Chapter4_Ztransform

September 14, 2020

# 1 4. Transformées en Z

## 1.1 4.1 Définitions

### 1.1.1 Définition 4.1

La transformée en z d'un signal discret $\{w(kh)\}$, dénotée $W(z)$ ou $\mathscr{Z}\{w(kh)\}$, est définie par la série de puissances négatices suivante, où z est une variable complexe:

$$W(z) = \mathscr{Z}\big\{w(kh)\big\} = \sum_{k=0}^{\infty} w(kh)z^{-k}$$

Cette série converge pour $\|z\| > r$.

### 1.1.2 Définition 4.2

La transformée en z inverse d'une fonction $W : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est le signal discret $\{w(kh)\}$, dénoté $\mathscr{Z}^{-1}\big(W(z)\big)$, tel que $\mathscr{Z}\big\{w(kh)\big\} = W(z)$

**Example** Le signal discret $\{w(kh)\}$ de durée finie est défini ainsi:

$$\big\{w(kh)\big\} = \{0, \mathbf{1}, 3, -2, 0, 0\}$$

L'élément en gras représente la valeur du signal pour $k = 0$.

Pour $z \neq 0$, la transformée de ce signal est donnée par:

$$\mathscr{Z}\{w(kh)\} = 1 + 3z^{-1} - 2z^{-2}$$

## 1.2 4.2 Propriétés de la transformée en Z

Les propriétés de la transformée en Z sont résumées ci-après:

**Linéarité**

$$\mathscr{Z}\left(\{w_1(kh)\} + \{w_2(kh)\}\right) = \mathscr{Z}\left\{w_1(kh)\right\} + \mathscr{Z}\left\{w_2(kh)\right\}$$
$$\mathscr{Z}\left(a\left\{w(kh)\right\}\right) = a\mathscr{Z}\left\{w(kh)\right\}$$

**Décalages temporels**

$$\mathscr{Z}\left\{w(kh-dh)\right\} = z^{-d}W(z)$$

$$\mathscr{Z}\left\{w(kh+dh)\right\} = z^{d}W(z) - \sum_{i=0}^{d-1} w(ih)z^{d-i}$$

**Dérivation complexe**

$$\mathscr{Z}\left\{khw(kh)\right\} = -hz\frac{dW}{dz}(z)$$

**Changement d'échelle complexe**

$$\mathscr{Z}\left\{a^{kh}w(kh)\right\} = W\left(\frac{z}{a^{h}}\right)$$

**Valeurs initiales et finale**

$$w(0) = \lim_{z\to\infty} W(z)$$

$$\lim_{k\to\infty} w(kh) = \lim_{z\to 1}(z-1)W(z)$$

**Produit de convolution**

$$\mathscr{Z}\left\{\sum_{l=0}^{k} u(lh)g(kh-lh)\right\} = G(z)U(z)$$

**Accumulation**

$$\mathscr{Z}\left\{\sum_{l=0}^{k} w(lh)\right\} = \frac{z}{z-1}W(z)$$

**Différence**

$$\mathscr{Z}\left\{w(kh)-w(kh-h)\right\} = \frac{z-1}{z}W(z)$$

## 1.3 4.3 Table des transformées de Laplace et Z

| N° | $w(t)$ | $\mathscr{L}\big(w(t)\big)$ | $w(kh)$ | $\mathscr{Z}\big\{w(kh)\big\}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\delta(t)$ | 1 | | |
| 2 | | | $\Delta(kh)$ | 1 |
| 3 | 1 | $\frac{1}{s}$ | 1 | $\frac{z}{z-1}$ |
| 4 | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ | $kh$ | $\frac{hz}{(z-1)^2}$ |
| 5 | $\frac{1}{2}t^2$ | $\frac{1}{s^3}$ | $\frac{1}{2}(kh)^2$ | $\frac{h^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$ |
| 6 | $\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}$ | $\frac{1}{s^l}$ | $\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}$ | $\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!}\frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-ah}}\right)$ |
| 7 | $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ | $e^{-akh}$ | $\frac{z}{z-e^{-ah}}$ |
| 8 | $te^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $khe^{-akh}$ | $\frac{he^{-ah}z}{(z-e^{-ah})^2}$ |
| 9 | $\frac{1}{2}t^2e^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^3}$ | $\frac{1}{2}(kh)^2e^{-akh}$ | $\frac{h^2e^{-ah}z(z-e^{-ah}+2e^{-ah})}{2(z-e^{-ah})^3}$ |
| 10 | $\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}e^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^l}$ | $\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}e^{-akh}$ | $\frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!}\frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-ah}}\right)$ |
| 11 | $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | $\sin(\omega kh)$ | $\frac{\sin(\omega h)z}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$ |
| 12 | $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\cos(\omega kh)$ | $\frac{z(z-\cos(\omega h))}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$ |
| 13 | $e^{-at}\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $e^{-akh}\sin(\omega kh)$ | $\frac{e^{-ah}\sin(\omega h)z}{z^2-2e^{-ah}\cos(\omega h)z+e^{-2ah}}$ |
| 14 | $e^{-at}\cos(\omega t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $e^{-akh}\cos(\omega kh)$ | $\frac{z(z-e^{-ah}\cos(\omega h))}{z^2-2e^{-ah}\cos(\omega h)z+e^{-2ah}}$ |
| 15 | | | $a^k$ | $\frac{z}{z-a}$ |
| 16 | | | $ka^{k-1}$ | $\frac{z}{(z-a)^2}$ |
| 17 | | | $\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}$ | $\frac{z}{(z-a)^3}$ |
| 18 | | | $\frac{1}{(l-1)!}\left(\prod_{i=0}^{l-2}(k-i)\right)a^{k-l+1}$ | $\frac{z}{(z-a)^l}$ |

