

# Structures de données et algorithmes

Pierre Geurts

Dernière mise à jour le 1/02/2017

E-mail : p.geurts@ulg.ac.be  
URL : <http://www.montefiore.ulg.ac.be/~geurts/sda.html>  
Bureau : R 141 (Montefiore)  
Téléphone : 04.366.48.15

# Contact

- Chargé de cours :
  - ▶ Pierre Geurts, p.geurts@ulg.ac.be, I141 Montefiore, 04/3664815
- Assistant :
  - ▶ Jean-Michel Begon, jm.begon@ulg.ac.be, R73 Montefiore, 04/3662972
  - ▶ Romain Mormont, r.mormont@ulg.ac.be, 1.128 Montefiore
- Sites web du cours :
  - ▶ Cours théorique :  
<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~geurts/sda.html>
  - ▶ Répétitions et projets :  
[http://www.montefiore.ulg.ac.be/~jmbegon/?sda2016\\_2017](http://www.montefiore.ulg.ac.be/~jmbegon/?sda2016_2017)

# Objectif du cours

- Introduction à l'étude systématique des algorithmes et des structures de données
- Vous fournir une boîte à outils contenant :
  - ▶ Des structures de données permettant d'organiser et d'accéder efficacement aux données
  - ▶ Les algorithmes les plus populaires
  - ▶ Des méthodes génériques pour la modélisation, l'analyse et la résolution de problèmes algorithmiques
- On insistera sur la généralité des algorithmes et structures de données et on les étudiera de manière formelle
- Les projets visent à vous familiariser à la résolution de problèmes

# Organisation du cours

- Cours théoriques :
  - ▶ Les vendredis de 13h30 à 15h30, S39, Bâtiment B37 (Math).
  - ▶ 10-12 cours
- Répétitions :
  - ▶ Certains vendredis de 15h30 à 17h30, S39, Bâtiment B37 (Math)
  - ▶ Exercices portant sur la matière théorique + debriefing des projets
- Projets (sujet à modifications) :
  - ▶ Trois projets tout au long de l'année, de difficulté croissante
  - ▶ Les deux premiers individuels, le troisième en binôme
  - ▶ En C
- Evaluation sur base des projets (30%) et d'un examen écrit (70%).

# Notes de cours

- Transparents disponibles sur la page web du cours.
- Pas de livre de référence obligatoire mais le cours se base fortement sur l'ouvrage suivant :
  - ▶ **Introduction to algorithms, Cormen, Leiserson, Rivest, Stein, MIT press, Third edition, 2009.**
  - ▶ <http://mitpress.mit.edu/algorithms/>
- Autres références :
  - ▶ Algorithms, Sedgewick and Wayne, Addison Wesley, Fourth edition, 2011.
    - ▶ <http://algs4.cs.princeton.edu/home/>
  - ▶ Data structures and algorithms in Java, Goodrich and Tamassia, Fifth edition, 2010.
    - ▶ <http://ww0.java4.datastructures.net/>
  - ▶ Algorithms, Dasgupta, Papadimitriou, and Vazirani, McGraw-Hill, 2006.
    - ▶ <http://cseweb.ucsd.edu/users/dasgupta/book/index.html>
    - ▶ <http://www.cs.berkeley.edu/~vazirani/algorithms/all.pdf>

# Cours sur le web

Ce cours s'inspire également de plusieurs cours disponibles sur le web :

- Antonio Carzaniga, Faculty of Informatics, University of Lugano
  - ▶ <http://www.inf.usi.ch/carzaniga/edu/algo/index.html>
- Marc Gaetano, Polytechnique, Nice-Sophia Antipolis
  - ▶ <http://users.polytech.unice.fr/~gaetano/asd/>
- Robert Sedgewick, Princeton University
  - ▶ <http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spr10/cos226/lectures.html>
- Charles Leiserson and Erik Demaine, MIT.
  - ▶ <http://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-046j-introduction-to-algorithms-sma-5503-fall-2005/index.htm>
- Le cours de 2009-2010 de Bernard Boigelot

# Contenu du cours

- Partie 1: Introduction
- Partie 2: Outils d'analyse
- Partie 3: Algorithmes de tri
- Partie 4: Structures de données
- Partie 5: Dictionnaires
- Partie 6: Résolution de problèmes
- Partie 7: Graphes

# Partie 1

## Introduction

# Plan

1. Algorithms + Data structures = Programs (Niklaus Wirth)
2. Introduction à la récursivité

# Algorithmes

- Un **algorithme** est une suite *finie* et *non-ambiguë* d'opérations ou d'instructions permettant de résoudre un *problème*
- Provient du nom du mathématicien persan *Al-Khawarizmi* ( $\pm 820$ ), le père de l'algèbre
- Un problème algorithmique est souvent formulé comme la transformation d'un ensemble de valeurs, **d'entrée**, en un nouvel ensemble de valeurs, **de sortie**.
- Exemples d'algorithmes :
  - ▶ Une recette de cuisine (ingrédients → plat préparé)
  - ▶ La recherche dans un dictionnaire (mot → définition)
  - ▶ La division entière (deux entiers → leur quotient)
  - ▶ Le tri d'une séquence (séquence → séquence ordonnée)

# Algorithmes

- On étudiera essentiellement les algorithmes **corrects**.
  - ▶ Un algorithme est (totalement) *correct* lorsque pour chaque instance, il se termine en produisant la bonne sortie.
  - ▶ Il existe également des algorithmes *partiellement corrects* dont la terminaison n'est pas assurée mais qui fournissent la bonne sortie lorsqu'ils se terminent.
  - ▶ Il existe également des algorithmes *approximatifs* qui fournissent une sortie inexacte mais néanmoins proche de l'optimum.
- Les algorithmes seront évalués en termes d'*utilisation de ressources*, essentiellement par rapport aux **temps de calcul** mais aussi à l'utilisation de la **mémoire**.

# Algorithmes

Un algorithme peut être spécifié de différentes manières :

- en langage naturel,
- graphiquement,
- en pseudo-code,
- par un programme écrit dans un langage informatique
- ...

La seule condition est que la description soit précise.

## Exemple : le tri

- Le problème de tri :
  - ▶ Entrée : une séquence de  $n$  nombres  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$
  - ▶ Sortie : une permutation de la séquence de départ  $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$  telle que  $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$
- Exemple :
  - ▶ Entrée :  $\langle 31, 41, 59, 26, 41, 58 \rangle$
  - ▶ Sortie :  $\langle 26, 31, 41, 41, 58, 59 \rangle$

## Tri par insertion



Description en langage naturel :

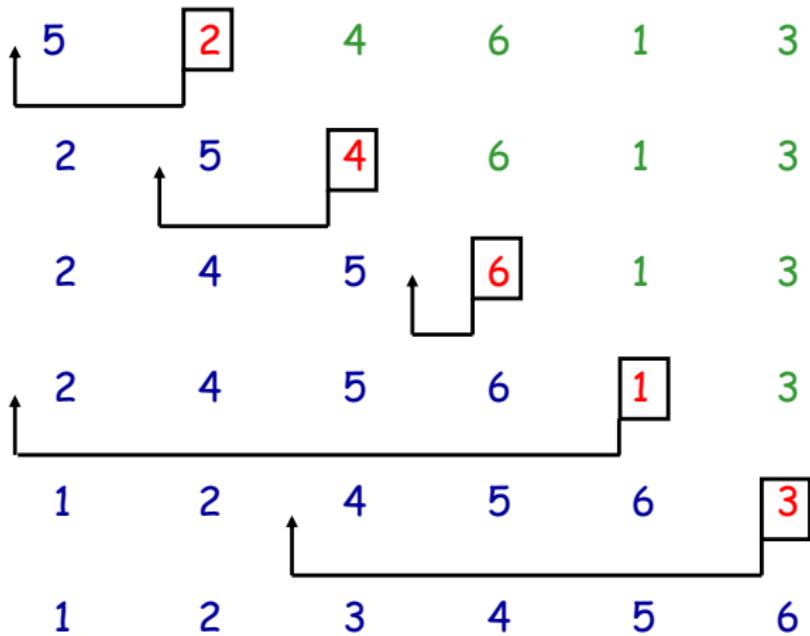
On parcourt la séquence de gauche à droite

Pour chaque élément  $a_j$  :

- On l'insère à sa position dans une nouvelle séquence ordonnée contenant les éléments le précédant dans la séquence.

On s'arrête dès que le dernier élément a été inséré à sa place dans la séquence.

## Tri par insertion



## Tri par insertion

Description en C (sur des tableaux d'entiers) :

```
void InsertionSort (int *a, int length) {
    int key, i;
    for(int j = 1; j < length; j++) {
        key = a[j];
        /* Insert a[j] into the sorted sequence a[0...j-1] */
        i = j-1;
        while (i>=0 && a[i]>key) {
            a[i+1] = a[i];
            i = i-1;
        }
        a[i+1] = key;
    }
}
```

## Insertion sort

Description en **pseudo-code** (sur des tableaux d'entiers) :

INSERTION-SORT( $A$ )

```
1  for  $j = 2$  to  $A.length$ 
2       $key = A[j]$ 
3      // Insert  $A[j]$  into the sorted sequence  $A[1..j - 1]$ .
4       $i = j - 1$ 
5      while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
6           $A[i + 1] = A[i]$ 
7           $i = i - 1$ 
8       $A[i + 1] = key$ 
```

# Pseudo-code

Objectifs :

- Décrire les algorithmes de manière à ce qu'ils soient compris par des humains.
- Rendre la description indépendante de l'implémentation
- S'affranchir de détails tels que la gestion d'erreurs, les déclarations de type, etc.

Très proche du C (langage procédural plutôt qu'orienté objet)

Peut contenir certaines instructions en langage naturel si nécessaire

# Pseudo-code

## Quelques règles

- Structures de blocs indiquées par l'indentation
- Boucles (**for**, **while**, **repeat**) et conditions (**if**, **else**, **elseif**) comme en C.
- Le compteur de boucle garde sa valeur à la sortie de la boucle
- En sortie d'un **for**, le compteur a la valeur de la borne max+1.

**for**  $i = 1$  **to** Max  
    Code

$\Leftrightarrow$

$i = 1$   
**while**  $i \leq Max$   
    Code  
 $i = i + 1$

- Commentaires indiqués par //
- Affectation (=) et test d'égalité (==) comme en C.

## Pseudo-code

- Les variables ( $i$ ,  $j$  et  $key$  par exemple) sont locales à la fonction.
- $A[i]$  désigne l'élément  $i$  du tableau  $A$ .  $A[i..j]$  désigne un intervalle de valeurs dans un tableau.  $A.length$  est la taille du tableau.
- L'indexation des tableaux commence à 1.
- Les types de données composés sont organisés en *objets*, qui sont composés d'attributs. On accède à la valeur de l'attribut  $attr$  pour un objet  $x$  par  $x.attr$ .
- Une variable représentant un tableau ou un objet est considérée comme un pointeur vers ce tableau ou cet objet.
- Paramètres passés par valeur comme en C (mais tableaux et objets sont passés par pointeur).
- ...

# Trois questions récurrentes face à un algorithme

1. Mon algorithme est-il correct, se termine-t-il ?
2. Quelle est sa vitesse d'exécution ?
3. Y-a-t'il moyen de faire mieux ?

## Exemple du **tri par insertion**

1. Oui → technique des invariants (partie 2)
2.  $O(n^2)$  → analyse de complexité (partie 2)
3. Oui → il existe un algorithme  $O(n \log n)$  (partie 1)

# Correction de INSERTION-SORT

```
INSERTION-SORT( $A$ )
1  for  $j = 2$  to  $A.length$ 
2       $key = A[j]$ 
3       $i = j - 1$ 
4      while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
5           $A[i + 1] = A[i]$ 
6           $i = i - 1$ 
7       $A[i + 1] = key$ 
```

- **Invariant** : (pour la boucle externe) le sous-tableau  $A[1 \dots j - 1]$  contient les éléments du tableau original  $A[1 \dots j - 1]$  ordonnés.
- On doit montrer que
  - ▶ l'invariant est vrai avant la première itération
  - ▶ l'invariant est vrai avant chaque itération suivante
  - ▶ En sortie de boucle, l'invariant implique que l'algorithme est correct

# Correction de INSERTION-SORT

- Avant la première itération :
  - ▶  $j = 2 \Rightarrow A[1]$  est trivialement ordonné.
- Avant la  $j$ ème itération :
  - ▶ Informellement, la boucle interne déplace  $A[j - 1]$ ,  $A[j - 2]$ ,  $A[j - 3] \dots$  d'une position vers la droite jusqu'à la bonne position pour  $\text{key}$  ( $A[j]$ ).
- En sortie de boucle :
  - ▶ A la sortie de boucle,  $j = A.length + 1$ . L'invariant implique que  $A[1 \dots A.length]$  est ordonné.

# Complexité de INSERTION-SORT

```
INSERTION-SORT( $A$ )
```

```
1   for  $j = 2$  to  $A.length$ 
2        $key = A[j]$ 
3        $i = j - 1$ 
4       while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
5            $A[i + 1] = A[i]$ 
6            $i = i - 1$ 
7        $A[i + 1] = key$ 
```

- Nombre de comparaisons  $T(n)$  pour trier un tableau de taille  $n$  ?
- Dans le pire des cas :
  - ▶ La boucle **for** est exécutée  $n - 1$  fois ( $n = A.length$ ).
  - ▶ La boucle **while** est exécutée  $j - 1$  fois

# Complexité de INSERTION-SORT

- Le nombre de comparaisons est borné par :

$$T(n) \leq \sum_{j=2}^n (j - 1)$$

- Puisque  $\sum_{i=1}^n i = n(n + 1)/2$ , on a :

$$T(n) \leq \frac{n(n - 1)}{2}$$

- Finalement,  $T(n) = O(n^2)$

(borne inférieure ?)

# Structures de données

- Méthode pour stocker et organiser les données pour en faciliter l'accès et la modification
- Une structure de données regroupe :
  - ▶ un certain nombre de données à gérer, et
  - ▶ un ensemble d'opérations pouvant être appliquées à ces données
- Dans la plupart des cas, il existe
  - ▶ plusieurs manières de représenter les données et
  - ▶ différents algorithmes de manipulation.
- On distingue généralement l'**interface** des structures de leur **implémentation**.

# Types de données abstraits

- Un type de données abstrait (TDA) représente l'interface d'une structure de données.
- Un TDA spécifie précisément :
  - ▶ la nature et les propriétés des données
  - ▶ les modalités d'utilisation des opérations pouvant être effectuées
- En général, un TDA admet différentes implémentations (plusieurs représentations possibles des données, plusieurs algorithmes pour les opérations).

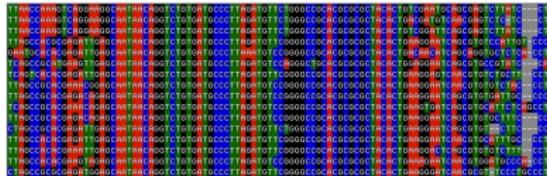
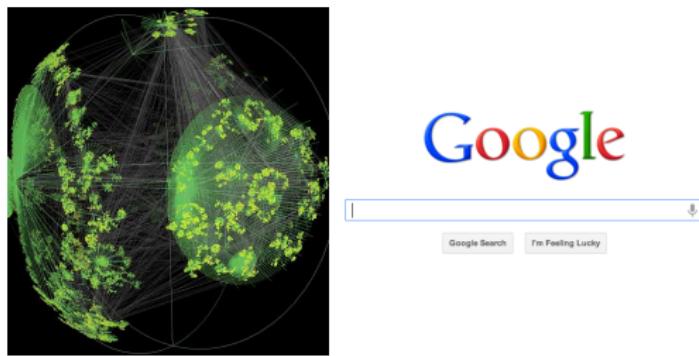
## Exemple : file à priorités

- Données gérées : des objets avec comme attributs :
  - ▶ une clé, munie d'un opérateur de comparaison selon un ordre total
  - ▶ une valeur quelconque
- Opérations :
  - ▶ Création d'une file vide
  - ▶  $\text{INSERT}(S, x)$  : insère l'élément  $x$  dans la file  $S$ .
  - ▶  $\text{EXTRACT-MAX}(S)$  : retire et renvoie l'élément de  $S$  avec la clé la plus grande.
- Il existe de nombreuses façons d'implémenter ce TDA :
  - ▶ Tableau non trié ;
  - ▶ Liste triée ;
  - ▶ Structure de tas ;
  - ▶ ...

Chacune mène à des complexités différentes des opérations  $\text{INSERT}$  et  $\text{EXTRACT-MAX}$

# Structures de données et algorithmes en pratique

- La résolution de problème algorithmiques requiert presque toujours la combinaison de structures de données et d'algorithmes sophistiqués pour la gestion et la recherche dans ces structures.
- D'autant plus vrai qu'on a à traiter des volumes de données importants.
- Quelques exemples de problèmes réels :
  - ▶ Routage dans les réseaux informatiques
  - ▶ Moteurs de recherche
  - ▶ Alignement de séquences ADN en bio-informatique



## Un exemple

(B. Boigelot)

- Un laboratoire de génie génétique désire développer un programme capable de repérer des répétitions de longueur  $M$  dans une séquence de nucléotides  $S$  de longueur  $N$  (avec  $N \gg M$ ) :

$ACTG\textcolor{red}{CGAC}GGTACGCTT\textcolor{red}{CGAC}TTAG\dots(M=4)$

- Première approche :
  - ▶ Un indice  $i$  variant de 2 à  $N - M + 1$
  - ▶ Un indice  $j$  variant de 1 à  $i - 1$
  - ▶ Pour tout  $k \in [0, \dots, M - 1]$ , on teste si  $S[i + k] = S[j + k]$ .
- Efficacité : le nombre de comparaisons à effectuer est égal à :

$$\begin{aligned}M \cdot (1 + 2 + \dots + (N - M)) &= \frac{M(N - M + 1)(N - M)}{2} \\&\approx 4,5 \cdot 10^{21} \text{ pour } N = 3 \cdot 10^9 \text{ et } M = 1000 \\&\approx 143.000 \text{ ans au rythme de } 10^9 \text{ opérations/s.}\end{aligned}$$

## Une meilleure solution

1. On construit une table à  $N - M + 1$  lignes et  $M$  colonnes dont la  $k$ -ème ligne contient la sous-séquence de longueur  $M$  commençant à la position  $k$  dans  $S$  :

ACTG
CTGC
TGCG
GCGA
CGAC
⋮

2. On trie les lignes de cette table par ordre lexicographique ;
3. On parcourt la table triée afin de déterminer si elle contient deux lignes consécutives identiques

Note : Lors de la comparaison de deux lignes, on s'arrête à la première différence ( $\Rightarrow$  moins de  $4/3$  comparaisons en moyenne).

## Efficacité

- Construction de la table :  $M(N - M + 1)$  opérations de copie.
- Tri par ordre lexicographique (algorithme de tri rapide, voir partie 3) :

$$\leq \frac{8}{3} N \ln N \text{ opérations de comparaison en moyenne}$$

- Détection de lignes consécutives :

$$\leq \frac{4}{3}(N - M) \text{ opérations de comparaison en moyenne}$$

En supposant des coûts identiques pour toutes les opérations, on obtient :

$$\begin{aligned} & N\left(M + \frac{8}{3} \ln N + \frac{4}{3}\right) - M\left(M + \frac{1}{3}\right) \\ & \approx 3,179 \cdot 10^{12} \text{ opérations pour } N = 3 \cdot 10^9 \text{ et } M = 1000. \\ & \approx 53 \text{ minutes au rythme de } 10^9 \text{ opérations/s.} \end{aligned}$$

## Remarques

- Utiliser un ordinateur plus puissant ne permet généralement pas de résoudre les problèmes d'efficacité !  
Avec un ordinateur 1000 fois plus puissant : 143 ans pour la première approche, 3,2s pour la deuxième.
- La deuxième solution est plus rapide mais elle est très gourmande en espace mémoire ( $M$  fois plus que la première !)
- Exercice pour plus tard : proposez une solution plus efficace encore en utilisant les structures de données vues au cours.

# Plan

1. Algorithms + Data structures = Programs (Niklaus Wirth)
2. Introduction à la récursivité

# Algorithmes récursifs

Un algorithme est **récursif** s'il s'invoque lui-même directement ou indirectement.

Motivation : Simplicité d'expression de certains algorithmes

Exemple : Fonction factorielle :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n - 1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

```
FACTORIAL( $n$ )
1  if  $n == 0$ 
2      return 1
3  return  $n \cdot \text{FACTORYAL}(n - 1)$ 
```

# Algorithmes récursifs

```
FACTORIAL( $n$ )
1  if  $n == 0$ 
2      return 1
3  return  $n \cdot \text{FACTORYAL}(n - 1)$ 
```

Règles pour développer une solution récursive :

- On doit définir un cas de base ( $n == 0$ )
- On doit diminuer la “taille” du problème à chaque étape ( $n \rightarrow n - 1$ )
- Quand les appels récursifs se partagent la même structure de données, les sous-problèmes ne doivent pas se superposer (pour éviter les effets de bord)

## Exemple de récursion multiple

Calcul du  $n$ ième nombre de Fibonacci :

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$\forall n \geq 2 : F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

Algorithme :

```
FIBONACCI( $n$ )
1  if  $n \leq 1$ 
2      return  $n$ 
3  return FIBONACCI( $n - 2$ ) + FIBONACCI( $n - 1$ )
```

## Exemple de récursion multiple

```
FIBONACCI( $n$ )
```

```
1  if  $n \leq 1$ 
2      return  $n$ 
3  return FIBONACCI( $n - 2$ ) + FIBONACCI( $n - 1$ )
```

1. L'algorithme est-il correct ?
2. Quelle est sa vitesse d'exécution ?
3. Y-a-t'il moyen de faire mieux ?

## Exemple de récursion multiple

```
FIBONACCI( $n$ )
```

```
1  if  $n \leq 1$ 
2      return  $n$ 
3  return FIBONACCI( $n - 2$ ) + FIBONACCI( $n - 1$ )
```

1. L'algorithme est correct ?

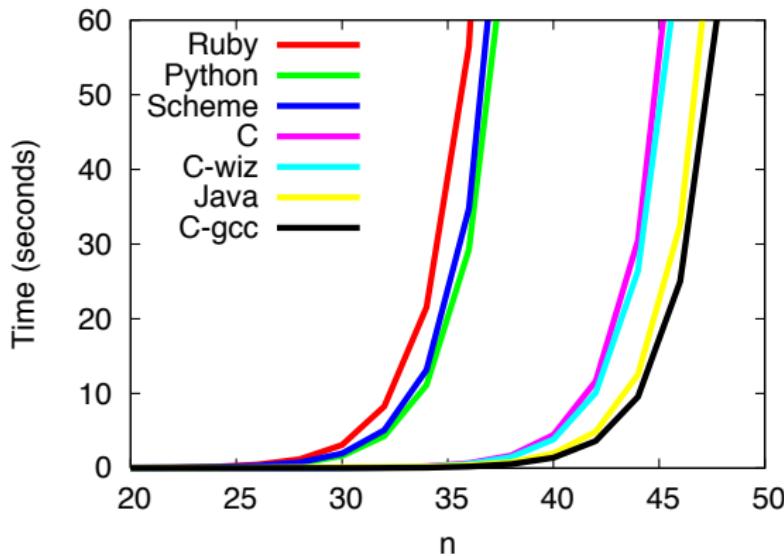
- ▶ Clairement, l'algorithme est correct.
- ▶ En général, la correction d'un algorithme récursif se démontre par induction.

2. Quelle est sa vitesse d'exécution ?

3. Y-a-t'il moyen de faire mieux ?

# Vitesse d'exécution

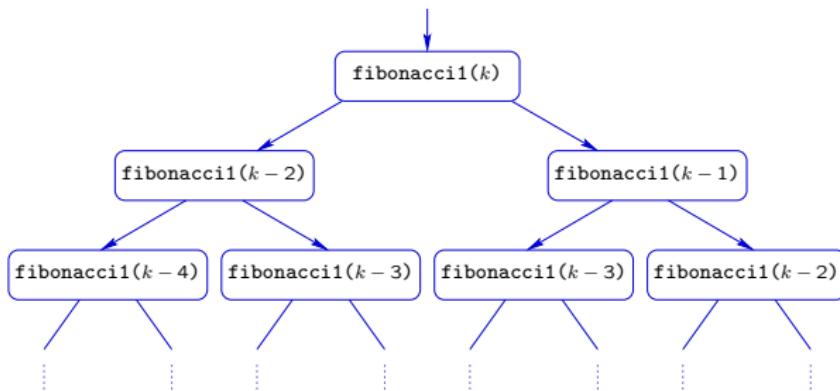
- Nombre d'opérations pour calculer  $\text{FIBONACCI}(n)$  en fonction de  $n$
- Empiriquement :



(Carzaniga)

- Toutes les implémentations atteignent leur limite, plus ou moins loin

# Trace d'exécution



(Boigelot)

# Complexité

```
FIBONACCI( $n$ )
```

```
1  if  $n \leq 1$ 
2      return  $n$ 
3  return FIBONACCI( $n - 2$ ) + FIBONACCI( $n - 1$ )
```

- Soit  $T(n)$  le nombre d'opérations de base pour calculer  $\text{FIBONACCI}(n)$  :

$$T(0) = 2, T(1) = 2$$

$$T(n) = T(n - 1) + T(n - 2) + 2$$

- On a donc  $T(n) \geq F_n$  (= le  $n$ ème nombre de Fibonacci).

# Complexité

- Comment croît  $F_n$  avec  $n$  ?

$$T(n) \geq F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Puisque  $F_n \geq F_{n-1} \geq F_{n-2} \geq \dots$ , on a :

$$F_n \geq 2F_{n-2} \geq 2(2F_{n-4}) \geq 2(2(2F_{n-6})) \geq 2^{\frac{n}{2}-1} F_2 = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}$$

si  $n \geq 2$  est pair et

$$F_n \geq 2F_{n-2} \geq 2(2F_{n-4}) \geq 2(2(2F_{n-6})) \geq 2^{\frac{n-1}{2}} F_1 = \frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} \geq \frac{(\sqrt{2})^n}{2}$$

si  $n \geq 1$  est impair.

Et donc

$$T(n) \geq \frac{(\sqrt{2})^n}{2} \approx \frac{(1.4)^n}{2}$$

- $T(n)$  croît exponentiellement avec  $n$
- Peut-on faire mieux ?

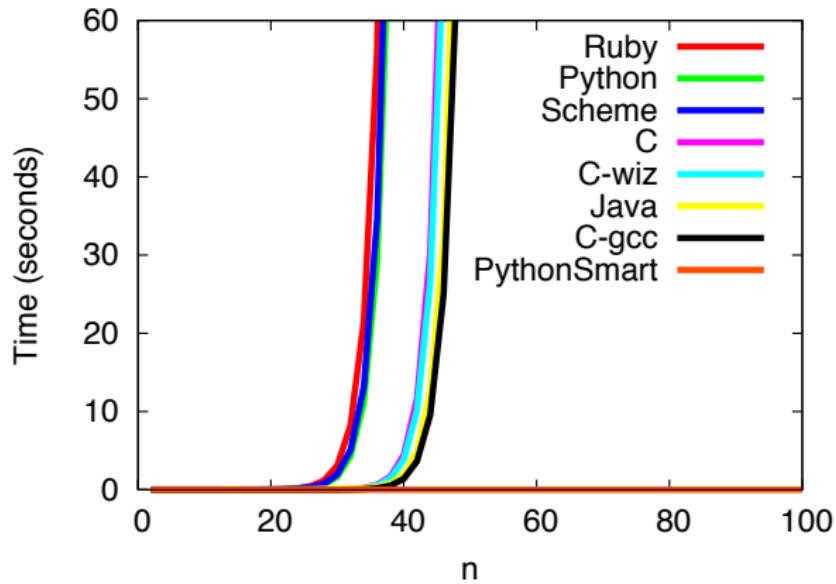
## Solution itérative

```
FIBONACCI-ITER( $n$ )
```

```
1  if  $n \leq 1$ 
2      return  $n$ 
3  else
4       $p\text{prev} = 0$ 
5       $\text{prev} = 1$ 
6      for  $i = 2$  to  $n$ 
7           $f = \text{prev} + p\text{prev}$ 
8           $p\text{prev} = \text{prev}$ 
9           $\text{prev} = f$ 
10     return  $f$ 
```

# Vitesse d'exécution

Complexité :  $O(n)$



(Carzaniga)

## Tri par fusion

Idée d'un tri basé sur la récursion :

- on sépare le tableau en deux sous-tableaux de la même taille
- on trie (récursivement) chacun des sous-tableaux
- on fusionne les deux sous-tableaux triés en maintenant l'ordre

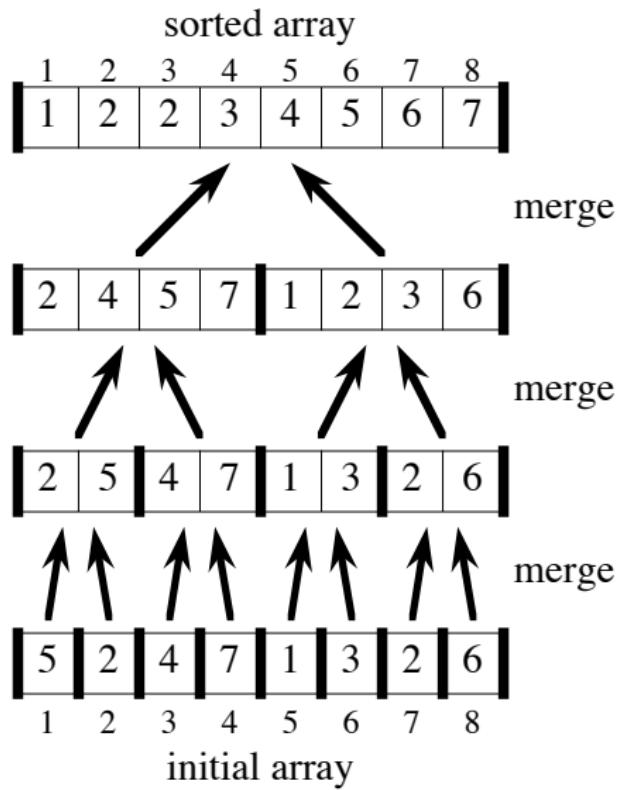
Le cas de base correspond à un tableau d'un seul élément.

```
MERGE-SORT( $A, p, r$ )
1  if  $p < r$ 
2       $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$ 
3      MERGE-SORT( $A, p, q$ )
4      MERGE-SORT( $A, q + 1, r$ )
5      MERGE( $A, p, q, r$ )
```

Appel initial : MERGE-SORT( $A, 1, A.length$ )

Exemple d'application du principe général de “diviser pour régner”

## Tri par fusion : illustration



## Fonction MERGE

MERGE( $A, p, q, r$ ) :

- **Entrée** : tableau  $A$  et indice  $p, q, r$  tels que :
  - ▶  $p \leq q < r$  (pas de tableaux vides)
  - ▶ Les sous-tableaux  $A[p..q]$  et  $A[q+1..r]$  sont ordonnés
- **Sortie** : Les deux sous-tableaux sont fusionnés en un seul sous-tableau ordonné dans  $A[p..r]$

Idée :

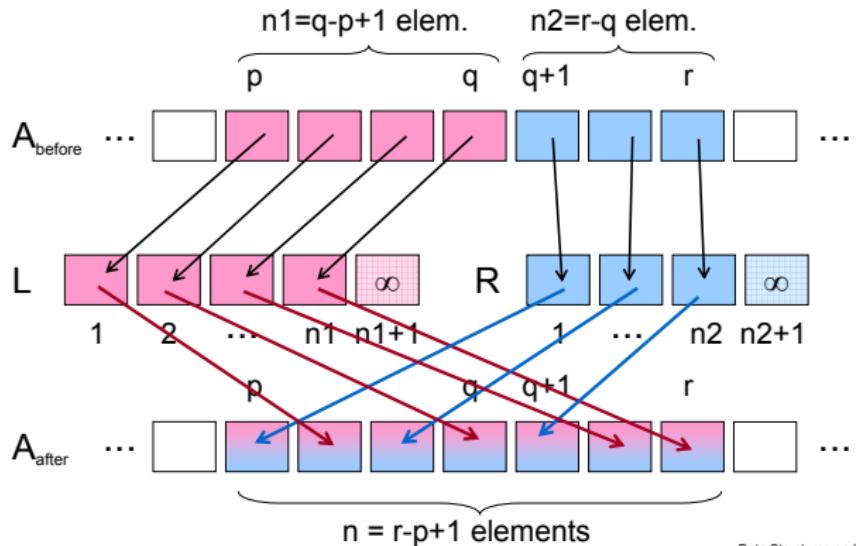
- Utiliser un pointeur vers le début de chacun des sous-tableaux ;
- Déterminer le plus petit des deux éléments pointés ;
- Déplacer cet élément vers le tableau fusionné ;
- Avancer le pointeur correspondant

## Fusion : algorithme

MERGE( $A, p, q, r$ )

```
1    $n_1 = q - p + 1$ ;  $n_2 = r - q$ 
2   Soit  $L[1..n_1 + 1]$  et  $R[1..n_2 + 1]$  deux nouveaux tableaux
3   for  $i = 1$  to  $n_1$ 
4        $L[i] = A[p + i - 1]$ 
5   for  $j = 1$  to  $n_2$ 
6        $R[j] = A[q + j]$ 
7    $L[n_1 + 1] = \infty$ ;  $R[n_2 + 1] = \infty$                                 // Sentinels
8   i=1;j=1
9   for  $k = p$  to  $r$ 
10      if  $L[i] \leq R[j]$ 
11           $A[k] = L[i]$ 
12           $i = i + 1$ 
13      else
14           $A[k] = R[j]$ 
15           $j = j + 1$ 
```

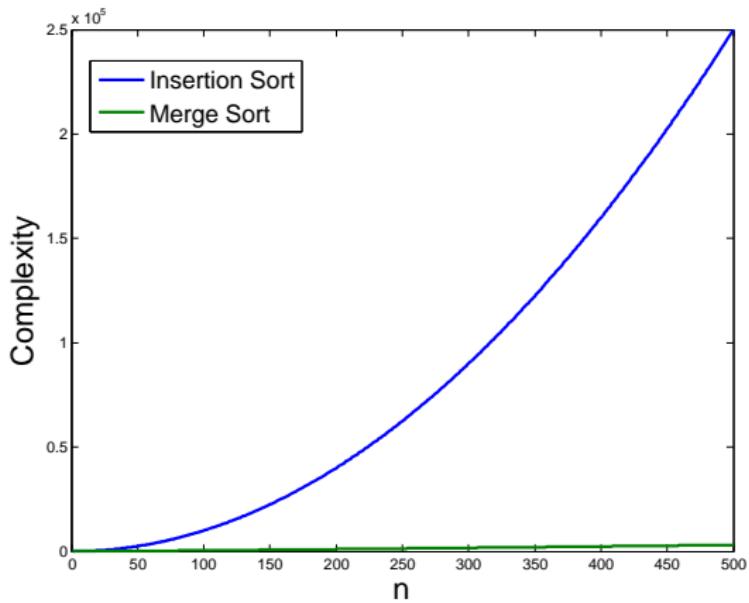
## Fusion : illustration



Complexité :  $O(n)$  (où  $n = r - p + 1$ )

# Vitesse d'exécution

Complexité de MERGE-SORT :  $O(n \log n)$  (voir partie 2)



## Remarques

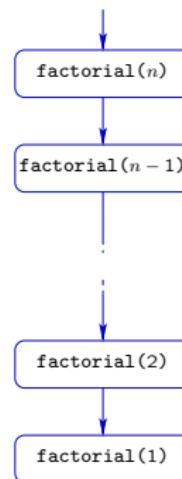
- La fonction MERGE nécessite d'allouer deux tableaux  $L$  et  $R$  (dont la taille est  $O(n)$ ).
- On pourrait réécrire MERGE-SORT de manière itérative (au prix de la simplicité)
- Version récursive du tri par insertion :

INSERTION-SORT-REC( $A, n$ )

- 1   **if**  $n > 1$
- 2        INSERTION-SORT-REC( $A, n - 1$ )
- 3        MERGE( $A, 1, n - 1, n$ )

# Note sur l'implémentation de la récursivité

- Trace d'exécution de la factorielle



- Chaque appel récursif nécessite de mémoriser le [contexte d'invocation](#)
- L'espace mémoire utilisé est donc  $O(n)$  ( $n$  appels récursifs)

# Récursivité terminale

- Définition : Une procédure est récursive terminale ("tail recursive") si elle n'effectue plus aucune opération après s'être invoquée récursivement.
- Avantages :
  - ▶ Le contexte d'invocation ne doit pas être mémorisé et donc l'espace mémoire nécessaire est réduit
  - ▶ Les procédures récursives terminales peuvent facilement être converties en procédures itératives

## Version récursive terminale de la factorielle

FACTORIAL2( $n$ )

1 **return** FACTORIAL2-REC( $n, 2, 1$ )

FACTORIAL2-REC( $n, i, f$ )

1 **if**  $i > n$

2 **return**  $f$

3 **return** FACTORIAL2-REC( $n, i + 1, f \cdot i$ )

Espace mémoire utilisé :  $O(1)$  (si la récursion terminale est implémentée efficacement)

# Ce qu'on a vu

- Définitions générales : algorithmes, structures de données, structures de données abstraites...
- Analyse d'un algorithme itératif (INSERTION-SORT)
- Notions de récursivité
- Analyse d'un algorithme récursif (FIBONACCI)
- Tri par fusion (MERGESORT)

# Partie 2

## Outils d'analyse

# Plan

1. Correction d'algorithmes
2. Complexité algorithmique

# Plan

## 1. Correction d'algorithmes

Introduction

Algorithmes itératifs

Algorithmes récursifs

## 2. Complexité algorithmique

Introduction

Notations asymptotiques

Complexité d'algorithmes et de problèmes

Complexité d'algorithmes itératifs

Complexité d'algorithmes récursifs

# Analyse d'algorithmes

Questions à se poser lors de la définition d'un algorithme :

- Mon algorithme est-il correct ?
- Mon algorithme est-il efficace ?

Autres questions importantes seulement marginalement abordées dans ce cours :

- Modularité, fonctionnalité, robustesse, facilité d'utilisation, temps de programmation, simplicité, extensibilité, fiabilité, existence d'une solution algorithmique...

## Correction d'un algorithme

- La correction d'un algorithme s'étudie par rapport à un problème donné
- Un problème est une collection d'instances de ce problème.
  - ▶ Exemple de problème : trier un tableau
  - ▶ Exemple d'instance de ce problème : trier le tableau [8, 4, 15, 3]
- Un algorithme est correct pour une instance d'un problème s'il produit une solution correcte pour cette instance
- Un algorithme est correct pour un problème s'il est correct pour toutes ses instances (on dira qu'il est totalement correct)
- On s'intéressera ici à la correction d'un algorithme pour un problème (et pas pour seulement certaines de ses instances)

# Comment vérifier la correction ?

- Première solution : en **testant** concrètement l'algorithme :
  - ▶ Suppose d'implémenter l'algorithme dans un langage (programme) et de le faire tourner
  - ▶ Suppose qu'on peut déterminer les instances du problème à vérifier
  - ▶ Il est très difficile de prouver empiriquement qu'on n'a pas de bug
- Deuxième solution : en dérivant une **preuve mathématique** formelle :
  - ▶ Pas besoin d'implémenter et de tester toutes les instances du problème
  - ▶ Sujet à des "bugs" également
- En pratique, on combinerà les deux
- Outils pour prouver la correction d'un algorithme :
  - ▶ Algorithmes itératifs : triplets de Hoare, invariants de boucle
  - ▶ Algorithmes récursifs : preuves par induction

## Assertion

- Relation entre les variables qui est vraie à un moment donné dans l'exécution
- Assertions particulières :
  - ▶ Pre-condition  $P$  : conditions que doivent remplir les entrées valides de l'algorithme
  - ▶ Post-condition  $Q$  : conditions qui expriment que le résultat de l'algorithme est correct
- $P$  et  $Q$  définissent resp. les instances et solutions valides du problème
- Un code est correct si le triplet (de Hoare)  $\{P\} \text{ code } \{Q\}$  est vrai.
- Exemple :

$$\{x \geq 0\} y = \text{SQRT}(x) \{y^2 == x\}$$

## Correction : séquence d'instructions



Pour vérifier que le triplet est correct :

- on insère des assertions  $P_1, P_2, \dots, P_n$  décrivant l'état des variables à chaque étape du programme
- on vérifie que les triplets  $\{P\} S_1 \{P_1\}, \{P_1\} S_2 \{P_2\}, \dots, \{P_{n-1}\} S_n \{Q\}$  sont corrects

Trois types d'instructions : affectation, condition, boucle

## Correction : affectations

Le triplet suivant est correct :

$$\begin{array}{l} \{Q[x \rightarrow e]\} \\ x = e \\ \{Q\} \end{array}$$

$Q[x \rightarrow e]$  est obtenu en remplaçant les occurrences de  $x$  par  $e$  dans  $Q$ .

Pour prouver un triplet :

$$\begin{array}{l} \{P\} \\ x = e \\ \{Q\} \end{array}$$

il faut montrer que  $P$  implique  $Q[x \rightarrow e]$ .

Exemples : les triplets suivants sont corrects

$$\begin{array}{l} \{x == 2\} \\ y = x + 1 \\ \{y == 3\} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \{x == 42\} \\ y = x + 1 \\ z = y \\ \{z == 43\} \end{array}$$

## Correction : conditions

```
{P}  
if B  
    C1  
else  
    C2  
{Q}
```

Pour prouver que le triplet est correct, on doit prouver que

- $\{P \text{ et } B\} C1 \{Q\}$
- $\{P \text{ et non } B\} C2 \{Q\}$

sont corrects

Exemple :

```
{x < 6}  
if x < 0  
    y = 0  
else  
    y = x  
{0 ≤ y < 6}
```

## Correction : boucles

```
{P}  
INIT  
while B  
    CORPS  
    FIN  
{Q}
```

```
{P}  
INIT  
{I}  
while B  
    {I et B} CORPS {I}  
    {I et non B}  
    FIN  
{Q}
```

Pour prouver que le triplet est correct :

- On met en évidence une assertion particulière  $I$ , appelée **invariant de boucle**, qui décrit l'état du programme pendant la boucle.
- On prouve que :
  - ▶  $\{P\}$  INIT  $\{I\}$  est correct
  - ▶  $\{I$  et  $B\}$  CORPS  $\{I\}$  est correct
  - ▶  $\{I$  et non  $B\}$  FIN  $\{Q\}$  est correct

Si on a plusieurs boucles imbriquées, on les traite séparément, en démarrant avec la boucle la plus interne.

## Correction : terminaison de boucle

```
INIT  
while B  
    CORPS  
FIN
```

- Un fois qu'on a prouvé que le triplet était correct, il faut encore montrer que la boucle se termine
- Pour prouver la terminaison, on cherche une fonction de terminaison  $f$  :
  - ▶ définie sur base des variables de l'algorithme et à valeur entière naturelle ( $\geq 0$ )
  - ▶ telle que  $f$  décroît strictement suite à l'exécution du corps de la boucle
  - ▶ telle que  $B$  implique  $f > 0$
- Puisque  $f$  décroît strictement, elle finira par atteindre 0 et donc à infirmer  $B$ .

# Exemple : FIBONACCI-ITER

Réécriture, post- et pré-conditions

FIBONACCI-ITER( $n$ )

```
if  $n \leq 1$ 
    return  $n$ 
else
    pprev = 0
    prev = 1
    for  $i = 2$  to  $n$ 
         $f = prev + pprev$ 
        pprev = prev
        prev =  $f$ 
    return  $f$ 
```

Proposition : Si  $n \geq 0$ ,  
FIBONACCI-ITER( $n$ ) renvoie  
 $F_n$ .

FIBONACCI-ITER( $n$ )

```
{ $n \geq 0$ } // { $P$ }
if  $n \leq 1$ 
    prev =  $n$ 
else
    pprev = 0
    prev = 1
    i = 2
    while ( $i \leq n$ )
         $f = prev + pprev$ 
        pprev = prev
        prev =  $f$ 
        i =  $i + 1$ 
{ $prev == F_n$ } // { $Q$ }
return prev
```

# Exemple : FIBONACCI-ITER

Analyse de la condition

$$\{n \geq 0 \text{ et } n \leq 1\}$$

$$prev = n$$

$$\{prev == F_n\}$$

correct ( $F_0 = 0, F_1 = 1$ )

$$\{n \geq 0 \text{ et } n > 1\}$$

$$pprev = 0$$

$$prev = 1$$

$$i = 2$$

**while** ( $i \leq n$ )

$$f = prev + pprev$$

$$pprev = prev$$

$$prev = f$$

$$i = i + 1$$

$$\{prev == F_n\}$$

$$I = \{pprev == F_{i-2}, prev == F_{i-1}\}$$

Analyse de la boucle

$$\{n > 1\}$$

$$pprev = 0$$

$$prev = 1$$

$$i = 2$$

$$\{pprev == F_{i-2}, prev == F_{i-1}\}$$

correct

$$\{pprev == F_{i-2}, prev == F_{i-1}, i \leq n\}$$

$$f = prev + pprev$$

$$pprev = prev$$

$$prev = f$$

$$i = i + 1$$

$$\{pprev == F_{i-2}, prev == F_{i-1}\}$$

correct

$$\{pprev == F_{i-2}, prev == F_{i-1}, i == n + 1\}$$

$$\{prev == F_n\}$$

correct

## Exemple : FIBONACCI-ITER

```
i = 2
while (i ≤ n)
    f = prev + pprev
    pprev = prev
    prev = f
    i = i + 1
```

- Fonction de terminaison  $f = n - i + 1$  :
  - ▶  $i \leq n \Rightarrow f = n - i + 1 > 0$
  - ▶  $i = i + 1 \Rightarrow f$  diminue à chaque itération
- L'algorithme est donc correct et se termine.



## Exemple : tri par insertion

INSERTION-SORT( $A$ )

```
1  for  $j = 2$  to  $A.length$ 
2       $key = A[j]$ 
3      // Insert  $A[j]$  into the sorted sequence  $A[1..j - 1]$ .
4       $i = j - 1$ 
5      while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
6           $A[i + 1] = A[i]$ 
7           $i = i - 1$ 
8       $A[i + 1] = key$ 
```

- Démontrons informellement que la boucle externe est correcte
- Invariant  $I$  : le sous-tableau  $A[1..j - 1]$  contient les éléments du tableau original  $A[1..j - 1]$  ordonnés.

## Exemple : tri par insertion

**for**  $j = 2$  **to**  $A.length$

...

$\Leftrightarrow$

$j = 2$   
**while**  $i \leq A.length$

...

$j = j + 1$

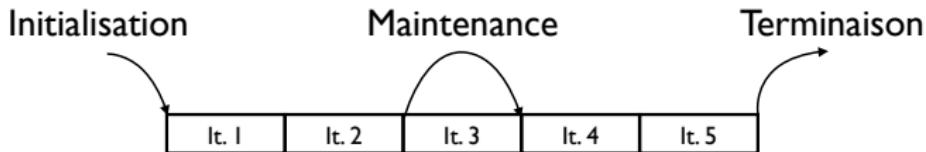
- $P = "A$  est un tableau de taille  $A.length"$ ,  
 $Q = "Le tableau  $A$  est trié"$ ,  
 $I = "A[1..j - 1]$  contient les  $j - 1$  premiers éléments de  $A$  triés"
- $\{P\}j = 2\{I\}$  *(avant la boucle)*
  - ▶  $j = 2 \Rightarrow A[1]$  est trivialement ordonné

## Exemple : tri par insertion

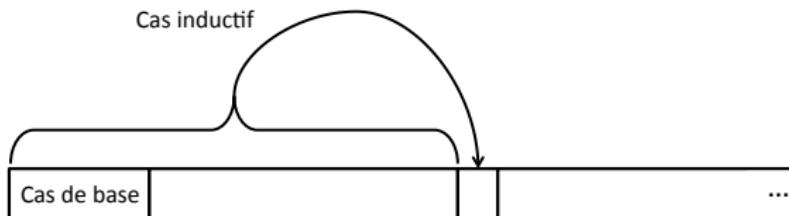
- $\{I \text{ et } j \leq A.length\}$  CORPS  $\{I\}$  *(pendant la boucle)*
  - ▶ La boucle interne déplace  $A[j - 1]$ ,  $A[j - 2]$ ,  $A[j - 3]$ ... d'une position vers la droite jusqu'à trouver la bonne position pour  $key (A[j])$ .
  - ▶  $A[1..j]$  contient alors les éléments originaux de  $A[1..j]$  triés.
  - ▶  $j = j + 1$  rétablit l'invariant
- $\{I \text{ et } j = A.length + 1\} \{Q\}$  *(après la boucle)*
  - ▶ Puisque  $j = A.length + 1$ , l'invariant implique que  $A[1..A.length]$  est ordonné.
- Fonction de terminaison  $f = A.length - j + 1$

# Invariant

- Un invariant peut être difficile à trouver pour certains algorithmes
- En général, l'algorithme découle de l'invariant et pas l'inverse
  - ▶ FIBONACCI-ITER : On calcule itérativement  $F_{i-1}$  et  $F_{i-2}$   
 $(I = \{pprev == F_{i-2}, prev == F_{i-1}\})$
  - ▶ INSERTION-SORT : On ajoute l'élément  $j$  aux  $j - 1$  premiers éléments déjà triés  
 $(I = "A[1..j - 1] contient les j - 1 premiers éléments de A triés")$
- La preuve par invariant est basée sur le principe général de preuve par induction qu'on va utiliser aussi pour prouver la correction des algorithmes récursifs



# Preuve par induction



- On veut montrer qu'une propriété est vraie pour une série d'instances
- On suppose l'existence d'un ordonnancement des instances
- **Cas de base** : on montre explicitement que la propriété est vraie pour la ou les premières instances
- **Cas inductif** : on suppose que la propriété est vraie pour les  $k$  premières instances et on montre qu'elle l'est alors aussi pour la  $k + 1$ -ième instance (quel que soit  $k$ )
- Par le principe d'induction, la propriété sera vraie pour toutes les instances

## Preuve par induction : exemple

Proposition : Pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration :

- Cas de base :  $n = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^0 i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$
- Cas inductif : Supposons la propriété vraie pour  $n$  et montrons qu'elle est vraie pour  $n + 1$  :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i &= \left( \sum_{i=1}^n i \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

- Par induction, la propriété est vraie pour tout  $n$ .



## Correction d'algorithmes récursifs par induction

- Propriété à montrer : l'algorithme est correct pour une instance quelconque du problème
- Instances du problème ordonnées par “taille” (taille du tableau, nombre de bits, un entier  $n$ , etc.)
- Cas de base de l'induction = cas de base de la récursion
- Cas inductif : on suppose que les appels récursifs sont corrects et on en déduit que l'appel courant est correct
- Terminaison : on montre que les appels récursifs se font sur des sous-problèmes (souvent trivial)

## Exemple : FIBONACCI

```
FIBONACCI( $n$ )
1  if  $n \leq 1$ 
2      return  $n$ 
3  return FIBONACCI( $n - 2$ ) + FIBONACCI( $n - 1$ )
```

Proposition : Pour tout  $n$ , FIBONACCI( $n$ ) renvoie  $F_n$ .

