

## 1 Datenstrukturen

### 1.1 Union-Find

init           legt  $n$  einzelne Unions an    $O(n)$   
 findSet       findet den Repräsentanten    $O(\log(n))$   
 unionSets     vereint 2 Mengen            $O(\log(n))$   
 m-findSet + n-unionSets Folge von Befehlen    $O(n+m \cdot \alpha(n))$

```
1 // unions[i] >= 0 => unions[i] = parent
2 // unions[i] < 0 => unions[i] = -height
3 vector<int> unions;
4
5 void init(int n) { //Initialisieren
6     unions.assign(n, -1);
7 }
8
9 int findSet(int n) { // Pfadkompression
10     if (unions[n] < 0) return n;
11     return unions[n] = findSet(unions[n]);
12 }
13
14 void linkSets(int a, int b) { // Union by rank.
15     if (unions[a] > unions[b]) unions[a] = b;
16     else if (unions[b] > unions[a]) unions[b] = a;
17     else {
18         unions[a] = b;
19         unions[b]--;
20     }
21 }
22
23 void unionSets(int a, int b) { // Diese Funktion aufrufen.
24     if (findSet(a) != findSet(b)) linkSets(findSet(a), findSet(b));
25 }
```

### 1.2 Segmentbaum

init   baut den Baum auf            $O(n)$   
 query   findet das min(max) in  $[l, r]$     $O(\log(n))$   
 update   ändert einen Wert            $O(\log(n))$

```
1 vector<ll> tree;
2 constexpr ll neutral = 0; // Neutral element for combine
3
4 ll combine(ll a, ll b) {
5     return a + b;
6 }
7
8 void init(vector<ll>& a) {
9     tree.assign(2 * sz(a), 0);
10    copy(all(a), tree.begin() + sz(a));
11    for (int i = sz(tree)/2 - 1; i > 0; i--) {
12        tree[i] = combine(tree[2 * i], tree[2 * i + 1]);
13    }
14
15    void update(int i, ll val) {
16        for (tree[i += sz(tree)/2] = val; i /= 2; ) {
17            tree[i] = combine(tree[2 * i], tree[2 * i + 1]);
18        }
19
20    ll query(int l, int r) {
21        ll resL = neutral, resR = neutral;
22        for (l += sz(tree)/2, r += sz(tree)/2; l < r; l /= 2, r /= 2) {
23            if (l&1) resL = combine(resL, tree[l++]);
24            if (r&1) resR = combine(tree[--r], resR);
25        }
26        return combine(resL, resR);
27    }
```

```
23 }
24 // Oder: Intervall-Modifikation, Punkt-Query:
25 void modify(int l, int r, ll val) {
26     for (l += sz(tree)/2, r += sz(tree)/2; l < r; l /= 2, r /= 2) {
27         if (l&1) {tree[l] = combine(tree[l], val); l++;}
28         if (r&1) {--r; tree[r] = combine(tree[r], val);}
29     }
30
31    ll query(int i) {
32        ll res = neutral;
33        for (i += sz(tree)/2; i > 0; i /= 2) {
34            res = combine(res, tree[i]);
35        }
36        return res;
37    }
```

#### 1.2.1 Lazy Propagation

Assignment modifications, sum queries

lower\_bound erster Index in  $[l, r] \geq x$  (erfordert max-combine)  $O(\log(n))$

```
1 struct SegTree {
2     int size, height;
3     static constexpr ll neutral = 0; // Neutral element for combine
4     static constexpr ll updateFlag = 0; // Unused value by updates
5     vector<ll> tree, lazy;
6
7     SegTree(const vector<ll>& a) : SegTree(sz(a)) {
8         copy(all(a), tree.begin() + size);
9         for (int i = size - 1; i > 0; i--)
10             tree[i] = combine(tree[2 * i], tree[2 * i + 1]);
11
12     SegTree(int n) : size(n), height(__lg(2 * n)),
13         tree(2 * n, neutral), lazy(n, updateFlag) {}
14
15     ll combine(ll a, ll b) {return a + b;} // Modify this + neutral
16
17     void apply(int i, ll val, int k) { // And this + updateFlag
18         tree[i] = val * k;
19         if (i < size) lazy[i] = val; // Don't forget this
20     }
21
22     void push_down(int i, int k) {
23         if (lazy[i] != updateFlag) {
24             apply(2 * i, lazy[i], k);
25             apply(2 * i + 1, lazy[i], k);
26             lazy[i] = updateFlag;
27         }
28
29     void push(int i) {
30         for (int s = height, k = 1 << (height-1); s > 0; s--, k /= 2)
31             push_down(i >> s, k);
32     }
33
34     void build(int i) {
35         for (int k = 2; i /= 2; k *= 2) {
36             push_down(i, k / 2);
37             tree[i] = combine(tree[2 * i], tree[2 * i + 1]);
38         }
39
40     void update(int l, int r, ll val) { // data[l..r) = val
41         l += size, r += size;
42         int l0 = l, r0 = r;
43         push(l0), push(r0 - 1);
```

```
37     for (int k = 1; l < r; l /= 2, r /= 2, k *= 2) {
38         if (l&1) apply(l++, val, k);
39         if (r&1) apply(--r, val, k);
40     }
41     build(l0), build(r0 - 1);
42 }
43
44 ll query(int l, int r) { // sum[l..r)
45     l += size, r += size;
46     push(l), push(r - 1);
47     ll resL = neutral, resR = neutral;
48     for (; l < r; l /= 2, r /= 2) {
49         if (l&1) resL = combine(resL, tree[l++]);
50         if (r&1) resR = combine(tree[--r], resR);
51     }
52     return combine(resL, resR);
53 }
54
55 // Optional:
56 ll lower_bound(int l, int r, int x) {
57     l += size, r += size;
58     push(l), push(r - 1);
59     vector<pair<int, int>> a, st;
60     for (int k = 1; l < r; l /= 2, r /= 2, k *= 2) {
61         if (l&1) a.emplace_back(l++, k);
62         if (r&1) st.emplace_back(--r, k);
63     }
64     a.insert(a.begin(), st.rbegin(), st.rend());
65     for (auto [i, k] : a) {
66         if (tree[i] >= x) return find(i, x, k); // Modify this
67     }
68     return -1;
69 }
70
71 ll find(int i, int x, int k) {
72     if (i >= size) return i - size;
73     push_down(i, k / 2);
74     if (tree[2*i] >= x) return find(2 * i, x, k / 2); // And this
75     else return find(2 * i + 1, x, k / 2);
76 }
```

### 1.3 STL-Bitset

```
1 bitset<10> bits(0b000010100);
2 cout << bits._Find_first() << endl; //2
3 cout << bits._Find_next(2) << endl; //4
4 cout << bits._Find_next(4) << endl; //10 bzw. N
5 bits[x] = 1; //not bits.set(x)!
6 bits[x] = 0; //not bits.reset(x)!
7 bits[x].flip(); //not bits.flip(x)!
```

**1.4 Fenwick Tree**

init baut den Baum auf  $O(n \log(n))$   
 prefix\_sum summe von  $[0, i]$   $O(\log(n))$   
 update addiert ein Delta zu einem Element  $O(\log(n))$

```
1 vector<ll> tree;
2 void update(int i, ll val) {
3     for (i++; i < sz(tree); i += (i & (-i))) tree[i] += val;
4 }
5 void init(int n) {
6     tree.assign(n + 1, 0);
7 }
8 ll prefix_sum(int i) {
9     ll sum = 0;
10    for (i++; i > 0; i -= (i & (-i))) sum += tree[i];
11    return sum;
12 }
```

init baut den Baum auf  $O(n \log(n))$   
 prefix\_sum summe von  $[0, i]$   $O(\log(n))$   
 update addiert ein Delta zu allen Elementen  $[l, r]$   $O(\log(n))$

```
1 vector<ll> add, mul;
2 void update(int l, int r, ll val) {
3     for (int tl = l + 1; tl < sz(add); tl += tl & (-tl))
4         add[tl] += val, mul[tl] -= val * l;
5     for (int tr = r + 1; tr < sz(add); tr += tr & (-tr))
6         add[tr] -= val, mul[tr] += val * r;
7 }
8 void init(vector<ll> v) {
9     mul.assign(sz(v) + 1, 0);
10    add.assign(sz(v) + 1, 0);
11    for (int i = 0; i < sz(v); i++) update(i, i + 1, v[i]);
12 }
13 ll prefix_sum(int i) {
14     ll res = 0; i++;
15     for (int ti = i; ti > 0; ti -= ti & (-ti))
16         res += add[ti] * i + mul[ti];
17     return res;
18 }
```

**1.5 Wavelet Tree**

Constructor baut den Baum auf  $O(n \log(n))$   
 kth sort  $[l, r][k]$   $O(\log(n))$   
 countSmaller Anzahl elemente in  $[l, r]$  kleiner als  $k$   $O(\log(n))$

```
1 struct WaveletTree {
2     using it = vector<ll>::iterator;
3     WaveletTree *ln, *rn;
4     ll lo, hi;
5     vector<int> b;
6 private:
7     WaveletTree(it from, it to, ll x, ll y)
8     : ln(nullptr), rn(nullptr), lo(x), hi(y), b(1) {
9         ll mid = (lo + hi) / 2;
10        auto f = [&](ll x){return x < mid;};
11        for (it c = from; c != to; c++) {
```

```
12        b.push_back(b.back() + f(*c));
13    }
14    if (lo + 1 == hi || from == to) return;
15    it pivot = stable_partition(from, to, f);
16    ln = new WaveletTree(from, pivot, lo, mid);
17    rn = new WaveletTree(pivot, to, mid, hi);
18 }
19 public:
20 WaveletTree(vector<ll> in) : WaveletTree(all(in),
21                                     *min_element(all(in)), *max_element(all(in)) + 1){}
22 // kth element in sort[l, r] all 0-indexed
23 ll kth(int l, int r, int k) {
24     if (l == r || k == r - l) return l;
25     if (lo + 1 == hi) return lo;
26     int inLeft = b[r] - b[l];
27     if (k < inLeft) {
28         return ln->kth(b[l], b[r], k);
29     } else {
30         return rn->kth(l - b[l], r - b[r], k - inLeft);
31     }
32 // count elements in[l, r] smaller than k
33 int countSmaller(int l, int r, ll k) {
34     if (l == r || k == lo) return 0;
35     if (hi == k) return r - l;
36     return ln->countSmaller(b[l], b[r], k) +
37         rn->countSmaller(l - b[l], r - b[r], k);
38 }
39 ~WaveletTree(){
40     delete ln;
41     delete rn;
42 }
43 };
```

**1.6 (Implicit) Treap (Cartesian Tree)**

insert fügt wert  $val$  an stelle  $i$  ein (verschiebt alle Positionen  $\geq i$ )  $O(\log(n))$   
 remove löscht werte  $[i, i + count)$   $O(\log(n))$

```
1 mt19937 rng(0xc4bd5dad);
2 struct Treap {
3     struct Node {
4         ll val;
5         int prio, size = 1, l = -1, r = -1;
6         Node (ll x) : val(x), prio(rng()) {}
7     };
8     vector<Node> treap;
9     int root = -1;
10    int getSize(int v) {
11        return v < 0 ? 0 : treap[v].size;
12    }
13    void upd(int v) {
14        if (v < 0) return;
15        auto *V = &treap[v];
16        V->size = 1 + getSize(V->l) + getSize(V->r);
17        // Update Node Code
18    }
```

```
19 void push(int v) {
20     if (v < 0) return;
21     //auto *V = &treap[v];
22     //if (V->lazy) {
23         // Lazy Propagation Code
24         // if (V->l != 0) treap[V->l].lazy = true;
25         // if (V->r != 0) treap[V->r].lazy = true;
26         // V->lazy = false;
27     }
28 }
29 pair<int, int> split(int v, int k) {
30     if (v < 0) return {-1, -1};
31     auto *V = &treap[v];
32     push(v);
33     if (getSize(V->l) >= k) { // "V->val >= k" for lower_bound(k)
34         auto [left, right] = split(V->l, k);
35         V->l = right;
36         upd(v);
37         return {left, v};
38     } else {
39         // and only "k"
40         auto [left, right] = split(V->r, k - getSize(V->l) - 1);
41         V->r = left;
42         upd(v);
43         return {v, right};
44     }
45 }
46 int merge(int left, int right) {
47     if (left < 0) return right;
48     if (right < 0) return left;
49     if (treap[left].prio < treap[right].prio) {
50         push(left);
51         treap[left].r = merge(treap[left].r, right);
52         upd(left);
53         return left;
54     } else {
55         push(right);
56         treap[right].l = merge(left, treap[right].l);
57         upd(right);
58         return right;
59     }
60 }
61 void insert(int i, ll val) { // and i = val
62     auto [left, right] = split(root, i);
63     treap.emplace_back(val);
64     left = merge(left, sz(treap) - 1);
65     root = merge(left, right);
66 }
67 void remove(int i, int count = 1) {
68     auto [left, t_right] = split(root, i);
69     auto [middle, right] = split(t_right, count);
70     root = merge(left, right);
71 }
// for query use remove and read middle BEFORE remerging
```

## 1.7 Range Minimum Query

init baut Struktur auf  $O(n \log(n))$   
 queryIdempotent Index des Minimums in  $[l, r]$   $O(1)$   
 • better-Funktion muss idempotent sein!

```
1 struct SparseTable {
2     vector<vector<int>> st;
3     vector<ll> *a;
4     bool better(int lidx, int ridx) {
5         return a->at(lidx) <= a->at(ridx);
6     }
7     void init(vector<ll> *vec) {
8         a = vec;
9         st.assign(__lg(sz(*a)) + 1, vector<int>(sz(*a)));
10        for (int i = 0; i < sz(*a); i++) st[0][i] = i;
11        for (int j = 0; (2 <= j) <= sz(*a); j++) {
12            for (int i = 0; i + (2 <= j) <= sz(*a); i++) {
13                st[j + 1][i] = better(st[j][i], st[j][i + (1 <= j)])
14                    ? st[j][i] : st[j][i + (1 <= j)];
15            }
16        }
17        int queryIdempotent(int l, int r) {
18            int j = __lg(r - l); //31 - builtin_clz(r - l);
19            return better(st[j][l], st[j][r - (1 <= j)])
20                ? st[j][l] : st[j][r - (1 <= j)];
21        }
22    };
23 }
```

## 1.8 STL-Tree

```
1 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
2 #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
3 using namespace std; using namespace __gnu_pbds;
4 template<typename T>
5 using Tree = tree<T, null_type, less<T>, rb_tree_tag,
6     tree_order_statistics_node_update>;
7
8 int main() {
9     Tree<int> X;
10    // insert {1, 2, 4, 8, 16}
11    for (int i = 1; i <= 16; i *= 2) X.insert(i);
12    cout << *X.find_by_order(3) << endl; // => 8
13    cout << X.order_of_key(10) << endl;
14    // => 4 = min i, mit X[i] >= 10
15    return 0;
16 }
```

## 1.9 STL-Rope (Implicit Cartesian Tree)

```
1 #include <ext/rope>
2 using namespace __gnu_cxx;
3 rope<int> v; // Wie normaler Container.
4 v.push_back(num); // O(log(n))
5 rope<int> sub = v.substr(start, length); // O(log(n))
6 v.erase(start, length); // O(log(n))
7 v.insert(v.mutable_begin() + offset, sub); // O(log(n))
8 for(auto it = v.mutable_begin(); it != v.mutable_end(); it++)
```

## 1.10 STL HashMap

3 bis 4 mal langsamer als `std::vector` aber 8 bis 9 mal schneller als `std::map`

```
1 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
2 using namespace __gnu_pbds;
3 template<typename T>
4 struct betterHash {
5     size_t operator()(T o) const {
6         size_t h = hash<T>()(o) ^ 42394245; //random value
7         h = ((h >> 16) ^ h) * 0x45d9f3b;
8         h = ((h >> 16) ^ h) * 0x45d9f3b;
9         h = ((h >> 16) ^ h);
10        return h;
11    };
12 };
13 template<typename K, typename V, typename H = betterHash<K>>
14 using hashMap = gp_hash_table<K, V, H>;
15 template<typename K, typename H = betterHash<K>>
16 using hashSet = gp_hash_table<K, null_type, H>;
```

## 1.11 STL Priority Queue

Nicht notwendig, wenn Smaller-Larger-Optimization greift.

```
1 #include <ext/pb_ds/priority_queue.hpp>
2 template<typename T>
3 // greater<T> für Min-Queue
4 using priorityQueue = __gnu_pbds::priority_queue<T, less<T>>;
5
6 int main() {
7     priorityQueue<int> pq;
8     auto it = pq.push(5); // O(1)
9     pq.push(7);
10    pq.pop(); // O(log n) amortisiert
11    pq.modify(it, 6); // O(log n) amortisiert
12    pq.erase(it); // O(log n) amortisiert
13    priorityQueue<int> pq2;
14    pq.join(pq2); // O(1)
15 }
```

## 1.12 Lower/Upper Envelope (Convex Hull Optimization)

Um aus einem lower envelope einen upper envelope zu machen (oder umgekehrt), einfach beim Einfügen der Geraden  $m$  und  $b$  negieren.

```
1 // Lower Envelope mit MONOTONEN Inserts und Queries. Jede neue
2 // Gerade hat kleinere Steigung als alle vorherigen.
3 vector<ll> ms, bs; int ptr = 0;
4 bool bad(int l1, int l2, int l3) {
5     return (bs[l3]-bs[l1])*(ms[l1]-ms[l2]) <
6         (bs[l2]-bs[l1])*(ms[l1]-ms[l3]);
7 }
8 void add(ll m, ll b) { // Laufzeit O(1) amortisiert
9     ms.push_back(m); bs.push_back(b);
10    while (sz(ms) >= 3 && bad(sz(ms)-3, sz(ms)-2, sz(ms)-1)) {
11        ms.erase(ms.end() - 2); bs.erase(bs.end() - 2);
12    }
13    ptr = min(ptr, sz(ms) - 1);
14 }
15 ll get(int idx, ll x) {return ms[idx] * x + bs[idx];}
```

```
16 ll query(ll x) { // Laufzeit: O(1) amortisiert
17     if (ptr >= sz(ms)) ptr = sz(ms) - 1;
18     while (ptr < sz(ms)-1 && get(ptr + 1, x) < get(ptr, x)) ptr++;
19     return get(ptr, x);
20 }
```

1 // Upper Envelope, dynamisch.

```
2 struct Line {
3     ll m, b;
4     mutable function<const Line*> succ;
5     bool operator<(const Line& rhs) const {
6         if (rhs.b != LLONG_MIN) return m < rhs.m;
7         const Line* s = succ();
8         if (!s) return 0;
9         ll x = rhs.m;
10        return b - s->b < (s->m - m) * x;
11    }
12 };
13 struct HullDynamic : public multiset<Line> {
14     bool bad(iterator y) {
15         auto z = next(y);
16         if (y == begin()) {
17             if (z == end()) return 0;
18             return y->m == z->m && y->b <= z->b;
19         }
20         auto x = prev(y);
21         if (z == end()) return y->m == x->m && y->b <= x->b;
22         return (x->b - y->b)*(z->m - y->m) >=
23             (y->b - z->b)*(y->m - x->m);
24     }
25     // Variant 1: niklasb (2015)
26     void insert_line(ll m, ll b) { // Laufzeit: O(log(n))
27         auto y = insert({m, b});
28         y->succ = [=] {return next(y) == end() ? 0 : &*next(y);};
29         if (bad(y)) {erase(y); return;}
30         while (next(y) != end() && bad(next(y))) erase(next(y));
31         while (y != begin() && bad(prev(y))) erase(prev(y));
32     }
33     // Variant 2: barnil20400 (2019)
34     void insert_line(ll m, ll b) {
35         auto y = insert({m, b});
36         if (bad(y)) {erase(y); return;}
37         while (next(y) != end() && bad(next(y))) erase(next(y));
38         y->succ = [=] {return next(y) == end() ? 0 : &*next(y);};
39         while (y != begin() && bad(prev(y))) erase(prev(y));
40         if (y != begin()) prev(y)->succ = [=] {return &*y;};
41     }
42     ll query(ll x) { // Laufzeit: O(log(n))
43         auto l = *lower_bound((Line) {x, LLONG_MIN});
44         return l.m * x + l.b;
45     }
46 };
```

**1.13 Link-Cut-Tree**

Constructor	baut Wald auf	$O(n)$
connected	prüft ob zwei Knoten im selben Baum liegen	$O(\log(n))$
link	fügt $\{x,y\}$ Kante ein	$O(\log(n))$
cut	entfernt $\{x,y\}$ Kante	$O(\log(n))$
lca	berechnet LCA von $x$ und $y$	$O(\log(n))$
query	berechnet query auf den Knoten des $xy$ -Pfades	$O(\log(n))$
modify	erhöht jeden wert auf dem $xy$ -Pfad	$O(\log(n))$

```

1 constexpr ll queryDefault = 0;
2 constexpr ll updateDefault = 0;
3 ll _modify(ll x, ll y) {
4     return x + y;
5 }
6 ll _query(ll x, ll y) {
7     return x + y;
8 }
9 ll _update(ll delta, int length) {
10     if (delta == updateDefault) return updateDefault;
11     //ll result = delta
12     //for (int i=1; i<length; i++) result = _query(result, delta);
13     return delta * length;
14 }
15 //generic:
16 ll joinValueDelta(ll value, ll delta) {
17     if (delta == updateDefault) return value;
18     return _modify(value, delta);
19 }
20 ll joinDeltas(ll delta1, ll delta2) {
21     if (delta1 == updateDefault) return delta2;
22     if (delta2 == updateDefault) return delta1;
23     return _modify(delta1, delta2);
24 }
25 struct LCT {
26     struct Node {
27         ll nodeValue, subTreeValue, delta;
28         bool revert;
29         int id, size;
30         Node *left, *right, *parent;
31
32         Node(int id = 0, int val = queryDefault) :
33             nodeValue(val), subTreeValue(val), delta(updateDefault),
34             revert(false), id(id), size(1),
35             left(nullptr), right(nullptr), parent(nullptr) {}
36
37         bool isRoot() {
38             return !parent || (parent->left != this &&
39                             parent->right != this);
40         }
41
42         void push() {
43             if (revert) {
44                 revert = false;
45                 swap(left, right);
46                 if (left) left->revert ^= 1;
47                 if (right) right->revert ^= 1;
48             }
49             nodeValue = joinValueDelta(nodeValue, delta);