## 1.4 4.4 Calcul de la transformée en Z inverse

Soit la transformée en z rationnelle propre définie par:

$$W(z) = \frac{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n} \qquad n \geq m$$

Le dénominateur est dit *monique*, c'est-à-dire que le coefficient du terme d'ordre le plus élevé est 1.

Il existe 3 méthodes de calcul de la transformée en Z inverse:

- Décomposition en somme de fractions simples
- Intégration dans le plan complexe
- Inversion numérique

L'intégration dans le plan complexe étant rarement utilisée en pratique, elle ne sera pas montrée ici.

### 1.4.1 Décomposition en sommes de fractions simples

**Exemple**

$$W(z) = \frac{3}{(z+1)(z-2)}$$

Afin de faire apparaître un z au numérateur et ainsi obtenir une forme semblable au tableau des transformées, on cherche la décomposition en somme de fractions simples de $W(z)/z$.

$$\frac{W(z)}{z} = \frac{3}{z(z+1)(z-2)}$$

La décomposition donne:

$$\frac{W(z)}{z} = -\frac{1,5}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{0,5}{z-2}$$

En multipliant par z de chaque côté, on obtient:

$$W(z) = -1,5 + \frac{z}{z+1} + \frac{0,5z}{z-2}$$

D'où, la transformée inverse donne:

$$w(kh) = -1,5\Delta(kh) + (-1)^k + 0,5.2^k$$

***

### 1.4.2 Inversion numérique

**Théorème** La transformée en z inverse de W(z) est le signal discret fourni par la récurrence suivante, dans laquelle $a_i = b_i = 0$ lorsque $i \geq n$:

$$w(kh) = b_k - \sum_{l=0}^{k-1} w(lh)a_{k-l} \qquad k \geq 0$$

**Exemple**

$$W(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2}$$

En appliquant le théorème, on obtient successivement:

$$
\begin{aligned}
w(0) &= 1 && (1)\\
w(h) &= -2 - 1(-4) = 2 && (2)\\
w(2h) &= 2 - \big(1 \cdot 5 + 2(-4)\big) = 5 && (3)\\
w(3h) &= 0 - \big(1(-2) + 2 \cdot 5 + 5(-4)\big) = 12 && (4)\\
w(4h) &= 0 - \big(1 \cdot 0 + 2(-2) + 5 \cdot 5 + 12(-4)\big) = 27 && (5)\\
&\vdots && (6)
\end{aligned}
$$

Soit:

$$\{w(kh)\} = \{\dots, 0, \mathbf{1}, 2, 5, 12, 27, \dots\}$$

***

Afin d'obtenir le même résultat manuellement, il suffit d'effectuer la division polynômiale du numérateur par le dénominateur de $W(z)$.

### 1.4.3 Importance du cercle unité

Le bout de code suivant permet de vérifier aisément l'effet d'un pôle sur le système.