Démonstration :

- Cas de base : pour  $n = 0$ , FIBONACCI( $n$ ) renvoie  $F_0 = 0$ . Pour  $n = 1$ , FIBONACCI( $n$ ) renvoie  $F_1 = 1$ .
- Cas inductif :
  - ▶ Supposons  $n \geq 2$  et que pour tout  $0 \leq m < n$ , FIBONACCI( $m$ ) renvoie  $F_m$ .
  - ▶ Pour  $n \geq 2$ , FIBONACCI( $n$ ) renvoie

$$\begin{aligned} & \text{FIBONACCI}(n - 2) + \text{FIBONACCI}(n - 1) \\ &= F_{n-2} + F_{n-1} \text{ (par hypothèse inductive)} \\ &= F_n. \end{aligned}$$

## Exemple : merge sort

```
MERGE-SORT( $A, p, r$ )
1  if  $p < r$ 
2       $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$ 
3      MERGE-SORT( $A, p, q$ )
4      MERGE-SORT( $A, q + 1, r$ )
5      MERGE( $A, p, q, r$ )
```

Proposition : Pour tout  $1 \leq p \leq r \leq A.length$ ,  $\text{MERGE-SORT}(A, p, r)$  trie le sous-tableau  $A[p..r]$ .

(On supposera que MERGE est correct mais il faudrait le démontrer par un invariant)

## Exemple : merge sort

```
MERGE-SORT( $A, p, r$ )
1  if  $p < r$ 
2       $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$ 
3      MERGE-SORT( $A, p, q$ )
4      MERGE-SORT( $A, q + 1, r$ )
5      MERGE( $A, p, q, r$ )
```

Démonstration :

- Cas de base : pour  $r - p = 0$ , MERGE-SORT( $A, p, r$ ) ne modifie pas  $A$  et donc  $A[p] = A[q]$  est trivialement trié
- Cas inductif :
  - ▶ Supposons  $r - p > 0$  et que pour tout  $1 \leq p' \leq r' \leq A.length$  tels que  $r' - p' < r - p$ , MERGE-SORT( $A, p', r'$ ) trie  $A[p' .. r']$
  - ▶ Les appels MERGE-SORT( $A, p, q$ ) et MERGE-SORT( $A, q + 1, r$ ) sont corrects par hypothèse inductive (puisque  $q - p < r - p$  et  $r - q - 1 < r - p$ )
  - ▶ En supposant MERGE correct, MERGE-SORT( $A, p, r$ ) est correct.



# Conclusion sur la correction

- Preuves de correction :
  - ▶ Algorithmes itératifs : invariant (=induction)
  - ▶ Algorithmes récursifs : induction
- Malheureusement, il n'existe pas d'outil automatique pour vérifier la correction (et la terminaison) d'algorithmes
- Dans la suite, on ne présentera des invariants ou des preuves par induction que très sporadiquement lorsque ce sera nécessaire (cas non triviaux)

# Plan

## 1. Correction d'algorithmes

Introduction

Algorithmes itératifs

Algorithmes récursifs

## 2. Complexité algorithmique

Introduction

Notations asymptotiques

Complexité d'algorithmes et de problèmes

Complexité d'algorithmes itératifs

Complexité d'algorithmes récursifs

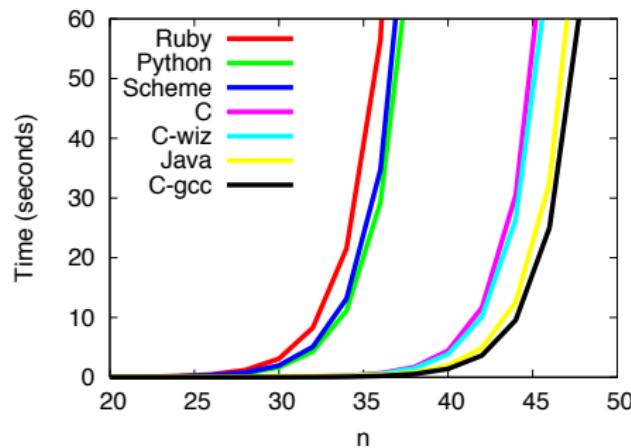
# Performance d'un algorithme

- Plusieurs métriques possibles :
  - ▶ Longueur du programme (nombre de lignes)
  - ▶ Simplicité du code
  - ▶ Espace mémoire consommé
  - ▶ Temps de calcul
  - ▶ ...
- Les temps de calcul sont la plupart du temps utilisés
  - ▶ Ils peuvent être quantifiés et sont faciles à comparer
  - ▶ Souvent ce qui compte réellement
- Nous étudierons aussi l'espace mémoire consommé par nos algorithmes

# Comment mesurer les temps d'exécution ?

Expérimentalement :

- On écrit un programme qui implémente l'algorithme et on l'exécute sur des données
- Problèmes :
  - ▶ Les temps de calcul vont dépendre de l'implémentation : CPU, OS, langage, compilateur, charge de la machine, OS, etc.
  - ▶ Sur quelles données tester l'algorithme ?



(Carzaniga)

# Comment mesurer les temps d'exécution ?

Sur papier :

- Développer un modèle de machine ("Random-access machine", RAM) :
  - ▶ Opérations exécutées les unes après les autres (pas de parallélisme)
  - ▶ Opérations de base (addition, affectation, branchement, etc.) prennent un temps constant
  - ▶ Appel de sous-routines : temps de l'appel (constant) + temps de l'exécution de la sous-routine (calculé récursivement)
- Calculer les temps de calcul = sommer le temps d'exécution associé à chaque instruction du pseudo-code
- Le temps dépend de l'entrée (l'instance particulière du problème)
- On étudie généralement les temps de calcul en fonction de la "taille" de l'entrée
  - ▶ Généralement, le nombre de valeurs pour la décrire
  - ▶ Mais ça peut être autre chose (Ex :  $n$  pour FIBONACCI)

## Analyse du tri par insertion

INSERTION-SORT( $A$ )	<i>cost</i>	<i>times</i>
1 <b>for</b> $j = 2$ <b>to</b> $A.length$	$c_1$	$n$
2 $key = A[j]$	$c_2$	$n - 1$
3       // Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1 \dots j - 1]$ .	0	$n - 1$
4 $i = j - 1$	$c_4$	$n - 1$
5 <b>while</b> $i > 0$ and $A[i] > key$	$c_5$	$\sum_{j=2}^n t_j$
6 $A[i + 1] = A[i]$	$c_6$	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
7 $i = i - 1$	$c_7$	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
8 $A[i + 1] = key$	$c_8$	$n - 1$

- $t_j$  = nombre de fois que la condition du **while** est testée.
- Temps exécution  $T(n)$  (pour un tableau de taille  $n$ ) donné par :

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n - 1) + c_4(n - 1) + c_5 \sum_{j=2}^n t_j + c_6 \sum_{j=2}^n (t_j - 1) \\ &\quad + c_7 \sum_{j=2}^n (t_j - 1) + c_8(n - 1) \end{aligned}$$

# Différents types de complexité

- Même pour une taille fixée, la complexité peut dépendre de l'instance particulière
- Soit  $D_n$  l'ensemble des instances de taille  $n$  d'un problème et  $T(i_n)$  le temps de calcul pour une instance  $i_n \in D_n$ .
- Sur quelles instances les performances d'un algorithme devraient être jugées :
  - ▶ Cas le plus favorable (best case) :  $T(n) = \min\{T(i_n) | i_n \in D_n\}$
  - ▶ Cas le plus défavorable (worst case) :  $T(n) = \max\{T(i_n) | i_n \in D_n\}$
  - ▶ Cas moyen (average case) :  $T(n) = \sum_{i_n \in D_n} Pr(i_n) T(i_n)$  où  $Pr(i_n)$  est la probabilité de rencontrer  $i_n$
- On se focalise généralement sur le cas **le plus défavorable**
  - ▶ Donne une borne supérieure sur le temps d'exécution.
  - ▶ Le meilleur cas n'est pas représentatif et le cas moyen est difficile à calculer.

# Analyse du tri par insertion

Meilleur cas :

- le tableau est trié  $\Rightarrow t_j = 1$ .
- Le temps de calcul devient :

$$\begin{aligned}T(n) &= c_1n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(n-1) + c_8(n-1) \\&= (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)\end{aligned}$$

- $T(n) = an + b \Rightarrow T(n)$  est une fonction linéaire de  $n$

# Analyse du tri par insertion

Pire cas :

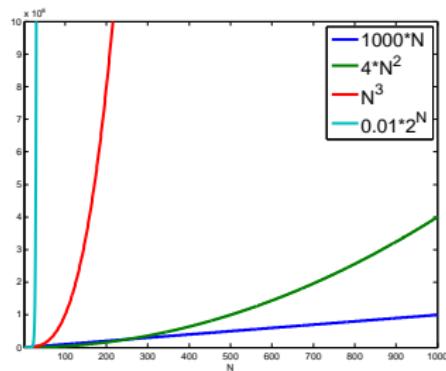
- le tableau est trié par ordre décroissant  $\Rightarrow t_j = j$ .
- Le temps de calcul devient :

$$\begin{aligned}T(n) &= c_1n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \left( \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\&\quad + c_6 \left( \frac{n(n-1)}{2} \right) + c_7 \left( \frac{n(n-1)}{2} \right) + c_8(n-1) \\&= \left( \frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2} \right) n^2 + \left( c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2} + c_8 \right) n \\&\quad - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)\end{aligned}$$

- $T(n) = an^2 + bn + c \Rightarrow T(n)$  est une fonction **quadratique** de  $n$

# Analyse asymptotique

- On s'intéresse à la vitesse de croissance ("order of growth") de  $T(n)$  lorsque  $n$  croît.
  - ▶ Tous les algorithmes sont rapides pour des petites valeurs de  $n$
- On simplifie généralement  $T(n)$  :
  - ▶ en ne gardant que le terme dominant
    - ▶ Exemple :  $T(n) = 10n^3 + n^2 + 40n + 800$
    - ▶  $T(1000) = 100001040800$ ,  $10 \cdot 1000^3 = 100000000000$
  - ▶ en ignorant le coefficient du terme dominant
    - ▶ Asymptotiquement, ça n'affecte pas l'ordre relatif



- Exemple : Tri par insertion :  $T(n) = an^2 + bn + c \rightarrow n^2$ .

# Pourquoi est-ce important ?

- Supposons qu'on puisse traiter une opération de base en  $1\mu s$ .
- Temps d'exécution pour différentes valeurs de  $n$

$T(n)$	$n = 10$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10000$
$n$	$10\mu s$	$0.1ms$	$1ms$	$10ms$
$400n$	$4ms$	$40ms$	$0.4s$	$4s$
$2n^2$	$200\mu s$	$20ms$	$2s$	$3.3m$
$n^4$	$10ms$	$100s$	$\sim 11.5$ jours	$317$ années
$2^n$	$1ms$	$4 \times 10^{16}$ années	$3.4 \times 10^{287}$ années	...

(Dupont)

# Pourquoi est-ce important ?

- Taille maximale du problème qu'on peut traiter en un temps donné :

$T(n)$	en 1 seconde	en 1 minute	en 1 heure
$n$	$1 \times 10^6$	$6 \times 10^7$	$3.6 \times 10^9$
$400n$	2500	150000	$9 \times 10^6$
$2n^2$	707	5477	42426
$n^4$	31	88	244
$2^n$	19	25	31

- Si  $m$  est la taille maximale que l'on peut traiter en un temps donné, que devient cette valeur si on reçoit une machine 256 fois plus puissante ?

$T(n)$	Temps
$n$	$256m$
$400n$	$256m$
$2n^2$	$16m$
$n^4$	$4m$
$2^n$	$m + 8$

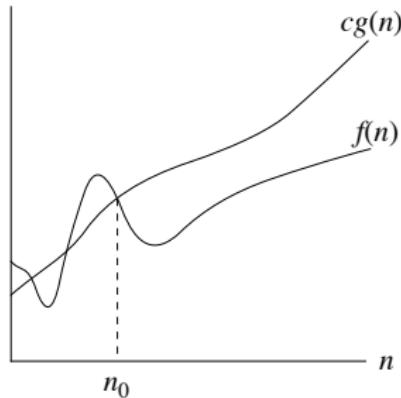
(Dupont)

# Notations asymptotiques

- Permettent de caractériser le taux de croissance de fonctions  
 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$
- Trois notations :
  - ▶ Grand-O :  $f(n) \in O(g(n)) \approx f(n) \leq g(n)$
  - ▶ Grand-Omega :  $f(n) \in \Omega(g(n)) \approx f(n) \geq g(n)$
  - ▶ Grand-Theta :  $f(n) \in \Theta(g(n)) \approx f(n) = g(n)$

## Notation grand-O

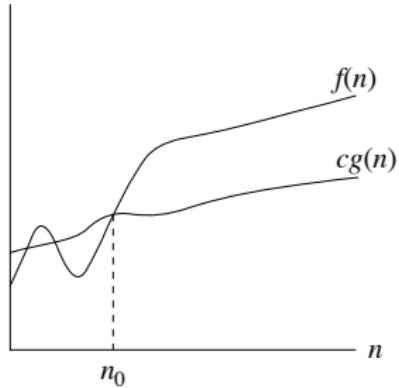
$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, \exists n_0 \geq 1 \text{ tels que } 0 \leq f(n) \leq cg(n), \forall n \geq n_0\}$$



- $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow g(n)$  est une borne supérieure asymptotique pour  $f(n)$ .
- Par abus de notation, on écrira aussi :  $f(n) = O(g(n))$ .

## Notation grand-Omega

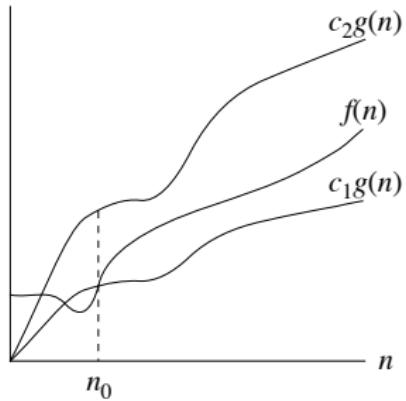
$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, \exists n_0 \geq 1 \text{ tels que } 0 \leq cg(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0\}$$



- $f(n) \in \Omega(g(n)) \Rightarrow g(n)$  est une borne inférieure asymptotique pour  $f(n)$ .
- Par abus de notation, on écrira aussi :  $f(n) = \Omega(g(n))$ .

## Notation grand-Theta

$$\begin{aligned}\Theta(g(n)) &= \{f(n) | \exists c_1, c_2 > 0, \exists n_0 \geq 1 \\ &\quad \text{tels que } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_0\}\end{aligned}$$

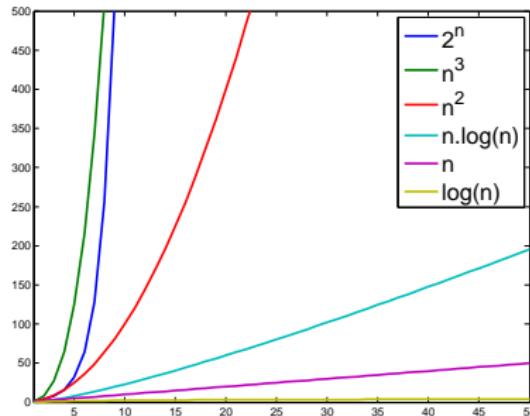


- $f(n) \in \Theta(g(n)) \Rightarrow g(n)$  est une borne serrée (“tight”) asymptotique pour  $f(n)$ .
- Par abus de notation, on écrira aussi :  $f(n) = \Theta(g(n))$ .

## Exemples

- $3n^5 - 16n + 2 \in O(n^5)$  ?  $\in O(n)$  ?  $\in O(n^{17})$  ?
- $3n^5 - 16n + 2 \in \Omega(n^5)$  ?  $\in \Omega(n)$  ?  $\in \Omega(n^{17})$  ?
- $3n^5 - 16n + 2 \in \Theta(n^5)$  ?  $\in \Theta(n)$  ?  $\in \Theta(n^{17})$  ?
- $2^n + 100n^6 + n \in O(2^n)$  ?  $\in \Theta(3^n)$  ?  $\in \Omega(n^7)$  ?
- Classes de complexité :

$$O(1) \subset O(\log n) \subset O(n) \subset O(n \log n) \subset O(n^{a>1}) \subset O(2^n)$$



## Quelques propriétés

- $f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$
- $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$  et  $f(n) \in \Omega(g(n))$
- $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$
  
- Si  $f(n) \in O(g(n))$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $k \cdot f(n) \in O(g(n))$ 
  - ▶ Exemple :  $\log_a(n) \in O(\log_b(n))$ ,  $a^{n+b} \in O(a^n)$
- Si  $f_1(n) \in O(g_1(n))$  et  $f_2(n) \in O(g_2(n))$ , alors  
 $f_1(n) + f_2(n) \in O(g_1(n) + g_2(n))$  et  $f_1(n) + f_2(n) \in O(\max\{g_1(n), g_2(n)\})$ 
  - ▶ Exemple :  $\sum_{i=1}^m a_i n^i \in O(n^m)$
- Si  $f_1(n) \in O(g_1(n))$  et  $f_2(n) \in O(g_2(n))$ , alors  
 $f_1(n) \cdot f_2(n) \in O(g_1(n) \cdot g_2(n))$

# Complexité d'un algorithme

- On utilise les notations asymptotiques pour caractériser la complexité d'un algorithme.
- Il faut préciser de quelle complexité on parle : générale, au pire cas, au meilleur cas, en moyenne...
- La notation grand-O est de loin la plus utilisée
  - ▶  $f(n) \in O(g(n))$  sous-entend généralement que  $O(g(n))$  est le plus petit sous-ensemble qui contient  $f(n)$  et que  $g(n)$  est la plus concise possible
  - ▶ Exemple :  $n^3 + 100n^2 - n \in O(n^3) = O(n^3 + n^2) \subset O(n^4) \subset O(2^n)$
- Idéalement, les notations  $O$  et  $\Omega$  devraient être limitées au cas où on n'a pas de borne serrée.

# Complexité d'un algorithme

Exemples :

- On dira :  
“La complexité au pire cas du tri par insertion est  $\Theta(n^2)$ ”  
plutôt que  
“La complexité au pire cas du tri par insertion est  $O(n^2)$ ”  
ou “La complexité du tri par insertion est  $O(n^2)$ ”
- On dira  
“La complexité au meilleur cas du tri par insertion est  $\Theta(n)$ ”  
plutôt que  
“La complexité au meilleur cas du tri par insertion est  $\Omega(n)$ ”  
ou “La complexité du tri par insertion est  $\Omega(n)$ ”
- Par contre, on dira “La complexité de FIBONACCI est  $\Omega(1.4^n)$ ”, car  
on n'a pas de borne plus précise à ce stade.

# Complexité d'un problème

- Les notations asymptotiques servent aussi à caractériser la complexité d'un problème
  - ▶ Un problème est  $O(g(n))$  s'il existe un algorithme  $O(g(n))$  pour le résoudre
  - ▶ Un problème est  $\Omega(g(n))$  si tout algorithme qui le résoud est forcément  $\Omega(g(n))$
  - ▶ Un problème est  $\Theta(g(n))$  s'il est  $O(g(n))$  et  $\Omega(g(n))$
- Exemple du problème de tri :
  - ▶ Le problème du tri est  $O(n \log n)$  (voir plus loin)
  - ▶ On peut montrer facilement que le problème du tri est  $\Omega(n)$  (voir le transparent suivant)
  - ▶ On montrera plus tard que le problème de tri est en fait  $\Omega(n \log n)$  et donc qu'il est  $\Theta(n \log n)$ .
- Exercice : montrez que la recherche du maximum dans un tableau est  $\Theta(n)$

## Le problème du tri est $\Omega(n)$

Preuve par l'absurde (ou par contraposition) :

- Supposons qu'il existe un algorithme moins que  $O(n)$  pour résoudre le problème du tri
- Cet algorithme ne peut pas parcourir tous les éléments du tableau, sinon il serait au moins  $O(n)$
- Il y a donc au moins un élément du tableau qui n'est pas vu par cet algorithme
- Il existe donc des instances de tableau qui ne seront pas triées correctement par cet algorithme
- Il n'y a donc pas d'algorithme plus rapide que  $O(n)$  pour le tri.

# Comment calculer la complexité en pratique ?

Quelques règles pour les algorithmes itératifs :

- Affectation, accès à un tableau, opérations arithmétiques, appel de fonction :  $O(1)$
- Instruction If-Then-Else :  $O(\text{complexité max des deux branches})$
- Séquence d'opérations : l'opération la plus couteuse domine (règle de la somme)
- Boucle simple :  $O(nf(n))$  si le corps de la boucle est  $O(f(n))$

# Comment calculer la complexité en pratique ?

- Double boucle complète :  $O(n^2 f(n))$  où  $f(n)$  est la complexité du corps de la boucle
- Boucles incrémentales :  $O(n^2)$  (si corps  $O(1)$ )

```
for i = 1 to n  
    for j = 1 to i
```

...

- Boucles avec un incrément exponentiel :  $O(\log n)$  (si corps  $O(1)$ )

```
i = 1  
while i ≤ n  
    ...  
    i = 2i
```

## Exemple :

PREFIXAVERAGES( $X$ ) :

- Entrée : tableau  $X$  de taille  $n$
- Sortie : tableau  $A$  de taille  $n$  tel que  $A[i] = \frac{\sum_{j=1}^i X[j]}{i}$

PREFIXAVERAGES( $X$ )

```
1  for i = 1 to X.length
2      a = 0
3      for j = 1 to i
4          a = a + X[j]
5      A[i] = a/i
6  return A
```

Complexité :  $\Theta(n^2)$

PREFIXAVERAGES2( $X$ )

```
1  s = 0
2  for i = 1 to X.length
3      s = s + X[i]
4      A[i] = s/i
5  return A
```

Complexité :  $\Theta(n)$

# Complexité d'algorithmes récursifs

- La complexité d'un algorithme récursif mène généralement à une équation de récurrence
- La résolution de cette équation n'est généralement pas triviale
- On se contentera d'étudier quelques cas particuliers importants dans ce cours

# FACTORIAL et FIBONACCI

```
FACTORIAL( $n$ )
```

```
1  if  $n == 0$ 
2      return 1
3  return  $n \cdot \text{FACTORIAL}(n - 1)$ 
```

```
FIB( $n$ )
```

```
1  if  $n \leq 1$ 
2      return  $n$ 
3  return FIB( $n - 2$ ) + FIB( $n - 1$ )
```

$$T(0) = c_0$$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n - 1) + c_1 \\ &= c_1 n + c_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n)$$

$$T(0) = c_0, T(1) = c_0$$

$$T(n) = T(n - 1) + T(n - 2) + c_1$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Omega(1.4^n)$$

# Analyse du tri par fusion

```
MERGE-SORT( $A, p, r$ )
```

- 1   **if**  $p < r$
- 2        $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$
- 3       MERGE-SORT( $A, p, q$ )
- 4       MERGE-SORT( $A, q + 1, r$ )
- 5       MERGE( $A, p, q, r$ )

## ■ Récurrence :

$$T(1) = c_1$$

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = 2T(n/2) + c_2n + c_3$$

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

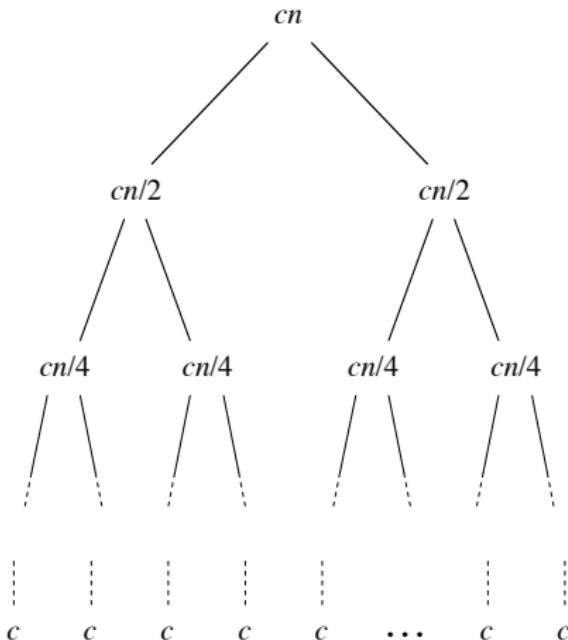
# Analyse du tri par fusion

- Simplifions la récurrence en :

$$T(1) = c$$

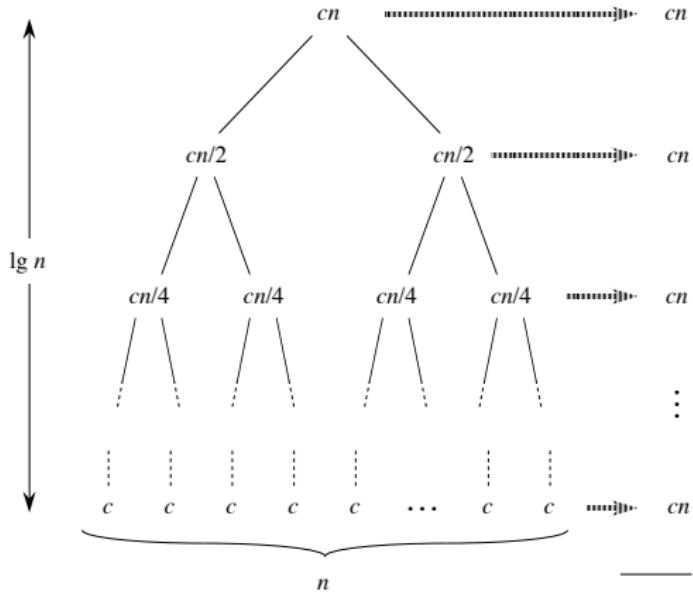
$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$

- On peut représenter la récurrence par un arbre de récursion
- La complexité est la somme du coût de chaque noeud



# Analyse du tri par fusion

- Chaque niveau a un coût  $cn$
- En supposant que  $n$  est une puissance de 2, il y a  $\log_2 n + 1$  niveaux
- Le coût total est  $cn \log_2 n + cn \in \Theta(n \log n)$



Total:  $cn \lg n + cn$

## Remarques

### Limitations de l'analyse asymptotique

- Les facteurs constants ont de l'importance pour des problèmes de petite taille
  - ▶ Le tri par insertion est plus rapide que le tri par fusion pour  $n$  petit
- Deux algorithmes de même complexité (grand-O) peuvent avoir des propriétés très différentes
  - ▶ Le tri par insertion est en pratique beaucoup plus efficace que le tri par sélection sur des tableaux presque triés

### Complexité en espace

- S'étudie de la même manière, avec les mêmes notations
- Elle est bornée par la complexité en temps (pourquoi ?)

## Ce qu'on a vu

- Correction d'algorithmes itératifs (par invariant) et récursifs (par induction)
- Notions de complexité algorithmique
- Notations asymptotiques
- Calcul de complexité d'algorithmes itératifs et récursifs

# Partie 3

## Algorithmes de tri

# Plan

1. Algorithmes de tri
2. Tri rapide
3. Tri par tas
  - Introduction aux arbres
  - Tas
  - Tri par tas
4. Synthèse

# Tri

- Un des problèmes algorithmiques les plus fondamentaux.
- En général, on veut trier des enregistrements avec une clé et des données attachées.

Record <sub>1</sub>	Record <sub>2</sub>	Record <sub>3</sub>	...	Record <sub>n</sub>
Key <sub>1</sub>	Key <sub>2</sub>	Key <sub>3</sub>	...	Key <sub>n</sub>
Data <sub>1</sub>	Data <sub>2</sub>	Data <sub>3</sub>	...	Data <sub>n</sub>

- Ici, on va ignorer ces données satellites et se focaliser sur les algorithmes de tri
- Le problème de tri :
  - ▶ Entrée : une séquence de  $n$  nombres  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$
  - ▶ Sortie : une permutation de la séquence de départ  $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$  telle que  $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

# Applications

Applications innombrables :

- Tri des mails selon leur ancienneté
- Tri des résultats de requête dans un moteur de recherche
- Tri des facettes des objets pour l'affichage dans les jeux 3D
- Gestion des opérations bancaires
- ...

Le tri sert aussi de brique de base pour d'autres algorithmes :

- Recherche binaire dans un tableau trié
- Recherche des éléments dupliqués dans une liste
- Recherche du *k*ème élément le plus grand dans une liste
- ...

Des études montrent qu'environ 25% du temps CPU des ordinateurs est utilisé pour trier

## Différents types de tri

- **Tri interne** : tri en mémoire centrale. **Tris externes** : données sur un disque externe.
- **Tri de tableau** : tri qui trie un tableau. Extensible à toutes structures de données offrant un accès en temps (quasi) constant à ses éléments.
- **Tri générique** : peut trier n'importe quel type d'objets pour autant qu'on puisse comparer ces objets.
- **Tri comparatif** : basé sur la comparaison entre les éléments (clés)

## Différents types de tri

- **Tri itératif** : basé sur un ou plusieurs parcours itératifs du tableau
- **Tri récursif** : basé sur une procédure récursive
- **Tri en place** : modifie directement la structure qu'il est en train de trier. Ne nécessite qu'une quantité très limitée de mémoire supplémentaire.
- **Tri stable** : conserve l'ordre relatif des éléments égaux (au sens de la méthode de comparaison).

# Jusqu'ici

<i>Algorithme</i>	<i>Complexité</i>			<i>En place ?</i>
	<i>Pire</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Meilleure</i>	
INSERTION-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	oui
SELECTION-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	oui
BUBBLE-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	oui
MERGE-SORT	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	non
??		$\Theta(n \log n)$		oui
??		$\Theta(n \log n)$		oui

# Tri rapide

- *Quicksort* en anglais
- Inventé par Hoare en 1960
- Dans le top 10 des algorithmes du 20-ième siècle (SIAM)
- L'exemple le plus célèbre de la technique du “diviser pour régner”
- Tri en place, comme tri par insertion, et contrairement au tri par fusion
- Complexité :  $\Theta(n^2)$  dans le pire des cas,  $\Theta(n \log n)$  en moyenne

## QUICKSORT : principe

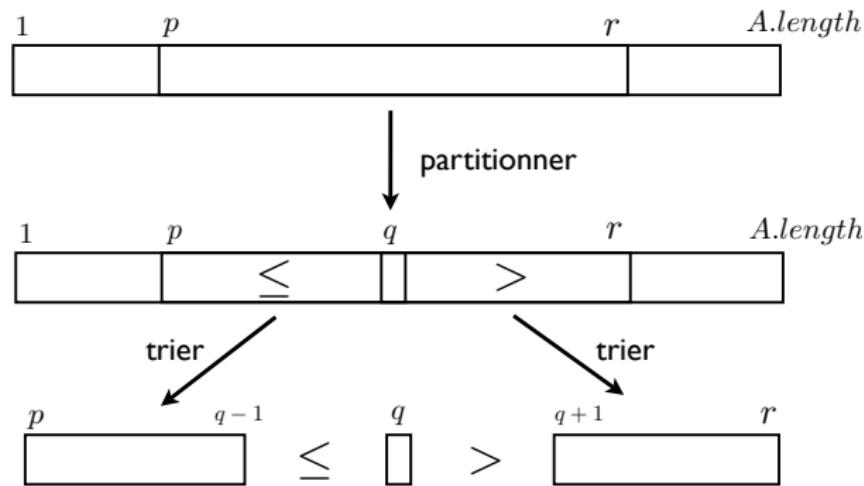
Pour trier un sous-tableau  $A[p..r]$  :

- Partitionner  $A[p..r]$  en deux sous-tableaux :  $A[p..q - 1]$  et  $A[q + 1..r]$  tels que tout élément de  $A[p..q - 1]$  est  $\leq A[q]$  et  $A[q] < \text{à tout élément de } A[q + 1..r]$ .  
*(diviser)*
- Appeler récursivement l'algorithme pour trier  $A[p..q - 1]$  et  $A[q + 1..r]$   
*(réigner)*

Remarques :

- $A[q]$  est appelé le “pivot”
- Par rapport au tri par fusion, il n'y a pas d'opération de combinaison

# QUICKSORT : principe



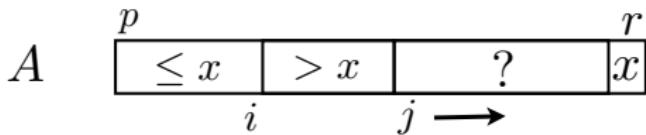
# QUICKSORT Algorithm

```
QUICKSORT( $A, p, r$ )
```

- 1   **if**  $p < r$
- 2          $q = \text{PARTITION}(A, p, r)$
- 3          $\text{QUICKSORT}(A, p, q - 1)$
- 4          $\text{QUICKSORT}(A, q + 1, r)$

Appel initial :  $\text{QUICKSORT}(A, 1, A.length)$

## Partition : principe



- On sélectionne le dernier élément  $A[r]$  comme le **pivot**
- On initialise un indice  $i$  à  $p - 1$
- On parcourt le tableau de gauche à droite avec un indice  $j = p$  to  $r - 1$
- Si  $A[j] \leq A[r]$ , on incrémente  $i$  et on échange  $A[j]$  et  $A[i]$
- En sortie de boucle, on échange  $A[i + 1]$  et  $A[r]$  et on renvoie  $i + 1$

# Partition : illustration

$i$	$p, j$	$r$
	2 8 7 1 3 5 6	4

$p, i$	$j$	$r$
2	8 7 1 3 5 6	4

$p, i$	$j$	$r$
2 8	7 1 3 5 6	4

$p, i$	$j$	$r$
2 8 7	1 3 5 6	4

$p$	$i$	$j$	$r$
2 1	7 8 3 5 6	4	

$p$	$i$	$j$	$r$
2 1 3	8 7 5 6	4	

$p$	$i$	$j$	$r$
2 1 3 8	7 5 6	4	

$p$	$i$	$r$
2 1 3 8 7 5 6	4	

$p$	$i$	$r$
2 1 3 4 7 5 6	8	

$A[r]$  est le pivot

$A[p..i]$  contient des éléments  $\leq$  au pivot

$A[i + 1..j - 1]$  contient des éléments  $>$  que le pivot

$A[j..r - 1]$  est la partie du tableau non encore examinée

## Partition : pseudo-code

```
PARTITION( $A, p, r$ )
1    $x = A[r]$ 
2    $i = p - 1$ 
3   for  $j = p$  to  $r - 1$ 
4       if  $A[j] \leq x$ 
5            $i = i + 1$ 
6           swap( $A[i], A[j]$ )
7   swap( $A[i + 1], A[r]$ )
8   return  $i + 1$ 
```

## Partition : correction

```
PARTITION( $A, p, r$ )
1    $x = A[r]$ 
2    $i = p - 1$ 
3   for  $j = p$  to  $r - 1$ 
4       if  $A[j] \leq x$ 
5            $i = i + 1$ 
6           swap( $A[i], A[j]$ )
7   swap( $A[i + 1], A[r]$ )
8   return  $i + 1$ 
```

**Pré-condition :**  $\{A[p..r], \text{ un tableau de nombres}\}$

**Post-condition :**  $\{A[p..i] \leq A[i + 1] < A[i + 2..r]\}$

**Invariant :**

1. Les valeurs dans  $A[p..i]$  sont  $\leq$  au pivot
2. Les valeurs dans  $A[i + 1..j - 1]$  sont  $>$  que le pivot
3.  $A[r] = \text{pivot}$

## Partition : correction

**Avant la boucle :**  $i = p - 1$  et  $j = p \Rightarrow A[p..i]$  et  $A[i + 1..j - 1]$  sont vides

**Pendant la boucle :**

$A$	$p$	$\leq x$	$> x$	?	$r$
		$i$	$j$	→	

- Si  $A[j] > x$ , on incrémente juste  $j$ . Donc si l'invariant était vrai avant l'exécution du corps, il reste vrai après.
- Si  $A[j] \leq x$ , on échange  $A[j]$  et  $A[i + 1]$  et  $i$  et  $j$  sont incrémentés. L'invariant reste donc vérifié également

**Après la boucle :**

$A$	$p$	$\leq x$	$> x$	$x$	$r$
		$i$	$j$		

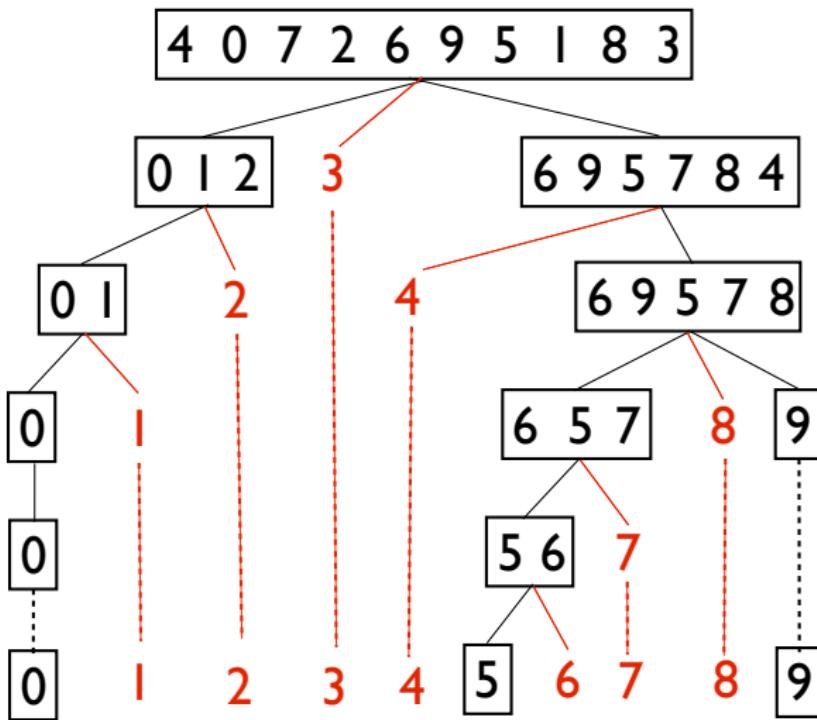
En sortie de boucle, l'invariant est vérifié et on a  $j = r$ . Echanger  $A[i + 1]$  et  $A[r]$  établit la post-condition.

# Algorithme complet

```
PARTITION( $A, p, r$ )
1    $x = A[r]$ 
2    $i = p - 1$ 
3   for  $j = p$  to  $r - 1$ 
4       if  $A[j] \leq x$ 
5            $i = i + 1$ 
6           swap( $A[i], A[j]$ )
7   swap( $A[i + 1], A[r]$ )
8   return  $i + 1$ 
```

```
QUICKSORT( $A, p, r$ )
1   if  $p < r$ 
2        $q = \text{PARTITION}(A, p, r)$ 
3        $\text{QUICKSORT}(A, p, q - 1)$ 
4        $\text{QUICKSORT}(A, q + 1, r)$ 
```

## Illustration



# Complexité de PARTITION

```
PARTITION( $A, p, r$ )
1    $x = A[r]$ 
2    $i = p - 1$ 
3   for  $j = p$  to  $r - 1$ 
4       if  $A[j] \leq x$ 
5            $i = i + 1$ 
6            $swap(A[i], A[j])$ 
7    $swap(A[i + 1], A[r])$ 
8   return  $i + 1$ 
```

$$T(n) = \Theta(n)$$

# Complexité de QUICKSORT

```
QUICKSORT( $A, p, r$ )
1  if  $p < r$ 
2       $q = \text{PARTITION}(A, p, r)$ 
3       $\text{QUICKSORT}(A, p, q - 1)$ 
4       $\text{QUICKSORT}(A, q + 1, r)$ 
```

- Pire cas : *(quand se produit-il ?)*

- ▶  $q = p$  ou  $q = r$
- ▶ Le partitionnement transforme un problème de taille  $n$  en un problème de taille  $n - 1$

$$T(n) = T(n - 1) + \Theta(n)$$

- ▶ Même complexité que le tri par insertion :

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

# Complexité de QUICKSORT

```
QUICKSORT( $A, begin, end$ )
1  if  $begin < end$ 
2       $q = \text{PARTITION}(A, begin, end)$ 
3       $\text{QUICKSORT}(A, begin, q - 1)$ 
4       $\text{QUICKSORT}(A, q + 1, end)$ 
```

- Meilleur cas :
  - ▶  $q = \lfloor n/2 \rfloor$
  - ▶ Le partitionnement transforme un problème de taille  $n$  en deux problèmes de taille  $\lceil n/2 \rceil$  et  $\lfloor n/2 \rfloor - 1$  respectivement

$$T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$$

- ▶ Même complexité que le tri par fusion :

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

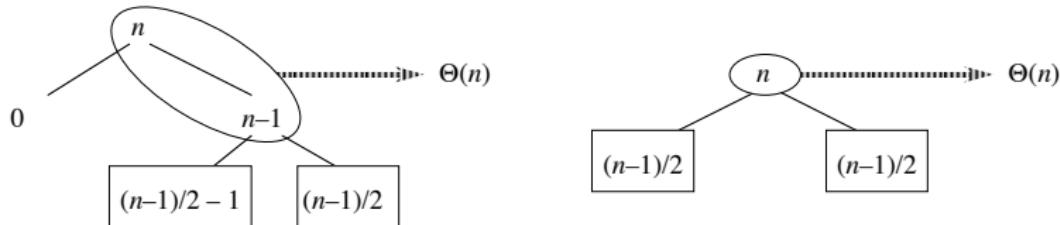
# Complexité moyenne de QUICKSORT : intuitivement

- Complexité moyenne identique à la complexité du meilleur cas

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

- Intuitivement :

- ▶ En moyenne, on s'attend à une alternance de "bons" et de "mauvais" partitionnements
- ▶ La complexité d'un mauvais partitionnement suivi d'un bon est identique à la complexité d'une bon partitionnement directement (seule la constante est modifiée).



# Complexité moyenne de QUICKSORT : mathématiquement

Modèle mathématique :

- Nombre de comparaisons pour le partitionnement :  $n - 1$
- Probabilité que le pivot soit à la position  $k$  :  $1/n$
- Tailles des sous-tableaux dans ce cas-là :  $k - 1$  et  $n - k$
- Les sous-tableaux sont aussi triés aléatoirement

Le nombre *moyen* de comparaisons utilisées par le quicksort est donné par la récurrence suivante :

$$C_1 = 0$$

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k}) \text{ (si } n > 1\text{)}$$

## Formulation analytique

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k})$$

Par symétrie :

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n C_{k-1}$$

En multipliant par  $n$  :

$$nC_n = n(n - 1) + 2 \sum_{k=1}^n C_{k-1}$$

En soustrayant la même formule pour  $n - 1$  :

$$nC_n - (n - 1)C_{n-1} = 2(n - 1) + 2C_{n-1}$$

En rassemblant les termes :

$$nC_n = (n + 1)C_{n-1} + 2(n - 1)$$

On divise par  $n(n + 1)$  :

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

Téléscopage :

$$\begin{aligned}\frac{C_n}{n+1} &= \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} = \frac{C_{n-2}}{n-1} + \frac{2(n-2)}{(n-1)n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{C_1}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{2(n-2)}{(n-1)n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{2(k-1)}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^n \frac{2}{(k+1)} - \sum_{k=2}^n \frac{2}{k(k+1)}\end{aligned}$$

En négligeant la deuxième somme devant la première, on obtient :

$$C_n = 2(n+1)H_n - 3(n+1), \text{ où } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ est la série harmonique.}$$

En utilisant l'approximation de la série harmonique  $H_n \in \Theta(\log n)$  :

$$C_n \in \Theta(n \log n),$$

# Variantes de QUICKSORT

## ■ Choix du pivot :

- ▶ Prendre un élément au hasard plutôt que le dernier.
- ▶ Prendre la médiane de 3 éléments
- ▶ Diminue drastiquement les chances d'être dans le pire cas

```
RANDOMIZED-PARTITION( $A, p, r$ )
```

- 1  $i = \text{RANDOM}(p, r)$
- 2  $\text{swap}(A[\text{end}], A[i])$
- 3 **return** PARTITION( $A, p, r$ )

```
MEDIAN-OF-3-PARTITION( $A, p, r$ )
```

- 1  $i = \text{MEDIAN}(A, p, \lfloor(p + r)/2\rfloor, r)$
- 2  $\text{swap}(A[r], A[i])$
- 3 **return** PARTITION( $A, p, r$ )

# Variantes de QUICKSORT

## ■ Petits sous-tableaux

- ▶ QUICKSORT est trop lourd pour des petits tableaux
- ▶ Utiliser un tri naïf (par ex., par insertion) sur les sous-tableaux de longueur inférieure à  $k$  ( $k \approx 20$ ).

```
QUICKSORT( $A, p, r$ )
1  if  $r - p + 1 \leq \text{CUTOFF}$ 
2      INSERTIONSORT( $A, p, r$ )
3      return
4   $q = \text{PARTITION}(A, p, r)$ 
5  QUICKSORT( $A, p, q - 1$ )
6  QUICKSORT( $A, q + 1, r$ )
```

## Conclusion sur QUICKSORT

- Rapide en moyenne  $\Theta(n \log n)$
- Pire cas en  $\Theta(n^2)$  mais très improbable avec choix du pivot bien fait
- Bonne performance au niveau du cache
- Tri [en place](#) (mais utilise de la mémoire pour la trace récursive)
- Pas stable
- En pratique souvent un peu plus rapide que MERGE-SORT
- Complexité en espace  $O(\log n)$  si bien implémenté (récuratif terminal, en développant d'abord la partition la plus petite)

# Jusqu'ici

<i>Algorithme</i>	<i>Complexité</i>			<i>En place ?</i>
	<i>Pire</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Meilleure</i>	
INSERTION-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	oui
SELECTION-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	oui
BUBBLE-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	oui
MERGE-SORT	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	non
QUICKSORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	oui
??	$\Theta(n \log n)$			oui

# Tri par tas : introduction

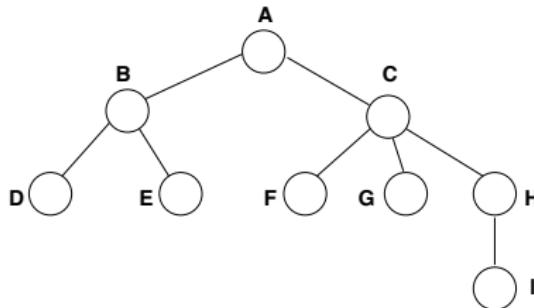
- *Heapsort* en anglais
- inventé par Williams en 1964
- basé sur une structure de données très utile, le *tas*
- complexité bornée par  $\Theta(n \log n)$  (dans tous les cas)
- tri en place
- mise en oeuvre très simple
  
- Suite du cours :
  - ▶ Introduction aux arbres
  - ▶ Tas
  - ▶ Tri par tas

# Arbres : définition

- Définition : Un arbre<sup>1</sup> (*tree*)  $T$  est un graphe dirigé  $(N, E)$ , où :
  - ▶  $N$  est un ensemble de nœuds, et
  - ▶  $E \subset N \times N$  est un ensemble d'arcs,

possédant les propriétés suivantes :

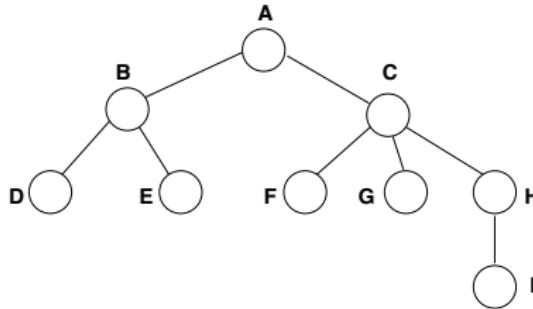
  - ▶  $T$  est connexe et acyclique
  - ▶ Si  $T$  n'est pas vide, alors il possède un nœud distingué appelé racine (*root node*). Cette racine est unique.
  - ▶ Pour tout arc  $(n_1, n_2) \in E$ , le nœud  $n_1$  est le parent de  $n_2$ .
    - ▶ La racine de  $T$  ne possède pas de parent.
    - ▶ Les autres nœuds de  $T$  possèdent un et un seul parent.



- 
1. En théorie des graphes, on parlera d'un arbre enraciné.

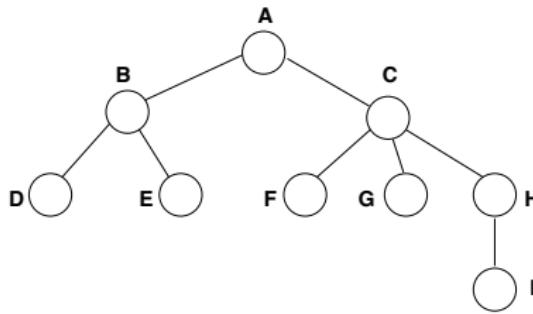
## Arbres : terminologie

- Si  $n_2$  est le parent de  $n_1$ , alors  $n_1$  est le **fils** (*child*) de  $n_2$ .
- Deux nœuds  $n_1$  et  $n_2$  qui possèdent le même parent sont des **frères** (*siblings*).
- Un nœud qui possède au moins un fils est un nœud **interne**.
- Un nœud externe (c'est-à-dire, non interne) est une **feuille** (*leaf*) de l'arbre.
- Un nœud  $n_2$  est un **ancêtre** (*ancestor*) d'un nœud  $n_1$  si  $n_2$  est le parent de  $n_1$  ou un ancêtre du parent de  $n_1$ .
- Un nœud  $n_2$  est un **descendant** d'un nœud  $n_1$  si  $n_1$  est un ancêtre de  $n_2$ .



## Arbres : terminologie

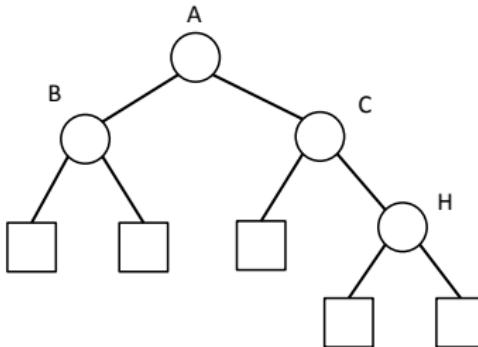
- Un **chemin** est une séquence de nœuds  $n_1, n_2, \dots, n_m$  telle que pour tout  $i \in [1, m - 1]$ ,  $(n_i, n_{i+1})$  est un arc de l'arbre.  
Remarque : Il n'existe jamais de chemin reliant deux feuilles distinctes.
- La **hauteur (height)** d'un nœud  $n$  est le nombre d'arcs d'un plus long chemin de ce nœud vers une feuille. La *hauteur de l'arbre* est la hauteur de sa racine.
- La **profondeur (depth)** d'un nœud  $n$  est le nombre d'arcs sur le chemin qui le relie à la racine.



