1 Datenstrukturen

1.1 Segmentbaum

`init`	baut den Baum auf	$O(n)$
`query`	findet das min(max) in [l, r)	$O(\log(n))$
`update`	ändert einen Wert	$O(\log(n))$

```cpp
vector<ll> tree;
constexpr ll neutral = 0; // Neutral element for combine
ll combine(ll a, ll b) {
  return a + b;
}
void init(vector<ll>& a) {
  tree.assign(2 * sz(a), 0);
  copy(all(a), tree.begin() + sz(a));
  for (int i = sz(tree)/2 - 1; i > 0; i--) {
    tree[i] = combine(tree[2 * i], tree[2 * i + 1]);
}}
void update(int i, ll val) {
  for (tree[i += sz(tree)/2] = val; i /= 2; ) {
    tree[i] = combine(tree[2 * i], tree[2 * i + 1]);
}}
ll query(int l, int r) {
  ll resL = neutral, resR = neutral;
  for (l += sz(tree)/2, r += sz(tree)/2; l < r; l /= 2, r /= 2) {
    if (l&1) resL = combine(resL, tree[l++]);
    if (r&1) resR = combine(tree[--r], resR);
  }
  return combine(resL, resR);
}
// Oder: Intervall-Modifikation, Punkt-Query:
void modify(int l, int r, ll val) {
  for (l += sz(tree)/2, r += sz(tree)/2; l < r; l /= 2, r /= 2) {
    if (l&1) {tree[l] = combine(tree[l], val); l++;};
    if (r&1) {--r; tree[r] = combine(tree[r], val);};
}}
ll query(int i) {
  ll res = neutral;
  for (i += sz(tree)/2; i > 0; i /= 2) {
    res = combine(res, tree[i]);
  }
  return res;
}
```

1.1.1 Lazy Propagation

Assignment modifications, sum queries

`lower_bound`	erster Index in [l, r) $\geq$ x (erfordert max-combine)	$O(\log(n))$

```cpp
struct SegTree {
  int size, height;
  static constexpr ll neutral = 0; // Neutral element for combine
  static constexpr ll updateFlag = 0; // Unused value by updates
  vector<ll> tree, lazy;
  SegTree(const vector<ll>& a) : SegTree(sz(a)) {
    copy(all(a), tree.begin() + size);
    for (int i = size - 1; i > 0; i--)
      tree[i] = combine(tree[2 * i], tree[2 * i + 1]);
  }
  SegTree(int n) : size(n), height(__lg(2 * n)),
    tree(2 * n, neutral), lazy(n, updateFlag) {}
  ll combine(ll a, ll b) {return a + b;} // Modify this + neutral
  void apply(int i, ll val, int k) { // And this + updateFlag
    tree[i] = val * k;
    if (i < size) lazy[i] = val; // Don't forget this
  }
  void push_down(int i, int k) {
    if (lazy[i] != updateFlag) {
      apply(2 * i, lazy[i], k);
      apply(2 * i + 1, lazy[i], k);
      lazy[i] = updateFlag;
  }}
  void push(int i) {
    for (int s = height, k = 1 << (height-1); s > 0; s--, k /= 2)
      push_down(i >> s, k);
  }
  void build(int i) {
    for (int k = 2; i /= 2; k *= 2) {
      push_down(i, k / 2);
      tree[i] = combine(tree[2 * i], tree[2 * i + 1]);
  }}
  void update(int l, int r, ll val) { // data[l..r) = val
    l += size, r += size;
    int l0 = l, r0 = r;
    push(l0), push(r0 - 1);
    for (int k = 1; l < r; l /= 2, r /= 2, k *= 2) {
      if (l&1) apply(l++, val, k);
      if (r&1) apply(--r, val, k);
    }
    build(l0), build(r0 - 1);
  }
  ll query(int l, int r) { // sum[l..r)
    l += size, r += size;
    push(l), push(r - 1);
    ll resL = neutral, resR = neutral;
    for (; l < r; l /= 2, r /= 2) {
      if (l&1) resL = combine(resL, tree[l++]);
      if (r&1) resR = combine(tree[--r], resR);
    }
    return combine(resL, resR);
  }
  // Optional:
  ll lower_bound(int l, int r, int x) {
    l += size, r += size;
    push(l), push(r - 1);
    vector<pair<int, int>> a, st;
    for (int k = 1; l < r; l /= 2, r /= 2, k *= 2) {
      if (l&1) a.emplace_back(l++, k);
      if (r&1) st.emplace_back(--r, k);
    }
    a.insert(a.end(), st.rbegin(), st.rend());
    for (auto [i, k] : a) {
      if (tree[i] >= x) return find(i, x, k); // Modify this
    }
    return -1;
  }
  ll find(int i, int x, int k) {
    if (i >= size) return i - size;
    push_down(i, k / 2);
    if (tree[2*i] >= x) return find(2 * i, x, k / 2); // And this
    else return find(2 * i + 1, x, k / 2);
  }
};
```

1.2 Fenwick Tree

`init`	baut den Baum auf	$O(n \cdot \log(n))$
`prefix_sum`	summe von [0, i]	$O(\log(n))$
`update`	addiert ein Delta zu einem Element	$O(\log(n))$

```cpp
vector<ll> tree;
void update(int i, ll val) {
  for (i++; i < sz(tree); i += (i & (-i))) tree[i] += val;
}
void init(int n) {
  tree.assign(n + 1,0);
}
ll prefix_sum(int i) {
  ll sum = 0;
  for (i++; i > 0; i -= (i & (-i))) sum += tree[i];
  return sum;
}
```

`init`	baut den Baum auf	$O(n \cdot \log(n))$
`prefix_sum`	summe von [0, i]	$O(\log(n))$
`update`	addiert ein Delta zu allen Elementen [l, r)	$O(\log(n))$

```cpp
vector<ll> add, mul;
void update(int l, int r, ll val) {
  for (int tl = l + 1; tl < sz(add); tl += tl&(-tl))
    add[tl] += val, mul[tl] -= val * l;
  for (int tr = r + 1; tr < sz(add); tr += tr&(-tr))
    add[tr] -= val, mul[tr] += val * r;
}
void init(vector<ll>& v) {
  mul.assign(sz(v) + 1,0);
  add.assign(sz(v) + 1,0);
  for(int i = 0; i < sz(v); i++) update(i, i + 1, v[i]);
}
ll prefix_sum (int i) {
  ll res = 0; i++;
  for (int ti = i; ti > 0; ti -= ti&(-ti))
    res += add[ti] * i + mul[ti];
  return res;
}
```

1.3 STL-Rope (Implicit Cartesian Tree)

```cpp
#include <ext/rope>
using namespace __gnu_cxx;
rope<int> v; // Wie normaler Container.
v.push_back(num); // O(log(n))
rope<int> sub = v.substr(start, length); // O(log(n))
v.erase(start, length); // O(log(n))
v.insert(v.mutable_begin() + offset, sub); // O(log(n))
for(auto it = v.mutable_begin(); it != v.mutable_end(); it++)
```

1.4 (Implicit) Treap (Cartesian Tree)

`insert` fügt wert *val* an stelle *i* ein (verschiebt alle Positionen >= *i*) $O(\log(n))$
`remove` löscht werte [*i*,*i*+*count*) $O(\log(n))$

```cpp
mt19937 rng(0xc4bd5dad);
struct Treap {
  struct Node {
    ll val;
    int prio, size = 1, l = -1, r = -1;
    Node (ll x) : val(x), prio(rng()) {}
  };
  vector<Node> treap;
  int root = -1;
  int getSize(int v) {
    return v < 0 ? 0 : treap[v].size;
  }
  void upd(int v) {
    if (v < 0) return;
    auto *V = &treap[v];
    V->size = 1 + getSize(V->l) + getSize(V->r);
    // Update Node Code
  }
  void push(int v) {
    if (v < 0) return;
    //auto *V = &treap[v];
    //if (V->lazy) {
    //  Lazy Propagation Code
    //  if (V->l >= 0) treap[V->l].lazy = true;
    //  if (V->r >= 0) treap[V->r].lazy = true;
    //  V->lazy = false;
    //}
  }
  pair<int, int> split(int v, int k) {
    if (v < 0) return {-1, -1};
    auto *V = &treap[v];
    push(v);
    if (getSize(V->l) >= k) { // "V->val >= k" for lower_bound(k)
      auto [left, right] = split(V->l, k);
      V->l = right;
      upd(v);
      return {left, v};
    } else {
      // and only "k"
      auto [left, right] = split(V->r, k - getSize(V->l) - 1);
      V->r = left;
      upd(v);
      return {v, right};
    }}
  int merge(int left, int right) {
    if (left < 0) return right;
    if (right < 0) return left;
    if (treap[left].prio < treap[right].prio) {
      push(left);
      treap[left].r = merge(treap[left].r, right);
      upd(left);
      return left;
    } else {
      push(right);
      treap[right].l = merge(left, treap[right].l);
      upd(right);
      return right;
    }}
  void insert(int i, ll val) { // and i = val
    auto [left, right] = split(root, i);
    treap.emplace_back(val);
    left = merge(left, sz(treap) - 1);
    root = merge(left, right);
  }
  void remove(int i, int count = 1) {
    auto [left, t_right] = split(root, i);
    auto [middle, right] = split(t_right, count);
    root = merge(left, right);
  }
  // for query use remove and read middle BEFORE remerging
};
```

1.5 Range Minimum Query

`init` baut Struktur auf $O(n \cdot \log(n))$
`queryIdempotent` Index des Minimums in [l, r) $O(1)$

- `better`-Funktion muss idempotent sein!

```cpp
struct SparseTable {
  vector<ll> *a;
  vector<vector<int>> st;
  SparseTable (vector<ll>& vec) : a(&vec),
        st(__lg(sz(*a)) + 1, vector<int>(sz(*a))) {
    iota(all(st[0]), 0);
    for (int j = 0; (2 << j) <= sz(*a); j++) {
      for (int i = 0; i + (2 << j) <= sz(*a); i++) {
        st[j + 1][i] = better(st[j][i] , st[j][i + (1 << j)]);
  }}}
  int better(int lidx, int ridx) {
    return a->at(lidx) <= a->at(ridx) ? lidx : ridx;
  }
  int queryIdempotent(int l, int r) {
    int j = __lg(r - l); //31 - builtin_clz(r - l);
    return better(st[j][l] , st[j][r - (1 << j)]);
  }
};
```

1.6 Wavelet Tree

`Constructor` baut den Baum auf $O(n \cdot \log(n))$
`kth` sort $[l,r)[k]$ $O(\log(n))$
`countSmaller` Anzahl elemente in $[l,r)$ kleiner als k $O(\log(n))$

```cpp
struct WaveletTree {
  using it = vector<ll>::iterator;
  WaveletTree *ln = nullptr, *rn = nullptr;
  vector<int> b = {0};
  ll lo, hi;
  WaveletTree(vector<ll> in) : WaveletTree(all(in)) {}
  WaveletTree(it from, it to) : // call above one
    lo(*min_element(from, to)), hi(*max_element(from, to) + 1) {
    if (lo + 1 >= hi) return;
    ll mid = (lo + hi) / 2;
    auto f = [&](ll x){return x < mid;};
    for (it c = from; c != to; c++) {
      b.push_back(b.back() + f(*c));
    }
    it pivot = stable_partition(from, to, f);
    ln = new WaveletTree(from, pivot);
    rn = new WaveletTree(pivot, to);
  }
  // kth element in sort[l, r) all 0-indexed
  ll kth(int l, int r, int k) {
    if (l >= r || k >= r - l) return -1;
    if (lo + 1 >= hi) return lo;
    int inLeft = b[r] - b[l];
    if (k < inLeft) return ln->kth(b[l], b[r], k);
    else return rn->kth(l-b[l], r-b[r], k-inLeft);
  }
  // count elements in[l, r) smaller than k
  int countSmaller(int l, int r, ll k) {
    if (l >= r || k <= lo) return 0;
    if (hi <= k) return r - l;
    return ln->countSmaller(b[l], b[r], k) +
         rn->countSmaller(l-b[l], r-b[r], k);
  }
  ~WaveletTree() {delete ln; delete rn;}
};
```

1.7 STL-Bitset

```cpp
bitset<10> bits(0b000010100);
bits._Find_first(); //2
bits._Find_next(2); //4
bits._Find_next(4); //10 bzw. N
bits[x] = 1;        //not bits.set(x) or bits.reset(x)!
bits[x].flip();     //not bits.flip(x)!
```

1.8 Link-Cut-Tree

`Constructor`	baut Wald auf	$O(n)$
`connected`	prüft ob zwei Knoten im selben Baum liegen	$O(\log(n))$
`link`	fügt $\{x,y\}$ Kante ein	$O(\log(n))$
`cut`	entfernt $\{x,y\}$ Kante	$O(\log(n))$
`lca`	berechnet LCA von x und y	$O(\log(n))$
`query`	berechnet query auf den Knoten des xy-Pfades	$O(\log(n))$
`modify`	erhöht jeden wert auf dem xy-Pfad	$O(\log(n))$

```
constexpr ll queryDefault = 0;
constexpr ll updateDefault = 0;
ll _modify(ll x, ll y) {
  return x + y;
}
ll _query(ll x, ll y) {
  return x + y;
}
ll _update(ll delta, int length) {
  if (delta == updateDefault) return updateDefault;
  //ll result = delta
  //for (int i=1; i<length; i++) result = _query(result, delta);
  return delta * length;
}
//generic:
ll joinValueDelta(ll value, ll delta) {
  if (delta == updateDefault) return value;
  return _modify(value, delta);
}
ll joinDeltas(ll delta1, ll delta2) {
  if (delta1 == updateDefault) return delta2;
  if (delta2 == updateDefault) return delta1;
  return _modify(delta1, delta2);
}
struct LCT {
  struct Node {
    ll nodeValue, subTreeValue, delta;
    bool revert;
    int id, size;
    Node *left, *right, *parent;
    Node(int id = 0, int val = queryDefault) :
      nodeValue(val), subTreeValue(val), delta(updateDefault),
      revert(false), id(id), size(1),
      left(nullptr), right(nullptr), parent(nullptr) {}
    bool isRoot() {
      return !parent || (parent->left != this &&
                         parent->right != this);
    }
    void push() {
      if (revert) {
        revert = false;
        swap(left, right);
        if (left) left->revert ^= 1;
        if (right) right->revert ^= 1;
      }
      nodeValue = joinValueDelta(nodeValue, delta);
      subTreeValue = joinValueDelta(subTreeValue,
                                    _update(delta, size));
      if (left) left->delta = joinDeltas(left->delta, delta);
      if (right) right->delta = joinDeltas(right->delta, delta);
      delta = updateDefault;
    }
    ll getSubtreeValue() {
      return joinValueDelta(subTreeValue, _update(delta, size));
    }
    void update() {
      subTreeValue = joinValueDelta(nodeValue, delta);
      size = 1;
      if (left) {
        subTreeValue = _query(subTreeValue,
                              left->getSubtreeValue());
        size += left->size;
      }
      if (right) {
        subTreeValue = _query(subTreeValue,
                              right->getSubtreeValue());
        size += right->size;
    }}
  };
  vector<Node> nodes;
  LCT(int n) : nodes(n) {
    for (int i = 0; i < n; i++) nodes[i].id = i;
  }
  void connect(Node* ch, Node* p, int isLeftChild) {
    if (ch) ch->parent = p;
    if (isLeftChild >= 0) {
      if (isLeftChild) p->left = ch;
      else p->right = ch;
  }}
  void rotate(Node* x) {
    Node* p = x->parent;
    Node* g = p->parent;
    bool isRootP = p->isRoot();
    bool leftChildX = (x == p->left);
    connect(leftChildX ? x->right : x->left, p, leftChildX);
    connect(p, x, !leftChildX);
    connect(x, g, isRootP ? -1 : p == g->left);
    p->update();
  }
  void splay(Node* x) {
    while (!x->isRoot()) {
      Node* p = x->parent;
      Node* g = p->parent;
      if (!p->isRoot()) g->push();
      p->push();
      x->push();
      if (!p->isRoot()) rotate((x == p->left) ==
                               (p == g->left) ?  p : x);
      rotate(x);
    }
    x->push();
    x->update();
  }
  Node* expose(Node* x) {
    Node* last = nullptr;
    for (Node* y = x; y; y = y->parent) {
      splay(y);
      y->left = last;
      last = y;
    }
    splay(x);
    return last;
  }
  void makeRoot(Node* x) {
    expose(x);
    x->revert ^= 1;
  }
  bool connected(Node* x, Node* y) {
    if (x == y) return true;
    expose(x);
    expose(y);
    return x->parent;
  }
  void link(Node* x, Node* y) {
    assert(!connected(x, y)); // not yet connected!
    makeRoot(x);
    x->parent = y;
  }
  void cut(Node* x, Node* y) {
    makeRoot(x);
    expose(y);
    //must be a tree edge!
    assert(!(y->right != x || x->left != nullptr));
    y->right->parent = nullptr;
    y->right = nullptr;
  }
  Node* lca(Node* x, Node* y) {
    assert(connected(x, y));
    expose(x);
    return expose(y);
  }
  ll query(Node* from, Node* to) {
    makeRoot(from);
    expose(to);
    if (to) return to->getSubtreeValue();
    return queryDefault;
  }
  void modify(Node* from, Node* to, ll delta) {
    makeRoot(from);
    expose(to);
    to->delta = joinDeltas(to->delta, delta);
  }
};
```

1.9 Union-Find

`init`	legt n einzelne Unions an	$O(n)$
`findSet`	findet den Repräsentanten	$O(\log(n))$
`unionSets`	vereint 2 Mengen	$O(\log(n))$
`m·findSet + n·unionSets`	Folge von Befehlen	$O(n+m\cdot\alpha(n))$

```
// unions[i] >= 0 => unions[i] =  parent
// unions[i]  < 0 => unions[i] = -height
vector<int> unions;

void init(int n) { //Initialisieren
  unions.assign(n, -1);
}
int findSet(int n) { // Pfadkompression
  if (unions[n] < 0) return n;
  return unions[n] = findSet(unions[n]);
}
void linkSets(int a, int b) { // Union by rank.
  if (unions[b] > unions[a]) swap(a, b);
  if (unions[b] == unions[a]) unions[b]--;
  unions[a] = b;
}
void unionSets(int a, int b) { // Diese Funktion aufrufen.
  if (findSet(a) != findSet(b)) linkSets(findSet(a), findSet(b));
}
```

1.10 Lower/Upper Envelope (Convex Hull Optimization)

Um aus einem lower envelope einen upper envelope zu machen (oder umgekehrt), einfach beim Einfügen der Geraden m und b negieren.

```
// Lower Envelope mit MONOTONEN Inserts und Queries. Jede neue
// Gerade hat kleinere Steigung als alle vorherigen.
vector<ll> ms, bs;
int ptr = 0;

bool bad(int l1, int l2, int l3) {
  return (bs[l3]-bs[l1])*(ms[l1]-ms[l2]) <
         (bs[l2]-bs[l1])*(ms[l1]-ms[l3]);
}
void add(ll m, ll b) { // Laufzeit O(1) amortisiert
  ms.push_back(m); bs.push_back(b);
  while (sz(ms) >= 3 && bad(sz(ms)-3, sz(ms)-2, sz(ms)-1)) {
    ms.erase(ms.end() - 2); bs.erase(bs.end() - 2);
  }
  ptr = min(ptr, sz(ms) - 1);
}
ll get(int idx, ll x) {return ms[idx] * x + bs[idx];}
ll query(ll x) { // Laufzeit: O(1) amortisiert
  if (ptr >= sz(ms)) ptr = sz(ms) - 1;
  while (ptr < sz(ms)-1 && get(ptr + 1, x) < get(ptr, x)) ptr++;
  return get(ptr, x);
}
```

```
struct Line {
  mutable ll m, b, p;
  bool operator<(const Line& o) const {return m < o.m;}
  bool operator<(ll x) const {return p < x;}
};
struct HullDynamic : multiset<Line, less<>> {
  // (for doubles, use inf = 1/.0, div(a,b) = a/b)
  static constexpr ll INF = LLONG_MAX;
  ll div(ll a, ll b) {return a / b - ((a ^ b) < 0 && a % b);}
  bool isect(iterator x, iterator y) {
    if (y == end()) {x->p = INF; return false;}
    if (x->m == y->m) x->p = x->b > y->b ? INF : -INF;
    else x->p = div(y->b - x->b, x->m - y->m);
    return x->p >= y->p;
  }
  void add(ll m, ll b) {
    auto x = insert({m, b, 0});
    while (isect(x, next(x))) erase(next(x));
    if (x != begin()) {
      x--;
      if (isect(x, next(x))) {
        erase(next(x));
        isect(x, next(x));
    }}
    while (x != begin() && prev(x)->p >= x->p) {
      x--;
      isect(x, erase(next(x)));
  }}
  ll query(ll x) {
    auto l = *lower_bound(x);
    return l.m * x + l.b;
  }
};
```

1.11 Persistent

`get`	berechnet Wert zu Zeitpunkt t	$O(\log(t))$
`set`	ändert Wert zu Zeitpunkt t	$O(\log(t))$
`reset`	setzt die Datenstruktur auf Zeitpunkt t	$O(1)$

```
template<typename T>
struct persistent {
  int& time;
  vector<pair<int, T>> data;
  persistent(int& time, T value = {})
    : time(time), data(1, {time, value}) {}
  T get(int t) {
    return prev(upper_bound(all(data), {t+1, {}}))->second;
  }
  int set(T value) {
    time += 2;
    data.push_back({time, value});
    return time;
  }
};
```

```
template<typename T>
struct persistentArray {
  int time;
  vector<persistent<T>> data;
  vector<pair<int, int>> mods;
  persistentArray(int n, T value = {})
    : time(0), data(n, {time, value}) {}
  T get(int p, int t) {return data[p].get(t);}
  int set(int p, T value) {
    mods.push_back({p, time});
    return data[p].set(value);
  }
  void reset(int t) {
    while (!mods.empty() && mods.back().second > t) {
      data[mods.back().first].data.pop_back();
      mods.pop_back();
    }
    time = t;
  }
};
```