```

```

47     subTreeValue = joinValueDelta(subTreeValue,
48                                   _update(delta, size));
49     if (left) left->delta = joinDeltas(left->delta, delta);
50     if (right) right->delta = joinDeltas(right->delta, delta);
51     delta = updateDefault;
52 }
53 ll getSubtreeValue() {
54     return joinValueDelta(subTreeValue, _update(delta, size));
55 }
56 void update() {
57     subTreeValue = joinValueDelta(nodeValue, delta);
58     size = 1;
59     if (left) {
60         subTreeValue = _query(subTreeValue,
61                               left->getSubtreeValue());
62         size += left->size;
63     }
64     if (right) {
65         subTreeValue = _query(subTreeValue,
66                               right->getSubtreeValue());
67         size += right->size;
68     }
69 };
70 vector<Node> nodes;
71 LCT(int n) : nodes(n) {
72     for (int i = 0; i < n; i++) nodes[i].id = i;
73 }
74 void connect(Node* ch, Node* p, int isLeftChild) {
75     if (ch) ch->parent = p;
76     if (isLeftChild >= 0) {
77         if (isLeftChild) p->left = ch;
78         else p->right = ch;
79     }
80 void rotate(Node* x) {
81     Node* p = x->parent;
82     Node* g = p->parent;
83     bool isRootP = p->isRoot();
84     bool leftChildX = (x == p->left);
85
86     connect(leftChildX ? x->right : x->left, p, leftChildX);
87     connect(p, x, !leftChildX);
88     connect(x, g, isRootP ? -1 : p == g->left);
89     p->update();
90 }
91 void splay(Node* x) {
92     while (!x->isRoot()) {
93         Node* p = x->parent;
94         Node* g = p->parent;
95         if (!p->isRoot()) g->push();
96         p->push();
97         x->push();
98         if (!p->isRoot()) rotate((x == p->left) ==
99                                 (p == g->left) ? p : x);
100         rotate(x);
101     }
102     x->push();

```

```

102     x->update();
103 }
104 Node* expose(Node* x) {
105     Node* last = nullptr;
106     for (Node* y = x; y; y = y->parent) {
107         splay(y);
108         y->left = last;
109         last = y;
110     }
111     splay(x);
112     return last;
113 }
114 void makeRoot(Node* x) {
115     expose(x);
116     x->revert ^= 1;
117 }
118 bool connected(Node* x, Node* y) {
119     if (x == y) return true;
120     expose(x);
121     expose(y);
122     return x->parent;
123 }
124 void link(Node* x, Node* y) {
125     assert(!connected(x, y)); // not yet connected!
126     makeRoot(x);
127     x->parent = y;
128 }
129 void cut(Node* x, Node* y) {
130     makeRoot(x);
131     expose(y);
132     //must be a tree edge!
133     assert(!(y->right != x || x->left != nullptr));
134     y->right->parent = nullptr;
135     y->right = nullptr;
136 }
137 Node* lca(Node* x, Node* y) {
138     assert(connected(x, y));
139     expose(x);
140     return expose(y);
141 }
142 ll query(Node* from, Node* to) {
143     makeRoot(from);
144     expose(to);
145     if (to) return to->getSubtreeValue();
146     return queryDefault;
147 }
148 void modify(Node* from, Node* to, ll delta) {
149     makeRoot(from);
150     expose(to);
151     to->delta = joinDeltas(to->delta, delta);
152 }
153 };

```

### 1.14 Persistent

get berechnet Wert zu Zeitpunkt  $t$   $O(\log(t))$   
 set ändert Wert zu Zeitpunkt  $t$   $O(\log(t))$   
 reset setzt die Datenstruktur auf Zeitpunkt  $t$   $O(1)$

```
1 template<typename T>
2 struct persistent {
3     int& time;
4     vector<pair<int, T>> data;
5     persistent(int& time, T value = {})
6         : time(time), data(1, {time, value}) {}
7     T get(int t) {
8         return prev(upper_bound(all(data),
9                                 pair<int, T>(t+1, {})))->second;
10    }
11    int set(T value) {
12        time+=2;
13        data.push_back({time, value});
14        return time;
15    }
16 };
```

```
1 template<typename T>
2 struct persistentArray{
3     int time = 0;
4     vector<persistent<T>> data;
5     vector<pair<int, int>> mods;
6     persistentArray(int n, T value = {})
7         : time(0), data(n, {time, value}) {}
8     T get(int p, int t) {
9         return data[p].get(t);
10    }
11    int set(int p, T value) {
12        mods.push_back({p, time});
13        return data[p].set(value);
14    }
15    void reset(int t) {
16        while (!mods.empty() && mods.back().second > t) {
17            data[mods.back().first].data.pop_back();
18            mods.pop_back();
19        }
20        time = t;
21    }
22 };
```

## 2 Graphen

### 2.1 DFS

Kantentyp $(v, w)$	$\text{dfs}[v] < \text{dfs}[w]$	$\text{fin}[v] > \text{fin}[w]$	seen[w]
in-tree	true	true	false
forward	true	true	true
backward	false	false	true
cross	false	true	true

### 2.2 Minimale Spannbäume

**Schnitteigenschaft** Für jeden Schnitt  $C$  im Graphen gilt: Gibt es eine Kante  $e$ , die echt leichter ist als alle anderen Schnittkanten, so gehört diese zu allen minimalen Spannbäumen. ( $\Rightarrow$  Die leichteste Kante in einem Schnitt kann in einem minimalen Spannbaum verwendet werden.)

**Kreiseigenschaft** Für jeden Kreis  $K$  im Graphen gilt: Die schwerste Kante auf dem Kreis ist nicht Teil des minimalen Spannbaums.

### 2.3 Kruskal

berechnet den Minimalen Spannbaum  $O(|E| \cdot \log(|E|))$

```
1 sort(all(edges));
2 vector<edge> mst;
3 int cost = 0;
4 for (edge& e : edges) {
5     if (findSet(e.from) != findSet(e.to)) {
6         unionSets(e.from, e.to);
7         mst.push_back(e);
8         cost += e.cost;
9     }
10 }
```

### 2.4 Erdős-Gallai

Sei  $d_1 \geq \dots \geq d_n$ . Es existiert genau dann ein Graph  $G$  mit Degree sequence

$d$  falls  $\sum_{i=1}^n d_i$  gerade ist und für  $1 \leq k \leq n$ :  $\sum_{i=1}^k d_i \leq k \cdot (k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k)$   
 havelHakimi findet Graph  $O((|V|+|E|) \cdot \log(|V|))$

```
1 vector<vector<int>> havelHakimi(const vector<int>& deg) {
2     priority_queue<pair<int, int>> pq;
3     for (int i = 0; i < sz(deg); i++) pq.push({deg[i], i});
4     vector<vector<int>> adj;
5     while (!pq.empty()) {
6         auto v = pq.top(); pq.pop();
7         if (sz(pq) < v.first) return {}; //impossible
8         vector<pair<int, int>> todo;
9         for (int i = 0; i < v.first; i++) {
10             auto u = pq.top(); pq.pop();
11             adj[v.second].push_back(u.second);
12             adj[u.second].push_back(v.second);
13             u.first--;
14             if (u.first > 0) todo.push_back(u);
15         }
16         for (auto e : todo) pq.push(e);
17     }
18     return adj;
19 }
```

### 2.5 Centroids

find\_centroid findet alle Centroids des Baums (maximal 2)  $O(|V|)$

```
1 vector<int> s;
2 void dfs1(int u, int v = -1) {
3     s[u] = 1;
4     for (int w : adj[u]) {
5         if (w == v) continue;
6         dfs1(w, u);
7         s[u] += s[w];
8     }
9 }
```

```
9 pair<int, int> dfs2(int u, int v, int n) {
10     for (int w : adj[u]) {
11         if (2 * s[w] == n) return {u, w};
12         if (w != v && 2 * s[w] > n) return dfs2(w, u, n);
13     }
14     return {u, -1};
15 }
16 pair<int, int> find_centroid(int root) {
17     // s muss nicht initialisiert werden, nur groß genug sein
18     dfs1(root);
19     return dfs2(root, -1, s[root]);
20 }
```

### 2.6 Baum-Isomorphie

getTreeLabel berechnet kanonischen Namen für einen Baum  $O(|V|)$

```
1 vector<vector<vector<int>>>
2 getTreeLabel(const vector<vector<int>>& adj, int root) {
3     vector<vector<int>> level = {{root}};
4     vector<int> dist(sz(adj), -1);
5     dist[root] = 0;
6     queue<int> q;
7     q.push(root);
8     while (!q.empty()) {
9         int c = q.front();
10        q.pop();
11        for (int n : adj[c]) {
12            if (dist[n] < 0) {
13                dist[n] = dist[c] + 1;
14                if (sz(level) <= dist[n]) level.push_back({});
15                level[dist[n]].push_back(n);
16                q.push(n);
17            }
18        }
19        vector<vector<vector<int>>> levelLabels(sz(level));
20        vector<int> shortLabel(sz(adj));
21        for (int l = sz(level) - 1; l >= 0; l--) {
22            vector<pair<vector<int>, int>> tmpLabels;
23            for (int v : level[l]) {
24                vector<int> label;
25                for (int n : adj[v]) {
26                    if (dist[n] > dist[v]) {
27                        label.push_back(shortLabel[n]);
28                    }
29                }
30                sort(all(label));
31                tmpLabels.push_back({label, v});
32            }
33            sort(all(tmpLabels));
34            vector<int>& last = tmpLabels[0].first;
35            int curId = 0;
36            for (auto& e : tmpLabels) {
37                levelLabels[l].push_back(e.first);
38                if (e.first != last) curId++, last = e.first;
39                shortLabel[e.second] = curId;
40            }
41        }
42        return levelLabels;
43    }
```



## 2.7 Kürzeste Wege

### 2.7.1 Algorithmus von DIJKSTRA

dijkstra kürzeste Pfade in Graphen ohne negative Kanten  $O(|E| \cdot \log(|V|))$

```
1 using path = pair<ll, int>; //dist, destination
2
3 void dijkstra(const vector<vector<path>> &adjlist, int start) {
4     priority_queue<path, vector<path>, greater<path>> pq;
5     vector<ll> dist(sz(adjlist), INF);
6     vector<int> prev(sz(adjlist), -1);
7     dist[start] = 0; pq.emplace(0, start);
8
9     while (!pq.empty()) {
10         path front = pq.top(); pq.pop();
11         if (front.first > dist[front.second]) continue; // WICHTIG!
12
13         for (path e : adjlist[front.second]) {
14             ll newDist = front.first + e.first;
15             if (newDist < dist[e.second]) {
16                 dist[e.second] = newDist;
17                 prev[e.second] = front.second;
18                 pq.emplace(newDist, e.second);
19             }
20         }
21     }
22     //return dist, prev;
23 }
```

### 2.7.2 BELLMAN-FORD-Algorithmus

bellmanFord kürzeste Pfade oder negative Kreise finden  $O(|V| \cdot |E|)$

```
1 void bellmanFord(int n, vector<edge> edges, int start) {
2     vector<ll> dist(n, INF), parent(n, -1);
3     dist[start] = 0;
4
5     for (int i = 1; i < n; i++) {
6         for (edge& e : edges) {
7             if (dist[e.from] != INF &&
8                 dist[e.to] > dist[e.from] + e.cost) {
9                 dist[e.to] = dist[e.from] + e.cost;
10                parent[e.to] = e.from;
11            }
12        }
13    }
14
15    for (edge& e : edges) {
16        if (dist[e.from] != INF &&
17            dist[e.to] > dist[e.from] + e.cost) {
18            // Negativer Kreis gefunden.
19        }
20    }
21    //return dist, parent;
22 }
```

### 2.7.3 FLOYD-WARSHALL-Algorithmus

floydWarshall kürzeste Pfade oder negative Kreise finden  $O(|V|^3)$

- $\text{dist}[i][i] = 0$ ,  $\text{dist}[i][j] = \text{edge}[j, i].\text{weight}$  oder  $\text{INF}$
- $i$  liegt auf einem negativen Kreis  $\Leftrightarrow \text{dist}[i][i] < 0$ .

```
1 vector<vector<ll>> dist; // Entfernung zwischen je zwei Punkten.
2 vector<vector<int>> pre;
3
4 void floydWarshall() {
5     pre.assign(sz(dist), vector<int>(sz(dist), -1));
6     for (int i = 0; i < sz(dist); i++) {
7         for (int j = 0; j < sz(dist); j++) {
8             if (dist[i][j] < INF) {
9                 pre[i][j] = j;
10            }
11        }
12    }
13 }
```

```
9     }}}
10 }
11 for (int k = 0; k < sz(dist); k++) {
12     for (int i = 0; i < sz(dist); i++) {
13         for (int j = 0; j < sz(dist); j++) {
14             if (dist[i][j] > dist[i][k] + dist[k][j]) {
15                 dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j];
16                 pre[i][j] = pre[i][k];
17             }
18         }
19     }
20 }
21
22 vector<int> getPath(int u, int v) {
23     //return dist[u][v]; // Pfadlänge u -> v
24     if (pre[u][v] < 0) return {};
25     vector<int> path = {v};
26     while (u != v) path.push_back(u = pre[u][v]);
27     return path; //Pfad u -> v
28 }
```

### 2.7.4 Matrix-Algorithmus

Sei  $d_{ij}$  die Distanzmatrix von  $G$ , dann gibt  $d_{ij}^k$  die kürzeste Distanz von  $i$  nach  $j$  mit maximal  $k$  kanten an mit der Verknüpfung:  $c_{ij} = a_{ij} * b_{ij} = \min\{a_{ik} + b_{kj}\}$   
 Sei  $a_{ij}$  die Adjazenzmatrix von  $G$  (mit  $a_{ii} = 1$ ), dann gibt  $a_{ij}^k$  die Anzahl der Wege von  $i$  nach  $j$  mit Länge genau (maximal)  $k$  an mit der Verknüpfung:  $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij} = \sum a_{ik} + b_{kj}$

### 2.8 Lowest Common Ancestor

init baut DFS-Baum über  $g$  auf  $O(|V| \cdot \log(|V|))$   
 getLCA findet LCA  $O(1)$   
 getDepth berechnet Distanz zur Wurzel im DFS-Baum  $O(1)$

```
1 struct LCA {
2     vector<ll> depth;
3     vector<int> visited, first;
4     int idx;
5     SparseTable st; //sparse table von oben
6
7     void init(vector<vector<int>>& g, int root) {
8         depth.assign(2 * sz(g), 0);
9         visited.assign(2 * sz(g), -1);
10        first.assign(sz(g), 2 * sz(g));
11        idx = 0;
12        visit(g, root);
13        st.init(&depth);
14    }
15
16    void visit(vector<vector<int>>& g, int v, ll d=0, int p=-1) {
17        visited[idx] = v, depth[idx] = d;
18        first[v] = min(idx, first[v]), idx++;
19
20        for (int w : g[v]) {
21            if (first[w] == 2 * sz(g)) {
22                visit(g, w, d + 1, v);
23                visited[idx] = v, depth[idx] = d, idx++;
24            }
25        }
26    }
27
28    int getLCA(int a, int b) {
29        if (first[a] > first[b]) swap(a, b);
30        return visited[st.queryIdempotent(first[a], first[b] + 1)];
31    }
32
33    ll getDepth(int a) {return depth[first[a]];}
34 }
```

## 2.9 Heavy-Light Decomposition

get\_intervals gibt Zerlegung des Pfades von  $u$  nach  $v$   $O(\log(|V|))$

Wichtig: Intervalle sind halboffen

Subbaum unter dem Knoten  $v$  ist das Intervall  $[\text{in}[v], \text{out}[v])$ .

```
1 vector<vector<int>> adj;
2 vector<int> sz, in, out, nxt, par;
3 int t;
4
5 void dfs_sz(int v = 0, int from = -1) {
6     sz[v] = 1;
7     for (auto& u : adj[v]) {
8         if (u != from) {
9             dfs_sz(u, v);
10            sz[v] += sz[u];
11        }
12    }
13    if (adj[v][0] == from || sz[u] > sz[adj[v][0]]) {
14        swap(u, adj[v][0]);
15    }
16 }
17
18 void dfs_hld(int v = 0, int from = -1) {
19     par[v] = from;
20     in[v] = t++;
21     for (int u : adj[v]) {
22         if (u == from) continue;
23         nxt[u] = (u == adj[v][0] ? nxt[v] : u);
24         dfs_hld(u, v);
25     }
26     out[v] = t;
27 }
28
29 void init() {
30     int n = sz(adj);
31     sz.assign(n, 0); in.assign(n, 0); out.assign(n, 0);
32     nxt.assign(n, 0); par.assign(n, -1);
33     t = 0;
34     dfs_sz(); dfs_hld();
35 }
36
37 vector<pair<int, int>> get_intervals(int u, int v) {
38     vector<pair<int, int>> res;
39     while (true) {
40         if (in[v] < in[u]) swap(u, v);
41         if (in[nxt[v]] <= in[u]) {
42             res.emplace_back(in[u], in[v] + 1);
43             return res;
44         }
45         res.emplace_back(in[nxt[v]], in[v] + 1);
46         v = par[nxt[v]];
47     }
48 }
```

## 2.10 Maximal Cliques

bronKerbosch berechnet alle maximalen Cliques  $O(3^{\frac{n}{3}})$   
 addEdge fügt **ungerichtete** Kante ein  $O(1)$

```

1 using bits = bitset<64>;
2 vector<bits> adj, cliques;
3 void addEdge(int a, int b) {
4     if (a != b) adj[a][b] = adj[b][a] = 1;
5 }
6 void bronKerboschRec(bits R, bits P, bits X) {
7     if (!P.any() && !X.any()) {
8         cliques.push_back(R);
9     } else {
10        int q = (P | X)...Find_first();
11        bits cands = P & ~adj[q];
12        for (int i = 0; i < sz(adj); i++) if (cands[i]) {
13            R[i] = 1;
14            bronKerboschRec(P & adj[i], X & adj[i], R);
15            R[i] = P[i] = 0;
16            X[i] = 1;
17        }
18    }
19    void bronKerbosch() {
20        cliques.clear();
21        bronKerboschRec({}, {(1ull << sz(adj)) - 1}, {});
22    }

```

## 2.11 Artikulationspunkte, Brücken und BCC

find berechnet Artikulationspunkte, Brücken und BCC  $O(|V|+|E|)$   
**Wichtig:** isolierte Knoten und Brücken sind keine BCC.

```

1 vector<vector<edge>> adjlist;
2 vector<int> num;
3 int counter, rootCount, root;
4 vector<bool> isArt;
5 vector<edge> bridges, st;
6 vector<vector<edge>> bcc;
7 int dfs(int v, int parent = -1) {
8     int me = num[v] = ++counter, top = me;
9     for (edge& e : adjlist[v]) {
10        if (e.id == parent) {}
11        else if (num[e.to]) {
12            top = min(top, num[e.to]);
13            if (num[e.to] < me) st.push_back(e);
14        } else {
15            if (v == root) rootCount++;
16            int si = sz(st);
17            int up = dfs(e.to, e.id);
18            top = min(top, up);
19            if (up >= me) isArt[v] = true;
20            if (up > me) bridges.push_back(e);
21            if (up <= me) st.push_back(e);
22            if (up == me) {
23                bcc.emplace_back();
24                while (sz(st) > si) {
25                    bcc.back().push_back(st.back());
26                    st.pop_back();
27                }
28            }
29        }
30    }
31    return top;
32 }
33 void find() {
34     root = 0;
35     rootCount = 0;
36     dfs(0);
37     isArt = rootCount > 1;
38 }

```

```

28 return top;
29 }
30 void find() {
31     counter = 0;
32     num.assign(sz(adjlist), 0);
33     isArt.assign(sz(adjlist), false);
34     bridges.clear();
35     st.clear();
36     bcc.clear();
37     for (int v = 0; v < sz(adjlist); v++) {
38         if (!num[v]) {
39             root = v;
40             rootCount = 0;
41             dfs(v);
42             isArt[v] = rootCount > 1;
43         }
44     }
45 }

```

## 2.12 Strongly Connected Components (TARJAN)

scc berechnet starke Zusammenhangskomponenten  $O(|V|+|E|)$

```

1 vector<vector<int>> adjlist;
2 int counter, sccCounter;
3 vector<bool> inStack;
4 vector<vector<int>> sccs;
5 // idx enthält den Index der SCC pro Knoten.
6 vector<int> d, low, idx, s;
7 void visit(int v) {
8     d[v] = low[v] = counter++;
9     s.push_back(v); inStack[v] = true;
10    for (auto u : adjlist[v]) {
11        if (d[u] < 0) {
12            visit(u);
13            low[v] = min(low[v], low[u]);
14        } else if (inStack[u]) {
15            low[v] = min(low[v], low[u]);
16        }
17    }
18    if (d[v] == low[v]) {
19        sccs.push_back({});
20        int u;
21        do {
22            u = s.back(); s.pop_back(); inStack[u] = false;
23            idx[u] = sccCounter;
24            sccs[sccCounter].push_back(u);
25        } while (u != v);
26        sccCounter++;
27    }
28    void scc() {
29        inStack.assign(sz(adjlist), false);
30        d.assign(sz(adjlist), -1);
31        low.assign(sz(adjlist), -1);
32        idx.assign(sz(adjlist), -1);
33        counter = sccCounter = 0;
34        for (int i = 0; i < sz(adjlist); i++) {
35            if (d[i] < 0) visit(i);
36        }
37    }

```

## 2.13 2-SAT

```

1 struct sat2 {
2     int n; // + scc variablen
3     vector<int> sol;
4     sat2(int vars) : n(vars*2), adjlist(vars*2) {};
5     static int var(int i) {return i << 1; // use this!}
6     void addImpl(int a, int b) {
7         adjlist[a].push_back(b);
8         adjlist[1^b].push_back(1^a);
9     }
10    void addEquiv(int a, int b) {addImpl(a, b); addImpl(b, a);}
11    void addOr(int a, int b) {addImpl(1^a, b);}
12    void addXor(int a, int b) {addOr(a, b); addOr(1^a, 1^b);}
13    void addTrue(int a) {addImpl(1^a, a);}
14    void addFalse(int a) {addTrue(1^a);}
15    void addAnd(int a, int b) {addTrue(a); addTrue(b);}
16    void addNand(int a, int b) {addOr(1^a, 1^b);}
17    bool solvable() {
18        scc(); //scc code von oben
19        for (int i = 0; i < n; i += 2) {
20            if (idx[i] == idx[i + 1]) return false;
21        }
22        return true;
23    }
24    void assign() {
25        sol.assign(n, -1);
26        for (int i = 0; i < sccCounter; i++) {
27            if (sol[sccs[i][0]] == -1) {
28                for (int v : sccs[i]) {
29                    sol[v] = 1;
30                    sol[1^v] = 0;
31                }
32            }
33        }
34    }
35 }

```

## 2.14 Global Mincut

stoer\_wagner berechnet globalen Mincut  $O(|V|^2 \cdot \log(|E|))$

merge(a,b) merged Knoten b in Knoten a  $O(|E|)$

**Tipp:** Cut Rekonstruktion mit unionFind für Partitionierung oder vector<bool> für edge id's im cut.

```

1 struct edge {
2     int from, to;
3     ll cap;
4 };
5 vector<vector<edge>> adjlist, tmp;
6 vector<bool> erased;
7 void merge(int a, int b) {
8     tmp[a].insert(tmp[a].end(), all(tmp[b]));
9     tmp[b].clear();
10    erased[b] = true;
11    for (auto& v : tmp) {
12        for (auto& e : v) {
13            if (e.from == b) e.from = a;
14            if (e.to == b) e.to = a;
15        }
16    }
17 }

```

```

16 ll stoer_wagner() {
17     ll res = INF;
18     tmp = adjlist;
19     erased.assign(sz(tmp), false);
20     for (int i = 1; i < sz(tmp); i++) {
21         int s = 0;
22         while (erased[s]) s++;
23         priority_queue<pair<ll, int>> pq;
24         pq.push({0, s});
25         vector<ll> con(sz(tmp));
26         ll cur = 0;
27         vector<pair<ll, int>> state;
28         while (!pq.empty()) {
29             int c = pq.top().second;
30             pq.pop();
31             if (con[c] < 0) continue; //already seen
32             con[c] = -1;
33             for (auto e : tmp[c]) {
34                 if (con[e.to] >= 0) //add edge to cut
35                     con[e.to] += e.cap;
36                 pq.push({con[e.to], e.to});
37                 cur += e.cap;
38             } else if (e.to != c) //remove edge from cut
39                 cur -= e.cap;
40         }
41         state.push_back({cur, c});
42     }
43     int t = state.back().second;
44     state.pop_back();
45     if (state.empty()) return 0; //graph is not connected?!
46     merge(state.back().second, t);
47     res = min(res, state.back().first);
48 }
49 return res;
50 }