## Arbre binaire

- Un arbre **ordonné** est un arbre dans lequel les ensembles de fils de chacun de ses nœuds sont ordonnés.
- Un arbre **binaire** est un arbre ordonné possédant les propriétés suivantes :
  - ▶ Chacun de ses nœuds possède au plus deux fils.
  - ▶ Chaque nœud fils est soit un fils gauche, soit un fils droit.
  - ▶ Le fils gauche précède le fils droit dans l'ordre des fils d'un nœud.
- Un arbre **binaire entier** ou **propre** (*full or proper*) est un arbre binaire dans lequel tous les nœuds internes possèdent exactement deux fils.
- Un arbre **binaire parfait** est un arbre binaire entier dans lequel toutes les feuilles sont à la même profondeur.

## Propriétés des arbres binaires entiers



- Le nombre de nœuds externes est égal au nombre de nœuds internes plus 1.
- Le nombre de nœuds internes est égal à  $\frac{n-1}{2}$ , où  $n$  désigne le nombre de nœuds.
- Le nombre de nœuds à la profondeur (ou niveau)  $i$  est  $\leq 2^i$ .
- La hauteur  $h$  de l'arbre est  $\leq$  au nombre de nœuds internes.
- Le lien entre hauteur et nombre de nœuds peut être résumé comme suit :

$$n \in \Omega(h) \text{ et } n \in O(2^h) \text{ (ou } h \in O(n) \text{ et } h \in \Omega(\log n)\text{)}$$

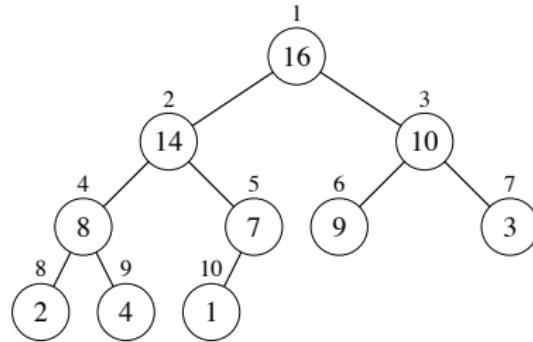
## Tas : définition

Un arbre **binaire complet** est un arbre binaire tel que :

- Si  $h$  dénote la hauteur de l'arbre :
  - ▶ Pour tout  $i \in [0, h - 1]$ , il y a exactement  $2^i$  nœuds à la profondeur  $i$ .
  - ▶ Une feuille a une profondeur  $h$  ou  $h - 1$ .
  - ▶ Les feuilles de profondeur maximale ( $h$ ) sont “tassées” sur la gauche.

Un **tas binaire** (binary heap) est un arbre binaire complet tel que :

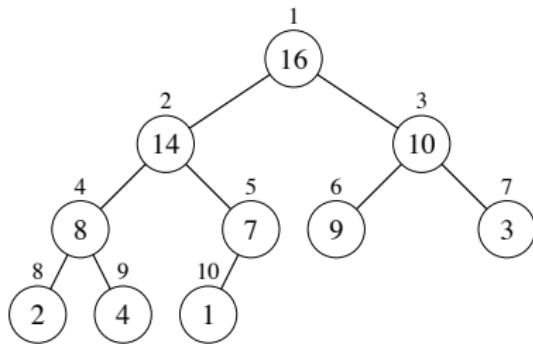
- Chacun de ses nœuds est associé à une clé.
- La clé de chaque nœud est supérieure ou égale à celle de ses fils (**propriété d'ordre du tas**).



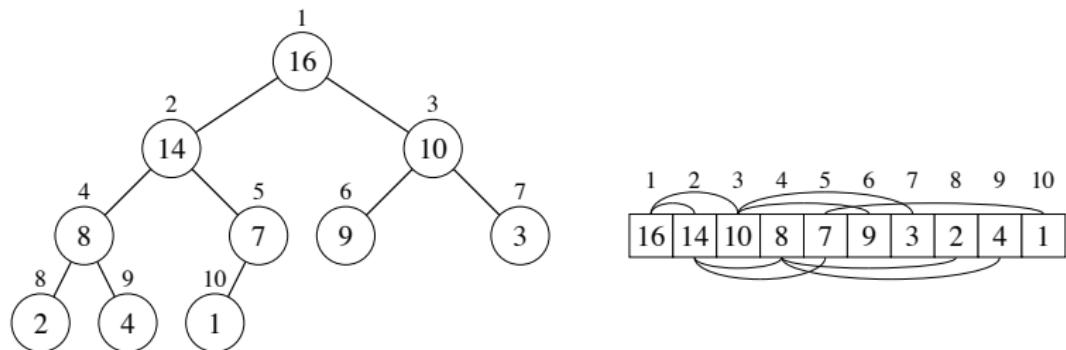
## Propriété d'un tas

- Soit  $T$  un arbre binaire complet contenant  $n$  entrées et de hauteur  $h$  :
  - ▶  $n$  est supérieur ou égal à la taille de l'arbre parfait de hauteur  $h - 1$  plus un, soit  $2^{h-1+1} - 1 + 1 = 2^h$
  - ▶  $n$  est inférieur ou égal à la taille de l'arbre parfait de hauteur  $h$ , soit  $2^{h+1} - 1$

$$\begin{aligned} 2^h \leq n \leq 2^{h+1} - 1 &\Leftrightarrow 2^h \leq n < 2^{h+1} \\ &\Leftrightarrow h \leq \log_2 n < h + 1 \\ &\Leftrightarrow h = \lfloor \log_2 n \rfloor \end{aligned}$$



## Implémentation par un tableau



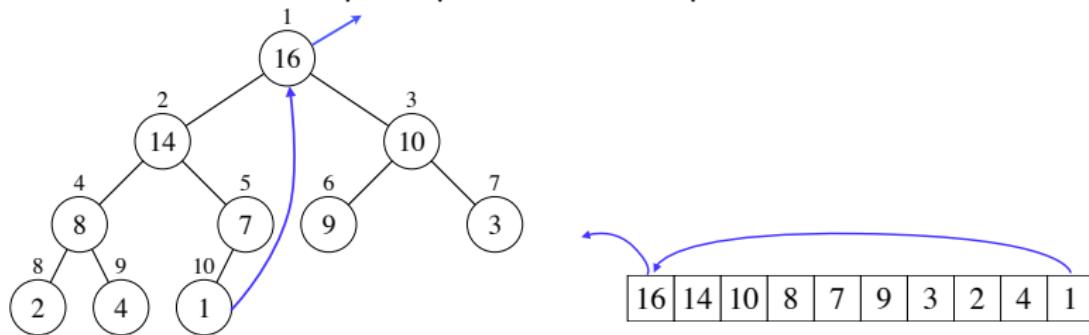
Un tas peut être représenté de manière compacte à l'aide d'un tableau  $A$ .

- La racine de l'arbre est le premier élément du tableau.
- $\text{PARENT}(i) = \lfloor i/2 \rfloor$
- $\text{LEFT}(i) = 2i$
- $\text{RIGHT}(i) = 2i + 1$

Propriété d'ordre du tas :  $\forall i, A[\text{PARENT}(i)] \geq A[i]$

# Principe du tri par tas

- On construit un tas à partir du tableau à trier →  $\text{BUILD-MAX-HEAP}(A)$ .
- Tant que le tas contient des éléments :
  - ▶ On extrait l'élément au sommet du tas qu'on place dans le tableau trié et on le remplace par l'élément le plus à droite

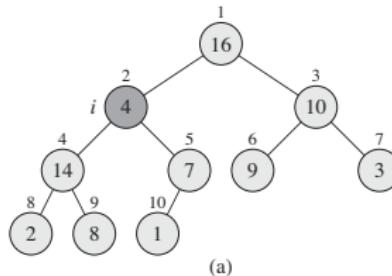


- ▶ On rétablit la propriété de tas en tenant compte du fait que les sous-arbres de droite et de gauche sont des tas →  $\text{MAX-HEAPIFY}(A, 1)$

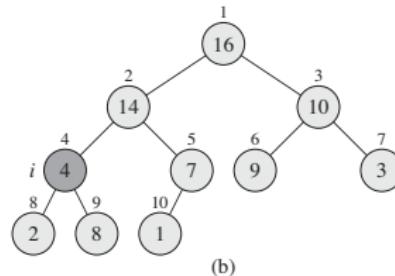
(Tout se fait dans le tableau initial → en place)

# MAX-HEAPIFY

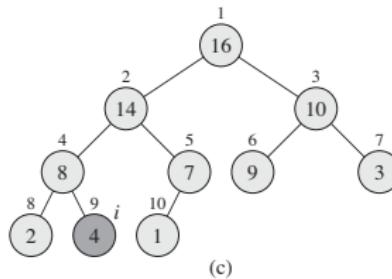
- Procédure MAX-HEAPIFY( $A, i$ ) :
  - ▶ Suppose que le sous-arbre de gauche du nœud  $i$  est un tas
  - ▶ Suppose que le sous-arbre de droite du nœud  $i$  est un tas
  - ▶ But : réarranger le tas pour maintenir la propriété d'ordre du tas
- Ex : MAX-HEAPIFY( $A, 2$ )



(a)



(b)



(c)

## MAX-HEAPIFY

```
MAX-HEAPIFY( $A, i$ )
1    $l = \text{LEFT}(i)$ 
2    $r = \text{RIGHT}(i)$ 
3   if  $l \leq A.\text{heap-size} \wedge A[l] > A[i]$ 
4        $\text{largest} = l$ 
5   else  $\text{largest} = i$ 
6   if  $r \leq A.\text{heap-size} \wedge A[r] > A[\text{largest}]$ 
7        $\text{largest} = r$ 
8   if  $\text{largest} \neq i$ 
9        $\text{swap}(A[i], A[\text{largest}])$ 
10      MAX-HEAPIFY( $A, \text{largest}$ )
```

- Complexité ? La hauteur du nœud :  $T(n) = O(\log n)$  (Transp. 150)

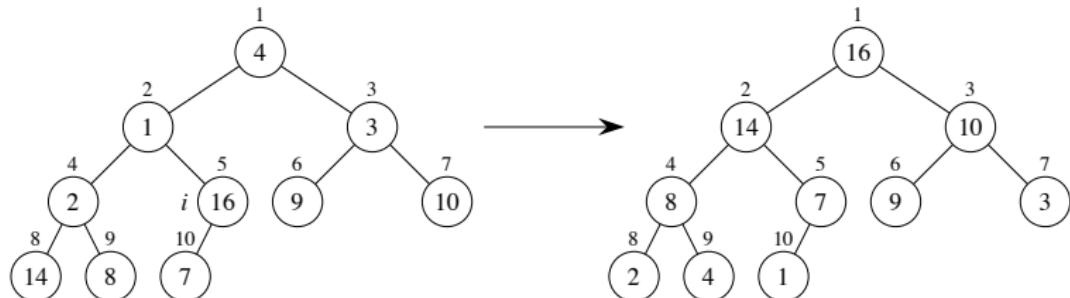
# Construction d'un tas

BUILD-MAX-HEAP( $A$ )

```
1  $A.\text{heap-size} = A.\text{length}$ 
2 for  $i = \lfloor A.\text{length}/2 \rfloor$  downto 1
3     MAX-HEAPIFY( $A, i$ )
```

(Invariant : chaque nœud  $i, i+1, \dots, n$  est la racine d'un tas)

$A$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	4	1	3	2	16	9	10	14	8	7

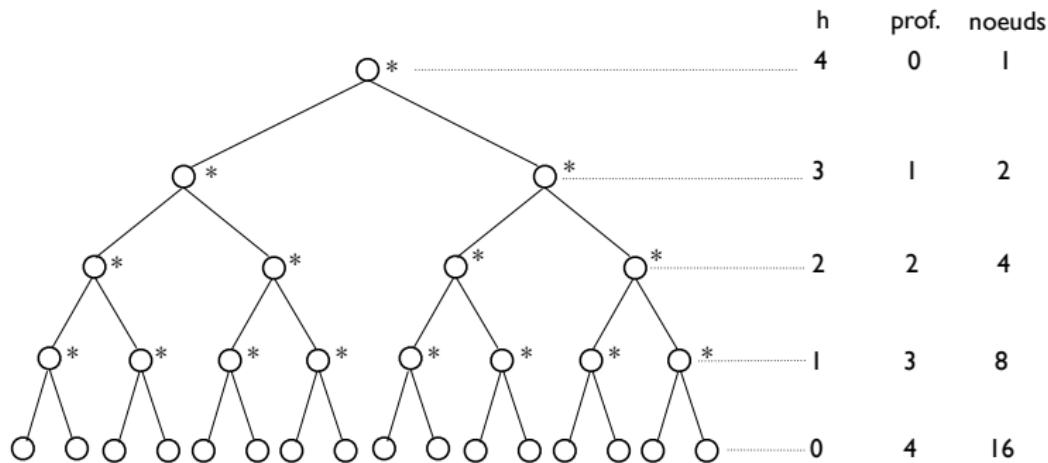


- La tableau initial est interprété comme un arbre binaire complet
- On tasse les nœuds internes de bas en haut et de droite à gauche

# Complexité de BUILD-MAX-HEAP

- Borne simple :
  - ▶  $O(n)$  appels à MAX-HEAPIFY, chacun étant  $O(\log n) \Rightarrow O(n \log n)$ .
- Analyse plus fine :
  - ▶ Pour simplifier l'analyse, on suppose que l'arbre binaire est parfait.
  - ▶ On a donc  $n = 2^{h+1} - 1$  pour un  $h \geq 0$ , qui est aussi la hauteur de l'arbre résultant

# Complexité de BUILD-MAX-HEAP



\* Noeuds sur lesquels on doit appeler Max-Heapify

- Il y a  $2^i$  noeuds à la profondeur  $i$  ( $=$  hauteur  $h - i$ ).
- On doit appeler MAX-HEAPIFY sur chacun d'eux
- Chaque appel est au pire  $\Theta(h - i)$ .
- Nombre d'opérations en fonction de  $h$  au pire cas :

$$T(h) = \sum_{i=0}^{h-1} 2^i \Theta(h - i) = \Theta\left(\sum_{i=0}^{h-1} 2^i (h - i)\right)$$

## Complexité de BUILD-MAX-HEAP

- $\sum_{i=0}^{h-1} 2^i(h-i) = 1 \cdot 2^{h-1} + 2 \cdot 2^{h-2} + \dots + (h-1) \cdot 2^1 + h \cdot 2^0$

$$\begin{array}{ccccccccc} 2^{h-1} & + & 2^{h-2} & + & 2^{h-3} & + & \dots & + & 2^0 \\ & + & 2^{h-2} & + & 2^{h-3} & + & \dots & + & 2^0 \\ & & + & 2^{h-3} & + & \dots & + & 2^0 \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & \dots & & \\ & & & & & & & 2^0 & = 2^1 - 1 \\ & & & & & & & \hline & & & & & & & = & \left( \sum_{i=1}^h 2^i \right) - h \end{array}$$

(En utilisant  $\sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ )

- On obtient donc  $T(h) = \Theta(2^{h+1} - h - 2)$ .
- Puisque  $h = \log_2(n+1) - 1 = \Theta(\log n)$ , on a

$$T(n) = \Theta(n).$$

## Tri par tas : algorithme

HEAP-SORT( $A$ )

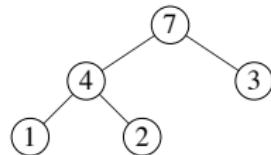
- 1 BUILD-MAX-HEAP( $A$ )
- 2 **for**  $i = A.length$  **downto** 2
- 3      $swap(A[i], A[1])$
- 4      $A.heap-size = A.heap-size - 1$
- 5     MAX-HEAPIFY( $A, 1$ )

Invariant :

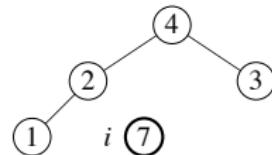
$A[1..i]$  est un tas contenant les  $i$  éléments les plus petits de  $A[1..A.length]$  et  $A[i+1..A.length]$  contient les  $n - i$  éléments les plus grands de  $A[1..A.length]$  triés.

## Tri par tas : illustration

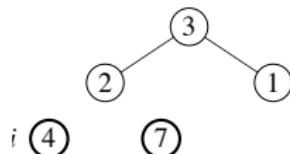
Tableau initial :  $A = [7, 4, 3, 1, 2]$



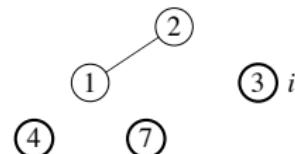
(a)



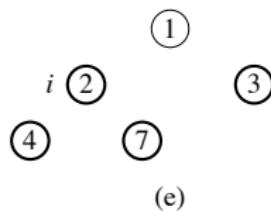
(b)



(c)



(d)



(e)

$A$	1	2	3	4	7
-----	---	---	---	---	---

# Complexité de HEAP-SORT

```
HEAP-SORT( $A$ )
```

```
1  BUILD-MAX-HEAP( $A$ )
2  for  $i = A.length$  downto 2
3     $swap(A[i], A[1])$ 
4     $A.heap-size = A.heap-size - 1$ 
5    MAX-HEAPIFY( $A, 1$ )
```

- BUILD-MAX-HEAP :  $O(n)$
- Boucle **for** :  $n - 1$  fois
- Echange d'éléments :  $O(1)$
- MAX-HEAPIFY :  $O(\log n)$

Total :  $O(n \log n)$  (pour le pire cas et le cas moyen)

Le tri par tas est cependant généralement battu par le tri rapide

# Résumé

Algorithme	Complexité			En place ?
	Pire	Moyenne	Meilleure	
INSERTION-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	oui
SELECTION-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	oui
BUBBLE-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	oui
MERGE-SORT	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	non
QUICK-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	oui
HEAP-SORT	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)^*$	oui

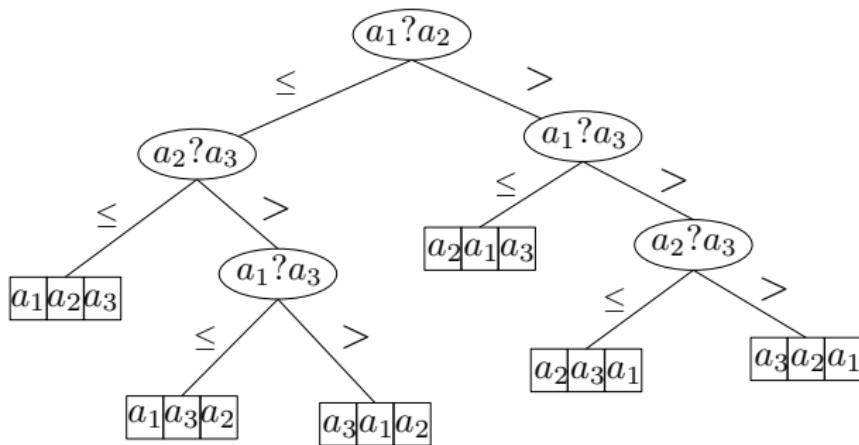
\* pas montré dans ce cours

# Peut-on faire mieux que $O(n \log n)$ ?

- Non, si on se restreint aux tri *comparatifs*, c'est-à-dire :
  - ▶ Aucune hypothèse sur les éléments à trier
  - ▶ Nécessité de les comparer entre eux
- Complexité d'un problème algorithmique versus complexité d'un algorithme
- Dans ce cas, un algorithme de tri est :
  - ▶ Une suite de comparaisons d'éléments suivant une certaine méthode
  - ▶ Un processus qui transforme un tableau  $[e_0, e_1, \dots, e_{n-1}]$  en un autre tableau  $[e_{\sigma_0}, e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_{n-1}}]$  où  $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$  est une permutation de  $(0, 1, \dots, n - 1)$ .

## Arbre de décision : exemple

Un algorithme de tri = un arbre binaire de décision (entier)



(arbre de décision pour le tri par insertion du tableau  $[e_0, e_1, e_2]$ )

*Exercice : construire l'arbre pour le tri par fusion*

## Arbre de décision : définition

Un algorithme de tri = un arbre binaire de décision

- feuille de l'arbre : une permutation des éléments du tableau initial
- tri : le chemin de la racine à la feuille correspondant au tableau trié
- hauteur de l'arbre : le pire cas pour le tri
- branche la plus courte : le meilleur cas pour le tri
- hauteur moyenne de l'arbre : la complexité en moyenne du tri

## Arbre de décision : propriété

- Un arbre binaire de hauteur  $h$  a au plus  $2^h$  feuilles (cf transp. 148)
- Le nombre de feuilles de l'arbre de décision est exactement  $n!$  où  $n$  est la taille du tableau à trier  
*(par l'absurde : si moins que  $n!$  certains tableaux ne seraient pas correctement triés)*
- On a donc :

$$n! \leq 2^h \Rightarrow \log(n!) \leq h$$

- Formule de Stirling :

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$h \geq \log(n!) > \log\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) = n \log n - n \log e \Rightarrow h = \Omega(n \log n)$$

**Le problème du tri comparatif est  $\Omega(n \log n)$**

# Ce qu'on a vu

- Catégorisation des algorithmes de tri
- QUICKSORT (tri en place en  $\Theta(n \log n)$ )
- Analyse du cas moyen d'un algorithme
- Notre première structure de données : le tas
- HEAPSORT (tri en place en  $\Theta(n \log n)$ )
- Borne inférieure sur les tris comparatifs
  
- Illustration :
  - ▶ <http://www.sorting-algorithms.com/>
  - ▶ <http://www.youtube.com/user/algorythmics>

## Ce qu'on n'a pas vu

- Analyse du meilleur cas du tri par tas
- Invariant pour le tri par tas
- Méthodes de tri linéaire
- Méthodes de sélection : trouver l'élément de rang  $i$

# Partie 4

## Structures de données

# Plan

1. Introduction
2. Pile et file
3. Structures linéaires : Liste, vecteur, séquence
4. Arbres
5. File à priorité
6. Ensembles disjoints

# Concept

- Une **structure de données** est une manière d'organiser et de stocker l'information
  - ▶ Pour en faciliter l'accès ou dans d'autres buts
- Une structure de données a une **interface** qui consiste en un ensemble de procédures pour ajouter, effacer, accéder, réorganiser, etc. les données.
- Une structure de données conserve des **données** et éventuellement des **méta-données**
  - ▶ Par exemple : un tas utilise un tableau pour stocker les clés et une variable  $A.\text{heap-size}$  pour retenir le nombre d'éléments qui sont dans le tas.
- Un type de données abstrait (TDA) = définition des propriétés de la structure et de son interface ("cahier des charges")

# Structures de données

Dans ce cours :

- Principalement des **ensembles dynamiques** (dynamic sets), amenés à croître, se rétrécir et à changer au cours du temps.
- Les objets de ces ensembles comportent des attributs.
- Un de ces attributs est une **clé** qui permet d'identifier l'objet, les autres attributs sont la plupart du temps non pertinents pour l'implémentation de la structure.
- Certains ensembles supposent qu'il existe un **ordre total** entre les clés.

# Opérations standards sur les structures

- Deux types : opérations de recherche/accès aux données et opérations de modifications
- Recherche : exemples :
  - ▶  $\text{SEARCH}(S, k)$  : retourne un pointeur  $x$  vers un élément dans  $S$  tel que  $x.\text{key} = k$ , ou  $\text{NIL}$  si un tel élément n'appartient pas à  $S$ .
  - ▶  $\text{MINIMUM}(S)$ ,  $\text{MAXIMUM}(S)$  : retourne un pointeur vers l'élément avec la plus petite (resp. grande) clé.
  - ▶  $\text{SUCCESSOR}(S, x)$ ,  $\text{PREDECESSOR}(S, x)$  : retourne un pointeur vers l'élément tout juste plus grand (resp. petit) que  $x$  dans  $S$ ,  $\text{NIL}$  si  $x$  est le maximum (resp. minimum).
- Modification : exemples :
  - ▶  $\text{INSERT}(S, x)$  : insère l'élément  $x$  dans  $S$ .
  - ▶  $\text{DELETE}(S, x)$  : retire l'élément  $x$  de  $S$ .

# Implémentation d'une structure de données

- Etant donné un TDA (interface), plusieurs implémentations sont généralement possibles
- La complexité des opérations dépend de l'implémentation, **pas du TDA.**
- Les briques de base pour implémenter une structure de données dépendent du langage d'implémentation
  - ▶ Dans ce cours, les principaux outils du C : tableaux, structures à la C (objets avec attributs), liste liées (simples, doubles, circulaires), etc.
- Une structure de données peut être implémentée à l'aide d'une autre structure de données (de base ou non)

## Quelques structures de données standards

- Pile : collection d'objets accessibles selon une politique LIFO
- File : collection d'objets accessibles selon une politique FIFO
- File double : combine accès LIFO et FIFO
- Liste : collection d'objets ordonnés accessibles à partir de leur position
- Vecteur : collection d'objets ordonnés accessibles à partir de leur rang
- Arbre : collection d'objets organisés en une structure d'arbre
- File à priorité : accès uniquement à l'élément de clé (priorité) maximale
  
- Dictionnaire : structure qui implémente les 3 opérations recherche, insertion, suppression (cf. partie 5)

# Plan

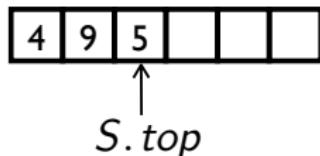
1. Introduction
2. Pile et file
3. Structures linéaires : Liste, vecteur, séquence
4. Arbres
5. File à priorité
6. Ensembles disjoints

# Pile

- Ensemble dynamique d'objets accessibles selon une discipline **LIFO** ("Last-in first-out").
- Interface
  - ▶  $\text{STACK-EMPTY}(S)$  renvoie vrai si et seulement si la pile est vide
  - ▶  $\text{PUSH}(S, x)$  pousse la valeur  $x$  sur la pile  $S$
  - ▶  $\text{POP}(S)$  extrait et renvoie la valeur sur le sommet de la pile  $S$
- Applications :
  - ▶ Option 'undo' dans un traitement de texte
  - ▶ Langage postscript
  - ▶ Appel de fonctions dans un compilateur
  - ▶ ...
- Implémentations :
  - ▶ avec un tableau (taille fixée a priori)
  - ▶ au moyen d'une liste liée (allouée de manière dynamique)
  - ▶ ...

# Implémentation par un tableau

- $S$  est un tableau qui contient les éléments de la pile
- $S.top$  est la position courante de l'élément au sommet de  $S$



```
STACK-EMPTY( $S$ )
1  return  $S.top == 0$ 
```

```
PUSH( $S, x$ )
```

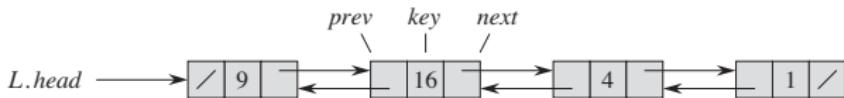
```
1  if  $S.top == S.length$ 
2      error "overflow"
3   $S.top = S.top + 1$ 
4   $S[S.top] = x$ 
```

```
POP( $S$ )
```

```
1  if STACK-EMPTY( $S$ )
2      error "underflow"
3  else  $S.top = S.top - 1$ 
4  return  $S[S.top + 1]$ 
```

- Complexité en temps et en espace :  $O(1)$   
(Inconvénient : L'espace occupé ne dépend pas du nombre d'objets)

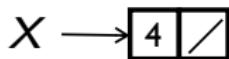
## Rappel : liste simplement et doublement liée



- Structure de données composée d'une séquence d'éléments de liste.
- Chaque élément  $x$  de la liste est composé :
  - ▶ d'un contenu utile  $x.data$  de type arbitraire (par exemple une clé),
  - ▶ d'un pointeur  $x.next$  vers l'élément suivant dans la séquence
  - ▶ *Doublement liée* : d'un pointeur  $x.prev$  vers l'élément précédent dans la séquence
- Soit  $L$  une liste liée
  - ▶  $L.head$  pointe vers le premier élément de la liste
  - ▶ *Doublement liée* :  $L.tail$  pointe vers le dernier élément de la liste
- Le dernier élément possède un pointeur  $x.next$  vide (noté NIL)
- *Doublement liée* : Le premier élément possède un pointeur  $x.prev$  vide

# Implémentation d'une pile à l'aide d'une liste liée

- $S$  est une liste simplement liée ( $S.\text{head}$  pointe vers le premier élément de la liste)



PUSH( $S, x$ )

- 1  $x.\text{next} = S.\text{head}$
- 2  $S.\text{head} = x$

```
STACK-EMPTY( $S$ )
1 if  $S.\text{head} == \text{NIL}$ 
2   return TRUE
3 else return FALSE
```

POP( $S$ )

```
1 if STACK-EMPTY( $S$ )
2   error "underflow"
3 else  $x = S.\text{head}$ 
4    $S.\text{head} = S.\text{head}.\text{next}$ 
5   return  $x$ 
```

- Complexité en temps  $O(1)$ , complexité en espace  $O(n)$  pour  $n$  opérations

# Application

- Vérifier l'appariement de parenthèses ([] , () ou {}) dans une chaîne de caractères
  - ▶ Exemples :  $((x) + (y))/2 \rightarrow \text{non}$ ,  $[-(b) + \sqrt{4 * (a) * c}]/(2 * a) \rightarrow \text{oui}$
- Solution basée sur une pile :

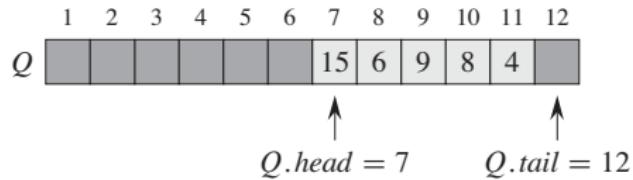
PARENTHESEMATCH( $A$ )

```
1   $S = \text{pile vide}$ 
2  for  $i = 1$  to  $A.length$ 
3      if  $A[i]$  est une parenthèse gauche
4          PUSH( $S, A[i]$ )
5      elseif  $A[i]$  est une parenthèse droite
6          if STACK-EMPTY( $S$ )
7              return FALSE
8          elseif POP( $S$ ) n'est pas du même type que  $A[i]$ 
9              return FALSE
10     return STACK-EMPTY( $S$ )
```

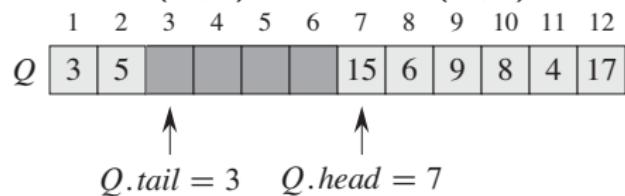
- Ensemble dynamique d'objets accessibles selon une discipline FIFO ("First-in first-out").
- Interface
  - ▶ ENQUEUE( $Q, s$ ) ajoute l'élément  $x$  à la fin de la file  $Q$
  - ▶ DEQUEUE( $Q$ ) retire l'élément à la tête de la file  $Q$
- Implémentation à l'aide d'un tableau circulaire
  - ▶  $Q$  est un tableau de taille fixe  $Q.length$ 
    - ▶ Mettre plus de  $Q.length$  éléments dans la file provoque une erreur de dépassement
  - ▶  $Q.head$  est la position à la tête de la file
  - ▶  $Q.tail$  est la première position vide à la fin de la file
  - ▶ Initialement :  $Q.head = Q.tail = 1$

# ENQUEUE et DEQUEUE

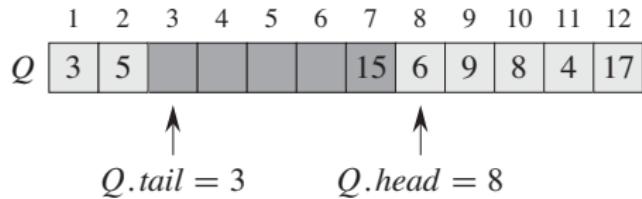
Etat initial :



$\text{ENQUEUE}(Q, 17)$ ,  $\text{ENQUEUE}(Q, 3)$ ,  $\text{ENQUEUE}(Q, 5)$



$\text{DEQUEUE}(Q) \rightarrow 15$



# ENQUEUE et DEQUEUE

```
ENQUEUE(Q,x)
```

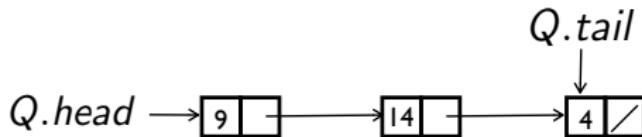
```
1  Q[Q.tail] = x
2  if Q.tail == Q.length
3      Q.tail = 1
4  else Q.tail = Q.tail + 1
```

```
DEQUEUE(Q)
```

```
1  x = Q[Q.head]
2  if Q.head == Q.length
3      Q.head = 1
4  else Q.head = Q.head + 1
5  return x
```

- Complexité en temps  $O(1)$ , complexité en espace  $O(1)$ .
- Exercice : ajouter la gestion d'erreur

# Implémentation à l'aide d'une liste liée



- $Q$  est une liste simplement liée
- $Q.\text{head}$  (resp.  $Q.\text{tail}$ ) pointe vers la tête (resp. la queue) de la liste

ENQUEUE( $Q, x$ )

- 1  $x.\text{next} = \text{NIL}$
- 2 **if**  $Q.\text{head} == \text{NIL}$
- 3      $Q.\text{head} = x$
- 4 **else**  $Q.\text{tail}.\text{next} = x$
- 5      $Q.\text{tail} = x$

DEQUEUE( $Q$ )

- 1 **if**  $Q.\text{head} == \text{NIL}$
- 2       **error** "underflow"
- 3      $x = Q.\text{head}$
- 4      $Q.\text{head} = Q.\text{head}.\text{next}$
- 5 **if**  $Q.\text{head} == \text{NIL}$
- 6        $Q.\text{tail} = \text{NIL}$
- 7     **return**  $x$

- Complexité en temps  $O(1)$ , complexité en espace  $O(n)$  pour  $n$  opérations

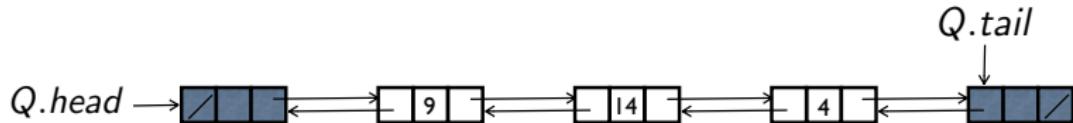
# File double

## Double ended-queue (deque)

- Généralisation de la pile et de la file
- Collection ordonnée d'objets offrant la possibilité
  - ▶ d'insérer un nouvel objet avant le premier ou après le dernier
  - ▶ d'extraire le premier ou le dernier objet
- Interface :
  - ▶ INSERT-FIRST( $Q, x$ ) : ajoute  $x$  au début de la file double
  - ▶ INSERT-LAST( $Q, x$ ) : ajoute  $x$  à la fin de la file double
  - ▶ REMOVE-FIRST( $Q$ ) : extrait l'objet situé en première position
  - ▶ REMOVE-LAST( $Q$ ) : extrait l'objet situé en dernière position
  - ▶ ...
- Application : équilibrage de la charge d'un serveur

# Implémentation à l'aide d'une liste doublement liée

- A l'aide d'une liste doublement liée
- Soit la file double  $Q$  :
  - ▶  $Q.\text{head}$  pointe vers un élément **sentinelle** en début de liste
  - ▶  $Q.\text{tail}$  pointe vers un élément **sentinelle** en fin de liste
  - ▶  $Q.\text{size}$  est la taille courante de la liste



- Les sentinelles ne contiennent pas de données. Elles permettent de simplifier le code (pour un coût en espace constant).

*Exercice : implémentation de la file double sans sentinelles,  
implémentation de la file simple avec sentinelle*

# Implémentation à l'aide d'une liste doublement liée

INSERT-FIRST( $Q, x$ )

- 1  $x.prev = Q.head$
- 2  $x.next = Q.head.next$
- 3  $Q.head.next.prev = x$
- 4  $Q.head.next = x$
- 5  $Q.size = Q.size + 1$

INSERT-LAST( $Q, x$ )

- 1  $x.prev = Q.tail.prev$
- 2  $x.next = Q.tail$
- 3  $Q.tail.prev.next = x$
- 4  $Q.head.prev = x$
- 5  $Q.size = Q.size + 1$

REMOVE-FIRST( $Q$ )

- 1 **if** ( $Q.size == 0$ )
- 2     **error**
- 3  $x = Q.head.next$
- 4  $Q.head.next = Q.head.next.next$
- 5  $Q.head.next.prev = Q.head$
- 6  $Q.size = Q.size - 1$
- 7 **return**  $x$

REMOVE-LAST( $Q$ )

- 1 **if** ( $Q.size == 0$ )
- 2     **error**
- 3  $x = Q.tail.prev$
- 4  $Q.tail.prev = Q.tail.prev.prev$
- 5  $Q.tail.prev.next = Q.head$
- 6  $Q.size = Q.size - 1$
- 7 **return**  $x$

Complexité  $O(1)$  en temps et  $O(n)$  en espace pour  $n$  opérations.

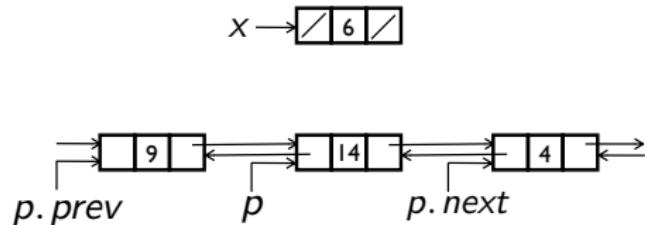
# Plan

1. Introduction
2. Pile et file
3. Structures linéaires : Liste, vecteur, séquence
4. Arbres
5. File à priorité
6. Ensembles disjoints

## Liste

- Ensemble dynamique d'objets ordonnés accessibles relativement les uns aux autres, sur base de leur position
- Généralise toutes les structures vues précédemment
- Interface :
  - ▶ Les fonctions d'une liste double (insertion et retrait en début et fin de liste)
  - ▶  $\text{INSERT-BEFORE}(L, p, x)$  : insère  $x$  avant  $p$  dans la liste
  - ▶  $\text{INSERT-AFTER}(L, p, x)$  : insère  $x$  après  $p$  dans la liste
  - ▶  $\text{REMOVE}(L, p)$  : retire l'élément à la position  $p$
  - ▶  $\text{REPLACE}(L, p, x)$  : remplace par l'objet  $x$  l'objet situé à la position  $p$
  - ▶  $\text{FIRST}(L)$ ,  $\text{LAST}(L)$  : renvoie la première, resp. dernière position dans la liste
  - ▶  $\text{PREV}(L, p)$ ,  $\text{NEXT}(L, p)$  : renvoie la position précédent (resp. suivant)  $p$  dans la liste
- Implémentation similaire à la file double, à l'aide d'une liste doublement liée (avec sentinelles)

# Implémentation à l'aide d'une liste doublement liée



REMOVE( $L, p$ )

- 1  $p.prev.next = p.next$
- 2  $p.next.prev = p.prev$
- 3  $L.size = L.size - 1$
- 4 **return**  $p$

INSERT-BEFORE( $L, p, x$ )

- 1  $x.prev = p.prev$
- 2  $x.next = p$
- 3  $p.prev.next = x$
- 4  $p.prev = x$
- 5  $L.size = L.size + 1$

INSERT-AFTER( $L, p, x$ )

- 1  $x.prev = p$
- 2  $x.next = p.next$
- 3  $p.next.prev = x$
- 4  $p.next = x$
- 5  $L.size = L.size + 1$

Complexité  $O(1)$  en temps et  $O(n)$  en espace pour  $n$  opérations.

# Vecteur

- Ensemble dynamique d'objets occupant des rangs entiers successifs, permettant la consultation, le remplacement, l'insertion et la suppression d'éléments à des rangs arbitraires
- Interface
  - ▶  $\text{ELEM-AT-RANK}(V, r)$  retourne l'élément au rang  $r$  dans  $V$ .
  - ▶  $\text{REPLACE-AT-RANK}(V, r, x)$  remplace l'élément situé au rang  $r$  par  $x$  et retourne cet objet.
  - ▶  $\text{INSERT-AT-RANK}(V, r, x)$  insère l'élément  $x$  au rang  $r$ , en augmentant le rang des objets suivants.
  - ▶  $\text{REMOVE-AT-RANK}(V, r)$  extrait l'élément situé au rang  $r$  et le retire de  $V$ , en diminuant le rang des objets suivants.
  - ▶  $\text{VECTOR-SIZE}(V)$  renvoie la taille du vecteur.
- Applications : tableau dynamique, gestion des éléments d'un menu,...
- Implémentation : liste liée, tableau extensible...

# Implémentation par un tableau extensible

- Les éléments sont stockés dans un tableau extensible  $V.A$  de taille initiale  $V.c$ .
- En cas de dépassement, la capacité du tableau est doublée.
- $V.n$  retient le nombre de composantes.
- Insertion et suppression :

INSERT-AT-RANK( $V, r, x$ )

```
1  if  $V.n == V.c$ 
2       $V.c = 2 \cdot V.c$ 
3       $W = \text{"Tableau de taille } V.c"$ 
4      for  $i = 1$  to  $n$ 
5           $W[i] = V.A[i]$ 
6       $V.A = W$ 
7      for  $i = V.n$  downto  $r$ 
8           $V.A[i + 1] = V.A[i]$ 
9       $V.A[r] = x$ 
10      $V.n = V.n + 1$ 
```

REMOVE-AT-RANK( $V, r$ )

```
1   $tmp = V.A[r]$ 
2  for  $i = r$  to  $V.n - 1$ 
3       $V.A[i] = V.A[i + 1]$ 
4   $V.n = V.n - 1$ 
5  return  $tmp$ 
```

# Complexité en temps

## ■ INSERT-AT-RANK :

- ▶  $O(n)$  pour une opération individuelle, où  $n$  est le nombre de composantes du vecteur
- ▶  $\Theta(n^2)$  pour  $n$  opérations d'insertion en **début** de vecteur
- ▶  $\Theta(n)$  pour  $n$  opérations d'insertion en **fin** de vecteur

## ■ Justification :

- ▶ Si la capacité du tableau passe de  $c_0$  à  $2^k c_0$  au cours des  $n$  opérations, alors le coût des transferts entre tableaux s'élève à

$$c_0 + 2c_0 + \dots + 2^{k-1}c_0 = (2^k - 1)c_0.$$

Puisque  $2^{k-1}c_0 < n \leq 2^k c_0$ , ce coût est  $\Theta(n)$ .

- ▶ On dit que le **coût amorti** par opération est  $O(1)$
- ▶ Si on avait élargi le tableau avec un incrément constant  $m$ , le coût aurait été

$$c_0 + (c_0 + m) + (c_0 + 2m) + \dots + (c_0 + (k-1)m) = kc_0 + \frac{k(k-1)}{2}m.$$

Puisque  $c_0 + (k-1)m < n \leq c_0 + km$ , ce coût aurait donc été  $\Theta(n^2)$ .

# Complexité en temps

- REMOVE-AT-RANK :
  - ▶  $O(n)$  pour une opération individuelle, où  $n$  est le nombre de composantes du vecteur
  - ▶  $\Theta(n^2)$  pour  $n$  opérations de retrait en **début** de vecteur
  - ▶  $\Theta(n)$  pour  $n$  opérations de retrait en **fin** de vecteur
- Remarque : Un tableau circulaire permettrait d'améliorer l'efficacité des opérations d'ajout et de retrait en début de vecteur.

# Séquence

- Ensemble dynamique d'objets ordonnés combinant les propriétés d'une liste et d'un vecteur, c'est-à-dire dont les objets sont accessibles tant sur base de leur position absolue que relative
- Interface :
  - ▶ Toutes les opérations d'un vecteur
  - ▶ Toutes les opérations d'une liste
  - ▶  $\text{ATRANK}(S, r)$  : retourne la position de l'élément possédant le rang  $r$ .
  - ▶  $\text{RANKOF}(S, p)$  : retourne le rang de l'élément situé à la position  $p$ .
- Implémentation à l'aide d'une liste doublement liée (laissée comme exercice)
  - ▶  $\text{ATRANK}, \text{RANKOF}, \text{ELEM-AT-RANK}, \text{REMOVE-AT-RANK}, \text{REPLACE-AT-RANK}$  :  $O(n)$ , où  $n$  est le nombre d'éléments appartenant à la séquence.
  - ▶ Autres opérations :  $O(1)$ .

# Plan

1. Introduction
2. Pile et file
3. Structures linéaires : Liste, vecteur, séquence
4. Arbres
5. File à priorité
6. Ensembles disjoints

# Type de données abstrait pour un arbre

- Principe :
  - ▶ Des données sont associées aux nœuds d'un arbre
  - ▶ Les nœuds sont accessibles les uns par rapport aux autres selon leur position dans l'arbre
- Interface : Pour un arbre  $T$  et un nœud  $n$ 
  - ▶ PARENT( $T, n$ ) : renvoie le parent d'un nœud  $n$  (signale une erreur si  $n$  est la racine)
  - ▶ ISEMPTY( $T$ ) : renvoie vrai si l'arbre est vide
  - ▶ CHILDREN( $T, n$ ) : renvoie une structure de données (ordonnée ou non) contenant les fils du nœud  $n$  (exemple : une liste)
  - ▶ ISROOT( $T, n$ ) : renvoie vrai si  $n$  est la racine de l'arbre
  - ▶ ISINTERNAL( $T, n$ ) : renvoie vrai si  $n$  est un nœud interne
  - ▶ ISEXTERNAL( $T, n$ ) : renvoie vrai si  $n$  est un nœud externe
  - ▶ GETDATA( $T, n$ ) : renvoie les données associées au nœud  $n$
  - ▶ ROOT( $T$ ) : renvoie le nœud racine de l'arbre
  - ▶ SIZE( $T$ ) : renvoie le nombre de nœuds de l'arbre
  - ▶ Pour un arbre binaire (ordonné) :
    - ▶ LEFT( $T, n$ ), RIGHT( $T, n$ ) : renvoie les fils gauche et droit de  $n$
    - ▶ HASLEFT( $T, n$ ), HASRIGHT( $T, n$ ) : détermine si le nœud  $n$  possède un fils respectivement gauche et droit.

# Exemples d'opération sur un arbre

- Calcul de la profondeur d'un nœud

```
DEPTH-REC( $T, n$ )
1 if ISROOT( $T, n$ )
2     return 0
3 return 1 + DEPTH-REC( $T, \text{PARENT}(T, n)$ )
```

- Version itérative

```
DEPTH-ITER( $T, n$ )
1  $d = 0$ 
2 while not ISROOT( $T, n$ )
3      $d = d + 1$ 
4      $n = \text{PARENT}(T, n)$ 
5 return  $d$ 
```

- Complexité en temps :  $O(n)$ , où  $n$  est la taille de l'arbre (si les opérations de l'interface sont  $O(1)$ )

# Exemples d'opération sur un arbre

- Calcul de la hauteur de l'arbre

```
HEIGHT( $T, n$ )
1 if ISEXTERNAL( $T, n$ )
2     return 0
3  $h = 0$ 
4 for each  $n_2$  in CHILDREN( $T, n$ )
5      $h = \max(h, \text{HEIGHT}(T, n_2))$ 
6 return  $h + 1$ 
```

- Complexité en temps :  $O(n)$ , où  $n$  est la taille de l'arbre (si les opérations de l'interface sont  $O(1)$ )

# Implémentation d'un arbre binaire

Première solution : numérotation de niveaux

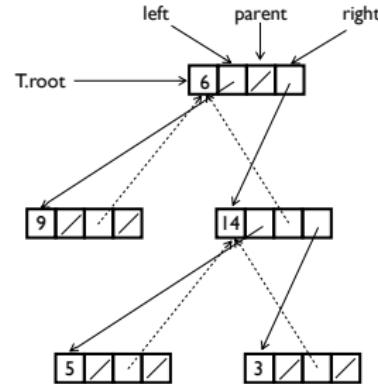
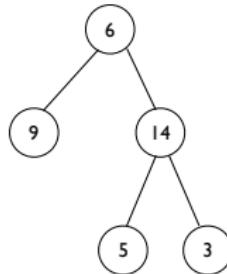
- L'arbre est représenté par un vecteur (ou un tableau)
- Chaque position dans l'arbre est associée à un rang particulier :
  - ▶ La racine est en position 1
  - ▶ Si un nœud est au rang  $r$ , son successeur gauche est au rang  $2r$ , son successeur droit au rang  $2r + 1$
- Si l'arbre binaire n'est pas un arbre binaire complet, le vecteur contiendra des trous (qu'il faudra pouvoir identifier)
- Complexité en temps des opérations :  $O(1)$
- Complexité en espace :  $O(2^n)$  pour un arbre de  $n$  nœuds ( $\Theta(n)$  pour un arbre binaire complet)

(Exercice : peut-on étendre à des arbres quelconques ?)

# Implémentation d'un arbre binaire

Deuxième solution : **structure liée**

- Principe : on retient pour chaque nœud  $n$  de l'arbre :
  - ▶ Un champ de données ( $n.data$ )
  - ▶ Un pointeur vers son nœud parent ( $n.parent$ )
  - ▶ Un pointeur vers ses fils gauche et droit ( $n.left$  et  $n.right$ )
  - ▶  $T.root$  pointe vers la racine de l'arbre
- Complexité en temps des opérations :  $O(1)$
- Complexité en espace :  $\Theta(n)$  pour  $n$  nœuds

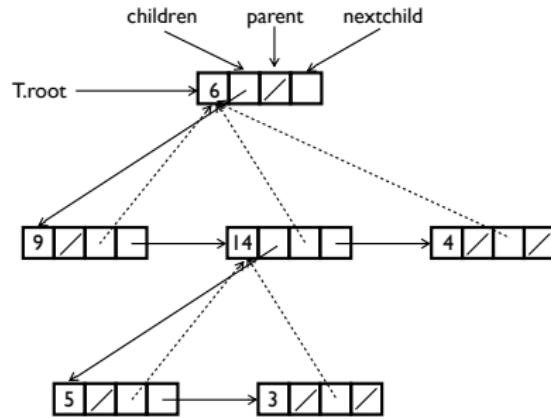
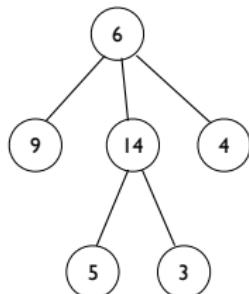


(généralise la notion de liste liée)

# Implémentation d'un arbre quelconque

Première solution : [structure liée](#)

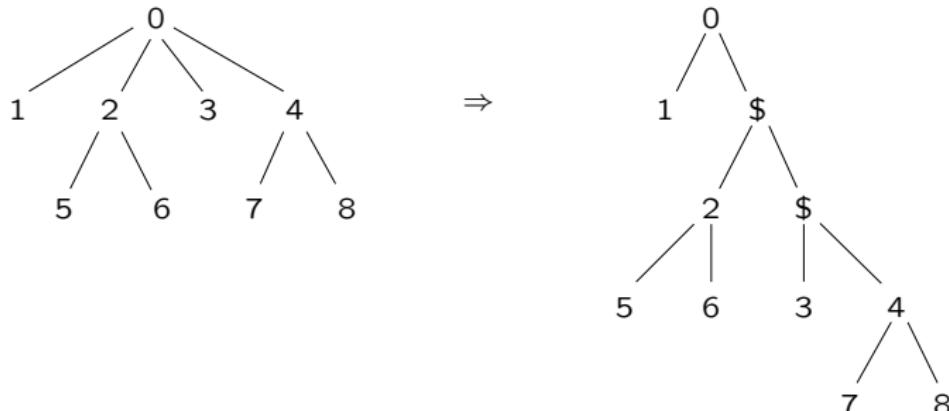
- Comme pour un arbre binaire
- Mais on remplace  $n.left$  et  $n.right$  par un pointeur  $n.children$  vers un ensemble dynamique.
- Le type d'ensemble dynamique (vecteur, liste, ...) dépendra des opérations devant être effectuées
- Exemple avec une liste liée :



# Implémentation d'un arbre quelconque

Deuxième approche : représenter l'arbre quelconque par un arbre binaire

- Si le nœud  $n$  possède les fils  $n_1, n_2, \dots, n_p$ , avec  $p > 2$ , alors le sous-arbre issu de  $n$  est représenté par une arbre binaire dont :
  - ▶  $n$  est la racine
  - ▶ Le fils gauche est la racine du sous-arbre issu de  $n_1$
  - ▶ Le fils droit est associé à une valeur distinguée “\$”, et représente un arbre dont la racine possède les fils  $n_2, n_3, \dots, n_p$ .
- Illustration :

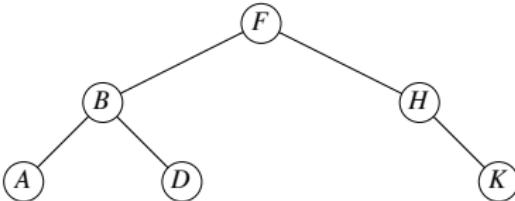


- Complexité des opérations ?

