3

1.

由 the twelvefold way 易得

$$a_n = \binom{n+4-1}{4-1} = \binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)!}{3!\,n!} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$$

于是有

$$A(x) = \frac{1}{6}\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)(n+3)x^n$$

令

$$G(x)=\sum_{n\ge 0}x^n=\frac{1}{1-x}$$

于是有

$$A(x)=\frac{1}{6}G^{(3)}(x)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-x}\right)'''=(1-x)^{-4}$$

2.

由 the twelvefold way 易得

$$a_n=\binom{n-1}{3}=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$$

于是有

$$A(x)=\frac{1}{6}\sum_{n\ge 0}(n-1)(n-2)(n-3)x^n=\frac{x^4}{6}\sum_{n\ge 0}(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$$

$$=\frac{x^4}{6}\sum_{n\ge -4}(n+1)(n+2)(n+3)x^n$$

$$=\frac{x^4}{6}[\sum_{n\ge 0}(n+1)(n+2)(n+3)x^n+\sum_{n=-4}^{-1}(n+1)(n+2)(n+3)x^n]$$

由 1 有

$$\sum_{n\ge 0}(n+1)(n+2)(n+3)x^n=6(1-x)^{-4}$$

于是有

$$A(x)=\frac{x^4}{6}[6(1-x)^{-4}-6x^{-4}]=\frac{x^4}{(1-x)^4}-1$$

3.

由 the twelvefold way 易得

$$a_n=p_4(n)=p_3(n-1)+p_4(n-4)$$

同理我们有:

$$p_3(n)=p_2(n-1)+p_3(n-3)$$
$$p_2(n)=p_1(n-1)+p_2(n-2)$$

令

$$C(x)=\sum_{n\geq 0}p_2(n)x^n=\sum_{n\geq 2}p_2(n)x^n=\sum_{n\geq 2}p_1(n-1)x^n+\sum_{n\geq 2}p_2(n-2)x^n$$

$$=\sum_{n\geq 2}x^n+x^2C(x)=\sum_{n\geq 0}x^n-1-x+x^2C(x)=\frac{1}{1-x}-1-x+x^2C(x)$$

整理得

$$C(x)=\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

令

$$B(x)=\sum_{n\geq 0}p_3(n)x^n=\sum_{n\geq 3}p_3(n)x^n=\sum_{n\geq 3}p_2(n-1)x^n+\sum_{n\geq 3}p_3(n-3)x^n$$
$$=xC(x)+x^3B(x)$$

整理得

$$B(x)=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

我们有

$$A(x)=\sum_{n\geq 0}p_4(n)x^n=\sum_{n\geq 4}p_4(n)x^n=\sum_{n\geq 4}p_3(n-1)x^n+\sum_{n\geq 4}p_4(n-4)x^n$$
$$=xB(x)+x^4A(x)$$

整理得

$$A(x)=x^4\prod_{k=1}^{4}(1-x^k)^{-1}$$

4.

由 the twelvefold way 易得

$$a_n=\sum_{k=1}^{4}p_k(n)$$

于是有

$$A(x)=\sum_{n\ge 0}\sum_{k=1}^{4}p_k(n)\,x^n=\sum_{n\ge 0}p_1(n)x^n+\sum_{n\ge 0}p_2(n)x^n+\sum_{n\ge 0}p_3(n)x^n+\sum_{n\ge 0}p_4(n)x^n$$

其中

$$\sum_{n\ge 0}p_1(n)x^n=\sum_{n\ge 1}p_1(n)x^n=\sum_{n\ge 1}x^n=\sum_{n\ge 0}x^n-1=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}$$

其余项在 3 中已经求得，将结果代入有

$$A(x)=\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+x^4\prod_{k=1}^{4}(1-x^k)^{-1}$$
$$=\sum_{n=1}^{4}[x^n\prod_{k=1}^{n}(1-x^k)^{-1}]$$

Problem 4

令

$$G(x)=\sum_{n\ge 0}a_nx^n=a_0x^0+a_1x^1+\sum_{n\ge 2}a_nx^n=1+px+\sum_{n\ge 2}a_nx^n$$

$$=1+px+p\sum_{n\ge 2}a_{n-1}x^n+(q-p)q\sum_{n\ge 2}a_{n-2}x^n$$

$$=1+px+p\left(\sum_{n\ge 1}a_{n-1}x^n-a_0x^1\right)+(q-p)q\sum_{n\ge 2}a_{n-2}x^n$$
$$=1+px+pxG(x)-px+(q-p)qx^2G(x)$$

整理得

$$G(x)=\frac{1}{1-px+(p-q)qx^2}=\frac{1}{[(p-q)x-1](qx-1)}$$

令

$$G(x)=\frac{\alpha}{(p-q)x-1}+\frac{\beta}{qx-1}$$

有

$$\begin{cases}\alpha q+\beta(p-q)=0\\ -\alpha-\beta=1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{q-p}{p-2q}\\ \beta=\dfrac{q}{p-2q}\end{cases}$$

于是有

$$G(x)=\frac{\frac{q-p}{p-2q}}{(p-q)x-1}+\frac{\frac{q}{p-2q}}{qx-1}=\frac{\frac{p-q}{p-2q}}{1-(p-q)x}+\frac{\frac{-q}{p-2q}}{1-qx}$$
$$=\frac{p-q}{p-2q}\sum_{n\geq 0}(p-q)^n x^n-\frac{q}{p-2q}\sum_{n\geq 0}q^n x^n=\sum_{n\geq 0}a_n x^n$$