```

## 2.15 Max-Flow

### 2.15.1 Push Relabel

maxFlow gut bei sehr dicht besetzten Graphen.  $O(|V|^2 \cdot \sqrt{|E|})$

addEdge fügt eine gerichtete Kante ein  $O(1)$

```

1 struct edge {
2     int from, to;
3     ll f, c;
4 };
5 vector<edge> edges;
6 vector<vector<int>> adjlist, hs;
7 vector<ll> ec;
8 vector<int> cur, H;
9 void addEdge(int from, int to, ll c) {
10     adjlist[from].push_back(sz(edges));
11     edges.push_back({from, to, 0, c});
12     adjlist[to].push_back(sz(edges));
13     edges.push_back({to, from, 0, 0});
14 }
15 void addFlow(int id, ll f) {

```

```

16     if (ec[edges[id].to] == 0 && f > 0)
17         hs[H[edges[id].to]].push_back(edges[id].to);
18     edges[id].f += f;
19     edges[id^1].f -= f;
20     ec[edges[id].to] += f;
21     ec[edges[id].from] -= f;
22 }
23 ll maxFlow(int s, int t) {
24     int n = sz(adjlist);
25     hs.assign(2*n, {});
26     ec.assign(n, 0);
27     cur.assign(n, 0);
28     H.assign(n, 0);
29     H[s] = n;
30     ec[t] = 1; //never set t to active...
31     vector<int> co(2*n);
32     co[0] = n - 1;
33     for (int id : adjlist[s]) addFlow(id, edges[id].c);
34     for (int hi = 0;;) {
35         while (hs[hi].empty()) if (!hi--) return -ec[s];
36         int u = hs[hi].back();
37         hs[hi].pop_back();
38         while (ec[u] > 0) {
39             if (cur[u] == sz(adjlist[u])) {
40                 H[u] = 2*n;
41                 for (int i = 0; i < sz(adjlist[u]); i++) {
42                     int id = adjlist[u][i];
43                     if (edges[id].c - edges[id].f > 0 &&
44                         H[u] > H[edges[id].to] + 1) {
45                         H[u] = H[edges[id].to] + 1;
46                         cur[u] = i;
47                     }
48                 }
49                 co[H[u]]++;
50                 if (!--co[hi] && hi < n) {
51                     for (int i = 0; i < n; i++) {
52                         if (hi < H[i] && H[i] < n) {
53                             co[H[i]]--;
54                             H[i] = n + 1;
55                         }
56                     }
57                 }
58                 hi = H[u];
59             } else {
60                 auto e = edges[adjlist[u][cur[u]]];
61                 if (e.c - e.f > 0 && H[u] == H[e.to] + 1) {
62                     addFlow(adjlist[u][cur[u]], min(ec[u], e.c - e.f));
63                     } else {
64                         cur[u]++;
65                     }
66             }
67         }
68     }
69 }

```

### 2.15.2 Dinic's Algorithm mit Capacity Scaling

maxFlow doppelt so schnell wie Ford Fulkerson  $O(|V|^2 \cdot |E|)$

addEdge fügt eine gerichtete Kante ein  $O(1)$

```

1 struct edge {
2     int from, to;
3     ll f, c;
4 };
5 vector<edge> edges;

```

```

6 vector<vector<int>> adjlist;
7 int s, t;
8 vector<int> pt, dist;
9 ll flow, lim;
10 queue<int> q;
11 void addEdge(int from, int to, ll c) {
12     adjlist[from].push_back(sz(edges));
13     edges.push_back({from, to, 0, c});
14     adjlist[to].push_back(sz(edges));
15     edges.push_back({to, from, 0, 0});
16 }
17 bool bfs() {
18     dist.assign(sz(dist), -1);
19     dist[t] = sz(adjlist) + 1;
20     q.push(t);
21     while (!q.empty() && dist[s] < 0) {
22         int cur = q.front(); q.pop();
23         for (int id : adjlist[cur]) {
24             int to = edges[id].to;
25             if (dist[to] < 0 &&
26                 edges[id ^ 1].c - edges[id ^ 1].f >= lim) {
27                 dist[to] = dist[cur] - 1;
28                 q.push(to);
29             }
30         }
31         while (!q.empty()) q.pop();
32         return dist[s] >= 0;
33 }
34 bool dfs(int v, ll flow) {
35     if (flow == 0) return false;
36     if (v == t) return true;
37     for (; pt[v] < sz(adjlist[v]); pt[v]++) {
38         int id = adjlist[v][pt[v]], to = edges[id].to;
39         if (dist[to] == dist[v] + 1 &&
40             edges[id].c - edges[id].f >= flow) {
41             if (dfs(to, flow)) {
42                 edges[id].f += flow;
43                 edges[id ^ 1].f -= flow;
44                 return true;
45             }
46         }
47     }
48     return false;
49 }
50 ll maxFlow(int source, int target) {
51     s = source;
52     t = target;
53     flow = 0;
54     dist.resize(sz(adjlist));
55     for (lim = (1LL << 62); lim >= 1; lim /= 2) {
56         if (!bfs()) {lim /= 2; continue;}
57         pt.assign(sz(adjlist), 0);
58         while (dfs(s, lim)) flow += lim;
59     }
60     return flow;
61 }

```



## 2.16 Min-Cost-Max-Flow

mincostflow berechnet Fluss  $O(|V|^2 \cdot |E|^2)$

```

1 constexpr ll INF = 1LL << 60; // Größer als der maximale Fluss.
2 struct MinCostFlow {
3     struct edge {
4         int to;
5         ll f, cost;
6     };
7     vector<edge> edges;
8     vector<vector<int>> adjlist;
9     vector<int> pref, con;
10    vector<ll> dist;
11
12    const int s, t;
13    ll maxflow, mincost;
14
15    MinCostFlow(int n, int source, int target) :
16        adjlist(n), s(source), t(target) {}
17
18    void addedge(int u, int v, ll c, ll cost) {
19        adjlist[u].push_back(sz(edges));
20        edges.push_back({v, c, cost});
21        adjlist[v].push_back(sz(edges));
22        edges.push_back({u, 0, -cost});
23    }
24
25    bool SPFA() {
26        pref.assign(sz(adjlist), -1);
27        dist.assign(sz(adjlist), INF);
28        vector<bool> inqueue(sz(adjlist));
29        queue<int> queue;
30
31        dist[s] = 0; queue.push(s);
32        pref[s] = s; inqueue[s] = true;
33
34        while (!queue.empty()) {
35            int cur = queue.front(); queue.pop();
36            inqueue[cur] = false;
37            for (int id : adjlist[cur]) {
38                int to = edges[id].to;
39                if (edges[id].f > 0 &&
40                    dist[to] > dist[cur] + edges[id].cost) {
41                    dist[to] = dist[cur] + edges[id].cost;
42                    pref[to] = cur; con[to] = id;
43                    if (!inqueue[to]) {
44                        inqueue[to] = true; queue.push(to);
45                    }
46                }
47            }
48            return pref[t] != -1;
49        }
50
51        void extend() {
52            ll w = INF;
53            for (int u = t; pref[u] != u; u = pref[u])
54                w = min(w, edges[con[u]].f);
55            maxflow += w;
56            mincost += dist[t] * w;
57            for (int u = t; pref[u] != u; u = pref[u]) {
58                edges[con[u]].f -= w;
59                edges[con[u] ^ 1].f += w;
60            }
61        }
62
63        void mincostflow() {

```

```

53     con.assign(sz(adjlist), 0);
54     maxflow = mincost = 0;
55     while (SPFA()) extend();
56 }
57 };

```

## 2.17 Maximal Cardinality Bipartite Matching

kuhn berechnet Matching  $O(|V| \cdot \min(ans^2, |E|))$

• die ersten  $[0..n)$  Knoten in adjlist sind die linke Seite des Graphen

```

1 vector<vector<int>> adjlist;
2 vector<int> pairs; // Der gematchte Knoten oder -1.
3 vector<bool> visited;
4
5 bool dfs(int v) {
6     if (visited[v]) return false;
7     visited[v] = true;
8     for (auto w : adjlist[v]) if (pairs[w] < 0 || dfs(pairs[w])) {
9         pairs[w] = v; pairs[v] = w; return true;
10    }
11    return false;
12 }
13
14 int kuhn(int n) { // n = #Knoten links.
15     pairs.assign(sz(adjlist), -1);
16     int ans = 0;
17     // Greedy Matching. Optionale Beschleunigung.
18     for (int i = 0; i < n; i++) for (auto w : adjlist[i])
19         if (pairs[w] < 0) {pairs[i] = w; pairs[w] = i; ans++; break;}
20     for (int i = 0; i < n; i++) if (pairs[i] < 0) {
21         visited.assign(n, false);
22         ans += dfs(i);
23     }
24     return ans; // Größe des Matchings.
25 }

```

hopcroft\_karp berechnet Matching  $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$

```

1 vector<vector<int>> adjlist;
2 // pairs ist der gematchte Knoten oder -1
3 vector<int> pairs, dist;
4
5 bool bfs(int n) {
6     queue<int> q;
7     for (int i = 0; i < n; i++) {
8         if (pairs[i] < 0) {dist[i] = 0; q.push(i);}
9         else dist[i] = -1;
10    }
11    while (!q.empty()) {
12        int u = q.front(); q.pop();
13        for (int v : adjlist[u]) {
14            if (pairs[v] < 0) return true;
15            if (dist[pairs[v]] < 0) {
16                dist[pairs[v]] = dist[u] + 1;
17                q.push(pairs[v]);
18            }
19        }
20    }
21    return false;
22 }
23
24 bool dfs(int u) {
25     for (int v : adjlist[u]) {

```

```

22     if (pairs[v] < 0 ||
23         (dist[pairs[v]] > dist[u] && dfs(pairs[v]))) {
24         pairs[v] = u; pairs[u] = v;
25         return true;
26     }
27     dist[u] = -1;
28     return false;
29 }
30
31 int hopcroft_karp(int n) { // n = #Knoten links
32     int ans = 0;
33     pairs.assign(sz(adjlist), -1);
34     dist.resize(n);
35     // Greedy Matching, optionale Beschleunigung.
36     for (int i = 0; i < n; i++) for (int w : adjlist[i])
37         if (pairs[w] < 0) {pairs[i] = w; pairs[w] = i; ans++; break;}
38     while (bfs(n)) for (int i = 0; i < n; i++)
39         if (pairs[i] < 0) ans += dfs(i);
40     return ans;
41 }

```

## 2.18 Maximum Weight Bipartite Matching

match berechnet Matching  $O(|V|^3)$

```

1 double costs[N_LEFT][N_RIGHT];
2 // Es muss l<=r sein! (sonst Endlosschleife)
3 double match(int l, int r) {
4     vector<double> lx(l), ly(r);
5     //xy is matching from l->r, yx from r->l, or -1
6     vector<int> xy(l, -1), yx(r, -1), augmenting(r);
7     vector<bool> s(l);
8     vector<pair<double, int>> slack(r);
9
10    for (int x = 0; x < l; x++)
11        lx[x] = *max_element(costs[x], costs[x] + r);
12    for (int root = 0; root < l; root++) {
13        augmenting.assign(r, -1);
14        s[root] = true;
15        for (int y = 0; y < r; y++) {
16            slack[y] = {lx[root] + ly[y] - costs[root][y], root};
17        }
18        int y = -1;
19        while (true) {
20            double delta = INF;
21            int x = -1;
22            for (int yy = 0; yy < r; yy++) {
23                if (augmenting[yy] < 0) {
24                    if (slack[yy].first < delta) {
25                        delta = slack[yy].first;
26                        x = slack[yy].second;
27                        y = yy;
28                    }
29                }
30            }
31            if (delta > 0) {
32                for (int x = 0; x < l; x++) if (s[x]) lx[x] -= delta;
33                for (int y = 0; y < r; y++) {
34                    if (augmenting[y] >= 0) ly[y] += delta;
35                    else slack[y].first -= delta;
36                }

```

```

35 augmenting[y] = x;
36 x = yx[y];
37 if (x == -1) break;
38 s[x] = true;
39 for (int y = 0; y < r; y++) {
40     if (augmenting[y] < 0) {
41         double alt = lx[x] + ly[y] - costs[x][y];
42         if (slack[y].first > alt) {
43             slack[y] = {alt, x};
44         }
45     }
46     while (y >= 0) {
47         // Jede Iteration vergrößert Matching um 1
48         // (können 0-Kanten sein!)
49         int x = augmenting[y];
50         int prec = xy[x];
51         yx[y] = x;
52         xy[x] = y;
53         y = prec;
54     }
55     // Wert des Matchings
56     return accumulate(all(lx), 0.0) +
57         accumulate(all(ly), 0.0);
58 }

```

## 2.19 Wert des maximalen Matchings

Fehlerwahrscheinlichkeit:  $\left(\frac{m}{MOD}\right)^I$

```

1 constexpr int MOD=1000000007, I=10;
2 vector<vector<ll>> adjlist, mat;
3 int gauss(int n, ll p) {
4     int rank = n;
5     for (int line = 0; line < n; line++) {
6         int swappee = line;
7         while (swappee < n && mat[swappee][line] == 0) swappee++;
8         if (swappee == n) {rank--; continue;}
9         swap(mat[line], mat[swappee]);
10        ll factor = powMod(mat[line][line], p - 2, p);
11        for (int i = 0; i < n; i++) {
12            mat[line][i] *= factor;
13            mat[line][i] %= p;
14        }
15        for (int i = 0; i < n; i++) {
16            if (i == line) continue;
17            ll diff = mat[i][line];
18            for (int j = 0; j < n; j++) {
19                mat[i][j] -= (diff * mat[line][j]) % p;
20                mat[i][j] %= p;
21                if (mat[i][j] < 0) mat[i][j] += p;
22            }
23        }
24        return rank;
25    }
26    int max_matching() {
27        int ans = 0;
28        mat.assign(sz(adjlist), vector<ll>(sz(adjlist)));
29        for (int _ = 0; _ < I; ++_) {
30            for (int i = 0; i < sz(adjlist); i++) {
31                mat[i].assign(sz(adjlist), 0);

```

```

31 for (int j : adjlist[i]) {
32     if (j < i) {
33         mat[i][j] = rand() % (MOD - 1) + 1;
34         mat[j][i] = MOD - mat[i][j];
35     }
36     ans = max(ans, gauss(sz(adjlist), MOD)/2);
37 }
38 return ans;
39 }

```

## 2.20 Allgemeines maximales Matching

match berechnet allgemeines Matching  $O(|E| \cdot |V| \cdot \log(|V|))$

```

1 struct GM {
2     vector<vector<int>> adjlist;
3     // pairs ist der gematchte knoten oder n
4     vector<int> pairs, first, que;
5     vector<pair<int, int>> label;
6     int head, tail;
7     GM(int n) : adjlist(n), pairs(n + 1, n), first(n + 1, n),
8         que(n), label(n + 1, {-1, -1}) {}
9     void rematch(int v, int w) {
10        int t = pairs[v]; pairs[v] = w;
11        if (pairs[t] != v) return;
12        if (label[v].second == -1) {
13            pairs[t] = label[v].first;
14            rematch(pairs[t], t);
15        } else {
16            int x = label[v].first;
17            int y = label[v].second;
18            rematch(x, y);
19            rematch(y, x);
20        }
21    }
22    int findFirst(int u) {
23        return label[first[u]].first < 0 ? first[u]
24            : first[u] = findFirst(first[u]);
25    }
26    void relabel(int x, int y) {
27        int r = findFirst(x);
28        int s = findFirst(y);
29        if (r == s) return;
30        auto h = label[r] = label[s] = {-x, y};
31        int join;
32        while (true) {
33            if (s != sz(adjlist)) swap(r, s);
34            r = findFirst(label[pairs[r]].first);
35            if (label[r] == h) {
36                join = r;
37                break;
38            } else {
39                label[r] = h;
40            }
41        }
42        for (int v : {first[x], first[y]}) {
43            for (; v != join; v = first[label[pairs[v]].first]) {
44                label[v] = {x, y};
45                first[v] = join;

```

```

44        que[tail++] = v;
45    }
46    bool augment(int u) {
47        label[u] = {sz(adjlist), -1};
48        first[u] = sz(adjlist);
49        head = tail = 0;
50        for (que[tail++] = u; head < tail;) {
51            int x = que[head++];
52            for (int y : adjlist[x]) {
53                if (pairs[y] == sz(adjlist) && y != u) {
54                    pairs[y] = x;
55                    rematch(x, y);
56                    return true;
57                } else if (label[y].first >= 0) {
58                    relabel(x, y);
59                } else if (label[pairs[y]].first == -1) {
60                    label[pairs[y]].first = x;
61                    first[pairs[y]] = y;
62                    que[tail++] = pairs[y];
63                }
64            }
65            return false;
66        }
67        int match() {
68            int matching = head = tail = 0;
69            for (int u = 0; u < sz(adjlist); u++) {
70                if (pairs[u] < sz(adjlist) || !augment(u)) continue;
71                matching++;
72                for (int i = 0; i < tail; i++)
73                    label[que[i]] = label[pairs[que[i]]] = {-1, -1};
74                label[sz(adjlist)] = {-1, -1};
75            }
76            return matching;
77        }
78    };

```

## 2.21 Cycle Counting

findBase berechnet Basis  $O(|V| \cdot |E|)$

count zählt Zykel  $O(2^{\lfloor \log(|V|) \rfloor})$

• jeder Zyklus ist das xor von einträgen in base.

```

1 constexpr int maxEdges = 128;
2 using cycle = bitset<maxEdges>;
3 struct cylces {
4     vector<vector<pair<int, int>>> adj;
5     vector<bool> seen;
6     vector<cycle> paths, base;
7     vector<pair<int, int>> edges;
8     cylces(int n) : adj(n), seen(n), paths(n) {}
9     void addEdge(int a, int b) {
10        adj[a].push_back({b, sz(edges)});
11        adj[b].push_back({a, sz(edges)});
12        edges.push_back({a, b});
13    }
14    void addBase(cycle cur) {
15        for (cycle o : base) {
16            o ^= cur;

```

```

17 if (o._Find_first() > cur._Find_first()) cur = o;
18 }
19 if (cur.any()) base.push_back(cur);
20 }
21 void findBase(int c = 0, int p = -1, cycle cur = {}) {
22     if (adj.empty()) return;
23     if (seen[c]) {
24         addBase(cur ^ paths[c]);
25     } else {
26         seen[c] = true;
27         paths[c] = cur;
28         for (auto e : adj[c]) {
29             if (e.first == p) continue;
30             cur[e.second].flip();
31             findBase(e.first, c, cur);
32             cur[e.second].flip();
33         }
34     }
35     //cycle must be constructed from base
36     bool isCycle(cycle cur) {
37         if (cur.none()) return false;
38         init(sz(adj)); // union find
39         for (int i = 0; i < sz(edges); i++) {
40             if (cur[i]) {
41                 cur[i] = false;
42                 if (findSet(edges[i].first) ==
43                     findSet(edges[i].second)) break;
44                 unionSets(edges[i].first, edges[i].second);
45             }
46         }
47         return cur.none();
48     }
49     int count() {
50         findBase();
51         int res = 0;
52         for (int i = 1; i < (1 << sz(base)); i++) {
53             cycle cur;
54             for (int j = 0; j < sz(base); j++) {
55                 if (((i >> j) & 1) != 0) cur ^= base[j];
56                 if (isCycle(cur)) res++;
57             }
58         }
59         return res;
60     }
61 }

```

## 2.22 Eulertouren

euler berechnet den Kreis  $O(|V|+|E|)$

```

1 vector<vector<int>> idx;
2 vector<int> to, validIdx, cycle;
3 vector<bool> used;
4
5 void addEdge(int a, int b) {
6     idx[a].push_back(sz(to));
7     to.push_back(b);
8     used.push_back(false);
9     idx[b].push_back(sz(to)); // für ungerichtet
10    to.push_back(a);
11    used.push_back(false);

```

```

11 }
12 void euler(int n) { // init idx und validIdx
13     for (; validIdx[n] < sz(idx[n]); validIdx[n]++) {
14         if (!used[idx[n][validIdx[n]]]) {
15             int nn = to[idx[n][validIdx[n]]];
16             used[idx[n][validIdx[n]]] = true;
17             used[idx[n][validIdx[n]] ^ 1] = true; // für ungerichtet
18             euler(nn);
19         }
20     }
21     cycle.push_back(n); // Zyklus in umgekehrter Reihenfolge.

```

- Zyklus existiert, wenn jeder Knoten geraden Grad hat (ungerichtet), bei jedem Knoten Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen (gerichtet).
- Pfad existiert, wenn genau {0,2} Knoten ungeraden Grad haben (ungerichtet), bei allen Knoten Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen oder einer eine Ausgangskante mehr hat (Startknoten) und einer eine Eingangskante mehr hat (Endknoten).
- Je nach Aufgabenstellung überprüfen, wie ein unzusammenhängender Graph interpretiert werden sollen.
- Wenn eine bestimmte Sortierung verlangt wird oder Laufzeit vernachlässigbar ist, ist eine Implementierung mit einem `vector<set<int>>` adjlist leichter
- Wichtig: Algorithmus schlägt nicht fehl, falls kein Eulerzyklus existiert. Die Existenz muss separat geprüft werden.