# Parcours d'arbres (binaire)

- Un parcours d'arbre est une façon d'**ordonner** les nœuds d'un arbre afin de les parcourir
- Différents types de parcours :
  - ▶ Parcours en profondeur :
    - ▶ Infixe (en ordre)
    - ▶ Préfixe (en préordre)
    - ▶ Suffixe (en postordre)
  - ▶ Parcours en largeur

## Parcours infixé

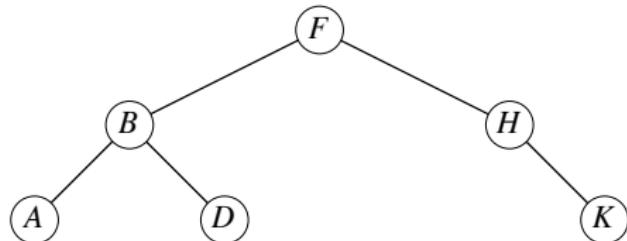


$$\Rightarrow \langle A, B, D, F, H, K \rangle$$

- Parcours infixé (en ordre) : Chaque nœud est visité **après** son fils gauche et **avant** son fils droit

```
INORDER-TREE-WALK( $T, x$ )  
1  if HASLEFT( $T, x$ )  
2      INORDER-TREE-WALK( $T, \text{LEFT}(x)$ )  
3  print GETDATA( $T, x$ )  
4  if HASRIGHT( $T, x$ )  
5      INORDER-TREE-WALK( $T, \text{RIGHT}(x)$ )
```

## Parcours préfixe



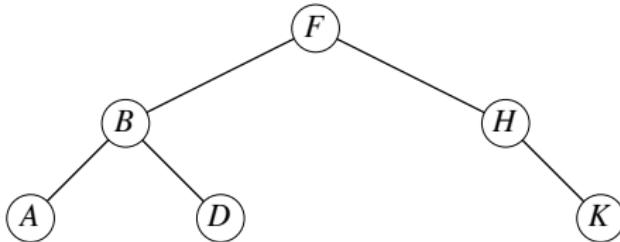
$\Rightarrow \langle F, B, A, D, H, K \rangle$

- Parcours préfixe (en préordre) : chaque nœud est visité **avant** ses fils

PREORDER-TREE-WALK( $T, x$ )

```
1  print GETDATA( $T, x$ )
2  if HASLEFT( $T, x$ )
3      PREORDER-TREE-WALK( $T, \text{LEFT}(x)$ )
4  if HASRIGHT( $T, x$ )
5      PREORDER-TREE-WALK( $T, \text{RIGHT}(x)$ )
```

## Parcours postfixe



$$\Rightarrow \langle A, D, B, K, H, F \rangle$$

- Parcours postfixe (en postordre) : chaque nœud est visité **après** ses fils

```
POSTORDER-TREE-WALK( $T, x$ )
```

```
1  if HASLEFT( $T, x$ )
2      POSTORDER-TREE-WALK( $T, \text{LEFT}(x)$ )
3  if HASRIGHT( $T, x$ )
4      POSTORDER-TREE-WALK( $T, \text{RIGHT}(x)$ )
5  print GETDATA( $T, x$ )
```

## Complexité des parcours

Tous les parcours en profondeur sont  $\Theta(n)$  en temps

- Soit  $T(n)$  le nombre d'opérations pour un arbre avec  $n$  nœuds
- On a  $T(n) = \Omega(n)$  (on doit au moins parcourir chaque nœud).
- Etant donné la récurrence, on a :

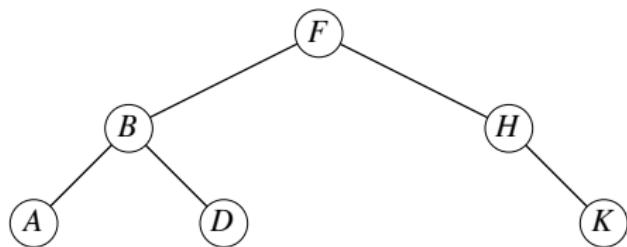
$$T(n) \leq T(n_L) + T(n - n_L - 1) + d$$

où  $n_L$  est le nombre de nœuds du sous-arbre à gauche et  $d$  une constante

- On peut prouver par induction que  $T(n) \leq (c + d)n + c$  où  $c = T(0)$ .
- $T(n) = \Omega(n)$  et  $T(n) = O(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n)$

## Parcours en largeur

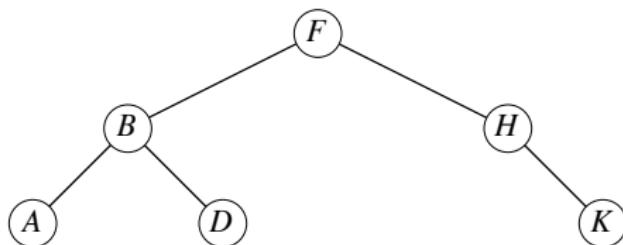
- Parcours en largeur : on visite le nœud le plus proche de la racine qui n'a pas déjà été visité. Correspond à une visite des nœuds de profondeur 1, puis 2, ....



$\Rightarrow \langle F, B, H, A, D, K \rangle$

## Parcours en largeur

- Parcours en largeur : on visite le nœud le plus proche de la racine qui n'a pas déjà été visité. Correspond à une visite des nœuds de profondeur 1, puis 2, ....
- Implémentation à l'aide d'une file en  $\Theta(n)$  (*complexité en espace ?*)



$\Rightarrow \langle F, B, H, A, D, K \rangle$

BREADTH-TREE-WALK( $T$ )

```
1    $Q = \text{"Empty queue"}$ 
2   if not ISEMPTY( $T$ )
3       ENQUEUE( $Q, \text{ROOT}(T)$ )
4   while not QUEUE-EMPTY( $Q$ )
5        $y = \text{DEQUEUE}(Q)$ 
6       print GETDATA( $T, y$ )
7       if HASLEFT( $T, y$ )
8           ENQUEUE( $Q, \text{LEFT}(y)$ )
9       if HASRIGHT( $T, y$ )
10          ENQUEUE( $Q, \text{RIGHT}(y)$ )
```

(*Exercice : Implémenter les parcours en profondeur de manière non récursive*)

# Plan

1. Introduction
2. Pile et file
3. Structures linéaires : Liste, vecteur, séquence
4. Arbres
5. File à priorité
6. Ensembles disjoints

# File à priorité

- Ensemble dynamique d'objets classés par ordre de priorité
  - ▶ Permet d'extraire un objet possédant la plus grande priorité
  - ▶ En pratique, on représente les priorités par les clés
  - ▶ Suppose un ordre total défini sur les clés
- Interface :
  - ▶  $\text{INSERT}(S, x)$  : insère l'élément  $x$  dans  $S$ .
  - ▶  $\text{MAXIMUM}(S)$  : renvoie l'élément de  $S$  avec la plus grande clé.
  - ▶  $\text{EXTRACT-MAX}(S)$  : supprime et renvoie l'élément de  $S$  avec la plus grande clé.
- Remarques :
  - ▶ Extraire l'élément de clé maximale ou minimale sont des problèmes équivalents
  - ▶ La file FIFO est une file à priorité où la clé correspond à l'ordre d'arrivée des éléments.
- Application : gestion des jobs sur un ordinateur partagé

# Implémentations

- Implémentation à l'aide d'un tableau statique
  - ▶  $Q$  est un tableau statique de taille fixée  $Q.length$ .
  - ▶ Les éléments de  $Q$  sont triés par ordre **croissant** de clés.  $Q.top$  pointe vers le dernier élément.
  - ▶ Complexité en temps : extraction en  $O(1)$  et insertion en  $O(n)$  où  $n$  est la taille de la file
  - ▶ Complexité en espace :  $O(1)$
- Implémentation à l'aide d'une liste liée
  - ▶  $Q$  est une liste liée où les éléments sont triés par ordre **décroissant** de clés
  - ▶ Complexité en temps : extraction en  $O(1)$  et insertion en  $O(n)$  où  $n$  est la taille de la file
  - ▶ Complexité en espace :  $O(n)$
- Peut-on faire mieux ?

*Exercice : comment obtenir  $O(1)$  pour l'insertion et  $O(n)$  pour l'extraction ?*

# Implémentation à l'aide d'un tas

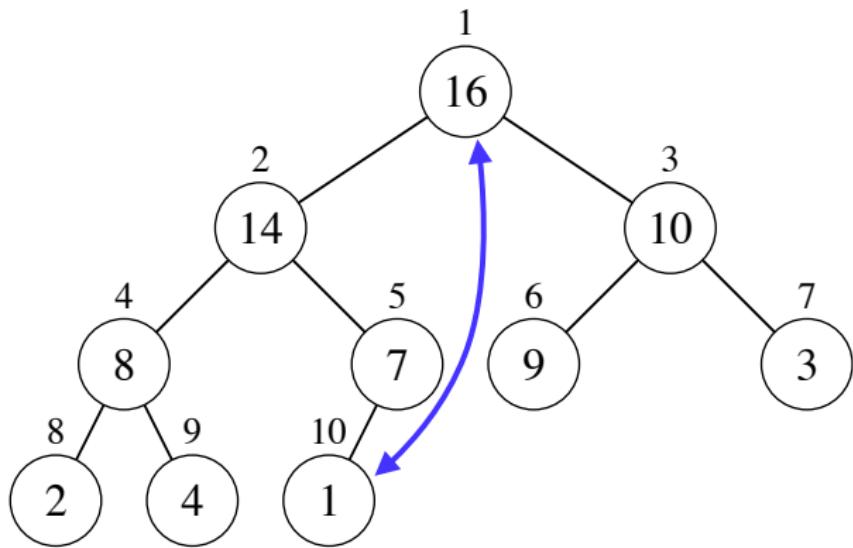
- La file est implémentée à l'aide d'un tas(-max) (voir transp. 149)
- Accès et extraction du maximum :

```
HEAP-MAXIMUM( $A$ )
1 return  $A[1]$ 
```

```
HEAP-EXTRACT-MAX( $A$ )
1 if  $A.\text{heap-size} < 1$ 
2     error "heap underflow"
3      $\text{max} = A[1]$ 
4      $A[1] = A[A.\text{heap-size}]$ 
5      $A.\text{heap-size} = A.\text{heap-size} - 1$ 
6     MAX-HEAPIFY( $A, 1$ ) // reconstruit le tas
7     return  $\text{max}$ 
```

- Complexité :  $\Theta(1)$  et  $O(\log n)$  respectivement (voir chapitre 3)

## Implémentation à l'aide d'un tas



# Implémentation à l'aide d'un tas : insertion

- INCREASE-KEY( $S, x, k$ ) augmente la valeur de la clé de  $x$  à  $k$  (on suppose que  $k \geq$  à la valeur courante de la clé de  $x$ ).

```
HEAP-INCREASE-KEY( $A, i, key$ )
```

```
1  if  $key < A[i]$ 
2      error "new key is smaller than current key"
3   $A[i] = key$ 
4  while  $i > 1$  and  $A[\text{PARENT}(i)] < A[i]$ 
5       $\text{swap}(A[i], A[\text{PARENT}(i)])$ 
6       $i = \text{PARENT}(i)$ 
```

- Complexité :  $O(\log n)$  (la longueur de la branche de la racine à  $i$  étant  $O(\log n)$  pour un tas de taille  $n$ ).

# Implémentation à l'aide d'un tas : insertion

- Pour insérer un élément avec une clé  $key$  :
  - ▶ l'insérer à la dernière position sur le tas avec une clé  $-\infty$ ,
  - ▶ augmenter sa clé de  $-\infty$  à  $key$  en utilisant la procédure précédente

```
HEAP-INSERT( $A, key$ )
```

- 1  $A.heap-size = A.heap-size + 1$
- 2  $A[A.heap-size] = -\infty$
- 3 HEAP-INCREASE-KEY( $A, A.heap-size, key$ )

- Complexité :  $O(\log n)$ .

⇒ Implémentation d'une file à priorité par un tas :  $O(\log n)$  pour l'extraction et l'insertion.

# Plan

1. Introduction
2. Pile et file
3. Structures linéaires : Liste, vecteur, séquence
4. Arbres
5. File à priorité
6. Ensembles disjoints

## Ensembles disjoints (“Union-Find”)

- Structure de données qui maintient à jour une collection  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  d'ensembles dynamiques disjoints.
- Chaque ensemble est identifié par un **représentant**, qui est un élément quelconque de l'ensemble.
- Interface :
  - ▶  $\text{MAKE-SET}(D, x)$  : crée un nouvel ensemble dont le seul membre, et donc représentant, est  $x$ .  $x$  ne doit pas déjà appartenir à un autre ensemble.
  - ▶  $\text{UNION}(D, x, y)$  : réunit les ensembles dynamiques qui contiennent  $x$  et  $y$ .  $x$  et  $y$  doivent appartenir à des ensembles différents avant l'union.
  - ▶  $\text{FIND}(D, x)$  : Renvoie un pointeur sur le représentant de l'ensemble (unique) contenant  $x$ . Chaque appel doit renvoyer le même représentant tant que la structure n'est pas modifiée.

# Application

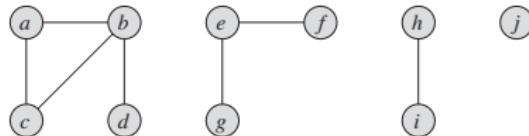
## Calcul des composantes connexes d'un graphe

CONNECTED-COMPONENTS( $G$ )

- 1  $D = \text{"Empty disjoint set"}$
- 2 **for each** vertex  $v \in G.V$   
3     MAKE-SET( $D, v$ )
- 4 **for each** edge  $(u, v) \in G.E$   
5     **if** FIND-SET( $D, u$ )  $\neq$  FIND-SET( $D, v$ )  
6         UNION( $D, u, v$ )

SAME-COMPONENT( $u, v$ )

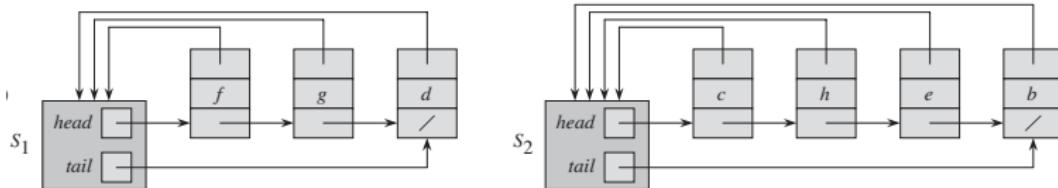
- 1 **if** FIND-SET( $D, u$ ) == FIND-SET( $D, v$ )  
2         **return** TRUE
- 3 **else return** FALSE



$$\mathcal{S} = \{\{a, b, c, d\}, \{e, f, g\}, \{h, i\}, \{j\}\}$$

# Implémentation par une liste liée

- Chaque ensemble est représenté par une liste liée dont le représentant est le premier objet
- Une sentinelle pour chaque ensemble contient un pointeur vers le début de la liste (*head*) et un pointeur vers la fin (*tail*)
- Chaque objet de la liste contient un élément de l'ensemble, un pointeur sur l'objet contenant l'élément suivant, et un pointeur sur le représentant de l'ensemble.



- **MAKE-SET** : crée une nouvelle liste contenant seulement  $x$ .
- **FIND** : Suit le pointeur vers la sentinelle et puis renvoie le premier élément.
- $\Theta(1)$  pour les deux fonctions

## Union : implémentation naïve

- On fusionne les listes contenant  $x$  et  $y$  :
  - ▶ On concatène la liste de  $y$  à la suite de la liste  $x$
  - ▶ Nécessite de mettre à jour les pointeurs vers la sentinelle pour tous les éléments de la liste de  $y$
  - ▶ Complexité linéaire en fonction de la taille de la liste contenant  $y$
  - ▶  $\Theta(n)$  dans le pire cas si  $n$  appels à MAKE-SET ont précédé
- Analyse de complexité pour  $m$  opérations :
  - ▶ Supposons
    - ▶  $m$  opérations (MAKE-SET, FIND, ou UNION)
    - ▶  $n$  appels à MAKE-SET (et donc  $n - 1$  appels à UNION au plus)
    - ▶ Les  $n$  premières opérations sont des appels à MAKE-SET (pour simplifier l'analyse mais pas nécessaire)
  - ▶ Complexité au pire cas en fonction de  $m$  et  $n$  ?

## Pire cas

En ignorant les appels à FIND :

Opération	Nombre d'objets mis à jour
MAKE-SET( $x_1$ )	1
MAKE-SET( $x_1$ )	1
:	:
MAKE-SET( $x_n$ )	1
UNION( $x_2, x_1$ )	1
UNION( $x_3, x_2$ )	2
UNION( $x_4, x_3$ )	3
:	:
UNION( $x_n, x_{n-1}$ )	$n - 1$

Nombre de mises à jour d'objets :  $n + \sum_{i=1}^{n-1} i \Rightarrow \Theta(n^2)$  ( $\Rightarrow$  coût amorti par opération :  $\Theta(n)$ )

En intercalant  $m - 2n - 1$  appels à FIND ( $O(1)$ ), on obtient  $\Theta(m + n^2)$  pour le pire cas.

## Union pondérée

Version plus efficace :

- On maintient la taille de chaque liste dans la sentinelle
- A chaque appel à UNION, on attache la liste **la plus courte** à la fin de **la plus longue**
- Complexité linéaire en fonction de la taille de la liste la plus courte
- Toujours  $\Theta(n)$  dans le pire cas si  $n$  appels à MAKE-SET ont précédé

Analyse pour  $m$  opérations (dont  $n$  MAKE-SET) :

- Meilleur cas correspond au pire cas de l'approche naïve :  $\Theta(m + n)$
- Pire cas ?

## Borne supérieure sur le pire cas de l'union pondérée

Montrons que le pire cas est  $O(m + n \log n)$

- Soit un objet  $x$ , combien de fois son pointeur vers la sentinelle sera-t-il mis à jour au plus?
  - ▶ Quand il est mis à jour, la liste à laquelle il appartient est la plus courte des deux qui sont fusionnées
  - ▶ La taille de sa liste est donc au moins doublée
  - ▶ Si  $k$  mises à jour ont lieu, on doit donc avoir  $2^k \leq n \Rightarrow k \leq \log(n)$
- Pour  $n$  éléments, les  $n - 1$  opérations d'union demandent donc un temps  $O(n \log(n))$ .
- Pour  $m$  opérations au total :  $O(m + n \log(n))$

(*Exercice : Montrez que le pire correspond à fusionner à chaque étape les deux ensembles les plus petits*)

Note : Il existe une implémentation à base d'arbres qui est  $O(m \cdot \alpha(n))$  avec  $\alpha(n)$  une fonction de croissante très lente en fonction de  $n$  ( $\alpha(10^{80}) = 4$ ).

# Ce qu'on a vu

- Quelques structures de données classiques et différentes implémentations pour chacune d'elles
  - ▶ Liste, files simples, doubles et à priorité
  - ▶ Listes, vecteurs, séquences
  - ▶ Arbres
  - ▶ Ensembles disjoints
- Analyse amortie pour un vecteur

## Ce qu'on n'a pas vu

- Notion d'itérateur
- Tas binomial : alternative au tas binaire qui permet la fusion rapide de deux tas
- Evolution dynamique de la taille d'un tas (analyse amortie)
- Implémentation à base d'arbres d'une structure d'ensembles disjoints
- ...

# Partie 5

## Dictionnaires

# Plan

1. Introduction
2. Arbres binaires de recherche
3. Tables de hachage

# Dictionnaires

- Définition : un **dictionnaire** est un ensemble dynamique d'objets avec des clés comparables qui supportent les opérations suivantes :
  - ▶  $\text{SEARCH}(S, k)$  retourne un pointeur  $x$  vers un élément dans  $S$  tel que  $x.\text{key} = k$ , ou  $\text{NIL}$  si un tel élément n'appartient pas à  $S$ .
  - ▶  $\text{INSERT}(S, x)$  insère l'élément  $x$  dans le dictionnaire  $S$ . Si un élément de même clé se trouve déjà dans le dictionnaire, on met à jour sa valeur
  - ▶  $\text{DELETE}(S, x)$  retire l'élément  $x$  de  $S$ . Ne fait rien si l'élément n'est pas dans le dictionnaire.
- Pour faciliter la recherche, on peut supposer qu'il existe un ordre total sur les clés.

# Dictionnaires

- Deux objectifs en général :
  - ▶ minimiser le coût pour l'insertion et l'accès au données
  - ▶ minimiser l'espace mémoire pour le stockage des données
- Exemples d'applications :
  - ▶ Table de symboles dans un compilateur
  - ▶ Table de routage d'un DNS
  - ▶ ...
- Beaucoup d'implémentations possibles

# Liste liée

Première solution :

- On stocke les paires clé-valeur dans une liste liée
- Recherche :

```
LIST-SEARCH( $L, k$ )
```

```
1   $x = L.\text{head}$ 
2  while  $x \neq \text{NIL} \wedge x.\text{key} \neq k$ 
3       $x = x.\text{next}$ 
4  return  $x$ 
```

- Insertion (resp. Suppression)
  - ▶ On recherche la clé dans la liste
  - ▶ Si elle existe, on remplace la valeur (resp. on la supprime)
  - ▶ Si elle n'existe pas, on la place en début de liste (resp. on ne fait rien)
- Complexité au pire cas *(meilleur cas ?)*
  - ▶ Insertion :  $\Theta(N)$
  - ▶ Recherche :  $\Theta(N)$
  - ▶ Suppression :  $\Theta(N)$

## Vecteur trié

Deuxième solution :

- On suppose qu'il existe un ordre total sur les clés
- On stocke les éléments dans un **vecteur** qu'on maintient trié
- Recherche dichotomique (approche "diviser-pour-régner")

```
BINARY-SEARCH( $V, k, low, high$ )
1  if  $low > high$ 
2      return NIL
3   $mid = \lfloor (low + high)/2 \rfloor$ 
4   $x = \text{ELEM-AT-RANK}(V, mid)$ 
5  if  $k == x.key$ 
6      return  $x$ 
7  elseif  $k > x.key$ 
8      return BINARY-SEARCH( $V, k, mid + 1, high$ )
9  else return BINARY-SEARCH( $V, k, low, mid - 1$ )
```

Complexité au pire cas :  $\Theta(\log n)$

## Vecteur trié

- Insertion : recherche de la position par BINARY-SEARCH puis insertion dans le vecteur par INSERT-AT-RANK (=décalage des éléments vers la droite).
- Suppression : recherche puis suppression par REMOVE-AT-RANK (=décalage des éléments vers la gauche).
- Complexité au pire cas *(meilleur cas ?)*
  - ▶ Insertion :  $\Theta(N)$  (on doit décaler les éléments à droite de la clé)
  - ▶ Recherche :  $\Theta(\log N)$  (recherche dichotomique)
  - ▶ Suppression :  $\Theta(N)$  (on doit décaler les éléments à gauche de la clé)

(Si le vecteur est implémenté par un tableau extensible !)

# Dictionnaires : jusqu'ici

	<i>Pire cas</i>		<i>En moyenne</i>			
<i>Implémentation</i>	SEARCH	INSERT	DELETE	SEARCH	INSERT	DELETE
Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
Vecteur trié	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$

Peut-on obtenir à la fois une insertion et une recherche “efficaces” ?

# Plan

1. Introduction

2. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Arbres équilibrés AVL

3. Tables de hachage

Principe

Fonctions de hachage

Adressage ouvert

Comparaisons

# Plan

1. Introduction

2. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Arbres équilibrés AVL

3. Tables de hachage

Principe

Fonctions de hachage

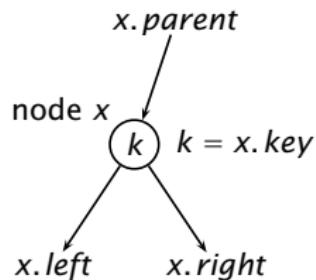
Adressage ouvert

Comparaisons

# Implémentation des arbres binaires

Implémentation des arbres binaires dans ce chapitre (pour simplifier les algorithmes à venir) :

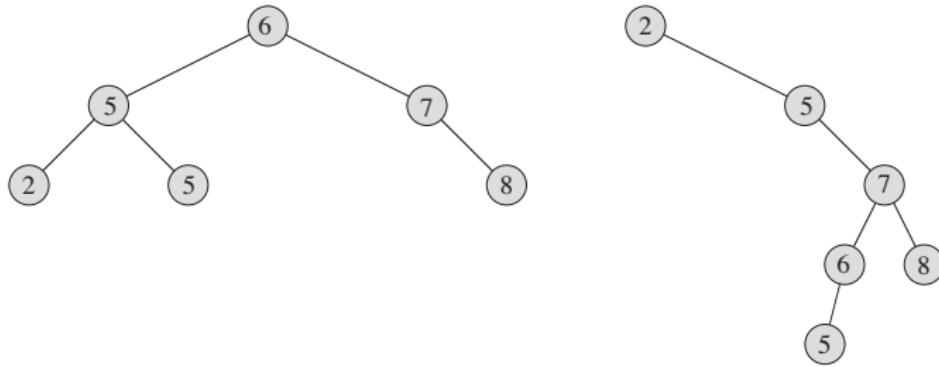
- $T$  représente l'arbre, qui consiste en un ensemble de nœuds
- $T.root$  est le nœud racine de l'arbre  $T$
- Nœud  $x$ 
  - ▶  $x.parent$  est le parent du nœud  $x$
  - ▶  $x.key$  est la clé stockée au nœud  $x$
  - ▶  $x.left$  est le fils de gauche du nœud  $x$
  - ▶  $x.right$  est le fils de droite du nœud  $x$



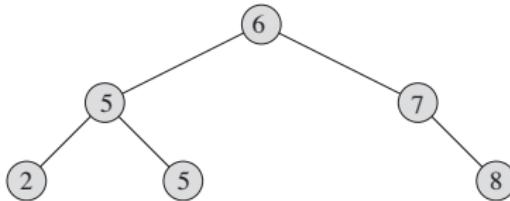
Pour simplifier les notations, nos fonctions seront implémentées directement sur base de cette implémentation (et pas de l'interface générale vue précédemment)

# Arbres binaires de recherche

- Une structure d'arbre binaire implémentant un dictionnaire, avec des opérations en  $O(h)$  où  $h$  est la hauteur de l'arbre
- Chaque nœud de l'arbre binaire est associé à une clé
- L'arbre satisfait à la propriété d'arbre binaire de recherche
  - ▶ Soient deux nœuds  $x$  et  $y$ .
  - ▶ Si  $y$  est dans le sous-arbre de gauche de  $x$ , alors  $y.key < x.key$
  - ▶ Si  $y$  est dans le sous-arbre de droite de  $x$ , alors  $y.key \geq x.key$



## Parcours d'un arbre binaire de recherche



$\Rightarrow \langle 2, 5, 5, 6, 7, 8 \rangle$

- Le parcours infixé d'un arbre binaire de recherche permet d'afficher les clés par ordre croissant

```
INORDER-TREE-WALK( $x$ )
1  if  $x \neq \text{NIL}$ 
2      INORDER-TREE-WALK( $x.\text{left}$ )
3      print  $x.\text{key}$ 
4      INORDER-TREE-WALK( $x.\text{right}$ )
```

# Recherche dans un arbre binaire

## ■ Recherche binaire

```
TREE-SEARCH( $x, k$ )
1  if  $x == \text{NIL}$  or  $k == x.\text{key}$ 
2      return  $x$ 
3  if  $k < x.\text{key}$ 
4      return TREE-SEARCH( $x.\text{left}, k$ )
5  else return TREE-SEARCH( $x.\text{right}, k$ )
```

Appel initial (à partir d'un arbre  $T$ )

```
TREE-SEARCH( $T.\text{root}, k$ )
```

- Complexité ?  $T(n) \in O(h)$ , où  $h$  est la hauteur de l'arbre
- Pire cas :  $h = n$

# Recherche dans un arbre binaire

- TREE-SEARCH est récursive terminale.
- Version itérative

```
ITERATIVE-TREE-SEARCH( $T, k$ )
1    $x = T.root$ 
2   while  $x \neq \text{NIL}$  and  $k \neq x.key$ 
3       if  $k < x.key$ 
4            $x = x.left$ 
5       else  $x = x.right$ 
6   return  $x$ 
```

## Clés maximale et minimale

- Etant donné la propriété d'arbre binaire
  - ▶ La clé minimale se trouve dans le nœud le plus à gauche
  - ▶ La clé maximale se trouve dans le noeud le plus à droite

TREE-MINIMUM( $x$ )

- 1 **while**  $x.\text{left} \neq \text{NIL}$
- 2        $x = x.\text{left}$
- 3 **return**  $x$

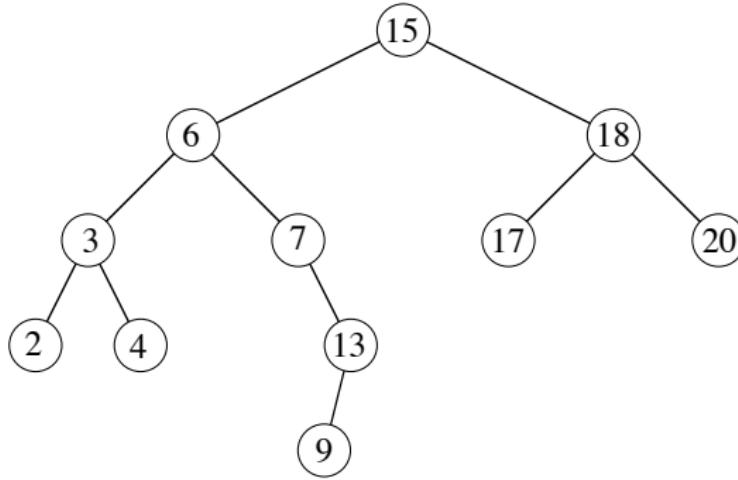
TREE-MAXIMUM( $x$ )

- 1 **while**  $x.\text{right} \neq \text{NIL}$
- 2        $x = x.\text{right}$
- 3 **return**  $x$

- Complexité :  $O(h)$ , où  $h$  est la hauteur de l'arbre.

## Successeur et prédecesseur

- Etant donné un nœud  $x$ , trouver le nœud contenant la valeur de clé suivante (dans l'ordre)



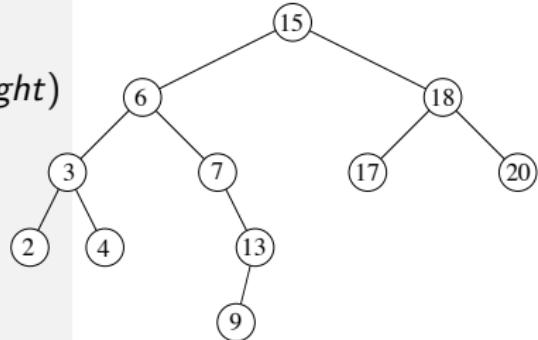
Ex : successeur de 15  $\rightarrow$  17, successeur de 4  $\rightarrow$  6.

- Le successeur de  $x$  est le minimum du sous-arbre de droite s'il existe
- Sinon, c'est le premier ancêtre  $a$  de  $x$  tel que  $x$  tombe dans le sous-arbre de gauche de  $a$ .

# Successeur et prédecesseur

TREE-SUCCESSOR( $x$ )

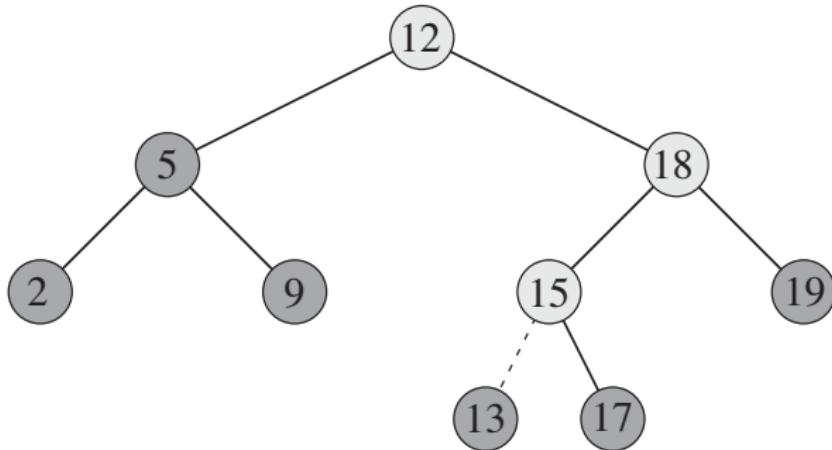
```
1  if  $x.\text{right} \neq \text{NIL}$ 
2      return TREE-MINIMUM( $x.\text{right}$ )
3   $y = x.\text{parent}$ 
4  while  $y \neq \text{NIL}$  and  $x == y.\text{right}$ 
5       $x = y$ 
6       $y = y.\text{parent}$ 
7  return  $y$ 
```



Complexité :  $O(h)$ , où  $h$  est la hauteur de l'arbre

(Exercice : TREE-PREDECESSOR)

## Insertion

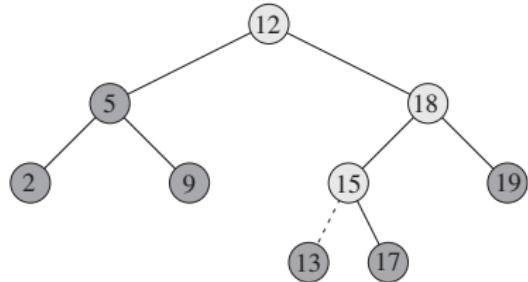


- Pour insérer  $x$ , on recherche la clé  $x.key$  dans l'arbre
- Si on ne la trouve pas, on l'ajoute à l'endroit où la recherche s'est arrêtée.

# Insertion

TREE-INSERT( $T, z$ )

```
1   $y = \text{NIL}$ 
2   $x = T.\text{root}$ 
3  while  $x \neq \text{NIL}$ 
4       $y = x$ 
5      if  $z.\text{key} < x.\text{key}$ 
6           $x = x.\text{left}$ 
7      else  $x = x.\text{right}$ 
8   $z.\text{parent} = y$ 
9  if  $y == \text{NIL}$ 
10     // Tree  $T$  was empty
11      $T.\text{root} = z$ 
12  elseif  $z.\text{key} < y.\text{key}$ 
13       $y.\text{left} = z$ 
14  else  $y.\text{right} = z$ 
```

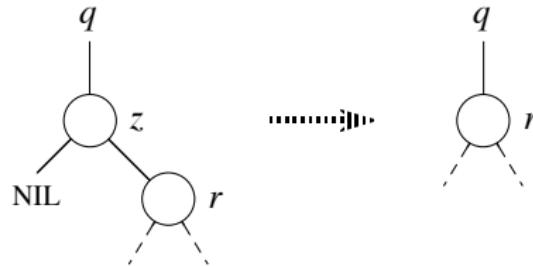


Complexité :  $O(h)$  où  $h$  est la hauteur de l'arbre

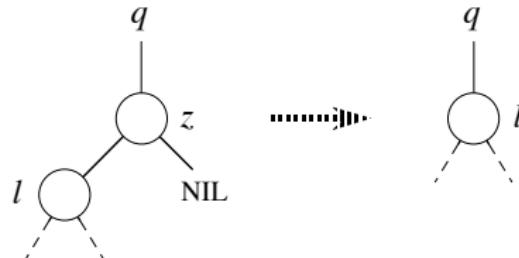
# Suppression

3 cas à considérer en fonction du nœud  $z$  à supprimer :

- $z$  n'a pas de fils gauche : remplacer  $z$  par son fils droit



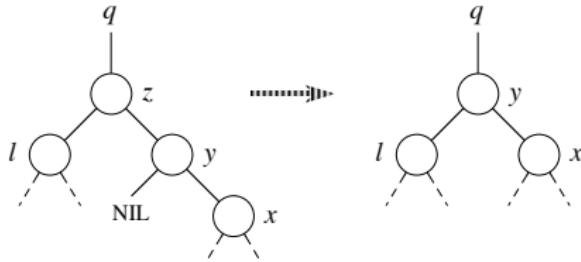
- $z$  n'a pas de fils droit : remplacer  $z$  par son fils gauche



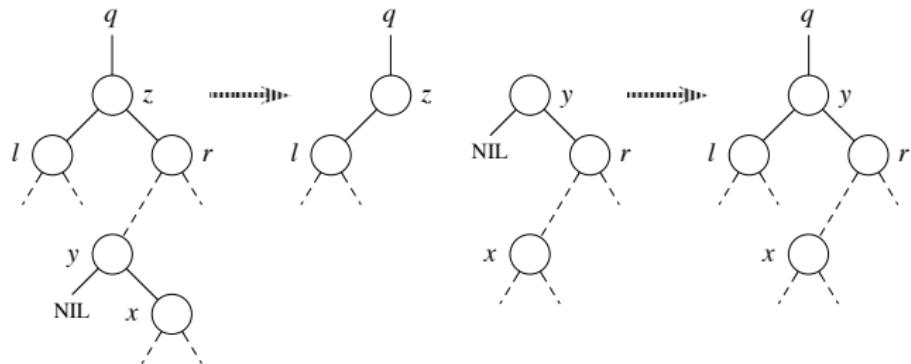
- $z$  a deux fils : rechercher le successeur  $y$  de  $z$ .

*NB :  $y$  est dans le sous-arbre de droite et n'a pas de fils gauche.*

- ▶ Si  $y$  est le fils droit de  $z$ , remplacer  $z$  par  $y$  et conserver le fils droit de  $y$



- ▶ Sinon,  $y$  est dans le sous-arbre droit de  $z$  mais n'en est pas la racine. On remplace  $y$  par son propre fils droit et on remplace  $z$  par  $y$ .



# Suppression

TREE-DELETE( $T, z$ )

```
1  if  $z.left == \text{NIL}$ 
2      TRANSPLANT( $T, z, z.right$ )
3  elseif  $z.right == \text{NIL}$ 
4      TRANSPLANT( $T, z, z.left$ )
5  else //  $z$  has two children
6       $y = \text{TREE-SUCCESSOR}(z)$ 
7      if  $y.parent \neq z$ 
8          TRANSPLANT( $T, y, y.right$ )
9           $y.right = z.right$ 
10          $y.right.parent = y$ 
11     // Replace  $z$  by  $y$ 
12     TRANSPLANT( $T, z, y$ )
13      $y.left = z.left$ 
14      $y.left.parent = y$ 
```

Complexité :  $O(h)$  pour un arbre de hauteur  $h$

(Tout est  $O(1)$  sauf l'appel à TREE-SUCCESSOR).

TRANSPLANT( $T, u, v$ )

```
1  if  $u.parent == \text{NIL}$ 
2       $T.root = v$ 
3  elseif  $u == u.parent.left$ 
4       $u.parent.left = v$ 
5  else  $u.parent.right = v$ 
6  if  $v \neq \text{NIL}$ 
7       $v.parent = u.parent$ 
```

# Arbres binaires de recherche

- Toutes les opérations sont  $O(h)$  où  $h$  est la hauteur de l'arbre
- Si  $n$  éléments ont été insérés dans l'arbre :
  - ▶ Au pire,  $h = n - 1 \in \Theta(n)$ 
    - ▶ Elements insérés en ordre
  - ▶ Au mieux,  $h = \lceil \log_2 n \rceil \in \Theta(\log n)$ 
    - ▶ Pour un arbre binaire complet
  - ▶ En moyenne, on peut montrer que  $h \in \Theta(\log n)$ 
    - ▶ En supposant que les éléments ont été insérés en ordre aléatoire

## Profondeur moyenne d'un nœud

- Montrons que la profondeur moyenne d'un nœud dans un ABR construit aléatoirement est  $\Theta(\log n)$
- Soit  $P(n)$  la somme totale moyenne des profondeurs des nœuds d'un ABR construit à partir de  $n$  clés introduites dans un ordre aléatoire. La profondeur moyenne recherchée est  $P(n)/n$ .
- On a :

$$P(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} (P(i) + P(n-i-1) + n-1), P(1) = 0$$

En effet :

- ▶ La première clé introduite dans l'ABR a autant de chance d'être à chaque position de la liste triée des clés.
- ▶ Si elle est à la position  $i+1$  le sous-arbre de gauche contient  $i$  clés et celui de droite  $n-i-1$  clés.
- ▶ La profondeur de chaque nœud à droite et à gauche de la racine est augmentée de 1 par rapport à sa profondeur dans les sous-arbres à gauche et à droite.

## Profondeur moyenne d'un nœud

- Cette récurrence peut se réécrire en :

$$P(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} (P(i) + P(n-i-1)) + n - 1.$$

qui est identique à celle du QUICKSORT (voir le transp. 136)

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(n) &\in \Theta(n \log n) \\ \Rightarrow \frac{P(n)}{n} &\in \Theta(\log n)\end{aligned}$$

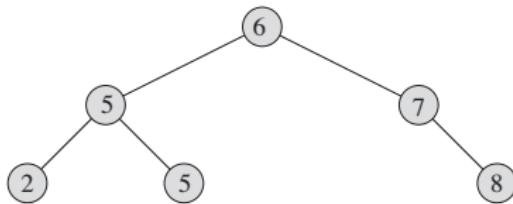
- En moyenne, la recherche d'une clé parmi celles stockées dans un ABR obtenu après insertion des clés dans un ordre aléatoire est donc  $\Theta(\log n)$

# Tri avec un arbre binaire de recherche

BINARY-SEARCH-TREE-SORT( $A$ )

```
1  $T = \text{"Empty binary search tree"}$ 
2 for  $i = 1$  to  $n$ 
3     TREE-INSERT( $T, A[i]$ )
4     INORDER-TREE-WALK( $T.root$ )
```

- Exemple :  $A = [6, 5, 7, 2, 5, 8]$



- Complexité en temps identique au quicksort
  - ▶ Insertion : en moyenne,  $n \cdot O(\log n) = O(n \log n)$ , pire cas :  $\Theta(n^2)$
  - ▶ Parcours de l'arbre en ordre :  $\Theta(n)$
  - ▶ Total :  $\Theta(n \log n)$  en moyenne,  $\Theta(n^2)$  pour le pire cas
- Complexité en espace cependant plus importante, pour le stockage de la structure d'arbres.

# Dictionnaires : jusqu'ici

<i>Implémentation</i>	<i>Pire cas</i>			<i>En moyenne</i>		
	SEARCH	INSERT	DELETE	SEARCH	INSERT	DELETE
Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
Vecteur trié	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
ABR	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$

- Peut-on obtenir  $\Theta(\log n)$  dans le pire cas ? Oui !
- Deux solutions :
  - ▶ Utiliser de la randomisation pour que la probabilité de rencontrer le pire cas soit négligeable
  - ▶ Maintenir les arbres équilibrés

# Plan

1. Introduction

2. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Arbres équilibrés AVL

3. Tables de hachage

Principe

Fonctions de hachage

Adressage ouvert

Comparaisons

# Arbres équilibrés

- Solution générale pour obtenir une complexité au pire cas en  $\Theta(\log n)$  :
  - ▶ Définir un **invariant** sur la structure d'arbre
  - ▶ Prouver que cet invariant garantit une hauteur  $\Theta(\log n)$
  - ▶ Implémenter les opérations d'insertion et suppression de manière à maintenir l'invariant
  - ▶ Si ces opérations ne sont pas trop coûteuses (p.ex.,  $O(\log n)$ ), on aura gagné
- Plusieurs types d'arbres équilibrés :
  - ▶ Arbres AVL
    - ▶ Invariant : Arbres  $H$ -équilibrés
  - ▶ Arbres rouges et noirs (voir INFO0027)
  - ▶ Arbres 2-3-4
  - ▶ Splay trees, Scapegoat trees, treaps...

## Arbres $H$ -équilibrés

### ■ Définition :

$$T \text{ est } H\text{-équilibré} \Leftrightarrow |h(g(T')) - h(d(T'))| \leq 1,$$

pour tout sous-arbre  $T'$  de  $T$ , et où  $g(X)$ ,  $d(X)$  et  $h(X)$  sont resp. le sous-arbre gauche, le sous-arbre droit et la hauteur<sup>2</sup> de l'arbre  $X$ .

*(Les hauteurs des deux sous-arbres d'un même nœud diffèrent au plus de un)*

### ■ Propriété :

Pour tout arbre  $H$ -équilibré de taille  $n$  et de hauteur  $h$ , on a

$$h \in \Theta(\log n)$$

Plus précisément, on peut prouver :

$$\log(n+1) \leq h + 1 < 1,44 \log(n+2)$$

---

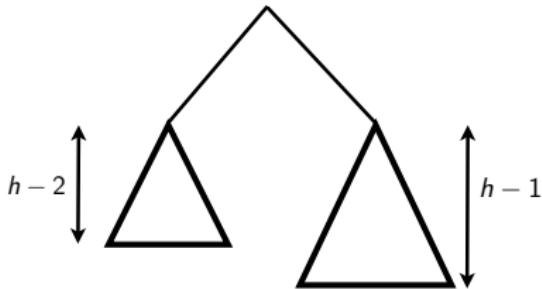
2. Par définition, la hauteur d'un arbre vide est -1.

# Arbres $H$ -équilibrés

## Démonstration

Etant donné un arbre  $H$ -équilibré de taille  $n$  et de hauteur  $h \geq 1$ , pour  $h$  fixé,  $n$  est

- Maximum : quand l'arbre est complet, soit quand  
 $n = 2^{h+1} - 1 \Rightarrow n + 1 \leq 2^{h+1} \Rightarrow \log(n + 1) \leq h + 1 \Rightarrow h \in \Omega(\log n)$
- Minimum : quand  $n = N(h)$  où  $N(h)$  est la taille d'un arbre  $H$ -équilibré de hauteur  $h$  qui a le moins d'éléments.
  - ▶  $N(h)$  peut être défini par récurrence par  
 $N(h) = 1 + N(h - 1) + N(h - 2)$  avec  $N(0) = 1$  et  $N(1) = 2$ .