1.12 STL-Tree

```
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
using namespace std; using namespace __gnu_pbds;
template<typename T>
using Tree = tree<T, null_type, less<T>, rb_tree_tag,
                  tree_order_statistics_node_update>;
int main() {
  Tree<int> X;
  for (int i : {1, 2, 4, 8, 16}) X.insert(i);
  *X.find_by_order(3); // => 8
  X.order_of_key(10);  // => 4 = min i, mit X[i] >= 10
}
```

1.13 STL Priority Queue

Nicht notwendig, wenn Smaller-Larger-Optimization greift.

```
#include <ext/pb_ds/priority_queue.hpp>
template<typename T>
// greater<T> für Min-Queue
using priorityQueue = __gnu_pbds::priority_queue<T, less<T>>;
int main() {
  priorityQueue<int> pq;
  auto it = pq.push(5);   // O(1)
  pq.push(7);
  pq.pop();               // O(log n) amortisiert
  pq.modify(it, 6);       // O(log n) amortisiert
  pq.erase(it);           // O(log n) amortisiert
  priorityQueue<int> pq2;
  pq.join(pq2);           // O(1)
}
```

1.14 STL HashMap

3 bis 4 mal langsamer als `std::vector` aber 8 bis 9 mal schneller als `std::map`

```cpp
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
using namespace __gnu_pbds;

template<typename T>
struct betterHash {
  size_t operator()(T o) const {
    size_t h = hash<T>()(o) ^ 42394245; //random value
    h = ((h >> 16) ^ h) * 0x45d9f3b;
    h = ((h >> 16) ^ h) * 0x45d9f3b;
    h = ((h >> 16) ^ h);
    return h;
}};
template<typename K, typename V, typename H = betterHash<K>>
using hashMap = gp_hash_table<K, V, H>;
template<typename K, typename H = betterHash<K>>
using hashSet = gp_hash_table<K, null_type, H>;
```

2 Graphen

2.1 Eulertouren

`euler` berechnet den Kreis $O(|V|+|E|)$

```cpp
vector<vector<int>> idx;
vector<int> to, validIdx, cycle;
vector<bool> used;

void addEdge(int a, int b) {
  idx[a].push_back(sz(to));
  to.push_back(b);
  used.push_back(false);
  idx[b].push_back(sz(to)); // für ungerichtet
  to.push_back(a);
  used.push_back(false);
}

void euler(int n) { // init idx und validIdx
  for (;validIdx[n] < sz(idx[n]); validIdx[n]++) {
    if (!used[idx[n][validIdx[n]]]) {
      int nn = to[idx[n][validIdx[n]]];
      used[idx[n][validIdx[n]]] = true;
      used[idx[n][validIdx[n]] ^ 1] = true; // für ungerichtet
      euler(nn);
  }}
  cycle.push_back(n); // Zyklus in umgekehrter Reihenfolge.
}
```

- Zyklus existiert, wenn jeder Knoten geraden Grad hat (ungerichtet), bei jedem Knoten Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen (gerichtet).
- Pfad existiert, wenn genau {0,2} Knoten ungeraden Grad haben (ungerichtet), bei allen Knoten Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen oder einer eine Ausgangskante mehr hat (Startknoten) und einer eine Eingangskante mehr hat (Endknoten).
- **Je nach Aufgabenstellung überprüfen, wie ein unzusammenhängender Graph interpretiert werden sollen.**
- Wenn eine bestimmte Sortierung verlangt wird oder Laufzeit vernachlässigbar ist, ist eine Implementierung mit einem `vector<set<int>> adjlist` leichter
- **Wichtig:** Algorithmus schlägt nicht fehl, falls kein Eulerzyklus existiert. Die Existenz muss separat geprüft werden.

2.2 Lowest Common Ancestor

`init`	baut DFS-Baum über g auf	$O(\|V\|\cdot\log(\|V\|))$
`getLCA`	findet LCA	$O(1)$
`getDepth`	berechnet Distanz zur Wurzel im DFS-Baum	$O(1)$

```cpp
struct LCA {
  vector<ll> depth;
  vector<int> visited, first;
  int idx;
  SparseTable st; //sparse table von oben

  void init(vector<vector<int>>& g, int root) {
    depth.assign(2 * sz(g), 0);
    visited.assign(2 * sz(g), -1);
    first.assign(sz(g), 2 * sz(g));
    idx = 0;
    visit(g, root);
    st.init(&depth);
  }

  void visit(vector<vector<int>>& g, int v, ll d=0, int p=-1) {
    visited[idx] = v, depth[idx] = d;
    first[v] = min(idx, first[v]), idx++;

    for (int w : g[v]) {
      if (first[w] == 2 * sz(g)) {
        visit(g, w, d + 1, v);
        visited[idx] = v, depth[idx] = d, idx++;
  }}}

  int getLCA(int a, int b) {
    if (first[a] > first[b]) swap(a, b);
    return visited[st.queryIdempotent(first[a], first[b] + 1)];
  }

  ll getDepth(int a) {return depth[first[a]];}
};
```

2.3 Centroids

`find_centroid` findet alle Centroids des Baums (maximal 2) $O(|V|)$

```cpp
vector<int> s;
void dfs1(int u, int v = -1) {
  s[u] = 1;
  for (int w : adj[u]) {
    if (w == v) continue;
    dfs1(w, u);
    s[u] += s[w];
}}
pair<int, int> dfs2(int u, int v, int n) {
  for (int w : adj[u]) {
    if (2 * s[w] == n) return {u, w};
    if (w != v && 2 * s[w] > n) return dfs2(w, u, n);
  }
  return {u, -1};
}
pair<int, int> find_centroid(int root) {
  // s muss nicht initialisiert werden, nur groß genug sein
  dfs1(root);
  return dfs2(root, -1, s[root]);
}
```

2.4 Heavy-Light Decomposition

`get_intervals` gibt Zerlegung des Pfades von u nach v $O(\log(|V|))$
Wichtig: Intervalle sind halboffen
Subbaum unter dem Knoten v ist das Intervall `[in[v], out[v])`.

```cpp
vector<vector<int>> adj;
vector<int> sz, in, out, nxt, par;
int t;
void dfs_sz(int v = 0, int from = -1) {
  sz[v] = 1;
  for (auto& u : adj[v]) {
    if (u != from) {
      dfs_sz(u, v);
      sz[v] += sz[u];
    }
    if (adj[v][0] == from || sz[u] > sz[adj[v][0]]) {
      swap(u, adj[v][0]);
}}}
void dfs_hld(int v = 0, int from = -1) {
  par[v] = from;
  in[v] = t++;
  for (int u : adj[v]) {
    if (u == from) continue;
    nxt[u] = (u == adj[v][0] ? nxt[v] : u);
    dfs_hld(u, v);
  }
  out[v] = t;
}
void init() {
  int n = sz(adj);
  sz.assign(n, 0); in.assign(n, 0); out.assign(n, 0);
  nxt.assign(n, 0); par.assign(n, -1);
  t = 0;
  dfs_sz(); dfs_hld();
}
vector<pair<int, int>> get_intervals(int u, int v) {
  vector<pair<int, int>> res;
  while (true) {
    if (in[v] < in[u]) swap(u, v);
    if (in[nxt[v]] <= in[u]) {
      res.emplace_back(in[u], in[v] + 1);
      return res;
    }
    res.emplace_back(in[nxt[v]], in[v] + 1);
    v = par[nxt[v]];
}}
int get_lca(int u, int v) {
  while (true) {
    if (in[v] < in[u]) swap(u, v);
    if (in[nxt[v]] <= in[u]) return in[u];
    v = par[nxt[v]];
}}
```

2.5 Baum-Isomorphie

`treeLabel` berechnet kanonischen Namen für einen Baum $O(|V| \cdot \log(|V|))$

```
vector<vector<int>> adj;
map<vector<int>, int> known;

int treeLabel(int root, int p = -1) {
  vector<int> children;
  for (int x : adj[root]) {
    if (x == p) continue;
    children.push_back(treeLabel(x, root));
  }
  sort(all(children));
  if (known.find(children) == known.end()) {
    known[children] = sz(known);
  }
  return known[children];
}
```

2.6 Minimale Spannbäume

Schnitteigenschaft Für jeden Schnitt C im Graphen gilt: Gibt es eine Kante e, die echt leichter ist als alle anderen Schnittkanten, so gehört diese zu allen minimalen Spannbäumen. ($\Rightarrow$ Die leichteste Kante in einem Schnitt kann in einem minimalen Spannbaum verwendet werden.)

Kreiseigenschaft Für jeden Kreis K im Graphen gilt: Die schwerste Kante auf dem Kreis ist nicht Teil des minimalen Spannbaums.

2.7 Kruskal

berechnet den Minimalen Spannbaum $O(|E| \cdot \log(|E|))$

```
sort(all(edges));
vector<edge> mst;
ll cost = 0;
for (edge& e : edges) {
  if (findSet(e.from) != findSet(e.to)) {
    unionSets(e.from, e.to);
    mst.push_back(e);
    cost += e.cost;
}}
```

2.8 Kürzeste Wege

2.8.1 Bellmann-Ford-Algorithmus

`bellmanFord` kürzeste Pfade oder negative Kreise finden $O(|V| \cdot |E|)$

```
void bellmannFord(int n, vector<edge> edges, int start) {
  vector<ll> dist(n, INF), parent(n, -1);
  dist[start] = 0;

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    for (edge& e : edges) {
      if (dist[e.from] != INF &&
          dist[e.from] + e.cost < dist[e.to]) {
        dist[e.to] = dist[e.from] + e.cost;
        parent[e.to] = e.from;
  }}}

  for (edge& e : edges) {
    if (dist[e.from] != INF &&
        dist[e.from] + e.cost < dist[e.to]) {
      // Negativer Kreis gefunden.
}}} //return dist, parent?;
```

2.8.2 Algorithmus von Dijkstra

`dijkstra` kürzeste Pfade in Graphen ohne negative Kanten $O(|E| \cdot \log(|V|))$

```
using path = pair<ll, int>; //dist, destination

void dijkstra(const vector<vector<path>> &adjlist, int start) {
  priority_queue<path, vector<path>, greater<path>> pq;
  vector<ll> dist(sz(adjlist), INF);
  vector<int> prev(sz(adjlist), -1);
  dist[start] = 0; pq.emplace(0, start);

  while (!pq.empty()) {
    auto [dc, c] = pq.top(); pq.pop();
    if (dc > dist[c]) continue; // WICHTIG!

    for (auto [dx, x] : adjlist[c]) {
      ll newDist = dc + dx;
      if (newDist < dist[x]) {
        dist[x] = newDist;
        prev[x] = c;
        pq.emplace(newDist, x);
  }}}
  //return dist, prev;
}
```

2.8.3 Floyd-Warshall-Algorithmus

`floydWarshall` kürzeste Pfade oder negative Kreise finden $O(|V|^3)$

- `dist[i][i] = 0, dist[i][j] = edge{j, j}.weight` oder `INF`
- `i` liegt auf einem negativen Kreis $\Leftrightarrow$ `dist[i][i] < 0`.

```
vector<vector<ll>> dist; // Entfernung zwischen je zwei Punkten.
vector<vector<int>> pre;

void floydWarshall() {
  pre.assign(sz(dist), vector<int>(sz(dist), -1));
  for (int i = 0; i < sz(dist); i++) {
    for (int j = 0; j < sz(dist); j++) {
      if (dist[i][j] < INF) {
        pre[i][j] = j;
  }}}
  for (int k = 0; k < sz(dist); k++) {
    for (int i = 0; i < sz(dist); i++) {
      for (int j = 0; j < sz(dist); j++) {
        if (dist[i][j] > dist[i][k] + dist[k][j]) {
          dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j];
          pre[i][j] = pre[i][k];
}}}}}
vector<int> getPath(int u, int v) {
  //return dist[u][v]; // Pfadlänge u -> v
  if (pre[u][v] < 0) return {};
  vector<int> path = {v};
  while (u != v) path.push_back(u = pre[u][v]);
  return path; //Pfad u -> v
}
```

2.8.4 Matrix-Algorithmus

Sei d_{ij} die Distanzmatrix von G, dann gibt d_{ij}^k die kürzeste Distanz von i nach j mit maximal k kanten an mit der Verknüpfung: $c_{ij} = a_{ij} \otimes b_{ij} = \min\{a_{ik} + b_{kj}\}$
Sei a_{ij} die Adjazenzmatrix von G (mit $a_{ii} = 1$), dann gibt a_{ij}^k die Anzahl der Wege von i nach j mit Länge genau (maximal) k an mit der Verknüpfung: $c_{ij} = a_{ij} \otimes b_{ij} = \sum a_{ik} + b_{kj}$

2.9 Erdős-Gallai

Sei $d_1 \geq \cdots \geq d_n$. Es existiert genau dann ein Graph G mit Degreesequence d falls $\sum_{i=1}^{n} d_i$ gerade ist und für $1 \leq k \leq n$: $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k \cdot (k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(d_i, k)$

`havelHakimi` findet Graph $O((|V|+|E|) \cdot \log(|V|))$

```
vector<vector<int>> havelHakimi(const vector<int>& deg) {
  priority_queue<pair<int, int>> pq;
  for (int i = 0; i < sz(deg); i++) pq.push({deg[i], i});
  vector<vector<int>> adj;
  while (!pq.empty()) {
    auto [degV, v] = pq.top(); pq.pop();
    if (sz(pq) < degV) return {}; //impossible
    vector<pair<int, int>> todo(degV);
    for (auto& e : todo) e = pq.top(), pq.pop();
    for (auto [degU, u] : todo) {
      adj[v].push_back(u);
      adj[u].push_back(v);
      if (degU > 1) pq.push({degU - 1, u});
  }}
  return adj;
}
```

2.10 Dynamic Connectivity

`Constructor`	erzeugt Baum (n Knoten, m updates)	$O(n+m)$
`addEdge`	fügt Kannte ein,`id`=delete Zeitpunkt	$O(\log(n))$
`eraseEdge`	entfernt Kante `id`	$O(\log(n))$

```
struct connect {
  int n;
  vector<pair<int, int>> edges;
  LCT lct; // min LCT no updates required
  connect(int n, int m) : n(n), edges(m), lct(n+m) {}
  bool connected(int a, int b) {
    return lct.connected(&lct.nodes[a], &lct.nodes[b]);
  }
  void addEdge(int a, int b, int id) {
    lct.nodes[id + n] = LCT::Node(id + n, id + n);
    edges[id] = {a, b};
    if (connected(a, b)) {
      int old = lct.query(&lct.nodes[a], &lct.nodes[b]);
      if (old < id) eraseEdge(old);
    }
    if (!connected(a, b)) {
      lct.link(&lct.nodes[a], &lct.nodes[id + n]);
      lct.link(&lct.nodes[b], &lct.nodes[id + n]);
  }}
  void eraseEdge(ll id) {
    if (connected(edges[id].first, edges[id].second) &&
      lct.query(&lct.nodes[edges[id].first],
                &lct.nodes[edges[id].second]) == id) {
      lct.cut(&lct.nodes[edges[id].first], &lct.nodes[id + n]);
      lct.cut(&lct.nodes[edges[id].second], &lct.nodes[id + n]);
  }}
};
```

2.11 DFS

Kantentyp (v,w)	dfs[v] < dfs[w]	fin[v] > fin[w]	seen[w]
in-tree	true	true	false
forward	true	true	true
backward	false	false	true
cross	false	true	true

2.12 Artikulationspunkte, Brücken und BCC

`find` berechnet Artikulationspunkte, Brücken und BCC $O(|V|+|E|)$
Wichtig: isolierte Knoten und Brücken sind keine BCC.

```
vector<vector<edge>> adjlist;
vector<int> num;
int counter, rootCount, root;
vector<bool> isArt;
vector<edge> bridges, st;
vector<vector<edge>> bcc;

int dfs(int v, int parent = -1) {
  int me = num[v] = ++counter, top = me;
  for (edge& e : adjlist[v]) {
    if (e.id == parent){}
    else if (num[e.to]) {
      top = min(top, num[e.to]);
      if (num[e.to] < me) st.push_back(e);
    } else {
      if (v == root) rootCount++;
      int si = sz(st);
      int up = dfs(e.to, e.id);
      top = min(top, up);
      if (up >= me) isArt[v] = true;
      if (up > me) bridges.push_back(e);
      if (up <= me) st.push_back(e);
      if (up == me) {
        bcc.emplace_back();
        while (sz(st) > si) {
          bcc.back().push_back(st.back());
          st.pop_back();
  }}}}
  return top;
}

void find() {
  counter = 0;
  num.assign(sz(adjlist), 0);
  isArt.assign(sz(adjlist), false);
  bridges.clear();
  st.clear();
  bcc.clear();
  for (int v = 0; v < sz(adjlist); v++) {
    if (!num[v]) {
      root = v;
      rootCount = 0;
      dfs(v);
      isArt[v] = rootCount > 1;
}}}
```

2.13 Strongly Connected Components (Tarjan)

`scc` berechnet starke Zusammenhangskomponenten $O(|V|+|E|)$

```
vector<vector<int>> adjlist;

int counter, sccCounter;
vector<bool> inStack;
vector<vector<int>> sccs;
// idx enthält den Index der SCC pro Knoten.
vector<int> d, low, idx, s;

void visit(int v) {
  d[v] = low[v] = counter++;
  s.push_back(v); inStack[v] = true;
  for (auto u : adjlist[v]) {
    if (d[u] < 0) {
      visit(u);
      low[v] = min(low[v], low[u]);
    } else if (inStack[u]) {
      low[v] = min(low[v], low[u]);
  }}
  if (d[v] == low[v]) {
    sccs.push_back({});
    int u;
    do {
      u = s.back(); s.pop_back(); inStack[u] = false;
      idx[u] = sccCounter;
      sccs[sccCounter].push_back(u);
    } while (u != v);
    sccCounter++;
}}

void scc() {
  inStack.assign(sz(adjlist), false);
  d.assign(sz(adjlist), -1);
  low.assign(sz(adjlist), -1);
  idx.assign(sz(adjlist), -1);
  counter = sccCounter = 0;
  for (int i = 0; i < sz(adjlist); i++) {
    if (d[i] < 0) visit(i);
}}
```

2.14 2-SAT

```
struct sat2 {
  int n; // + scc variablen
  vector<int> sol;

  sat2(int vars) : n(vars*2), adjlist(vars*2) {};

  static int var(int i) {return i << 1;} // use this!

  void addImpl(int a, int b) {
    adjlist[a].push_back(b);
    adjlist[1^b].push_back(1^a);
  }
  void addEquiv(int a, int b) {addImpl(a, b); addImpl(b, a);}
  void addOr(int a, int b) {addImpl(1^a, b);}
  void addXor(int a, int b) {addOr(a, b); addOr(1^a, 1^b);}
  void addTrue(int a) {addImpl(1^a, a);}
  void addFalse(int a) {addTrue(1^a);}
  void addAnd(int a, int b) {addTrue(a); addTrue(b);}
  void addNand(int a, int b) {addOr(1^a, 1^b);}

  bool solvable() {
    scc(); //scc code von oben
    for (int i = 0; i < n; i += 2) {
      if (idx[i] == idx[i + 1]) return false;
    }
    return true;
  }

  void assign() {
    sol.assign(n, -1);
    for (int i = 0; i < sccCounter; i++) {
      if (sol[sccs[i][0]] == -1) {
        for (int v : sccs[i]) {
          sol[v] = 1;
          sol[1^v] = 0;
  }}}}
};
```

2.15 Maximal Cliques

`bronKerbosch` berechnet alle maximalen Cliquen $O\left(3^{\frac{n}{3}}\right)$
`addEdge` fügt **ungerichtete** Kante ein $O(1)$

```
using bits = bitset<64>;
vector<bits> adj, cliques;

void addEdge(int a, int b) {
  if (a != b) adj[a][b] = adj[b][a] = 1;
}

void bronKerboschRec(bits R, bits P, bits X) {
  if (!P.any() && !X.any()) {
    cliques.push_back(R);
  } else {
    int q = min(P._Find_first(), X._Find_first());
    bits cands = P & ~adj[q];
    for (int i = 0; i < sz(adj); i++) if (cands[i]){
      R[i] = 1;
      bronKerboschRec(P & adj[i], X & adj[i], R);
      R[i] = P[i] = 0;
      X[i] = 1;
}}}
void bronKerbosch() {
  cliques.clear();
  bronKerboschRec({}, {(1ull << sz(adj)) - 1}, {});
}
```

2.16 Cycle Counting

`findBase` berechnet Basis $O(|V|\cdot|E|)$
`count` zählt Zykel $O\left(2^{|base|}\right)$