## 2.23 Dynamic Connectivity

Constructor erzeugt Baum ( $n$  Knoten,  $m$  updates)  $O(n+m)$   
 addEdge fügt Kante ein, id=delete Zeitpunkt  $O(\log(n))$   
 eraseEdge entfernt Kante id  $O(\log(n))$

```

1 struct connect {
2     int n;
3     vector<pair<int, int>> edges;
4     LCT lct; // min LCT no updates required
5
6     connect(int n, int m) : n(n), edges(m), lct(n+m) {}
7
8     bool connected(int a, int b) {
9         return lct.connected(&lct.nodes[a], &lct.nodes[b]);
10    }
11
12    void addEdge(int a, int b, int id) {
13        lct.nodes[id + n] = LCT::Node(id + n, id + n);
14        edges[id] = {a, b};
15        if (connected(a, b)) {
16            int old = lct.query(&lct.nodes[a], &lct.nodes[b]);
17            if (old < id) eraseEdge(old);
18        }
19        if (!connected(a, b)) {
20            lct.link(&lct.nodes[a], &lct.nodes[id + n]);
21            lct.link(&lct.nodes[b], &lct.nodes[id + n]);
22        }
23    }
24
25    void eraseEdge(int id) {
26        if (connected(edges[id].first, edges[id].second) &&
27            lct.query(&lct.nodes[edges[id].first],
28                &lct.nodes[edges[id].second]) == id) {
29            lct.cut(&lct.nodes[edges[id].first], &lct.nodes[id + n]);
30            lct.cut(&lct.nodes[edges[id].second], &lct.nodes[id + n]);
31        }
32    }
33 }

```

## 3 Geometrie

### 3.1 Closest Pair

shortestDist kürzester Abstand zwischen Punkten  $O(n \log(n))$

```

1 bool compY(pt a, pt b) {
2     return (imag(a) == imag(b)) ? real(a) < real(b)
3         : imag(a) < imag(b);
4 }
5
6 bool compX(pt a, pt b) {
7     return (real(a) == real(b)) ? imag(a) < imag(b)
8         : real(a) < real(b);
9 }
10
11 double shortestDist(vector<pt>& pts) { // sz(pts) > 1
12     set<pt, bool*>(pt, pt)> status(compY);
13     sort(all(pts), compX);
14     double opt = 1.0/0.0, sqrtOpt = 1.0/0.0;
15     auto left = pts.begin(), right = pts.begin();
16     status.insert(*right); right++;
17
18     while (right != pts.end()) {
19         if (left != right &&
20             abs(real(*left - *right)) >= sqrtOpt) {
21             status.erase(*left);
22             left++;
23         } else {
24             auto lower = status.lower_bound({-1.0/0.0, // -INF
25                 imag(*right) - sqrtOpt});
26             auto upper = status.upper_bound({-1.0/0.0, // -INF
27                 imag(*right) + sqrtOpt});
28
29             for (; lower != upper; lower++) {
30                 double cand = norm(*right - *lower);
31                 if (cand < opt) {
32                     opt = cand;
33                     sqrtOpt = sqrt(opt);
34                 }
35             }
36             status.insert(*right);
37             right++;
38         }
39     }
40     return sqrtOpt;
41 }

```

### 3.2 Rotating calipers

antipodalPoints berechnet antipodale Punkte  $O(n)$

WICHTIG: Punkte müssen gegen den Uhrzeigersinn Sortiert sein und konvexes Polygon bilden!

```

1 vector<pair<int, int>> antipodalPoints(vector<pt>& h) {
2     if (sz(h) < 2) return {};
3     vector<pair<int, int>> result;
4     for (int i = 0, j = 1; i < j; i++) {
5         while (true) {
6             result.push_back({i, j});
7             if (cross(h[(i + 1) % sz(h)] - h[i],
8                 h[(j + 1) % sz(h)] - h[j]) <= 0) break;
9             j = (j + 1) % sz(h);
10        }
11    }
12    return result;

```

### 3.3 Konvexe Hülle

convexHull berechnet Konvexehülle  $O(n \log(n))$

- Konvexehülle gegen den Uhrzeigersinn Sortiert
- nur Eckpunkte enthalten (für alle Punkte = im CCW Test entfernen)
- Erster und Letzter Punkt sind identisch

```
1 vector<pt> convexHull(vector<pt> pts){
2     sort(all(pts), [](const pt& a, const pt& b){
3         return real(a) == real(b) ? imag(a) < imag(b)
4             : real(a) < real(b);
5     });
6     pts.erase(unique(all(pts)), pts.end());
7     int k = 0;
8     vector<pt> h(2 * sz(pts));
9     for (int i = 0; i < sz(pts); i++) { // Untere Hülle.
10         while (k > 1 && cross(h[k-2], h[k-1], pts[i]) <= 0) k--;
11         h[k++] = pts[i];
12     }
13     for (int i = sz(pts)-2, t = k; i >= 0; i--) { // Obere Hülle.
14         while (k > t && cross(h[k-2], h[k-1], pts[i]) <= 0) k--;
15         h[k++] = pts[i];
16     }
17     h.resize(k);
18     return h;
19 }
```

### 3.4 Formeln – std::complex

```
1 // Komplexe Zahlen als Punkte. Wenn immer möglich complex<ll>
2 // verwenden. Funktionen wie abs() geben dann aber ll zurück.
3 using pt = complex<double>;
4 constexpr double PIU = acos(-1.0l); //  $\pi < \text{PI} < \text{PIU}$ 
5 constexpr double PIL = PIU-2e-19l;
6 // Winkel zwischen Punkt und x-Achse in  $[-\pi, \pi]$ .
7 double angle(pt a) {return arg(a);}
8 // rotiert Punkt im Uhrzeigersinn um den Ursprung.
9 pt rotate(pt a, double theta) {return a * polar(1.0, theta);}
10 // Skalarprodukt.
11 double dot(pt a, pt b) {return real(conj(a) * b);}
12 //  $abs()^2$ . (pre c++20)
13 double norm(pt a) {return dot(a, a);}
14 // Kreuzprodukt, 0, falls kollinear.
15 double cross(pt a, pt b) {return imag(conj(a) * b);}
16 double cross(pt p, pt a, pt b) {return cross(a - p, b - p);}
17 // 1 => c links von a->b
18 // 0 => a, b und c kollinear
19 // -1 => c rechts von a->b
20 int orientation(pt a, pt b, pt c) {
21     double orien = cross(b - a, c - a);
22     return (orien > EPS) - (orien < -EPS);
23 }
24 // Liegt d in der gleichen Ebene wie a, b, und c?
25 bool isCoplanar(pt a, pt b, pt c, pt d) {
26     return abs((b - a) * (c - a) * (d - a)) < EPS;
27 }
```

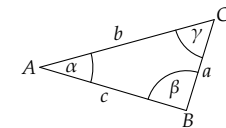
```
28 // identifiziert winkel zwischen Vektoren u und v
29 pt uniqueAngle(pt u, pt v) {
30     pt tmp = v * conj(u);
31     ll g = abs(gcd(real(tmp), imag(tmp)));
32     return tmp / g;
33 }
```

```
1 // Test auf Streckenschnitt zwischen a-b und c-d.
2 bool lineSegmentIntersection(pt a, pt b, pt c, pt d) {
3     if (orientation(a, b, c) == 0 && orientation(a, b, d) == 0)
4         return pointOnLineSegment(a,b,c) ||
5             pointOnLineSegment(a,b,d) ||
6             pointOnLineSegment(c,d,a) ||
7             pointOnLineSegment(c,d,b);
8     return orientation(a, b, c) * orientation(a, b, d) <= 0 &&
9         orientation(c, d, a) * orientation(c, d, b) <= 0;
10 }
11 // Berechnet die Schnittpunkte der Strecken p0-p1 und p2-p3.
12 // Enthält entweder keinen Punkt, den einzigen Schnittpunkt
13 // oder die Endpunkte der Schnittstrecke.
14 vector<pt> lineSegmentIntersection(pt p0, pt p1, pt p2, pt p3) {
15     double a = cross(p1 - p0, p3 - p2);
16     double b = cross(p2 - p0, p3 - p2);
17     double c = cross(p1 - p0, p0 - p2);
18     if (a < 0) {a = -a; b = -b; c = -c;}
19     if (b < -EPS || a-b < -EPS ||
20         c < -EPS || a-c < -EPS) return {};
21     if (a > EPS) return {p0 + b/a*(p1 - p0)};
22     vector<pt> result;
23     auto insertUnique = [&](pt p) {
24         for (auto q: result) if (abs(p - q) < EPS) return;
25         result.push_back(p);
26     };
27     if (dot(p2-p0, p3-p0) < EPS) insertUnique(p0);
28     if (dot(p2-p1, p3-p1) < EPS) insertUnique(p1);
29     if (dot(p0-p2, p1-p2) < EPS) insertUnique(p2);
30     if (dot(p0-p3, p1-p3) < EPS) insertUnique(p3);
31     return result;
32 }
33 // Entfernung von Punkt p zur Geraden a-b. 2d und 3d
34 double distToLine(pt a, pt b, pt p) {
35     return abs(cross(p - a, b - a)) / abs(b - a);
36 }
37 // Projektiert p auf die Gerade a-b
38 pt projectToLine(pt a, pt b, pt p) {
39     return a + (b - a) * dot(p - a, b - a) / norm(b - a);
40 }
41 // Liegt p auf der Geraden a-b? 2d und 3d
42 bool pointOnLine(pt a, pt b, pt p) {
43     return cross(a, b, p) == 0;
44 }
45 // Test auf Linienschnitt zwischen a-b und c-d.
46 bool lineIntersection(pt a, pt b, pt c, pt d) {
47     return abs(cross(a - b, c - d)) < EPS;
48 }
```

```
49 // Berechnet den Schnittpunkt der Geraden p0-p1 und p2-p3.
50 // die Geraden dürfen nicht parallel sein!
51 pt lineIntersection(pt p0, pt p1, pt p2, pt p3) {
52     double a = cross(p1 - p0, p3 - p2);
53     double b = cross(p2 - p0, p3 - p2);
54     return {p0 + b/a*(p1 - p0)};
55 }
56 // Liegt p auf der Strecke a-b?
57 bool pointOnLineSegment(pt a, pt b, pt p) {
58     if (cross(a, b, p) != 0) return false;
59     double dist = norm(a - b);
60     return norm(a - p) <= dist && norm(b - p) <= dist;
61 }
62 // Entfernung von Punkt p zur Strecke a-b.
63 double distToSegment(pt a, pt b, pt p) {
64     if (a == b) return abs(p - a);
65     if (dot(p - a, b - a) <= 0) return abs(p - a);
66     if (dot(p - b, b - a) >= 0) return abs(p - b);
67     return distToLine(a, b, p);
68 }
69 // Kürzeste Entfernung zwischen den Strecken a-b und c-d.
70 double distBetweenSegments(pt a, pt b, pt c, pt d) {
71     if (lineSegmentIntersection(a, b, c, d)) return 0.0;
72     return min({distToSegment(a, b, c), distToSegment(a, b, d),
73         distToSegment(c, d, a), distToSegment(c, d, b)});
74 }
75 // sortiert alle Punkte pts auf einer Linie entsprechend dir
76 void sortLine(pt dir, vector<pt>& pts) { // (2d und 3d)
77     sort(all(pts), [&](pt a, pt b){
78         return dot(dir, a) < dot(dir, b);
79     });
80 }
```

Generell:

- $\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
- $b = \frac{a}{\sin(\alpha)} \sin(\beta)$
- $\Delta = \frac{bc}{2} \sin(\alpha)$



$\beta = 90^\circ$ :

- $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$
- $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$
- $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$

```
1 // Mittelpunkt des Dreiecks abc.
2 pt centroid(pt a, pt b, pt c) {return (a + b + c) / 3.0;}
3 // Flächeninhalt eines Dreiecks bei bekannten Eckpunkten.
4 double area(pt a, pt b, pt c) {
5     return abs(cross(b - a, c - a)) / 2.0;
6 }
7 // Flächeninhalt eines Dreiecks bei bekannten Seitenlängen.
8 double area(double a, double b, double c) {
9     double s = (a + b + c) / 2.0;
10    return sqrt(s * (s-a) * (s-b) * (s-c));
11 }
12 // Zentrum des größten Kreises im Dreiecke
13 pt inCenter(pt a, pt b, pt c) {
14     double x = abs(a-b), y = abs(b-c), z = abs(a-c);
15     return (y*a + z*b + x*c) / (x+y+z);
16 }
```

```

17 // Zentrum des Kreises durch alle Eckpunkte
18 pt outCenter(pt a, pt b, pt c) {
19     double d = 2.0 * (real(a) * imag(b-c) +
20         real(b) * imag(c-a) +
21         real(c) * imag(a-b));
22     return (a*conj(a)*conj(b-c) +
23         b*conj(b)*conj(c-a) +
24         c*conj(c)*conj(a-b)) / d;
25 }
26 // Sind die Dreiecke a1, b1, c1, and a2, b2, c2 ähnlich?
27 // Erste Zeile testet Ähnlichkeit mit gleicher Orientierung,
28 // zweite Zeile testet Ähnlichkeit mit verschiedener Orientierung
29 bool similar(pt a1, pt b1, pt c1, pt a2, pt b2, pt c2) {
30     return ((b2-a2) * (c1-a1) == (b1-a1) * (c2-a2) ||
31         (b2-a2) * (conj(c1)-conj(a1)) == (conj(b1)-conj(a1))
32             * (c2-a2));
33 };
34 }

```

```

1 // Flächeninhalt eines Polygons (nicht selbstschneidend).
2 // Punkte gegen den Uhrzeigersinn: positiv, sonst negativ.
3 double area(const vector<pt>& poly) { //poly[0] == poly.back()
4     double res = 0;
5     for (int i = 0; i + 1 < sz(poly); i++)
6         res += cross(poly[i], poly[i + 1]);
7     return 0.5 * res;
8 }
9 // Anzahl drehungen einer Polyline um einen Punkt
10 // p nicht auf rand und poly[0] == poly.back()
11 // res != 0 or (res & 1) != 0 um inside zu prüfen bei
12 // selbstschneidenden polygonen (definitions sache)
13 ll windingNumber(pt p, const vector<pt>& poly) {
14     ll res = 0;
15     for (int i = 0; i + 1 < sz(poly); i++) {
16         pt a = poly[i], b = poly[i + 1];
17         if (real(a) > real(b)) swap(a,b);
18         if (real(a) <= real(p) && real(p) < real(b) &&
19             cross(p, a, b) < 0) {
20             res += orientation(p, poly[i], poly[i + 1]);
21         }
22     }
23     return res;
24 }
25 // Testet, ob ein Punkt im Polygon liegt (beliebige Polygone).
26 // Ändere Zeile 32 falls rand zählt, poly[0] == poly.back()
27 bool inside(pt p, const vector<pt>& poly) {
28     bool in = false;
29     for (int i = 0; i + 1 < sz(poly); i++) {
30         pt a = poly[i], b = poly[i + 1];
31         if (pointOnLineSegment(a, b, p)) return false;
32         if (real(a) > real(b)) swap(a,b);
33         if (real(a) <= real(p) && real(p) < real(b) &&
34             cross(p, a, b) < 0) {
35             in ^= 1;
36         }
37     }
38     return in;
39 }

```

```

38 // convex hull without duplicates, h[0] == h.back()
39 // Change line 45 and 51 >= if border counts as inside
40 bool inside(pt p, const vector<pt>& hull) {
41     int l = 0, r = sz(hull) - 1;
42     if (cross(hull[0], hull[r], p) > 0) return false;
43     while (l + 1 < r) {
44         int m = (l + r) / 2;
45         if (cross(hull[0], hull[m], p) >= 0) l = m;
46         else r = m;
47     }
48     return cross(hull[l], hull[r], p) > 0;
49 }
50 void rotateMin(vector<pt>& hull) {
51     auto mi = min_element(all(hull), [](const pt& a, const pt& b){
52         return real(a) == real(b) ? imag(a) < imag(b)
53             : real(a) < real(b);
54     });
55     rotate(hull.begin(), mi, hull.end());
56 }
57 // convex hulls without duplicates, h[0] != h.back()
58 vector<pt> minkowski(vector<pt> ps, vector<pt> qs) {
59     rotateMin(ps);
60     rotateMin(qs);
61     ps.push_back(ps[0]);
62     qs.push_back(qs[0]);
63     ps.push_back(ps[1]);
64     qs.push_back(qs[1]);
65     vector<pt> res;
66     for (ll i = 0, j = 0; i + 2 < sz(ps) || j + 2 < sz(qs);) {
67         res.push_back(ps[i] + qs[j]);
68         auto c = cross(ps[i + 1] - ps[i], qs[j + 1] - qs[j]);
69         if (c <= 0) i++;
70         if (c >= 0) j++;
71     }
72     return res;
73 }
74 // convex hulls without duplicates, h[0] != h.back()
75 double dist(const vector<pt>& ps, const vector<pt>& qs) {
76     for (pt& q : qs) q *= -1;
77     auto p = minkowski(ps, qs);
78     p.push_back(p[0]);
79     double res = 0.0;
80     //bool intersect = true;
81     for (ll i = 0; i + 1 < sz(p); i++) {
82         //intersect &= cross(p[i], p[i+1] - p[i]) <= 0;
83         res = max(res, cross(p[i], p[i+1]-p[i]) / abs(p[i+1]-p[i]));
84     }
85     return res;
86 }
87 bool left(pt of, pt p) {return cross(p, of) < 0 ||
88     (cross(p, of) == 0 && dot(p, of) > 0);}
89 // convex hulls without duplicates, hull[0] == hull.back() and
90 // hull[0] must be a convex point (with angle < pi)
91 // returns index of corner where dot(dir, corner) is maximized
92 int extremal(const vector<pt>& hull, pt dir) {
93     dir *= pt(0, 1);

```

```

94     int l = 0, r = sz(hull) - 1;
95     while (l + 1 < r) {
96         int m = (l + r) / 2;
97         pt dm = hull[m+1]-hull[m];
98         pt dl = hull[l+1]-hull[l];
99         if (left(dl, dir) != left(dl, dm)) {
100             if (left(dl, dm)) l = m;
101             else r = m;
102         } else {
103             if (cross(dir, dm) < 0) l = m;
104             else r = m;
105         }
106     }
107     return r;
108 }
109 // convex hulls without duplicates, hull[0] == hull.back() and
110 // hull[0] must be a convex point (with angle < pi)
111 // {} if no intersection
112 // {x} if corner is only intersection
113 // {a, b} segments (a,a+1) and (b,b+1) intersected (if only the
114 // border is intersected corners a and b are the start and end)
115 vector<int> intersect(const vector<pt>& hull, pt a, pt b) {
116     int endA = extremal(hull, (a-b) * pt(0, 1));
117     int endB = extremal(hull, (b-a) * pt(0, 1));
118     // cross == 0 => line only intersects border
119     if (cross(hull[endA], a, b) > 0 ||
120         cross(hull[endB], a, b) < 0) return {};
121     int n = sz(hull) - 1;
122     vector<int> res;
123     for (auto _ : {0, 1}) {
124         int l = endA, r = endB;
125         if (r < l) r += n;
126         while (l + 1 < r) {
127             int m = (l + r) / 2;
128             if (cross(hull[m % n], a, b) <= 0 &&
129                 cross(hull[m % n], a, b) != hull[poly[endB], a, b))
130                 l = m;
131             else r = m;
132         }
133         if (cross(hull[r % n], a, b) == 0) l++;
134         res.push_back(l % n);
135         swap(endA, endB);
136         swap(a, b);
137     }
138     if (res[0] == res[1]) res.pop_back();
139     return res;
140 }

```

```

1 bool left(pt p) {return real(p) < 0 ||
2     (real(p) == 0 && imag(p) < 0);}
3 void sortAround(pt p, vector<pt>& ps) {
4     sort(all(ps), [&](const pt& a, const pt& b){
5         if (left(a - p) != left(b - p))
6             return left(a - p) > left(b - p);
7         return cross(p, a, b) > 0;
8     });
9 }

```



```

1 // berechnet die Schnittpunkte von zwei Kreisen
2 // (Kreise dürfen nicht gleich sein!)
3 vector<pt> circleIntersection(pt c1, double r1,
4                               pt c2, double r2) {
5     double d = abs(c1 - c2);
6     if (d < abs(r1 - r2) || d > abs(r1 + r2)) return {};
7     double a = (r1 * r1 - r2 * r2 + d * d) / (2 * d);
8     pt p = (c2 - c1) * a / d + c1;
9     if (d == abs(r1 - r2) || d == abs(r1 + r2)) return {p};
10    double h = sqrt(r1 * r1 - a * a);
11    return {p + pt{0, 1} * (c2 - c1) * h / d,
12            p - pt{0, 1} * (c2 - c1) * h / d};
13 }
14 // berechnet die Schnittpunkte zwischen
15 // einem Kreis(Kugel) und einer Grade 2d und 3d
16 vector<pt> circleRayIntersection(pt center, double r,
17                                  pt orig, pt dir) {
18     vector<pt> result;
19     double a = dot(dir, dir);
20     double b = 2 * dot(dir, orig - center);
21     double c = dot(orig - center, orig - center) - r * r;
22     double discr = b * b - 4 * a * c;
23     if (discr >= 0) {
24         //t in [0, 1] => schnitt mit segment [orig, orig + dir]
25         double t1 = -(b + sqrt(discr)) / (2 * a);
26         double t2 = -(b - sqrt(discr)) / (2 * a);
27         if (t1 >= 0) result.push_back(t1 * dir + orig);
28         if (t2 >= 0 && abs(t1 - t2) > EPS) {
29             result.push_back(t2 * dir + orig);
30         }
31     }
32     return result;
33 }

```

### 3.5 Formeln - 3D

```

1 // Skalarprodukt
2 double operator|(pt3 a, pt3 b) {
3     return a.x * b.x + a.y * b.y + a.z * b.z;
4 }
5 double dot(pt3 a, pt3 b) {return a|b;}
6 // Kreuzprodukt
7 pt3 operator*(pt3 a, pt3 b) {return {a.y*b.z - a.z*b.y,
8                                       a.z*b.x - a.x*b.z,
9                                       a.x*b.y - a.y*b.x};}
10 pt3 cross(pt3 a, pt3 b) {return a*b;}
11 // Länge von a
12 double abs(pt3 a) {return sqrt(dot(a, a));}
13 double abs(pt3 a, pt3 b) {return abs(b - a);}
14 // Mixedprodukt
15 double mixed(pt3 a, pt3 b, pt3 c) {return a*b|c;}
16 // Orientierung von p zu der Ebene durch a, b, c
17 // -1 => gegen den Uhrzeigersinn,
18 // 0 => kollinear,
19 // 1 => im Uhrzeigersinn.
20 int orientation(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 p) {

```

```

21     double orien = mixed(b - a, c - a, p - a);
22     return (orien > EPS) - (orien < -EPS);
23 }
24 // Entfernung von Punkt p zur Ebene a,b,c.
25 double distToPlane(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 p) {
26     pt3 n = cross(b-a, c-a);
27     return (abs(dot(n, p)) - dot(n, a)) / abs(n);
28 }
29 // Liegt p in der Ebene a,b,c?
30 bool pointOnPlane(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 p) {
31     return orientation(a, b, c, p) == 0;
32 }
33 // Schnittpunkt von der Grade a-b und der Ebene c,d,e
34 // die Grade darf nicht parallel zu der Ebene sein!
35 pt3 linePlaneIntersection(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 d, pt3 e) {
36     pt3 n = cross(d-c, e-c);
37     pt3 d = b - a;
38     return a - d * (dot(n, a) - dot(n, c)) / dot(n, d);
39 }
40 // Abstand zwischen der Grade a-b und c-d
41 double lineLineDist(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 d) {
42     pt3 n = cross(b - a, d - c);
43     if (abs(n) < EPS) return distToLine(a, b, c);
44     return abs(dot(a - c, n)) / abs(n);
45 }

```

## 4 Mathe

### 4.1 Longest Increasing Subsequence

- lower\_bound  $\Rightarrow$  streng monoton
- upper\_bound  $\Rightarrow$  monoton

```

1 vector<int> lis(vector<int> &seq) {
2     int n = sz(seq), lisLength = 0, lisEnd = 0;
3     vector<int> L(n), L_id(n), parents(n);
4     for (int i = 0; i < n; i++) {
5         int pos = upper_bound(L.begin(), L.begin() + lisLength,
6                               seq[i]) - L.begin();
7         L[pos] = seq[i];
8         L_id[pos] = i;
9         parents[i] = pos ? L_id[pos - 1] : -1;
10        if (pos + 1 > lisLength) {
11            lisLength = pos + 1;
12            lisEnd = i;
13        }
14        // Ab hier Rekonstruktion der Sequenz.
15        vector<int> result(lisLength);
16        int pos = lisLength - 1, x = lisEnd;
17        while (parents[x] >= 0) {
18            result[pos--] = x;
19            x = parents[x];
20        }
21        result[0] = x;
22        return result; // Liste mit Indizes einer LIS.
23    }

```

### 4.2 Zykel Erkennung

cycleDetection findet Zyklus von  $x_0$  und Länge in  $f$   $O(b+l)$

```

1 void cycleDetection(ll x0, function<ll(ll)> f) {
2     ll a = x0, b = f(x0), length = 1;
3     for (ll power = 1; a != b; b = f(b), length++) {
4         if (power == length) {
5             power *= 2;
6             length = 0;
7             a = b;
8         }
9         ll start = 0;
10        a = x0; b = x0;
11        for (ll i = 0; i < length; i++) b = f(b);
12        while (a != b) {
13            a = f(a);
14            b = f(b);
15            start++;
16        }

```

### 4.3 Permutationen

kthperm findet  $k$ -te Permutation ( $k \in [0, n!)$ )  $O(n \cdot \log(n))$

```

1 vector<ll> kthperm(ll k, ll n) {
2     Tree<ll> t;
3     vector<ll> res(n);
4     for (ll i = 1; i <= n; k /= i, i++) {
5         t.insert(i - 1);
6         res[n - i] = k % i;
7     }
8     for (ll& x : res) {
9         auto it = t.find_by_order(x);
10        x = *it;
11        t.erase(it);
12    }
13    return res;
14 }

```

permIndex bestimmt Index der Permutation ( $res \in [0, n!)$ )  $O(n \cdot \log(n))$

```

1 ll permIndex(vector<ll> v) {
2     Tree<ll> t;
3     reverse(all(v));
4     for (ll& x : v) {
5         t.insert(x);
6         x = t.order_of_key(x);
7     }
8     ll res = 0;
9     for (ll i = sz(v); i > 0; i--) {
10        res *= i;
11        res += v[i - 1];
12    }
13    return res;
14 }

```

#### 4.4 Mod-Exponent und Multiplikation über $\mathbb{F}_p$

mulMod berechnet  $a \cdot b \bmod n$   $O(\log(b))$

```
1 ll mulMod(ll a, ll b, ll n) {
2   ll res = 0;
3   while (b > 0) {
4     if (b & 1) res = (a + res) % n;
5     a = (a * 2) % n;
6     b /= 2;
7   }
8   return res;
9 }
```

powMod berechnet  $a^b \bmod n$   $O(\log(b))$

```
1 ll powMod(ll a, ll b, ll n) {
2   ll res = 1;
3   while (b > 0) {
4     if (b & 1) res = (a * res) % n;
5     a = (a * a) % n;
6     b /= 2;
7   }
8   return res;
9 }
```

- für  $a > 10^9$  \_\_int128 oder modMul benutzen!