- ▶ On a donc
    - $N(h) = 1 + N(h - 1) + N(h - 2)$
    - $\Rightarrow N(h) > 2N(h - 2)$  (car  $N(h - 1) > N(h - 2)$ )
    - $\Rightarrow N(h) > 2^{h/2}$
    - $\Rightarrow h < 2 \log N(h)$
  - ▶ dont on peut tirer que  $h \in O(\log n)$
- On en déduit que

$$h = \Theta(\log n)$$



## Borne supérieure plus précise

- ▶ En notant  $F(h) = N(h) + 1$ , on a  $F(h) = F(h - 1) + F(h - 2)$  avec  $F(0) = 2$ ,  $F(1) = 3$
- ▶  $F$  est un récurrence de Fibonacci qui a pour solution

$$F(h) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{h+3} - \phi'^{h+3}) \text{ avec } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \phi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

- ▶ On a

$$N(h) + 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{h+3} - \phi'^{h+3})$$

- ▶ ce qui donne

$$n + 1 \geq \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{h+3} - \phi'^{h+3}) > \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{h+3} - 1)$$

(car  $|\phi'| < 1$ )

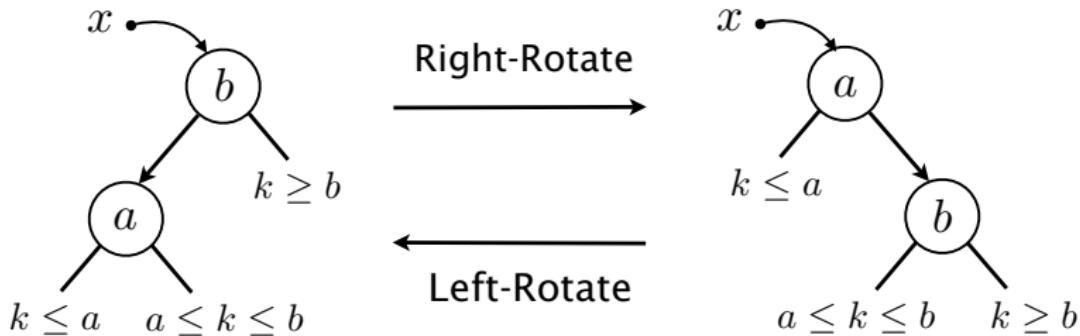
- ▶ En prenant le  $\log_{\phi}$  des deux membres :

$$h + 1 < 1,44 \log(n + 2)$$

# Arbres AVL

- Définition : Un arbre AVL est un arbre binaire de recherche  $H$ -équilibré
- Inventé par Adelson-Velskii et Landis en 1960
- Recherche :
  - ▶ Par la fonction TREE-SEARCH puisque c'est un arbre binaire
  - ▶ Complexité  $\Theta(\log n)$  étant donné la propriété
- Insertion :
  - ▶ On insère l'élément comme dans un arbre binaire classique
  - ▶ On vérifie que l'invariant est respecté
  - ▶ Si ce n'est pas le cas, on modifie l'arbre

# Rotations



LEFT-ROTATE( $x$ )

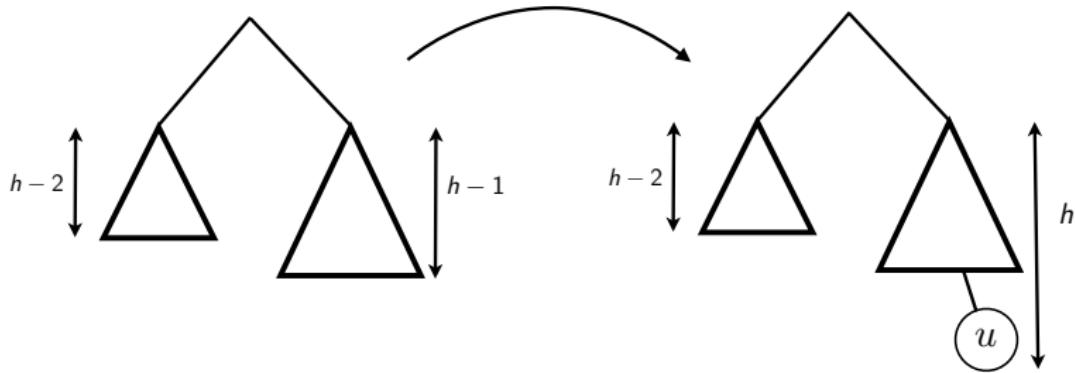
- 1  $r = x.right$
- 2  $x.right = r.left$
- 3  $r.left = x$
- 4 **return**  $r$

RIGHT-ROTATE( $x$ )

- 1  $l = x.left$
- 2  $x.left = l.right$
- 3  $l.right = x$
- 4 **return**  $l$

Les rotations maintiennent la propriété d'arbre binaire de recherche

## Insertion dans un AVL

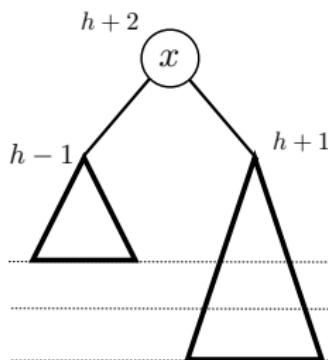


- Insérer le nouvel élément comme dans un arbre binaire de recherche ordinaire
- L'insertion peut créer un déséquilibre (l'arbre n'est plus  $H$ -équilibré)
- Remonter depuis le nouveau noeud jusqu'à la racine en restaurant l'équilibre des sous-arbres rencontrés si nécessaire

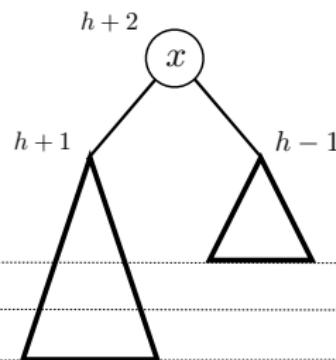
# Equilibrage

- Soit  $x$  le noeud le plus bas violent l'invariant après l'insertion
  - ▶ Tous ses sous-arbres sont  $H$ -équilibrés
  - ▶ Il y a une différence d'au plus 2 niveaux entre ses sous-arbres gauche et droit
- Comment rétablir l'équilibre ?
- Deux cas possibles (selon insertion à droite ou à gauche) :

Cas 1



Cas 2



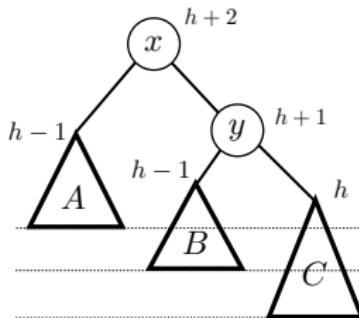
(Déséquilibre à droite)

(Déséquilibre à gauche)

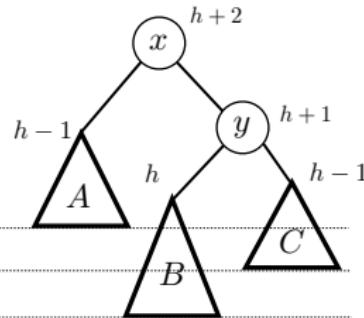
# Cas 1 : déséquilibre à droite

- Deux sous-cas possibles

Cas 1.1



Cas 1.2



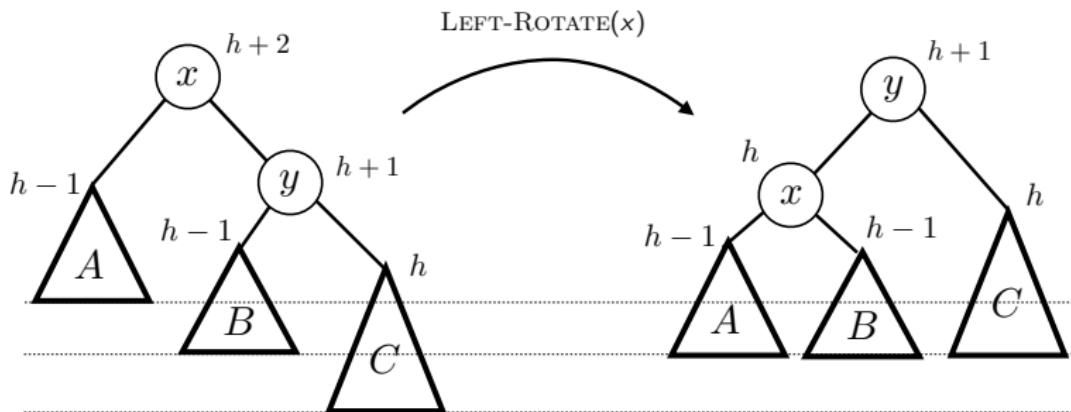
Déséquilibre à l'extérieur  
(Cas droite-droite)

Déséquilibre à l'intérieur  
(Cas droite-gauche)

*(Pourquoi le cas B et C de hauteur h n'est pas possible ?)*

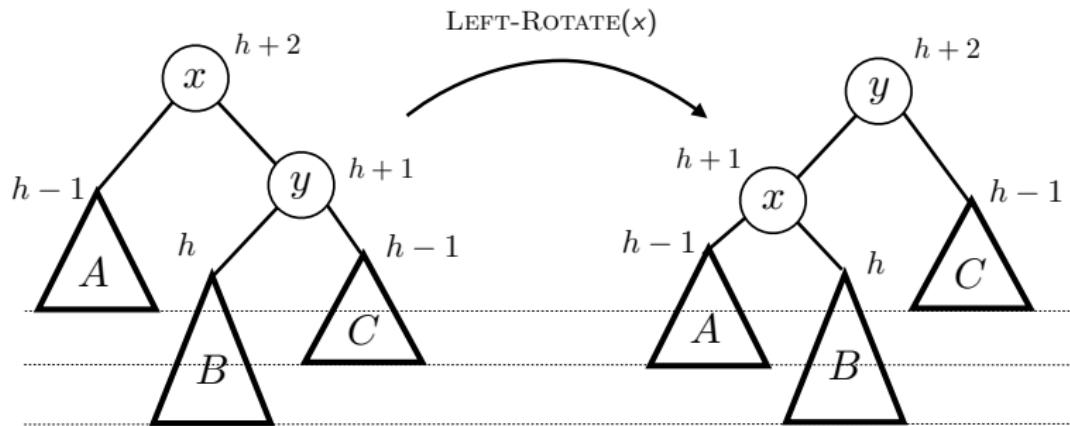
## Cas 1.1 : déséquilibre à droite, extérieur (droite-droite)

- Equilibre rétabli par une rotation à gauche de  $x$

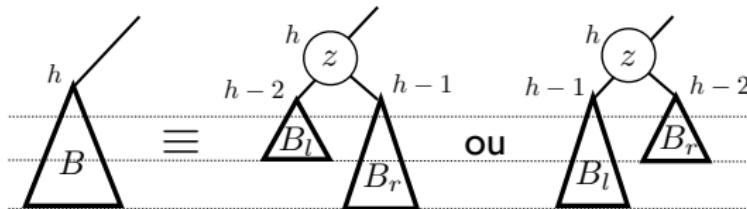


## Cas 1.2 : déséquilibre à droite, intérieur (droite-gauche)

- Une rotation à gauche ne permet pas de rétablir l'équilibre

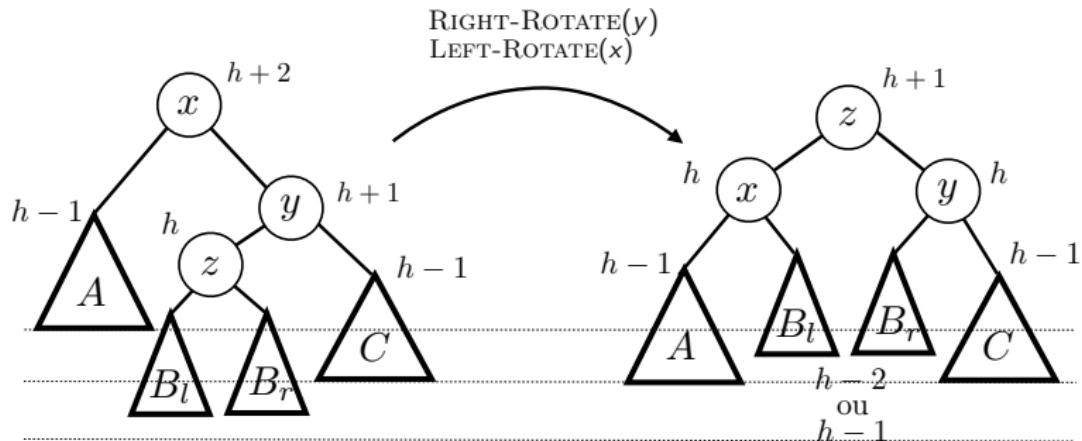


- Le sous-arbre  $B$  contient au moins un élément (l'élément inséré)



## Cas 1.2 : déséquilibre à droite, intérieur (droite-gauche)

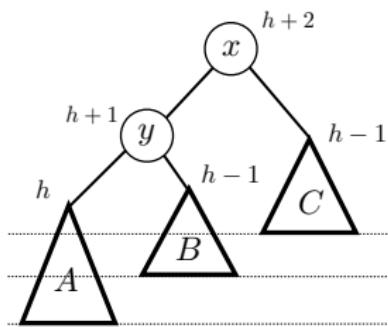
- Equilibre rétabli par deux rotations



## Cas 2 : déséquilibre à gauche

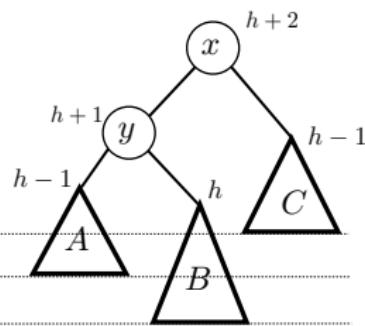
- Symétrique du cas 1
- Deux sous-cas possibles

Cas 2.1



Déséquilibre à l'extérieur  
(Cas gauche-gauche)

Cas 2.2



Déséquilibre à l'intérieur  
(Cas gauche-droite)

- Résolus respectivement par une rotation (à droite) et une double rotation.

# Implémentation

- Algorithme récursif : Pour insérer une clé dans un arbre  $T$  :
  - ▶ On l'insère (récursivement) dans le sous-arbre approprié (gauche ou droit)
  - ▶ Si l'arbre résultant  $T$  devient déséquilibré, on effectue une rotation simple ou double selon le cas dans lequel on se trouve
- L'arbre après rééquilibrage étant de la même hauteur qu'avant l'insertion, on n'aura à faire qu'au plus une rotation (simple ou double).
- L'implémentation est facilitée si on maintient en chaque nœud  $x$  un attribut  $x.h$  avec la hauteur du sous-arbre en  $x$ .
- Complexité :
  - ▶  $O(h)$  où  $h$  est la hauteur de l'arbre,
  - ▶ c'est-à-dire  $O(\log n)$  vu que l'arbre est  $H$ -équilibré.

# Suppression

- Comme pour l'insertion, on doit rétablir l'équilibre suite à la suppression
- La suppression d'un nœud peut déséquilibrer le parent de ce nœud
- Contrairement à l'insertion, on peut devoir rééquilibrer plusieurs ancêtres du nœud supprimé.
- Chaque rotation étant d'ordre  $O(1)$ , la complexité d'une suppression reste cependant  $O(h)$  pour un arbre de hauteur  $h$  et donc  $O(\log n)$  pour un AVL.

## Tri avec un AVL

- Comme avec un arbre de binaire de recherche ordinaire, on peut trier avec un AVL
  - ▶ On insère les éléments successivement dans l'arbre
  - ▶ On effectue un parcours en ordre de l'arbre
- Complexité en temps :  $\Theta(n \log n)$  (comme pour le tri par tas)
- Complexité en espace :  $\Theta(n)$  (pour la structure d'arbre temporaire)  
(versus  $O(1)$  pour le heap-sort)

# Dictionnaires : jusqu'ici

<i>Implémentation</i>	<i>Pire cas</i>			<i>En moyenne</i>		
	SEARCH	INSERT	DELETE	SEARCH	INSERT	DELETE
Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
Vecteur trié	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
ABR	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$
AVL	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$

- Peut-on faire mieux ?
- Oui, en changeant radicalement de philosophie

# Demo

## Illustrations :

- <http://people.ksp.sk/~kuko/bak/>
- <http://www.csi.uottawa.ca/~stan/csi2514/applets/avl/BT.html>
- <http://www.cs.jhu.edu/~goodrich/dsa/trees/avltree.html>
- <http://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/flash.html>

# Plan

1. Introduction

2. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Arbres équilibrés AVL

3. Tables de hachage

Principe

Fonctions de hachage

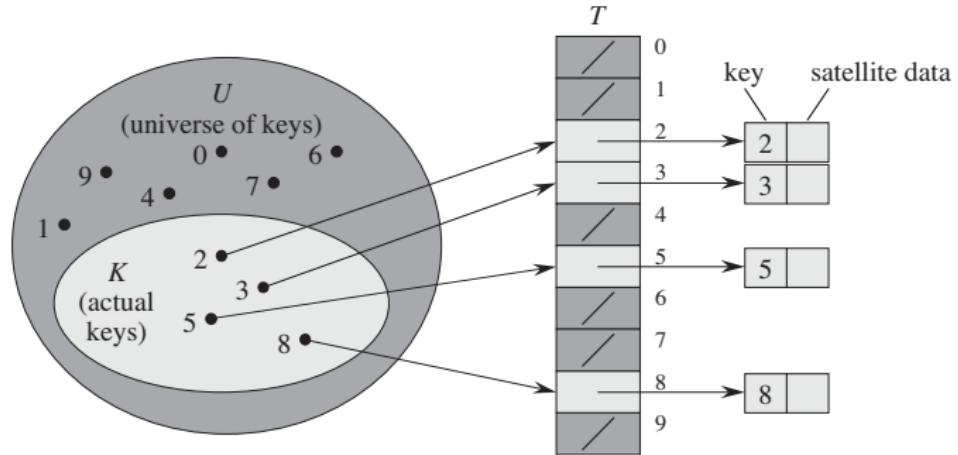
Adressage ouvert

Comparaisons

# Tableau à accès direct

- On suppose :
  - ▶ que chaque élément a une clé tirée d'un univers  $U = \{0, 1, \dots, m - 1\}$  où  $m$  n'est pas trop grand
  - ▶ qu'il ne peut pas y avoir deux éléments avec la même clé.
- Le dictionnaire est implémenté par un tableau  $T[0 \dots m - 1]$  :
  - ▶ Chaque position dans la table correspond à une clé de  $U$ .
  - ▶ S'il y a un élément  $x$  avec la clé  $k$ , alors  $T[k]$  contient un pointeur vers  $x$ .
  - ▶ Sinon,  $T[k]$  est vide ( $T[k] = \text{NIL}$ ).

# Tableau à accès direct



DIRECT-ADDRESS-SEARCH( $T, k$ )

1 **return**  $T[k]$

DIRECT-ADDRESS-INSERT( $T, x$ )

1 **return**  $T[x.\text{key}] = x$

DIRECT-ADDRESS-DELETE( $T, x$ )

1 **return**  $T[x.\text{key}] = \text{NIL}$

## Tableau à accès direct

- Complexité de toutes les opérations :  $O(1)$  (dans tous les cas)
- Problème :
  - ▶ Complexité en espace :  $\Theta(|U|)$
  - ▶ si l'univers de clés  $U$  est grand, stocker une table de taille  $|U|$  peut être peu pratique, voire impossible
- Souvent l'ensemble des clés réellement stockées, noté  $K$ , est petit comparé à  $U$  et donc l'espace alloué est gaspillé.
- Comment bénéficier de l'accès rapide d'une table à accès direct avec une table de taille raisonnable ?
  - ⇒ Table de hachage :
    - ▶ Réduit le stockage à  $\Theta(|K|)$
    - ▶ Recherche en  $O(1)$  (en moyenne !)

# Table de hachage

- Inventée en 1953 par Luhn
- Idée :
  - ▶ Utiliser une table  $T$  de taille  $m \ll |U|$
  - ▶ stocker  $x$  à la position  $h(x.\text{key})$ , où  $h$  est une fonction de [hachage](#) :

$$h : U \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}$$

HASH-INSERT( $T, x$ )

1     $T[h(x.\text{key})] = x$

HASH-DELETE( $T, x$ )

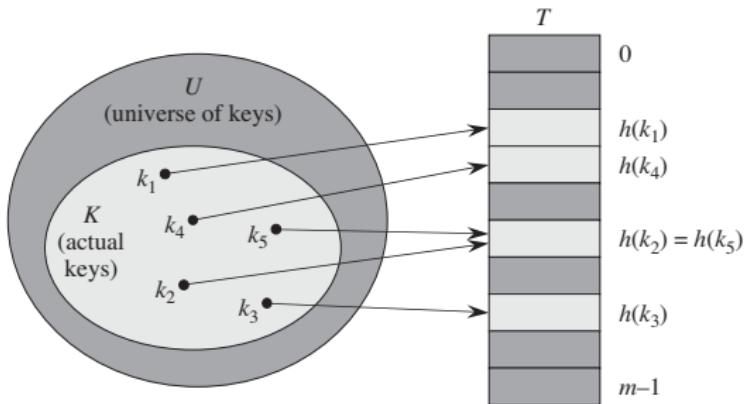
1     $T[h(x.\text{key})] = \text{NIL}$

HASH-SEARCH( $T, x$ )

1    **return**  $T[h(x.\text{key})]$

Est-ce que ces algorithmes sont corrects ?

# Table de hachage : collisions



- **Collision** : lorsque deux clés distinctes  $k_1$  et  $k_2$  sont telles que  $h(k_1) = h(k_2)$
- Cela se produit toujours lorsque le nombre de clés observées est plus grand que la taille du tableau  $T$  ( $|K| > m$ )
- Très probable, même lorsque la fonction de hachage répartit les clés uniformément  $\Rightarrow$  Paradoxe des anniversaires

# Paradoxe des anniversaires

- Hypothèse :
  - ▶ On néglige les années bissextiles
  - ▶ Les 365 jours présentent la même probabilité d'être un jour d'anniversaire
- Si  $p$  est la probabilité d'une collision d'anniversaires :

$$1 - p = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdots \frac{365 - (n - 1)}{365} = \frac{365!}{(365 - n)!365^n}$$

Exemples :

- ▶  $n = 23 \Rightarrow p > 0,5$
- ▶  $n = 57 \Rightarrow p > 0,99$
- ▶  $n = 70 \Rightarrow p > 0,999$

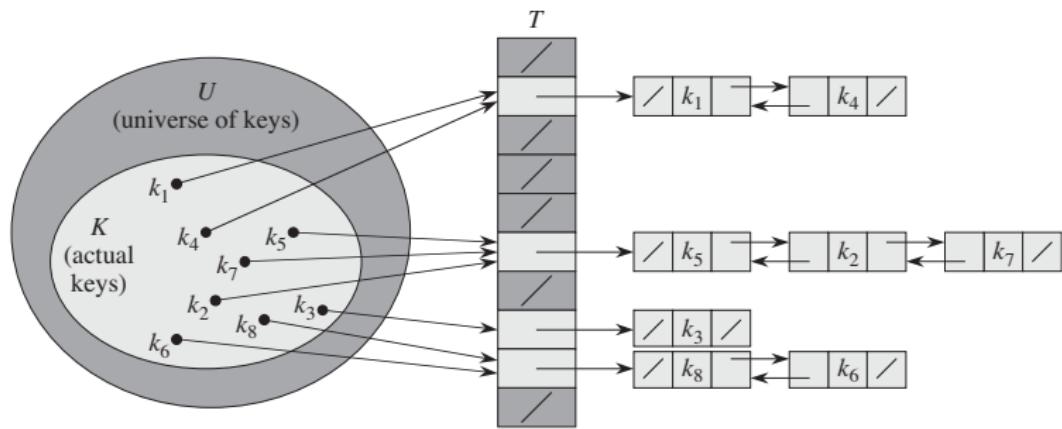
- Pour une table de hachage :
  - ▶  $m = 365$  et 57 clés  $\Rightarrow$  plus de 99% de chance de collision
  - ▶  $m = 1000000$  et 2500 clés  $\Rightarrow$  plus de 95% de chance de collision

# Collision

- Pour éviter les collisions :
  - ▶ on veille à utiliser une fonction de hachage qui disperse le plus possible les clés vers les différents compartiments.
  - ▶ on utilise un nombre de compartiments suffisamment grand
- Cependant, même dans ce cas, la probabilité de collision peut être non négligeable.
- Deux approches pour prendre en compte les collisions :
  - ▶ Le chaînage (adressage fermé)
  - ▶ Le sondage (adressage ouvert)

# Résolution des collisions par chaînage

Solution : mettre les éléments qui sont “hachés” vers la même position dans une liste liée (simple ou double)



# Implémentation des opérations

CHAINED-HASH-INSERT( $T, x$ )

1 LIST-INSERT( $T[h(x.\text{key})], x$ )

CHAINED-HASH-DELETE( $T, x$ )

1 LIST-DELETE( $T[h(x.\text{key})], x$ )

CHAINED-HASH-SEARCH( $T, k$ )

1 **return** LIST-SEARCH( $T[h(k)], k$ )

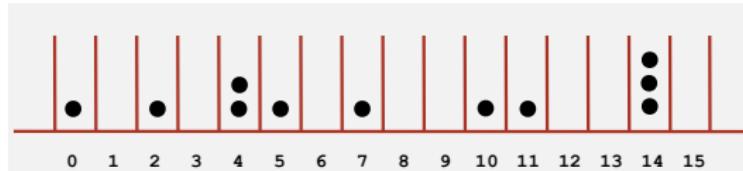
## ■ Complexité :

- ▶ Insertion :  $O(1)$
- ▶ Suppression :  $O(1)$  si liste doublement liée,  $O(n)$  pour une liste de taille  $n$  si liste simplement liée.
- ▶ Recherche :  $O(n)$  si liste de taille  $n$ .

## Analyse du cas moyen

- Recherche d'une clé  $k$  dans la table :
  - ▶ recherche positive : la clé  $k$  se trouve dans la table
  - ▶ recherche négative : la clé  $k$  n'est pas dans la table
- Le **facteur de charge** d'une table de hachage est donné par  $\alpha = \frac{n}{m}$  où :
  - ▶  $n$  est le nombre d'éléments dans la table
  - ▶  $m$  est la taille de la table (c'est-à-dire, le nombre de listes liées)
- **hachage uniforme simple** : Pour toute clé  $k \in U$ ,

$$Proba\{h(k) = i\} = \frac{1}{m}, \forall i \in \{0, \dots, m-1\}$$



# Analyse du cas moyen

- Hypothèses :
  - ▶  $h$  produit un hachage uniforme simple
  - ▶ le calcul de  $h(k)$  est  $\Theta(1)$
  - ▶ Insertion en début de liste
- $\Rightarrow$  complexités moyennes :
  - ▶ recherche négative :  $\Theta(1 + \alpha)$
  - ▶ recherche positive :  $\Theta(1 + \alpha)$
- Si  $n = O(m)$ , *(m croît au moins linéairement avec n),*
$$\alpha = \frac{O(m)}{m} = O(1)$$
- Toutes les opérations sont donc  $O(1)$  en moyenne

## Analyse du cas moyen : recherche négative

- La clé  $k$  ne se trouve pas dans la table
- Par la propriété de hachage uniforme simple, elle a la même probabilité d'être envoyée vers chaque position dans la table.
- Recherche négative requiert le parcours de la liste  $T[h(k)]$  complète
- Cette liste a une longueur moyenne  $E[n_{h(k)}] = \alpha$ .
- Le nombre d'éléments à examiner lors d'une recherche négative est donc  $\alpha$ .
- En ajoutant le temps de calcul de la fonction de hachage, on arrive à une complexité moyenne  $\Theta(1 + \alpha)$ .

## Analyse du cas moyen : recherche positive

- La clé  $k$  se trouve dans la table
- Supposons qu'elle ait été insérée à la  $i$ -ième étape (parmi  $n$ ).
  - ▶ Le nombre d'éléments à examiner pour trouver la clé est le nombre d'éléments insérés à la position  $h(k)$  après  $k$  plus 1 (la clé  $k$  elle-même).
  - ▶ En moyenne, sur les  $n - i$  insertions après  $k$ , il y en aura  $(n - i)/m$  qui correspondront à la position  $h(k)$ .
- $k$  ayant pu être insérée à n'importe quelle étape parmi  $n$  avec une probabilité  $1/n$  :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{n-i}{m}\right) = 1 + \frac{1}{nm} \left(\sum_{i=1}^n n - \sum_{i=1}^n i\right) = 1 + \frac{1}{nm} \left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2}\right) = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2n}$$

- En tenant compte du coût du hachage, la complexité en moyenne est donc  $\Theta(2 + \alpha/2 - \alpha/2n) = \Theta(1 + \alpha)$ .

# Plan

1. Introduction

2. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Arbres équilibrés AVL

3. Tables de hachage

Principe

Fonctions de hachage

Adressage ouvert

Comparaisons

# Fonctions de hachage

- Idéalement, la fonction de hachage
  - ▶ devrait être facile à calculer ( $O(1)$ )
  - ▶ devrait satisfaire l'hypothèse de hachage uniforme simple
- La deuxième propriété est très difficile à assurer en pratique :
  - ▶ La distribution des clés est généralement inconnue
  - ▶ Les clés peuvent ne pas être indépendantes
- En pratique, on utilise des heuristiques basées sur la nature attendue des clés
- Si toutes les clés sont connues, il existe des algorithmes pour construire une fonction de hachage parfaite, sans collision  
(Exemple : le logiciel gperf)

## Fonctions de hachage : codage préalable

- Les fonctions de hachage supposent que les clés sont des nombres naturels
- Si ce n'est pas le cas, il faut préalablement utiliser une fonction de codage
- Exemple : codage des chaînes de caractères :
  - ▶ On interprète la chaîne comme un entier dans une certaine base
  - ▶ Exemple pour "SDA" : valeurs ASCII (128 possibles) :

$$S = 83, D = 68, A = 65$$

- ▶ Interprété comme l'entier : *(Pourquoi pas 83+68+65?)*

$$(83 \cdot 128^2) + (68 \cdot 128^1) + (65 \cdot 128^0) = 1368641$$

- ▶ Calculé efficacement par la méthode de Horner :

$$((83 \cdot 128 + 68) \cdot 128 + 65)$$

## Méthode de division

La fonction de hachage calcule le reste de la division entière de la clé par la taille de la table

$$h(k) = k \bmod m.$$

Exemple :  $m = 20$  et  $k = 91 \Rightarrow h(k) = 11$ .

Avantages : simple et rapide (juste une opération de division)

Inconvénients : Le choix de  $m$  est très sensible et certaines valeurs doivent être évitées

Exemples :

- Si  $m = 2^p$  pour un entier  $p$ ,  $h(k)$  ne dépend que des  $p$  bits les moins significatifs de  $k$ 
  - ▶ Exemple : “SDA” mod 128 = “GAGA” mod 128 = 65
- Si  $k$  est une chaîne de caractères codée en base  $2^p$  et  $m = 2^p - 1$ , permuter la chaîne ne modifie pas la valeur de hachage
  - ▶ Exemple : “SDA” = 1368641, “DSA” = 1124801  
 $\Rightarrow 1368641 \bmod 127 = 1124801 \bmod 127 = 89$

## Méthode de division

- Si la fonction de codage produit des séquences périodiques, il vaut mieux choisir  $m$  premier
- En effet, si  $m$  est premier avec  $b$ , on a :

$$\{(a + b \cdot i) \bmod m | i = 0, 1, 2, \dots\} = \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$$

- Exemple : hachage de  $\{206, 211, 216, 221, \dots\}$ 
  - ▶  $m = 100$  : valeurs hachées possibles : 6, 11, ..., 96
  - ▶  $m = 101$  : toutes les entrées sont exploitées

⇒ Bonne valeur de  $m$  : un nombre premier pas trop près d'une puissance exacte de 2

# Méthode de multiplication

- Fonction de hachage :

$$h(k) = \lfloor m \cdot (kA \bmod 1) \rfloor$$

où

- ▶  $A$  est une constante telle que  $0 < A < 1$ .
- ▶  $kA \bmod 1 = kA - \lfloor kA \rfloor$  est la partie fractionnaire de  $kA$ .

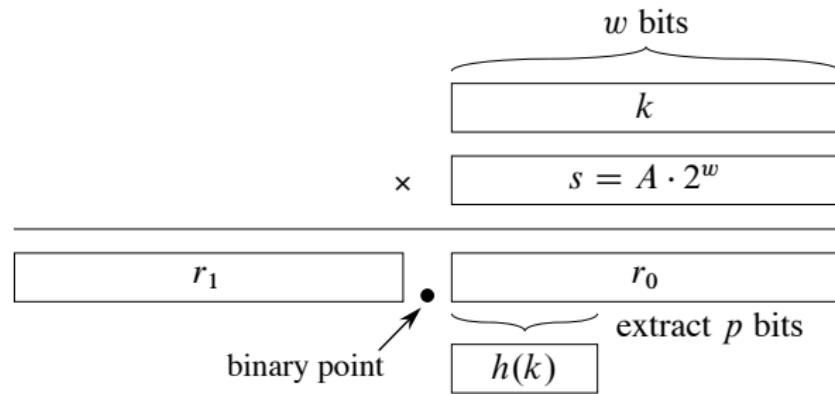
- Inconvénient : plus lente que la méthode de division
- Avantage : la valeur de  $m$  n'est plus critique
- La méthode marche mieux pour certaines valeurs de  $A$ . Par exemple :

$$A = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

# Méthode de multiplication : implémentation

Calcul ais\u00e9 si :

- $m = 2^p$  pour un entier  $p$
- Les mots sont cod\u00e9s en  $w$  bits et les cl\u00e9s  $k$  peuvent \u00eatre cod\u00e9es par un seul mot
- $A$  de la forme  $s/2^w$  pour  $0 < s < 2^w$



Exemple :  $m = 2^3$ ,  $w = 5$  ( $\Rightarrow 0 < s < 2^5$ ),  $s = 13$ ,  $A = 13/32 \Rightarrow h(21) = 4$

# Plan

1. Introduction

2. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Arbres équilibrés AVL

3. Tables de hachage

Principe

Fonctions de hachage

**Adressage ouvert**

Comparaisons

## Adressage ouvert : principe

- Alternative au chaînage pour gérer les collisions
- Tous les éléments sont stockés dans le tableau (pas de listes chaînées)
- Ne fonctionne que si  $\alpha \leq 1$
- Pour insérer une clé  $k$ , on **sonde** les cases systématiquement à partir de  $h(k)$  jusqu'à en trouver une vide.
- Différentes méthodes en fonction de la stratégie de sondage

## Adressage ouvert : stratégie de sondage

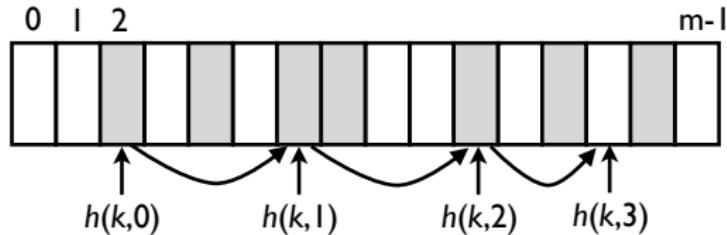
On définit une nouvelle fonction de hachage qui dépend de la clé et du numéro du sondage :

$$h : U \times \{0, 1, \dots, m - 1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, m - 1\}$$

et qui est telle que

$$\langle h(k, 0), h(k, 1), \dots, h(k, m - 1) \rangle$$

est une permutation de  $\langle 0, 1, \dots, m - 1 \rangle$ .



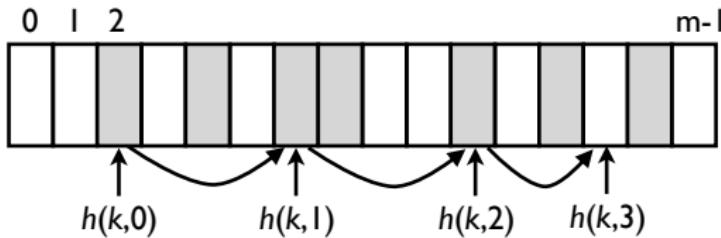
# Adressage ouvert : recherche et insertion

HASH-SEARCH( $T, k$ )

```
1   $i = 0$ 
2  repeat
3       $j = h(k, i)$ 
4      if  $T[j] == k$ 
5          return  $j$ 
6       $i = i + 1$ 
7  until  $T[j] == \text{NIL}$  or  $i == m$ 
8  return NIL
```

HASH-INSERT( $T, k$ )

```
1   $i = 0$ 
2  repeat
3       $j = h(k, i)$ 
4      if  $T[j] == \text{NIL}$ 
5           $T[j] = k$ 
6          return  $j$ 
7      else  $i = i + 1$ 
8  until  $i == m$ 
9  error "hash table overflow"
```



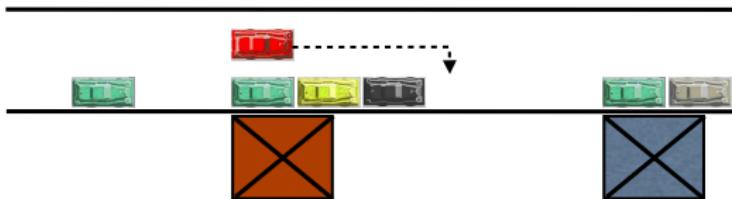
## Adressage ouvert : suppression

- La suppression est possible mais pas aisée
  - ▶ On évitera l'utilisation de l'adressage ouvert si on prévoit de nombreuses suppressions de clés dans le dictionnaire
- On ne peut pas naïvement mettre NIL dans la case contenant la clé  $k$  qu'on désire effacer
- Solution :
  - ▶ Utiliser une valeur spéciale DELETED au lieu de NIL pour signifier qu'on a effacé une valeur dans cette case
  - ▶ Lors d'une recherche : considérer un case contenant DELETED comme une case contenant une clé
  - ▶ Lors d'une insertion : considérer une case contenant DELETED comme une case vide.
- Inconvénient : le temps de recherche ne dépend maintenant plus du facteur de charge  $\alpha$  de la table

## Stratégies de sondage

- Soit  $h_k = \langle h(k, 0), h(k, 1), \dots, h(k, m - 1) \rangle$  la séquence de sondage correspondant à la clé  $k$ .
- Hachage uniforme :
  - ▶ chacune des  $m!$  permutations de  $\langle 0, 1, \dots, m - 1 \rangle$  a la même probabilité d'être la séquence de sondage d'une clé  $k$ .
  - ▶ Difficile à implémenter.
- En pratique, on se contente d'une garantie que la séquence de sondage soit une permutation de  $\langle 0, 1, \dots, m - 1 \rangle$ .
- Trois techniques pseudo-uniformes :
  - ▶ sondage linéaire
  - ▶ sondage quadratique
  - ▶ double hachage

## Sondage linéaire



$$h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod m,$$

où  $h'(k)$  est une fonction de hachage ordinaire à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, m - 1\}$ .

Propriétés :

- très facile à implémenter
- effet de grappe fort : création de longues suites de cellules occupées
  - ▶ La probabilité de remplir une cellule vide est  $\frac{i+1}{m}$  où  $i$  est le nombre de cellules pleines précédant la cellule vide
- pas très uniforme

## Sondage quadratique

$$h(k, i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod m,$$

où  $h'$  est une fonction de hachage ordinaire à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, m - 1\}$ ,  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes non nulles.

Propriétés :

- nécessité de bien choisir les constantes  $c_1$  et  $c_2$  (pour avoir une permutation de  $\langle 0, 1, \dots, m - 1 \rangle$ )
- effet de grappe plus faible mais tout de même existant :
  - ▶ Deux clés de même valeur de hachage suivront le même chemin

$$h(k, 0) = h(k', 0) \Rightarrow h(k, i) = h(k', i)$$

- meilleur que le sondage linéaire

## Double hachage

$$h(k, i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod m,$$

où  $h_1$  et  $h_2$  sont des fonctions de hachage ordinaires à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, m - 1\}$ .

Propriétés :

- difficile à implémenter à cause du choix de  $h_1$  et  $h_2$  ( $h_2(k)$  doit être premier avec  $m$  pour avoir une permutation de  $\langle 0, 1, \dots, m - 1 \rangle$ ).
- très proche du hachage uniforme
- bien meilleur que les sondages linéaire et quadratique

0	
1	79
2	
3	
4	69
5	98
6	
7	72
8	
9	14
10	
11	50
12	

Exemple :  $h_1(k) = k \bmod 13$ ,  $h_2(k) = 1 + (k \bmod 11)$ , insertion de la clé 14

## Adressage ouvert : élément d'analyse

Pour une table de hachage à adressage ouvert de taille  $m$  contenant  $n$  éléments ( $\alpha = n/m < 1$ ) et en supposant le hachage uniforme

- Le nombre moyen de sondages pour une recherche négative ou un ajout est borné par  $\frac{1}{1-\alpha}$
- Le nombre moyen de sondages pour une recherche positive est borné par  $\frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{1-\alpha}$

⇒ Si  $\alpha$  est constant ( $n = O(m)$ ), la recherche est  $O(1)$ .

- Si  $\alpha = 0.5$ , une recherche nécessite en moyenne 2 sondages ( $1/(1 - 0.5)$ ).
- Si  $\alpha = 0.9$ , une recherche nécessite en moyenne 10 sondages ( $1/(1 - 0.9)$ ).

# Adressage ouvert versus chaînage

- Chaînage :
  - ▶ Peut gérer un nombre illimité d'éléments et de collisions
  - ▶ Performances plus stables
  - ▶ Surcoût lié à la gestion et le stockage en mémoire des listes liées
- Adressage ouvert :
  - ▶ Rapide et peu gourmand en mémoire
  - ▶ Choix de la fonction de hachage plus difficile (pour éviter les grappes)
  - ▶ On ne peut pas avoir  $n > m$
  - ▶ Suppression problématique
- D'autres alternatives existent :
  - ▶ Two-probe hashing
  - ▶ Cuckoo hashing
  - ▶ ...

## Le rehashage

- Lorsque  $\alpha$  se rapproche de 1, les performances s'effondrent
- Solution : **rehashage** : création d'une table plus grande
  - ▶ allocation d'une nouvelle table
  - ▶ détermination d'une nouvelle fonction de hachage, tenant compte du nouveau  $m$
  - ▶ parcours des entrées de la table originale et insertion dans la nouvelle table
- Si la taille est doublée, le coût asymptotique constant des opérations est conservé (voir transp. 194).

## Universal hashing

- Les performances d'un table de hachage se dégrade fortement en cas de collisions multiples
- Connaissant la fonction de hachage, un adversaire mal intentionné pourrait s'amuser à entrer des clés créant des collisions. Exemples :
  - ▶ Création de fichiers avec des noms bien choisis dans le kernel Linux 2.4.20
  - ▶ 28/12/2011 : [http://www.securityweek.com/  
hash-table-collision-attacks-could-trigger-ddos-massive-scale](http://www.securityweek.com/hash-table-collision-attacks-could-trigger-ddos-massive-scale)
- C'est un exemple d'**attaque par déni de service**
- Parade : **hachage universel** : choisir la fonction de hachage aléatoirement à chaque création d'une nouvelle instance de la table
- Exemple :

$$h(k) = ((ak + b) \bmod p) \bmod m,$$

où  $p$  est un premier très grand et  $a$  et  $b$  deux entiers choisis aléatoirement

## Demo

- <http://groups.engin.umd.umich.edu/CIS/course.des/cis350/hashing/WEB/HashApplet.htm>

# Plan

1. Introduction

2. Arbres binaires de recherche

Arbre binaire de recherche

Arbres équilibrés AVL

3. Tables de hachage

Principe

Fonctions de hachage

Adressage ouvert

**Comparaisons**

# Dictionnaires : résumé

Implémentation	Pire cas			En moyenne		
	SEARCH	INSERT	DELETE	SEARCH	INSERT	DELETE
Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
Vecteur trié	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
ABR	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$
AVL	$\Theta(\log n)$					
Table de hachage	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$

- Cas moyen valable uniquement sous l'hypothèse de hachage uniforme
- Comment obtenir  $\Theta(\log n)$  dans le pire cas avec une table de hachage ?

## ABR/AVL versus table de hachage

Tables de hachage :

- Faciles à implémenter
- Seule solution pour des clés non ordonnées
- Accès et insertion très rapides en moyenne (pour des clés simples)
- Espace gaspillé lorsque  $\alpha$  est petit
- Pas de garantie au pire cas (performances "instables")

Arbres binaire de recherche (équilibrés) :

- Performance garantie dans tous les cas (stabilité)
- Taille de structure s'adapte à la taille des données
- Supportent des opérations supplémentaires lorsque les clés sont ordonnées (parcours en ordre, successeur, prédécesseur, etc.)
- Accès et insertion plus lente en moyenne

# Partie 6

## Résolution de problèmes

# Plan

1. Introduction
2. Approche par force brute
3. Diviser pour régner
4. Programmation dynamique
5. Algorithmes gloutons

# Méthodes de résolution de problèmes

Quelques approches génériques pour aborder la résolution d'un problème :

- **Approche par force brute** : résoudre directement le problème, à partir de sa définition ou par une recherche exhaustive
- Diviser pour régner : diviser le problème en sous-problèmes, les résoudre, fusionner les solutions pour obtenir une solution au problème original
- Programmation dynamique : obtenir la solution optimale à un problème en combinant des solutions optimales à des sous-problèmes similaires plus petits et se chevauchant
- Approche gloutonne : construire la solution incrémentalement, en optimisant de manière aveugle un critère local

## Approche par force brute (brute-force)

- Consiste à appliquer la solution la plus directe à un problème
- Généralement obtenue en appliquant à la lettre la définition du problème
- Exemple simple :
  - ▶ Rechercher un élément dans un tableau (trié ou non) en le parcourant linéairement
  - ▶ Calculer  $a^n$  en multipliant  $a$   $n$  fois avec lui-même
  - ▶ Implémentation récursive naïve du calcul des nombres de Fibonacci
  - ▶ ...
- Souvent pas très efficace en terme de temps de calcul mais facile à implémenter et fonctionnel

## Exemple : tri

Approches par force brute pour le tri :

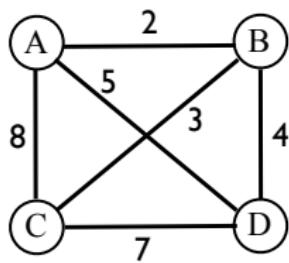
- Un tableau est trié (en ordre croissant) si tout élément est plus petit que l'élément à sa droite
- ⇒ tri à bulle : parcourir le tableau de gauche à droite en échangeant toutes les paires d'éléments consécutifs ne respectant pas cette définition
- Complexité :  $O(n^2)$
- ⇒ tri par sélection : trouver le minimum du tableau, l'échanger avec le premier élément, répéter pour trier le reste du tableau
- Complexité :  $\Theta(n^2)$

## Recherche exhaustive

- Une solution par force brute au problème de la recherche d'un élément possédant une propriété particulière
- Générer toutes les solutions possibles jusqu'à en obtenir une qui possède la propriété recherchée
- Exemple pour le tri :
  - ▶ Générer toutes les permutations du tableau de départ (une et une seule fois)
  - ▶ Vérifier si chaque tableau permué est trié. S'arrêter si c'est le cas.
  - ▶ Complexité :  $O(n! \cdot n)$
- Généralement utilisable seulement pour des problèmes de petite taille
- Dans la plupart des cas, il existe une meilleure solution
- Dans certains cas, c'est la seule solution possible

# Problème du voyageur de commerce

- Etant donné  $n$  villes et les distances entre ces villes
- Trouver le plus court chemin qui passe par toutes les villes exactement une fois avant de revenir à la ville de départ



Tour	Coût
A-B-C-D-A	17
A-B-D-C-A	21
A-C-B-D-A	20
A-C-D-B-A	21
A-D-B-C-A	20
A-D-C-B-A	17

- Recherche exhaustive :  $O(n!)$
- On n'a pas encore pu trouver un algorithme de complexité polynomiale (et il y a peu de chance qu'on y arrive)

## Force brute/recherche exhaustive

Avantages :

- Simple et d'application très large
- Un bon point de départ pour trouver de meilleurs algorithmes
- Parfois, faire mieux n'en vaut pas la peine

Inconvénients :

- Produit rarement des solutions efficaces
- Moins élégant et créatif que les autres techniques

Dans ce qui suit, on commencera la plupart du temps par fournir la solution par force brute des problèmes, qu'on cherchera ensuite à résoudre par d'autres techniques

# Méthodes de résolution de problèmes

Quelques approches génériques pour aborder la résolution d'un problème :

- **Approche par force brute** : résoudre directement le problème, à partir de sa définition ou par une recherche exhaustive
- **Diviser pour régner** : diviser le problème en sous-problèmes, les résoudre, fusionner les solutions pour obtenir une solution au problème original
- Programmation dynamique : obtenir la solution optimale à un problème en combinant des solutions optimales à des sous-problèmes similaires plus petits et se chevauchant
- **Approche gloutonne** : construire la solution incrémentalement, en optimisant de manière aveugle un critère local

# Plan

1. Introduction

2. Approche par force brute

3. Diviser pour régner

Exemple 1 : calcul du minimum/maximum d'un tableau

Exemple 2 : Recherche de pics

Exemple 3 : sous-séquence de somme maximale

4. Programmation dynamique

5. Algorithmes gloutons

## Approche diviser-pour-régner (*Divide and conquer*)

Principe général :

- Si le problème est trivial, on le résoud directement
- Sinon :
  1. Diviser le problème en sous-problèmes de taille inférieure (Diviser)
  2. Résoudre récursivement ces sous-problèmes (Régner)
  3. Fusionner les solutions aux sous-problèmes pour produire une solution au problème original

# Exemples déjà rencontrés

## ■ Merge sort :

1. Diviser : Couper le tableau en deux sous-tableaux de même taille
2. Régner : Trier récursivement les deux sous-tableaux
3. Fusionner : fusionner les deux sous-tableaux

Complexité :  $\Theta(n \log n)$  (force brute :  $\Theta(n^2)$ )

## ■ Quicksort :

1. Diviser : Partitionner le tableau selon le pivot
2. Régner : Trier récursivement les deux sous-tableaux
3. Fusionner : /

Complexité en moyenne :  $\Theta(n \log n)$  (force brute :  $\Theta(n^2)$ )

## ■ Recherche binaire (dichotomique) :

1. Diviser : Contrôler l'élément central du tableau
2. Régner : Chercher récursivement dans un des sous-tableaux
3. Fusionner : trivial

Complexité :  $O(\log n)$  (force brute :  $O(n)$ )

## Exemple 1 : Calcul du minimum/maximum d'un tableau

- Approche par force brute pour trouver le minimum ou le maximum d'un tableau

MIN( $A$ )

```
1  min = A[1]
2  for i = 2 to A.length
3      if min > A[i]
4          min = A[i]
5  return min
```

MAX( $A$ )

```
1  max = A[1]
2  for i = 2 to A.length
3      if max < A[i]
4          max = A[i]
5  return max
```

- Complexité :  $\Theta(n)$  ( $n - 1$  comparaisons)
- Peut-on faire mieux ?

## Exemple 1 : Calcul du minimum/maximum d'un tableau

- Approche par force brute pour trouver le minimum ou le maximum d'un tableau

MIN( $A$ )

```
1  min = A[1]
2  for i = 2 to A.length
3      if min > A[i]
4          min = A[i]
5  return min
```

MAX( $A$ )

```
1  max = A[1]
2  for i = 2 to A.length
3      if max < A[i]
4          max = A[i]
5  return max
```

- Complexité :  $\Theta(n)$  ( $n - 1$  comparaisons)
- Peut-on faire mieux ?
  - ▶ Non, pas en notation asymptotique (le problème est  $\Theta(n)$ )
  - ▶ Par contre, on peut diminuer le nombre total de comparaisons pour calculer à la fois le minimum et le maximum

# Calcul simultané du minimum et du maximum

- Approche diviser-pour-régner pour le calcul simultané du minimum et du maximum

```
MAX-MIN( $A, p, r$ )
1   if  $r - p \leq 1$ 
2       if  $A[p] < A[r]$ 
3           return ( $A[r], A[p]$ )
4       else return ( $A[p], A[r]$ )
5    $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$ 
6   ( $max1, min1$ ) = MAX-MIN( $A, p, q$ )
7   ( $max2, min2$ ) = MAX-MIN( $A, q + 1, r$ )
8   return (MAX( $max1, max2$ ), MIN( $min1, min2$ ))
```

Appel initial : MAX-MIN( $A, 1, A.length$ )

- Correct ? Oui (preuve par induction)
- Complexité ?

## Analyse de complexité

- En supposant que  $n$  est une puissance de 2, le nombre de comparaisons  $T(n)$  est donné par :

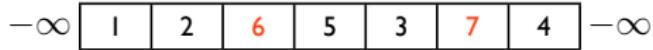
$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2 \\ 2T(n/2) + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui se résoud en :

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + 2 \\ &= 4T(n/4) + 4 + 2 \\ &= 8T(n/4) + 8 + 4 + 2 \\ &= 2^i T(n/2^i) + \sum_{j=1}^i 2^j \\ &= 2^{\log_2(n)-1} T(2) + \sum_{j=1}^{\log_2(n)-1} 2^j \\ &= 3/2n - 2 \end{aligned}$$

- C'est-à-dire 25% de comparaisons en moins que les méthodes séparées

## Exemple 2 : Recherche de pics



- Soit un tableau  $A[1..A.length]$ . On supposera que  $A[0] = A[A.length + 1] = -\infty$ .
- Définition :  $A[i]$  est un **pic** s'il n'est pas plus petit que ses voisins :

$$A[i - 1] \leq A[i] \geq A[i + 1]$$

$(A[i]$  est un maximum local)

- **But** : trouver un pic dans le tableau (n'importe lequel)
- Note : il en existe toujours un

## Approche par force brute

- Tester toutes les positions séquentiellement :

```
PEAK1D( $A$ )
1   for  $i = 1$  to  $A.length$ 
2       if  $A[i - 1] \leq A[i] \geq A[i + 1]$ 
3           return  $i$ 
```

- Complexité :  $\Theta(n)$  dans le pire acas

## Approche par force brute 2

- Le maximum global du tableau est un maximum local et donc un pic

```
PEAK1D(A)
1   m = A[0]
2   for i = 1 to A.length
3       if A[i] > A[m]
4           m = i
5   return m
```

- Complexité :  $\Theta(n)$  dans tous les cas

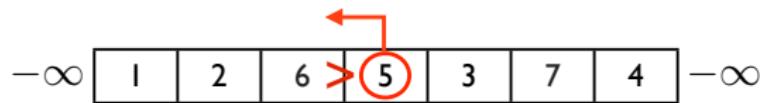
# Une meilleure idée

Approche diviser-pour-régner :

- Sonder un élément  $A[i]$  et ses voisins  $A[i - 1]$  et  $A[i + 1]$
- Si c'est un pic : renvoyer  $i$
- Sinon :
  - ▶ les valeurs doivent croître au moins d'un côté

$$A[i - 1] > A[i] \text{ ou } A[i] < A[i + 1]$$

- ▶ Si  $A[i - 1] > A[i]$ , on cherche le pic dans  $A[1 .. i - 1]$
- ▶ Si  $A[i + 1] > A[i]$ , on cherche le pic dans  $A[i + 1 .. A.length]$



- A quel position  $i$  faut-il sonder ?