- jeder Zyklus ist das xor von einträgen in `base`.

```
constexpr int maxEdges = 128;
using cycle = bitset<maxEdges>;
struct cylces {
  vector<vector<pair<int, int>>> adj;
  vector<bool> seen;
  vector<cycle> paths, base;
  vector<pair<int, int>> edges;

  cylces(int n) : adj(n), seen(n), paths(n) {}

  void addEdge(int a, int b) {
    adj[a].push_back({b, sz(edges)});
    adj[b].push_back({a, sz(edges)});
    edges.push_back({a, b});
  }

  void addBase(cycle cur) {
    for (cycle o : base) {
      o ^= cur;
      if (o._Find_first() > cur._Find_first()) cur = o;
    }
    if (cur.any()) base.push_back(cur);
  }

  void findBase(int c = 0, int p = -1, cycle cur = {}) {
    if (adj.empty()) return;
    if (seen[c]) {
      addBase(cur ^ paths[c]);
    } else {
      seen[c] = true;
      paths[c] = cur;
      for (auto [to, id] : adj[c]) {
        if (to == p) continue;
        cur[id].flip();
        findBase(to, c, cur);
        cur[id].flip();
  }}}

  //cycle must be constrcuted from base
  bool isCycle(cycle cur) {
    if (cur.none()) return false;
    init(sz(adj)); // union find
    for (int i = 0; i < sz(edges); i++) {
      if (cur[i]) {
        cur[i] = false;
        if (findSet(edges[i].first) ==
            findSet(edges[i].second)) break;
        unionSets(edges[i].first, edges[i].second);
    }}
    return cur.none();
  };

  int count() {
    findBase();
    int res = 0;
    for (int i = 1; i < (1 << sz(base)); i++) {
      cycle cur;
      for (int j = 0; j < sz(base); j++) {
        if (((i >> j) & 1) != 0) cur ^= base[j];
      if (isCycle(cur)) res++;
    }
    return res;
  }
};
```

2.17 Wert des maximalen Matchings

Fehlerwahrscheinlichkeit: $\left(\frac{m}{MOD}\right)^I$

```
constexpr int MOD=1'000'000'007, I=10;
vector<vector<ll>> adjlist, mat;

int max_matching() {
  int ans = 0;
  mat.assign(sz(adjlist), {});
  for (int _ = 0; _ < I; _++) {
    for (int i = 0; i < sz(adjlist); i++) {
      mat[i].assign(sz(adjlist), 0);
      for (int j : adjlist[i]) {
        if (j < i) {
          mat[i][j] = rand() % (MOD - 1) + 1;
          mat[j][i] = MOD - mat[i][j];
    }}}
    gauss(sz(adjlist), MOD); //LGS unten
    int rank = 0;
    for (auto& row : mat) {
      if (*min_element(all(row)) != 0) rank++;
    }
    ans = max(ans, rank / 2);
  }
  return ans;
}
```

2.18 Allgemeines maximales Matching

`match` berechnet algemeines Matching $O\left(|E|\cdot|V|\cdot\log(|V|)\right)$

```
struct GM {
  vector<vector<int>> adjlist;
  // pairs ist der gematchte knoten oder n
  vector<int> pairs, first, que;
  vector<pair<int, int>> label;
  int head, tail;

  GM(int n) : adjlist(n), pairs(n + 1, n), first(n + 1, n),
              que(n), label(n + 1, {-1, -1}) {}

  void rematch(int v, int w) {
    int t = pairs[v]; pairs[v] = w;
    if (pairs[t] != v) return;
    if (label[v].second == -1) {
      pairs[t] = label[v].first;
      rematch(pairs[t], t);
    } else {
      auto [x, y] = label[v];
      rematch(x, y);
      rematch(y, x);
  }}

  int findFirst(int u) {
    return label[first[u]].first < 0 ? first[u]
         : first[u] = findFirst(first[u]);
  }

  void relabel(int x, int y) {
    int r = findFirst(x);
    int s = findFirst(y);
    if (r == s) return;
    auto h = label[r] = label[s] = {~x, y};
    int join;
    while (true) {
      if (s != sz(adjlist)) swap(r, s);
      r = findFirst(label[pairs[r]].first);
      if (label[r] == h) {
        join = r;
        break;
      } else {
        label[r] = h;
    }}
    for (int v : {first[x], first[y]}) {
      for (; v != join; v = first[label[pairs[v]].first]) {
        label[v] = {x, y};
        first[v] = join;
        que[tail++] = v;
  }}}

  bool augment(int u) {
    label[u] = {sz(adjlist), -1};
    first[u] = sz(adjlist);
    head = tail = 0;
    for (que[tail++] = u; head < tail;) {
      int x = que[head++];
      for (int y : adjlist[x]) {
        if (pairs[y] == sz(adjlist) && y != u) {
          pairs[y] = x;
          rematch(x, y);
          return true;
        } else if (label[y].first >= 0) {
          relabel(x, y);
        } else if (label[pairs[y]].first == -1) {
          label[pairs[y]].first = x;
          first[pairs[y]] = y;
          que[tail++] = pairs[y];
    }}}
    return false;
  }

  int match() {
    int matching = head = tail = 0;
    for (int u = 0; u < sz(adjlist); u++) {
      if (pairs[u] < sz(adjlist) || !augment(u)) continue;
      matching++;
      for (int i = 0; i < tail; i++)
        label[que[i]] = label[pairs[que[i]]] = {-1, -1};
      label[sz(adjlist)] = {-1, -1};
    }
    return matching;
  }
};
```

2.19 Maximal Cardinatlity Bipartite Matching

kuhn berechnet Matching $O(|V| \cdot \min(ans^2, |E|))$
- die ersten [0..n) Knoten in `adjlist` sind die linke Seite des Graphen

```
vector<vector<int>> adjlist;
vector<int> pairs; // Der gematchte Knoten oder -1.
vector<bool> visited;

bool dfs(int v) {
  if (visited[v]) return false;
  visited[v] = true;
  for (auto w : adjlist[v]) if (pairs[w] < 0 || dfs(pairs[w])) {
    pairs[w] = v; pairs[v] = w; return true;
  }
  return false;
}

int kuhn(int n) { // n = #Knoten links.
  pairs.assign(sz(adjlist), -1);
  int ans = 0;
  // Greedy Matching. Optionale Beschleunigung.
  for (int i = 0; i < n; i++) for (auto w : adjlist[i])
    if (pairs[w] < 0) {pairs[i] = w; pairs[w] = i; ans++; break;}
  for (int i = 0; i < n; i++) if (pairs[i] < 0) {
    visited.assign(n, false);
    ans += dfs(i);
  }
  return ans; // Größe des Matchings.
}
```

hopcroft_karp berechnet Matching $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$

```
vector<vector<int>> adjlist;
// pairs ist der gematchte Knoten oder -1
vector<int> pairs, dist;

bool bfs(int n) {
  queue<int> q;
  for(int i = 0; i < n; i++) {
    if (pairs[i] < 0) {dist[i] = 0; q.push(i);}
    else dist[i] = -1;
  }
  while(!q.empty()) {
    int u = q.front(); q.pop();
    for (int v : adjlist[u]) {
      if (pairs[v] < 0) return true;
      if (dist[pairs[v]] < 0) {
        dist[pairs[v]] = dist[u] + 1;
        q.push(pairs[v]);
  }}}
  return false;
}

bool dfs(int u) {
  for (int v : adjlist[u]) {
    if (pairs[v] < 0 ||
       (dist[pairs[v]] > dist[u] && dfs(pairs[v]))) {
      pairs[v] = u; pairs[u] = v;
      return true;
  }}
  dist[u] = -1;
  return false;
}

int hopcroft_karp(int n) { // n = #Knoten links
  int ans = 0;
  pairs.assign(sz(adjlist), -1);
  dist.resize(n);
  // Greedy Matching, optionale Beschleunigung.
  for (int i = 0; i < n; i++) for (int w : adjlist[i])
    if (pairs[w] < 0) {pairs[i] = w; pairs[w] = i; ans++; break;}
  while(bfs(n)) for(int i = 0; i < n; i++)
    if (pairs[i] < 0) ans += dfs(i);
  return ans;
}
```

2.20 Maximum Weight Bipartite Matching

match berechnet Matching $O(|V|^3)$

```
double costs[N_LEFT][N_RIGHT];

// Es muss l<=r sein! (sonst Endlosschleife)
double match(int l, int r) {
  vector<double> lx(l), ly(r);
  //xy is matching from l->r, yx from r->l, or -1
  vector<int> xy(l, -1), yx(r, -1), augmenting(r);
  vector<bool> s(l);
  vector<pair<double, int>> slack(r);

  for (int x = 0; x < l; x++)
    lx[x] = *max_element(costs[x], costs[x] + r);
  for (int root = 0; root < l; root++) {
    augmenting.assign(r, -1);
    s.assign(l, false);
    s[root] = true;
    for (int y = 0; y < r; y++) {
      slack[y] = {lx[root] + ly[y] - costs[root][y], root};
    }
    int y = -1;
    while (true) {
      double delta = INF;
      int x = -1;
      for (int yy = 0; yy < r; yy++) {
        if (augmenting[yy] < 0) {
          if (slack[yy].first < delta) {
            delta = slack[yy].first;
            x = slack[yy].second;
            y = yy;
      }}}
      if (delta > 0) {
        for (int x = 0; x < l; x++) if (s[x]) lx[x] -= delta;
        for (int y = 0; y < r; y++) {
          if (augmenting[y] >= 0) ly[y] += delta;
          else slack[y].first -= delta;
      }}
      augmenting[y] = x;
      x = yx[y];
      if (x == -1) break;
      s[x] = true;
      for (int y = 0; y < r; y++) {
        if (augmenting[y] < 0) {
          double alt = lx[x] + ly[y] - costs[x][y];
          if (slack[y].first > alt) {
            slack[y] = {alt, x};
    }}}}
    while (y >= 0) {
      // Jede Iteration vergrößert Matching um 1
      // (können 0-Kanten sein!)
      int x = augmenting[y];
      int prec = xy[x];
      yx[y] = x;
      xy[x] = y;
      y = prec;
  }}
  // Wert des Matchings
  return accumulate(all(lx), 0.0) +
         accumulate(all(ly), 0.0);
}
```

2.21 Global Mincut

stoer_wagner berechnet globalen Mincut $O(|V|^2 \cdot \log(|E|))$
merge(a,b) merged Knoten b in Knoten a $O(|E|)$
Tipp: Cut Rekonstruktion mit `unionFind` für Partitionierung oder `vector<bool>` für edge id's im cut.

```
struct edge {
  int from, to;
  ll cap;
};

vector<vector<edge>> adjlist, tmp;
vector<bool> erased;

void merge(int a, int b) {
  tmp[a].insert(tmp[a].end(), all(tmp[b]));
  tmp[b].clear();
  erased[b] = true;
  for (auto& v : tmp) {
    for (auto&e : v) {
      if (e.from == b) e.from = a;
      if (e.to == b) e.to = a;
}}}
ll stoer_wagner() {
  ll res = INF;
  tmp = adjlist;
  erased.assign(sz(tmp), false);
  for (int i = 1; i < sz(tmp); i++) {
    int s = 0;
    while (erased[s]) s++;
    priority_queue<pair<ll, int>> pq;
    pq.push({0, s});
    vector<ll> con(sz(tmp));
    ll cur = 0;
    vector<pair<ll, int>> state;
    while (!pq.empty()) {
      int c = pq.top().second;
      pq.pop();
      if (con[c] < 0) continue; //already seen
      con[c] = -1;
```

```
      for (auto e : tmp[c]) {
        if (con[e.to] >= 0) {//add edge to cut
          con[e.to] += e.cap;
          pq.push({con[e.to], e.to});
          cur += e.cap;
        } else if (e.to != c) {//remove edge from cut
          cur -= e.cap;
      }}
      state.push_back({cur, c});
    }
    int t = state.back().second;
    state.pop_back();
    if (state.empty()) return 0; //graph is not connected?!
    merge(state.back().second, t);
    res = min(res, state.back().first);
  }
  return res;
}
```

2.22 Max-Flow

2.22.1 Push Relabel

`maxFlow` gut bei sehr dicht besetzten Graphen. $O\left(|V|^2 \cdot \sqrt{|E|}\right)$

`addEdge` fügt eine **gerichtete** Kante ein $O(1)$

```
struct edge {
  int from, to;
  ll f, c;
};
vector<edge> edges;
vector<vector<int>> adjlist, hs;
vector<ll> ec;
vector<int> cur, H;
void addEdge(int from, int to, ll c) {
  adjlist[from].push_back(sz(edges));
  edges.push_back({from, to, 0, c});
  adjlist[to].push_back(sz(edges));
  edges.push_back({to, from, 0, 0});
}
void addFlow(int id, ll f) {
  if (ec[edges[id].to] == 0 && f > 0)
    hs[H[edges[id].to]].push_back(edges[id].to);
  edges[id].f += f;
  edges[id^1].f -= f;
  ec[edges[id].to] += f;
  ec[edges[id].from] -= f;
}
ll maxFlow(int s, int t) {
  int n = sz(adjlist);
  hs.assign(2*n, {});
  ec.assign(n, 0);
  cur.assign(n, 0);
  H.assign(n, 0);
  H[s] = n;
  ec[t] = 1;//never set t to active...
  vector<int> co(2*n);
  co[0] = n - 1;
  for (int id : adjlist[s]) addFlow(id, edges[id].c);
  for (int hi = 0;;) {
    while (hs[hi].empty()) if (!hi--) return -ec[s];
    int u = hs[hi].back();
    hs[hi].pop_back();
    while (ec[u] > 0) {
      if (cur[u] == sz(adjlist[u])) {
        H[u] = 2*n;
        for (int i = 0; i < sz(adjlist[u]); i++) {
          int id = adjlist[u][i];
          if (edges[id].c - edges[id].f > 0 &&
              H[u] > H[edges[id].to] + 1) {
            H[u] = H[edges[id].to] + 1;
            cur[u] = i;
          }}
        co[H[u]]++;
        if (!--co[hi] && hi < n) {
          for (int i = 0; i < n; i++) {
            if (hi < H[i] && H[i] < n) {
              co[H[i]]--;
              H[i] = n + 1;
          }}}
        hi = H[u];
      } else {
        auto e = edges[adjlist[u][cur[u]]];
        if (e.c - e.f > 0 && H[u] == H[e.to] + 1) {
          addFlow(adjlist[u][cur[u]], min(ec[u], e.c - e.f));
        } else {
          cur[u]++;
}}}}}
```

2.22.2 Dinic's Algorithm mit Capacity Scaling

`maxFlow` doppelt so schnell wie Ford Fulkerson $O\left(|V|^2 \cdot |E|\right)$

`addEdge` fügt eine **gerichtete** Kante ein $O(1)$

```
struct edge {
  int from, to;
  ll f, c;
};
vector<edge> edges;
vector<vector<int>> adjlist;
int s, t;
vector<int> pt, dist;
ll flow, lim;
queue<int> q;
void addEdge(int from, int to, ll c) {
  adjlist[from].push_back(sz(edges));
  edges.push_back({from, to, 0, c});
  adjlist[to].push_back(sz(edges));
  edges.push_back({to, from, 0, 0});
}
bool bfs() {
  dist.assign(sz(dist), -1);
  dist[t] = sz(adjlist) + 1;
  q.push(t);
  while (!q.empty() && dist[s] < 0) {
    int cur = q.front(); q.pop();
    for (int id : adjlist[cur]) {
      int to = edges[id].to;
      if (dist[to] < 0 &&
          edges[id ^ 1].c - edges[id ^ 1].f >= lim) {
        dist[to] = dist[cur] - 1;
        q.push(to);
  }}}
  while (!q.empty()) q.pop();
  return dist[s] >= 0;
}
bool dfs(int v, ll flow) {
  if (flow == 0) return false;
  if (v == t) return true;
  for (; pt[v] < sz(adjlist[v]); pt[v]++) {
    int id = adjlist[v][pt[v]], to = edges[id].to;
    if (dist[to] == dist[v] + 1 &&
        edges[id].c - edges[id].f >= flow) {
      if (dfs(to, flow)) {
        edges[id].f += flow;
        edges[id ^ 1].f -= flow;
        return true;
  }}}
  return false;
}
ll maxFlow(int source, int target) {
  s = source;
  t = target;
  flow = 0;
  dist.resize(sz(adjlist));
  for (lim = (1LL << 62); lim >= 1;) {
    if (!bfs()) {lim /= 2; continue;}
    pt.assign(sz(adjlist), 0);
    while (dfs(s, lim)) flow += lim;
  }
  return flow;
}
```

2.23 Min-Cost-Max-Flow

`mincostflow` berechnet Fluss $O\left(|V|^2 \cdot |E|^2\right)$

```
constexpr ll INF = 1LL << 60; // Größer als der maximale Fluss.
struct MinCostFlow {
  struct edge {
    int to;
    ll f, cost;
  };
  vector<edge> edges;
  vector<vector<int>> adjlist;
  vector<int> pref, con;
  vector<ll> dist;

  const int s, t;
  ll maxflow, mincost;

  MinCostFlow(int n, int source, int target) :
    adjlist(n), s(source), t(target) {};

  void addedge(int u, int v, ll c, ll cost) {
    adjlist[u].push_back(sz(edges));
```

```
    edges.push_back({v, c, cost});
    adjlist[v].push_back(sz(edges));
    edges.push_back({u, 0, -cost});
  }
  bool SPFA() {
    pref.assign(sz(adjlist), -1);
    dist.assign(sz(adjlist), INF);
    vector<bool> inqueue(sz(adjlist));
    queue<int> queue;
    dist[s] = 0;
    queue.push(s);
    pref[s] = s;
    inqueue[s] = true;
    while (!queue.empty()) {
      int cur = queue.front(); queue.pop();
      inqueue[cur] = false;
      for (int id : adjlist[cur]) {
        int to = edges[id].to;
        if (edges[id].f > 0 &&
            dist[to] > dist[cur] + edges[id].cost) {
          dist[to] = dist[cur] + edges[id].cost;
          pref[to] = cur;
          con[to] = id;
          if (!inqueue[to]) {
            inqueue[to] = true;
            queue.push(to);
    }}}}
    return pref[t] != -1;
  }
  void extend() {
    ll w = INF;
    for (int u = t; pref[u] != u; u = pref[u])
      w = min(w, edges[con[u]].f);
    maxflow += w;
    mincost += dist[t] * w;
    for (int u = t; pref[u] != u; u = pref[u]) {
      edges[con[u]].f -= w;
      edges[con[u] ^ 1].f += w;
  }}
  void mincostflow() {
    con.assign(sz(adjlist), 0);
    maxflow = mincost = 0;
    while (SPFA()) extend();
  }
};
```

3 Geometrie

3.1 Closest Pair

`shortestDist` kürzester Abstand zwischen Punkten $O(n \cdot \log(n))$

```
bool compY(pt a, pt b) {
  return (imag(a) == imag(b)) ? real(a) < real(b)
                              : imag(a) < imag(b);
}
bool compX(pt a, pt b) {
  return (real(a) == real(b)) ? imag(a) < imag(b)
                              : real(a) < real(b);
}
double shortestDist(vector<pt>& pts) { // sz(pts) > 1
  set<pt, bool(*)(pt, pt)> status(compY);
  sort(all(pts), compX);
  double opt = 1.0/0.0, sqrtOpt = 1.0/0.0;
  auto left = pts.begin(), right = pts.begin();
  status.insert(*right); right++;
  while (right != pts.end()) {
    if (left != right &&
        abs(real(*left - *right)) >= sqrtOpt) {
      status.erase(*left);
      left++;
    } else {
      auto lower = status.lower_bound({-1.0/0.0, //-INF
                                       imag(*right) - sqrtOpt});
      auto upper = status.upper_bound({-1.0/0.0, //-INF
                                       imag(*right) + sqrtOpt});
      for (;lower != upper; lower++) {
        double cand = norm(*right - *lower);
        if (cand < opt) {
          opt = cand;
          sqrtOpt = sqrt(opt);
      }}
      status.insert(*right);
      right++;
  }}
  return sqrtOpt;
}
```

3.2 Konvexe Hülle

`convexHull` berechnet Konvexehülle $O(n \cdot \log(n))$

- Konvexehülle gegen den Uhrzeigersinn Sortiert
- nur Eckpunkte enthalten(für alle Punkte = im CCW Test entfernen)
- Erster und Letzter Punkt sind identisch

```
vector<pt> convexHull(vector<pt> pts){
  sort(all(pts), [](const pt& a, const pt& b){
    return real(a) == real(b) ? imag(a) < imag(b)
                              : real(a) < real(b);
  });
  pts.erase(unique(all(pts)), pts.end());
  int k = 0;
  vector<pt> h(2 * sz(pts));
  for (int i = 0; i < sz(pts); i++) {// Untere Hülle.
    while (k > 1 && cross(h[k-2], h[k-1], pts[i]) <= 0) k--;
    h[k++] = pts[i];
  }
  for (int i = sz(pts)-2, t = k; i >= 0; i--) {// Obere Hülle.
    while (k > t && cross(h[k-2], h[k-1], pts[i]) <= 0) k--;
    h[k++] = pts[i];
  }
  h.resize(k);
  return h;
}
```

3.3 Rotating calipers

`antipodalPoints` berechnet antipodale Punkte $O(n)$
WICHTIG: Punkte müssen gegen den Uhrzeigersinn Sortiert sein und konvexes Polygon bilden!

```
vector<pair<int, int>> antipodalPoints(vector<pt>& h) {
  if (sz(h) < 2) return {};
  vector<pair<int, int>> result;
  for (int i = 0, j = 1; i < j; i++) {
    while (true) {
      result.push_back({i, j});
      if (cross(h[(i + 1) % sz(h)] - h[i],
                h[(j + 1) % sz(h)] - h[j]) <= 0) break;
      j = (j + 1) % sz(h);
  }}
  return result;
}
```