#### 4.5 ggT, kgV, erweiterter euklidischer Algorithmus

$O(\log(a) + \log(b))$

```
1 ll gcd(ll a, ll b) {return b == 0 ? a : gcd(b, a % b);}
2 ll lcm(ll a, ll b) {return a * (b / gcd(a, b));}
```

```
1 // a*x + b*y = ggt(a, b)
2 ll extendedEuclid(ll a, ll b, ll& x, ll& y) {
3   if (a == 0) {x = 0; y = 1; return b;}
4   ll x1, y1, d = extendedEuclid(b % a, a, x1, y1);
5   x = y1 - (b / a) * x1; y = x1;
6   return d;
7 }
```

#### 4.6 Multiplikatives Inverses von $n$ in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Falls  $p$  prim:  $x^{-1} \equiv x^{p-2} \bmod p$

Falls  $\text{ggT}(n, p) = 1$ :

- Erweiterter euklidischer Algorithmus liefert  $\alpha$  und  $\beta$  mit  $\alpha n + \beta p = 1$ .
- Nach Kongruenz gilt  $\alpha n + \beta p \equiv \alpha n \equiv 1 \bmod p$ .
- $n^{-1} \equiv \alpha \bmod p$

Sonst  $\text{ggT}(n, p) > 1$ : Es existiert kein  $x^{-1}$ .

```
1 ll multInv(ll n, ll p) {
2   ll x, y;
3   extendedEuclid(n, p, x, y); // Implementierung von oben.
4   return ((x % p) + p) % p;
5 }
```

**Lemma von Bézout** Sei  $(x, y)$  eine Lösung der diophantischen Gleichung  $ax + by = d$ . Dann lassen sich wie folgt alle Lösungen berechnen:

$$\left( x + k \frac{b}{\text{ggT}(a, b)}, y - k \frac{a}{\text{ggT}(a, b)} \right)$$

**PELL-Gleichungen** Sei  $(\bar{x}, \bar{y})$  die Lösung von  $x^2 - ny^2 = 1$ , die  $x > 1$  minimiert. Sei  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  die Lösung von  $x^2 - ny^2 = c$ , die  $x > 1$  minimiert. Dann lassen sich alle Lösungen von  $x^2 - ny^2 = c$  berechnen durch:

$$\begin{aligned} x_1 &:= \tilde{x}, & y_1 &:= \tilde{y} \\ x_{k+1} &:= \bar{x}x_k + n\bar{y}y_k, & y_{k+1} &:= \bar{x}y_k + \bar{y}x_k \end{aligned}$$

#### 4.7 Lineare Kongruenz

- Löst  $ax \equiv b \pmod{m}$ .
- Weitere Lösungen unterscheiden sich um  $\frac{m}{g}$ , es gibt also  $g$  Lösungen modulo  $m$ .

```
1 ll solveLinearCongruence(ll a, ll b, ll m) {
2   ll g = gcd(a, m);
3   if (b % g != 0) return -1;
4   return ((b / g) * multInv(a / g, m / g)) % (m / g);
5 }
```

#### 4.8 Chinesischer Restsatz

- Extrem anfällig gegen Overflows. Evtl. häufig 128-Bit Integer verwenden.
- Direkte Formel für zwei Kongruenzen  $x \equiv a \bmod n$ ,  $x \equiv b \bmod m$ :

$$x \equiv a - y \cdot n \cdot \frac{a-b}{d} \bmod \frac{mn}{d} \quad \text{mit} \quad d := \text{ggT}(n, m) = yn + zm$$

Formel kann auch für nicht teilerfremde Moduli verwendet werden. Sind die Moduli nicht teilerfremd, existiert genau dann eine Lösung, wenn  $a \equiv b \bmod \text{ggT}(m, n)$ . In diesem Fall sind keine Faktoren auf der linken Seite erlaubt.

```
1 // Laufzeit: O(n * log(n)), n := Anzahl der Kongruenzen. Nur für
2 // teilerfremde Moduli. Berechnet das kleinste, nicht negative x,
3 // das alle Kongruenzen simultan löst. Alle Lösungen sind
4 // kongruent zum kgV der Moduli (Produkt, da teilerfremd).
5 struct ChineseRemainder {
6   using lll = __int128;
7   vector<lll> lhs, rhs, mods, inv;
8   lll M; // Produkt über die Moduli. Kann leicht überlaufen.
9   ll g(const vector<lll> &vec) {
10     lll res = 0;
11     for (int i = 0; i < sz(vec); i++) {
12       res += (vec[i] * inv[i]) % M;
13       res %= M;
14     }
15     return res;
16   }
17   // Fügt Kongruenz l * x = r (mod m) hinzu.
18   void addEquation(ll l, ll r, ll m) {
19     lhs.push_back(l);
20     rhs.push_back(r);
21     mods.push_back(m);
22   }
23   ll solve() { // Löst das System.
24     M = accumulate(all(mods), 1ll, multiplies<lll>());
25     inv.resize(sz(lhs));
26     for (int i = 0; i < sz(lhs); i++) {
27       lll x = (M / mods[i]) % mods[i];
28       inv[i] = (multInv(x, mods[i]) * (M / mods[i]));
29     }
30     return (multInv(g(lhs), M) * g(rhs)) % M;
31   }
32 };
```

#### 4.9 Primzahltest & Faktorisierung

isPrime prüft ob Zahl prim ist  $O(\log(n)^2)$

```
1 constexpr ll bases32[] = {2, 7, 61};
2 constexpr ll bases64[] = {2, 325, 9375, 28178, 450775,
3   9780504, 1795265022};
4 bool isPrime(ll n) {
5   if (n < 2 || n % 2 == 0) return n == 2;
6   ll d = n - 1, j = 0;
7   while (d % 2 == 0) d /= 2, j++;
8   for (ll a : bases64) {
9     if (a % n == 0) continue;
10    ll v = powMod(a, d, n); //with mulmod or int128
11    if (v == 1 || v == n - 1) continue;
12    for (ll i = 1; i <= j; i++) {
13      v = (v * v) % n; //mulmod or int128
14      if (v == n - 1 || v <= 1) break;
15    }
16    if (v != n - 1) return false;
17  }
18  return true;
19 }
```

rho findet zufälligen Teiler  $O(\sqrt[4]{n})$

```
1 using lll = __int128;
2 ll rho(ll n) { // Findet Faktor < n, nicht unbedingt prim.
3   if (n % 2 == 0) return 2;
4   ll x = 0, y = 0, prd = 2;
5   auto f = [n](lll x){return (x * x) % n + 1;};
6   for (ll t = 30, i = n/2 + 7; t % 40 || gcd(prd, n) == 1; t++) {
7     if (x == y) x = ++i, y = f(x);
8     if (lll q = (lll)prd * abs(x-y) % n; q) prd = q;
9     x = f(x); y = f(f(y));
10  }
11  return gcd(prd, n);
12 }
13 void factor(ll n, map<ll, int>& facts) {
14   if (n == 1) return;
15   if (isPrime(n)) {facts[n]++; return;}
16   ll f = rho(n);
17   factor(n / f, facts); factor(f, facts);
18 }
```

#### 4.10 Teiler

countDivisors Zählt Teiler von  $n$   $O(\sqrt[3]{n})$

```
1 ll countDivisors(ll n) {
2   ll res = 1;
3   for (ll i = 2; i * i * i <= n; i++) {
4     ll c = 0;
5     while (n % i == 0) {n /= i; c++;}
6     res *= c + 1;
7   }
8   if (isPrime(n)) res *= 2;
9   else if (n > 1) res *= isSquare(n) ? 3 : 4;
10  return res;
11 }
```

#### 4.11 Primitivwurzeln

- Primitivwurzel modulo  $n$  existiert  $\Leftrightarrow n \in \{2, 4, p^\alpha, 2 \cdot p^\alpha \mid 2 < p \in \mathbb{P}, \alpha \in \mathbb{N}\}$
- es existiert entweder keine oder  $\varphi(\varphi(n))$  inkongruente Primitivwurzeln
- Sei  $g$  Primitivwurzel modulo  $n$ . Dann gilt:  
Das kleinste  $k$ , sodass  $g^k \equiv 1 \pmod n$ , ist  $k = \varphi(n)$ .

isPrimitive prüft ob  $g$  eine Primitivwurzel ist  $O(\log(\varphi(n)) \cdot \log(n))$   
findPrimitive findet Primitivwurzel (oder -1)  $O(|ans| \cdot \log(\varphi(n)) \cdot \log(n))$

```

1 bool isPrimitive(ll g, ll n, ll phi, map<ll, int> phiFacs) {
2   if (g == 1) return n == 2;
3   for (auto& f : phiFacs)
4     if (1 == powMod(g, phi / f.first, n)) return false;
5   return true;
6 }
7
8 bool isPrimitive(ll g, ll n) {
9   ll phin = phi(n); //isPrime(n) => phi(n) = n - 1
10  map<ll, int> phiFacs;
11  factor(phin, phiFacs);
12  return isPrimitive(g, n, phin, phiFacs);
13 }
14
15 ll findPrimitive(ll n) {
16   ll phin = phi(n); //isPrime(n) => phi(n) = n - 1
17   map<ll, int> phiFacs;
18   factor(phin, phiFacs);
19   //auch zufällige Reihenfolge möglich!
20   for (ll res = 1; res < n; res++)
21     if (isPrimitive(res, n, phin, phiFacs)) return res;
22   return -1;
23 }
```

#### 4.12 Diskreter Logarithmus

solve bestimmt Lösung  $x$  für  $a^x = b \pmod m$   $O(\sqrt{m} \cdot \log(m))$

```

1 ll dlog(ll a, ll b, ll m) {
2   ll bound = sqrtl(m) + 1; //memory usage bound
3   map<ll, ll> vals;
4   for (ll i = 0, e = 1; i < bound; i++, e = (e * a) % m) {
5     vals[e] = i;
6   }
7   ll fact = powMod(a, m - bound - 1, m);
8   for (ll i = 0; i < m; i += bound, b = (b * fact) % m) {
9     if (vals.count(b)) {
10      return i + vals[b];
11    }
12  }
13  return -1;
14 }
```

#### 4.13 Diskrete $n$ -te Wurzel

root bestimmt Lösung  $x$  für  $x^n = b \pmod m$   $O(\sqrt{m} \cdot \log(m))$

Alle Lösungen haben die Form  $g^{c + \frac{i \cdot \varphi(n)}{\gcd(a, \varphi(n))}}$

```

1 ll root(ll a, ll b, ll m) {
2   ll g = findPrimitive(m);
3   ll c = dlog(powMod(g, a, m), b, m); //diskreter logarithmus
4   return c < 0 ? -1 : powMod(g, c, m);
5 }
```

#### 4.14 Primzahlsieb von ERATOSTHENES

- Kann erweitert werden: Für jede Zahl den {kleinsten, größten} Primfaktor speichern, Liste von Primzahlen berechnen
  - Bis  $10^8$  in unter 64MB Speicher (lange Berechnung)
- primeSieve berechnet Primzahlen und Anzahl  $O(n \cdot \log(\log(n)))$   
isPrime prüft ob Zahl prim ist  $O(1)$

```

1 constexpr ll N = 100000000;
2 bitset<N / 2> isNotPrime;
3 vector<ll> primes = {2};
4
5 bool isPrime(ll x) {
6   if (x < 2 || x % 2 == 0) return x == 2;
7   else return !isNotPrime[x / 2];
8 }
9
10 void primeSieve() {
11   // i * i < N is enough for isPrime
12   for (ll i = 3; i < N; i += 2) {
13     if (!isNotPrime[i / 2]) {
14       primes.push_back(i);
15       for (ll j = i * i; j < N; j += 2 * i) {
16         isNotPrime[j / 2] = 1;
17       }
18     }
19   }
20 }
```

#### 4.15 Möbius-Funktion und Möbius-Inversion

- Seien  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und  $g(n) := \sum_{d|n} f(d)$ . Dann ist  $f(n) = \sum_{d|n} g(d) \mu(\frac{n}{d})$ .

- $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

**Beispiel Inklusion/Exklusion:** Gegeben sein eine Sequenz  $A = a_1, \dots, a_n$  von Zahlen,  $1 \leq a_i \leq N$ . Zähle die Anzahl der coprime subsequences.

**Lösung:** Für jedes  $x$ , sei  $cnt[x]$  die Anzahl der Vielfachen von  $x$  in  $A$ . Es gibt  $2^{cnt[x]} - 1$  nicht leere Subsequences in  $A$ , die nur Vielfache von  $x$  enthalten. Die Anzahl der Subsequences mit  $ggT=1$  ist gegeben durch  $\sum_{i=1}^N \mu(i) \cdot (2^{cnt[i]} - 1)$ .

```

1 ll mu(ll n) { // Laufzeit: O(sqrt(n));
2   ll res = 1;
3   for (ll i = 2; i * i <= n; i++) {
4     if (n % i == 0) { // Optimierung: Nur Primzahlen
5       if (n % (i * i) == 0) return 0;
6       res *= -1;
7       n /= i;
8     }
9   }
10  return n > 1 ? -res : res;
11 }
12 // berechnet Möbiusfunktion. Laufzeit: O(N * log(log(N)))
13 vector<int> mu(n + 1, 1);
14 for (ll i = 2; i <= n; i++) {
15   if (mu[i] == 1) {
16     for (ll j = i; j <= n; j += i) mu[j] *= -2;
17     for (ll j = i*i; j <= n; j += i*i) mu[j] = 0;
18   }
19 }
20 // log2(abs(mu[i])) = number of primes
21 mu[i] = (mu[i] > 0) - (mu[i] < 0);
22 }
```

#### 4.16 EULERSche $\varphi$ -Funktion

- Zählt die relativ primen Zahlen  $\leq n$ .
- Multiplikativ:  $\gcd(a, b) = 1 \Rightarrow \varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab)$
- $p$  prim,  $k \in \mathbb{N}$ :  $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$
- **EULER's Theorem:** Für  $b \geq \varphi(c)$  gilt:  $a^b \equiv a^{b \bmod \varphi(c) + \varphi(c)} \pmod c$ . Darüber hinaus gilt:  $\gcd(a, c) = 1 \Leftrightarrow a^b \equiv a^{b \bmod \varphi(c)} \pmod c$ . Falls  $m$  prim ist, liefert das den kleinen Satz von FERMAT:  $a^m \equiv a \pmod m$

```

1 ll phi(ll n) { // Laufzeit: O(sqrt(n))
2   // Optimierung: Falls n prim, n - 1 zurückgeben
3   ll result = n;
4   for (ll i = 2; i * i <= n; ++i) {
5     if (n % i == 0) { // Optimierung: Nur Primzahlen
6       while (n % i == 0) n /= i;
7       result -= result / i;
8     }
9   }
10  if (n > 1) result -= result / n;
11  return result;
12 }
13 // Sieb, falls alle Werte benötigt werden.
14 // Laufzeit: O(N * log(log(N)))
15 vector<ll> phi(n + 1);
16 for (int i = 1; i <= n; i++) phi[i] = i;
17 for (int i = 2; i <= n; i++) if (phi[i] == i) {
18   for (int j = i; j <= n; j += i) {
19     phi[j] /= i;
20   }
21 }
```

#### 4.17 LGS über $\mathbb{F}_p$

gauss löst LGS  $O(n^3)$

```

1 void normalLine(int n, int line, ll p) {
2   ll factor = multInv(mat[line][line], p);
3   for (int i = 0; i <= n; i++) {
4     mat[line][i] *= factor;
5   }
6 }
7
8 void takeAll(int n, int line, ll p) {
9   for (int i = 0; i < n; i++) {
10    if (i == line) continue;
11    ll diff = mat[i][line];
12    for (int j = 0; j <= n; j++) {
13      mat[i][j] -= (diff * mat[line][j]) % p;
14    }
15  }
16 }
17
18 void gauss(int n, ll p) { // nx(n+1)-Matrix, Körper F_p.
19   for (int line = 0; line < n; line++) {
20     int swappee = line;
21     while (swappee < n && mat[swappee][line] == 0) swappee++;
22     if (swappee == n) continue;
23     swap(mat[line], mat[swappee]);
24     normalLine(n, line, p);
25     takeAll(n, line, p);
26     // für Eindeutigkeit, Existenz etc. siehe LGS
27   }
28 }
```

4.18 LGS über  $\mathbb{R}$ 

```

1 void normalLine(int n, int line) {
2     double factor = mat[line][line];
3     for (int i = 0; i <= n; i++) {
4         mat[line][i] /= factor;
5     }
6 }
7 void takeAll(int n, int line) {
8     for (int i = 0; i < n; i++) {
9         if (i == line) continue;
10        double diff = mat[i][line];
11        for (int j = 0; j <= n; j++) {
12            mat[i][j] -= diff * mat[line][j];
13        }
14    }
15 }
16 int gauss(int n) {
17     vector<bool> done(n, false);
18     for (int i = 0; i < n; i++) {
19         int swappee = i; // Sucht Pivotzeile für bessere Stabilität.
20         for (int j = 0; j < n; j++) {
21             if (done[j]) continue;
22             if (abs(mat[j][i]) > abs(mat[i][i])) swappee = j;
23         }
24         swap(mat[i], mat[swappee]);
25         if (abs(mat[i][i]) > EPSILON) {
26             normalLine(n, i);
27             takeAll(n, i);
28             done[i] = true;
29         }
30     }
31     // Ab jetzt nur checks bzgl. Eindeutigkeit/Existenz der Lösung.
32     for (int i = 0; i < n; i++) {
33         bool allZero = true;
34         for (int j = i; j < n; j++)
35             if (abs(mat[i][j]) > EPSILON) allZero = false;
36         if (allZero && abs(mat[i][n]) > EPSILON) return INCONSISTENT;
37         if (allZero && abs(mat[i][n]) < EPSILON) return MULTIPLE;
38     }
39     return UNIQUE;
40 }

```

## 4.19 Numerisch Extremstelle bestimmen

```

1 ld gss(ld l, ld r, function<ld(ld)> f) {
2     ld inv = (sqrt(5.0L) - 1) / 2;
3     ld x1 = r - inv*(r-l), x2 = l + inv*(r-l);
4     ld f1 = f(x1), f2 = f(x2);
5     for (int i = 0; i < 200; i++) {
6         if (f1 < f2) { //change to > to find maximum
7             u = x2; x2 = x1; f2 = f1;
8             x1 = r - inv*(r-l); f1 = f(x1);
9         } else {
10            l = x1; x1 = x2; f1 = f2;
11            x2 = l + inv*(r-l); f2 = f(x2);
12        }
13    }
14    return l;
15 }

```

## 4.20 Numerisch Integrieren, Simpsonregel

```

1 double f(double x) {return x;}
2 double simps(double a, double b) {
3     return (f(a) + 4.0 * f((a + b) / 2.0) + f(b)) * (b - a) / 6.0;
4 }
5 double integrate(double a, double b) {
6     double m = (a + b) / 2.0;
7     double l = simps(a, m), r = simps(m, b), tot = simps(a, b);
8     if (abs(l + r - tot) < EPS) return tot;
9     return integrate(a, m) + integrate(m, b);
10 }

```

## 4.21 Polynome, FFT, NTT &amp; andere Transformationen

Multipliziert Polynome A und B.