# Algorithme

```
PEAK1D( $A, p, r$ )
1    $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$ 
2   if  $A[q - 1] \leq A[q] \geq A[q + 1]$ 
3       return  $q$ 
4   elseif  $A[q - 1] > A[q]$ 
5       return PEAK1D( $A, p, q - 1$ )
6   elseif  $A[q] < A[q + 1]$ 
7       return PEAK1D( $A, q + 1, r$ )
```

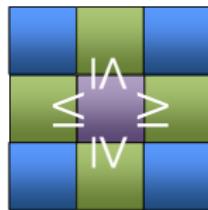
Appel initial : PEAK1D( $A, 1, A.length$ )

# Analyse

- Correction : oui
  - ▶ On doit prouver qu'il y aura un pic du côté choisi
  - ▶ Preuve par l'absurde :
    - ▶ Supposons que  $A[q + 1] > A[q]$  et qu'il n'y ait pas de pic dans  $A[q + 1 \dots r]$
    - ▶ On doit avoir  $A[q + 2] > A[q + 1]$  (sinon  $A[q + 1]$  serait un pic)
    - ▶ On doit avoir  $A[q + 3] > A[q + 2]$  (sinon  $A[q + 2]$  serait un pic)
    - ▶ ...
    - ▶ On doit avoir  $A[r] > A[r - 1]$  (sinon  $A[r - 1]$  serait un pic)
    - ▶ Comme  $A[r] > A[r + 1] = -\infty$ ,  $A[r]$  est un pic, ce qui contredit l'hypothèse
- Complexité :
  - ▶ Dans le pire cas, on a  $T(n) = T(n/2) + c_1$  et  $T(1) = c_2$  (idem recherche binaire)
  - ▶  $\Rightarrow T(n) = O(\log n)$

## Extension à un tableau 2D

- Soit une matrice  $n \times n$  de nombres
- Trouver un élément plus grand ou égal à ses 4 voisins (max)



9	3	5	2	4	9	8
7	2	5	1	4	0	3
9	8	9	3	2	4	8
7	6	3	1	3	2	3
9	0	6	0	4	6	4
8	9	8	0	5	3	0
2	1	2	1	1	1	1

(Demaine & Leiserson)

- Approche par force brute :  $O(n^2)$
- Recherche du maximum :  $\Theta(n^2)$

# Approche diviser-pour-régner

- Chercher le maximum global dans la colonne **centrale**
- Si c'est un pic, le renvoyer
- Sinon appeler la fonction récursivement sur les colonnes à gauche (resp. droite) si le voisin à gauche (resp. droite) est plus grand

9	3	5	2	4	9	8
7	2	5	1	4	0	3
9	8	9	3	2	4	8
7	6	3	1	3	2	3
9	0	6	0	4	6	4
8	9	8	0	5	3	0
2	1	2	1	1	1	1
9	9	9	3	5	9	8

(Demaine & Leiserson)

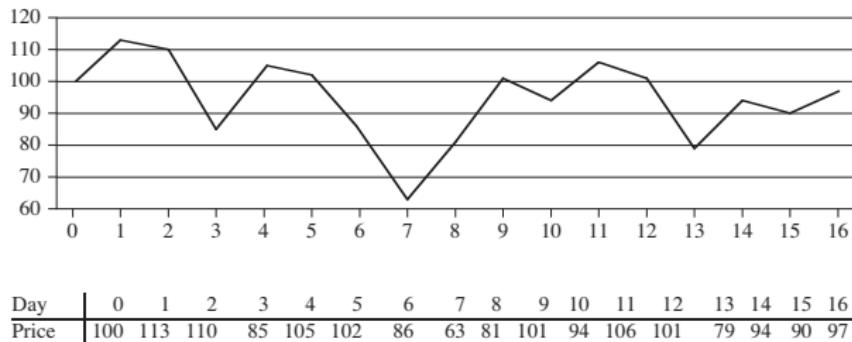
## Analyse : correction

- On doit prouver qu'il y a bien un pic du côté choisi
- Preuve par l'absurde :
  - ▶ Supposons qu'il n'y ait pas de pic
  - ▶ Soient  $A[i, j]$  le maximum de la colonne centrale et  $A[i, k]$  le voisin le plus grand ( $k = j - 1$  ou  $k = j + 1$ )
  - ▶  $A[i, k]$  doit avoir un voisin  $A[p_1, q_1]$  avec une valeur plus élevée (sinon, ce serait un pic)
  - ▶  $A[p_1, q_1]$  doit avoir un voisin  $A[p_2, q_2]$  avec une valeur plus élevée (sinon, ce serait un pic)
  - ▶ ...
  - ▶ Le voisin doit toujours rester du même côté de la colonne centrale (puisque  $A[i, k] > A[i, j]$  et  $A[i, j]$  est le maximum de la colonne  $j$ )
  - ▶ A un certain point, on va manquer de points
  - ▶ Il doit donc y avoir un pic

## Analyse : complexité

- $\Theta(n)$  pour trouver le maximum d'une colonne
- $O(\log n)$  itérations
- $O(n \log n)$  au total
- Peut-on faire mieux ? Oui, il est possible de proposer un algorithme en  $O(n)$  (pas vu dans ce cours)

## Exemple 3 : Achat/vente d'actions



- Soit le prix d'une action au cours de  $n$  jours consécutifs (prix à la fermeture)
- On aimerait déterminer rétrospectivement :
  - ▶ à quel moment, on aurait dû acheter et
  - ▶ à quel moment, on aurait dû vendrede manière à maximiser notre gain

## Exemple 3 : Achat/vente d'actions

Première stratégie :

- Acheter au prix minimum, vendre au prix maximum

## Exemple 3 : Achat/vente d'actions

Première stratégie :

- Acheter au prix minimum, vendre au prix maximum
- Pas correct : Le prix maximum ne suit pas nécessairement le prix minimum

## Exemple 3 : Achat/vente d'actions

Première stratégie :

- Acheter au prix minimum, vendre au prix maximum
- Pas correct : Le prix maximum ne suit pas nécessairement le prix minimum

Deuxième stratégie :

- Soit acheter au prix minimum et vendre au prix le plus élevé qui suit
- Soit vendre au prix maximum et acheter au prix le plus bas qui précède

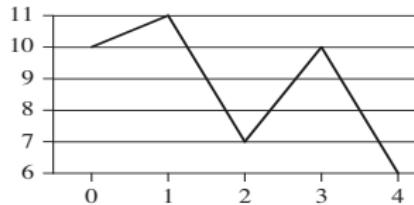
## Exemple 3 : Achat/vente d'actions

Première stratégie :

- Acheter au prix minimum, vendre au prix maximum
- Pas correct : Le prix maximum ne suit pas nécessairement le prix minimum

Deuxième stratégie :

- Soit acheter au prix minimum et vendre au prix le plus élevé qui suit
- Soit vendre au prix maximum et acheter au prix le plus bas qui précède
- Pas correct :



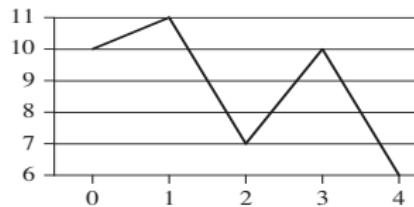
## Exemple 3 : Achat/vente d'actions

Première stratégie :

- Acheter au prix minimum, vendre au prix maximum
- Pas correct : Le prix maximum ne suit pas nécessairement le prix minimum

Deuxième stratégie :

- Soit acheter au prix minimum et vendre au prix le plus élevé qui suit
- Soit vendre au prix maximum et acheter au prix le plus bas qui précède
- Pas correct :



Troisième stratégie :

- Tester toutes les paires (force brute)
- Correct ? Complexité ?

## Achat/vente d'actions : transformation

Day	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Price	100	113	110	85	105	102	86	63	81	101	94	106	101	79	94	90	97
Change		13	-3	-25	20	-3	-16	-23	18	20	-7	12	-5	-22	15	-4	7

### ■ Transformation du problème :

- ▶ Calculer le tableau  $A[i] = (\text{prix du jour } i) - (\text{prix du jour } i-1)$  (de taille  $A.length = n$  en supposant qu'on démarre avec un prix au jour 0)
- ▶ Déterminer la sous-séquence non vide contiguë de somme maximale dans  $A$
- ▶ Soit  $A[i..j]$  cette sous-séquence. Il aurait fallu acheter juste avant le jour  $i$  (juste après le jour  $i-1$ ) et vendre juste après le jour  $j$ .

■ Exemple dans le tableau ci-dessus :  $A[8..11]$  est la sous-séquence maximale de somme 43  $\Rightarrow$  acheter juste avant le jour 8 et vendre juste après le jour 11.

■ Si on peut trouver la sous-séquence maximale dans un tableau, on aura une solution à notre problème d'achat/vente d'actions

# Approche par force brute

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	13	-3	-25	20	-3	-16	-23	18	20	-7	12	-5	-22	15	-4	7

maximum subarray

- Implémentation naïve :
  - ▶ On génère tous les sous-tableaux
  - ▶ On calcule la somme des éléments de chaque sous-tableau
  - ▶ On renvoie les bornes du (d'un) sous-tableau de somme maximale
- Complexité :  $\Theta(n^2)$  sous-tableaux et  $O(n)$  pour le calcul de la somme d'un sous-tableau  $\Rightarrow O(n^3)$
- On peut l'implémenter en  $\Theta(n^2)$

# Approche par force brute

```
MAX-SUBARRAY-BRUTE-FORCE( $A$ )
1    $n = A.length$ 
2    $max-so-far = -\infty$ 
3   for  $l = 1$  to  $n$ 
4        $sum = 0$ 
5       for  $h = l$  to  $n$ 
6            $sum = sum + A[h]$ 
7           if  $sum > max-so-far$ 
8                $max-so-far = sum$ 
9                $low = l$ 
10               $high = h$ 
11  return ( $low, high$ )
```

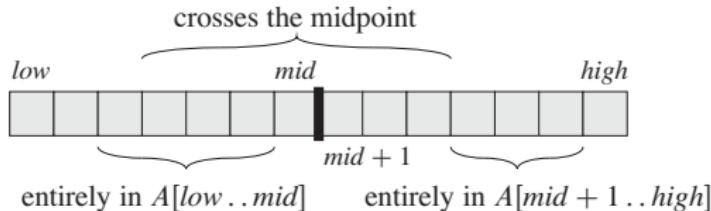
Complexité :  $\Theta(n^2)$

Peut-on faire mieux ?

# Approche diviser-pour-régner

- Nouveau problème :
  - ▶ trouver un sous-tableau maximal dans  $A[low \dots high]$
  - ▶ fonction  $\text{MAXIMUM-SUBARRAY}(A, low, high)$
- Diviser :
  - ▶ diviser le sous-tableau en deux sous-tableaux de tailles aussi proches que possible
  - ▶ choisir  $mid = \lfloor (low + high)/2 \rfloor$
- Régner :
  - ▶ trouver récursivement les sous-tableaux maximaux dans ces deux sous-tableaux
  - ▶ appeler  $\text{MAXIMUM-SUBARRAY}(A, low, mid)$  et  $\text{MAXIMUM-SUBARRAY}(A, mid + 1, high)$
- Fusionner : ?

# Approche diviser-pour-régner

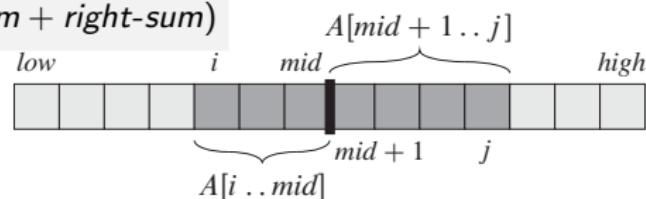


- Fusionner :
  - ▶ Rechercher un sous-tableau maximum qui traverse la jonction
  - ▶ Choisir la meilleure solution parmi les 3
- MAX-CROSSING-SUBARRAY( $A, low, mid, high$ )
  - ▶ Force brute :  $\Theta(n^2)$  (car  $n/2$  choix pour l'extrême gauche,  $n/2$  choix pour l'extrême droite)
  - ▶ Meilleure solution : on recherche indépendamment les extrémités gauche et droite

# MAX-CROSSING-SUBARRAY

MAX-CROSSING-SUBARRAY( $A, low, mid, high$ )

```
1  left-sum = -∞
2  sum = 0
3  for i = mid downto low
4      sum = sum + A[i]
5      if sum > left-sum
6          left-sum = sum
7          max-left = i
8  right-sum = -∞
9  sum = 0
10 for j = mid + 1 to high
11     sum = sum + A[j]
12     if sum > right-sum
13         right-sum = sum
14         max-right = j
15 return (max-left, max-right, left-sum + right-sum)
```



Complexité :  $\Theta(n)$

# MAX-SUBARRAY

MAX-SUBARRAY( $A, low, high$ )

```
1  if  $high == low$ 
2      return ( $low, high, A[low]$ )
3  else  $mid = \lfloor (low + high)/2 \rfloor$ 
4      ( $left-low, left-high, left-sum$ ) = MAX-SUBARRAY( $A, low, mid$ )
5      ( $right-low, right-high, right-sum$ ) = MAX-SUBARRAY( $A, mid + 1, high$ )
6      ( $cross-low, cross-high, cross-sum$ ) =
7          MAX-CROSSING-SUBARRAY( $A, low, mid, high$ )
8      if  $left-sum \geq right-sum$  and  $left-sum \geq cross-sum$ 
9          return ( $left-low, left-high, left-sum$ )
10     elseif  $right-sum \geq left-sum$  and  $right-sum \geq cross-sum$ 
11         return ( $right-low, right-high, right-sum$ )
12     else return ( $cross-low, cross-high, cross-sum$ )
```

# Analyse

- Si on suppose que  $n$  est un multiple de 2, le nombre d'opérations  $T(n)$  est donné par :

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{si } n = 1 \\ 2T(n/2) + c_2n & \text{sinon} \end{cases}$$

- Même complexité que le tri par fusion  $\Rightarrow \Theta(n \log n)$
- Peut-on faire mieux ? On verra plus loin que oui

# Diviser pour régner : résumé

- Mène à des algorithmes très efficaces
- Pas toujours applicable mais quand même très utile
- Applications :
  - ▶ Tris optimaux
  - ▶ Recherche binaire
  - ▶ Problème de sélection
  - ▶ Trouver la paire de points les plus proches
  - ▶ Recherche de l'enveloppe convexe (convex-hull)
  - ▶ Multiplication de matrice (méthode de Strassens)
  - ▶ ...

# Méthodes de résolution de problèmes

Quelques approches génériques pour aborder la résolution d'un problème :

- **Approche par force brute** : résoudre directement le problème, à partir de sa définition ou par une recherche exhaustive
- **Diviser pour régner** : diviser le problème en sous-problèmes, les résoudre, fusionner les solutions pour obtenir une solution au problème original
- **Programmation dynamique** : obtenir la solution optimale à un problème en combinant des solutions optimales à des sous-problèmes similaires plus petits et se chevauchant
- **Approche gloutonne** : construire la solution incrémentalement, en optimisant de manière aveugle un critère local

# Plan

1. Introduction
2. Approche par force brute
3. Diviser pour régner
4. Programmation dynamique
  - Exemple 1 : découpage de tiges d'acier
  - Exemple 2 : Fibonacci
  - Exemple 3 : sous-séquence de somme maximale
  - Exemple 4 : plus longue sous-séquence commune
  - Exemple 5 : le problème 0-1 du sac à dos
5. Algorithmes gloutons

## Exemple 1 : découpage de tiges d'acier



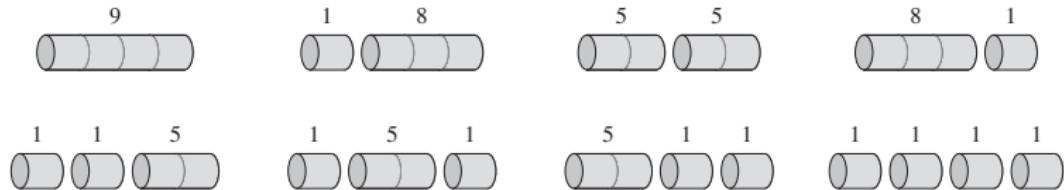
- Soit une tige d'acier qu'on découpe pour la vendre morceau par morceau
- La découpe ne peut se faire que par nombre entier de centimètres
- Le prix de vente d'une tige dépend (non linéairement) de sa longueur
- On veut déterminer le revenu maximum qu'on peut attendre de la vente d'une tige de  $n$  centimètres
- Problème algorithmique :
  - ▶ Entrée : une longueur  $n > 0$  et une table de prix  $p_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$
  - ▶ Sortie : le revenu maximum qu'on peut obtenir pour des tiges de longueur  $n$

## Illustration

- Soit la table de prix :

Longueur $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix $p_i$	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

- Découpages possibles d'une tige de longueur  $n = 4$



- Meilleur revenu : découpage en 2 tiges de 2 centimètres, revenu de 10

## Approche par force brute

- Enumérer toutes les découpes, calculer leur revenu, déterminer le revenu maximum
- Complexité : exponentielle en  $n$  :
  - ▶ Il y a  $2^{n-1}$  manières de découper une tige de longueur  $n$  (on peut couper ou non après chacun des  $n - 1$  premiers centimètres)
  - ▶ Plusieurs découpes sont équivalentes (1+1+2 et 1+2+1 par exemple) mais même en prenant cela en compte, le nombre de découpes reste exponentiel
- Infaisable pour  $n$  un peu grand

## Idée

- Soit  $r_i$  le revenu maximum pour une tige de longueur  $i$
- Peut-on formuler  $r_n$  de manière récursive ?
- Déterminons  $r_i$  pour notre exemple :

$i$	$r_i$	solution optimale
1	1	1 (pas de découpe)
2	5	2 (pas de découpe)
3	8	3 (pas de découpe)
4	10	2+2
5	13	2+3
6	17	6 (pas de découpe)
7	18	1+6 ou 2+2+3
8	22	2+6 ...

## Formulation récursive de $r_n$ : version naïve

- $r_n$  peut être calculé comme le maximum de :
  - ▶  $p_n$  : le prix sans découpe
  - ▶  $r_1 + r_{n-1}$  : le revenu max pour une tige de 1 et une tige de  $n - 1$
  - ▶  $r_2 + r_{n-2}$  : le revenu max pour une tige de 2 et une tige de  $n - 2$
  - ▶ ...
  - ▶  $r_{n-1} + r_1$ .
- C'est-à-dire

$$r_n = \max(p_n, r_1 + r_{n-1}, r_2 + r_{n-2}, \dots, r_{n-1} + r_1)$$

## Formulation récursive de $r_n$ : version simplifiée

- Toute solution optimale a un découpe la plus à gauche
- On peut calculer  $r_n$  en considérant toutes les tailles pour la première découpe et en combinant avec le découpage optimal pour la partie à droite
- Pour chaque cas, on n'a donc qu'à résoudre un seul sous-problème (au lieu de deux), celui du découpage de la partie droite
- En supposant  $r_0 = 0$ , on obtient ainsi :

$$r_n = \max_{1 \leq i \leq n} (p_i + r_{n-i})$$

# Implémentation récursive directe

- La formule récursive peut être implémentée directement

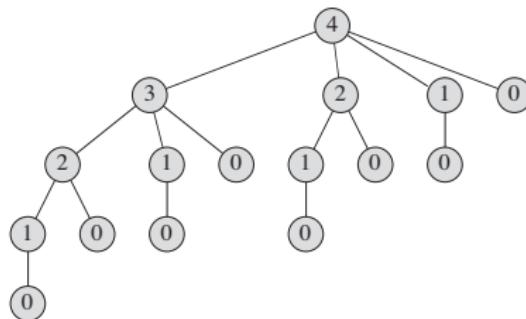
```
CUT-ROD( $p, n$ )
1  if  $n == 0$ 
2      return 0
3   $q = -\infty$ 
4  for  $i = 1$  to  $n$ 
5       $q = \max(q, p[i] + \text{CUT-ROD}(p, n - i))$ 
6  return  $q$ 
```

( $p$  est un tableau de taille  $n$  contenant les prix des tiges de tailles 1 à  $n$ )

- Complexité ?

## Implémentation récursive directe : analyse

- L'algorithme est extrêmement inefficace à cause des appels récursifs redondants
- Exemple : arbre des appels récursifs pour le calcul de  $r_4$



- En général, le nombre de nœuds  $T(n)$  de l'arbre est  $2^n$ .  
Preuve par induction :

- ▶ Cas de base :  $T(0) = 1$
- ▶ Cas inductif :

$$T(n) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} T(j) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = 1 + 2^n - 1 = 2^n$$

- Complexité de l'algorithme est exponentielle en  $n$

## Solution par programmation dynamique

- Solution : plutôt que de résoudre les mêmes sous-problèmes plusieurs fois, s'arranger pour ne les résoudre chacun qu'une seule fois
- Comment ? En sauvegardant les solutions dans une table et en se référant à la table à chaque demande de résolution d'un sous-problème déjà rencontré
- On échange du temps de calcul contre de la mémoire
- Permet de transformer une solution en temps exponentiel en une solution en temps polynomial
- Deux implémentations possibles :
  - ▶ descendante (top-down) avec [mémoization](#)
  - ▶ ascendante (bottom-up)

# Approche descendante avec mémoization

```
MEMOIZED-CUT-ROD( $p, n$ )
```

- 1 Let  $r[0..n]$  be a new array
- 2 **for**  $i = 1$  **to**  $n$
- 3      $r[i] = -\infty$
- 4 **return** MEMOIZED-CUT-ROD-AUX( $p, n, r$ )

```
MEMOIZED-CUT-ROD-AUX( $p, n, r$ )
```

- 1 **if**  $r[n] \geq 0$
- 2     **return**  $r[n]$
- 3 **if**  $n == 0$
- 4      $q = 0$
- 5 **else**  $q = -\infty$
- 6     **for**  $i = 1$  **to**  $n$
- 7          $q = \max(q, p[i] + \text{MEMOIZED-CUT-ROD-AUX}(p, n - i, r))$
- 8      $r[n] = q$
- 9 **return**  $q$

(Attention : suppose que le tableau est passé par pointeur)

# Approche ascendante

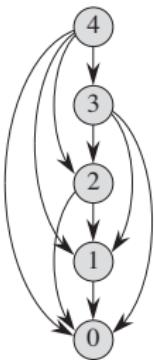
Principe : résoudre les sous-problèmes par taille en commençant d'abord par les plus petits

BOTTOM-UP-CUT-ROD( $p, n$ )

```
1 Let  $r[0..n]$  be a new array
2  $r[0] = 0$ 
3 for  $j = 1$  to  $n$ 
4      $q = -\infty$ 
5     for  $i = 1$  to  $j$ 
6          $q = \max(q, p[i] + r[j - i])$ 
7          $r[j] = q$ 
8 return  $r[n]$ 
```

# Programmation dynamique : analyse

- Solution ascendante est clairement  $\Theta(n^2)$  (deux boucles imbriquées)
- Solution descendante est également  $\Theta(n^2)$ 
  - ▶ Chaque sous-problème est résolu une et une seule fois
  - ▶ La résolution d'un sous-problème passe par une boucle à  $n$  itérations
- Graphes des sous-problèmes :



(une flèche de  $x$  à  $y$  indique que la résolution de  $x$  dépend de la résolution de  $y$ )

## Reconstruction de la solution

- Fonction BOTTOM-UP-CUT-ROD calcule le revenu maximum mais ne donne pas directement la découpe correspondant à ce revenu
- On peut étendre l'approche ascendante pour enregistrer également la solution dans une autre table

EXTENDED-BOTTOM-UP-CUT-ROD( $p, n$ )

```
1 Let  $r[0..n]$  and  $s[1..n]$  be new arrays
2  $r[0] = 0$ 
3 for  $j = 1$  to  $n$ 
4      $q = -\infty$ 
5     for  $i = 1$  to  $j$ 
6         if  $q < p[i] + r[j-i]$ 
7              $q = p[i] + r[j-i]$ 
8              $s[j] = i$ 
9      $r[j] = q$ 
10    return  $r$  and  $s$ 
```

- $s[j]$  contient la coupure la plus à gauche d'une solution optimale au problème de taille  $j$

# Reconstruction de la solution

- Pour afficher la solution, on doit “remonter” dans  $s$

```
PRINT-CUT-ROD-SOLUTION( $p, n$ )
```

```
1  ( $r, s$ ) = EXTENDED-BOTTOM-UP-CUT-ROD( $p, n$ )
2  while  $n > 0$ 
3    PRINT  $s[n]$ 
4     $n = n - s[n]$ 
```

- Exemple :

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p[i]$	0	1	5	8	9	10	17	17	20
$r[i]$	0	1	5	8	10	13	17	18	22
$s[i]$	0	1	2	3	2	2	6	1	2

```
PRINT-CUT-ROD-SOLUTION( $p, 8$ )  $\Rightarrow$  "2 6"
```

# Programmation dynamique : généralités

- La programmation dynamique s'applique aux problèmes d'**optimisation** qui peuvent se décomposer en sous-problèmes de même nature, et qui possèdent les deux propriétés suivantes :
  - ▶ **Sous-structure optimale** : on peut calculer la solution d'un problème de taille  $n$  à partir de la solution de sous-problèmes de taille inférieure
  - ▶ **Chevauchement des sous-problèmes** : Certains sous-problèmes distincts partagent une partie de leurs sous-problèmes
- Implémentation directe récursive donne une solution de complexité exponentielle
- Sauvegarde des solutions aux sous-problèmes donne une complexité linéaire dans le nombre d'arcs et de sommets du graphe des sous-problèmes

## Exemple 2 : Fibonacci

- La fonction FIBONACCI-ITER vue au début du cours est un exemple de programmation dynamique (ascendante)

```
FIBONACCI-ITER( $n$ )
```

```
1  if  $n \leq 1$ 
2      return  $n$ 
3  else
4      pprev = 0
5      prev = 1
6      for  $i = 2$  to  $n$ 
7           $f = prev + pprev$ 
8          pprev = prev
9          prev =  $f$ 
10     return  $f$ 
```



- On peut se contenter de ne stocker que les deux dernières valeurs
- Complexité  $\Theta(n)$  (graphe contient  $n + 1$  nœuds et  $2n - 2$  arcs)

(Exercice : écrivez la version descendante avec mémoization)

## Interlude : Fibonacci en $\Theta(\log n)$

- Peut-on faire mieux que  $\Theta(n)$  pour Fibonacci ? Oui !
- Propriété :

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

- Preuve par induction :
  - ▶ Cas de base ( $n = 1$ ) : ok puisque  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ , et  $F_2 = 1$
  - ▶ Cas inductif ( $n \geq 2$ ) :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n\end{aligned}$$

□

## Interlude : Fibonacci en $\Theta(\log n)$

- Approche par force brute pour le calcul de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$  :  $\Theta(n)$
- Idée : utiliser le diviser-pour-régner pour le calcul de  $a^n$

$$a^n = \begin{cases} a^{n/2} \cdot a^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ a^{(n-1)/2} \cdot a^{(n-1)/2} \cdot a & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

- Complexité :  $\Theta(\log n)$  (comme la recherche binaire)

(Exercice : implémenter l'algorithme)

## Exemple 3 : sous-séquence maximale

MAX-SUBARRAY-LINEAR( $A$ )

```
1 Let  $m[1..n]$  be a new array
2  $\text{max-so-far} = A[1]$ 
3  $m[1] = A[1]$ 
4 for  $i = 2$  to  $A.length$ 
5     if  $m[i - 1] > 0$ 
6          $m[i] = m[i - 1] + A[i]$ 
7     else  $m[i] = A[i]$ 
8     if  $m[i] > \text{max-so-far}$ 
9          $\text{max-so-far} = m[i]$ 
10 return  $\text{max-so-far}$ 
```

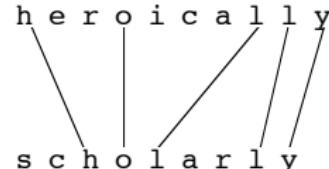
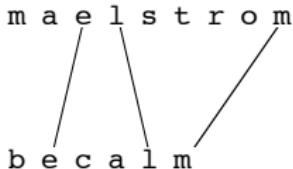
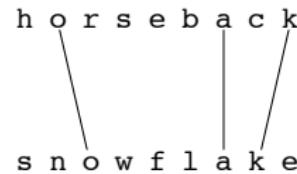
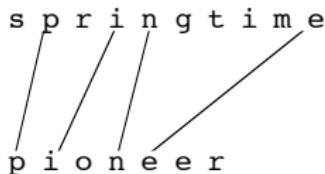


- Complexité :  $\Theta(n)$  (diviser pour régner :  $\Theta(n \log n)$ )
- $m[i]$  est la somme de la sous-séquence maximale qui se termine en  $i$
- L'algorithme calcule  $m[i]$  à partir de  $m[i - 1]$
- Forme de programmation dynamique ascendante (très simple)

(*Exercice : ajouter le calcul des bornes d'un sous-tableau solution, remplacer le tableau  $m$  par une seule variable*)

## Exemple 4 : plus longue sous-séquence commune

- Définition : Une **sous-séquence** (non contiguë) d'une séquence  $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$  est une séquence  $\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} \rangle$ , où  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ .
- Problème : Etant donné 2 séquences,  $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$  et  $Y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ , trouver une plus grande sous-séquence commune aux deux séquences
- Exemples :



## Solution par force brute

- On énumère toutes les sous-séquences de la séquence la plus courte
- Pour chacune d'elles, on vérifie si c'est une sous-séquence de la séquence la plus longue
- Complexité :  $\Theta(n \cdot 2^m)$  (en supposant que  $n < m$ )
  - ▶  $2^m$  sous-séquences possibles dans une séquence de longueur  $m$
  - ▶ Vérification de l'occurrence d'une sous-séquence dans une séquence de longueur  $n$  en  $\Theta(n)$

*(Exercice : implémenter la vérification)*

# Solution par programmation dynamique

Propriété de sous-structure :

- Soit  $X_i = \langle x_1, \dots, x_i \rangle$  un préfixe de  $X$  et  $Y_i = \langle y_1, \dots, y_i \rangle$  un préfixe de  $Y$
- Soit  $Z = \langle z_1, \dots, z_k \rangle$  une plus longue sous-séquence commune de  $X$  et  $Y$
- Les propriétés suivantes sont vérifiées :
  - ▶ Si  $x_m = y_n$ , alors  $z_k = x_m = y_n$  et  $Z_{k-1}$  est une plus longue sous-séquence commune de  $X_{m-1}$  et  $Y_{n-1}$ .
  - ▶ Si  $x_m \neq y_n$ , alors  $z_k \neq x_m \Rightarrow Z$  est une plus longue sous-séquence commune à  $X_{m-1}$  et  $Y$
  - ▶ Si  $x_m \neq y_n$ , alors  $z_k \neq y_n \Rightarrow Z$  est une plus longue sous-séquence commune à  $X$  et  $Y_{n-1}$

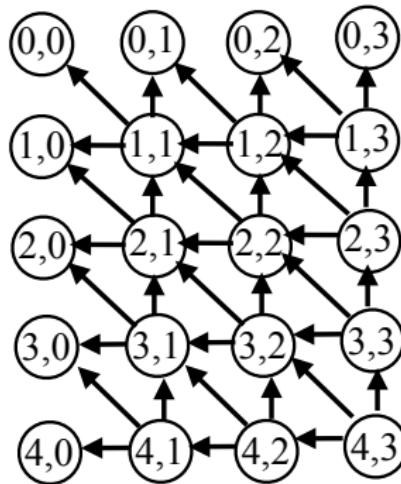
⇒ Une plus longue sous-séquence commune de deux séquences a pour préfixe une plus longue sous-séquence des préfixes des deux séquences.

## Solution par programmation dynamique

- Soit  $c[i, j]$  la longueur d'une plus longue sous-séquence de  $X_i$  et  $Y_j$ .
- Formulation récursive :

$$c[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \text{ ou } j = 0, \\ c[i - 1, j - 1] + 1 & \text{si } i, j > 0 \text{ et } x_i = y_j, \\ \max(c[i - 1, j], c[i, j - 1]) & \text{si } i, j > 0 \text{ et } x_i \neq y_j, \end{cases}$$

- Graphe des sous-problèmes :



## Implémentation (ascendante)

```
LCS-LENGTH( $X, Y, m, n$ )
1  Let  $c[0..m, 0..n]$  be a new table
2  for  $i = 1$  to  $m$ 
3       $c[i,0] = 0$ 
4  for  $j = 0$  to  $n$ 
5       $c[0,j] = 0$ 
6  for  $i = 1$  to  $m$ 
7      for  $j = 1$  to  $n$ 
8          if  $x_i == y_j$ 
9               $c[i,j] = c[i - 1, j - 1] + 1$ 
10         elseif  $c[i - 1, j] \geq c[i, j - 1]$ 
11              $c[i,j] = c[i - 1, j]$ 
12         else  $c[i,j] = c[i, j - 1]$ 
13 return  $c$ 
```

Complexité :  $\Theta(m \cdot n)$

# Illustration

*amputation versus spanking*

	a	m	p	u	t	a	t	i	o	n
s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
n	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
k	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
i	0	1	1	1	1	1	2	2	3	3
n	0	1	1	1	1	1	2	2	3	4
g	0	1	1	1	1	1	2	2	3	4
			p			a		i		n

# Trouver la plus longue sous-séquence

LCS-LENGTH( $X, Y, m, n$ )

```
1 Let  $c[0..m, 0..n]$  be a new table
2 Let  $b[1..m, 1..n]$  be a new table
3 for  $i = 1$  to  $m$ 
4      $c[i, 0] = 0$ 
5 for  $j = 0$  to  $n$ 
6      $c[0, j] = 0$ 
7 for  $i = 1$  to  $m$ 
8     for  $j = 1$  to  $n$ 
9         if  $x_i == y_j$ 
10             $c[i, j] = c[i - 1, j - 1] + 1$ 
11             $b[i, j] = "\nwarrow"$ 
12        elseif  $c[i - 1, j] \geq c[i, j - 1]$ 
13             $c[i, j] = c[i - 1, j]$ 
14             $b[i, j] = "\uparrow"$ 
15        else  $c[i, j] = c[i, j - 1]$ 
16             $b[i, j] = "\leftarrow"$ 
17 return  $c$  and  $b$ 
```

PRINT-LCS( $b, X, i, j$ )

```
1 if  $i == 0$  or  $j == 0$ 
2     return
3 if  $b[i, j] == "\nwarrow"$ 
4     PRINT-LCS( $b, X, i - 1, j - 1$ )
5     print  $x_i$ 
6 elseif  $b[i, j] == "\uparrow"$ 
7     PRINT-LCS( $b, X, i - 1, j$ )
8 else PRINT-LCS( $b, X, i, j - 1$ )
```

## Exemple 5 : le problème du sac à dos (knapsack)

Problème :

- Un voleur se rend dans un musée pour commettre un méfait avec un sac à dos pouvant contenir  $W$  kg.
- Le musée comprend  $n$  œuvres d'art, chacune de poids  $p_i$  et de prix  $v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )
- Le problème pour le voleur est de déterminer une sélection d'objets de valeur totale maximale et n'excédant pas le poids total admissible dans le sac à dos.

Formellement :

- Soit un ensemble  $S$  de  $n$  objets de poids  $p_i > 0$  et de valeurs  $v_i > 0$
- Trouver  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$  tels que :
  - ▶  $\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \leq W$ , et
  - ▶  $\sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i$  est maximal.

## Exemple

Capacité du sac à dos :

$$W = 11$$

$i$	$v_i$	$p_i$
1	1	1
2	6	2
3	18	5
4	22	6
5	28	7

Exemple :

- $\{5, 2, 1\}$  a un poids de 10 et une valeur de 35
- $\{3, 4\}$  a un poids de 11 et une valeur de 40

## Approche par force brute

- Recherche exhaustive : on énumère tous les sous-ensembles de  $S$ , et on calcule leur poids et leur valeur
- Complexité en temps :  $O(n2^n)$
- Améliorations :
  - ▶ Ne tester que les sous-ensembles de  $W/p_{min}$  objets où  $p_{min}$  est la taille minimale
  - ▶ Tester les objets par ordre croissant et s'arrêter dès que l'un d'entre eux n'entre plus
- Diminue la constante mais la complexité reste la même

## Approche par programmation dynamique

- Définition : soit  $M(k, w)$ ,  $0 \leq k \leq n$  et  $0 \leq w \leq W$ , le bénéfice maximum qu'on peut obtenir avec les objets  $1, \dots, k$  de  $S$  et un sac à dos de charge maximale  $w$   
*(On suppose que les poids  $p_i$  et  $W$  sont entiers)*
- Deux cas :
  - ▶ On ne sélectionne pas l'objet  $k$  :  $M(k, w)$  est le bénéfice maximum en sélectionnant parmi les  $k - 1$  premiers objets avec comme limite  $w$  ( $M(k - 1, w)$ )
  - ▶ On sélectionne l'objet  $k$  :  $M(k, w)$  est la valeur de l'objet  $k$  plus le bénéfice maximum en sélectionnant parmi les  $k - 1$  premiers objets avec la limite  $w - p_k$

$$M(k, w) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ M(k - 1, w) & \text{si } p_k > w \\ \max\{M(k - 1, w), v_k + M(k - 1, w - p_k)\} & \text{sinon} \end{cases}$$

# Implementation

```
KNAPSACK( $p, v, n, W$ )
```

```
1 Let  $M[0..n, 0..W]$  be a new table
2 for  $w = 0$  to  $W$ 
3    $M[0,w]=0$ 
4   for  $k = 1$  to  $n$ 
5      $M[k, 0] = 0$ 
6   for  $k = 1$  to  $n$ 
7     for  $w = 1$  to  $W$ 
8       if  $p[k] > w$ 
9          $M[k, w] = M[k - 1, w]$ 
10      elseif  $M[k - 1, w] > v[k] + M[k - 1, w - p[k]]$ 
11         $M[k, w] = M[k - 1, w]$ 
12      else  $M[k, w] = v[k] + M[i - 1, w - p[k]]$ 
13 return  $M[n, W]$ 
```

## Exemple

$M$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\emptyset$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{1}	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
{1, 2}	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
{1, 2, 3}	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
{1, 2, 3, 4}	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
{1, 2, 3, 4, 5}	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40

Solution optimale : {4, 3}

Bénéfice :  $22 + 18 = 40$

$i$	$v_i$	$p_i$
1	1	1
2	6	2
3	18	5
4	22	6
5	28	7

$$W = 11$$

## Récupération des $x_i$

En remontant dans le tableau  $M$  :

```
KNAPSACK( $p, v, n, W$ )
1 // Compute M
2 ...
3 // Retrieve solution
4 Let  $x[1..n]$  be a new table
5  $w = W$ 
6 for  $k = n$  downto 1
7     if  $M[k, w] == M[k - 1, w]$ 
8          $x[k] = 0$ 
9     else
10         $x[k] = 1$ 
11         $w = w - p[k]$ 
12 return  $x$ 
```

# Complexité

- Complexité en temps et en espace :  $\Theta(nW)$

- ▶ Remplissage de la matrice  $M$  :  $\Theta(nW)$
  - ▶ Recherche de la solution :  $\Theta(n)$

*(Exercice : proposez une version  $\Theta(n + W)$  en espace)*

- Note : L'algorithme n'est en fait pas polynomial en fonction de la taille de l'entrée

- ▶ Si  $W$  nécessite  $n_w$  bits pour son codage, la complexité est  $\Theta(n2^{n_w})$
  - ▶ Comme pour le voyageur de commerce, on n'a pas encore trouvé d'algorithme polynomial pour le problème du sac à dos (et il y a peu de chance qu'on y arrive)

# Programmation dynamique : résumé

Grandes étapes :

- Caractériser la structure du problème
- Définir de manière récursive la valeur de la solution optimale
- Calculer les valeurs de la solution optimale (c'est-à-dire remplir un tableau)
- Reconstruire la (une) solution optimale à partir de l'information calculée ("bottom-up")

Applications :

- Command unix diff (comparaison de fichiers)
- Algorithme de Viterbi (reconnaissance vocale)
- Alignement de séquences d'ADN (Smith-Waterman)
- Plus court chemin dans un graphe (Bellman-Ford)
- Compilateurs (analyse syntaxique et optimisation du code)
- ...

# Programmation dynamique versus diviser-pour-régner

- L'approche Diviser-pour-régner décompose aussi le problème en sous-problèmes
- Mais ces sous-problèmes sont significativement plus petits que le problème de départ ( $n \rightarrow n/2$ )
  - ▶ Alors que la programmation dynamique réduit généralement un problème de taille  $n$  en sous-problèmes de taille  $n - 1$
- Et ces sous-problèmes sont indépendants
  - ▶ Alors qu'en programmation dynamique, ils se recouvrent
- Pour ces deux raisons, la récursivité ne fonctionne pas pour la programmation dynamique

# Méthodes de résolution de problèmes

Quelques approches génériques pour aborder la résolution d'un problème :

- **Approche par force brute** : résoudre directement le problème, à partir de sa définition ou par une recherche exhaustive
- **Diviser pour régner** : diviser le problème en sous-problèmes, les résoudre, fusionner les solutions pour obtenir une solution au problème original
- **Programmation dynamique** : obtenir la solution optimale à un problème en combinant des solutions optimales à des sous-problèmes similaires plus petits et se chevauchant
- **Approche gloutonne** : construire la solution incrémentalement, en optimisant de manière aveugle un critère local

# Plan

1. Introduction
2. Approche par force brute
3. Diviser pour régner
4. Programmation dynamique
5. Algorithmes gloutons
  - Exemple 1 : rendre la monnaie
  - Exemple 2 : sélection d'activités
  - Exemple 3 : problème du sac à dos
  - Exemple 4 : codage de Huffman

## Algorithme glouton (greedy)

- Utilisé pour résoudre des problèmes d'optimisation (comme la programmation dynamique)
- Idée principale :
  - ▶ Quand on a un choix local à faire, faire le choix (glouton) qui semble le meilleur tout de suite (et ne jamais le remettre en question)
- Pour que l'approche fonctionne, le problème doit satisfaire deux propriétés :
  - ▶ Propriété des choix gloutons optimaux : On peut toujours arriver à une solution optimale en faisant un choix localement optimal
  - ▶ Propriété de sous-structure optimale : Une solution optimale du problème est composée de solutions optimales à des sous-problèmes
- Même si ces propriétés ne sont pas satisfaites, l'approche gloutonne peut parfois fournir une approximation intéressante au problème
- Parfois, il est possible de caractériser la distance de la solution gloutonne à la solution optimale

## Exemple 1 : rendre la monnaie

- Objectif : Etant donné des pièces de 1, 2, 5, 10, et 20 cents, trouver une méthode pour rembourser une somme de  $x$  cents en utilisant le moins de pièces possible.
- Exemple : 34 cents :
  - ▶ 1ère possibilité :  $\{1, 1, 2, 5, 5, 20\} \rightarrow 6$  pièces
  - ▶ 2ième possibilité :  $\{2, 2, 10, 20\} \rightarrow 4$  pièces
- Algorithme de la caissière : A chaque itération, ajouter une pièce de la plus grande valeur qui ne dépasse pas la somme restant à rembourser
- Exemple : 49 cents  $\rightarrow \{20, 20, 5, 2, 2\}$  (5 pièces)

# Implémentation

- Algorithme de la caissière : A chaque itération, ajouter une pièce de la plus grande valeur qui ne dépasse pas la somme restant à rembourser

```
COINCHANGINGGREEDY( $x, c, n$ )
```

```
1 //  $c[1..n]$  contains the  $n$  coin values in decreasing order
2 Let  $s[1..n]$  be a new table
3 //  $s[i]$  is the number of  $i$ th coin in solution
4  $CoinCount = 0$ 
5 for  $i = 1$  to  $n$ 
6      $s[i] = \lfloor x/c[i] \rfloor$ 
7      $x = x - s[i] * c[i]$ 
8      $CoinCount = CoinCount + s[i]$ 
9 return ( $s, CoinCount$ )
```

- Complexité :  $\Theta(n)$  (sans compter le tri des pièces)
- Cet algorithme permet-il de trouver une solution optimale ?

# Analyse de COINCHANGINGGREEDY

Théorème : l'algorithme COINCHANGINGGREEDY est optimal pour  $c = [20, 10, 5, 2, 1]$

Preuve :

- Soit  $S^*(x)$  l'ensemble optimal de pièces pour un montant  $x$  et soit  $c^*$  le plus grand  $c[i] \leq x$ . On doit montrer que :
  1.  $S^*(x)$  contient  $c^*$  *(propriété des choix gloutons optimaux)*
  2.  $S^*(x) = \{c^*\} \cup S^*(x - c^*)$  *(propriété de sous-structure optimale)*
- Propriété (2) découle directement de (1)
  - ▶  $S^*(x)$  contient  $c^*$  par (1)
  - ▶ Donc  $S^*(x) \setminus \{c^*\}$  représente le change pour un montant de  $x - c^*$
  - ▶ Ce change doit être optimal sinon  $S' = \{c^*\} \cup S^*(x - c^*)$  serait une meilleure solution que  $S^*(x)$  pour un montant de  $x$
  - ▶ On a donc  $S^*(x) = \{c^*\} \cup S^*(x - c^*)$

## ■ Propriété (1) : $S^*(x)$ contient $c^*$

- ▶ Avec  $c = [20, 10, 5, 2, 1]$ , une solution optimale ne contient jamais :
  - ▶ plus d'une pièce de 1, 5, ou de 10 (car  $2 \times 1 = 2$ ,  $2 \times 5 = 10$ ,  $2 \times 10 = 20$ )
  - ▶ plus de deux pièces de 2 (car  $3 \times 2 = 5 + 1$ )

- ▶ Analysons les différents cas pour  $x$  :

$x = 1$  :  $c^* = 1$ , meilleure solution  $S^*(x) = \{1\}$  contient  $c^*$

$2 \leq x < 5$  :  $c^* = 2$ , avec un seul 1, on ne peut pas obtenir  $x \Rightarrow c^* \in S^*(x)$

$x = 5$  :  $c^* = 5$ , meilleure solution  $S^*(x) = \{5\}$  contient  $c^*$

$5 < x < 10$  :  $c^* = 5$ , avec un seul 1, et deux 2, on ne peut pas obtenir  $x$   
 $\Rightarrow c^* \in S^*(x)$

$x = 10$  :  $c^* = 10$ , meilleure solution  $S^*(x) = \{10\}$  contient  $c^*$

$10 < x < 20$  :  $c^* = 10$ , avec un seul 1, deux 2, et 1 seul 5, on ne peut pas obtenir  $x$   
 $\Rightarrow c^* \in S^*(x)$

$x = 20$  :  $c^* = 20$ , meilleure solution  $S^*(x) = \{20\}$  contient  $c^*$

$x > 20$  :  $c^* = 20$ , avec un seul 1, deux 2, 1 seul 5 et 1 seul 10, on ne peut pas obtenir  $x \Rightarrow c^* \in S^*(x)$

- ▶  $S^*(x)$  contient donc toujours bien  $c^*$



## Analyse de COINCHANGINGGREEDY

- L'approche greedy n'est correcte que pour certains choix particuliers de valeurs de pièces
  - ▶ ok pour la plupart des monnaies courantes, euros, dollars...
- Contre-exemple :  $C = [1, 10, 21, 34, 70, 100]$  (valeurs de timbres aux USA) et  $x = 140$ 
  - ▶ Algorithme glouton : 100, 34, 1, 1, 1, 1, 1
  - ▶ Solution optimale : 70, 70
- Solution pour résoudre le cas général : programmation dynamique
- Très proche du problème de découpage de tige et du sac à dos

(Exercice : écrivez une fonction COINCHANGEDP)

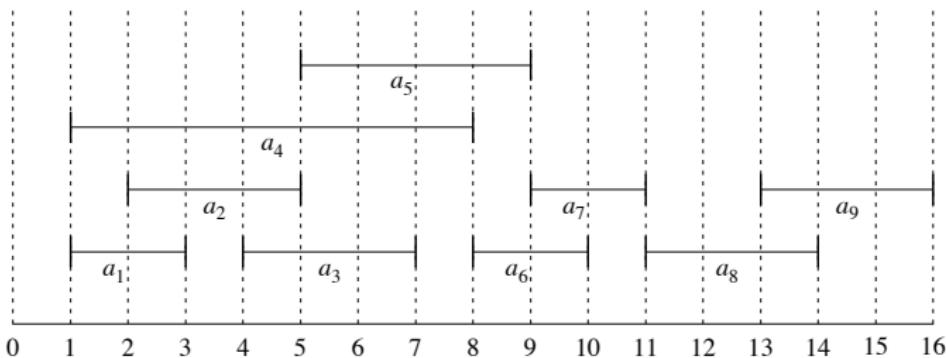
## Exemple 2 : sélection d'activités

- Un salle est utilisée pour différentes activités
  - ▶ Soit  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un ensemble de  $n$  activités
  - ▶  $a_i$  démarre au temps  $s_i$  et se termine au temps  $f_i$
  - ▶ Deux activités  $a_i$  et  $a_j$  sont **compatibles** si soit  $f_i \leq s_j$ , soit  $f_j \leq s_i$

Problème : trouver le plus grand sous-ensemble de tâches compatibles

- Exemple :

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_i$	1	2	4	1	5	8	9	11	13
$f_i$	3	5	7	8	9	10	11	14	16

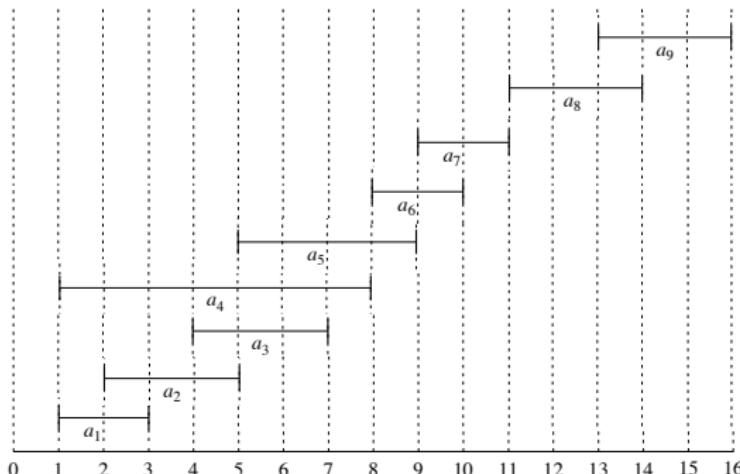


## Sélection d'activités : approche gloutonne

- Schéma d'une solution gloutonne :
  - ▶ définir un ordre "naturel" sur les activités
  - ▶ sélectionner les activités dans cet ordre pour autant qu'elles soient compatibles avec celles déjà choisies
- Exemples : trier les activités selon  $s_i$  (début), selon  $f_i$  (fin), selon  $f_i - s_i$  (durée), nombre de conflits avec d'autres activités...