3.4 Formeln – `std::complex`

```
// Komplexe Zahlen als Punkte. Wenn immer möglich complex<ll>
// verwenden. Funktionen wie abs() geben dann aber ll zurück.
using pt = complex<double>;
constexpr double PIU = acos(-1.0l); // PIL < PI < PIU
constexpr double PIL = PIU-2e-19l;
// Winkel zwischen Punkt und x-Achse in [-PI, PI].
double angle(pt a) {return arg(a);}
// rotiert Punkt im Uhrzeigersinn um den Ursprung.
pt rotate(pt a, double theta) {return a * polar(1.0, theta);}
// Skalarprodukt.
double dot(pt a, pt b) {return real(conj(a) * b);}
// abs()^2.(pre c++20)
double norm(pt a) {return dot(a, a);}
// Kreuzprodukt, 0, falls kollinear.
double cross(pt a, pt b) {return imag(conj(a) * b);}
double cross(pt p, pt a, pt b) {return cross(a - p, b - p);}
//  1 => c links von a->b
//  0 => a, b und c kolliniear
// -1 => c rechts von a->b
int orientation(pt a, pt b, pt c) {
  double orien = cross(b - a, c - a);
  return (orien > EPS) - (orien < -EPS);
}
// Liegt d in der gleichen Ebene wie a, b, und c?
bool isCoplanar(pt a, pt b, pt c, pt d) {
  return abs((b - a) * (c - a) * (d - a)) < EPS;
}
// identifiziert winkel zwischen Vektoren u und v
pt uniqueAngle(pt u, pt v) {
  pt tmp = v * conj(u);
  ll g = abs(gcd(real(tmp), imag(tmp)));
  return tmp / g;
}
```

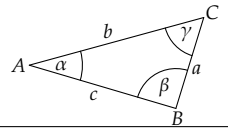
```cpp
// Test auf Streckenschnitt zwischen a-b und c-d.
bool lineSegmentIntersection(pt a, pt b, pt c, pt d) {
  if (orientation(a, b, c) == 0 && orientation(a, b, d) == 0)
      return pointOnLineSegment(a,b,c) ||
             pointOnLineSegment(a,b,d) ||
             pointOnLineSegment(c,d,a) ||
             pointOnLineSegment(c,d,b);
  return orientation(a, b, c) * orientation(a, b, d) <= 0 &&
         orientation(c, d, a) * orientation(c, d, b) <= 0;
}
// Berechnet die Schnittpunkte der Strecken p0-p1 und p2-p3.
// Enthält entweder keinen Punkt, den einzigen Schnittpunkt
// oder die Endpunkte der Schnittstrecke.
vector<pt> lineSegmentIntersection(pt p0, pt p1, pt p2, pt p3) {
  double a = cross(p1 - p0, p3 - p2);
  double b = cross(p2 - p0, p3 - p2);
  double c = cross(p1 - p0, p0 - p2);
  if (a < 0) {a = -a; b = -b; c = -c;}
  if (b < -EPS || b-a > EPS || c < -EPS || c-a > EPS) return {};
  if (a > EPS) return {p0 + b/a*(p1 - p0)};
  vector<pt> result;
  auto insertUnique = [&](pt p) {
    for (auto q: result) if (abs(p - q) < EPS) return;
    result.push_back(p);
  };
  if (dot(p2-p0, p3-p0) < EPS) insertUnique(p0);
  if (dot(p2-p1, p3-p1) < EPS) insertUnique(p1);
  if (dot(p0-p2, p1-p2) < EPS) insertUnique(p2);
  if (dot(p0-p3, p1-p3) < EPS) insertUnique(p3);
  return result;
}
// Entfernung von Punkt p zur Gearden durch a-b. 2d und 3d
double distToLine(pt a, pt b, pt p) {
  return abs(cross(p - a, b - a)) / abs(b - a);
}
// Projektiert p auf die Gerade a-b
pt projectToLine(pt a, pt b, pt p) {
  return a + (b - a) * dot(p - a, b - a) / norm(b - a);
}
// Liegt p auf der Geraden a-b? 2d und 3d
bool pointOnLine(pt a, pt b, pt p) {
  return cross(a, b, p) == 0;
}
// Test auf Linienschnitt zwischen a-b und c-d.
bool lineIntersection(pt a, pt b, pt c, pt d) {
  return abs(cross(a - b, c - d)) < EPS;
}
// Berechnet den Schnittpunkt der Graden p0-p1 und p2-p3.
// die Graden dürfen nicht parallel sein!
pt lineIntersection(pt p0, pt p1, pt p2, pt p3) {
  double a = cross(p1 - p0, p3 - p2);
  double b = cross(p2 - p0, p3 - p2);
  return {p0 + b/a*(p1 - p0)};
}
```

```cpp
// Liegt p auf der Strecke a-b?
bool pointOnLineSegment(pt a, pt b, pt p) {
  if (cross(a, b, p) != 0) return false;
  double dist = norm(a - b);
  return norm(a - p) <= dist && norm(b - p) <= dist;
}
// Entfernung von Punkt p zur Strecke a-b.
double distToSegment(pt a, pt b, pt p) {
  if (a == b) return abs(p - a);
  if (dot(p - a, b - a) <= 0) return abs(p - a);
  if (dot(p - b, b - a) >= 0) return abs(p - b);
  return distToLine(a, b, p);
}
// Kürzeste Entfernung zwischen den Strecken a-b und c-d.
double distBetweenSegments(pt a, pt b, pt c, pt d) {
  if (lineSegmentIntersection(a, b, c, d)) return 0.0;
  return min({distToSegment(a, b, c), distToSegment(a, b, d),
              distToSegment(c, d, a), distToSegment(c, d, b)});
}
// sortiert alle Punkte pts auf einer Linie entsprechend dir
void sortLine(pt dir, vector<pt>& pts) { // (2d und 3d)
  sort(all(pts), [&](pt a, pt b){
    return dot(dir, a) < dot(dir, b);
  });
}
```

```cpp
bool left(pt p) {return real(p) < 0 ||
                        (real(p) == 0 && imag(p) < 0);}
void sortAround(pt p, vector<pt>& ps) {
  sort(all(ps), [&](const pt& a, const pt& b){
    if (left(a - p) != left(b - p))
      return left(a - p) > left(b - p);
    return cross(p, a, b) > 0;
  });
}
```

Generell:

- $\cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
- $b = \frac{a}{\sin(\alpha)}\sin(\beta)$
- $\Delta = \frac{bc}{2}\sin(\alpha)$



$\beta = 90°$:

- $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$
- $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$
- $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$

```cpp
// Mittelpunkt des Dreiecks abc.
pt centroid(pt a, pt b, pt c) {return (a + b + c) / 3.0;}
// Flächeninhalt eines Dreicks bei bekannten Eckpunkten.
double area(pt a, pt b, pt c) {
  return abs(cross(b - a, c - a)) / 2.0;
}
// Flächeninhalt eines Dreiecks bei bekannten Seitenlängen.
double area(double a, double b, double c) {
  double s = (a + b + c) / 2.0;
  return sqrt(s * (s-a) * (s-b) * (s-c));
}
// Zentrum des größten Kreises im Dreiecke
pt inCenter(pt a, pt b, pt c) {
  double x = abs(a-b), y = abs(b-c), z = abs(a-c);
  return (y*a + z*b + x*c) / (x+y+z);
}
// Zentrum des Kreises durch alle Eckpunkte
pt outCenter(pt a, pt b, pt c) {
  double d = 2.0 * (real(a) * imag(b-c) +
                    real(b) * imag(c-a) +
                    real(c) * imag(a-b));
  return (a*conj(a)*conj(b-c) +
          b*conj(b)*conj(c-a) +
          c*conj(c)*conj(a-b)) / d;
}
//  1 => p außerhalb Kreis durch a,b,c
//  0 => p auf Kreis durch a,b,c
// -1 => p im Kreis durch a,b,c
int insideOutCenter(pt a, pt b, pt c, pt p) {// braucht lll
  return sgn(imag((c-b)*conj(p-c)*(a-p)*conj(b-a)));
}
// Sind die Dreiecke a1, b1, c1, and a2, b2, c2 ähnlich?
// Erste Zeile testet Ähnlichkeit mit gleicher Orientierung,
// zweite Zeile testet Ähnlichkeit mit verschiedener Orientierung
bool similar(pt a1, pt b1, pt c1, pt a2, pt b2, pt c2) {
  return (b2-a2) * (c1-a1) == (b1-a1) * (c2-a2) ||
         (b2-a2) * conj(c1-a1) == conj(b1-a1) * (c2-a2);
}
```

```cpp
// Flächeninhalt eines Polygons (nicht selbstschneidend).
// Punkte gegen den Uhrzeigersinn: positiv, sonst negativ.
double area(const vector<pt>& poly) { //poly[0] == poly.back()
  double res = 0;
  for (int i = 0; i + 1 < sz(poly); i++)
    res += cross(poly[i], poly[i + 1]);
  return 0.5 * res;
}
// Anzahl drehungen einer Polyline um einen Punkt
// p nicht auf rand und poly[0] == poly.back()
// res != 0 or (res & 1) != 0 um inside zu prüfen bei
// selbstschneidenden Polygonen (definitions Sache)
ll windingNumber(pt p, const vector<pt>& poly) {
  ll res = 0;
  for (int i = 0; i + 1 < sz(poly); i++) {
    pt a = poly[i], b = poly[i + 1];
    if (real(a) > real(b)) swap(a, b);
    if (real(a) <= real(p) && real(p) < real(b) &&
        cross(p, a, b) < 0) {
      res += orientation(p, poly[i], poly[i + 1]);
  }}
  return res;
}
// Testet, ob ein Punkt im Polygon liegt (beliebige Polygone).
// Ändere Zeile 32 falls rand zählt, poly[0] == poly.back()
bool inside(pt p, const vector<pt>& poly) {
  bool in = false;
  for (int i = 0; i + 1 < sz(poly); i++) {
    pt a = poly[i], b = poly[i + 1];
```

```
    if (pointOnLineSegment(a, b, p)) return false;
    if (real(a) > real(b)) swap(a,b);
    if (real(a) <= real(p) && real(p) < real(b) &&
        cross(p, a, b) < 0) {
      in ^= 1;
  }}
  return in;
}
// convex hull without duplicates, h[0] == h.back()
// Change line 45 and 51 >= if border counts as inside
bool inside(pt p, const vector<pt>& hull) {
  int l = 0, r = sz(hull) - 1;
  if (cross(hull[0], hull[r], p) > 0) return false;
  while (l + 1 < r) {
    int m = (l + r) / 2;
    if (cross(hull[0], hull[m], p) >= 0) l = m;
    else r = m;
  }
  return cross(hull[l], hull[r], p) > 0;
}
void rotateMin(vector<pt>& hull) {
  auto mi = min_element(all(hull), [](const pt& a, const pt& b){
    return real(a) == real(b) ? imag(a) < imag(b)
                              : real(a) < real(b);
  });
  rotate(hull.begin(), mi, hull.end());
}
// convex hulls without duplicates, h[0] != h.back()
vector<pt> minkowski(vector<pt> ps, vector<pt> qs) {
  rotateMin(ps);
  rotateMin(qs);
  ps.push_back(ps[0]);
  qs.push_back(qs[0]);
  ps.push_back(ps[1]);
  qs.push_back(qs[1]);
  vector<pt> res;
  for (ll i = 0, j = 0; i + 2 < sz(ps) || j + 2 < sz(qs);) {
    res.push_back(ps[i] + qs[j]);
    auto c = cross(ps[i + 1] - ps[i], qs[j + 1] - qs[j]);
    if(c <= 0) i++;
    if(c >= 0) j++;
  }
  return res;
}
// convex hulls without duplicates, h[0] != h.back()
double dist(const vector<pt>& ps, const vector<pt>& qs) {
  for (pt& q : qs) q *= -1;
  auto p = minkowski(ps, qs);
  p.push_back(p[0]);
  double res = 0.0;
  //bool intersect = true;
  for (ll i = 0; i + 1 < sz(p); i++) {
    //intersect &= cross(p[i], p[i+1] - p[i]) <= 0;
    res = max(res, cross(p[i], p[i+1]-p[i]) / abs(p[i+1]-p[i]));
  }
  return res;
}
```

```
}
bool left(pt of, pt p) {return cross(p, of) < 0 ||
                        (cross(p, of) == 0 && dot(p, of) > 0);}
// convex hulls without duplicates, hull[0] == hull.back() and
// hull[0] must be a convex point (with angle < pi)
// returns index of corner where dot(dir, corner) is maximized
int extremal(const vector<pt>& hull, pt dir) {
  dir *= pt(0, 1);
  int l = 0, r = sz(hull) - 1;
  while (l + 1 < r) {
    int m = (l + r) / 2;
    pt dm = hull[m+1]-hull[m];
    pt dl = hull[l+1]-hull[l];
    if (left(dl, dir) != left(dl, dm)) {
      if (left(dl, dm)) l = m;
      else r = m;
    } else {
      if (cross(dir, dm) < 0) l = m;
      else r = m;
  }}
  return r;
}
// convex hulls without duplicates, hull[0] == hull.back() and
// hull[0] must be a convex point (with angle < pi)
// {} if no intersection
// {x} if corner is only intersection
// {a, b} segments (a,a+1) and (b,b+1) intersected (if only the
// border is intersected corners a and b are the start and end)
vector<int> intersect(const vector<pt>& hull, pt a, pt b) {
  int endA = extremal(hull, (a-b) * pt(0, 1));
  int endB = extremal(hull, (b-a) * pt(0, 1));
  // cross == 0 => line only intersects border
  if (cross(hull[endA], a, b) > 0 ||
      cross(hull[endB], a, b) < 0) return {};
  int n = sz(hull) - 1;
  vector<int> res;
  for (auto _ : {0, 1}) {
    int l = endA, r = endB;
    if (r < l) r += n;
    while (l + 1 < r) {
      int m = (l + r) / 2;
      if (cross(hull[m % n], a, b) <= 0 &&
          cross(hull[m % n], a, b) != hull(poly[endB], a, b))
        l = m;
      else r = m;
    }
    if (cross(hull[r % n], a, b) == 0) l++;
    res.push_back(l % n);
    swap(endA, endB);
    swap(a, b);
  }
  if (res[0] == res[1]) res.pop_back();
  return res;
}
```

```
// berechnet die Schnittpunkte von zwei kreisen
// (Kreise dürfen nicht gleich sein!)
vector<pt> circleIntersection(pt c1, double r1,
                              pt c2, double r2) {
  double d = abs(c1 - c2);
  if (d < abs(r1 - r2) || d > abs(r1 + r2)) return {};
  double a = (r1 * r1 - r2 * r2 + d * d) / (2 * d);
  pt p = (c2 - c1) * a / d + c1;
  if (d == abs(r1 - r2) || d == abs(r1 + r2)) return {p};
  double h = sqrt(r1 * r1 - a * a);
  return {p + pt{0, 1} * (c2 - c1) * h / d,
          p - pt{0, 1} * (c2 - c1) * h / d};
}
// berechnet die Schnittpunkte zwischen
// einem Kreis(Kugel) und einer Grade 2d und 3d
vector<pt> circleRayIntersection(pt center, double r,
                                 pt orig, pt dir) {
  vector<pt> result;
  double a = dot(dir, dir);
  double b = 2 * dot(dir, orig - center);
  double c = dot(orig - center, orig - center) - r * r;
  double discr = b * b - 4 * a * c;
  if (discr >= 0) {
    //t in [0, 1] => schnitt mit segment [orig, orig + dir]
    double t1 = -(b + sqrt(discr)) / (2 * a);
    double t2 = -(b - sqrt(discr)) / (2 * a);
    if (t1 >= 0) result.push_back(t1 * dir + orig);
    if (t2 >= 0 && abs(t1 - t2) > EPS) {
      result.push_back(t2 * dir + orig);
  }}
  return result;
}
```

3.5 Formeln - 3D

```
// Skalarprodukt
double operator|(pt3 a, pt3 b) {
  return a.x * b.x + a.y*b.y + a.z*b.z;
}
double dot(pt3 a, pt3 b) {return a|b;}
// Kreuzprodukt
pt3 operator*(pt3 a, pt3 b) {return {a.y*b.z - a.z*b.y,
                                     a.z*b.x - a.x*b.z,
                                     a.x*b.y - a.y*b.x};}
pt3 cross(pt3 a, pt3 b) {return a*b;}
// Länge von a
double abs(pt3 a) {return sqrt(dot(a, a));}
double abs(pt3 a, pt3 b) {return abs(b - a);}
// Mixedprodukt
double mixed(pt3 a, pt3 b, pt3 c) {return a*b|c;};
// orientierung von p zu der Ebene durch a, b, c
// -1 => gegen den Uhrzeigersinn,
//  0 => kolliniear,
//  1 => im Uhrzeigersinn.
int orientation(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 p) {
  double orien = mixed(b - a, c - a, p - a);
  return (orien > EPS) - (orien < -EPS);
```

```
}
// Entfernung von Punkt p zur Ebene a,b,c.
double distToPlane(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 p) {
  pt3 n = cross(b-a, c-a);
  return (abs(dot(n, p)) - dot(n, a)) / abs(n);
}
// Liegt p in der Ebene a,b,c?
bool pointOnPlane(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 p) {
  return orientation(a, b, c, p) == 0;
}
// Schnittpunkt von der Grade a-b und der Ebene c,d,e
// die Grade darf nicht parallel zu der Ebene sein!
pt3 linePlaneIntersection(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 d, pt3 e) {
  pt3 n = cross(d-c, e-c);
  pt3 d = b - a;
  return a - d * (dot(n, a) - dot(n, c)) / dot(n, d);
}
// Abstand zwischen der Grade a-b und c-d
double lineLineDist(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 d) {
  pt3 n = cross(b - a, d - c);
  if (abs(n) < EPS) return distToLine(a, b, c);
  return abs(dot(a - c, n)) / abs(n);
}
```

3.6 Half-plane intersection

```
constexpr ll inf = 0x1FFF'FFFF'FFFF'FFFF;//THIS CODE IS WIP
bool left(pt p) {return real(p) < 0 ||
            (real(p) == 0 && imag(p) < 0);}
struct hp {
  pt from, to;

  hp(pt a, pt b) : from(a), to(b) {}
  hp(pt dummy) : hp(dummy, dummy) {}

  bool dummy() const {return from == to;}
  pt dir() const {return dummy() ? to : to - from;}
  bool operator<(const hp& o) const {
    if (left(dir()) != left(o.dir()))
      return left(dir()) > left(o.dir());
    return cross(dir(), o.dir()) > 0;
  }

  using lll = __int128;
  using ptl = complex<lll>;
  ptl mul(lll m, ptl p) const {return m*p;}//ensure 128bit

  bool check(const hp& a, const hp& b) const {
    if (dummy() || b.dummy()) return false;
    if (a.dummy()) {
      ll ort = sgn(cross(b.dir(), dir()));
      if (ort == 0) return cross(from, to, a.from) < 0;
      return cross(b.dir(), a.dir()) * ort > 0;
    }
    ll y = cross(a.dir(), b.dir());
    ll z = cross(b.from - a.from, b.dir());
    ptl i = mul(y, a.from) + mul(z, a.dir()); //intersect a and b
    // check if i is outside/right of x
    return imag(conj(mul(sgn(y),dir()))*(i-mul(y,from))) < 0;
  }
};
constexpr ll lim = 2e9+7;
deque<hp> intersect(vector<hp> hps) {
  hps.push_back(hp(pt{lim+1,-1}));
  hps.push_back(hp(pt{lim+1,1}));
  sort(all(hps));

  deque<hp> dq = {hp(pt{-lim, 1})};
  for (auto x : hps) {
    while (sz(dq) > 1 && x.check(dq.end()[-1], dq.end()[-2]))
      dq.pop_back();
    while (sz(dq) > 1 && x.check(dq[0], dq[1]))
      dq.pop_front();

    if (cross(x.dir(), dq.back().dir()) == 0) {
      if (dot(x.dir(), dq.back().dir()) < 0) return {};
      if (cross(x.from, x.to, dq.back().from) < 0)
        dq.pop_back();
      else continue;
    }
    dq.push_back(x);
  }

  while (sz(dq) > 2 && dq[0].check(dq.end()[-1], dq.end()[-2]))
    dq.pop_back();
  while (sz(dq) > 2 && dq.end()[-1].check(dq[0], dq[1]))
    dq.pop_front();

  if (sz(dq) < 3) return {};
  return dq;
}
```

4 Mathe

4.1 Longest Increasing Subsequence

- lower_bound ⇒ streng monoton
- upper_bound ⇒ monoton

```
vector<int> lis(vector<int> &seq) {
  int n = sz(seq), lisLength = 0, lisEnd = 0;
  vector<int> L(n), L_id(n), parents(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int pos = upper_bound(L.begin(), L.begin() + lisLength,
                          seq[i]) - L.begin();
    L[pos] = seq[i];
    L_id[pos] = i;
    parents[i] = pos ? L_id[pos - 1] : -1;
    if (pos + 1 > lisLength) {
      lisLength = pos + 1;
      lisEnd = i;
  }}
  // Ab hier Rekonstruktion der Sequenz.
  vector<int> result(lisLength);
  int pos = lisLength - 1, x = lisEnd;
  while (parents[x] >= 0) {
    result[pos--] = x;
    x = parents[x];
  }
  result[0] = x;
  return result; // Liste mit Indizes einer LIS.
}
```

4.2 Zykel Erkennung

`cycleDetection` findet Zyklus von x_0 und Länge in f $O(b+l)$

```
void cycleDetection(ll x0, function<ll(ll)> f) {
  ll a = x0, b = f(x0), length = 1;
  for (ll power = 1; a != b; b = f(b), length++) {
    if (power == length) {
      power *= 2;
      length = 0;
      a = b;
  }}
  ll start = 0;
  a = x0; b = x0;
  for (ll i = 0; i < length; i++) b = f(b);
  while (a != b) {
    a = f(a);
    b = f(b);
    start++;
}}
```

4.3 Permutationen

`kthperm` findet k-te Permutation $(k \in [0,n!))$ $O(n \cdot \log(n))$

```
vector<ll> kthperm(ll k, ll n) {
  Tree<ll> t;
  vector<ll> res(n);
  for (ll i = 1; i <= n; k /= i, i++) {
    t.insert(i - 1);
    res[n - i] = k % i;
  }
  for (ll& x : res) {
    auto it = t.find_by_order(x);
    x = *it;
    t.erase(it);
  }
  return res;
}
```

`permIndex` bestimmt Index der Permutation $(res \in [0,n!))$ $O(n \cdot \log(n))$

```
ll permIndex(vector<ll> v) {
  Tree<ll> t;
  reverse(all(v));
  for (ll& x : v) {
    t.insert(x);
    x = t.order_of_key(x);
  }
  ll res = 0;
  for (int i = sz(v); i > 0; i--) {
    res = res * i + v[i - 1];
  }
  return res;
}
```

4.4 Mod-Exponent und Multiplikation über $\mathbb{F}_p$

`mulMod` berechnet $a \cdot b \bmod n$ $O(\log(b))$

```
ll mulMod(ll a, ll b, ll n) {
  ll res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b & 1) res = (a + res) % n;
    a = (a * 2) % n;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

`powMod` berechnet $a^b \bmod n$ $O(\log(b))$

```
ll powMod(ll a, ll b, ll n) {
  ll res = 1;
  while (b > 0) {
    if (b & 1) res = (a * res) % n;
    a = (a * a) % n;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

- für $a > 10^9$ `__int128` oder `modMul` benutzten!