- $\deg(A \cdot B) = \deg(A) + \deg(B)$
- Vektoren  $a$  und  $b$  müssen mindestens Größe  $\deg(A \cdot B) + 1$  haben. Größe muss eine Zweierpotenz sein.
- Für ganzzahlige Koeffizienten:  $(ll) \text{round}(\text{real}(a[i]))$
- $xor$ ,  $or$  und  $and$  Transform funktioniert auch mit  $double$  oder modulo einer Primzahl  $p$  falls  $p \geq 2^{\text{bits}}$

```

1 /*constexpr ll mod = 998244353; NTT only
2 constexpr ll root = 3;*/
3 using cplx = complex<double>;
4 //void fft(vector<ll> &a, bool inverse = 0) { NTT, xor, or, and
5 void fft(vector<cplx> &a, bool inverse = 0) {
6     int n = a.size();
7     for (int i = 0, j = 1; j < n - 1; ++j) {
8         for (int k = n >> 1; k > (i ^= k); k >>= 1);
9         if (j < i) swap(a[i], a[j]);
10    }
11    for (int s = 1; s < n; s *= 2) {
12        /*ll ws = powMod(root, (mod - 1) / s >> 1, mod); NTT only
13        if (inverse) ws = powMod(ws, mod - 2, mod);*/
14        double angle = PI / s * (inverse ? -1 : 1);
15        cplx ws(cos(angle), sin(angle));
16        for (int j = 0; j < n; j += 2 * s) {
17            /*ll w = 1; NTT only
18            cplx w = 1;
19            for (int k = 0; k < s; k++) {
20                /*ll u = a[j + k], t = a[j + s + k] * w; NTT only
21                t %= mod;
22                a[j + k] = (u + t) % mod;
23                a[j + s + k] = (u - t + mod) % mod;
24                w = (w * ws) % mod;*/
25                /*ll u = a[j + k], t = a[j + s + k]; xor only
26                a[j + k] = u + t;
27                a[j + s + k] = u - t;*/
28                /*if (!inverse) { or only
29                    a[j + k] = u + t;
30                    a[j + s + k] = u;
31                } else {
32                    a[j + k] = t;
33                    a[j + s + k] = u - t;
34                }*/
35                /*if (!inverse) { and only

```

```

36        a[j + k] = t;
37        a[j + s + k] = u + t;
38    } else {
39        a[j + k] = t - u;
40        a[j + s + k] = u;
41    }*/
42    cplx u = a[j + k], t = a[j + s + k] * w;
43    a[j + k] = u + t;
44    a[j + s + k] = u - t;
45    if (inverse) a[j + k] /= 2, a[j + s + k] /= 2;
46    w *= ws;
47 }
48 /*if (inverse) { NTT only
49     ll div = powMod(n, mod - 2, mod);
50     for (ll i = 0; i < n; i++) {
51         a[i] = (a[i] * div) % mod;
52     }*/
53     /*if (inverse) { xor only
54         for (ll i = 0; i < n; i++) {
55             a[i] /= n;
56         }*/
57 }

```

Für sehr viele transforms kann die Vertauschung vorberechnet werden:

```

1 int perm[MAXN]; //perm[i] = j in Zeile 10
2 void genPerm(int n) {
3     ull mask = ~0ull << (__lg(n) - 1);
4     for (int i = 0, j = 0; i < n; i++) {
5         perm[i] = j; //if (i < j) swap(a[i], a[j]);
6         ull y = mask >> __builtin_ctz(~i);
7         j ^= y & (n - 1);
8     }

```

Multiplikation mit 2 transforms statt 3: (nur benutzen wenn nötig!)

```

1 vector<cplx> mul(vector<cplx> &a, vector<cplx> &b) {
2     vector<cplx> c(sz(a)), d(sz(a));
3     for (int i = 0; i < sz(b); i++) {
4         c[i] = {real(a[i]), real(b[i])};
5     }
6     c = fft(c);
7     for (int i = 0; i < sz(b); i++) {
8         int j = (sz(a) - i) % sz(a);
9         cplx x = (c[i] + conj(c[j])) / cplx{2, 0}; //fft(a)[i];
10        cplx y = (c[i] - conj(c[j])) / cplx{0, 2}; //fft(b)[i];
11        d[i] = x * y;
12    }
13    return fft(d, true);
14 }

```

4.22 Primzahlzählfunktion  $\pi$ 

init berechnet  $\pi$  bis  $N$   $O(N \cdot \log(\log(N)))$   
 phi zählt zu  $p$ ; teilerfremde Zahlen  $\leq n$  für alle  $i \leq k$   $O(???)$   
 pi zählt Primzahlen  $\leq n$  ( $n < N^2$ )  $O(n^{2/3})$

```

1 constexpr ll cacheA = 2 * 3 * 5 * 7 * 11 * 13 * 17;
2 constexpr ll cacheB = 7;
3 ll memoA[cacheA + 1][cacheB + 1];
4 ll memoB[cacheB + 1];
5 ll memoC[N];
6 void init() {
7     primeSieve(); // code from above
8     for (ll i = 0; i < N; i++) {
9         memoC[i] = memoC[i - 1];
10        if (isPrime(i)) memoC[i]++;
11    }
12    memoB[0] = 1;
13    for (ll i = 0; i <= cacheA; i++) memoA[i][0] = i;
14    for (ll i = 1; i <= cacheB; i++) {
15        memoB[i] = primes[i - 1] * memoB[i - 1];
16        for (ll j = 1; j <= cacheA; j++) {
17            memoA[j][i] = memoA[j][i - 1] - memoA[j /
18                primes[i - 1]][i - 1];
19        }
20    }
21    ll phi(ll n, ll k) {
22        if (k == 0) return n;
23        if (k <= cacheB)
24            return memoA[n % memoB[k]][k] +
25                (n / memoB[k]) * memoA[memoB[k]][k];
26        if (n <= primes[k - 1] * primes[k - 1]) return memoC[n] - k + 1;
27        if (n <= primes[k - 1] * primes[k - 1] * primes[k - 1] && n < N) {
28            ll b = memoC[(ll)sqrtl(n)];
29            ll res = memoC[n] - (b + k - 2) * (b - k + 1) / 2;
30            for (ll i = k; i < b; i++) res += memoC[n / primes[i]];
31            return res;
32        }
33        return phi(n, k - 1) - phi(n / primes[k - 1], k - 1);
34    }
35    ll pi(ll n) {
36        if (n < N) return memoC[n];
37        ll a = pi(sqrtl(sqrtl(n)));
38        ll b = pi(sqrtl(n));
39        ll c = pi(cbrtl(n));
40        ll res = phi(n, a) + (b + a - 2) * (b - a + 1) / 2;
41        for (ll i = a; i < b; i++) {
42            ll w = n / primes[i];
43            res -= pi(w);
44            if (i > c) continue;
45            ll bi = pi(sqrtl(w));
46            for (ll j = i; j < bi; j++) {
47                res -= pi(w / primes[j]) - j;
48            }
49        }
50        return res;
51    }

```

## 4.23 Lineare-Recurrenz

BerlekampMassey Berechnet eine lineare Recurrenz  $n$ -ter Ordnung  $O(n^2)$   
 aus den ersten  $2n$  Werte

```

1 constexpr ll mod = 1000000007;
2 vector<ll> BerlekampMassey(const vector<ll>& s) {
3     int n = sz(s), L = 0, m = 0;
4     vector<ll> C(n), B(n), T;
5     C[0] = B[0] = 1;
6     ll b = 1;
7     for (int i = 0; i < n; i++) {
8         m++;
9         ll d = s[i] % mod;
10        for (int j = 1; j <= L; j++) {
11            d = (d + C[j] * s[i - j]) % mod;
12        }
13        if (!d) continue;
14        T = C;
15        ll coef = d * powMod(b, mod - 2, mod) % mod;
16        for (int j = m; j < n; j++) {
17            C[j] = (C[j] - coef * B[j - m]) % mod;
18        }
19        if (2 * L > i) continue;
20        L = i + 1 - L;
21        swap(B, T);
22        b = d;
23        m = 0;
24    }
25    C.resize(L + 1);
26    C.erase(C.begin());
27    for (auto& x : C) x = (mod - x) % mod;
28    return C;
29 }

```

Sei  $f(n) = c_{n-1}f(n-1) + c_{n-2}f(n-2) + \dots + c_0f(0)$  eine lineare Recurrenz.  
 kthTerm Berechnet  $k$ -ten Term einer Recurrenz  $n$ -ter Ordnung  $O(\log(k) \cdot n^2)$

```

1 constexpr ll mod = 1000000007;
2 vector<ll> modMul(const vector<ll>& a, const vector<ll>& b,
3     const vector<ll>& c) {
4     ll n = sz(c);
5     vector<ll> res(n * 2 + 1);
6     for (int i = 0; i <= n; i++) { //a*b
7         for (int j = 0; j <= n; j++) {
8             res[i + j] += a[i] * b[j];
9             res[i + j] %= mod;
10        }
11    }
12    for (int i = 2 * n; i > n; i--) { //res*c
13        for (int j = 0; j < n; j++) {
14            res[i - 1 - j] += res[i] * c[j];
15            res[i - 1 - j] %= mod;
16        }
17        res.resize(n + 1);
18        return res;
19    }
20    ll kthTerm(const vector<ll>& f, const vector<ll>& c, ll k) {
21        assert(sz(f) == sz(c));
22        vector<ll> tmp(sz(c) + 1, a(sz(c) + 1);

```

```

22 tmp[0] = a[1] = 1; //tmp = (x^k) % c
23 for (k++; k > 0; k /= 2) {
24     if (k & 1) tmp = modMul(tmp, a, c);
25     a = modMul(a, a, c);
26 }
27 ll res = 0;
28 for (int i = 0; i < sz(c); i++) res += (tmp[i+1] * f[i]) % mod;
29 return res % mod;
30 }

```

Alternativ kann der  $k$ -te Term in  $O(n^3 \log(k))$  berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & \dots & c_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f(n-1) \\ f(n-2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(n-1+k) \\ f(n-2+k) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(k) \end{pmatrix} \leftarrow$$

## 4.24 Matrix-Exponent

precalc berechnet  $m^{2^b}$  vor  $O(\log(b) \cdot n^3)$   
 calc berechnet  $m_{y,x}^b$   $O(\log(b) \cdot n^2)$

```

1 vector<mat> pows;
2 void precalc(mat m) {
3     pows = {mat(1), m};
4     for (int i = 1; i < 60; i++) pows.push_back(pows[i] * pows[i]);
5 }
6 ll calc(int x, int y, ll b) {
7     vector<ll> v(pows[0].m.size());
8     v[x] = 1;
9     for (ll i = 1; b > 0; i++) {
10        if (b & 1) v = pows[i] * v;
11        b /= 2;
12    }
13    return v[y];
14 }

```

## 4.25 LEGENDRE-Symbol

Sei  $p \geq 3$  eine Primzahl,  $a \in \mathbb{Z}$ :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p \mid a \\ 1 & \text{falls } \exists x \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} : a \equiv x^2 \pmod{p} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{falls } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ -1 & \text{falls } p \equiv \pm 3 \pmod{8} \end{cases}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \quad \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

```

1 ll legendre(ll a, ll p) {
2     ll s = powMod(a, p / 2, p);
3     return s < 2 ? s : -1ll;
4 }

```



## 4.26 Inversionszahl

```

1 ll inversions(const vector<ll>& v) {
2   Tree<pair<ll, ll>> t; //ordered statistics tree
3   ll res = 0;
4   for (ll i = 0; i < sz(v); i++) {
5     res += i - t.order_of_key({v[i], i});
6     t.insert({v[i], i});
7   }
8   return res;
9 }

```

## 4.27 Satz von SPRAGUE-GRUNDY

Weise jedem Zustand  $X$  wie folgt eine GRUNDY-Zahl  $g(X)$  zu:

$$g(X) := \min \{ \mathbb{Z}_0^+ \setminus \{g(Y) \mid Y \text{ von } X \text{ aus direkt erreichbar} \} \}$$

$X$  ist genau dann gewonnen, wenn  $g(X) > 0$  ist.

Wenn man  $k$  Spiele in den Zuständen  $X_1, \dots, X_k$  hat, dann ist die GRUNDY-Zahl des Gesamtzustandes  $g(X_1) \oplus \dots \oplus g(X_k)$ .

## 4.28 Kombinatorik

**WILSONS THEOREM** A number  $n$  is prime if and only if  $(n-1)! \equiv -1 \pmod n$ .

( $n$  is prime if and only if  $(m-1)! \cdot (-n-m)! \equiv (-1)^m \pmod n$  for all  $m$  in  $\{1, \dots, n\}$ )

$$(n-1)! \equiv \begin{cases} -1 \pmod n, & \text{falls } n \in \mathbb{P} \\ 2 \pmod n, & \text{falls } n=4 \\ 0 \pmod n, & \text{sonst} \end{cases}$$

**ZECKENDORFS THEOREM** Jede positive natürliche Zahl kann eindeutig als Summe einer oder mehrerer verschiedener FIBONACCI-Zahlen geschrieben werden, sodass keine zwei aufeinanderfolgenden FIBONACCI-Zahlen in der Summe vorkommen.

**Lösung:** Greedy, nimm immer die größte FIBONACCI-Zahl, die noch hineinpasst.

**LUCAS-THEOREM** Ist  $p$  prim,  $m = \sum_{i=0}^k m_i p^i$ ,  $n = \sum_{i=0}^k n_i p^i$  ( $p$ -adische Darstellung), so gilt

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^k \binom{m_i}{n_i} \pmod p.$$

## 4.29 The Twelfold Way (verteile $n$ Bälle auf $k$ Boxen)

Bälle Boxen	identisch identisch	verschieden identisch	identisch verschieden	verschieden verschieden
–	$p_k(n+k)$	$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i}$	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$k^n$
Bälle pro Box $\geq 1$	$p_k(n)$	$\binom{n}{k}$	$\binom{n-1}{k-1}$	$k! \binom{n}{k}$
Bälle pro Box $\leq 1$	$[n \leq k]$	$[n \leq k]$	$\binom{k}{n}$	$n! \binom{k}{n}$

[Bedingung]: **return** Bedingung ? 1 : 0;

## CATALAN-Zahlen

- Die CATALAN-Zahl  $C_n$  gibt an:
  - Anzahl der Binärbäume mit  $n$  nicht unterscheidbaren Knoten.
  - Anzahl der validen Klammersausdrücke mit  $n$  Klammerpaaren.
  - Anzahl der korrekten Klammerungen von  $n+1$  Faktoren.
  - Anzahl Möglichkeiten ein konvexes Polygon mit  $n+2$  Ecken zu triangulieren.
  - Anzahl der monotonen Pfade (zwischen gegenüberliegenden Ecken) in einem  $n \times n$ -Gitter, die nicht die Diagonale kreuzen.

$$C_0 = 1 \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{4n-2}{n+1} \cdot C_{n-1}$$

- Formel 1 erlaubt Berechnung ohne Division in  $O(n^2)$
- Formel 2 und 3 erlauben Berechnung in  $O(n)$

## CATALAN-Convolution

- Anzahl an Klammersausdrücken mit  $n+k$  Klammerpaaren, die mit  $(^k$  beginnen.

$$C_0^k = 1 \quad C_n^k = \sum_{a_0+a_1+\dots+a_k=n} C_{a_0} C_{a_1} \dots C_{a_k} = \frac{k+1}{n+k+1} \binom{2n+k}{n} = \frac{(2n+k-1) \cdot (2n+k)}{n(n+k+1)} \cdot C_{n-1}^k$$

**EULER-Zahlen 1. Ordnung** Die Anzahl der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  mit genau  $k$  Anstiegen. Für die  $n$ -te Zahl gibt es  $n$  mögliche Positionen zum Einfügen. Dabei wird entweder ein Anstieg in zwei gesplittet oder ein Anstieg um  $n$  ergänzt.

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\rangle = 1 \quad \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = (k+1) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle + (n-k) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n+1}{i} (k+1-i)^n$$

- Formel 1 erlaubt Berechnung ohne Division in  $O(n^2)$
- Formel 2 erlaubt Berechnung in  $O(n \log(n))$

**EULER-Zahlen 2. Ordnung** Die Anzahl der Permutationen von  $\{1, 1, \dots, n, n\}$  mit genau  $k$  Anstiegen.

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1 \quad \left\langle \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = 0 \quad \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = (k+1) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle + (2n-k-1) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle$$

- Formel erlaubt Berechnung ohne Division in  $O(n^2)$

**STIRLING-Zahlen 1. Ordnung** Die Anzahl der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  mit genau  $k$  Zyklen. Es gibt zwei Möglichkeiten für die  $n$ -te Zahl. Entweder sie bildet einen eigenen Zyklus, oder sie kann an jeder Position in jedem Zyklus einsortiert werden.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

- Formel erlaubt Berechnung ohne Division in  $O(n^2)$

**STIRLING-Zahlen 2. Ordnung** Die Anzahl der Möglichkeiten  $n$  Elemente in  $k$  nicht-leere Teilmengen zu zerlegen. Es gibt  $k$  Möglichkeiten die  $n$  in eine  $n-1$ -Partition einzuordnen. Dazu kommt der Fall, dass die  $n$  in ihrer eigenen Teilmenge (alleine) steht.

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

- Formel 1 erlaubt Berechnung ohne Division in  $O(n^2)$
- Formel 2 erlaubt Berechnung in  $O(n \log(n))$

**BELL-Zahlen** Anzahl der Partitionen von  $\{1, \dots, n\}$ . Wie STIRLING-Zahlen 2. Ordnung ohne Limit durch  $k$ .

$$B_1 = 1 \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \quad B_{p^m+n} \equiv m \cdot B_n + B_{n+1} \pmod p$$

**Partitions** Die Anzahl der Partitionen von  $n$  in genau  $k$  positive Summanden. Die Anzahl der Partitionen von  $n$  mit Elementen aus  $1, \dots, k$ .

$$p_0(0) = 1 \quad p_k(n) = 0 \text{ für } k > n \text{ oder } n \leq 0 \text{ oder } k \leq 0$$

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-1)$$

$$p(n) = \sum_{k=1}^n p_k(n) = p_n(2n) = \sum_{k \neq 0} (-1)^{k+1} p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right)$$

- in Formel 3 kann abgebrochen werden wenn  $\frac{k(3k-1)}{2} > n$ .
- Die Anzahl der Partitionen von  $n$  in bis zu  $k$  positive Summanden ist  $\sum_{i=0}^k p_i(n) = p_k(n+k)$ .

**Binomialkoeffizienten** Die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge.

**WICHTIG:** Binomialkoeffizient in  $O(1)$  berechnen indem man  $x!$  vorberechnet.

calc\_binom berechnet Binomialkoeffizient ( $n \leq 61$ )  $O(k)$

```

1 ll calc_binom(ll n, ll k) {
2   if (k > n) return 0;
3   ll r = 1;
4   for (ll d = 1; d <= k; d++) { // Reihenfolge => Teilbarkeit
5     r *= n--;
6     r /= d;
7   }
8   return r;
9 }

```

calc\_binom berechnet Binomialkoeffizient modulo Primzahl  $p$   $O(p-n)$

```

1 ll calc_binom(ll n, ll k, ll p) {
2   assert(n < p) //wichtig: sonst falsch!
3   if (k > n) return 0;
4   ll x = k % 2 != 0 ? p-1 : 1;
5   for (ll c = p-1; c > n; c--) {
6     x *= c - k; x %= p;
7     x *= multInv(c, p); x %= p;
8   }
9   return x;
10 }

```

calc\_binom berechnet Primfaktoren vom Binomialkoeffizient  $O(n)$

**WICHTIG:** braucht alle Primzahlen  $\leq n$

```

1 constexpr ll mod = 1000000009;
2 ll binomPPow(ll n, ll k, ll p) {
3   ll res = 1;
4   if (p > n) {
5     } else if (p > n - k || (p * p > n && n % p < k % p)) {
6     res *= p;
7     res %= mod;
8   } else if (p * p <= n) {
9     ll c = 0, tmpN = n, tmpK = k;
10    while (tmpN > 0) {
11      if (tmpN % p < tmpK % p + c) {
12        res *= p;
13        res %= mod;
14        c = 1;
15      } else c = 0;
16      tmpN /= p;
17      tmpK /= p;
18    }
19    return res;
20 }
21 ll calc_binom(ll n, ll k) {
22   if (k > n) return 0;
23   ll res = 1;
24   k = min(k, n - k);
25   for (ll i = 0; primes[i] <= n; i++) {
26     res *= binomPPow(n, k, primes[i]);
27     res %= mod;
28   }
29   return res;
30 }

```

Binomialkoeffizienten				
$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k} \approx 2^n \cdot \frac{-2}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \exp\left(-\frac{2(x-\frac{n}{2})^2}{n}\right)$				
$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$	$\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$	$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$	$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$	
$\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$	$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$	$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} F_i = F_{2n}$	$F_n = n\text{-th Fib.}$	

Highly Composite Numbers														
10 <sup>x</sup>	Zahl	Teiler	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
1	6	4	1	1										
2	60	12	2	1	1									
3	840	32	3	1	1	1								
4	7560	64	3	3	1	1								
5	83160	128	3	3	1	1	1							
6	720720	240	4	2	1	1	1	1						
7	8648640	448	6	3	1	1	1	1						
8	73513440	768	5	3	1	1	1	1	1					
9	735134400	1344	6	3	2	1	1	1	1					
10	6983776800	2304	5	3	2	1	1	1	1	1				
11	97772875200	4032	6	3	2	2	1	1	1	1	1			
12	963761198400	6720	6	4	2	1	1	1	1	1	1	1		
13	9316358251200	10752	6	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	
14	97821761637600	17280	5	4	2	2	1	1	1	1	1	1	1	
15	866421317361600	26880	6	4	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	8086598962041600	41472	8	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
17	74801040398884800	64512	6	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
18	897612484786617600	103680	8	4	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1

Platonische Körper				
Übersicht	Seiten	Ecken	Kanten	dual zu
Tetraeder	4	4	6	Tetraeder
Würfel/Hexaeder	6	8	12	Oktaeder
Oktaeder	8	6	12	Würfel/Hexaeder
Dodekaeder	12	20	30	Ikosaeder
Ikosaeder	20	12	30	Dodekaeder
Färbungen mit maximal $n$ Farben (bis auf Isomorphie)				
Ecken vom Oktaeder/Seiten vom Würfel	$(n^6+3n^4+12n^3+8n^2)/24$			
Ecken vom Würfel/Seiten vom Oktaeder	$(n^8+17n^4+6n^2)/24$			
Kanten vom Würfel/Oktaeder	$(n^{12}+6n^7+3n^6+8n^4+6n^3)/24$			
Ecken/Seiten vom Tetraeder	$(n^4+11n^2)/12$			
Kanten vom Tetraeder	$(n^6+3n^4+8n^2)/12$			
Ecken vom Ikosaeder/Seiten vom Dodekaeder	$(n^{12}+15n^6+44n^4)/60$			
Ecken vom Dodekaeder/Seiten vom Ikosaeder	$(n^{20}+15n^{10}+20n^8+24n^4)/60$			
Kanten vom Dodekaeder/Ikosaeder (evtl. falsch)	$(n^{30}+15n^{16}+20n^{10}+24n^6)/60$			

Reihen			
$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$
$\sum_{i=0}^n c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1} \quad c \neq 1$	$\sum_{i=0}^{\infty} c^i = \frac{1}{1-c} \quad  c  < 1$	$\sum_{i=1}^{\infty} c^i = \frac{c}{1-c} \quad  c  < 1$	$\sum_{i=0}^{\infty} i c^i = \frac{c}{(1-c)^2} \quad  c  < 1$
$\sum_{i=0}^n i c^i = \frac{n c^{n+2} - (n+1) c^{n+1} + c}{(c-1)^2} \quad c \neq 1$		$\sum_{i=1}^n i H_i = \frac{n(n+1)}{2} H_n - \frac{n(n-1)}{4}$	
$\sum_{i=1}^n H_i = (n+1) H_n - n$		$\sum_{i=1}^n \binom{i}{m} H_i = \binom{n+1}{m+1} (H_{n+1} - \frac{1}{m+1})$	

Wahrscheinlichkeitstheorie ( $A, B$ Ereignisse und $X, Y$ Variablen)		
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$	$E(\alpha X) = \alpha E(X)$	$X, Y$ unabh. $\Leftrightarrow E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$
$\Pr[A B] = \frac{\Pr[A \wedge B]}{\Pr[B]}$	$A, B$ disj. $\Leftrightarrow \Pr[A \wedge B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$	$\Pr[A \vee B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \wedge B]$

BERTRAND's Ballot Theorem (Kandidaten $A$ und $B$ , $k \in \mathbb{N}$ )		
$\#A > k\#B \quad \Pr = \frac{a-kb}{a+b}$	$\#B - \#A \leq k \quad \Pr = 1 - \frac{a!b!}{(a+k+1)!(b-k-1)!}$	
$\#A \geq k\#B \quad \Pr = \frac{a+1-kb}{a+1}$	$\#A \geq \#B + k \quad Num = \frac{a-k+1-b}{a-k+1} \binom{a+b-k}{b}$	