于是有

$$a_n=\frac{(p-q)^{n+1}-q^{n+1}}{p-2q}=\frac{(p-2q)\sum_{k=0}^{n}(p-q)^{n-k}q^k}{p-2q}=\sum_{k=0}^{n}(p-q)^{n-k}q^k$$

Problem 5

定义 Fibonacci 数列，满足:

$$F_n=\begin{cases}F_{n-1}+F_{n-2},\ n\geq 2\\ 1,\ n=0,1\end{cases}$$

令

$$G(x)=\sum_{n\geq 0}F_n x^n=1+x+\sum_{n\geq 2}F_n x^n=1+x+\sum_{n\geq 2}F_{n-1}x^n+\sum_{n\geq 2}F_{n-2}x^n$$
$$=1+x+\sum_{n\geq 1}F_{n-1}x^n-x+\sum_{n\geq 2}F_{n-2}x^n=1+xG(x)+x^2G(x)$$

整理得

$$G(x)=\frac{1}{1-x-x^2} \tag{1}$$

现在来考察$1/9899$，我们取$1/9899\approx 0.00010102030508132134 55$.

不难观察到:

$$0.0001=10^{-4}F_0(0.01)^0$$

$$0.000001 = 10^{-4}F_1(0.01)^1$$
$$0.00000002 = 10^{-4}F_1(0.01)^2$$
$$\cdots$$
$$0.0000000000000000000055 = 10^{-4}F_9(0.01)^9$$

即:

$$1/9899 \approx 10^{-4}\sum_{k=0}^{9} F_k(0.01)^k$$

不难得到$G(x)$在$x = 0.01$时收敛，于是我们在(1)式中令$x = 0.01$，有:

$$G(0.01) = \frac{1}{1-0.01-0.01^2} = \frac{10^4}{9899}$$

于是有:

$$10^{-4}G(0.01) = 10^{-4}\sum_{n\geq 0} F_n 0.01^n = 10^{-4}\times\frac{10^4}{9899} = \frac{1}{9899} \approx 10^{-4}\sum_{k=0}^{9} F_k(0.01)^k$$

这解释了 Fibonacci 数 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55 在 1/9899 中出现的原因.

Problem 6

我们首先考虑按如下步骤构建一个合法子集 S:

1.1. 先从 n 个偶数中任取 s 个偶数，同时取走偶数右边的奇数.

1.2. 再从剩下的 n-s 个奇数中合法取走 r 个奇数.

因为任 2 偶数均不相邻，同时集合[2n]中任意偶数右边必定有一个奇数存在，且第 1.1 步中被取走的偶数右边的奇数也不可能出现在子集 S 中，所以这样构造的合法性是显然的.

现在考察集合 A = [2n]-S 中还剩下的奇数. 显然有剩下奇数的个数为 n-r-s，且这样的奇数左边必定有一个相邻偶数，否则在第 1.1 步中就会被取走.

再考虑以另一种方法构建一个相同的合法子集 S:

2.1. 先从 n 个奇数中取 1.2 中的那 r 个奇数，同时取走奇数左边的偶数.

2.2. 再从剩下的 n-r 个偶数中取走 1.1 中的那 s 个偶数.

这样构造的合法性是显然的.

现在考察集合 A 中还剩下的偶数. 显然有剩下偶数的个数为 n-r-s, 且这样的偶数右边必定有一个相邻奇数, 否则在 2.1 中就会被取走.

综上, 可得到集合 A 中剩下的奇数和偶数个数相等, 均为 n-r-s, 且满足如下形式(将[2n]中的元素从小到大写成一个序列):

$$[2n] = \{\cdots, A_1, \cdots, A_2, \cdots\cdots, A_{n-r-s}, \cdots\}$$

其中$A = \bigcup_{i=1}^{i=n-r-s} A_i\,, A_i = \{2k-2, 2k-1\}, k$在$[1,n]$内任取, 只需满足$A_{i+1}$中的最小元素大于$A_i$中的最大元素即可.

这样等价于用 n-r-s 块板对[2n]形成的序列进行隔断, 形成 n-r-s+1 个部分. 我们同样将[2n]写成一个从小到大的序列, 形如:

$$[2n] = \{P_1, A_1, P_2, A_2, \cdots, A_{n-r-s}, P_{n-r-s+1}\}$$

其中显然有$\sum_{i=1}^{n-r-s+1} |P_i| = 2(r+s)$.

这里令P_i中在合法子集 S 中出现的奇数个数为o_i, 偶数个数为e_i, 则有:

$$\begin{cases} o_1 + \cdots + o_{n-r-s+1} = r \\ e_1 + \cdots + e_{n-r-s+1} = s \end{cases}$$

且满足$e_i \geq 0, o_i \geq 0$.

这个方程组的合法的解的数量即为合法子集 S 的数量, 即:

$$f(n,r,s) = \left(\!\binom{n-r-s+1}{r}\!\right)\left(\!\binom{n-r-s+1}{s}\!\right) = \binom{n-s}{r}\binom{n-r}{s}$$

这里说明如何由方程组的解构造[2n]:

1. 从 0 开始顺序取e_1个偶数放入P_1中, 同时将每一个偶数右边的奇数也放入P_1.
2. 然后从$2e_1 + 1$开始顺序取o_1个奇数放入P_1中, 同时将每一个奇数左边的偶数也放入P_1中.
3. 令A_1中的$2k - 2 = 2(e_1 + o_1)$.

4. 按顺序类似地重复 1-3 步构造下去即可.

特别地, 每轮循环第 1 步加入的偶数的并即为合法子集 S 中的偶数部分, 每轮循环第 2 步加入的奇数的并即为合法子集 S 中的奇数部分.