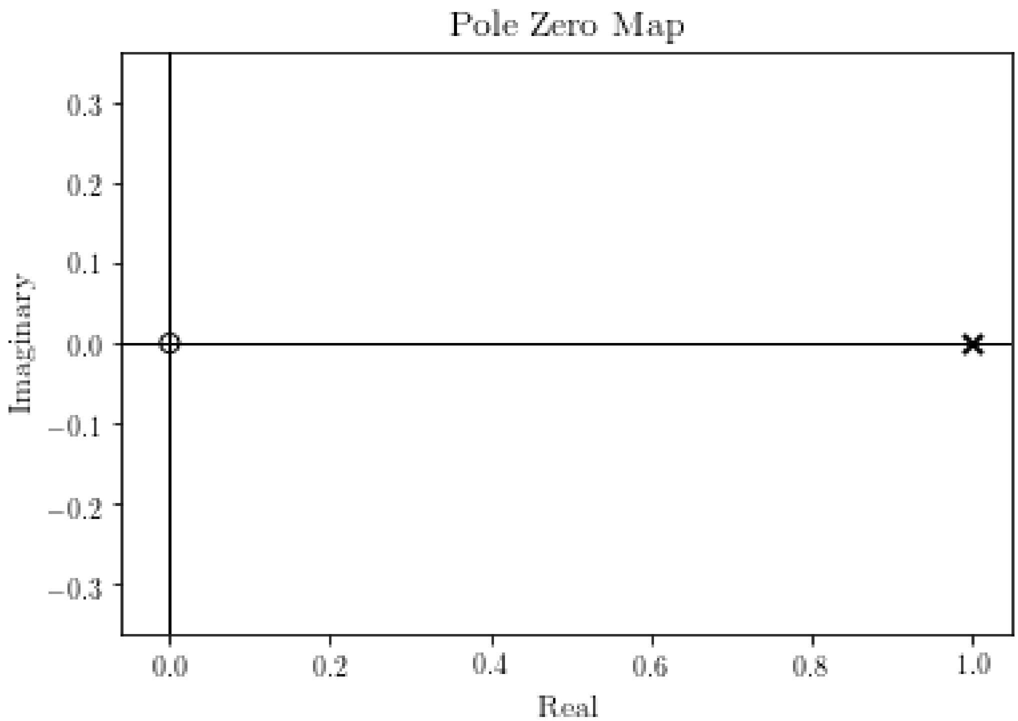
[1]:
```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('../my_params.mplstyle')
```

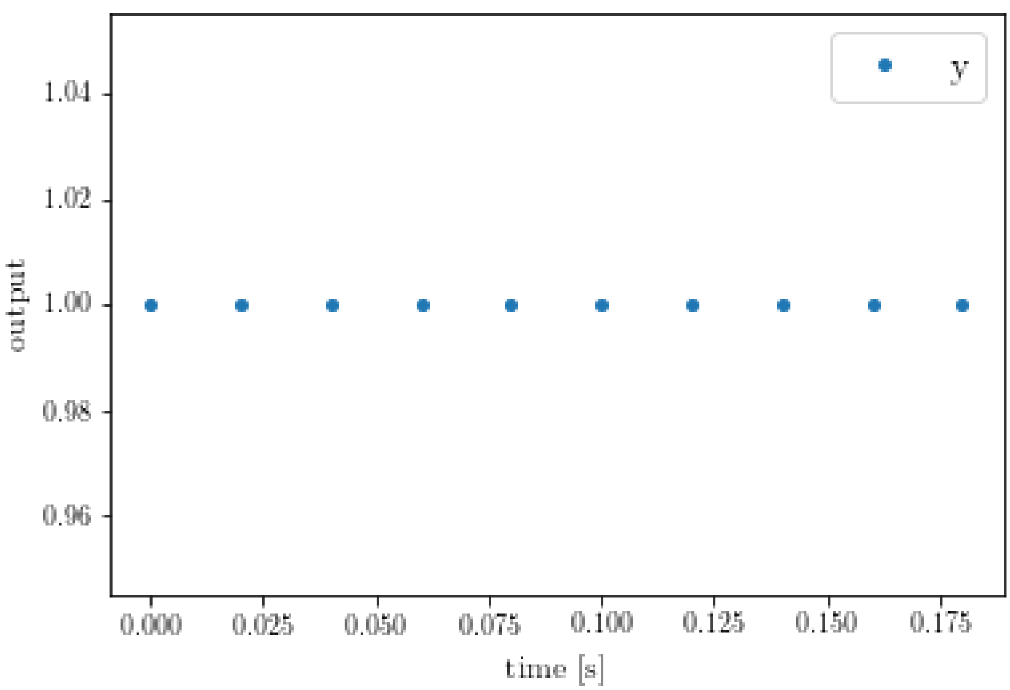
[2]:
```
import control

G = control.tf([1, 0], [1, -1], True)

control.pzmap(G)
t, y = control.impulse_response(G, T=[i/50 for i in range(10)])

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(t, y, '.', label='y')
ax.set_xlabel('time [s]')
ax.set_ylabel('output')
_ = ax.legend()
```


Pole Zero Map
Imaginary
Real
0.3
0.2
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.3
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


y
output
time [s]
1.04
1.02
1.00
0.98
0.96
0.000
0.025
0.050
0.075
0.100
0.125
0.150
0.175

## 1.5 4.5 Fonction de transfert

La sortie d'un système discret est calculée, comme en continu, par le produit de convolution:

$$y(kh) = \sum_{l=0}^{k} u(lh)g(kh - lh)$$

avec $y, u, g$, la sortie, l'entrée et la réponse impulsionnelle du système respectivement.