# Sélection d'activités : approche gloutonne

- Schéma d'une solution gloutonne :
  - ▶ définir un ordre "naturel" sur les activités
  - ▶ sélectionner les activités dans cet ordre pour autant qu'elles soient compatibles avec celles déjà choisies
- Exemples : trier les activités selon  $s_i$  (début), selon  $f_i$  (fin), selon  $f_i - s_i$  (durée), nombre de conflits avec d'autres activités...
- Montrer par des contre-exemples que seul le tri selon  $f_i$  fonctionne



## Sélection d'activités : approche gloutonne

- Considérer les activités par ordre croissant de  $f_i$  et sélectionner chaque activité compatible avec celles déjà prises
- Implémentations : en supposant  $s$  et  $f$  ordonnés selon  $f$

REC-ACTIVITY-SELECTOR( $s, f, k, n$ )

```
1   $m = k + 1$ 
2  while  $m \leq n$  and  $s[m] < f[k]$ 
3       $m = m + 1$ 
4  if  $m \leq n$ 
5      return  $\{a_m\} \cup \dots$ 
6          ...REC-ACTIVITY-SELECTOR( $s, f, m, n$ )
7  else return  $\emptyset$ 
```

ITER-ACTIVITY-SELECTOR( $s, f$ )

```
1   $n = s.length$ 
2   $A = \{a_1\}$ 
3   $k = 1$ 
4  for  $m = 2$  to  $n$ 
5      if  $s[m] \geq f[k]$ 
6           $A = A \cup \{a_m\}$ 
7           $k = m$ 
8  return  $A$ 
```

Appel initial :

REC-ACTIVITY-SELECTOR( $s, f, 0, s.length$ )

- Complexité :  $\Theta(n)$  ( $+\Theta(n \log n)$  pour le tri selon  $f_i$ )

## Sélection d'activités : analyse

- La solution gloutonne est-elle correcte ?
- 1. Propriété des choix gloutons optimaux : Soit  $a_x \in S$  tel que  $f_x \leq f_i$  pour tout  $a_i \in S$ . Il existe une solution optimale  $OPT^*$  qui contient  $a_x$ .
- Preuve :
  - ▶ Soit une solution optimale  $OPT$  telle que  $a_x \notin OPT$
  - ▶ Soit  $a_m$  l'activité qui se termine en premier dans  $OPT$
  - ▶ Construisons  $OPT^* = (OPT \setminus \{a_m\}) \cup \{a_x\}$
  - ▶  $OPT^*$  est valide :
    - ▶ Toute activité  $a_i \in OPT \setminus \{a_m\}$  débute en un temps  $s_i \geq f_m$
    - ▶ Par définition de  $a_x$ ,  $f_m \geq f_x$  et donc pour tout activité  $a_i$ ,  $s_i \geq f_x$
    - ▶ Toute activité  $a_i$  est donc compatible avec  $a_x$
  - ▶  $OPT^*$  est donc optimale puisque  $|OPT^*| = |OPT|$



## Sélection d'activités : analyse

- La solution gloutonne est-elle correcte ?
- 2. Propriété de sous-structure optimale : Soit  $a_x \in S$  le choix glouton et  $S' = \{a_i | s_i \geq f_x\}$  les activités de  $S$  compatibles avec  $a_x$ . Soit  $OPT^* = \{a_x\} \cup OPT'$ . Si  $OPT'$  est une solution optimale pour  $S'$  alors  $OPT^*$  est une solution optimale pour  $S$ .
- Preuve :
  - ▶ Soit  $OPT$  une solution optimale pour  $S$
  - ▶ Si  $OPT^*$  n'est pas une solution optimale pour  $S$ , alors  $|OPT^*| < |OPT|$  et donc aussi  $|OPT'| < |OPT| - 1$
  - ▶ Soit  $a_m$  l'activité qui se termine en premier dans  $OPT$  et  $\bar{S} = \{a_i | s_i \geq f_m\}$
  - ▶ Par construction,  $OPT \setminus \{a_m\}$  est une solution pour  $\bar{S}$
  - ▶ Par construction,  $\bar{S} \subseteq S'$  et  $OPT \setminus \{a_m\}$  est une solution valide pour  $S'$  (pas nécessairement optimale)
  - ▶ Ce qui veut dire qu'il existe une solution pour  $S'$  de taille  $|OPT| - 1$ , ce qui contredit  $|OPT'| < |OPT| - 1$  et  $OPT'$  optimal pour  $S'$  (par hypothèse).



## Problèmes similaires

D'autres problèmes similaires pour lesquels il existe un algorithme glouton :

- Allocation de ressources :
  - ▶ Etant donnée un ensemble d'activités  $S$  avec leurs temps de début et de fin, trouver le nombre minimum de salles permettant de les réaliser toutes
- Planification de tâches :
  - ▶ Soit un ensemble de tâches avec leur durée et l'instant auquel elles doivent chacune être terminées (leur deadline)
  - ▶ Sachant qu'on ne peut exécuter qu'une seule tâche simultanément, trouver l'ordonnancement de ces tâches qui minimise le dépassement maximal des deadlines associées aux tâches (latence).

## Exemple 3 : problème du sac à dos

Rappel : problème (0/1) du sac à dos :

- Soit un ensemble  $S$  de  $n$  objets de poids  $p_i > 0$  et de valeur  $v_i > 0$
- Trouver  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$  tels que :
  - ▶  $\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \leq W$ , et
  - ▶  $\sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i$  est maximal.

Solution par programmation dynamique :  $\Theta(nW)$

Peut-on le résoudre par une approche gloutonne ?

# Programmation dynamique versus approche gloutonne

## ■ Rappel du transparent 387 :

- ▶ soit  $M(k, w)$ ,  $0 \leq k \leq n$  et  $0 \leq w \leq W$ , le bénéfice maximum qu'on peut obtenir avec les objets  $1, \dots, k$  de  $S$  et un sac à dos de charge maximale  $w$ . On a :

$$M(k, w) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ M(k - 1, w) & \text{si } p_i > w \\ \max\{M(k - 1, w), v_k + M(k - 1, w - p_k)\} & \text{sinon} \end{cases}$$

## ■ Approche gloutonne : consisterait à remplacer le `max` par le choix qui nous semble le meilleur localement

## ■ Quels choix possibles ?

- ▶ Le moins lourd, le plus lourd ?
- ▶ Le moins coûteux, le plus coûteux ?
- ▶ Le meilleur rapport valeur/poids ?

# Approche gloutonne

- Idée d'algorithm :
  - ▶ Ajouter à chaque itération l'objet de rapport  $\frac{v_i}{p_i}$  maximal qui rentre dans le sac
  - ▶ Implémentation très proche du problème de change :  $\Theta(n \log n)$
- Est-ce que ça fonctionne ? Non !

$i$	$v_i$	$p_i$	$v_i/p_i$
1	1	1	1
2	6	2	3
3	18	5	3,6
4	22	6	3,7
5	28	7	4

W=11 :

- ▶ Solution greedy :  $\{5, 2, 1\} \Rightarrow \text{valeur}=35$
- ▶ Solution DP :  $\{4, 3\} \Rightarrow \text{valeur}=40$

## Problème fractionnel du sac à dos (fractional knapsack)

Par rapport au problème 0/1, il est maintenant permis d'inclure des fractions d'objets ( $\leq 1$ ) :

- Soit un ensemble  $S$  de  $n$  objets de poids  $p_i > 0$  et de valeur  $v_i > 0$
- Trouver  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$  tels que :
  - ▶  $\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \leq W$ , et
  - ▶  $\sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i$  est maximal.

Exemple :

$i$	$v_i$	$p_i$	$v_i/p_i$
1	1	1	1
2	6	2	3
3	18	5	3,6
4	22	6	3,7
5	28	7	4

$W=11$  :

- Solution optimale 0/1 :  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 1$ ,  $x_5 = 0 \Rightarrow$  valeur=40
- Solution optimale fractionnelle :  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 2/3$ ,  $x_5 = 1 \Rightarrow$  valeur=42,66

# Algorithme glouton

- Pour la version fractionnelle, l'algorithme glouton est optimal
- Implémentation :

```
FRACKNAPSACK( $p, v, n, W$ )
```

```
1 // Assume the objects are sorted according to  $v[i]/p[i]$ 
2 Let  $x[1..n]$  a new table
3  $w = 0$ 
4 for  $i = 1$  to  $n$ 
5      $d = \min(p[i], W - w)$ 
6      $w = w + d$ 
7      $x[i] = d/p[i]$ 
8 return  $x$ 
```

- Complexité :  $\Theta(n)$  (+  $\Theta(n \log n)$  pour le tri)

## Correction

**Théorème :** Le problème fractionnel du sac à dos possède la propriété des choix gloutons optimaux

**Preuve :**

- Soit deux objets  $i$  et  $j$  tels que

$$\frac{v_i}{p_i} > \frac{v_j}{p_j}$$

- Etant donné un choix  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , on le transforme en  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  tel que :
  - ▶  $\forall k \in [1, n] \setminus \{i, j\} : x'_k = x_k$ ,
  - ▶  $x'_i = x_i + \frac{\Delta}{p_i}$ , et
  - ▶  $x'_j = x_j - \frac{\Delta}{p_j}$ ,où  $\Delta = \min(p_i(1 - x_i), p_j x_j)$ .
- Cette transformation ne modifie pas le poids total, mais améliore le bénéfice.
- On en déduit qu'il est toujours avantageux de prendre la fraction maximale de l'objet  $i$  possédant le plus grand rapport  $\frac{v_i}{p_i}$ . □

## Algorithme glouton : résumé

- Très efficaces quand ils fonctionnent. Simples et faciles à implémenter
- Ne fonctionnent pas toujours. Leur correction peut être assez difficile à prouver

Applications :

- Arbre de couverture minimal (Kruskal, Prim)
- Plus court chemin dans un graphe (algorithme de Dijkstra)
- Allocation de resources
- Codage de Huffman
- ...

## Approche gloutonne versus programmation dynamique

- Tous deux nécessitent la propriété de sous-structure optimale
- Les algorithmes gloutons nécessitent que la propriété de choix gloutons optimaux soit satisfaite
  - ▶ On n'a pas besoin de solutionner plus d'un sous-problème
  - ▶ Le choix glouton est fait *avant* de résoudre le sous-problème
  - ▶ Il n'y a pas besoin de stocker les résultats intermédiaires
- La programmation dynamique marche sans la propriété des choix gloutons optimaux
  - ▶ On doit solutionner plusieurs sous-problèmes et choisir dynamiquement l'un deux pour obtenir la solution globale
  - ▶ La solution doit être assemblée “bottom-up”
  - ▶ Les sous-solutions aux sous-problèmes sont réutilisées et doivent donc être stockées

## Exemple 4 : codage de Huffman

- Soit une séquence  $S$  très longue définie sur base de 6 caractères : a, b, c, d, e et f
  - ▶ Par exemple,  $n = |S| = 10^9$
- Quelle est la manière la plus efficace de stocker cette séquence ?
- Première approche : encoder chaque symbole par un mot binaire de longueur fixe :

Symbol	a	b	c	d	e	f
Codage	000	001	010	011	100	101

- ▶ 6 symboles nécessitent 3 bits par symbole
- ▶  $3 \times 10^9 / 8 = 3.75 \times 10^8$  bytes (un peu moins de 400Mb)
- Peut-on faire mieux ?

## Idée

- Codage avec des mots de longueur fixe :

Symbol	a	b	c	d	e	f
Codage	000	001	010	011	100	101

- Observation : l'encodage de e et f est redondant :

- ▶ Le second bit ne nous aide pas à distinguer e de f
- ▶ En d'autres termes, si le premier bit est 1, le second ne nous donne pas d'information et peut être supprimé

- Suggère de considérer un codage avec des mots binaires de longueurs variables

Symbol	a	b	c	d	e	f
Codage	000	001	010	011	10	11

- Encodage et décodage sont bien définis et non ambigüs
- Permet de gagner  $n_e + n_f$  bits, où  $n_e$  et  $n_f$  sont les nombres de e et de f dans la séquence

## Définition du problème

- Soit un ensemble de symboles  $C$  et  $f(c)$  la fréquence du symbole  $c \in C$ .
- Trouver un code  $E : C \rightarrow \{0, 1\}^*$  tel que
  - ▶  $E$  est un code sans préfixe
    - ▶ Aucun mot de code  $E(c_1)$  n'est le préfixe d'un autre mot de code  $E(c_2)$
  - ▶ La longueur moyenne des mots de code est minimale

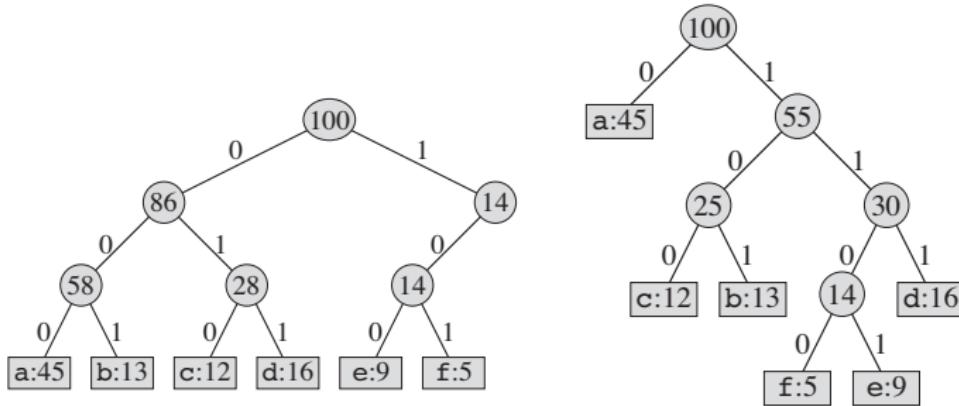
$$B(S) = \sum_{c \in C} f(c)|E(c)|$$

( $nB(S)$  est la longueur de l'encodage de  $S$ )

- Exemple :

c f(c)	a 45%	b 13%	c 12%	d 16%	e 9%	f 5%	B(S)
Code 1	000	001	010	011	100	101	3.00
Code 2	000	001	010	011	10	11	2.86
Code 3	0	101	100	111	1101	1100	2.24

## Code sans préfixe



- Un code sans préfixe peut toujours se représenter sous la forme d'une arbre binaire
  - ▶ Chaque feuille est associée à un symbole
  - ▶ Le chemin de la racine à une feuille est le code du symbole
  - ▶ La fréquence d'un nœud est la fréquence du préfixe
- Un code optimal est toujours représenté par un arbre binaire entier (*Pourquoi ?*)

## Algorithme glouton

On peut montrer que le codage optimal peut être obtenu par un algorithme glouton

- On construit l'arbre de bas en haut en partant des feuilles
- A chaque étape, on fait le choix “glouton” de fusionner les deux nœuds les moins fréquents (symboles ou préfixes)

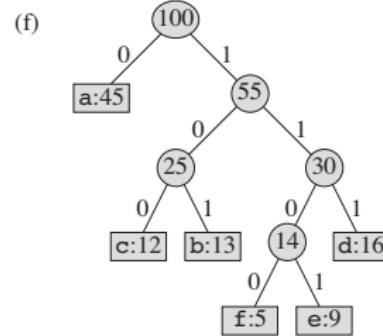
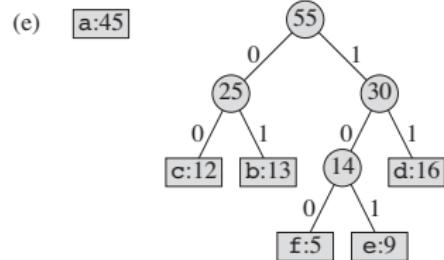
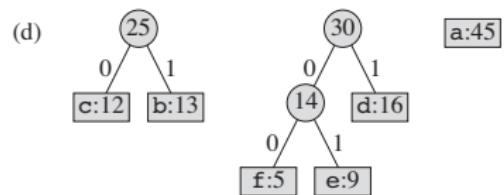
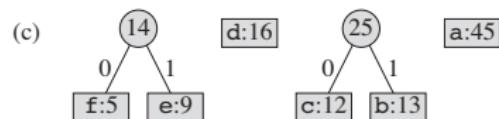
Idée de la preuve (pour information) :

- Choix gloutons optimaux :
  - ▶ Il existe un code sans préfixe optimal où les deux symboles les moins fréquents sont frères et à la profondeur maximale
  - ▶ Par l'absurde : si un tel code n'existe pas, on pourrait l'obtenir en échangeant la position des deux symboles les moins fréquents avec les feuilles les plus profondes sans augmenter  $B(S)$
- Sous-structure optimale :
  - ▶ Si l'arbre qui a pour feuille le nouveau nœud issu de la fusion gloutonne est optimal, l'arbre complet est optimal
  - ▶ Plus difficile à montrer

# Algorithme glouton : exemple

(a) f:5 e:9 c:12 b:13 d:16 a:45

(b) c:12 b:13 d:16 a:45



# Algorithme glouton : implémentation

```
HUFFMAN( $C$ )
1    $n = |C|$ 
2    $Q =$  "create a min-priority queue from  $C$ "
3   for  $i = 1$  to  $n - 1$ 
4       Allocate a new node  $z$ 
5        $z.left = \text{EXTRACT-MIN}(Q)$ 
6        $z.right = \text{EXTRACT-MIN}(Q)$ 
7        $z.freq = z.left.freq + z.right.freq$ 
8        $\text{INSERT}(Q, z)$ 
9   return  $\text{EXTRACT-MIN}(Q)$ 
```

- Implémentation avec une file à priorité
- Complexité :  $O(n \log n)$  si  $Q$  est implémentée avec un tas (min)
  - ▶ Ligne 2 :  $O(n)$  si on utilise BUILD-MIN-HEAP
  - ▶ Ligne 8 :  $O(\log n)$  (répétée  $n - 1$  fois)

## Partie 7

# Graphes

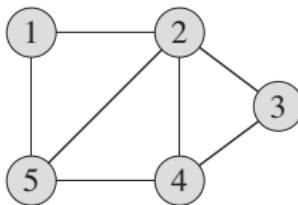
# Plan

1. Définitions
2. Représentation des graphes
3. Parcours de graphes
4. Plus courts chemins
  - Définitions et algorithme général
  - Bellman-Ford
  - Dijkstra
  - Floyd-Warshall
5. Arbre couvrant

# Graphes

- Un **graphe (dirigé)** est un couple  $(V, E)$  où :
  - ▶  $V$  est un ensemble de nœuds (*nodes*), ou sommets (*vertices*) et
  - ▶  $E \subseteq V \times V$  est un ensemble d'arcs, ou arêtes (*edges*).
- Un **graphe non dirigé** est caractérisé par une relation symétrique entre les sommets
  - ▶ Une arête est un ensemble  $e = \{u, v\}$  de deux sommets
  - ▶ On la notera tout de même  $(u, v)$  (équivalent à  $(v, u)$ ).
- Applications : modélisation de :
  - ▶ Réseaux sociaux
  - ▶ Réseaux informatiques
  - ▶ World Wide Web
  - ▶ Cartes routières
  - ▶ ...

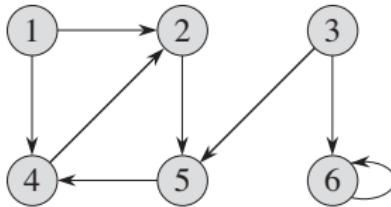
## Terminologie : graphe non dirigé



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$$

- Deux nœuds sont **adjacents** s'ils sont liés par une même arête
- Une arête  $(v_1, v_2)$  est dite **incidente** aux nœuds  $v_1$  et  $v_2$
- Le **degré** d'un nœud est égal au nombre de ses arêtes incidentes
- Le **degré d'un graphe** est le nombre maximal d'arêtes incidentes à tout sommet.
- Un graphe est **connexe** s'il existe un chemin de tout sommet à tout autre.
- Une **composante connexe** d'un graphe non orienté est un sous-graphe connexe maximal de ce graphe

## Terminologie : graphe dirigé



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 5), (3, 5), (3, 6), (4, 2), (5, 4), (6, 6)\}$$

- Une arête  $(v_1, v_2)$  possède l'**origine**  $v_1$  et la **destination**  $v_2$ . Cette arête est **sortante** pour  $v_1$  et **entrante** pour  $v_2$
- Le degré **entrant** (*in-degree*) et le degré **sortant** (*out-degree*) d'un nœud  $v$  sont respectivement égaux aux nombres d'arêtes entrantes et d'arêtes sortantes de  $v$
- Un graphe est **acyclique** s'il n'y a aucun cycle, c'est-à-dire s'il n'est pas possible de suivre les arêtes du graphes à partir d'un sommet  $x$  et de revenir à ce même sommet  $x$

# Type de graphes

- Un graphe est **simple** s'il ne possède pas de boucle composée d'une seule arête, c'est-à-dire tel que :

$$\forall v \in V : (v, v) \notin E$$

- Un **arbre** est un graphe acyclique connexe
- Un **multigraphe** est une généralisation des graphes pour laquelle il est permis de définir plus d'une arête liant un sommet à un autre
- Un graphe est **pondéré** si les arêtes sont annotées par des **poids**
  - ▶ Exemple : réseau entre villes avec comme poids la distance entre les villes, réseau internet avec comme poids la bande passante entre routeurs, etc.

## Représentation I : listes d'adjacences

Un objet  $G$  de type graphe est composé :

- d'une liste de nœuds  $G.V = \{1, 2, \dots, |V|\}$
- d'un tableau  $G.Adj$  de  $|V|$  listes tel que :
  - ▶ Chaque sommet  $u \in G.V$  est représenté par un élément du tableau  $G.Adj$
  - ▶  $G.Adj[u]$  est la liste d'adjacence de  $u$ , c'est-à-dire la liste des sommets  $v$  tels que  $(u, v) \in E$

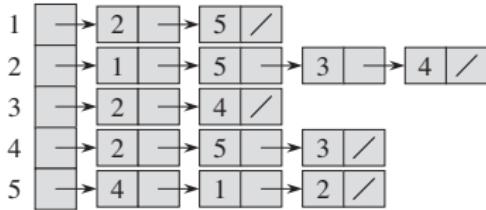
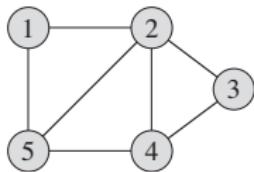
Permet de représenter des graphes dirigés ou non

- Si le graphe est dirigé (resp. non dirigé), la somme des longueurs des listes de  $G.Adj$  est  $|E|$  (resp.  $2|E|$ ).

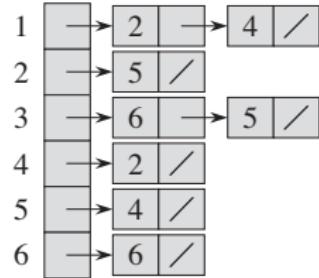
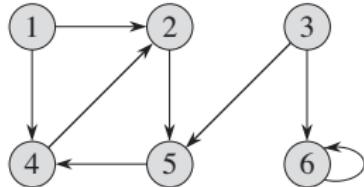
Permet de représenter un graphe pondéré en associant un poids à chaque élément de liste

# Exemple

Graphe non dirigé



Graphe dirigé



# Complexités

- Complexité en espace :
- Accéder à un sommet :
- Parcourir tous les sommets :
- Parcourir toutes les arêtes :
- Vérifier l'existence d'une arête  $(u, v) \in E$  :

*(Exercice : insertion, suppression de nœuds et d'arêtes ?)*

# Complexités

- Complexité en espace :  $\Theta(|V| + |E|)$ 
  - ▶ optimal
- Accéder à un sommet :
- Parcourir tous les sommets :
- Parcourir toutes les arêtes :
- Vérifier l'existence d'une arête  $(u, v) \in E$  :

*(Exercice : insertion, suppression de nœuds et d'arêtes ?)*

# Complexités

- Complexité en espace :  $\Theta(|V| + |E|)$ 
  - ▶ optimal
- Accéder à un sommet :  $\Theta(1)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir tous les sommets :
- Parcourir toutes les arêtes :
- Vérifier l'existence d'une arête  $(u, v) \in E$  :

*(Exercice : insertion, suppression de nœuds et d'arêtes ?)*

# Complexités

- Complexité en espace :  $\Theta(|V| + |E|)$ 
  - ▶ optimal
- Accéder à un sommet :  $\Theta(1)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir tous les sommets :  $\Theta(|V|)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir toutes les arêtes :
- Vérifier l'existence d'une arête  $(u, v) \in E$  :

*(Exercice : insertion, suppression de nœuds et d'arêtes ?)*

# Complexités

- Complexité en espace :  $\Theta(|V| + |E|)$ 
  - ▶ optimal
- Accéder à un sommet :  $\Theta(1)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir tous les sommets :  $\Theta(|V|)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir toutes les arêtes :  $\Theta(|V| + |E|)$ 
  - ▶ ok (mais pas optimal)
- Vérifier l'existence d'une arête  $(u, v) \in E$  :

*(Exercice : insertion, suppression de nœuds et d'arêtes ?)*

# Complexités

- Complexité en espace :  $\Theta(|V| + |E|)$ 
  - ▶ optimal
- Accéder à un sommet :  $\Theta(1)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir tous les sommets :  $\Theta(|V|)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir toutes les arêtes :  $\Theta(|V| + |E|)$ 
  - ▶ ok (mais pas optimal)
- Vérifier l'existence d'une arête  $(u, v) \in E$  :  $O(|V|)$ 
  - ▶ ou encore  $O(\min(\text{degree}(u), \text{degree}(v)))$
  - ▶ mauvais

*(Exercice : insertion, suppression de nœuds et d'arêtes ?)*

## Réprésentation II : matrice d'adjacence

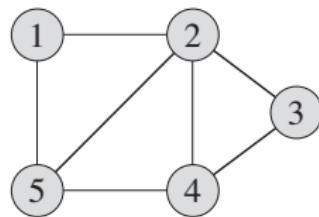
- Les nœuds sont les entiers de 1 à  $|V|$ ,  $G.V = \{1, 2, \dots, |V|\}$
- $G$  est décrit par une matrice  $G.A$  de dimension  $|V| \times |V|$
- $G.A = (a_{ij})$  tel que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Permet de représenter des graphes dirigés ou non
  - ▶  $G.A$  est symétrique si le graphe est non dirigé
- Graphe pondéré :  $a_{ij}$  est le poids de l'arête  $(i, j)$  si elle existe, NIL (ou 0, ou  $+\infty$ ) sinon

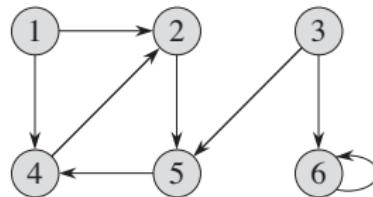
## Exemple

Graphe non dirigé



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Graphe dirigé



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

# Complexités

- Complexité en espace :
- Accéder à un sommet :
- Parcourir tous les sommets :
- Parcourir toutes les arêtes :
- Vérifier l'existence d'une arête  $(u, v) \in E$  :

*(Exercice : insertion, suppression de nœuds et d'arêtes ?)*

# Complexités

- Complexité en espace :  $\Theta(|V|^2)$ 
  - ▶ potentiellement très mauvais
- Accéder à un sommet :
- Parcourir tous les sommets :
- Parcourir toutes les arêtes :
- Vérifier l'existence d'une arête  $(u, v) \in E$  :

*(Exercice : insertion, suppression de nœuds et d'arêtes ?)*

# Complexités

- Complexité en espace :  $\Theta(|V|^2)$ 
  - ▶ potentiellement très mauvais
- Accéder à un sommet :  $\Theta(1)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir tous les sommets :
- Parcourir toutes les arêtes :
- Vérifier l'existence d'une arête  $(u, v) \in E$  :

*(Exercice : insertion, suppression de nœuds et d'arêtes ?)*

# Complexités

- Complexité en espace :  $\Theta(|V|^2)$ 
  - ▶ potentiellement très mauvais
- Accéder à un sommet :  $\Theta(1)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir tous les sommets :  $\Theta(|V|)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir toutes les arêtes :
- Vérifier l'existence d'une arête  $(u, v) \in E$  :

*(Exercice : insertion, suppression de nœuds et d'arêtes ?)*

# Complexités

- Complexité en espace :  $\Theta(|V|^2)$ 
  - ▶ potentiellement très mauvais
- Accéder à un sommet :  $\Theta(1)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir tous les sommets :  $\Theta(|V|)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir toutes les arêtes :  $\Theta(|V|^2)$ 
  - ▶ potentiellement très mauvais
- Vérifier l'existence d'une arête  $(u, v) \in E$  :

*(Exercice : insertion, suppression de nœuds et d'arêtes ?)*

# Complexités

- Complexité en espace :  $\Theta(|V|^2)$ 
  - ▶ potentiellement très mauvais
- Accéder à un sommet :  $\Theta(1)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir tous les sommets :  $\Theta(|V|)$ 
  - ▶ optimal
- Parcourir toutes les arêtes :  $\Theta(|V|^2)$ 
  - ▶ potentiellement très mauvais
- Vérifier l'existence d'une arête  $(u, v) \in E$  :  $\Theta(1)$ 
  - ▶ optimal

*(Exercice : insertion, suppression de nœuds et d'arêtes ?)*

# Représentations

- Listes d'adjacence :
  - ▶ Complexité en espace optimal
  - ▶ Pas appropriée pour des graphes **denses**<sup>3</sup> et des algorithmes qui ont besoin d'accéder aux arêtes
  - ▶ Préférable pour des graphes **creux**<sup>4</sup> ou de degré faible
  
- Matrice d'adjacence :
  - ▶ Complexité en espace très mauvaise pour des graphes creux
  - ▶ Appropriée pour des algorithmes qui désirent accéder aléatoirement aux arêtes
  - ▶ Préférable pour des graphes **denses**

---

3.  $|E| \approx |V|^2$

4.  $|E| \ll |V|^2$

# Plan

1. Définitions
2. Représentation des graphes
3. Parcours de graphes
4. Plus courts chemins
  - Définitions et algorithme général
  - Bellman-Ford
  - Dijkstra
  - Floyd-Warshall
5. Arbre couvrant

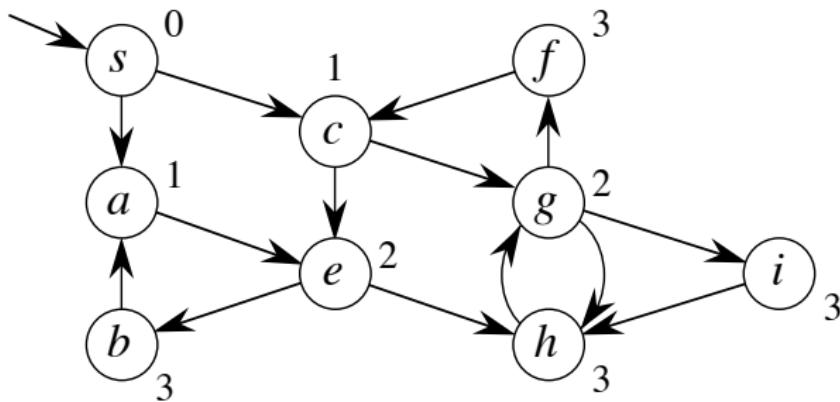
# Parcours de graphes

- Objectif : parcourir tous les sommets d'un graphe qui sont accessibles à partir d'un sommet  $v$  donné
- Un sommet  $v'$  est accessible à partir de  $v$  si :
  - ▶ soit  $v' = v$ ,
  - ▶ soit  $v'$  est adjacent à  $v$ ,
  - ▶ soit  $v'$  est adjacent à un sommet  $v''$  qui est accessible à partir de  $v$
- Différents types de parcours :
  - ▶ En profondeur d'abord (*depth-first*)
  - ▶ En largeur d'abord (*breadth-first*)

## Parcours en largeur d'abord (*breadth-first search*)

- Un des algorithmes les plus simples pour parcourir un graphe
- A la base de plusieurs algorithmes de graphe importants
- Entrées : un graphe  $G = (V, E)$  et un sommet  $s \in V$ 
  - ▶ Parcourt le graphe en visitant tous les sommets qui sont accessibles à partir de  $s$
  - ▶ Parcourt les sommets par ordre croissant de leur distance (en nombre minimum d'arêtes) par rapport à  $s$ 
    - ▶ on visite  $s$
    - ▶ tous les voisins de  $s$
    - ▶ tous les voisins des voisins de  $s$
    - ▶ etc.
  - ▶ Fonctionne aussi bien pour des graphes dirigés que non dirigés

## Exemple



Un parcours en largeur à partir de  $s$  :  $s-a-c-e-g-b-h-i-f$

Pour l'implémentation :

- On doit retenir les sommets déjà visités de manière à éviter de boucler infiniment
- On doit retenir les sommets visités dont on n'a pas encore visité les voisins

# Parcours en largeur d'abord : implémentation

BFS( $G, s$ )

```
1  for each vertex  $u \in G.V \setminus \{s\}$ 
2       $u.d = \infty$ 
3   $s.d = 0$ 
4   $Q = \text{"create empty Queue"}$ 
5  ENQUEUE( $Q, s$ )
6  while not QUEUE-EMPTY( $Q$ )
7       $u = \text{DEQUEUE}(Q)$ 
8      for each  $v \in G.Adj[u]$ 
9          if  $v.d = \infty$ 
10              $v.d = u.d + 1$ 
11             ENQUEUE( $Q, v$ )
```

- $v.d$  est la distance de  $v$  à  $s$ 
  - ▶ si un sommet  $v$  a été visité,  $v.d$  est fini
  - ▶ on peut remplacer  $d$  par un drapeau binaire
- $Q$  est une file (LIFO) qui contient les sommets visités mais dont les voisins n'ont pas encore été visités

## Parcours en largeur d'abord : complexité

BFS( $G, s$ )

```
1  for each vertex  $u \in G.V \setminus \{s\}$ 
2       $u.d = \infty$ 
3   $s.d = 0$ 
4   $Q = \emptyset$ 
5  ENQUEUE( $Q, s$ )
6  while  $Q \neq \emptyset$ 
7       $u = \text{DEQUEUE}(Q)$ 
8      for each  $v \in G.Adj[u]$ 
9          if  $v.d = \infty$ 
10              $v.d = u.d + 1$ 
11             ENQUEUE( $Q, v$ )
```

- Chaque sommet est enfilé au plus une fois ( $v.d$  infini  $\rightarrow v.d$  fini)
- Boucle **while** exécutée  $O(|V|)$  fois
- Boucle interne :  $O(|E|)$  au total
- Au total :  $O(|V| + |E|)$

# Parcours en largeur d'abord

## ■ Correction :

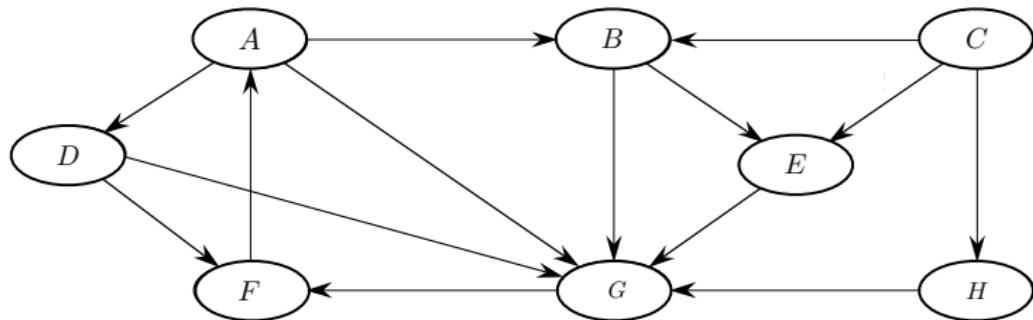
- ▶ L'algorithme fait bien un parcours du graphe en largeur et  $v.d$  contient bien la distance minimale de  $s$  à  $v$
- ▶ Ok intuitivement mais pas évident à montrer formellement. On le fera plus loin pour l'algorithme de Dijkstra (calcul du plus court chemin)

## ■ Applications :

- ▶ Calcul des plus courtes distances d'un sommet à tous les autres
- ▶ Recherche du plus court chemin entre deux sommets
- ▶ Calcul du diamètre d'un arbre
- ▶ Tester si un graphe est biparti
- ▶ ...

# Parcours en profondeur d'abord

- Parcours du graphe en profondeur :
  - ▶ On suit immédiatement les arêtes incidentes au dernier sommet visité
    - ▶ Au lieu de les mettre en attente dans une file
  - ▶ On revient en arrière (*backtrack*) quand le sommet visité n'a plus de sommets adjacents non visités
- Exemple :



Parcours en profondeur à partir de  $A$  :  $A-D-F-G-B-E$  ( $C$  et  $H$  pas accessibles)

# Parcours en profondeur : implémentation avec une pile

```
DFS( $G, s$ )
1 for each vertex  $u \in G.V$ 
2      $u.visited = \text{FALSE}$ 
3  $S = \text{"create empty stack"}$ 
4 PUSH( $S, s$ )
5 while not STACK-EMPTY( $S$ )
6      $u = \text{POP}(S)$ 
7     if  $u.visited == \text{FALSE}$ 
8          $u.visited = \text{TRUE}$ 
9         for each  $v \in G.Adj[u]$ 
10            if  $v.visited == \text{FALSE}$ 
11                PUSH( $S, v$ )
```

- On remplace la file  $Q$  par une pile  $S$
- L'attribut *visited* marque les sommets visités
- Initialisation :  $\Theta(|V|)$
- Boucle **while** :  $O(|E| + |V|)$  car :
  - ▶ Ligne 8 :  $O(|V|)$  fois **au total**
  - ▶ Ligne 10-11 :  $O(|E|)$  fois au total
  - ▶ Ligne 6 :  $O(|E|)$  fois au total
- Complexité totale :  $O(|V| + |E|)$

# Parcours en profondeur : implémentation récursive

DFS( $G, s$ )

- 1 **for** each vertex  $u \in G.V$
- 2        $u.visited = \text{FALSE}$
- 3   DFS-REC( $G, s$ )

DFS-REC( $G, s$ )

- 1  $s.visited = \text{TRUE}$
- 2 **for** each  $v \in G.Adj[s]$
- 3       **if**  $v.visited == \text{FALSE}$   
            DFS-REC( $G, v$ )

- Remplace la pile par la récursion
- DFS-REC appelée au plus  $|V|$  fois
- Chaque arête est considérée au plus une fois dans la boucle **for**
- Complexité :  $O(|V| + |E|)$

## Parcourir tous les sommets d'un graphe

- BFS et DFS ne visitent que les nœuds accessibles à partir de la source  $s$ 
  - ▶ Graphe non dirigé : seule la composante connexe contenant  $s$  est visitée
  - ▶ Graphe dirigé : certains sommets peuvent ne pas être accessibles de  $s$  en suivant le sens des arêtes
- Pour parcourir tous les sommets d'un graphe :
  1. On choisit un sommet arbitraire  $v$
  2. On visite tous les sommets accessibles depuis  $v$  (en profondeur ou en largeur)
  3. S'il reste certains sommets non visités, on en choisit un et on retourne en (2)

# Parcours en profondeur de tous les sommets

DFS-ALL( $G$ )

```
1  for each vertex  $u \in G.V$ 
2       $u.visited = \text{FALSE}$ 
3  for each vertex  $u \in G.V$ 
4      if  $u.visited == \text{FALSE}$ 
5          DFS-REC( $G, u$ )
```

DFS-REC( $G, s$ )

```
1   $s.visited = \text{TRUE}$ 
2  for each  $v \in G.Adj[s]$ 
3      if  $v.visited == \text{FALSE}$ 
4          DFS-REC( $G, v$ )
```

■ Complexité :  $\Theta(|V| + |E|)$

- ▶ DFS-REC est appelé sur chaque sommet une et une seule fois

$$\Theta(|V|)$$

- ▶ La boucle **for** de DFS-REC parcourt chaque liste d'adjacence une et une seule fois

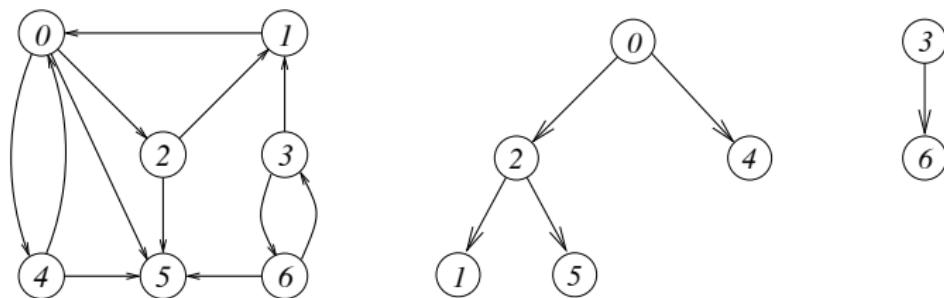
$$\Theta\left(\sum_{u \in G.V} \text{outdegree}(u)\right) = \Theta(|E|)$$

## Sous-graphe de liaison

Un parcours en profondeur de tous les sommets d'un graphe construit un ensemble d'arbres (une **forêt**), appelé sous-graphe de liaison, où :

- les sommets sont les sommets du graphe,
- un sommet  $w$  est le fils d'un sommet  $v$  dans la forêt si  $\text{DFS-REC}(G, w)$  est appelé depuis  $\text{DFS-REC}(G, v)$

Exemple :



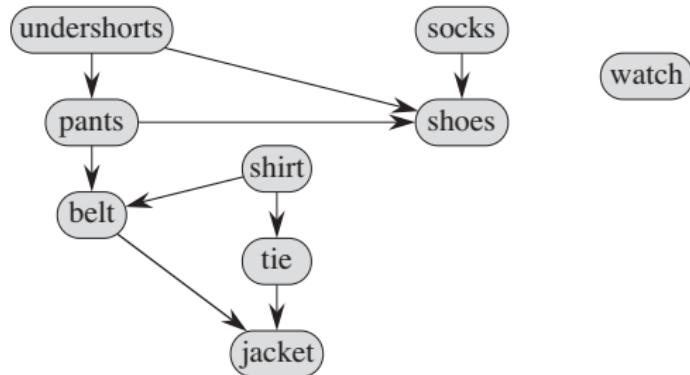
(*Exercice : modifiez DFS-ALL et DFS-REC pour construire la forêt*)

# Application : tri topologique

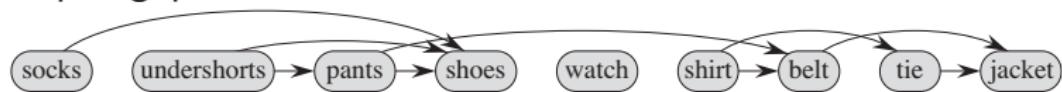
- Tri topologique :
  - ▶ Etant donné un **graphe acyclique dirigé** (DAG), trouver un ordre des sommets tel qu'il n'y ait pas d'arête d'un nœud vers un des nœuds qui le précèdent dans l'ordre
  - ▶ On peut montrer que c'est possible si (et seulement si) le graphe est acyclique
- Exemples d'applications :
  - ▶ Trouver un ordre pour suivre un ensemble de cours qui tienne compte des prérequis de chaque cours
    - ▶ Pour suivre SDA, il faut avoir suivi Introduction à la programmation
  - ▶ Résoudre les dépendances pour l'installation de logiciels
    - ▶ Trouver un ordre d'installation de manière à ce que chaque logiciel soit installé après tous ceux dont il dépend

# Illustration

## Graphe



## Un tri topologique



## Marquage des sommets pour le parcours en profondeur

- Dans le cadre d'un parcours en profondeur de tous les sommets, DFS-REC est appelé une et une seule fois sur chaque sommet
- Lors de l'exécution de DFS-ALL, on dira qu'un sommet  $v$  est **fini** si l'appel  $\text{DFS-REC}(G, v)$  est terminé
- A un moment donné, les sommets peuvent être dans les trois états suivants :
  - ▶ pas encore visité (on dira que  $v$  est **blanc**)
  - ▶ visité mais pas encore fini ( $v$  est **gris**)
  - ▶ fini ( $v$  est **noir**)

# Marquage des sommets pour le parcours en profondeur

DFS-ALL( $G$ )

- 1 **for** each vertex  $u \in G.V$
- 2      $u.color = \text{WHITE}$
- 3 **for** each vertex  $u \in G.V$
- 4     **if**  $u.color == \text{WHITE}$
- 5         DFS-REC( $G, u$ )

DFS-REC( $G, s$ )

- 1  $s.color = \text{GRAY}$
- 2 **for** each  $v \in G.Adj[s]$
- 3     **if**  $s.color == \text{WHITE}$
- 4         DFS-REC( $G, v$ )
- 5  $s.color = \text{BLACK}$

- **Lemme.** Soit  $s$  un sommet de  $G$ . Considérons le moment de l'exécution de DFS-ALL( $G$ ) où DFS-REC( $G, s$ ) est appelé. Pour tout sommet  $v$ , on a :
  1. Si  $v$  est blanc et accessible depuis  $s$ , alors  $v$  sera noir avant  $s$
  2. Si  $v$  est gris, alors  $s$  est accessible depuis  $v$

## Trouver un tri topologique par DFS

- Soit un graphe  $G = (V, E)$  et l'ordre suivant défini sur  $V$  :

$$s \prec v \Leftrightarrow v \text{ devient noir avant } s$$

- Si  $G$  est un DAG, alors  $\prec$  définit un ordre topologique sur  $G$

### ■ Preuve :

- ▶ Soit  $(s, v) \in E$ . On doit montrer que  $s \prec v$ .
- ▶ Considérons le moment où  $\text{DFS-REC}(G, s)$  est appelé :
  - ▶ Si  $v$  est déjà noir, alors  $s \prec v$  par définition de  $\prec$
  - ▶ Si  $v$  est blanc, alors  $v$  sera noir avant  $s$  par le lemme précédent. Donc  $s \prec v$
  - ▶ Si  $v$  est gris,  $s$  est accessible depuis  $v$  et donc il y a un cycle (puisque  $(s, v) \in E$ ). Ce qui ne peut pas arriver vu que  $G$  est un DAG

□

# Tri topologique : implémentation

TOP-SORT( $G$ )

```
1 for each vertex  $u \in G.V$ 
2    $u.color = \text{WHITE}$ 
3    $L = \text{"create empty linked list"}$ 
4   for each vertex  $u \in G.V$ 
5     if  $u.color == \text{WHITE}$ 
6       TOP-SORT-REC( $G, u, L$ )
7   return  $L$ 
```

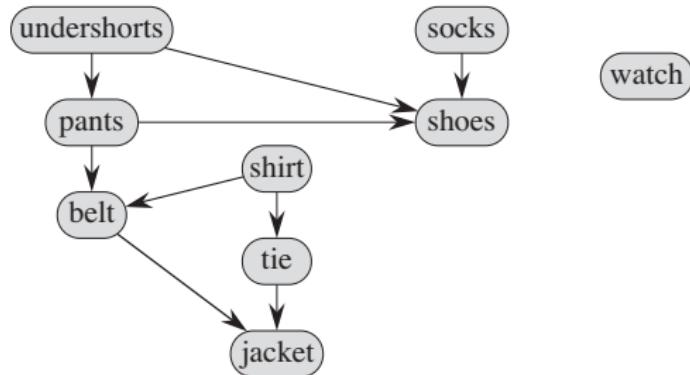
TOP-SORT-REC( $G, s, L$ )

```
1  $s.color = \text{GRAY}$ 
2 for each  $v \in G.Adj[s]$ 
3   if  $s.color == \text{WHITE}$ 
4     TOP-SORT-REC( $G, v, L$ )
5   elseif  $s.color == \text{GREY}$ 
6     ERROR " $G$  has a cycle"
7    $s.color = \text{BLACK}$ 
8   INSERT-FIRST( $L, s$ )
```

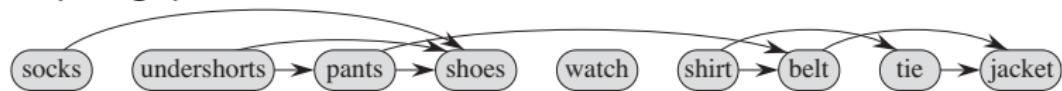
Complexité :  $\Theta(|V| + |E|)$

# Illustration

## Graphe



## Un tri topologique



## Une autre solution

- Approche gloutonne :
  - ▶ Rechercher un sommet qui n'a pas d'arête entrante
    - ▶ C'est toujours possible dans un graphe acyclique
  - ▶ Ajouter ce sommet à un tri topologique du graphe dont on a retiré ce sommet et toutes ses arêtes
    - ▶ Ce graphe reste acyclique
- Complexité identique à l'approche DFS :  $\Theta(|E| + |V|)$

# Plan

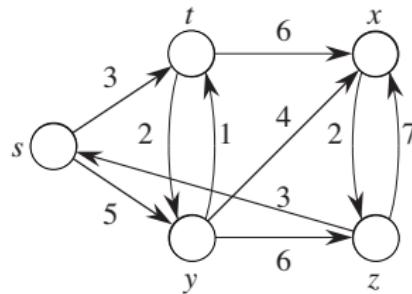
1. Définitions
2. Représentation des graphes
3. Parcours de graphes
4. Plus courts chemins
  - Définitions et algorithme général
  - Bellman-Ford
  - Dijkstra
  - Floyd-Warshall
5. Arbre couvrant

## Définitions

- Soit un graphe dirigé  $G = (V, E)$  et une fonction de poids  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$
- Un chemin (du sommet  $v_1$  au sommet  $v_k$ ) est une séquence de nœuds  $v_1, v_2, \dots, v_k$  telle que  $\forall i = 1, \dots, k - 1, (v_i, v_{i+1}) \in E$ .
- Le poids (ou coût) d'un chemin  $p$  est la somme du poids des arêtes qui le composent :

$$w(p) = w(v_1, v_2) + w(v_2, v_3) + \dots + w(v_{k-1}, v_k)$$

- Exemple



$$w(s \rightarrow y \rightarrow t \rightarrow x \rightarrow z) = 5 + 1 + 6 + 2 = 14$$