4.5 ggT, kgV, erweiterter euklidischer Algorithmus

$O(\log(a)+\log(b))$

```
ll gcd(ll a, ll b) {return b == 0 ? a : gcd(b, a % b);}
ll lcm(ll a, ll b) {return a * (b / gcd(a, b));}
```

```
// a*x + b*y = ggt(a, b)
ll extendedEuclid(ll a, ll b, ll& x, ll& y) {
  if (a == 0) {x = 0; y = 1; return b;}
  ll x1, y1, d = extendedEuclid(b % a, a, x1, y1);
  x = y1 - (b / a) * x1; y = x1;
  return d;
}
```

4.6 Multiplikatives Inverses von n in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Falls p prim: $x^{-1} \equiv x^{p-2} \bmod p$

Falls $\text{ggT}(n,p)=1$:

- Erweiterter euklidischer Algorithmus liefert α und β mit $\alpha n+\beta p=1$.
- Nach Kongruenz gilt $\alpha n+\beta p \equiv \alpha n \equiv 1 \bmod p$.
- $n^{-1} := \equiv \alpha \bmod p$

Sonst $\text{ggT}(n,p)>1$: Es existiert kein x^{-1}.

```
ll multInv(ll n, ll p) {
  ll x, y;
  extendedEuclid(n, p, x, y); // Implementierung von oben.
  return ((x % p) + p) % p;
}
```

Lemma von Bézout Sei (x, y) eine Lösung der diophantischen Gleichung $ax+by=d$. Dann lassen sich wie folgt alle Lösungen berechnen:

$$\left(x+k\frac{b}{\text{ggT}(a,b)}, y-k\frac{a}{\text{ggT}(a,b)}\right)$$

Pell-Gleichungen Sei $(\overline{x},\overline{y})$ die Lösung von $x^2-ny^2=1$, die $x>1$ minimiert. Sei $(\tilde{x},\tilde{y})$ die Lösung von $x^2-ny^2=c$, die $x>1$ minimiert. Dann lassen sich alle Lösungen von $x^2-ny^2=c$ berechnen durch:

$$x_1 := \tilde{x}, \qquad y_1 := \tilde{y}$$
$$x_{k+1} := \overline{x}x_k + n\overline{y}y_k, \qquad y_{k+1} := \overline{x}y_k + \overline{y}x_k$$

4.7 Lineare Kongruenz

- Löst $ax \equiv b \pmod m$.
- Weitere Lösungen unterscheiden sich um $\frac{m}{g}$, es gibt also g Lösungen modulo m.

```
ll solveLinearCongruence(ll a, ll b, ll m) {
  ll g = gcd(a, m);
  if (b % g != 0) return -1;
  return ((b / g) * multInv(a / g, m / g)) % (m / g);
}
```

4.8 Chinesischer Restsatz

- Extrem anfällig gegen Overflows. Evtl. häufig 128-Bit Integer verwenden.
- Direkte Formel für zwei Kongruenzen $x \equiv a \bmod n$, $x \equiv b \bmod m$:

$$x \equiv a - y \cdot n \cdot \frac{a-b}{d} \bmod \frac{mn}{d} \qquad \text{mit} \qquad d := \text{ggT}(n,m) = yn+zm$$

Formel kann auch für nicht teilerfremde Moduli verwendet werden. Sind die Moduli nicht teilerfremd, existiert genau dann eine Lösung, wenn $a \equiv b \bmod \text{ggT}(m,n)$. In diesem Fall sind keine Faktoren auf der linken Seite erlaubt.

```
// Laufzeit: O(n * log(n)), n := Anzahl der Kongruenzen. Nur für
// teilerfremde Moduli. Berechnet das kleinste, nicht negative x,
// das alle Kongruenzen simultan löst. Alle Lösungen sind
// kongruent zum kgV der Moduli (Produkt, da teilerfremd).
struct ChineseRemainder {
  using lll = __int128;
  vector<lll> lhs, rhs, mods, inv;
  lll M; // Produkt über die Moduli. Kann leicht überlaufen.

  ll g(const vector<lll> &vec) {
    lll res = 0;
    for (int i = 0; i < sz(vec); i++) {
      res += (vec[i] * inv[i]) % M;
      res %= M;
    }
    return res;
  }

  // Fügt Kongruenz l * x = r (mod m) hinzu.
  void addEquation(ll l, ll r, ll m) {
    lhs.push_back(l);
    rhs.push_back(r);
    mods.push_back(m);
  }

  ll solve() { // Löst das System.
    M = accumulate(all(mods), lll(1), multiplies<lll>());
    inv.resize(sz(lhs));
    for (int i = 0; i < sz(lhs); i++) {
      lll x = (M / mods[i]) % mods[i];
      inv[i] = (multInv(x, mods[i]) * (M / mods[i]));
    }
    return (multInv(g(lhs), M) * g(rhs)) % M;
  }
};
```

4.9 Primzahltest & Faktorisierung

`isPrime` prüft ob Zahl prim ist $O(\log(n)^2)$

```
constexpr ll bases32[] = {2, 7, 61};
constexpr ll bases64[] = {2, 325, 9375, 28178, 450775,
                          9780504, 1795265022};
bool isPrime(ll n) {
  if (n < 2 || n % 2 == 0) return n == 2;
  ll d = n - 1, j = 0;
  while (d % 2 == 0) d /= 2, j++;
  for (ll a : bases64) {
    if (a % n == 0) continue;
    ll v = powMod(a, d, n); //with mulmod or int128
    if (v == 1 || v == n - 1) continue;
    for (ll i = 1; i <= j; i++) {
      v = (v * v) % n; //mulmod or int128
      if (v == n - 1 || v <= 1) break;
    }
    if (v != n - 1) return false;
  }
  return true;
}
```

`rho` findet zufälligen Teiler $O(\sqrt[4]{n})$

```
using lll = __int128;
ll rho(ll n) { // Findet Faktor < n, nicht unbedingt prim.
  if (n % 2 == 0) return 2;
  ll x = 0, y = 0, prd = 2;
  auto f = [n](lll x){return (x * x) % n + 1;};
  for (ll t = 30, i = n/2 + 7; t % 40 || gcd(prd, n) == 1; t++) {
    if (x == y) x = ++i, y = f(x);
    if (ll q = (lll)prd * abs(x-y) % n; q) prd = q;
    x = f(x); y = f(f(y));
  }
  return gcd(prd, n);
}
void factor(ll n, map<ll, int>& facts) {
  if (n == 1) return;
  if (isPrime(n)) {facts[n]++; return;}
  ll f = rho(n);
  factor(n / f, facts); factor(f, facts);
}
```

4.10 Teiler

`countDivisors` Zählt Teiler von n $O(\sqrt[3]{n})$

```
ll countDivisors(ll n) {
  ll res = 1;
  for (ll i = 2; i * i * i <= n; i++) {
    ll c = 0;
    while (n % i == 0) {n /= i; c++;}
    res *= c + 1;
  }
  if (isPrime(n)) res *= 2;
  else if (n > 1) res *= isSquare(n) ? 3 : 4;
  return res;
}
```

4.11 Primitivwurzeln

- Primitivwurzel modulo n existiert $\Leftrightarrow n \in \{2, 4, p^\alpha, 2 \cdot p^\alpha \mid 2 < p \in \mathbb{P}, \alpha \in \mathbb{N}\}$
- es existiert entweder keine oder $\varphi(\varphi(n))$ inkongruente Primitivwurzeln
- Sei g Primitivwurzel modulo n. Dann gilt:
  Das kleinste k, sodass $g^k \equiv 1 \bmod n$, ist $k = \varphi(n)$.

`isPrimitive` prüft ob g eine Primitivwurzel ist $O\left(\log(\varphi(n)) \cdot \log(n)\right)$
`findPrimitive` findet Primitivwurzel (oder -1) $O\left(|ans| \cdot \log(\varphi(n)) \cdot \log(n)\right)$

```
bool isPrimitive(ll g, ll n, ll phi, map<ll, int> phiFacs) {
  if (g == 1) return n == 2;
  for (auto [f, _] : phiFacs)
    if (powMod(g, phi / f, n) == 1) return false;
  return true;
}
bool isPrimitive(ll g, ll n) {
  ll phin = phi(n); //isPrime(n) => phi(n) = n - 1
  map<ll, int> phiFacs;
  factor(phin, phiFacs);
  return isPrimitive(g, n, phin, phiFacs);
}
ll findPrimitive(ll n) {
  ll phin = phi(n); //isPrime(n) => phi(n) = n - 1
  map<ll, int> phiFacs;
  factor(phin, phiFacs);
  //auch zufällige Reihenfolge möglich!
  for (ll res = 1; res < n; res++)
    if (isPrimitive(res, n, phin, phiFacs)) return res;
  return -1;
}
```

4.12 Diskreter Logarithmus

`solve` bestimmt Lösung x für $a^x = b \bmod m$ $O\left(\sqrt{m} \cdot \log(m)\right)$

```
ll dlog(ll a, ll b, ll m) {
  ll bound = sqrtl(m) + 1; //memory usage bound
  map<ll, ll> vals;
  for (ll i = 0, e = 1; i < bound; i++, e = (e * a) % m) {
    vals[e] = i;
  }
  ll fact = powMod(a, m - bound - 1, m);
  for (ll i = 0; i < m; i += bound, b = (b * fact) % m) {
    if (vals.count(b)) {
      return i + vals[b];
    }}
  return -1;
}
```

4.13 Diskrete n-te Wurzel

`root` bestimmt Lösung x für $x^a = b \bmod m$ $O\left(\sqrt{m} \cdot \log(m)\right)$

Alle Lösungen haben die Form $g^{c + \frac{i \cdot \varphi(n)}{\gcd(a, \varphi(n))}}$

```
ll root(ll a, ll b, ll m) {
  ll g = findPrimitive(m);
  ll c = dlog(powMod(g, a, m), b, m); //diskreter logarithmus
  return c < 0 ? -1 : powMod(g, c, m);
}
```

4.14 Linearessieb und Multiplikative Funktionen

Eine (zahlentheoretische) Funktion f heißt multiplikativ wenn $f(1) = 1$ und $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$, falls $\text{ggT}(a, b) = 1$.
$\Rightarrow$ Es ist ausreichend $f(p^k)$ für alle primen p und alle k zu kennen.

`sieve` berechnet Primzahlen und co. $O(N)$
`sieved` Wert der endsprechenden Multiplikativen Funktion $O(1)$
`naive` Wert der endsprechenden Multiplikativen Funktion $O\left(\sqrt{n}\right)$

Wichtig: Sieb rechts ist schneller für `isPrime` oder `primes`!

```
constexpr ll N = 10'000'000;
ll smallest[N], power[N], sieved[N];
vector<ll> primes;

//wird aufgerufen mit (p^k, p, k) für prime p
ll mu(ll pk, ll p, ll k) {return -(k == 1);}
ll phi(ll pk, ll p, ll k) {return pk - pk / p;}
ll div(ll pk, ll p, ll k) {return k+1;}
ll divSum(ll pk, ll p, ll k) {return (pk*p+1) / (p - 1);}
ll square(ll pk, ll p, ll k) {return k % 2 ? pk / p : pk;}
ll squareFree(ll pk, ll p, ll k) {return k % 2 ? pk : 1;}

void sieve() { // O(N)
  smallest[1] = power[1] = sieved[1] = 1;
  for (ll i = 2; i < N; i++) {
    if (smallest[i] == 0) {
      primes.push_back(i);
      for (ll pk = i, k = 1; pk < N; pk *= i, k++) {
        smallest[pk] = i;
        power[pk] = pk;
        sieved[pk] = mu(pk, i, k); // Aufruf ändern!
    }}
    for (ll j = 0;
          i * primes[j] < N && primes[j] < smallest[i]; j++) {
      ll k = i * primes[j];
      smallest[k] = power[k] = primes[j];
      sieved[k] = sieved[i] * sieved[primes[j]];
    }
    if (i * smallest[i] < N && power[i] != i) {
      ll k = i * smallest[i];
      smallest[k] = smallest[i];
      power[k] = power[i] * smallest[i];
      sieved[k] = sieved[power[k]] * sieved[k / power[k]];
}}}
ll naive(ll n) { // O(sqrt(n))
  ll res = 1;
  for (ll p = 2; p * p <= n; p++) {
    if (n % p == 0) {
      ll pk = 1;
      ll k = 0;
      do {
        n /= p;
        pk *= p;
        k++;
      } while (n % p == 0);
    res *= mu(pk, p, k); // Aufruf ändern!
  }}
  return res;
}
```

Möbius Funtkion:

- $\mu(n) = +1$, falls n quadratfrei ist und gerade viele Primteiler hat
- $\mu(n) = -1$, falls n quadratfrei ist und ungerade viele Primteiler hat
- $\mu(n) = 0$, falls n nicht quadratfrei ist

Eulersche φ-Funktion:

- Zählt die relativ primen Zahlen $\leq n$.
- p prim, $k \in \mathbb{N}$: $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$
- **Euler's Theorem:** Für $b \geq \varphi(c)$ gilt: $a^b \equiv a^{b \bmod \varphi(c) + \varphi(c)} \pmod c$. Darüber hinaus gilt: $\gcd(a, c) = 1 \Leftrightarrow a^b \equiv a^{b \bmod \varphi(c)} \pmod c$. Falls m prim ist, liefert das den **kleinen Satz von Fermat**: $a^m \equiv a \pmod m$

4.15 Primzahlsieb von Eratosthenes

- Bis 10^8 in unter 64MB Speicher (lange Berechnung)

`primeSieve` berechnet Primzahlen und Anzahl $O\left(N \cdot \log(\log(N))\right)$
`isPrime` prüft ob Zahl prim ist $O(1)$

```
constexpr ll N = 100'000'000;
bitset<N / 2> isNotPrime;
vector<ll> primes = {2};
bool isPrime(ll x) {
  if (x < 2 || x % 2 == 0) return x == 2;
  else return !isNotPrime[x / 2];
}
void primeSieve() {
  for (ll i = 3; i < N; i += 2) {// i * i < N reicht für isPrime
    if (!isNotPrime[i / 2]) {
      primes.push_back(i); // optional
      for (ll j = i * i; j < N; j+= 2 * i) {
        isNotPrime[j / 2] = 1;
}}}}
```

4.16 Möbius-Inversion

- Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g(n) := \sum_{d|n} f(d)$. Dann ist $f(n) = \sum_{d|n} g(d) \mu(\frac{n}{d})$.
- $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel Inklusion/Exklusion: Gegeben sein eine Sequenz $A = a_1, \ldots, a_n$ von Zahlen, $1 \leq a_i \leq N$. Zähle die Anzahl der *coprime subsequences*.
Lösung: Für jedes x, sei $cnt[x]$ die Anzahl der Vielfachen von x in A. Es gibt $2^{[x]} - 1$ nicht leere Subsequences in A, die nur Vielfache von x enthalten. Die Anzahl der Subsequences mit $\text{ggT} = 1$ ist gegeben durch $\sum_{i=1}^{N} \mu(i) \cdot (2^{cnt[i]} - 1)$.

4.17 Numerisch Extremstelle bestimmen

```
ld gss(ld l, ld r, function<ld(ld)> f) {
  ld inv = (sqrt(5.0l) - 1) / 2;
  ld x1 = r - inv*(r-l), x2 = l + inv*(r-l);
  ld f1 = f(x1), f2 = f(x2);
  for (int i = 0; i < 200; i++) {
    if (f1 < f2) { //change to > to find maximum
      u = x2; x2 = x1; f2 = f1;
      x1 = r - inv*(r-l); f1 = f(x1);
    } else {
      l = x1; x1 = x2; f1 = f2;
      x2 = l + inv*(r-l); f2 = f(x2);
    }
  }
  return l;
}
```

4.18 Numerisch Integrieren, Simpsonregel

```cpp
double f(double x) {return x;}
double simps(double a, double b) {
  return (f(a) + 4.0 * f((a + b) / 2.0) + f(b)) * (b - a) / 6.0;
}
double integrate(double a, double b) {
  double m = (a + b) / 2.0;
  double l = simps(a, m), r = simps(m, b), tot = simps(a, b);
  if (abs(l + r - tot) < EPS) return tot;
  return integrate(a, m) + integrate(m, b);
}
```

4.19 Polynome, FFT, NTT & andere Transformationen

Multipliziert Polynome A und B.

- $\deg(A \cdot B) = \deg(A) + \deg(B)$
- Vektoren `a` und `b` müssen mindestens Größe $\deg(A \cdot B)+1$ haben. Größe muss eine Zweierpotenz sein.
- Für ganzzahlige Koeffizienten: `(ll)round(real(a[i]))`
- *xor*, *or* und *and* Transform funktioniert auch mit `double` oder modulo einer Primzahl p falls $p \geq 2^{\text{bits}}$

```cpp
/*constexpr ll mod = 998244353; NTT only
constexpr ll root = 3;*/
using cplx = complex<double>;
//void fft(vector<ll> &a, bool inverse = 0) { NTT, xor, or, and
void fft(vector<cplx>& a, bool inverse = 0) {
  int n = a.size();
  for (int i = 0, j = 1; j < n - 1; ++j) {
    for (int k = n >> 1; k > (i ^= k); k >>= 1);
    if (j < i) swap(a[i], a[j]);
  }
  for (int s = 1; s < n; s *= 2) {
    /*ll ws = powMod(root, (mod - 1) / s >> 1, mod); NTT only
    if (inverse) ws = powMod(ws, mod - 2, mod);*/
    double angle = PI / s * (inverse ? -1 : 1);
    cplx ws(cos(angle), sin(angle));
    for (int j = 0; j < n; j+= 2 * s) {
      //ll w = 1; NTT only
      cplx w = 1;
      for (int k = 0; k < s; k++) {
        /*ll u = a[j + k], t = a[j + s + k] * w; NTT only
        t %= mod;
        a[j + k] = (u + t) % mod;
        a[j + s + k] = (u - t + mod) % mod;
        w = (w * ws) % mod;*/
        /*ll u = a[j + k], t = a[j + s + k]; xor only
        a[j + k] = u + t;
        a[j + s + k] = u - t;*/
        /*if (!inverse) { or only
          a[j + k] = u + t;
          a[j + s + k] = u;
        } else {
          a[j + k] = t;
          a[j + s + k] = u - t;
        }*/
        /*if (!inverse) { and only
          a[j + k] = t;
          a[j + s + k] = u + t;
        } else {
          a[j + k] = t - u;
          a[j + s + k] = u;
        }*/
        cplx u = a[j + k], t = a[j + s + k] * w;
        a[j + k] = u + t;
        a[j + s + k] = u - t;
        if (inverse) a[j + k] /= 2, a[j + s + k] /= 2;
        w *= ws;
  }}}
  /*if (inverse) { NTT only
    ll div = powMod(n, mod - 2, mod);
    for (ll i = 0; i < n; i++) {
      a[i] = (a[i] * div) % mod;
  }}*/
  /*if (inverse) { xor only
    for (ll i = 0; i < n; i++) {
      a[i] /= n;
  }}*/
}
```

Multiplikation mit 2 transforms statt 3: (nur benutzten wenn nötig!)

```cpp
vector<cplx> mul(vector<cplx>& a, vector<cplx>& b) {
  vector<cplx> c(sz(a)), d(sz(a));
  for (int i = 0; i < sz(b); i++) {
    c[i] = {real(a[i]), real(b[i])};
  }
  c = fft(c);
  for (int i = 0; i < sz(b); i++) {
    int j = (sz(a) - i) % sz(a);
    cplx x = (c[i] + conj(c[j])) / cplx{2, 0}; //fft(a)[i];
    cplx y = (c[i] - conj(c[j])) / cplx{0, 2}; //fft(b)[i];
    d[i] = x * y;
  }
  return fft(d, true);
}
```

4.20 LGS über $\mathbb{R}$

gauss löst LGS $O(n^3)$

```cpp
void normalLine(int line) {
  double factor = mat[line][line];
  for (double& x : mat[line]) x /= factor;
}
void takeAll(int n, int line) {
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (i == line) continue;
    double diff = mat[i][line];
    for (int j = 0; j <= n; j++) {
      mat[i][j] -= diff * mat[line][j];
}}}
int gauss(int n) {
  vector<bool> done(n, false);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int swappee = i; // Sucht Pivotzeile für bessere Stabilität.
    for (int j = 0; j < n; j++) {
      if (done[j]) continue;
      if (abs(mat[j][i]) > abs(mat[i][i])) swappee = j;
    }
    swap(mat[i], mat[swappee]);
    if (abs(mat[i][i]) > EPS) {
      normalLine(i);
      takeAll(n, i);
      done[i] = true;
    }}
  // Ab jetzt nur checks bzgl. Eindeutigkeit/Existenz der Lösung.
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    bool allZero = true;
    for (int j = i; j < n; j++) allZero &= abs(mat[i][j]) <= EPS;
    if (allZero && abs(mat[i][n]) > EPS) return INCONSISTENT;
    if (allZero && abs(mat[i][n]) <= EPS) return MULTIPLE;
  }
  return UNIQUE;
}
```