Par la transformée vue précédemment, on obtient:

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

La transformée $G(z)$ de la réponse impulsionnelle est appelée **fonction de transfert discrète** du système.

Cette expression permet de:

- calculer la sortie $Y(z)$, lorsque $G(z)$ et $U(z)$ sont connus
- estimer la fonction de transfert $G(z)$, lorsque $Y(z)$ et $U(z)$

La fonction de transfert discrète permet, comme la fonction de transfert continue, de transformer la relation *entrée-sortie* en relation algébrique. Les règles, déjà bien connues, d'algèbre de schémas blocs, sont donc identiques aux règles algébriques régissant les schémas blocs en continu. Elles ne seront donc pas rappelées ici.

Lorsque le système est décri par une équation aux différences, la fonction de transfert est calculée à partir du quotient $Y(z)/U(z)$:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) = b_0 u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \cdots + b_m u(k-d-m)$$

Par la transformée en Z, on obtient:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \cdots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 z^{-d} U(z) + b_1 z^{-d-1} U(z) + \cdots + b_m z^{-d-m} U(z) \tag{7}$$

$$\left(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}\right) Y(z) = \left(b_0 z^{-d} + b_1 z^{-d-1} + \cdots + b_m z^{-d-m}\right) U(z) \tag{8}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-d} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \tag{9}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \tag{10}$$

La dernière ligne est obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur par $z^n$ et en remplaçant $d$ par $n - m$.

Comme pour les fonctions de transfert continues, les définitions suivantes sont d'application:

- les racines du numérateur sont appelées les pôles du système

- les racines du dénominateur sont appelées les pôles du système
- le dénominateur est appelé polynôme caractéristique
- lorsque qu'un zéro possède un module plus grand que 1, le système est dit à non-minimum de phase
- l'ordre du système est défini par le nombre $n$ de ses pôles
- la différence entre le nombre de pôles et de zéros $d = n - m$ est appelé surplus de pôles

En général, on privilégie la fonction de transfert en fonction de puissances positives de $z$ pour l'analyse du système, et de puissances négatives pour les aspects temps réels.

**Exemple 1** L'intégrateur numérique est défini par l'équation aux différences suivante:

$$y(k+1) = y(k) + u(k)h$$

D'où sa fonction de transfert discrète:

$$G(z) = \frac{h}{z-1}$$

Il possède un pôle et pas de zéro et est d'ordre 1.

Le pôle pôle $z = 1$ est caractéristique d'un effet intégrateur numérique, de la même manière que le pôle $s = 0$ l'est pour l'intégrateur analogique. ***

**Exemple 2** Le régulateur PI numérique est décrit par l'équation:

$$u(k) - u(k-1) = K_p e(k) + K_p \left( \frac{h}{T_i} - 1 \right) e(k-1)$$

Sa fonction de transfert est:

$$K(z) = K_p \frac{1 + \left( \frac{h}{T_i} - 1 \right) z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Ou encore:

$$K(z) = K_p \frac{z + \frac{h}{T_i} - 1}{z - 1}$$

***

**Exemple 3** La dérivée $\frac{du}{dt}(kh)$ peut être approximée par:

$$y(kh) = \frac{u(kh) - u(kh - h)}{h}$$

D'où la fonction de transfert:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{h}$$

Ou encore:

$$G(z) = \frac{z - 1}{hz}$$

Il possède un zéro $z = 1$ et un pôle à l'origine.

Le zéro $z = 1$ est caractéristique de l'effet dérivateur numérique, de la même manière que le zéro $s = 0$ l'est pour le dérivateur analogique. ***

**Example 4** Un retard pur de $d$ périodes d'échantillonnage s'obtient par:

$$G(z) = z^{-d} = \frac{1}{z^d}$$

Il possède $d$ pôles à l'origine. ***

La fonction de transfert discrète peut prendre la forme suivante:

$$G(z) = \frac{B(z)}{(z - 1)^l A(z)}$$

Elle possède $l$ pôles $z = 1$, soit $l$ intégrateurs. L'entier $l$ est appelé le type ou la classe du système.

On obtient le gain permanent du système par:

$$\gamma = \lim_{z \to 1} (z - 1)^l G(z) = \frac{B(1)}{A(1)}$$

Lorsque $l$ vaut 0, 1 ou 2, le gain est appelé respectivement gain statique, en vitesse ou en accélération.

Enfin, la transformée en $z$ inverse de $G(z)$ permet de retrouver la réponse impulsionnelle $\{g(kh)\}$.