Verschiedenes	
Türme von Hanoi, minimale Schrittzahl:	$T_n = 2^n - 1$
#Regionen zwischen $n$ Geraden	$\frac{n(n+1)}{2} + 1$
#abgeschlossene Regionen zwischen $n$ Geraden	$\frac{n^2-3n+2}{2}$
#markierte, gewurzelte Bäume	$n^{n-1}$
#markierte, nicht gewurzelte Bäume	$n^{n-2}$
#Wälder mit $k$ gewurzelten Bäumen	$\frac{k}{n} \binom{n}{k} n^{n-k}$
#Wälder mit $k$ gewurzelten Bäumen mit vorgegebenen Wurzelknoten	$\frac{k}{n} n^{n-k}$
Dearrangements	$!n = (n-1)!(n-1)!(n-2) = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{!n}{n!} = \frac{1}{e}$

Nim-Spiele (❶ letzter gewinnt (normal), ❷ letzter verliert)	
Beschreibung	Strategie
$M = [pile_i]$ $[x] := \{1, \dots, x\}$	$SG = \oplus_{i=1}^n pile_i$ ❶ Nimm von einem Stapel, sodass $SG = 0$ wird. ❷ Genauso. Außer: Bleiben nur noch Stapel der Größe 1, erzeuge ungerade Anzahl solcher Stapel.
$M = \{a^m \mid m \geq 0\}$	$a$ ungerade: $SG_n = n \% 2$ $a$ gerade: $SG_n = 2$ , falls $n \equiv a \pmod{a+1}$ $SG_n = n \% (a+1) \% 2$ , sonst.
$M_{\text{❶}} = \left\lfloor \frac{pile_i}{2} \right\rfloor$ $M_{\text{❷}} = \left\lceil \frac{pile_i}{2} \right\rceil, pile_i\}$	❶ $SG_{2n} = n, SG_{2n+1} = SG_n$ ❷ $SG_0 = 0, SG_n = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$
$M_{\text{❶}} = \text{Teiler von } pile_i$ $M_{\text{❷}} = \text{echte Teiler von } pile_i$	❶ $SG_0 = 0, SG_n = SG_{\text{❷}, n} + 1$ ❷ $ST_1 = 0, SG_n = \# \text{Nullen am Ende von } n_{bin}$
$M_{\text{❶}} = [k]$ $M_{\text{❷}} = S, (S \text{ endlich})$ $M_{\text{❸}} = S \cup \{pile_i\}$	$SG_{\text{❶}, n} = n \pmod{k+1}$ ❶ Niederlage bei $SG = 0$ ❷ Niederlage bei $SG = 1$ $SG_{\text{❸}, n} = SG_{\text{❷}, n} + 1$
Für jedes endliche $M$ ist $SG$ eines Stapels irgendwann periodisch.	
MOORE's Nim: Beliebige Zahl von maximal $k$ Stapeln.	❶ Schreibe $pile_i$ binär. Addiere ohne Übertrag zur Basis $k+1$ . Niederlage, falls Ergebnis gleich 0. ❷ Wenn alle Stapel 1 sind: Niederlage, wenn $n \equiv 1 \pmod{k+1}$ . Sonst wie in ❶.
Staircase Nim: $n$ Stapel in einer Reihe. Beliebige Zahl von Stapel $i$ nach Stapel $i-1$ .	Niederlage, wenn Nim der ungeraden Spiele verloren ist: $\oplus_{i=0}^{(n-1)/2} pile_{2i+1} = 0$
LASKER's Nim: Zwei mögliche Züge: 1) Nehme beliebige Zahl. 2) Teile Stapel in zwei Stapel (ohne Entnahme).	$SG_n = n$ , falls $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ $SG_n = n+1$ , falls $n \equiv 3 \pmod{4}$ $SG_n = n-1$ , falls $n \equiv 0 \pmod{4}$
KAYLES' Nim: Zwei mögliche Züge: 1) Nehme beliebige Zahl. 2) Teile Stapel in zwei Stapel (mit Entnahme).	Berechne $SG_n$ für kleine $n$ rekursiv. $n \in [72, 83]: \quad 4, 1, 2, 8, 1, 4, 7, 2, 1, 8, 2, 7$ Periode ab $n = 72$ der Länge 12.

## 5 Strings

### 5.1 KNUTH-MORRIS-PRATT-Algorithmus

kmpSearch sucht sub in s  $O(|s| + |sub|)$

```

1 vector<int> kmpPreprocessing(const string& sub) {
2     vector<int> b(sz(sub) + 1);
3     b[0] = -1;
4     for (int i = 0, j = -1; i < sz(sub);) {
5         while (j >= 0 && sub[i] != sub[j]) j = b[j];
6         b[++i] = ++j;
7     }
8     return b;
9 }
10 vector<int> kmpSearch(const string& s, const string& sub) {
11     vector<int> result, pre = kmpPreprocessing(sub);
12     for (int i = 0, j = 0; i < sz(s);) {
13         while (j >= 0 && s[i] != sub[j]) j = pre[j];
14         i++; j++;
15         if (j == sz(sub)) {
16             result.push_back(i - j);
17             j = pre[j];
18         }
19     }
20     return result;
}

```

### 5.2 Z-Algorithmus

$z_i :=$  Längstes gemeinsames Präfix von  $s_0 \dots s_{i-1}$  und  $s_i \dots s_{n-1}$   $O(n)$

Suchen: Z-Algorithmus auf P&S ausführen, Positionen mit  $z_i = |P|$  zurückgeben

```

1 vector<int> Z(const string& s) {
2     int n = sz(s);
3     vector<int> z(n, n);
4     int x = 0, y = 0;
5     for (int i = 1; i < n; i++) {
6         z[i] = max(0, min(z[i - x], y - i + 1));
7         while (i + z[i] < n && s[z[i]] == s[i + z[i]]) {
8             x = i, y = i + z[i], z[i]++;
9         }
10        return z;
11    }
}

```

### 5.3 Rolling Hash

```

1 // q = 29, 101, 257, 65537, 100003, 1000033 (or random)
2 // m = 1500000001, 1600000009, 1700000009
3 // always compare hash and length of hashed range!
4 template<ll M, ll Q>
5 struct Hasher {
6     vector<ll> power = {1}, pref = {0};
7     Hasher(const string& s) {
8         for (auto x : s) {
9             power.push_back(power.back() * Q % M);
10            pref.push_back((pref.back() * Q % M + x) % M);
11        }
12        ll hash(int l, int r) { // Berechnet hash(s[l..r]).
13            return (pref[r] - power[r-l] * pref[l] % M + M) % M;
14        }
15    };
}

```

### 5.4 Pattern Matching mit Wildcards

Gegeben zwei strings A und B, B enthält k wildcards enthält. Sei:

$$a_i = \cos(\alpha_i) + i \sin(\alpha_i) \quad \text{mit } \alpha_i = \frac{2\pi A[i]}{\Sigma}$$

$$b_i = \cos(\beta_i) + i \sin(\beta_i) \quad \text{mit } \beta_i = \begin{cases} \frac{2\pi B[|B|-i-1]}{\Sigma} & \text{falls } B[|B|-i-1] \in \Sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

B matcht A an stelle i wenn  $(b \cdot a)[|B|-1+i] = |B|-k$ . Benutze FFT um  $(b \cdot a)$  zu berechnen.

### 5.5 MANACHER's Algorithm, Longest Palindrome

init transformiert string a  $O(n)$   
manacher berechnet Länge der Palindrome  $O(n)$

```

1 string a, b; //a needs to be set
2 vector<int> longest;
3 //transformes "aa" to ".a.a" to find even length palindromes
4 void init() {
5     b = string(sz(a) * 2 + 1, '.');
6     longest.assign(sz(b), 0);
7     for (int i = 0; i < sz(a); i++) {
8         b[2 * i + 1] = a[i];
9     }
10    void manacher() {
11        int center = 0, last = 0, n = sz(b);
12        for (int i = 1; i < n - 1; i++) {
13            int i2 = 2 * center - i;
14            longest[i] = (last > i) ? min(last - i, longest[i2]) : 0;
15            while (i + longest[i] + 1 < n && i - longest[i] - 1 >= 0 &&
16                b[i + longest[i] + 1] == b[i - longest[i] - 1]) {
17                longest[i]++;
18            }
19            if (i + longest[i] > last) {
20                center = i;
21                last = i + longest[i];
22            }
23            //convert lengths to string b (optional)
24            for (int i = 0; i < n; i++) longest[i] = 2 * longest[i] + 1;
25        }
}

```

### 5.6 Longest Common Subsequence

lcscs findet längste gemeinsame Sequenz  $O(|a| \cdot |b|)$

```

1 string lcscs(string& a, string& b) {
2     vector<vector<int>> m(sz(a) + 1, vector<int>(sz(b) + 1));
3     for(int y = sz(a) - 1; y >= 0; y--) {
4         for(int x = sz(b) - 1; x >= 0; x--) {
5             if(a[y] == b[x]) m[y][x] = 1 + m[y+1][x+1];
6             else m[y][x] = max(m[y+1][x], m[y][x+1]);
7         } // Für die Länge: return m[0][0];
8     }
9     string res; int x = 0, y = 0;
10    while(x < sz(b) && y < sz(a)) {
11        if(a[y] == b[x]) res += a[y++], x++;
12        else if(m[y][x+1] > m[y+1][x+1]) x++;
13        else y++;
14    }
15    return res;
}

```

### 5.7 AHO-CORASICK-Automat

sucht patterns im Text  $O(|Text| + \sum |pattern| + |matches|)$

1. mit addString(pattern, idx); Patterns hinzufügen.
2. mit state = go(state, idx) in nächsten Zustand wechseln.
3. mit state = getExit(state) den exit Kanten folgen bis state == 0
4. dabei mit aho[state].patterns die Matches zählen

```

1 constexpr ll ALPHABET_SIZE = 26;
2 constexpr char OFFSET = 'a';
3 struct AhoCorasick {
4     struct vert {
5         int suffix, exit, character, parent;
6         vector<int> nxt, patterns;
7     };
8     vert(int c, int p) : suffix(-1), exit(-1),
9         character(c), nxt(ALPHABET_SIZE, -1), parent(p) {}
10    };
11    vector<vert> aho;
12    AhoCorasick() { aho.push_back(vert(-1, 0)); }
13    // Call once for each pattern.
14    void addString(string& s, int patternIdx) {
15        int v = 0;
16        for (char c : s) {
17            int idx = c - OFFSET;
18            if (aho[v].nxt[idx] == -1) {
19                aho[v].nxt[idx] = sz(aho);
20                aho.emplace_back(idx, v);
21            }
22            v = aho[v].nxt[idx];
23        }
24        aho[v].patterns.push_back(patternIdx);
25    }
26    int getSuffix(int v) {
27        if (aho[v].suffix == -1) {
28            if (v == 0 || aho[v].parent == 0) aho[v].suffix = 0;
29            else aho[v].suffix = go(getSuffix(aho[v].parent),
30                aho[v].character);
31        }
32        return aho[v].suffix;
33    }
34    int getExit(int v) {
35        if (aho[v].exit == -1) {
36            int suffix = getSuffix(v);
37            if (v == 0) aho[v].exit = 0;
38            else {
39                if (aho[suffix].patterns.empty()) {
40                    aho[v].exit = getExit(suffix);
41                } else {
42                    aho[v].exit = suffix;
43                }
44            }
45        }
46        return aho[v].exit;
47    }
48    int go(int v, int idx) { // Root is v=0.
49        if (aho[v].nxt[idx] != -1) return aho[v].nxt[idx];
50        else return v == 0 ? 0 : go(getSuffix(v), idx);
51    }
}

```

## 5.8 Lyndon und De-Bruijn

- **Lyndon-Wort:** Ein Wort das lexikographisch kleiner ist als jede seiner Rotationen.
  - Jedes Wort kann *eindeutig* in eine nicht ansteigende Folge von Lyndon-Worten zerlegt werden.
  - Für Lyndon-Worte  $u, v$  mit  $u < v$  gilt, dass  $uv$  auch ein Lyndon-Wort ist.
- next      lexikographisch nächstes Lyndon-Wort     $O(n)$ , Durchschnitt  $\Theta(1)$   
 duval      zerlegt  $s$  in Lyndon-Worte     $O(n)$   
 minrotation    berechnet kleinste Rotation von  $s$      $O(n)$

```

1 bool next(string& s, int n, char mi = '0', char ma = '1') {
2     for (ll i = sz(s), j = sz(s); i < n; i++)
3         s.push_back(s[i % j]);
4     while (!s.empty() && s.back() == ma) s.pop_back();
5     if (s.empty()) {
6         s = mi;
7         return false;
8     } else {
9         s.back()++;
10        return true;
11    }

```

```

1 vector<pair<int, int>> duval(const string& s) {
2     vector<pair<int, int>> res;
3     for (int i = 0; i < sz(s);) {
4         int j = i + 1, k = i;
5         for (; j < sz(s) && s[k] <= s[j]; j++) {
6             if (s[k] < s[j]) k = i;
7             else k++;
8         }
9         while (i <= k) {
10            res.push_back({i, i + j - k});
11            i += j - k;
12        }
13        return res;
14    }

```

```

15 int minrotation(const string& s) {
16     auto parts = duval(s+s);
17     for (auto e : parts) {
18         if (e.first < sz(s) && e.second >= sz(s)) {
19             return e.first;
20         }

```

- **De-Bruijn-Sequenz  $B(\Sigma, n)$ :** ein Wort das jedes Wort der Länge  $n$  genau einmal als substring enthält (und minimal ist). Wobei  $B(\Sigma, n)$  zyklisch betrachtet wird.
- es gibt  $\frac{(k!)^{n-1}}{k^n}$  verschiedene  $B(\Sigma, n)$
- $B(\Sigma, n)$  hat Länge  $|\Sigma|^n$
- deBruijn berechnet ein festes  $B(\Sigma, n)$   $O(|\Sigma|^n)$

```

1 string deBruijn(int n, char mi = '0', char ma = '1') {
2     string res, c(1, mi);
3     do {
4         if (n % sz(c) == 0) res += c;
5     } while (next(c, n, mi, ma));
6     return res;
7 }

```

## 5.9 Suffix-Array

SuffixArray    berechnet ein Suffix Array     $O(|s| \cdot \log^2(|s|))$   
 lcp      berechnet den longest common prefix     $O(\log(|s|))$   
             von  $s[x]$  und  $s[y]$

**ACHTUNG:**  $s$  muss mit einem sentinel enden! '\$' oder '#'

```

1 struct SuffixArray {
2     int n, step, count;
3     vector<int> SA, LCP;
4     vector<vector<int>> P;
5     vector<pair<pair<int, int>, int>> L;
6
7     SuffixArray(const string& s) : n(sz(s)), SA(n), LCP(n), L(n) {
8         P.assign(_lg(n)*4-2, vector<int>(n));
9         for (int i = 0; i < n; i++) P[0][i] = s[i];
10        for (step = 1, count = 1; count < n; step++, count *= 2) {
11            for (int i = 0; i < n; i++)
12                L[i] = {{P[step-1][i],
13                        i+count < n ? P[step-1][i+count] : -1}, i};
14            sort(all(L));
15            for (int i = 0; i < n; i++) {
16                P[step][L[i].second] =
17                    i > 0 && L[i].first == L[i-1].first ?
18                    P[step][L[i-1].second] : i;
19            }
20            for (int i = 0; i < n; i++) SA[i] = L[i].second;
21            for (int i = 1; i < n; i++) LCP[i] = lcp(SA[i-1], SA[i]);
22        }
23        // x and y are text-indices, not SA-indices.
24        int lcp(int x, int y) {
25            int ret = 0;
26            if (x == y) return n - x;
27            for (int k = step - 1; k >= 0 && x < n && y < n; k--) {
28                if (P[k][x] == P[k][y]) {
29                    x += 1 << k;
30                    y += 1 << k;
31                    ret += 1 << k;
32                }
33            }
34            return ret;

```

## 5.10 Suffix-Baum

SuffixTree    berechnet einen Suffixbaum     $O(|s|)$   
 extend      fügt den nächsten Buchstaben aus  $s$  ein     $O(1)$

```

1 struct SuffixTree {
2     struct Vert {
3         int start, end, suf;
4         map<char, int> next;
5     };
6     string s;
7     int needsSuffix, pos, remainder, curVert, curEdge, curLen;
8     // Each Vertex gives its children range as [start, end)
9     vector<Vert> tree = {Vert{-1, -1, 0}};
10
11     SuffixTree(const string& s) : s(s) {
12         needsSuffix = remainder = curVert = curEdge = curLen = 0;
13         pos = -1;

```

```

13         for (int i = 0; i < sz(s); i++) extend();
14     }
15     int newVert(int start, int end) {
16         tree.push_back({start, end, 0, {}});
17         return sz(tree) - 1;
18     }
19     void addSuffixLink(int vert) {
20         if (needsSuffix) tree[needsSuffix].suf = vert;
21         needsSuffix = vert;
22     }
23     bool fullImplicitEdge(int vert) {
24         len = min(tree[vert].end, pos + 1) - tree[vert].start;
25         if (curLen >= len) {
26             curEdge += len;
27             curLen -= len;
28             curVert = vert;
29             return true;
30         } else {
31             return false;
32         }
33     }
34     void extend() {
35         pos++;
36         needsSuffix = 0;
37         remainder++;
38         while (remainder) {
39             if (curLen == 0) curEdge = pos;
40             if (!tree[curVert].next.count(s[curEdge])) {
41                 int leaf = newVert(pos, sz(s));
42                 tree[curVert].next[s[curEdge]] = leaf;
43                 addSuffixLink(curVert);
44             } else {
45                 int nxt = tree[curVert].next[s[curEdge]];
46                 if (fullImplicitEdge(nxt)) continue;
47                 if (s[tree[nxt].start + curLen] == s[pos]) {
48                     curLen++;
49                     addSuffixLink(curVert);
50                     break;
51                 }
52                 int split = newVert(tree[nxt].start,
53                                     tree[nxt].start + curLen);
54                 tree[curVert].next[s[curEdge]] = split;
55                 int leaf = newVert(pos, sz(s));
56                 tree[split].next[s[pos]] = leaf;
57                 tree[nxt].start += curLen;
58                 tree[split].next[s[tree[nxt].start]] = nxt;
59                 addSuffixLink(split);
60             }
61             remainder--;
62             if (curVert == 0 && curLen) {
63                 curLen--;
64                 curEdge = pos - remainder + 1;
65             } else {
66                 curVert = tree[curVert].suf ? tree[curVert].suf : 0;
67             }

```

## 5.11 Suffix-Automaton

```

1 constexpr char MIN_CHAR = 'a';
2 constexpr ll ALPHABET_SIZE = 26;
3 struct SuffixAutomaton {
4     struct State {
5         int length, link;
6         vector<int> next;
7         State() : next(ALPHABET_SIZE) {}
8     };
9     vector<State> states;
10    int size, last;
11
12    SuffixAutomaton(const string &s) : states(2*sz(s)) {
13        size = 1; last = 0;
14        states[0].link = -1;
15        for (auto c : s) extend(c - MIN_CHAR);
16    }
17
18    void extend(int c) {
19        int current = size++;
20        states[current].length = states[last].length + 1;
21        int pos = last;
22        while (pos != -1 && !states[pos].next[c]) {
23            states[pos].next[c] = current;
24            pos = states[pos].link;
25        }
26        if (pos == -1) states[current].link = 0;
27        else {
28            int q = states[pos].next[c];
29            if (states[pos].length + 1 == states[q].length) {
30                states[current].link = q;
31            } else {
32                int clone = size++;
33                states[clone].length = states[pos].length + 1;
34                states[clone].link = states[q].link;
35                states[clone].next = states[q].next;
36                while (pos != -1 && states[pos].next[c] == q) {
37                    states[pos].next[c] = clone;
38                    pos = states[pos].link;
39                }
40                states[q].link = states[current].link = clone;
41            }
42        }
43        last = current;
44    }
45
46    // Pair with start index (in t) and length of LCS.
47    pair<int, int> longestCommonSubstring(const string &t) {
48        int v = 0, l = 0, best = 0, bestpos = 0;
49        for (int i = 0; i < sz(t); i++) {
50            int c = t[i] - MIN_CHAR;
51            while (v && !states[v].next[c]) {
52                v = states[v].link;
53                l = states[v].length;
54            }
55            if (states[v].next[c]) {v = states[v].next[c]; l++;}
56            if (l > best) {best = l; bestpos = i;}
57        }
58        return {bestpos - best + 1, best};
59    }
60 }

```

```

56 // Returns all terminals of the automaton.
57 vector<int> calculateTerminals() {
58     vector<int> terminals;
59     int pos = last;
60     while (pos != -1) {
61         terminals.push_back(pos);
62         pos = states[pos].link;
63     }
64     return terminals;
65 }
66 }

```

- Ist  $w$  Substring von  $s$ ? Baue Automaten für  $s$  und wende ihn auf  $w$  an. Wenn alle Übergänge vorhanden sind, ist  $w$  Substring von  $s$ .
- Ist  $w$  Suffix von  $s$ ? Wie oben und prüfe, ob Endzustand ein Terminal ist.
- Anzahl verschiedener Substrings. Jeder Pfad im Automaten entspricht einem Substring. Für einen Knoten ist die Anzahl der ausgehenden Pfade gleich der Summe über die Anzahlen der Kindknoten plus 1. Der letzte Summand ist der Pfad, der in diesem Knoten endet.
- Wie oft taucht  $w$  in  $s$  auf? Sei  $p$  der Zustand nach Abarbeitung von  $w$ . Lösung ist Anzahl der Pfade, die in  $p$  starten und in einem Terminal enden. Diese Zahl lässt sich wie oben rekursiv berechnen. Bei jedem Knoten darf nur dann plus 1 gerechnet werden, wenn es ein Terminal ist.