4.21 LGS über $\mathbb{F}_p$

gauss löst LGS $O(n^3)$

```cpp
void normalLine(int line, ll p) {
  ll factor = multInv(mat[line][line], p);
  for (ll& x : mat[line]) x = (x * factor) % p;
}
void takeAll(int n, int line, ll p) {
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (i == line) continue;
    ll diff = mat[i][line];
    for (int j = 0; j <= n; j++) {
      mat[i][j] -= (diff * mat[line][j]) % p;
      mat[i][j] = (mat[i][j] + p) % p;
}}}
void gauss(int n, ll mod) {
  vector<bool> done(n, false);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int j = 0;
    while (j < n && (done[j] || mat[j][i] == 0)) j++;
    if (j == n) continue;
    swap(mat[i], mat[j]);
    normalLine(i, mod);
    takeAll(n, i, mod);
    done[i] = true;
}}
// für Eindeutigkeit, Existenz etc. siehe LGS
```

4.22 Primzahlzählfunktion π

`init` berechnet π bis N $O(N \cdot \log(\log(N)))$
`phi` zählt zu p_i teilerfremde Zahlen $\leq n$ für alle $i \leq k$ $O(???)$
`pi` zählt Primzahlen $\leq n$ $(n < N^2)$ $O(n^{2/3})$

```
constexpr ll cacheA = 2 * 3 * 5 * 7 * 11 * 13 * 17;
constexpr ll cacheB = 7;
ll memoA[cacheA + 1][cacheB + 1];
ll memoB[cacheB + 1];
ll memoC[N];

void init() {
  primeSieve(); // code from above
  for (ll i = 0; i < N; i++) {
    memoC[i] = memoC[i - 1];
    if (isPrime(i)) memoC[i]++;
  }
  memoB[0] = 1;
  for(ll i = 0; i <= cacheA; i++) memoA[i][0] = i;
  for(ll i = 1; i <= cacheB; i++) {
    memoB[i] = primes[i - 1] * memoB[i - 1];
    for(ll j = 1; j <= cacheA; j++) {
      memoA[j][i] = memoA[j][i - 1] - memoA[j /
                    primes[i - 1]][i - 1];
}}}
ll phi(ll n, ll k) {
  if(k == 0) return n;
  if(k <= cacheB)
    return memoA[n % memoB[k]][k] +
           (n / memoB[k]) * memoA[memoB[k]][k];
  if(n <= primes[k - 1]*primes[k - 1]) return memoC[n] - k + 1;
  if(n <= primes[k - 1]*primes[k - 1]*primes[k - 1] && n < N) {
    ll b = memoC[(ll)sqrtl(n)];
    ll res = memoC[n] - (b + k - 2) * (b - k + 1) / 2;
    for(ll i = k; i < b; i++) res += memoC[n / primes[i]];
    return res;
  }
  return phi(n, k - 1) - phi(n / primes[k - 1], k - 1);
}
ll pi(ll n) {
  if (n < N) return memoC[n];
  ll a = pi(sqrtl(sqrtl(n)));
  ll b = pi(sqrtl(n));
  ll c = pi(cbrtl(n));
  ll res = phi(n, a) + (b + a - 2) * (b - a + 1) / 2;
  for (ll i = a; i < b; i++) {
    ll w = n / primes[i];
    res -= pi(w);
    if (i > c) continue;
    ll bi = pi(sqrtl(w));
    for (ll j = i; j < bi; j++) {
      res -= pi(w / primes[j]) - j;
  }}
  return res;
}
```

4.23 Lineare-Recurenz

`BerlekampMassey` Berechnet eine lineare Recurenz n-ter Ordnung $O(n^2)$ aus den ersten $2n$ Werte

```
constexpr ll mod = 1'000'000'007;
vector<ll> BerlekampMassey(const vector<ll>& s) {
  int n = sz(s), L = 0, m = 0;
  vector<ll> C(n), B(n), T;
  C[0] = B[0] = 1;

  ll b = 1;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    m++;
    ll d = s[i] % mod;
    for (int j = 1; j <= L; j++) {
      d = (d + C[j] * s[i - j]) % mod;
    }
    if (!d) continue;
    T = C;
    ll coef = d * powMod(b, mod-2, mod) % mod;
    for (int j = m; j < n; j++) {
      C[j] = (C[j] - coef * B[j - m]) % mod;
    }
    if (2 * L > i) continue;
    L = i + 1 - L;
    swap(B, T);
    b = d;
    m = 0;
  }

  C.resize(L + 1);
  C.erase(C.begin());
  for (auto& x : C) x = (mod - x) % mod;
  return C;
}
```

Sei $f(n) = c_{n-1}f(n-1) + c_{n-2}f(n-2) + \cdots + c_0 f(0)$ eine lineare Recurenz.
`kthTerm` Berechnet k-ten Term einer Recurenz n-ter Ordnung $O(\log(k) \cdot n^2)$

```
constexpr ll mod = 1'000'000'007;
vector<ll> modMul(const vector<ll>& a, const vector<ll>& b,
                  const vector<ll>& c) {
  ll n = sz(c);
  vector<ll> res(n * 2 + 1);
  for (int i = 0; i <= n; i++) { //a*b
    for (int j = 0; j <= n; j++) {
      res[i + j] += a[i] * b[j];
      res[i + j] %= mod;
  }}
  for (int i = 2 * n; i > n; i--) { //res%c
    for (int j = 0; j < n; j++) {
      res[i - 1 - j] += res[i] * c[j];
      res[i - 1 - j] %= mod;
  }}
  res.resize(n + 1);
  return res;
}
ll kthTerm(const vector<ll>& f, const vector<ll>& c, ll k) {
  assert(sz(f) == sz(c));
  vector<ll> tmp(sz(c) + 1), a(sz(c) + 1);
  tmp[0] = a[1] = 1; //tmp = (x^k) % c
  for (k++; k > 0; k /= 2) {
    if (k & 1) tmp = modMul(tmp, a, c);
    a = modMul(a, a, c);
  }
  ll res = 0;
  for (int i = 0; i < sz(c); i++) res += (tmp[i+1] * f[i]) % mod;
  return res % mod;
}
```

Alternativ kann der k-te Term in $O(n^3 \log(k))$ berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & \cdots & c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^k \times \begin{pmatrix} f(n-1) \\ f(n-2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(n-1+k) \\ f(n-2+k) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(k) \end{pmatrix} \leftarrow$$

4.24 Matrix-Exponent

`precalc` berechnet m^{2^b} vor $O(\log(b) \cdot n^3)$
`calc` berechnet $m^b_{y,x}$ $O(\log(b) \cdot n^2)$

```
vector<mat> pows;
void precalc(mat m) {
  pows = {mat(1), m};
  for (int i = 1; i < 60; i++) pows.push_back(pows[i] * pows[i]);
}
ll calc(int x, int y, ll b) {
  vector<ll> v(pows[0].m.size());
  v[x] = 1;
  for (ll i = 1; b > 0; i++) {
    if (b & 1) v = pows[i] * v;
    b /= 2;
  }
  return v[y];
}
```

4.25 Legendre-Symbol

Sei $p \geq 3$ eine Primzahl, $a \in \mathbb{Z}$:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p \mid a \\ 1 & \text{falls } \exists x \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} : a \equiv x^2 \bmod p \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{falls } p \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \equiv \pm 1 \bmod 8 \\ -1 & \text{falls } p \equiv \pm 3 \bmod 8 \end{cases}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \qquad \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p$$

```
ll legendre(ll a, ll p) {
  ll s = powMod(a, p / 2, p);
  return s < 2 ? s : -1ll;
}
```

4.26 Inversionszahl

```cpp
ll inversions(const vector<ll>& v) {
  Tree<pair<ll, ll>> t; //ordered statistics tree
  ll res = 0;
  for (ll i = 0; i < sz(v); i++) {
    res += i - t.order_of_key({v[i], i});
    t.insert({v[i], i});
  }
  return res;
}
```

4.27 Satz von Sprague-Grundy

Weise jedem Zustand X wie folgt eine Grundy-Zahl $g(X)$ zu:

$$g(X) := \min\left\{\mathbb{Z}_0^+ \setminus \{g(Y) \mid Y \text{ von } X \text{ aus direkt erreichbar}\}\right\}$$

X ist genau dann gewonnen, wenn $g(X) > 0$ ist.
Wenn man k Spiele in den Zuständen $X_1,\ldots,X_k$ hat, dann ist die Grundy-Zahl des Gesamtzustandes $g(X_1) \oplus \ldots \oplus g(X_k)$.

4.28 Kombinatorik

Wilsons Theorem A number n is prime if and only if $(n-1)! \equiv -1 \bmod n$.
(n is prime if and only if $(m-1)! \cdot (n-m)! \equiv (-1)^m \bmod n$ for all m in $\{1,\ldots,n\}$)

$$(n-1)! \equiv \begin{cases} -1 \bmod n, & \text{falls } n \in \mathbb{P} \\ 2 \bmod n, & \text{falls } n = 4 \\ 0 \bmod n, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeckendorfs Theorem Jede positive natürliche Zahl kann eindeutig als Summe einer oder mehrerer verschiedener Fibonacci-Zahlen geschrieben werden, sodass keine zwei aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen in der Summe vorkommen.
Lösung: Greedy, nimm immer die größte Fibonacci-Zahl, die noch hineinpasst.

Lucas-Theorem Ist p prim, $m = \sum_{i=0}^{k} m_i p^i$, $n = \sum_{i=0}^{k} n_i p^i$ (p-adische Darstellung), so gilt

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \bmod p.$$

4.29 The Twelvefold Way (verteile n Bälle auf k Boxen)

Bälle / Boxen	identisch identisch	verschieden identisch	identisch verschieden	verschieden verschieden
–	$p_k(n+k)$	$\sum_{i=0}^{k} \left\{ n \atop i \right\}$	$\binom{n+k-1}{k-1}$	k^n
Bälle pro Box ≥ 1	$p_k(n)$	$\left\{ n \atop k \right\}$	$\binom{n-1}{k-1}$	$k! \left\{ n \atop k \right\}$
Bälle pro Box ≤ 1	$[n \leq k]$	$[n \leq k]$	$\binom{k}{n}$	$n! \binom{k}{n}$

[Bedingung]: `return Bedingung ? 1 : 0;`

Catalan-Zahlen

- Die Catalan-Zahl C_n gibt an:
  - Anzahl der Binärbäume mit n nicht unterscheidbaren Knoten.
  - Anzahl der validen Klammerausdrücke mit n Klammerpaaren.
  - Anzahl der korrekten Klammerungen von $n+1$ Faktoren.
  - Anzahl Möglichkeiten ein konvexes Polygon mit $n+2$ Ecken zu triangulieren.
  - Anzahl der monotonen Pfade (zwischen gegenüberliegenden Ecken) in einem $n \times n$-Gitter, die nicht die Diagonale kreuzen.

$$C_0 = 1 \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{4n-2}{n+1} \cdot C_{n-1}$$

- Formel 1 erlaubt Berechnung ohne Division in $O\left(n^2\right)$
- Formel 2 und 3 erlauben Berechnung in $O(n)$

Catalan-Convolution

- Anzahl an Klammerausdrücken mit $n+k$ Klammerpaaren, die mit $(^k$ beginnen.

$$C_0^k = 1 \qquad C_n^k = \sum_{a_0+a_1+\cdots+a_k=n} C_{a_0} C_{a_1} \cdots C_{a_k} = \frac{k+1}{n+k+1}\binom{2n+k}{n} = \frac{(2n+k-1)\cdot(2n+k)}{n(n+k+1)} \cdot C_{n-1}$$

Euler-Zahlen 1. Ordnung Die Anzahl der Permutationen von $\{1,\ldots,n\}$ mit genau k Anstiegen. Für die n-te Zahl gibt es n mögliche Positionen zum Einfügen. Dabei wird entweder ein Anstieg in zwei gesplittet oder ein Anstieg um n ergänzt.

$$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = \left\langle {n \atop n-1} \right\rangle = 1 \qquad \left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k+1-i)^n$$

- Formel 1 erlaubt Berechnung ohne Division in $O\left(n^2\right)$
- Formel 2 erlaubt Berechnung in $O\left(n \log(n)\right)$

Euler-Zahlen 2. Ordnung Die Anzahl der Permutationen von $\{1,1,\ldots,n,n\}$ mit genau k Anstiegen.

$$\left\langle\left\langle {n \atop 0} \right\rangle\right\rangle = 1 \qquad \left\langle\left\langle {n \atop n} \right\rangle\right\rangle = 0 \qquad \left\langle\left\langle {n \atop k} \right\rangle\right\rangle = (k+1)\left\langle\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle\right\rangle + (2n-k-1)\left\langle\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle\right\rangle$$

- Formel erlaubt Berechnung ohne Division in $O\left(n^2\right)$

Stirling-Zahlen 1. Ordnung Die Anzahl der Permutationen von $\{1,\ldots,n\}$ mit genau k Zyklen. Es gibt zwei Möglichkeiten für die n-te Zahl. Entweder sie bildet einen eigene Zyklus, oder sie kann an jeder Position in jedem Zyklus einsortiert werden.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

- Formel erlaubt berechnung ohne Division in $O\left(n^2\right)$

Stirling-Zahlen 2. Ordnung Die Anzahl der Möglichkeiten n Elemente in k nicht-leere Teilmengen zu zerlegen. Es gibt k Möglichkeiten die n in eine $n-1$-Partition einzuordnen. Dazu kommt der Fall, dass die n in ihrer eigenen Teilmenge (alleine) steht.

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1 \qquad \left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

- Formel 1 erlaubt Berechnung ohne Division in $O\left(n^2\right)$
- Formel 2 erlaubt Berechnung in $O\left(n \log(n)\right)$

Bell-Zahlen Anzahl der Partitionen von $\{1,\ldots,n\}$. Wie Stirling-Zahlen 2. Ordnung ohne Limit durch k.

$$B_1 = 1 \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \qquad B_{p^m+n} \equiv m \cdot B_n + B_{n+1} \bmod p$$

Partitions Die Anzahl der Partitionen von n in genau k positive Summanden. Die Anzahl der Partitionen von n mit Elementen aus $1,\ldots,k$.

$$p_0(0) = 1 \qquad p_k(n) = 0 \text{ für } k > n \text{ oder } n \leq 0 \text{ oder } k \leq 0$$

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-1)$$

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n) = p_n(2n) = \sum_{k \neq 0}^{\infty} (-1)^{k+1} p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right)$$

- in Formel 3 kann abgebrochen werden wenn $\frac{k(3k-1)}{2} > n$.
- Die Anzahl der Partitionen von n in bis zu k positive Summanden ist $\sum_{i=0}^{k} p_i(n) = p_k(n+k)$.

Binomialkoeffizienten Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.
WICHTIG: Binomialkoeffizient in $O(1)$ berechnen indem man $x!$ vorberechnet.

`calc_binom` berechnet Binomialkoeffizient ($n \leq 61$) $O(k)$

```cpp
ll calc_binom(ll n, ll k) {
  if (k > n) return 0;
  ll r = 1;
  for (ll d = 1; d <= k; d++) {// Reihenfolge => Teilbarkeit
    r *= n--;
    r /= d;
  }
  return r;
}
```

`calc_binom` berechnet Binomialkoeffizient modulo Primzahl p $O(p-n)$

```cpp
ll calc_binom(ll n, ll k, ll p) {
  assert(n < p) //wichtig: sonst falsch!
  if (k > n) return 0;
  ll x = k % 2 != 0 ? p-1 : 1;
  for (ll c = p-1; c > n; c--) {
    x *= c - k; x %= p;
    x *= multInv(c, p); x %= p;
  }
  return x;
}
```

`calc_binom` berechnet Primfaktoren vom Binomialkoeffizient $O(n)$
WICHTIG: braucht alle Primzahlen $\leq n$

```cpp
constexpr ll mod = 1'000'000'009;
ll binomPPow(ll n, ll k, ll p) {
  ll res = 1;
  if (p > n) {
  } else if (p > n - k || (p * p > n && n % p < k % p)) {
    res *= p;
    res %= mod;
  } else if (p * p <= n) {
    ll c = 0, tmpN = n, tmpK = k;
    while (tmpN > 0) {
      if (tmpN % p < tmpK % p + c) {
        res *= p;
        res %= mod;
        c = 1;
      } else c = 0;
      tmpN /= p;
      tmpK /= p;
  }}
  return res;
}
ll calc_binom(ll n, ll k) {
  if (k > n) return 0;
  ll res = 1;
  k = min(k, n - k);
  for (ll i = 0; primes[i] <= n; i++) {
    res *= binomPPow(n, k, primes[i]);
    res %= mod;
  }
  return res;
}
```

Binomialkoeffizienten

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} = (-1)^k\binom{k-n-1}{k} \approx 2^n\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\exp\left(-\frac{2(x-\frac{n}{2})^2}{n}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1} \qquad \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k}=\binom{r+n+1}{n}$$

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n} \qquad \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}F_i=F_{2n} \quad F_n = n\text{-th Fib.}$$

Highly Composite Numbers

10^x	Zahl	Teiler	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
1	6	4	1	1										
2	60	12	2	1	1									
3	840	32	3	1	1	1								
4	7560	64	3	3	1	1								
5	83160	128	3	3	1	1	1							
6	720720	240	4	2	1	1	1	1						
7	8648640	448	6	3	1	1	1	1						
8	73513440	768	5	3	1	1	1	1	1					
9	735134400	1344	6	3	2	1	1	1	1					
10	6983776800	2304	5	3	2	1	1	1	1	1				
11	97772875200	4032	6	3	2	2	1	1	1	1				
12	963761198400	6720	6	4	2	1	1	1	1	1	1			
13	9316358251200	10752	6	3	2	1	1	1	1	1	1	1		
14	97821761637600	17280	5	4	2	2	1	1	1	1	1	1		
15	866421317361600	26880	6	4	2	1	1	1	1	1	1	1	1	
16	8086598962041600	41472	8	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	
17	74801040398884800	64512	6	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
18	897612484786617600	103680	8	4	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1

Platonische Körper

Übersicht	Seiten	Ecken	Kanten	dual zu
Tetraeder	4	4	6	Tetraeder
Würfel/Hexaeder	6	8	12	Oktaeder
Oktaeder	8	6	12	Würfel/Hexaeder
Dodekaeder	12	20	30	Ikosaeder
Ikosaeder	20	12	30	Dodekaeder

Färbungen mit maximal n Farben (bis auf Isomorphie)

Ecken vom Oktaeder/Seiten vom Würfel	$(n^6+3n^4+12n^3+8n^2)/24$
Ecken vom Würfel/Seiten vom Oktaeder	$(n^8+17n^4+6n^2)/24$
Kanten vom Würfel/Oktaeder	$(n^{12}+6n^7+3n^6+8n^4+6n^3)/24$
Ecken/Seiten vom Tetraeder	$(n^4+11n^2)/12$
Kanten vom Tetraeder	$(n^6+3n^4+8n^2)/12$
Ecken vom Ikosaeder/Seiten vom Dodekaeder	$(n^{12}+15n^6+44n^4)/60$
Ecken vom Dodekaeder/Seiten vom Ikosaeder	$(n^{20}+15n^{10}+20n^8+24n^4)/60$
Kanten vom Dodekaeder/Ikosaeder (evtl. falsch)	$(n^{30}+15n^{16}+20n^{10}+24n^6)/60$

Reihen

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad H_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1} \quad c\neq 1 \qquad \sum_{i=0}^{\infty} c^i = \frac{1}{1-c} \quad |c|<1 \qquad \sum_{i=1}^{\infty} c^i = \frac{c}{1-c} \quad |c|<1 \qquad \sum_{i=0}^{\infty} ic^i = \frac{c}{(1-c)^2} \quad |c|<1$$

$$\sum_{i=0}^{n} ic^i = \frac{nc^{n+2}-(n+1)c^{n+1}+c}{(c-1)^2} \quad c\neq 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} iH_i = \frac{n(n+1)}{2}H_n - \frac{n(n-1)}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n \qquad \sum_{i=1}^{n}\binom{i}{m}H_i = \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$$

Wahrscheinlichkeitstheorie (A,B Ereignisse und X,Y Variablen)

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$	$E(\alpha X)=\alpha E(X)$	X,Y unabh. $\Leftrightarrow E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$
$Pr[A\|B]=\frac{Pr[A\wedge B]}{Pr[B]}$	A,B disj. $\Leftrightarrow Pr[A\wedge B]=Pr[A]\cdot Pr[B]$	$Pr[A\vee B]=Pr[A]+Pr[B]-Pr[A\wedge B]$

Bertrand's Ballot Theorem (Kandidaten A und B, $k\in\mathbb{N}$)

$\#A>k\#B \quad Pr=\frac{a-kb}{a+b}$	$\#B-\#A\leq k \quad Pr=1-\frac{a!b!}{(a+k+1)!(b-k-1)!}$
$\#A\geq k\#B \quad Pr=\frac{a+1-kb}{a+1}$	$\#A\geq\#B+k \quad Num=\frac{a-k+1-b}{a-k+1}\binom{a+b-k}{b}$