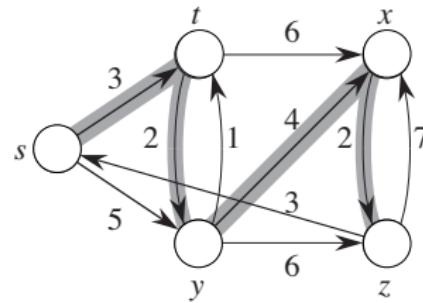
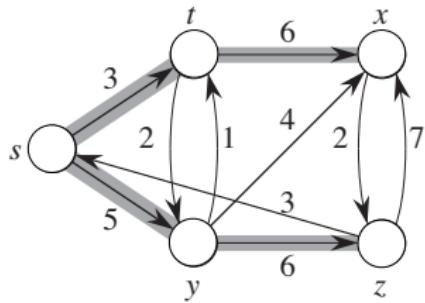
## Plus courts chemins : définition

- Un **plus court chemin** entre deux sommets  $u$  et  $v$  est un chemin  $p$  de  $u$  à  $v$  de poids  $w(p)$  le plus faible possible
- $\delta(u, v)$  est le poids d'un plus court chemin de  $u$  à  $v$  :

$$\delta(u, v) = \min\{w(p) | p \text{ est un chemin de } u \text{ à } v\}$$

(S'il n'y a pas de chemin entre  $u$  et  $v$ ,  $\delta(u, v) = \infty$  par définition)

- Exemples :



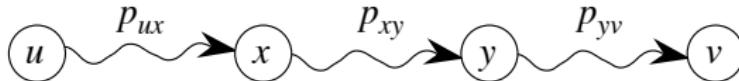
# Plus courts chemins : exemple d'application



# Propriété de sous-structure optimale

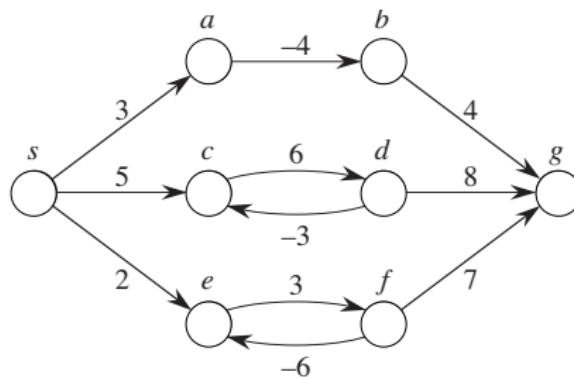
- Lemme : Tout sous-chemin d'un chemin le plus court est un chemin le plus court entre ses extrémités
- Preuve : Par l'absurde
  - ▶ Soit un plus court chemin  $p_{uv}$  entre  $u$  et  $v$  et soit un sous-chemin  $p_{xy}$  de ce chemin défini par ses extrémités  $x$  et  $y$
  - ▶ S'il existe un chemin plus court que  $p_{xy}$  entre  $x$  et  $y$ , on pourrait remplacer  $p_{xy}$  par ce chemin dans le chemin entre  $u$  et  $v$  et obtenir ainsi un chemin plus court que  $p_{uv}$  entre  $u$  et  $v$

□



## Poids négatifs

- Les poids peuvent être négatifs
- Ok la plupart du temps mais non permis par certains algorithmes (Dijkstra)
- Problème en cas de cycle de poids négatif (**cycle absorbant**) :
  - ▶ En restant dans le cycle négatif, on peut diminuer arbitrairement le poids du chemin
  - ▶ Par définition, on fixera  $\delta(u, v) = -\infty$  s'il y a un chemin de  $u$  à  $v$  qui passe par un cycle négatif



$$\delta(s, e) = \delta(s, f) = \delta(s, g) = -\infty$$

# Cycles

Un chemin le plus court ne peut pas contenir de cycles

- Cycles de poids négatifs : on les a déjà exclus par définition
- Cycles de poids positifs : on peut obtenir un chemin plus court en les supprimant
- Cycles de poids nuls : il n'y a pas de raison de les utiliser et donc, on ne le fera pas

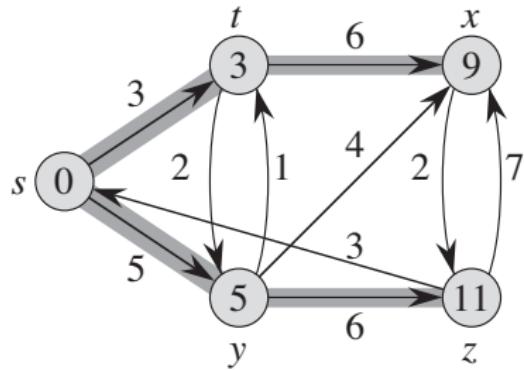
# Plus courts chemins : variantes de problèmes

Différentes variantes du problème :

- **Origine unique** : trouver tous les plus courts chemins d'un sommet à tous les autres
  - ▶ Algorithmes de Dijkstra (glouton) et Bellman-Ford (programmation dynamique)
- **Destination unique** : trouver tous les plus courts chemins de tous les sommets vers un sommet donné
  - ▶ Essentiellement le même problème que l'origine unique
- **Paire unique** : trouver un plus court chemin entre deux sommets donnés.
  - ▶ Pas de meilleure solution que de résoudre le problème “origine unique”.
- **Toutes les paires** : trouver tous les plus courts chemins de  $u$  à  $v$  pour toutes les paires de sommets  $(u, v) \in V \times V$ .
  - ▶ Algorithme de Floyd-Warshall

## Recherche du plus court chemin, origine unique

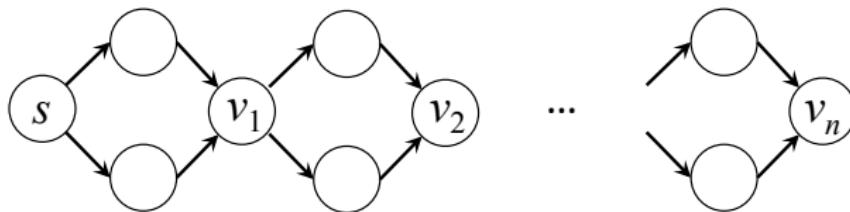
- Entrées : un graphe dirigé pondéré et un sommet  $s$  (l'origine)
- Sorties : deux attributs pour chaque sommet :
  - ▶  $v.d = \delta(s, v)$ , la plus courte distance de  $s$  vers chaque nœud
  - ▶  $v.\pi =$  le prédécesseur de chaque sommet  $v$  dans un plus court chemin de  $s$  à  $v$   
(formant l'[arbre](#) des plus courts chemins partant de  $s$ )



(Chaque nœud  $v$  est marqué de la valeur de  $\delta(s, v)$ )

## Approche force brute

- Calculer le poids de tous les chemins entre deux nœuds et renvoyer le plus court
- Problème :
  - ▶ Le nombre de chemins peut être infini (dans le cas de cycles)
  - ▶ Le nombre de chemins peut être exponentiel par rapport au nombre de sommets et d'arêtes



$(O(n) \text{ nœuds et } 2^n \text{ chemins entre } s \text{ et } v_n)$

## Schéma général d'un algorithme

- Objectif : calculer  $v.d = \delta(s, v)$  pour tout  $v \in V$
- Idée d'algorithme :
  - ▶  $v.d$  à une itération donnée contient une estimation du poids d'un plus court chemin de  $s$  à  $v$
  - ▶ Invariant :  $v.d \geq \delta(s, v)$
  - ▶ Initialisation :  $v.d = +\infty$  ( $\forall v \in V$ )
  - ▶ A chaque itération, on tente d'améliorer (c'est-à-dire diminuer)  $v.d$  en maintenant l'invariant
  - ▶ A la convergence, on aura  $v.d = \delta(s, v)$
  - ▶ L'amélioration est basée sur l'utilisation de l'inégalité triangulaire

# Inégalité triangulaire et relâchement

- Théorème : Pour tout  $u, v, x \in V$ , on a

$$\delta(u, v) \leq \delta(u, x) + \delta(x, v)$$

- Preuve : Aller de  $u$  à  $v$  en empruntant un plus court chemin passant par  $x$  ne peut pas être plus court qu'un plus court chemin de  $u$  à  $v$ .

- Corollaire : Pour tout  $(u, v) \in E$ , on a

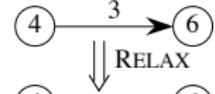
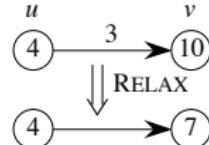
$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$$

- Amélioration d'une arête (Relâchement) :

RELAX( $u, v, w$ )

1    if  $v.d > u.d + w(u, v)$

2         $v.d = u.d + w(u, v)$



# Schéma général d'un algorithme

SINGLE-SOURCE-SP( $G, w, s$ )

- 1 INIT-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
- 2 **while**  $\exists(u, v) : v.d > u.d + w(u, v)$
- 3     Pick one edge  $(u, v)$
- 4     RELAX( $u, v, w$ )

INIT-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )

- 1 **for** each  $v \in G.V$
- 2      $v.d = \infty$
- 3      $s.d = 0$

RELAX( $u, v, w$ )

- 1 **if**  $v.d > u.d + w(u, v)$
- 2      $v.d = u.d + w(u, v)$

- On obtient différents algorithmes en modifiant la manière dont on sélectionne les arêtes

# Schéma général d'un algorithme

SINGLE-SOURCE-SP( $G, w, s$ )

- 1 INIT-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
- 2 **while**  $\exists(u, v) : v.d \geq u.d + w(u, v)$
- 3     Pick one edge  $(u, v)$
- 4     RELAX( $u, v, w$ )

INIT-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )

- 1 **for** each  $v \in G.V$
- 2      $v.d = \infty$
- 3      $v.\pi = \text{NIL}$
- 4      $s.d = 0$

RELAX( $u, v, w$ )

- 1 **if**  $v.d > u.d + w(u, v)$
- 2      $v.d = u.d + w(u, v)$
- 3      $v.\pi = u$

- En ajoutant la construction de l'arbre des plus courts chemins

# Propriétés de l'algorithme général

- Propriété 1 : L'algorithme général maintient toujours l'invariant
- Preuve : Par induction sur le nombre d'itérations
  - ▶ Cas de base : l'invariant est vérifié après l'initialisation
  - ▶ Cas inductif :
    - ▶ Soit un appel à  $\text{relax}(u, v, w)$
    - ▶ Avant l'appel, on suppose que l'invariant est vérifié et donc  $u.d \geq \delta(s, u)$
    - ▶ Par l'inégalité triangulaire :
      - ▶ Suite à l'assignation  $v.d = u.d + w(u, v)$ , on a bien

$$\begin{aligned}\delta(s, v) &\leq \delta(s, u) + \delta(u, v) \\ &\leq u.d + w(u, v)\end{aligned}$$

- ▶ Suite à l'assignation  $v.d = u.d + w(u, v)$ , on a bien

$$v.d \geq \delta(s, v)$$

## Propriétés de l'algorithme général

- Propriété 2 : Une fois que  $v.d = \delta(s, v)$ , il n'est plus modifié
- Preuve : On a toujours  $v.d \geq \delta(s, v)$  et un relâchement ne peut que diminuer  $v.d$
- Vu les propriétés 1 et 2, pour montrer qu'un algorithme du plus court chemin est correct, on devra montrer que le choix des arêtes à relâcher mènera bien à  $v.d = \delta(s, v)$  pour tout  $v$ .

# Algorithme de Bellman-Ford

```
SINGLE-SOURCE-SP( $G, w, s$ )
```

- 1 INIT-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
- 2 **while**  $\exists(u, v) : v.d \geq u.d + w(u, v)$
- 3     Pick one edge  $(u, v)$
- 4     RELAX( $u, v, w$ )

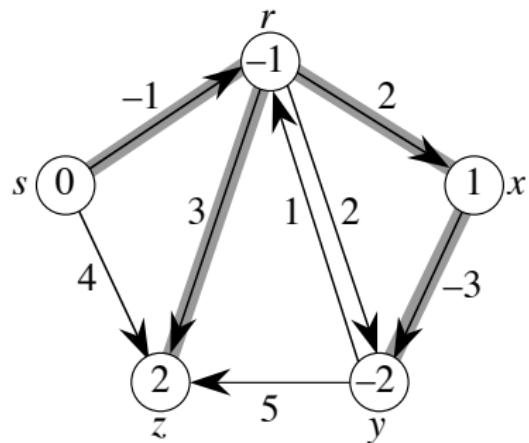
- Algorithme basé sur le relâchement
- Soit les arêtes  $e_1, \dots, e_m$ , dans un ordre quelconque.
- Le relâchement se fait dans cet ordre :

$$\underbrace{e_1, e_2, \dots, e_m; e_1, e_2, \dots, e_m; \dots; e_1, e_2, \dots, e_m}_{|V|-1 \text{ fois}}$$

# Algorithme de Bellman-Ford

```
BELLMAN-FORD( $G, w, s$ )
1  INIT-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2  for  $i=1$  to  $|G.V| - 1$ 
3    for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
4      RELAX( $u, v, w$ )
```

Illustration sur un exemple :



## Analyse : complexité

```
BELLMAN-FORD( $G, w, s$ )
1  INIT-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2  for  $i=1$  to  $|G.V| - 1$ 
3    for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
4      RELAX( $u, v, w$ )
```

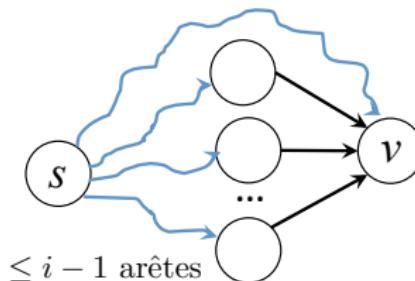
- La boucle principale relâche toutes les arêtes  $|V| - 1$  fois
- Complexité :  $\Theta(|V| \cdot |E|)$ 
  - ▶ En supposant qu'on puisse parcourir les arêtes en  $O(|E|)$

## Analyse : correction

- On supposera qu'il n'y a pas de cycle de poids négatif
- Propriété 3 : Après  $i$  itérations de l'algorithme,  $v.d$  est le poids d'un plus court chemin de  $s$  à  $v$  utilisant au plus  $i$  arêtes :

$$v.d \leq \min\{w(p) : |p| \leq i\}$$

- Preuve : Par induction :
  - ▶ Cas de base :  $v.d = +\infty$  si  $i = 0$  et  $s.d = 0$
  - ▶ Cas inductif :
    - ▶ Avant l'itération  $i$ , on a  $v.d \leq \min\{w(p) : |p| \leq i - 1\}$
    - ▶ Cette propriété reste vraie à tout moment de l'itération puisque RELAX ne peut que diminuer les  $v.d$
    - ▶ L'itération  $i$  considère tous les chemins avec  $i$  arêtes ou moins en relâchant toutes les arêtes entrantes en  $v$



## Analyse : correction

- Si le graphe ne contient pas de cycles de poids négatif, alors, à la fin de l'exécution de l'algorithme de Bellman-Ford, on a  $v.d = \delta(s, v)$  pour tout  $v \in V$ .
- Preuve :
  - ▶ Sans cycle négatif, tout plus court chemin est simple, c'est-à-dire sans cycle
  - ▶ Tout chemin simple a au plus  $|V|$  sommets et donc  $|V| - 1$  arêtes
  - ▶ Par la propriété 3, on a  $v.d \leq \delta(s, v)$  après  $|V| - 1$  itérations
  - ▶ Par l'invariant, on a  $v.d \geq \delta(s, v) \Rightarrow v.d = \delta(s, v)$



# Programmation dynamique

- L'algorithme de Bellman-Ford implémente en fait une approche par programmation dynamique<sup>5</sup>
- Soit  $v.d[i]$ , la longueur du plus court chemin de  $s$  à  $v$  utilisant au plus  $i$  arêtes
- On a

$$v.d[i] = \begin{cases} 0 & \text{si } v = s \text{ et } i = 0 \\ +\infty & \text{si } v \neq s \text{ et } i = 0 \\ \min\{v.d[i - 1], \min_{(u,v) \in E}\{u.d[i - 1] + w(u, v)\}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

(Exercice : implémenter l'algorithme de Bellman-Ford à partir de la récurrence et le comparer avec la version précédente)

---

5. Bellman est en fait l'inventeur de la programmation dynamique

# Détection des cycles négatifs

BELLMAN-FORD( $G, w, s$ )

```
1 INIT-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2 for  $i=1$  to  $|G.V| - 1$ 
3   for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
4     RELAX( $u, v, w$ )
5   for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
6     if  $v.d > u.d + w(u, v)$ 
7       return TRUE
8 return FALSE
```

- Renvoie TRUE si un cycle négatif (accessible depuis  $s$ ) existe, FALSE sinon
- En cas de cycle négatif, il existe toujours (et donc aussi en sortie de boucle) au moins un  $v.d$  qu'on peut améliorer par relâchement d'un arc  $(u, v)$

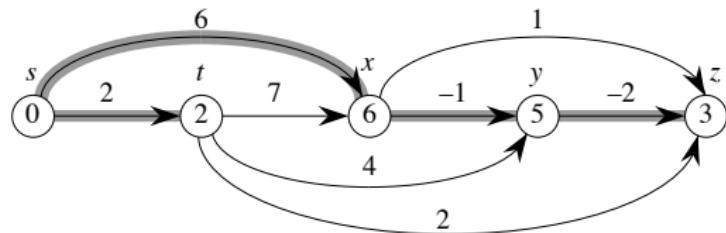
# Graphe dirigé acyclique (DAG)

Version plus efficace dans le cas d'un graphe dirigé acyclique :

DAG-SHORTEST-PATH( $G, w, s$ )

- 1  $L = \text{TOP-SORT}(G)$
- 2 INIT-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
- 3 **for** each vertex  $u$ , taken in their order in  $L$
- 4     **for** each vertex  $v \in G.\text{Adj}[u]$
- 5         RELAX( $u, v, w$ )

Exemple :



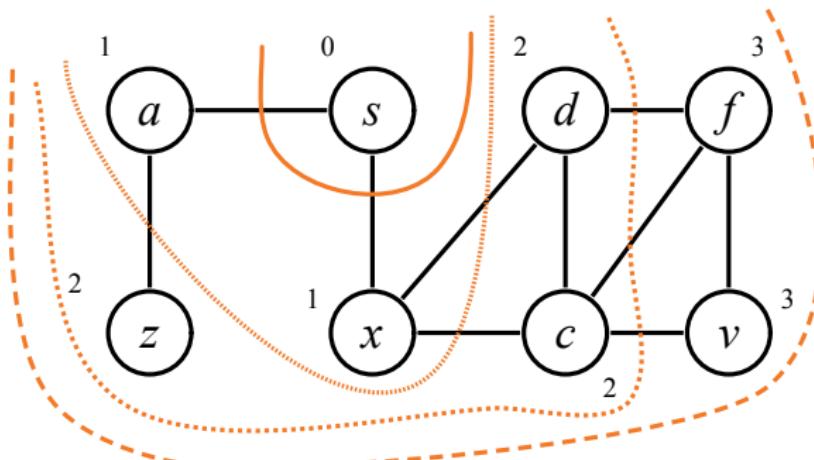
Complexité :  $\Theta(|V| + |E|)$

## Poids unitaires : parcours en largeur d'abord

- On peut obtenir une solution plus rapide en imposant certaines contraintes sur la nature des poids
- Si les poids sont tous égaux à 1, le parcours en largeur permet de calculer les  $v.d$  en  $O(|V| + |E|)$
- Rappel :

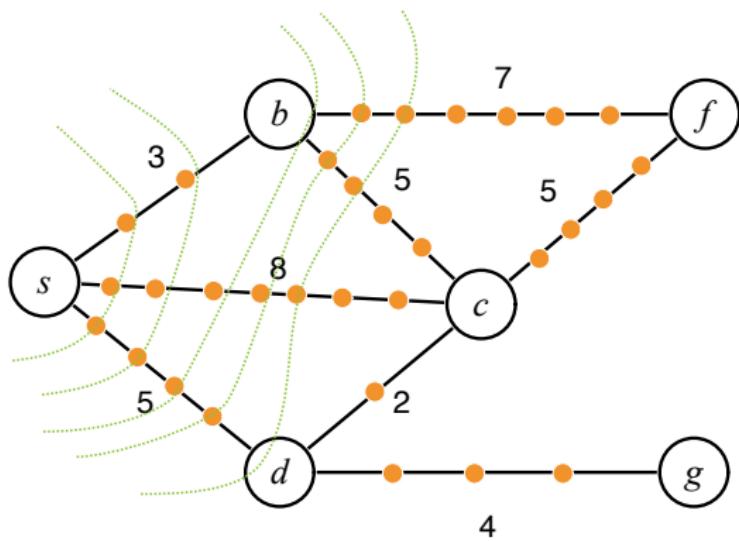
```
BFS( $G, s$ )
1 for each vertex  $u \in G.V \setminus \{s\}$ 
2    $u.d = \infty$ 
3    $s.d = 0$ 
4    $Q = \text{"create empty Queue"}$ 
5   ENQUEUE( $Q, s$ )
6   while not QUEUE-EMPTY( $Q$ )
7      $u = \text{DEQUEUE}(Q)$ 
8     for each  $v \in G.Adj[u]$ 
9       if  $v.d = \infty$ 
10          $v.d = u.d + 1$ 
11         ENQUEUE( $Q, v$ )
```

## Poids unitaires : parcours en largeur d'abord



## Poids entiers, positifs et bornés

- Si les poids sont des entiers compris entre 1 ...  $W$  :
  - ▶ On définit un nouveau graphe en éclatant chaque arête de poids  $w$  en  $w$  arêtes de poids 1
  - ▶ On applique le parcours en largeur sur ce nouveau graphe
- Complexité :  $O(|V| + W|E|)$



## Poids positifs : approche gloutonne

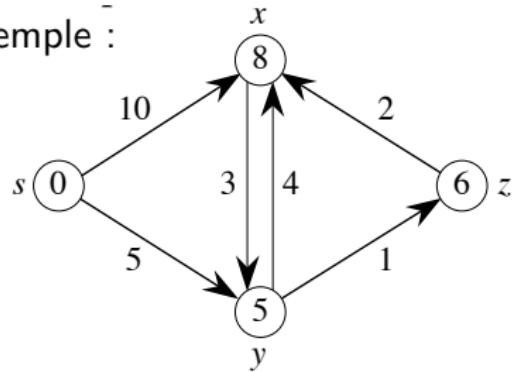
- Algorithme de Dijkstra : généralisation du parcours en largeur à des poids positifs réels
- Idée :
  - ▶ On maintient un ensemble  $S$  de sommets dont le poids d'un plus court chemin à partir de  $s$  est connu
  - ▶ A chaque étape, on ajoute à  $S$  un sommet  $v \in V \setminus S$  dont la distance à  $s$  est minimale
  - ▶ On met à jour, par relâchement, les distances estimées des sommets adjacents à  $v$

# Algorithme de Dijkstra

DIJKSTRA( $G, w, s$ )

- 1 INIT-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
- 2  $S = \emptyset$
- 3  $Q = \text{"create an empty min priority queue from } G.V"$
- 4 **while** not EMPTY( $Q$ )  
5      $u = \text{EXTRACT-MIN}(Q)$   
6      $S = S \cup \{u\}$   
7     **for** each  $v \in G.\text{Adj}[u]$   
8         RELAX( $u, v, w$ ) // ! RELAX doit modifier la clé de  $v$  dans  $Q$

Illustration sur un exemple :



## Analyse : complexité

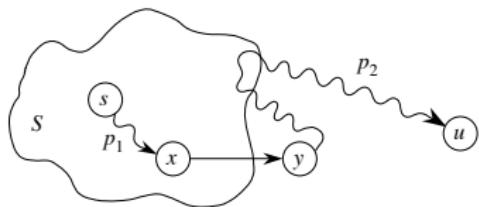
- Si la file à priorité est implémentée par un tas (min), l'extraction et l'ajustement de la clé sont  $O(\log |V|)$
- Chaque sommet est extrait de la file à priorité une et une seule fois  
     $\Rightarrow O(|V| \log |V|)$
- Chaque arête est parcourue une et une seule fois et entraîne au plus un ajustement<sup>6</sup> de clé  
     $\Rightarrow O(|E| \log |V|)$
- Total :  $O(|V| \log |V| + |E| \log |V|) = O(|E| \log |V|)$ 
  - ▶  $|E| \log |V|$  domine  $|V| \log |V|$  si le graphe est connexe

---

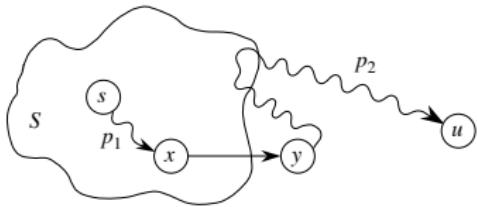
### 6. Similaire à un HEAP-DECREASE-KEY

## Analyse : correction

- Théorème : l'algorithme de Dijkstra se termine avec  $v.d = \delta(s, v)$  pour tout  $v \in V$
- Preuve :
  - ▶ Lorsqu'un nœud  $v$  est extrait de la file, son  $v.d$  n'est plus modifié. Il suffit donc de montrer que  $v.d = \delta(s, v)$  lorsque  $v$  est extrait de  $Q$
  - ▶ Par l'invariant (propriété 1), on a  $v.d \geq \delta(s, v)$  à tout moment
  - ▶ Par l'absurde, supposons qu'il existe un nœud  $u$  tel que  $u.d > \delta(s, u)$  lors de son extraction et soit  $u$  le premier nœud satisfaisant cette propriété.
  - ▶ Soit  $y$  le premier nœud d'un plus court chemin de  $s$  à  $u$  qui se trouve dans  $Q$  avant l'extraction de  $u$  et soit  $x$  son prédécesseur



## Analyse : correction



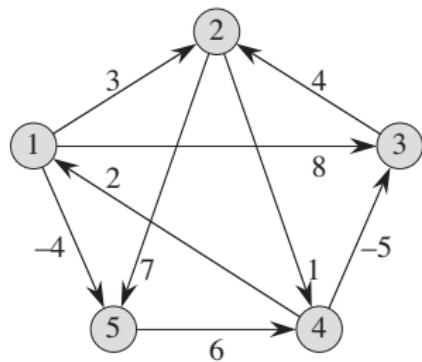
- ▶ Puisque  $u$  est le premier nœud violant l'invariant, on a  $x.d = \delta(s, x)$
- ▶ Par la propriété de sous-structure optimale, le sous-chemin de  $s$  à  $y$  est un plus court chemin et  $y.d$  a été assigné à  $x.d + w(x, y) = \delta(s, x) + w(x, y) = \delta(s, y)$  lors de l'extraction de  $x$
- ▶ On a donc  $y.d = \delta(s, y) \leq \delta(s, u) \leq u.d$
- ▶ Or,  $y.d \geq u.d$  puisqu'on s'apprête à extraire  $u$  de la file
- ▶ D'où  $y.d = \delta(s, y) = \delta(s, u) = u.d$ , ce qui contredit notre hypothèse

□

# Plus court chemin pour toutes les paires de sommets

Déterminer les plus courts chemins pour toutes les paires de sommets :

- Entrées : un graphe dirigé  $G = (V, E)$ , une fonction de poids  $w$ . Les sommets sont numérotés de 1 à  $n$
- Sortie : une matrice  $D = (d_{ij})$  de taille  $n \times n$  où  $d_{ij} = \delta(i, j)$  pour tous sommets  $i$  et  $j$



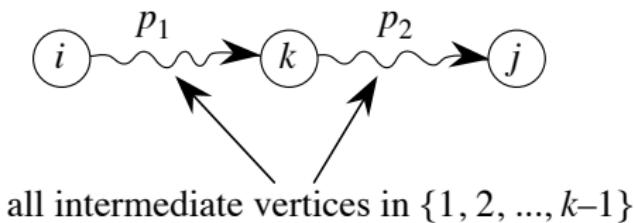
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

## Plus court chemin pour toutes les paires de sommets

- Dans le cas général, on peut appliquer Bellman-Ford sur chaque sommet
  - ▶  $O(|V|^2|E|)$ , ou  $O(V^4)$  si le graphe est dense ( $E = \Theta(V^2)$ )
- S'il n'y a pas de poids négatifs, on peut appliquer Dijkstra sur chaque sommet
  - ▶  $O(|V||E| \log |V|)$ , ou  $O(V^3 \log |V|)$  si le graphe est dense
- Il est possible d'obtenir  $O(V^3)$  par programmation dynamique

## Une solution par programmation dynamique

- Pour un chemin  $p = \langle v_1, v_2, \dots, v_l \rangle$ , un sommet **intermédiaire** est un sommet de  $p$  autre que  $v_1$  ou  $v_l$
- Soit  $d_{ij}^{(k)}$  le poids d'un plus court chemin entre  $i$  et  $j$  tel que tous les sommets intermédiaires sont dans le sous-ensemble de sommets  $\{1, 2, \dots, k\}$
- Soit un plus court chemin  $p$  entre  $i$  et  $j$  avec tous les sommets dans  $\{1, 2, \dots, k\}$  :
  - ▶ Si  $k$  n'est pas un sommet intermédiaire de  $p$ , alors tous les sommets intermédiaires de  $p$  sont dans  $\{1, 2, \dots, k - 1\}$
  - ▶ Si  $k$  est un sommet intermédiaire, tous les sommets intermédiaires des sous-chemins entre  $i$  et  $k$  et entre  $k$  et  $j$  appartiennent à  $\{1, 2, \dots, k - 1\}$



# Algorithme de Floyd-Warshall

## ■ Formulation récursive :

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w(i,j) & \text{si } k = 0, \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

## ■ Implémentation ascendante : $\Theta(|V|^3)$

- ▶  $W = (w_{ij})$  est la matrice d'adjacence pondérée
- ▶  $w_{ij} = w(i,j)$  si  $(i,j) \in E$ ,  $+\infty$  sinon

FLOYD-WARSHALL( $W, n$ )

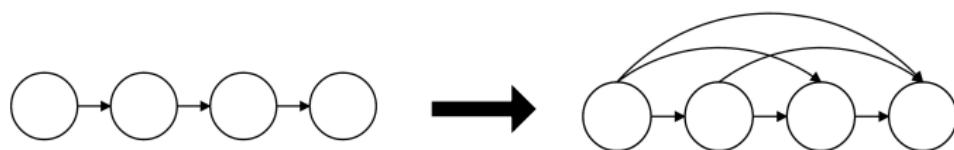
```
1   $D^{(0)} = W$ 
2  for  $k = 1$  to  $n$ 
3      let  $D^{(k)}$  =  $(d_{ij}^{(k)})$  be a new  $n \times n$  matrix
4      for  $i = 1$  to  $n$ 
5          for  $j = 1$  to  $n$ 
6               $d_{ij}^{(k)} = \text{MIN}(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$ 
7  return  $D^{(n)}$ 
```

## Fermeture transitive d'un graphe

- Soit un graphe dirigé  $G = (V, E)$ . La fermeture transitive de  $G$  est le graphe  $G^* = (V, E^*)$  tel que :

$$E^* = \{(i, j) : \exists \text{ un chemin de } i \text{ à } j \text{ dans } G\}$$

- Exemple :



- Solution directe :
  - ▶ Assigner un poids  $w_{ij} = 1$  à toute arête  $(i, j) \in E$
  - ▶ Appliquer l'algorithme de Floyd-Warshall
  - ▶ Si  $d_{ij} < \infty$ , il y a un chemin entre  $i$  et  $j$  dans  $G$
  - ▶ Sinon,  $d_{ij} = \infty$  et il n'y a pas de chemin

## Fermeture transitive d'un graphe

Une solution plus simple en modifiant l'algorithme de Floyd-Warshall :

- Soit  $t_{ij}^{(k)} = 1$  s'il y a un chemin de  $i$  à  $j$  avec tous les nœuds intermédiaires dans  $\{1, 2, \dots, k\}$ , 0 sinon
- On a :

$$t_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, i \neq j \text{ et } (i, j) \notin E \\ 1 & \text{si } k = 0 \text{ et } i = j \text{ ou } (i, j) \in E \\ t_{ij}^{(k-1)} \vee (t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)}) & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

- Même implémentation que Floyd-Warshall
  - ▶ on remplace min par  $\vee$  et + par  $\wedge$

## Fermeture transitive d'un graphe : algorithme

TRANSITIVE-CLOSURE( $G, n$ )

```
1 Let  $T^{(0)} = (t_{ij}^{(0)})$  be a new  $n \times n$  matrix
2 for  $i = 1$  to  $n$ 
3     for  $j = 1$  to  $n$ 
4         if  $i == j$  or  $(i, j) \in G.E$ 
5              $t_{ij}^{(0)} = 1$ 
6         else  $t_{ij}^{(0)} = 0$ 
7     for  $k = 1$  to  $n$ 
8         let  $T^k = (t_{ij}^{(k)})$  be a new  $n \times n$  matrix
9         for  $i = 1$  to  $n$ 
10            for  $j = 1$  to  $n$ 
11                 $t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee (t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)})$ 
12 return  $D^{(n)}$ 
```

- Complexité :  $\Theta(|V|^3)$ 
  - ▶ Idem Floyd-Warshall mais opérations plus simples

## Plus court chemin : synthèse

- Origine unique, graphe dirigé acyclique :
  - ▶ Relâchement en suivant un ordre topologique
  - ▶  $\Theta(|V| + |E|)$
- Origine unique, graphe dirigé, poids positifs :
  - ▶ Algorithme de Dijkstra
  - ▶  $\Theta(|E| \log |V|)$
- Origine unique, graphe dirigé, poids quelconques :
  - ▶ Algorithme de Bellman-Ford
  - ▶  $\Theta(|V| \cdot |E|)$
- Toutes les paires, graphe dirigé ou non :
  - ▶ Algorithme de Floyd-Warshall
  - ▶  $\Theta(|V|^3)$

# Plan

1. Définitions

2. Représentation des graphes

3. Parcours de graphes

4. Plus courts chemins

Définitions et algorithme général

Bellman-Ford

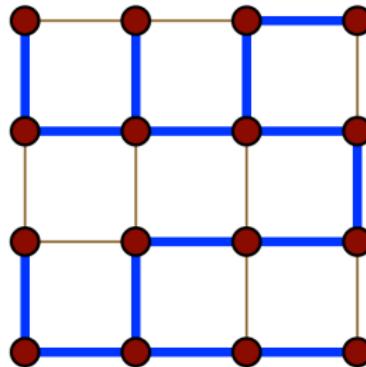
Dijkstra

Floyd-Warshall

5. Arbre couvrant

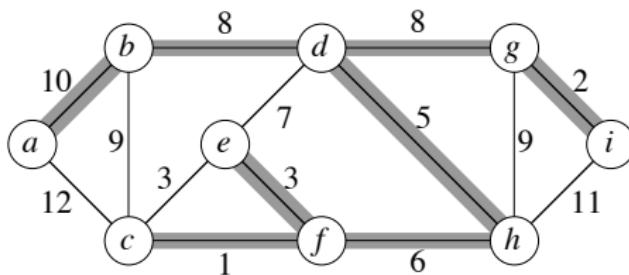
## Arbre couvrant

- Définition : un **arbre couvrant** (*spanning tree*) pour un graphe connexe  $(V, E)$  non dirigé est un arbre (i.e. un graphe acyclique)  $T$  tel que :
  - ▶ l'ensemble des nœuds de  $T$  est égal à  $V$ , et
  - ▶ l'ensemble des arcs de  $T$  est un sous-ensemble de  $E$
- Construction : par un parcours en largeur ou en profondeur (graphe de liaison)
- Exemple

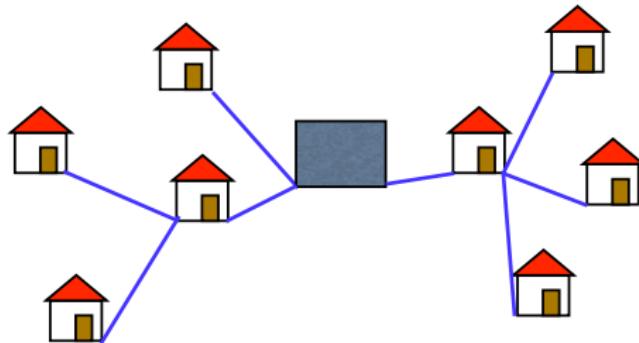


# Arbre couvrant de poids minimum

- Définition : un **arbre couvrant de poids minimum**, ACM, (*minimum spanning tree, MST*) pour un graphe pondéré connexe  $(V, E)$  est un arbre  $(V, E')$  tel que :
  - ▶  $(V, E')$  est un arbre couvrant de  $(V, E)$ , et
  - ▶ la valeur de  $\sum_{e \in E'} w(e)$  est minimale parmi tous les arbres couvrants de  $(V, E)$ , où  $w(e)$  dénote le poids de l'arc  $e$
- Exemple :



# Applications



- Conception de réseaux : connecter des entités en minimisant le coût de la connection
  - ▶ Raccorder des maisons à un central téléphonique en minimisant les longueurs de cables
  - ▶ Elaborer un système routier pour connecter des maisons
  - ▶ ...
- Dissémination de contenu/routage sur internet
- Design de circuits imprimés
- ...

# Approche générique

- Idée :
  - ▶ Un ACM est un sous-ensemble d'arêtes du graphe initial
  - ▶ On démarre avec un ensemble d'arêtes  $A = \emptyset$  vide
  - ▶ On ajoute dans  $A$  des arêtes en respectant l'invariant suivant :
    - ▶ Il existe un ACM qui contient les arêtes de  $A$
  - ▶ S'il existe un ACM contenant les arêtes de  $A$ , une arête  $(u, v)$  est **sûre** pour  $A$  ssi il existe un ACM contenant les arêtes de  $A \cup \{(u, v)\}$

- Algorithme générique :

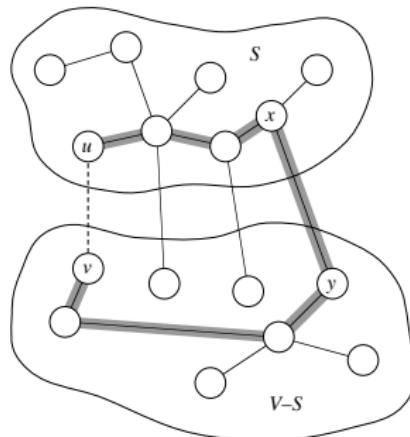
```
GENERIC-MST( $G, w$ )
1    $A = \emptyset$ 
2   while  $A$  is not a spanning tree
3       find an edge  $(u, v)$  that is safe for  $A$ 
4        $A = A \cup \{(u, v)\}$ 
5   return  $A$ 
```

- Comment trouver des arêtes sûres ?

## Arêtes sûres

- Soit  $S \subset V$  et  $A \subseteq E$  :
  - ▶ Une **coupure** (*cut*)  $(S, V \setminus S)$  est une partition des sommets en deux ensembles disjoints  $S$  et  $V \setminus S$
  - ▶ Une arête **traverse** (*crosses*) une coupure  $(S, V \setminus S)$  si une extrémité est dans  $S$  et l'autre dans  $V \setminus S$
  - ▶ Une coupure **respecte**  $A$  ssi il n'y a pas d'arête dans  $A$  qui traverse la coupure
- Théorème : Soit  $A$  un sous-ensemble d'un ACM,  $(S, V \setminus S)$  une coupure qui respecte  $A$  et  $(u, v)$  une arête de **poids minimal** qui traverse la coupure  $(S, V \setminus S)$ .  $(u, v)$  est sûre pour  $A$ .  
*(Propriété des choix gloutons optimaux)*

## Arêtes sûres

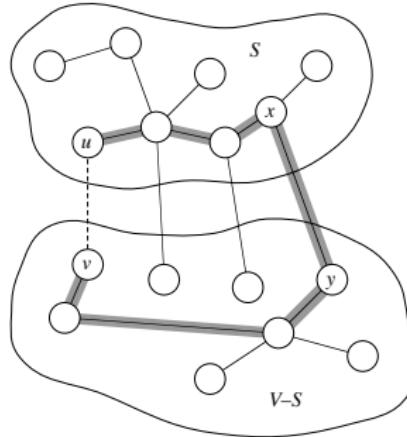


Preuve :

- Soit  $T$  un ACM qui inclut  $A$
- Supposons que  $T$  ne contienne pas  $(u, v)$  et montrons qu'il est possible de construire un arbre  $T'$  qui inclut  $A \cup \{(u, v)\}$
- Puisque  $T$  est un arbre, il n'y a qu'un unique chemin  $p$  entre  $u$  et  $v$  et ce chemin traverse la coupure  $(S, V \setminus S)$ .
- Soit  $(x, y)$  une arête de  $p$  qui traverse la coupure  $(S, V \setminus S)$
- Puisque  $(u, v)$  est l'arête de poids minimum qui traverse la coupure, on a :

$$w(u, v) \leq w(x, y)$$

## Arêtes sûres



- Puisque la coupure respecte  $A$ , l'arête  $(x, y)$  n'est pas dans  $A$
- Soit  $T' = (T \setminus \{(x, y)\}) \cup \{(u, v)\}$  :
  - ▶  $T'$  est un spanning tree
  - ▶  $w(T') = w(T) - w(x, y) + w(u, v) \leq w(T)$  puisque  
 $w(u, v) \leq w(x, y)$
- $T'$  est donc bien un ACM tel que  $A \cup \{(u, v)\} \subseteq T'$
- $\Rightarrow (u, v)$  est sûre pour  $A$



# Algorithme de Kruskal

- Approche gloutonne :
  - ▶ On construit incrémentalement une forêt (c'est-à-dire, un ensemble d'arbres), en ajoutant progressivement des arêtes à un graphe initialement dépourvu d'arcs
  - ▶ On maintient en permanence une partition du graphe en cours de construction en ses composantes connexes
  - ▶ Pour relier des composantes connexes, on choisit à chaque fois l'arête de poids minimal qui les connecte
  - ▶ On s'arrête dès qu'il ne reste plus qu'une composante connexe
- Correction :
  - ▶ Puisqu'on connecte à chaque fois deux composantes connexes disjointes, le graphe reste acyclique et à la terminaison, on obtient un arbre couvrant
  - ▶ Puisqu'on sélectionne une arête de poids minimal à chaque étape, le théorème précédent garantit qu'on arrivera à un ACM

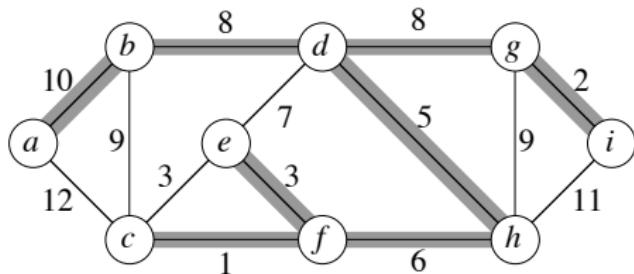
# Algorithme de Kruskal

KRUSKAL( $G, w$ )

```
1    $A = \emptyset$ 
2    $P = \emptyset$ 
3   for each vertex  $v \in G.V$ 
4        $P = P \cup \{\{v\}\}$ 
5   for each  $(u, v) \in G.E$  taken into nondecreasing order of weight  $w$ 
6        $P_1 = \text{subset in } P \text{ containing } u$ 
7        $P_2 = \text{subset in } P \text{ containing } v$ 
8       if  $P_1 \neq P_2$ 
9            $A = A \cup \{(u, v)\}$ 
10          Merge  $P_1$  and  $P_2$  in  $P$ 
11   return  $A$ 
```

- Les choix des composantes connexes à combiner est arbitraire
- On fixe cet ordre en parcourant les arêtes par ordre croissant

## Illustration



*P*

<i>P</i>		
		$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}, \{h\}, \{i\}\}$
(c, f)	fusion	$\{\{a\}, \{b\}, \{c, f\}, \{d\}, \{e\}, \{g\}, \{h\}, \{i\}\}$
(g, i)	fusion	$\{\{a\}, \{b\}, \{c, f\}, \{d\}, \{e\}, \{g, i\}, \{h\}\}$
(e, f)	fusion	$\{\{a\}, \{b\}, \{c, f, e\}, \{d\}, \{g, i\}, \{h\}\}$
(c, e)	rejet	
(d, h)	fusion	$\{\{a\}, \{b\}, \{c, f, e\}, \{d, h\}, \{g, i\}\}$
(f, h)	fusion	$\{\{a\}, \{b\}, \{c, f, e, d, h\}, \{g, i\}\}$
(e, d)	rejet	
(b, d)	fusion	$\{\{a\}, \{b, c, f, e, d, h\}, \{g, i\}\}$
(d, g)	fusion	$\{\{a\}, \{b, c, f, e, d, h, g, i\}\}$
(b, c)	rejet	
(g, h)	rejet	
(a, b)	fusion	$\{\{a, b, c, f, e, d, h, g, i\}\}$

# Implémentation

- Problème : comment représenter les partitions de l'ensemble des sommets du graphe ?
- Une solution possible :
  - ▶ On numérote les parties  $P_1, P_2, \dots, P_k$  d'une partition  $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  à l'aide des nombres de 1 à  $k$
  - ▶ Pour chaque sommet  $v$ , on retient le numéro de la partie à laquelle il appartient (attribut  $v.p$ )
  - ▶ Pour chaque numéro de partie, on retient une liste des sommets contenus dans cette partie
  - ▶ Lors de la fusion de deux parties, on insère la plus petite partie à fusionner dans l'autre et on met à jour les numéros de partie
- Complexité :
  - ▶ Trouver la partie associée à un sommet :  $O(1)$
  - ▶ Fusionner deux parties de tailles  $n_1$  et  $n_2$ , avec  $n_1 < n_2$  :  $\Theta(n_1)$

# Complexité

- Initialisation :  $O(|V|)$
- Tri des arêtes :  $O(|E| \log |V|)$ 
  - ▶ Tri :  $O(|E| \log |E|)$
  - ▶ Or,  $|E| < |V|^2 \Rightarrow \log |E| = O(2 \log |V|) = O(\log |V|)$
- Coût total des fusions :  $O(|V| \log |V|)$ 
  - ▶ Chaque fusion est linéaire par rapport à la taille de la plus petite partie
  - ▶ Chaque fusion produit un nouvelle partie au moins deux fois plus grande que la plus petite
  - ▶ Chaque sommet n'est ajouté à une partie qu'au plus  $O(\log |V|)$  fois
- Temps d'exécution total :  
$$O(|E| \log |V| + |V| \log |V|) = O(|E| \log |V|)$$
  - ▶ Car  $|E|$  domine  $|V|$  dans le cas d'un graphe connexe

# Algorithme de Prim

- Principe :
  - ▶  $A$  est toujours un arbre (plus une forêt)
  - ▶ Initialisé comme une seule racine  $r$  choisie de manière arbitraire
  - ▶ A chaque étape, choisir une arête de poids minimal traversant la coupure  $(V_A, V \setminus V_A)$ , où  $V_A$  est l'ensemble des sommets connectés par des arêtes de  $A$ , et l'ajouter à  $A$ .

```
PRIM( $G, w, r$ )
```

- 1  $A = \emptyset$
- 2  $V_A = \{r\}$
- 3 **while**  $|V_A| < |G.V|$
- 4      $(u, v) =$  "an edge of minimal weight from  $V_A$  to  $V \setminus V_A$ "
- 5      $V_A = V_A \cup \{u, v\}$
- 6      $A = A \cup \{(u, v)\}$
- 7 **return**  $A$

- Correction : toujours en application du théorème

# Implémentation

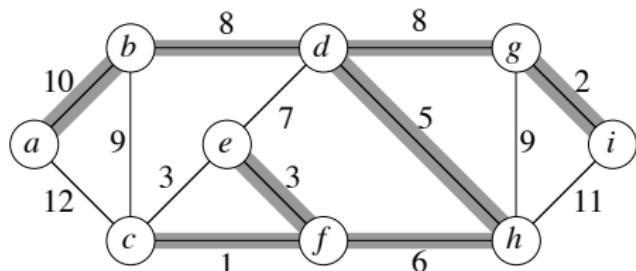
- Comment extraire efficacement l'arête de poids minimal ?
- Utiliser une file à priorité :
  - ▶ Chaque élément de la file est un sommet de  $V \setminus V_A$  (pas encore couvert par l'arbre courant)
  - ▶ La clé de  $v$  est le poids minimum de tout arête  $(u, v)$  où  $u \in V_A$
  - ▶ Cette clé est mise à jour à chaque ajout d'un sommet dans  $V_A$
- L'arbre est “stocké” par le biais d'un pointeur  $v.\pi$ 
  - ▶  $v.\pi$  est le parent de  $v$  dans l'arbre couvrant minimal
  - ▶  $v.\pi = \text{NIL}$  si  $v = r$  ou  $v$  n'a pas de parents

# Implémentation

PRIM( $G, w, r$ )

```
1    $Q = \emptyset$ 
2   for each  $u \in G.V$ 
3      $u.key = \infty$ 
4      $u.\pi = \text{NIL}$ 
5     INSERT( $Q, u$ )
6     DECREASE-KEY( $Q, r, 0$ ) //  $r.key = 0$ 
7   while  $Q \neq \emptyset$ 
8      $u = \text{EXTRACT-MIN}(Q)$ 
9     for each  $v \in G.Adj[u]$ 
10       if  $v \in Q$  and  $w(u, v) < v.key$ 
11          $v.\pi = u$ 
12         DECREASE-KEY( $Q, v, w(u, v)$ )
```

## Illustration



A partir du nœud  $d$

Nœud	$Q^0$	$Q^1$	$Q^2$	$Q^3$	$Q^4$	$Q^5$	$Q^6$	$Q^7$	$Q^8$
$a$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	12	12	10	10	10
$b$	$\infty$	8	8	8	8	8			
$c$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1					
$d$	0								
$e$	$\infty$	7	7	3	3				
$f$	$\infty$	$\infty$	6						
$g$	$\infty$	8	8	8	8	8			
$h$	$\infty$	5							
$i$	$\infty$	$\infty$	11	11	11	11	2		

(valeurs de clé des sommets dans  $Q$  au fur et à mesure des itérations)

# Complexité

- En supposant que  $Q$  est implémentée à l'aide d'un tas (min)
- Initialisation et première boucle **for** :  $O(|V| \log |V|)$
- Diminuer la clé de  $r$  :  $O(\log |V|)$
- Boucle **while** :  $O(|V| \log |V| + |E| \log |V|)$ 
  - ▶  $|V|$  appels à EXTRACT-MIN  $\Rightarrow O(|V| \log |V|)$
  - ▶  $|E|$  appels à DECREASE-KEY  $\Rightarrow O(|E| \log |V|)$
- Temps d'exécution total :  
$$O(|E| \log |V| + |V| \log |V|) = O(|E| \log |V|)$$
  - ▶ Car  $|E|$  domine  $|V|$  dans le cas d'un graphe connexe

Fin

Pour aller plus loin :