## 5.12 Trie

```

1 // Zahlenwerte müssen bei 0 beginnen und zusammenhängend sein.
2 constexpr int ALPHABET_SIZE = 2;
3 struct node {
4     int words, wordEnds; vector<int> children;
5     node() : words(0), wordEnds(0), children(ALPHABET_SIZE, -1){}
6 };
7 vector<node> trie = {node()};
8
9 int insert(vector<int>& word) {
10     int id = 0;
11     for (int c : word) {
12         trie[id].words++;
13         if (trie[id].children[c] < 0) {
14             trie[id].children[c] = sz(trie);
15             trie.emplace_back();
16         }
17         id = trie[id].children[c];
18     }
19     trie[id].wordEnds++;
20     return id;
21 }
22
23 void erase(vector<int>& word) {
24     int id = 0;
25     for (int c : word) {
26         trie[id].words--;
27         id = trie[id].children[c];
28     }
29     trie[id].wordEnds--;
30     trie[id].wordEnds--;
31 }

```

## 6 Java

### 6.1 Input

- Scanner ist sehr langsam. Nicht für lange Eingaben verwenden

### 6.2 Output

- System.out flusht nach jeder newline  $\Rightarrow$  langsam
- String.format langsam
- + auf String benutzt StringBuilder  $\Rightarrow$  schnell und leicht (bei vielen +-Operationen an unterschiedlichen Stellen doch explizit StringBuilder nutzen)

## 7 Sonstiges

### 7.1 Compiletime

- überprüfen ob Compilezeit Berechnungen erlaubt sind!
- braucht c++14 oder höher!

```

1 template<int N>
2 struct Table {
3     int data[N];
4     constexpr Table() : data {} {
5         for (int i = 0; i < N; i++) data[i] = i;
6     };
7     constexpr Table<100000> precalculated;

```

### 7.2 Bit Operations

Bit an Position $j$ lesen	$(x \& (1 \ll j)) \neq 0$
Bit an Position $j$ setzen	$x \mid= (1 \ll j)$
Bit an Position $j$ löschen	$x \&= \sim(1 \ll j)$
Bit an Position $j$ flippen	$x \wedge= (1 \ll j)$
Anzahl an führenden nullen ( $x \neq 0$ )	<code>__builtin_clzll(x)</code>
Anzahl an schließenden nullen ( $x \neq 0$ )	<code>__builtin_ctzll(x)</code>
Anzahl an bits	<code>__builtin_popcountll(x)</code>
$i$ -te Zahl eines Graycodes	$i \wedge (i \gg 1)$

```

1 // Iteriert über alle Teilmengen einer Bitmaske
2 // (außer der Leeren Menge).
3 for (int subset = bitmask; subset > 0;
4     subset = (subset - 1) & bitmask)
5
6 // Zählt Anzahl der gesetzten Bits.
7 int numberOfSetBits(int i) {
8     i = i - ((i >> 1) & 0x55555555);
9     i = (i & 0x33333333) + ((i >> 2) & 0x33333333);
10    return (((i + (i >> 4)) & 0xF0F0F0F) * 0x01010101) >> 24;
11 }
12
13 // Nächste Permutation in Bitmaske
14 // (z.B. 00111 => 01011 => 01101 => ...)
15 ll nextPerm(ll v) {
16     ll t = v | (v - 1);
17     return (t+1) | (((~t & --t) - 1) >> (__builtin_ctzll(v) + 1));
18 }

```

### 7.3 Overflow-sichere arithmetische Operationen

Gibt zurück, ob es einen Overflow gab. Wenn nicht, enthält  $c$  das Ergebnis.

Addition	<code>__builtin_saddll_overflow(a, b, &amp;c)</code>
Subtraktion	<code>__builtin_ssubll_overflow(a, b, &amp;c)</code>
Multiplikation	<code>__builtin_smulll_overflow(a, b, &amp;c)</code>



## 7.4 Timed

Kann benutzt werden um randomisierte Algorithmen so lange wie möglich laufen zu lassen.

```
1 int times = clock();
2 //run for 900ms
3 while (1000*(clock()-times)/CLOCKS_PER_SEC < 900) {...}
```

## 7.5 DP Optimizations

Aufgabe: Partitioniere Array in genau  $k$  zusammenhängende Teile mit minimalen Kosten:  $dp[i][j] = \min_{k < j} \{dp[i-1][k] + C[k][j]\}$ . Es sei  $A[i][j]$  das minimale optimale  $k$  bei der Berechnung von  $dp[i][j]$ .

**KNUTH-Optimization** Vorbedingung:  $A[i-1][j] \leq A[i][j] \leq A[i][j+1]$   
calc berechnet das DP  $O(n^2)$

```
1 ll calc(int n, int k, const vector<vector<ll>> &C) {
2     vector<vector<ll>> dp(k, vector<ll>(n, inf));
3     vector<vector<int>> opt(k, vector<int>(n+1, n-1));
4     for (int i = 0; i < n; i++) dp[0][i] = C[0][i];
5     for (int i = 1; i < k; i++) {
6         for (int j = n-1; j >= 0; --j) {
7             opt[i][j] = i == 1 ? 0 : opt[i-1][j];
8             for (int k = opt[i][j]; k <= min(opt[i][j+1], j-1); k++) {
9                 if (dp[i][j] <= dp[i-1][k] + C[k+1][j]) continue;
10                dp[i][j] = dp[i-1][k] + C[k+1][j];
11                opt[i][j] = k;
12            }
13        }
14    }
15    return dp[k-1][n-1];
16 }
```

**Divide and Conquer** Vorbedingung:  $A[i][j-1] \leq A[i][j]$ .  
calc berechnet das DP  $O(k \cdot n \cdot \log(n))$

```
1 vector<vector<ll>> dp;
2 vector<vector<ll>> C;
3 void rec(int i, int j0, int j1, int k0, int k1) {
4     if (j1 < j0) return;
5     int jmid = (j0 + j1) / 2;
6     dp[i][jmid] = inf;
7     int bestk = k0;
8     for (int k = k0; k < min(jmid, k1+1); ++k) {
9         if (dp[i-1][k] + C[k+1][jmid] < dp[i][jmid]) {
10            dp[i][jmid] = dp[i-1][k] + C[k+1][jmid];
11            bestk = k;
12        }
13    }
14    rec(i, j0, jmid-1, k0, bestk);
15    rec(i, jmid+1, j1, bestk, k1);
16 }
17 ll calc(int n, int k) {
18     dp = vector<vector<ll>>(k, vector<ll>(n, inf));
19     for (int i = 0; i < n; i++) dp[0][i] = C[0][i];
20     for (int i = 1; i < k; i++) {
21         rec(i, 0, n-1, 0, n-1);
22     }
23     return dp[k-1][n-1];
24 }
```

**Quadrangle inequality** Die Bedingung  $\forall a \leq b \leq c \leq d : C[a][d] + C[b][c] \geq C[a][c] + C[b][d]$  ist hinreichend für beide Optimierungen.

**Sum over Subsets DP**  $res[mask] = \sum_{i \subseteq mask} in[i]$

```
1 vector<ll> res(in);
2 for (int i = 1; i < sz(res); i *= 2) {
3     for (int mask = 0; mask < sz(res); mask++) {
4         if (mask & i) {
5             F[mask] += F[mask ^ i];
6         }
7     }
8 }
```

## 7.6 Parallel Binary Search

```
1 // Q = Anzahl der Anfragen
2 // C = Anzahl der Schritte der Operation
3 vector<vector<int>> focus;
4 vector<int> low, high, ans;
5 ans.assign(Q, C+1);
6 low.assign(Q, 0);
7 high.assign(Q, C);
8 focus.assign(C+1, vector<int>());
9 for (bool changed = true; changed;) {
10     changed = false;
11     for (int i = 0; i <= C; i++) focus[i].clear();
12     for (int i = 0; i < Q; i++) {
13         if (low[i] > high[i]) continue;
14         focus[(low[i] + high[i]) / 2].pb(i);
15     }
16     // Simulation zurücksetzen
17     for (int k = 0; k <= C; k++) {
18         // Simulationsschritt
19         for (int q : focus[k]) {
20             changed = true;
21             if (/* Eigenschaft schon erfüllt */) {
22                 // Antwort updaten
23                 high[q] = k-1;
24                 ans[q] = min(ans[q], k);
25             } else {
26                 low[q] = k+1;
27             }
28         }
29     }
30 }
```

## 7.7 Josephus-Problem

$n$  Personen im Kreis, jeder  $k$ -te wird erschossen.

**Spezialfall  $k=2$ :** Betrachte  $n$  Binär. Für  $n = 1b_1b_2b_3..b_n$  ist  $b_1b_2b_3..b_n$  die Position des letzten Überlebenden. (Rotiere  $n$  um eine Stelle nach links)

```
1 int rotateLeft(int n) { // Der letzte Überlebende, 1-basiert.
2     for (int i = 31; i >= 0; i--) {
3         if (n & (1 << i)) {
4             n ^= (1 << i);
5             break;
6         }
7     }
8     n <<= 1; n++; return n;
9 }
```

**Allgemein:** Sei  $F(n, k)$  die Position des letzten Überlebenden. Nummeriere die Personen mit  $0, 1, \dots, n-1$ . Nach Erschießen der  $k$ -ten Person, hat der Kreis noch Größe  $n-1$  und die Position des Überlebenden ist jetzt  $F(n-1, k)$ . Also:  $F(n, k) = (F(n-1, k) + k) \% n$ . Basisfall:  $F(1, k) = 0$ .

```
1 // Der letzte Überlebende, 0-basiert.
2 int josephus(int n, int k) {
3     if (n == 1) return 0;
4     return (josephus(n-1, k) + k) % n;
5 }
```

Beachte bei der Ausgabe, dass die Personen im ersten Fall von  $1, \dots, n$  nummeriert sind, im zweiten Fall von  $0, \dots, n-1$ !

## 7.8 Pragmas

```
1 #pragma GCC optimize("Ofast")
2 #pragma GCC optimize("unroll-loops")
3 #pragma GCC target("sse,sse2,sse3,ssse3,sse4,"
4     "popcnt,abm,mmx,avx,tune=native")
5 #pragma GCC target("fpmath=sse,sse2") // no excess precision
6 #pragma GCC target("fpmath=387") // force excess precision
```

## 7.9 Sonstiges

```
1 // Alles-Header.
2 #include <bits/stdc++.h>
3 // Setzt das deutsche Tastaturlayout.
4 setlocale(LC_ALL, "de");
5 // Schnelle Ein-/Ausgabe mit cin/cout.
6 ios::sync_with_stdio(false);
7 cin.tie(nullptr);
8 // Set mit eigener Sortierfunktion.
9 set<point2, decltype(comp)> set1(comp);
10 // STL-Debugging, Compiler flags.
11 -D_GLIBCXX_DEBUG
12 #define _GLIBCXX_DEBUG
13 // 128-Bit Integer/Float. Muss zum Einlesen/Ausgeben
14 // in einen int oder long long gecastet werden.
15 __int128, __float128
16 // float mit Decimaldarstellung
17 #include <decimal/decimal>
18 std::decimal::decimal128
19 // 1e18 < INF < Max_Value / 2
20 constexpr long long INF = 0x3FFF_FFFF_FFFF_FFFFll;
21 // 1e9 < INF < Max_Value / 2
22 constexpr int INF = 0x3FFF_FFFF;
```

## 7.10 Gemischtes

- **(Minimum) Flow mit Demand  $d$ :** Erstelle neue Quelle  $s'$  und Senke  $t'$  und setze die folgenden Kapazitäten:

$$c'(s', v) = \sum_{u \in V} d(u, v) \quad c'(v, t') = \sum_{u \in V} d(v, u)$$

$$c'(u, v) = c(u, v) - d(u, v) \quad c'(t, s) = x$$

Löse Fluss auf  $G'$  mit DINC's ALGORITHMUS, wenn alle Kanten von  $s'$  saturiert sind ist der Fluss in  $G$  gültig.  $x$  beschränkt den Fluss in  $G$  (Binary-Search für minflow,  $\infty$  sonst).

- **JOHNSONS Reweighting Algorithmus:** Initialisiere alle Entfernungen mit  $d[i] = 0$ . Berechne mit BELLMANN-FORD kürzeste Entfernungen. Falls es einen negativen Zyklus gibt abbrechen. Sonst ändere die Gewichte von allen Kanten  $(u, v)$  um ursprünglichen Graphen zu  $d[u] + w[u, v] - d[v]$ . Dann sind alle Kantengewichte nichtnegativ, DIJKSTRA kann angewendet werden.
- **System von Differenzbeschränkungen:** Ändere alle Bedingungen in die Form  $a - b \leq c$ . Für jede Bedingung füge eine Kante  $(b, a)$  mit Gewicht  $c$  ein. Füge Quelle  $s$  hinzu, mit Kanten zu allen Knoten mit Gewicht 0. Nutze BELLMANN-FORD, um die kürzesten Pfade von  $s$  aus zu finden.  $d[v]$  ist mögliche Lösung für  $v$ .
- **Min-Weight-Vertex-Cover im Bipartiten Graph:** Partitioniere in  $A$ ,  $B$  und füge Kanten  $s \rightarrow A$  mit Gewicht  $w(A)$  und Kanten  $B \rightarrow t$  mit Gewicht  $w(B)$  hinzu. Füge Kanten mit Kapazität  $\infty$  von  $A$  nach  $B$  hinzu, wo im originalen Graphen Kanten waren. Max-Flow ist die Lösung.

Im Residualgraphen:

- Das Vertex-Cover sind die Knoten inzident zu den Brücken. oder
- Die Knoten in  $A$ , die *nicht* von  $s$  erreichbar sind und die Knoten in  $B$ , die von  $t$  erreichbar sind.
- **Allgemeiner Graph:** Das Komplement eines Vertex-Cover ist ein Independent Set.  $\Rightarrow$  Max Weight Independent Set ist Komplement von Min Weight Vertex Cover.
- **Bipartiter Graph:** Min Vertex Cover (kleinste Menge Knoten, die alle Kanten berühren) = Max Matching. Richte Kanten im Matching von  $B$  nach  $A$  und sonst von  $A$  nach  $B$ , markiere alle Knoten die von einem ungematchten Knoten in  $A$  erreichbar sind, das Vertex Cover sind die markierten Knoten aus  $B$  und die unmarkierten Knoten aus  $A$ .
- **Bipartites Matching mit Gewichten auf linken Knoten:** Minimiere Matchinggewicht. Lösung: Sortiere Knoten links aufsteigend nach Gewicht, danach nutze normalen Algorithmus (KUHN, Seite 9)
- **Satz von PICK:** Sei  $A$  der Flächeninhalt eines einfachen Gitterpolygons,  $I$  die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren und  $R$  die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand. Es gilt:

$$A = I + \frac{R}{2} - 1$$

- **Lemma von BURNSIDE:** Sei  $G$  eine endliche Gruppe, die auf der Menge  $X$  operiert. Für jedes  $g \in G$  sei  $X^g$  die Menge der Fixpunkte bei Operation durch  $g$ , also  $X^g = \{x \in X \mid g \bullet x = x\}$ . Dann gilt für die Anzahl der Bahnen  $[X/G]$  der Operation:

$$[X/G] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

- **POLYA Counting:** Sei  $\pi$  eine Permutation der Menge  $X$ . Die Elemente von  $X$  können mit einer von  $m$  Farben gefärbt werden. Die Anzahl der Färbungen, die Fixpunkte von  $\pi$  sind, ist  $m^{\#(\pi)}$ , wobei  $\#(\pi)$  die Anzahl der Zyklen von  $\pi$  ist. Die Anzahl der Färbungen von Objekten einer Menge  $X$  mit  $m$  Farben unter einer Symmetriegruppe  $G$  ist gegeben durch:

$$[X/G] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m^{\#(g)}$$

- **Verteilung von Primzahlen:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt: Es existiert eine Primzahl  $p$  mit  $n \leq p \leq 2n$ .
- **Satz von KIRCHHOFF:** Sei  $G$  ein zusammenhängender, ungerichteter Graph evtl. mit Mehrfachkanten. Sei  $A$  die Adjazenzmatrix von  $G$ . Dabei ist  $a_{ij}$  die Anzahl

der Kanten zwischen Knoten  $i$  und  $j$ . Sei  $B$  eine Diagonalmatrix,  $b_{ii}$  sei der Grad von Knoten  $i$ . Definiere  $R = B - A$ . Alle Kofaktoren von  $R$  sind gleich und die Anzahl der Spannbäume von  $G$ .

Entferne letzte Zeile und Spalte und berechne Betrag der Determinante.

- **DILWORTH'S-Theorem:** Sei  $S$  eine Menge und  $\leq$  eine partielle Ordnung ( $S$  ist ein Poset). Eine *Kette* ist eine Teilmenge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  mit  $x_1 \leq \dots \leq x_n$ . Eine *Partition* ist eine Menge von Ketten, sodass jedes  $s \in S$  in genau einer Kette ist. Eine *Antikette* ist eine Menge von Elementen, die paarweise nicht vergleichbar sind. Es gilt: Die Größe der längsten Antikette gleicht der Größe der kleinsten Partition.  $\Rightarrow$  Weite des Poset.

Berechnung: Maximales Matching in bipartitem Graphen. Dupliziere jedes  $s \in S$  in  $u_s$  und  $v_s$ . Falls  $x \leq y$ , füge Kante  $u_x \rightarrow v_y$  hinzu. Wenn Matching zu langsam ist, versuche Struktur des Posets auszunutzen und evtl. anders eine maximale Antikette zu finden.

- **TURAN's-Theorem:** Die Anzahl an Kanten in einem Graphen mit  $n$  Knoten der keine clique der größe  $x+1$  enthält ist:

$$ext(n, K_{x+1}) = \binom{n}{2} - \left[ (x - (n \bmod x)) \cdot \binom{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor}{2} + (n \bmod x) \cdot \binom{\lceil \frac{n}{x} \rceil}{2} \right]$$

- **EULER's-Polyedersatz:** In planaren Graphen gilt  $n - m + f - c = 1$ .
- **PYTHAGOREISCHE TRIPLE:** Sei  $m > n > 0$ ,  $k > 0$  und  $m \not\equiv n \pmod 2$  dann beschreibt diese Formel alle Pythagoreischen Triple eindeutig:

$$k \cdot \begin{pmatrix} a = m^2 - n^2, & b = 2mn, & c = m^2 + n^2 \end{pmatrix}$$

- **Centroids of a Tree:** Ein *Centroid* ist ein Knoten, der einen Baum in Komponenten der maximalen Größe  $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$  splitted. Es kann 2 Centroids geben!
- **Centroid Decomposition:** Wähle zufälligen Knoten und mache DFS. Verschiebe ausgewählten Knoten in Richtung des tiefsten Teilbaums, bis Centroid gefunden. Entferne Knoten, mache rekursiv in Teilbäumen weiter. Laufzeit:  $O(|V| \cdot \log(|V|))$ .
- **Gregorian Calendar:** Der Anfangstag des Jahres verhält sich periodisch alle 400 Jahre.
- **Pivotsuche und Rekursion auf linkem und rechtem Teilarray:** Suche gleichzeitig von links und rechts nach Pivot, um Worst Case von  $O(n^2)$  zu  $O(n \log n)$  zu verbessern.
- **Mo's Algorithm:** SQRT-Decomposition auf  $n$  Intervall Queries  $[l, r]$ . Gruppier Queries in  $\sqrt{n}$  Blöcke nach linker Grenze  $l$ . Sortiere nach Block und bei gleichem Block nach rechter Grenze  $r$ . Beantworte Queries offline durch schrittweise Vergrößern/Verkleinern des aktuellen Intervalls. Laufzeit:  $O(n \cdot \sqrt{n})$ . (Anzahl der Blöcke als Konstante in Code schreiben.)
- **SQRT Techniques:**
  - Aufteilen in *leichte* (wert  $\leq \sqrt{x}$ ) und *schwere* (höchstens  $\sqrt{x}$  viele) Objekte.
  - Datenstruktur in Blöcke fester Größe (z.B. 256 oder 512) aufteilen.
  - Datenstruktur nach fester Anzahl Updates komplett neu bauen.
  - Wenn die Summe über  $x_i$  durch  $X$  beschränkt ist, dann gibt es nur  $\sqrt{2X}$  verschiedene Werte von  $x_i$  (z.B. Längen von Strings).
  - Wenn  $w \cdot h$  durch  $X$  beschränkt ist, dann ist  $\min(w, h) \leq \sqrt{X}$ .

## 7.11 Tipps & Tricks

- Run Time Error:
  - Stack Overflow? Evtl. rekursive Tiefsuche auf langem Pfad?
  - Array-Grenzen überprüfen. Indizierung bei 0 oder bei 1 beginnen?
  - Abbruchbedingung bei Rekursion?
  - Evtl. Memory Limit Exceeded?
- Strings:
  - Soll "aa" kleiner als "z" sein oder nicht?
  - bit 0x20 beeinflusst Groß-/Kleinschreibung.

- Gleitkommazahlen:
  - NaN? Evtl. ungültige Werte für mathematische Funktionen, z.B.  $\text{acos}(1.000000000000001)$ ?
  - Falsches Runden bei negativen Zahlen? Abschneiden  $\neq$  Abrunden!
  - genügend Präzision oder Output in wissenschaftlicher Notation (1e-25)?
  - Kann -0.000 ausgegeben werden?
- Wrong Answer:
  - Lies Aufgabe erneut. Sorgfältig!
  - Mehrere Testfälle in einer Datei? Probiere gleichen Testcase mehrfach hintereinander.
  - Integer Overflow? Teste maximale Eingabegrößen und mache Überschlagsrechnung.
  - Integer Division rundet zur 0  $\neq$  abrunden.
  - Eingabegrößen überprüfen. Sonderfälle ausprobieren.
    - $n=0$ ,  $n=-1$ ,  $n=1$ ,  $n=2^{31}-1$ ,  $n=-2^{31}$
    - $n$  gerade/ungerade
    - Graph ist leer/enthält nur einen Knoten.
    - Liste ist leer/enthält nur ein Element.
    - Graph ist Multigraph (enthält Schleifen/Mehrfachkanten).
    - Sind Kanten gerichtet/ungerichtet?
    - Polygon ist konkav/selbstschneidend.
  - Bei DP/Rekursion: Stimmt Basisfall?
  - Unsicher bei benutzten STL-Funktionen?

## 8 Template

### 8.1 C++

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 #define forA(i, n) for (int i = 0; i < n; ++i)
6 #define forB(i, n) for (int i = 1; i <= n; ++i)
7 #define all(x) begin(x), end(x)
8 #define sz(x) (ll)(x).size()
9 #define _ << " " <<
10 #define debug(x) #x << " = " << (x)
11
12 using ll = long long;
13 using ld = long double;
14 using pii = std::pair<int, int>;
15
16 int main() {
17     std::ios::sync_with_stdio(false);
18     std::cin.tie(nullptr);
19 }
```

### 8.2 Console

```

1 alias comp=
2     "g++ -std=gnu++17 -O2 -Wall -Wextra -Wconversion -Wshadow"
3
4 alias dbg="comp -g -fsanitize=address -fsanitize=undefined"
```



## 9 Tests

Dieser Abschnitt enthält lediglich Dinge die während der Practicesession getestet werden sollten!

### 9.1 GCC

- sind c++14 Feature vorhanden?
- sind c++17 Feature vorhanden?
- kompiliert dieser Code:

```
1 //https://gcc.gnu.org/bugzilla/show_bug.cgi?id=68203
2 struct A {
3     pair<int, int> values[1000000];
4 };
```

- funktioniert \_\_int128?
- funktionieren Pragmas?
- funktionieren constexpr zur Compilezeit (+Zeitlimit)?
- wie groß ist sizeof(char\*)?
- wie groß ist RAND\_MAX?
- funktioniert random\_device? (und gib es unterschiedliche Ergebnisse?)
- funktioniert clock()?

### 9.2 Java

- startet eclipse?
- funktionieren Java8 feature (lambdas)?

### 9.3 Judge

- ist der Checker casesensitive?
- wie werden zusätzliches Whitespacecharacter bei sonst korrektem Output behandelt?
- vergleiche ausführungszeit auf dem judge und lokal (z.b. mit Primzahl Sieb)

```
1 "\r\r\r\r\n\t \r\n\r"
```

### 9.4 Precision

- Mode 0 means no excess precision
- Mode 2 means excess precision (all operations in 80 bit floats)
- Result 0 without excess precision (expected floating point error)
- $\sim 8e^{-17}$  with excess precision (real value)

```
1 #include <cfloat>
2 int main() {
3     cout << "Mode: " << FLT_EVAL_METHOD << endl;
4     double a = atof("1.2345678");
5     double b = a*a;
6     cout << b - 1.52415765279683990130 << '\n';
7 }
```