Verschiedenes

Türme von Hanoi, minimale Schirttzahl:	$T_n=2^n-1$
#Regionen zwischen n Geraden	$\frac{n(n+1)}{2}+1$
#abgeschlossene Regionen zwischen n Geraden	$\frac{n^2-3n+2}{2}$
#markierte, gewurzelte Bäume	n^{n-1}
#markierte, nicht gewurzelte Bäume	n^{n-2}
#Wälder mit k gewurzelten Bäumen	$\frac{k}{n}\binom{n}{k}n^{n-k}$
#Wälder mit k gewurzelten Bäumen mit vorgegebenen Wurzelknoten	$\frac{k}{n}n^{n-k}$
Dearangements	$!n=(n-1)(!(n-1)+!(n-2))=\left\lfloor\frac{n!}{e}+\frac{1}{2}\right\rfloor$
	$\lim_{n\to\infty}\frac{!n}{n!}=\frac{1}{e}$

Nim-Spiele (❶ letzter gewinnt (normal), ❷ letzter verliert)

Beschreibung	Strategie
$M=[pile_i]$ $[x]:=\{1,\ldots,x\}$	$SG=\oplus_{i=1}^{n} pile_i$ ❶ Nimm von einem Stapel, sodass SG 0 wird. ❷ Genauso. Außer: Bleiben nur noch Stapel der Größe 1, erzeuge ungerade Anzahl solcher Stapel.
$M=\{a^m \mid m\geq 0\}$	a ungerade: $SG_n=n\%2$ a gerade: $SG_n=2$, falls $n\equiv a \bmod (a+1)$ $SG_n=n\%(a+1)\%2$, sonst.
$M_①=\left\lceil\frac{pile_i}{2}\right\rceil$ $M_②=\left\{\left\lceil\frac{pile_i}{2}\right\rceil, pile_i\right\}$	① $SG_{2n}=n$, $SG_{2n+1}=SG_n$ ② $SG_0=0$, $SG_n=\lceil\log_2 n\rceil+1$
$M_①$ = Teiler von $pile_i$ $M_②$ = echte Teiler von $pile_i$	① $SG_0=0$, $SG_n=SG_{②,n}+1$ ② $ST_1=0$, SG_n = #Nullen am Ende von n_{bin}
$M_①=[k]$ $M_②=S$, (S endlich) $M_③=S\cup\{pile_i\}$	$SG_{①,n}=n \bmod (k+1)$ ❶ Niederlage bei $SG=0$ ❷ Niederlage bei $SG=1$ $SG_{③,n}=SG_{②,n}+1$
Für jedes endliche M ist SG eines Stapels irgendwann periodisch.	
Moore's Nim: Beliebige Zahl von maximal k Stapeln.	❶ Schreibe $pile_i$ binär. Addiere ohne Übertrag zur Basis $k+1$. Niederlage, falls Ergebnis gleich 0. ❷ Wenn alle Stapel 1 sind: Niederlage, wenn $n\equiv 1 \bmod (k+1)$. Sonst wie in ❶.
Staircase Nim: n Stapel in einer Reihe. Beliebige Zahl von Stapel i nach Stapel $i-1$.	Niederlage, wenn Nim der ungeraden Spiele verloren ist: $\oplus_{i=0}^{(n-1)/2} pile_{2i+1}=0$
Lasker's Nim: Zwei mögliche Züge: 1) Nehme beliebige Zahl. 2) Teile Stapel in zwei Stapel (ohne Entnahme).	$SG_n=n$, falls $n\equiv 1,2 \bmod 4$ $SG_n=n+1$, falls $n\equiv 3 \bmod 4$ $SG_n=n-1$, falls $n\equiv 0 \bmod 4$
Kayles' Nim: Zwei mögliche Züge: 1) Nehme beliebige Zahl. 2) Teile Stapel in zwei Stapel (mit Entnahme).	Berechne SG_n für kleine n rekursiv. $n\in[72,83]$: 4,1,2,8,1,4,7,2,1,8,2,7 Periode ab $n=72$ der Länge 12.

5 Strings

5.1 Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus

`kmpSearch` sucht `sub` in `s` $O(|s|+|sub|)$

```
vector<int> kmpPreprocessing(const string& sub) {
  vector<int> b(sz(sub) + 1);
  b[0] = -1;
  for (int i = 0, j = -1; i < sz(sub);) {
    while (j >= 0 && sub[i] != sub[j]) j = b[j];
    b[++i] = ++j;
  }
  return b;
}
vector<int> kmpSearch(const string& s, const string& sub) {
  vector<int> result, pre = kmpPreprocessing(sub);
  for (int i = 0, j = 0; i < sz(s);) {
    while (j >= 0 && s[i] != sub[j]) j = pre[j];
    i++; j++;
    if (j == sz(sub)) {
      result.push_back(i - j);
      j = pre[j];
  }}
  return result;
}
```

5.2 Z-Algorithmus

z_i := Längstes gemeinsames Präfix von $s_0 \cdots s_{n-1}$ und $s_i \cdots s_{n-1}$ $O(n)$
Suchen: Z-Algorithmus auf `P$S` ausführen, Positionen mit $z_i = |P|$ zurückgeben

```
vector<int> Z(const string& s) {
    int n = sz(s);
    vector<int> z(n, n);
    int x = 0, y = 0;
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        z[i] = max(0, min(z[i - x], y - i + 1));
        while (i + z[i] < n && s[z[i]] == s[i + z[i]]) {
            x = i, y = i + z[i], z[i]++;
    }}
    return z;
}
```

5.3 Rolling Hash

```
// q = 29, 53, 101, 257, 1009, 65'537
// or choose q random from [sigma, m)
// m = 1'500'000'001, 1'600'000'009, 1'700'000'009
template<ll M, ll Q>
struct Hasher {
  vector<ll> power = {1}, pref = {0};
  Hasher(const string& s) {
    for (auto x : s) {
      power.push_back(power.back() * Q % M);
      pref.push_back((pref.back() * Q % M + x) % M);
  }}
  ll hash(int l, int r) { // Berechnet hash(s[l..r)).
    return (pref[r] - power[r-l] * pref[l] % M + M) % M;
  }
};
```

5.4 Pattern Matching mit Wildcards

Gegeben zwei strings A und B, B enthält k *wildcards* enthält. Sei:

$$a_i = \cos(\alpha_i) + i\sin(\alpha_i) \qquad \text{mit } \alpha_i = \frac{2\pi A[i]}{\Sigma}$$

$$b_i = \cos(\beta_i) + i\sin(\beta_i) \qquad \text{mit } \beta_i = \begin{cases} \frac{2\pi B[|B|-i-1]}{\Sigma} & \text{falls } B[|B|-i-1] \in \Sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

B matcht A an stelle i wenn $(b \cdot a)[|B|-1+i] = |B|-k$. Benutze FFT um $(b \cdot a)$ zu berechnen.

5.5 Manacher's Algorithm, Longest Palindrome

`init` transformiert `string a` $O(n)$
`manacher` berechnet Länge der Palindrome $O(n)$

```
string a, b; //a needs to be set
vector<int> longest;

//transformes "aa" to ".a.a." to find even length palindromes
void init() {
  b = string(sz(a) * 2 + 1, '.');
  longest.assign(sz(b), 0);
  for (int i = 0; i < sz(a); i++) {
    b[2 * i + 1] = a[i];
}}

void manacher() {
  int center = 0, last = 0, n = sz(b);
  for (int i = 1; i < n - 1; i++) {
    int i2 = 2 * center - i;
    longest[i] = (last > i) ? min(last - i, longest[i2]) : 0;
    while (i + longest[i] + 1 < n && i - longest[i] - 1 >= 0 &&
           b[i + longest[i] + 1] == b[i - longest[i] - 1]) {
      longest[i]++;
    }
    if (i + longest[i] > last) {
      center = i;
      last = i + longest[i];
  }}
  //convert lengths to string b (optional)
  for (int i = 0; i < n; i++) longest[i] = 2 * longest[i] + 1;
}
```

5.6 Longest Common Subsequence

`lcss` findet längste gemeinsame Sequenz $O(|a| \cdot |b|)$

```
string lcss(const string& a, const string& b) {
  vector<vector<int>> m(sz(a) + 1, vector<int>(sz(b) + 1));
  for (int i = sz(a) - 1; i >= 0; i--) {
    for (int j = sz(b) - 1; j >= 0; j--) {
      if (a[i] == b[j]) m[i][j] = 1 + m[i+1][j+1];
      else m[i][j] = maj(m[i+1][j], m[i][j+1]);
  }} // Für die Länge: return m[0][0];
  string res;
  for (int j = 0, i = 0; j < sz(b) && i < sz(a);) {
    if (a[i] == b[j]) res += a[i++], j++;
    else if (m[i][j+1] > m[i+1][j]) j++;
    else i++;
  }
  return res;
}
```

5.7 Aho-Corasick-Automat

sucht patterns im Text $O(|Text| + \sum |pattern| + |matches|)$

1. mit `addString(pattern, idx);` Patterns hinzufügen.
2. mit `state = go(state, idx)` in nächsten Zustand wechseln.
3. mit `state = getExit(state)` den exit Kanten folgen bis `state == 0`
4. dabei mit `aho[state].patterns` die Matches zählen

```
constexpr ll ALPHABET_SIZE = 26;
constexpr char OFFSET = 'a';
struct AhoCorasick {
  struct vert {
    int suffix, exit, character, parent;
    vector<int> nxt, patterns;
    vert(int c, int p) : suffix(-1), exit(-1),
          character(c), nxt(ALPHABET_SIZE, -1), parent(p) {}
  };
  vector<vert> aho;
  AhoCorasick() {aho.push_back(vert(-1, 0));}
  // Call once for each pattern.
  void addString(string &s, int patternIdx) {
    int v = 0;
    for (char c : s) {
      int idx = c - OFFSET;
      if (aho[v].nxt[idx] == -1) {
        aho[v].nxt[idx] = sz(aho);
        aho.emplace_back(idx, v);
      }
      v = aho[v].nxt[idx];
    }
    aho[v].patterns.push_back(patternIdx);
  }
  int getSuffix(int v) {
    if (aho[v].suffix == -1) {
      if (v == 0 || aho[v].parent == 0) aho[v].suffix = 0;
      else aho[v].suffix = go(getSuffix(aho[v].parent),
                              aho[v].character);
    }
    return aho[v].suffix;
  }
  int getExit(int v) {
    if (aho[v].exit == -1) {
      int suffix = getSuffix(v);
      if (v == 0) aho[v].exit = 0;
      else {
        if (aho[suffix].patterns.empty()) {
          aho[v].exit = getExit(suffix);
        } else {
          aho[v].exit = suffix;
    }}}
    return aho[v].exit;
  }
  int go(int v, int idx) { // Root is v=0.
    if (aho[v].nxt[idx] != -1) return aho[v].nxt[idx];
    else return v == 0 ? 0 : go(getSuffix(v), idx);
  }
};
```

5.8 Lyndon und De-Bruijn

- **Lyndon-Wort:** Ein Wort das lexikographisch kleiner ist als jede seiner Rotationen.
- Jedes Wort kann *eindeutig* in eine nicht ansteigende Folge von Lyndon-Worten zerlegt werden.
- Für Lyndon-Worte u,v mit $u<v$ gilt, dass uv auch ein Lyndon-Wort ist.

`next`	lexikographisch nächstes Lyndon-Wort	$O(n)$, Durchschnitt $\Theta(1)$
`duval`	zerlegt s in Lyndon-Worte	$O(n)$
`minrotation`	berechnet kleinste Rotation von s	$O(n)$

```
bool next(string& s, int n, char mi = '0', char ma = '1') {
  for (int i = sz(s), j = sz(s); i < n; i++)
    s.push_back(s[i % j]);
  while(!s.empty() && s.back() == ma) s.pop_back();
  if (s.empty()) {
    s = mi;
    return false;
  } else {
    s.back()++;
    return true;
}}
```

```
vector<pair<int, int>> duval(const string& s) {
  vector<pair<int, int>> res;
  for (int i = 0; i < sz(s);) {
    int j = i + 1, k = i;
    for (; j < sz(s) && s[k] <= s[j]; j++) {
      if (s[k] < s[j]) k = i;
      else k++;
    }
    while (i <= k) {
      res.push_back({i, i + j - k});
      i += j - k;
  }}
  return res;
}

int minrotation(const string& s) {
  auto parts = duval(s+s);
  for (auto [l, r] : parts) {
    if (l < sz(s) && r >= sz(s)) {
      return l;
}}}
```

- **De-Bruijn-Sequenze $B(\Sigma,n)$:** ein Wort das jedes Wort der Länge n genau einmal als substring enthält (und minimal ist). Wobei $B(\Sigma,n)$ zyklisch betrachtet wird.
- es gibt $\frac{(k!)^{k^{n-1}}}{k^n}$ verschiedene $B(\Sigma,n)$
- $B(\Sigma,n)$ hat Länge $|\Sigma|^n$

`deBruijn` berechnet ein festes $B(\Sigma,n)$ $O\left(|\Sigma|^n\right)$

```
string deBruijn(int n, char mi = '0', char ma = '1') {
  string res, c(1, mi);
  do {
    if (n % sz(c) == 0) res += c;
  } while(next(c, n, mi, ma));
  return res;
}
```

5.9 Suffix-Array

`SuffixArray`	berechnet ein Suffix Array	$O\left(\lvert s\rvert \cdot \log^2(\lvert s\rvert)\right)$
`lcp`	berechnet den logest common prefix von `s[x]` und `s[y]`	$O\left(\log(\lvert s\rvert)\right)$

ACHTUNG: s muss mit einem sentinel enden! `'$'` oder `'#'`

```
struct SuffixArray {
  int n, step, count;
  vector<int> SA, LCP;
  vector<vector<int>> P;
  vector<pair<int, int>, int>> L;

  SuffixArray(const string& s) : n(sz(s)), SA(n), LCP(n), L(n) {
    P.assign(__lg(n)+2, vector<int>(n));
    for (int i = 0; i < n; i++) P[0][i] = s[i];
    for (step = 1, count = 1; count < n; step++, count *= 2) {
      for (int i = 0; i < n; i++)
        L[i] = {{P[step-1][i],
                 i+count < n ? P[step-1][i+count] : -1}, i};
      sort(all(L));
      for (int i = 0; i < n; i++) {
        P[step][L[i].second] =
          i > 0 && L[i].first == L[i-1].first ?
          P[step][L[i-1].second] : i;
    }}
    for (int i = 0; i < n; i++) SA[i] = L[i].second;
    for (int i = 1; i < n; i++) LCP[i] = lcp(SA[i - 1], SA[i]);
  }

  // x and y are text-indices, not SA-indices.
  int lcp(int x, int y) {
    int ret = 0;
    if (x == y) return n - x;
    for (int k = step - 1; k >= 0 && x < n && y < n; k--) {
      if (P[k][x] == P[k][y]) {
        x += 1 << k;
        y += 1 << k;
        ret += 1 << k;
    }}
    return ret;
  }
};
```

5.10 Suffix-Baum

`SuffixTree`	berechnet einen Suffixbaum	$O(\lvert s\rvert)$
`extend`	fügt den nächsten Buchstaben aus s ein	$O(1)$

```
struct SuffixTree {
  struct Vert {
    int start, end, suf;
    map<char, int> next;
  };
  string s;
  int needsSuffix, pos, remainder, curVert, curEdge, curLen;
  // Each Vertex gives its children range as [start, end)
  vector<Vert> tree = {Vert{-1, -1, 0 {}}};

  SuffixTree(const string& s) : s(s) {
    needsSuffix = remainder = curVert = curEdge = curLen = 0;
    pos = -1;
    for (int i = 0; i < sz(s); i++) extend();
  }
  int newVert(int start, int end) {
    tree.push_back({start, end, 0, {}});
    return sz(tree) - 1;
  }
  void addSuffixLink(int vert) {
    if (needsSuffix) tree[needsSuffix].suf = vert;
    needsSuffix = vert;
  }
  bool fullImplicitEdge(int vert) {
    len = min(tree[vert].end, pos + 1) - tree[vert].start;
    if (curLen >= len) {
      curEdge += len;
      curLen -= len;
      curVert = vert;
      return true;
    } else {
      return false;
  }}
  void extend() {
    pos++;
    needsSuffix = 0;
    remainder++;
    while (remainder) {
      if (curLen == 0) curEdge = pos;
      if (!tree[curVert].next.count(s[curEdge])) {
        int leaf = newVert(pos, sz(s));
        tree[curVert].next[s[curEdge]] = leaf;
        addSuffixLink(curVert);
      } else {
        int nxt = tree[curVert].next[s[curEdge]];
        if (fullImplicitEdge(nxt)) continue;
        if (s[tree[nxt].start + curLen] == s[pos]) {
          curLen++;
          addSuffixLink(curVert);
          break;
        }
        int split = newVert(tree[nxt].start,
                            tree[nxt].start + curLen);
        tree[curVert].next[s[curEdge]] = split;
        int leaf = newVert(pos, sz(s));
        tree[split].next[s[pos]] = leaf;
        tree[nxt].start += curLen;
        tree[split].next[s[tree[nxt].start]] = nxt;
        addSuffixLink(split);
      }
      remainder--;
      if (curVert == 0 && curLen) {
        curLen--;
        curEdge = pos - remainder + 1;
      } else {
        curVert = tree[curVert].suf ? tree[curVert].suf : 0;
  }}}
};
```

5.11 Suffix-Automaton

```cpp
constexpr int ALPHABET_SIZE = 26;
constexpr char OFFSET = 'a';
struct SuffixAutomaton {
  struct State {
    int len, link = -1;
    array<int, ALPHABET_SIZE> next = {}; // map if large Alphabet
    State(int l) : len(l) {}
  };

  vector<State> st = {State(0)};
  int cur = 0;

  SuffixAutomaton(const string& s) {
    st.reserve(2 * sz(s));
    for (auto c : s) extend(c - OFFSET);
  }

  void extend(int c) {
    int p = cur;
    cur = sz(st);
    st.emplace_back(st[p].len + 1);
    for (; p != -1 && !st[p].next[c]; p = st[p].link) {
      st[p].next[c] = cur;
    }
    if (p == -1) st[cur].link = 0;
    else {
      int q = st[p].next[c];
      if (st[p].len + 1 == st[q].len) {
        st[cur].link = q;
      } else {
        st.emplace_back(st[p].len + 1);
        st.back().link = st[q].link;
        st.back().next = st[q].next;
        for (; p != -1 && st[p].next[c] == q; p = st[p].link) {
          st[p].next[c] = sz(st) - 1;
        }
        st[q].link = st[cur].link = sz(st) - 1;
  }}}

  vector<int> calculateTerminals() {
    vector<int> terminals;
    for (int p = cur; p != -1; p = st[p].link) {
      terminals.push_back(p);
    }
    return terminals;
  }
  // Pair with start index (in t) and length of LCS.
  pair<int, int> longestCommonSubstring(const string& t) {
    int v = 0, l = 0, best = 0, bestp = 0;
    for (int i = 0; i < sz(t); i++) {
      int c = t[i] - OFFSET;
      for (; v && !st[v].next[c]; v = st[v].link) l = st[v].len;
      if (st[v].next[c]) v = st[v].next[c], l++;
      if (l > best) best = l, bestp = i;
    }
    return {bestp - best + 1, best};
  }
};
```

- **Ist w Substring von s?** Baue Automaten für s und wende ihn auf w an. Wenn alle Übergänge vorhanden sind, ist w Substring von s.
- **Ist w Suffix von s?** Wie oben und prüfe, ob Endzustand ein Terminal ist.
- **Anzahl verschiedener Substrings.** Jeder Pfad im Automaten entspricht einem Substring. Für einen Knoten ist die Anzahl der ausgehenden Pfade gleich der Summe über die Anzahlen der Kindknoten plus 1. Der letzte Summand ist der Pfad, der in diesem Knoten endet.
- **Wie oft taucht w in s auf?** Sei p der Zustand nach Abarbeitung von w. Lösung ist Anzahl der Pfade, die in p starten und in einem Terminal enden. Diese Zahl lässt sich wie oben rekursiv berechnen. Bei jedem Knoten darf nur dann plus 1 gerechnet werden, wenn es ein Terminal ist.

5.12 Trie

```cpp
// Zahlenwerte müssen bei 0 beginnen und zusammenhängend sein.
constexpr int ALPHABET_SIZE = 2;
struct node {
  int words, wordEnds; vector<int> children;
  node() : words(0), wordEnds(0), children(ALPHABET_SIZE, -1){}
};
vector<node> trie = {node()};

int insert(vector<int>& word) {
  int id = 0;
  for (int c : word) {
    trie[id].words++;
    if (trie[id].children[c] < 0) {
      trie[id].children[c] = sz(trie);
      trie.emplace_back();
    }
    id = trie[id].children[c];
  }
  trie[id].words++;
  trie[id].wordEnds++;
  return id;
}
void erase(vector<int>& word) {
  int id = 0;
  for (int c : word) {
    trie[id].words--;
    id = trie[id].children[c];
    if (id < 0) return;
  }
  trie[id].words--;
  trie[id].wordEnds--;
}
```

6 Java

6.1 Input

- `Scanner` ist sehr langsam. Nicht für lange Eingaben verwenden

6.2 Output

- `System.out` flusht nach jeder newline ⇒ langsam
- `String.format` langsam
- + auf `String` benutzt `StringBuilder` ⇒ schnell und leicht
  (bei vielen +-Operationen an unterschiedlichen Stellen doch explizit `StringBuilder` nutzen)

7 Sonstiges

7.1 Compiletime

- überprüfen ob Compilezeit Berechnungen erlaubt sind!
- braucht `c++14` oder höher!

```cpp
template<int N>
struct Table {
  int data[N];
  constexpr Table() : data {} {
    for (int i = 0; i < N; i++) data[i] = i;
}};
constexpr Table<100'000> precalculated;
```

7.2 Timed

Kann benutzt werdem un randomisierte Algorithmen so lange wie möglich laufen zu lassen.

```cpp
int times = clock();
//run for 900ms
while (1000*(clock()-times)/CLOCKS_PER_SEC < 900) {...}
```

7.3 Bit Operations

Bit an Position j lesen	`(x & (1 << j))!= 0`
Bit an Position j setzten	`x |= (1 << j)`
Bit an Position j löschen	`x &= ~(1 << j)`
Bit an Position j flippen	`x ^= (1 << j)`
Anzahl an führenden nullen ($x \neq 0$)	`__builtin_clzll(x)`
Anzahl an schließenden nullen ($x \neq 0$)	`__builtin_ctzll(x)`
Anzahl an bits	`__builtin_popcountll(x)`
i-te Zahl eines Graycodes	`i ^ (i >> 1)`

```cpp
// Iteriert über alle Teilmengen einer Bitmaske
// (außer der leeren Menge).
for (int subset = bitmask; subset > 0;
     subset = (subset - 1) & bitmask)
// Zählt Anzahl der gesetzten Bits.
int numberOfSetBits(int i) {
  i = i - ((i >> 1) & 0x5555'5555);
  i = (i & 0x3333'3333) + ((i >> 2) & 0x3333'3333);
  return (((i + (i >> 4)) & 0x0F0F'0F0F) * 0x0101'0101) >> 24;
}
// Nächste Permutation in Bitmaske
// (z.B. 00111 => 01011 => 01101 => ...)
ll nextPerm(ll v) {
  ll t = v | (v - 1);
  return (t+1) | (((~t & -~t) - 1) >> (__builtin_ctzll(v) + 1));
}
```

7.4 Overflow-sichere arithmetische Operationen

Gibt zurück, ob es einen Overflow gab. Wenn nicht, enthält `c` das Ergebnis.

Addition	`__builtin_saddll_overflow(a, b, &c)`
Subtraktion	`__builtin_ssubll_overflow(a, b, &c)`
Multiplikation	`__builtin_smulll_overflow(a, b, &c)`

7.5 Pragmas

```
#pragma GCC optimize("Ofast")
#pragma GCC optimize ("unroll-loops")
#pragma GCC target("sse,sse2,sse3,ssse3,sse4,"
                   "popcnt,abm,mmx,avx,tune=native")
#pragma GCC target("fpmath=sse,sse2") // no excess precision
#pragma GCC target("fpmath=387")      // force excess precision
```

7.6 DP Optimizations

Aufgabe: Partitioniere Array in genau k zusammenhängende Teile mit minimalen Kosten: $dp[i][j] = \min_{k<j}\{dp[i-1][k] + C[k][j]\}$. Es sei $A[i][j]$ das *minimale* optimale k bei der Berechnung von $dp[i][j]$.

Knuth-Optimization Vorbedingung: $A[i-1][j] \le A[i][j] \le A[i][j+1]$
`calc` berechnet das DP $O(n^2)$

```
ll calc(int n, int k, const vector<vector<ll>> &C) {
  vector<vector<ll>> dp(k, vector<ll>(n, inf));
  vector<vector<int>> opt(k, vector<int>(n + 1, n - 1));

  for (int i = 0; i < n; i++) dp[0][i] = C[0][i];
  for (int i = 1; i < k; i++) {
    for (int j = n - 1; j >= 0; --j) {
      opt[i][j] = i == 1 ? 0 : opt[i - 1][j];
      for (int k = opt[i][j]; k <= min(opt[i][j+1], j-1); k++) {
        if (dp[i][j] <= dp[i - 1][k] + C[k + 1][j]) continue;
        dp[i][j] = dp[i - 1][k] + C[k + 1][j];
        opt[i][j] = k;
  }}}
  return dp[k - 1][n - 1];
}
```

Divide and Conquer Vorbedingung: $A[i][j-1] \le A[i][j]$.
`calc` berechnet das DP $O(k \cdot n \cdot \log(n))$

```
vector<vector<ll>> dp;
vector<vector<ll>> C;
void rec(int i, int j0, int j1, int k0, int k1) {
  if (j1 < j0) return;
  int jmid = (j0 + j1) / 2;
  dp[i][jmid] = inf;
  int bestk = k0;
  for (int k = k0; k < min(jmid, k1 + 1); ++k) {
    if (dp[i - 1][k] + C[k + 1][jmid] < dp[i][jmid]) {
      dp[i][jmid] = dp[i - 1][k] + C[k + 1][jmid];
      bestk = k;
  }}
  rec(i, j0, jmid - 1, k0, bestk);
  rec(i, jmid + 1, j1, bestk, k1);
}
ll calc(int n, int k) {
  dp = vector<vector<ll>>(k, vector<ll>(n, inf));
  for (int i = 0; i < n; i++) dp[0][i] = C[0][i];
  for (int i = 1; i < k; i++) {
    rec(i, 0, n - 1, 0, n - 1);
  }
  return dp[k - 1][n - 1];
}
```

Quadrangle inequality Die Bedingung $\forall a \le b \le c \le d : C[a][d] + C[b][c] \ge C[a][c] + C[b][d]$ ist hinreichend für beide Optimierungen.

Sum over Subsets DP $\text{res}[\text{mask}] = \sum_{i \subseteq \text{mask}} \text{in}[i]$. Für Summe über Supersets `res` einmal vorher und einmal nachher reversen.

```
vector<ll> res(in);
for (int i = 1; i < sz(res); i *= 2) {
  for (int mask = 0; mask < sz(res); mask++){
    if (mask & i) {
      res[mask] += res[mask ^ i];
}}}
```

7.7 Parallel Binary Search

```
// Q = Anzahl der Anfragen
// C = Anzahl der Schritte der Operation
vector<vector<int>> focus;
vector<int> low, high, ans;
ans.assign(Q, C + 1);
low.assign(Q, 0);
high.assign(Q, C);
focus.assign(C + 1, vector<int>());
for (bool changed = true; changed;) {
  changed = false;
  for (int i = 0; i <= C; i++) focus[i].clear();
  for (int i = 0; i < Q; i++) {
    if (low[i] > high[i]) continue;
    focus[(low[i] + high[i]) / 2].pb(i);
  }
  // Simulation zurücksetzen
  for (int k = 0; k <= C; k++) {
    // Simulationsschritt
    for (int q : focus[k]) {
      changed = true;
      if (/* Eigenschaft schon erfüllt */) {
        // Antwort updaten
        high[q] = k - 1;
        ans[q] = min(ans[q], k);
      } else {
        low[q] = k + 1;
}}}}
```

7.8 Josephus-Problem

n Personen im Kreis, jeder k-te wird erschossen.

Spezialfall $k=2$: Betrachte n Binär. Für $n = 1b_1b_2b_3..b_n$ ist $b_1b_2b_3..b_n1$ die Position des letzten Überlebenden. (Rotiere n um eine Stelle nach links)

```
int rotateLeft(int n) { // Der letzte Überlebende, 1-basiert.
  for (int i = 31; i >= 0; i--) {
    if (n & (1 << i)) {
      n &= ~(1 << i);
      break;
  }}
  n <<= 1; n++; return n;
}
```

Allgemein: Sei $F(n,k)$ die Position des letzten Überlebenden. Nummeriere die Personen mit $0,1,\ldots,n-1$. Nach Erschießen der k-ten Person, hat der Kreis noch Größe $n-1$ und die Position des Überlebenden ist jetzt $F(n-1,k)$. Also: $F(n,k) = (F(n-1,k)+k)\%n$. Basisfall: $F(1,k) = 0$.

```
// Der letzte Überlebende, 0-basiert.
int josephus(int n, int k) {
  if (n == 1) return 0;
  return (josephus(n - 1, k) + k) % n;
}
```

Beachte bei der Ausgabe, dass die Personen im ersten Fall von 1,...,n nummeriert sind, im zweiten Fall von 0,...,$n-1$!

7.9 Sonstiges

```
// Alles-Header.
#include <bits/stdc++.h>
// Setzt das deutsche Tastaturlayout.
setxkbmap de
// Schnelle Ein-/Ausgabe mit cin/cout.
ios::sync_with_stdio(false);
cin.tie(nullptr);
// Set mit eigener Sortierfunktion.
set<point2, decltype(comp)> set1(comp);
// STL-Debugging, Compiler flags.
-D_GLIBCXX_DEBUG
#define _GLIBCXX_DEBUG
// 128-Bit Integer/Float. Muss zum Einlesen/Ausgeben
// in einen int oder long long gecastet werden.
__int128, __float128
// float mit Decimaldarstellung
#include <decimal/decimal>
std::decimal::decimal128
// 1e18 < INF < Max_Value / 2
constexpr ll INF = 0x3FFF'FFFF'FFFF'FFFFll;
// 1e9 < INF < Max_Value / 2
constexpr int INF = 0x3FFF'FFFF;
```

7.10 Gemischtes

- **(Minimum) Flow mit Demand d:** Erstelle neue Quelle s' und Senke t' und setzte die folgenden Kapazitäten:
$$c'(s',v)=\sum_{u\in V} d(u,v) \qquad c'(v,t')=\sum_{u\in V} d(v,u)$$
$$c'(u,v)=c(u,v)-d(u,v) \qquad c'(t,s)=x$$
Löse Fluss auf G' mit Dinic's Algorithmus, wenn alle Kanten von s' saturiert sind ist der Fluss in G gültig. x beschränkt den Fluss in G (Binary-Search für minflow, ∞ sonst).
- **Johnsons Reweighting Algorithmus:** Initialisiere alle Entfernungen mit `d[i] = 0`. Berechne mit Bellmann-Ford kürzeste Entfernungen. Falls es einen negativen Zyklus gibt abrechen. Sonst ändere die Gewichte von allen Kanten `(u,v)` im ursprünglichen Graphen zu `d[u]+w[u,v]-d[v]`. Dann sind alle Kantengewichte nichtnegativ, Dijkstra kann angewendet werden.
- **System von Differenzbeschränkungen:** Ändere alle Bedingungen in die Form $a-b\le c$. Für jede Bedingung füge eine Kante `(b,a)` mit Gweicht `c` ein. Füge Quelle `s` hinzu, mit Kanten zu allen Knoten mit Gewicht 0. Nutze Bellmann-Ford, um die kürzesten Pfade von `s` aus zu finden. `d[v]` ist mögliche Lösung für `v`.
- **Min-Weight-Vertex-Cover im Bipartiten Graph:** Partitioniere in `A, B` und füge Kanten `s` $\to$ `A` mit Gewicht `w(A)` und Kanten `B` $\to$ `t` mit Gewicht `w(B)` hinzu. Füge Kanten mit Kapazität ∞ von `A` nach `B` hinzu, wo im originalen Graphen Kanten waren. Max-Flow ist die Lösung.
Im Residualgraphen:
  - Das Vertex-Cover sind die Knoten inzident zu den Brücken. *oder*
  - Die Knoten in `A`, die *nicht* von `s` erreichbar sind und die Knoten in `B`, die von `erreichbar` sind.
- **Allgemeiner Graph:** Das Komplement eines Vertex-Cover ist ein Independent Set. $\Rightarrow$ Max Weight Independent Set ist Komplement von Min Weight Vertex Cover.
- **Bipartiter Graph:** Min Vertex Cover (kleinste Menge Knoten, die alle Kanten berühren) = Max Matching. Richte Kanten im Matching von B nach A und sonst von A nach B, makiere alle Knoten die von einem ungematchten Knoten in A erreichbar sind, das Vertex Cover sind die makierten Knoten aus B und die unmakierten Knoten aus A.
- **Bipartites Matching mit Gewichten auf linken Knoten:** Minimiere Matching-gewicht. Lösung: Sortiere Knoten links aufsteigend nach Gewicht, danach nutze normalen Algorithmus (Kuhn, Seite 9)
- **Satz von Pick:** Sei A der Flächeninhalt eines einfachen Gitterpolygons, I die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren und R die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand. Es gilt:
$$A=I+\frac{R}{2}-1$$
- **Lemma von Burnside:** Sei G eine endliche Gruppe, die auf der Menge X operiert. Für jedes $g\in G$ sei X^g die Menge der Fixpunkte bei Operation durch g, also $X^g=\{x\in X\mid g\bullet x=x\}$. Dann gilt für die Anzahl der Bahnen $[X/G]$ der Operation:
$$[X/G]=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$
- **Polya Counting:** Sei π eine Permutation der Menge X. Die Elemente von X können mit einer von m Farben gefärbt werden. Die Anzahl der Färbungen, die Fixpunkte von π sind, ist $m^{\#(\pi)}$, wobei $\#(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π ist. Die Anzahl der Färbungen von Objekten einer Menge X mit m Farben unter einer Symmetriegruppe G is gegeben durch:
$$[X/G]=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} m^{\#(g)}$$
- **Verteilung von Primzahlen:** Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt: Ex existiert eine Primzahl p mit $n\le p\le 2n$.
- **Satz von Kirchhoff:** Sei G ein zusammenhängender, ungerichteter Graph evtl. mit Mehrfachkanten. Sei A die Adjazenzmatrix von G. Dabei ist a_{ij} die Anzahl der Kanten zwischen Knoten i und j. Sei B eine Diagonalmatrix, b_{ii} sei der Grad von Knoten i. Definiere $R=B-A$. Alle Kofaktoren von R sind gleich und die Anzahl der Spannbäume von G.
Entferne letzte Zeile und Spalte und berechne Betrag der Determinante.
- **Dilworths-Theorem:** Sei S eine Menge und $\le$ eine partielle Ordnung (S ist ein Poset). Eine *Kette* ist eine Teilmenge $\{x_1,\dots,x_n\}$ mit $x_1\le\dots\le x_n$. Eine *Partition* ist eine Menge von Ketten, sodass jedes $s\in S$ in genau einer Kette ist. Eine *Antikette* ist eine Menge von Elementen, die paarweise nicht vergleichbar sind.
Es gilt: Die Größe der längsten Antikette gleicht der Größe der kleinsten Partition.
$\Rightarrow$ *Weite* des Poset.
Berechnung: Maximales Matching in bipartitem Graphen. Dupliziere jedes $s\in S$ in u_s und v_s. Falls $x\le y$, füge Kante $u_x\to v_y$ hinzu. Wenn Matching zu langsam ist, versuche Struktur des Posets auszunutzen und evtl. anders eine maximale Anitkette zu finden.
- **Turan's-Theorem:** Die Anzahl an Kanten in einem Graphen mit n Knoten der keine clique der größe $x+1$ enthält ist:
$$ext(n,K_{x+1})=\binom{n}{2}-\left[(x-(n \bmod x))\cdot\binom{\lfloor\frac{n}{x}\rfloor}{2}+(n \bmod x)\cdot\binom{\lceil\frac{n}{x}\rceil}{2}\right]$$
- **Euler's-Polyedersatz:** In planaren Graphen gilt $n-m+f-c=1$.
- **Pythagoreische Tripel:** Sei $m>n>0$, $k>0$ und $m\not\equiv n \bmod 2$ dann beschreibt diese Formel alle Pythagoreischen Tripel eindeutig:
$$k\cdot\left(a=m^2-n^2,\quad b=2mn,\quad c=m^2+n^2\right)$$
- **Centroids of a Tree:** Ein *Centroid* ist ein Knoten, der einen Baum in Komponenten der maximalen Größe $\frac{|V|}{2}$ splitted. Es kann 2 Centroids geben!
- **Centroid Decomposition:** Wähle zufälligen Knoten und mache DFS. Verschiebe ausgewählten Knoten in Richtung des tiefsten Teilbaums, bis Centroid gefunden. Entferne Knoten, mache rekursiv in Teilbäumen weiter. Laufzeit: $O\left(|V|\cdot\log(|V|)\right)$.
- **Gregorian Calendar:** Der Anfangstag des Jahres verhält sich periodisch alle 400 Jahre.
- **Pivotsuche und Rekursion auf linkem und rechtem Teilarray:** Suche gleich-zeitig von links und rechts nach Pivot, um Worst Case von $O(n^2)$ zu $O(n\log n)$ zu verbessern.
- **Mo's Algorithm:** SQRT-Decomposition auf n Intervall Queries $[l,r]$. Gruppiere Queries in $\sqrt{n}$ Blöcke nach linker Grenze l. Sortiere nach Block und bei gleichem Block nach rechter Grenze r. Beantworte Queries offline durch schrittweise Vergrößern/Verkleinern des aktuellen Intervalls. Laufzeit: $O\left(n\cdot\sqrt{n}\right)$. (Anzahl der Blöcke als Konstante in Code schreiben.)
- **SQRT Techniques:**
  - Aufteilen in *leichte* (wert $\le\sqrt{x}$) und *schwere* (höchsten $\sqrt{x}$ viele) Objekte.
  - Datenstruktur in Blöcke fester Größe (z.b. 256 oder 512) aufteilen.
  - Datenstruktur nach fester Anzahl Updates komplett neu bauen.
  - Wenn die Summe über x_i durch X beschränkt ist, dann gibt es nur $\sqrt{2X}$ verschiedene Werte von x_i (z.b. Längen von Strings).
  - Wenn $w\cdot h$ durch X beschränkt ist, dann ist $\min(w,h)\le\sqrt{X}$.
- **Partition:** Gegeben Gewichte $w_0+w_1+\dots+w_k=W$, existiert eine Teilmenge mit Gewicht x? Drei gleiche Gewichte w können zu w und $2w$ kombiniert werden ohne die Lösung zu ändern $\Rightarrow$ nur $2\sqrt{W}$ unterschiedliche Gewichte. Mit bitsets daher selbst für 10^5 lösbar.

7.11 Tipps & Tricks

- Run Time Error:
  - Stack Overflow? Evtl. rekursive Tiefensuche auf langem Pfad?
  - Array-Grenzen überprüfen. Indizierung bei 0 oder bei 1 beginnen?
  - Abbruchbedingung bei Rekursion?
  - Evtl. Memory Limit Exceeded?
- Strings:
  - Soll `"aa"` kleiner als `"z"` sein oder nicht?
  - bit `0x20` beeinflusst Groß-/Kleinschreibung.
- Gleitkommazahlen:
  - `NaN`? Evtl. ungültige Werte für mathematische Funktionen, z.B. `acos(1.00000000000001)`?
  - Falsches Runden bei negativen Zahlen? Abschneiden $\neq$ Abrunden!
  - genügend Präzision oder Output in wissenschaftlicher Notation (`1e-25`)?
  - Kann `-0.000` ausgegeben werden?
- Wrong Answer:
  - Lies Aufgabe erneut. Sorgfältig!
  - Mehrere Testfälle in einer Datei? Probiere gleichen Testcase mehrfach hintereinander.
  - Integer Overflow? Teste maximale Eingabegrößen und mache Überschlags-rechnung.
  - Integer Division rundet zur 0 $\neq$ abrunden.
  - Eingabegrößen überprüfen. Sonderfälle ausprobieren.
    - $n=0$, $n=-1$, $n=1$, $n=2^{31}-1$, $n=-2^{31}$
    - n gerade/ungerade
    - Graph ist leer/enthält nur einen Knoten.
    - Liste ist leer/enthält nur ein Element.
    - Graph ist Multigraph (enthält Schleifen/Mehrfachkanten).
    - Sind Kanten gerichtet/ungerichtet?
    - Polygon ist konkav/selbstschneidend.
  - Bei DP/Rekursion: Stimmt Basisfall?
  - Unsicher bei benutzten STL-Funktionen?

8 Template

8.1 C++

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

#define fora(i, n) for (int i = 0; i < n; ++i)
#define forb(i, n) for (int i = 1; i <= n; ++i)
#define all(x) ::begin(x), ::end(x)
#define sz(x) (ll)::size(x)
#define _ << " " <<
#define debug(x) #x << " = " << (x)

using ll = long long;
using ld = long double;

int main() {
  cin.tie(0)->sync_with_stdio(false);
}
```

8.2 Console

```
alias comp=
      "g++ -std=gnu++17 -O2 -Wall -Wextra -Wconversion -Wshadow"
alias dbg="comp -g -fsanitize=address -fsanitize=undefined"
```

9 Tests

Dieser Abschnitt enthält lediglich Dinge die während der Practicesession getestet werden sollten!

9.1 GCC

- sind c++14 Feature vorhanden?
- sind c++17 Feature vorhanden?
- kompiliert dieser Code:

```
//https://gcc.gnu.org/bugzilla/show_bug.cgi?id=68203
struct A {
    pair<int, int> values[1000000];
};
```

- funktioniert `__int128`?
- funktionieren Pragmas?
- funktionieren `constexpr` zur Compilezeit (+Zeitlimit)?
- wie groß ist `sizeof(char*)`?
- wie groß ist `RAND_MAX`?
- funktioniert `random_device`? (und gib es unerschiedliche Ergebnisse?)
- funktioniert `clock()`?

9.2 Java

- startet eclipse?
- funktionieren Java8 feature (lambdas)?

9.3 Judge

- ist der Checker casesensitive?
- wie werden zusätzliches Whitespacecharacter bei sonst korrektem Output behandelt?
- vergleiche ausführungszeit auf dem judge und lokal (z.b. mit Primzahl Sieb)

```
"\r\r\r\n\t     \r\n\r"
```

9.4 Precision

- Mode 0 means no excess precision
- Mode 2 means excess precision (all operations in 80 bit floats)
- Result 0 without excess precision (expected floating point error)
- ~$8e^{-17}$ with excess precision (real value)

```
#include <cfloat>
int main() {
  cout << "Mode: " << FLT_EVAL_METHOD << endl;
  double a = atof("1.2345678");
  double b = a*a;
  cout << b - 1.52415765279683990130 << '\n';
}
```