

# VỞ BÀI TẬP TOÁN 9 – HK1

*Giúp học sinh ôn tập tốt hơn*



**Chuyên Toán:** Các lớp toán 6 đến 9, ôn thi tuyển sinh 10, ôn thi Chuyên

***Giáo viên:*** Thầy Nguyễn Văn Long – 0389 917 912

Cô Trần Thị Anh – 0868 954 126

Thầy Hoàng Trọng Vũ – 0898 618 386

**Website:** [mathsun.edu.vn](http://mathsun.edu.vn) - **Youtube:** Thầy Long Dạy Toán

## LỜI NÓI ĐẦU

*Các em học sinh thân mến!*

Để học tốt quyển sách này, sau khi giáo viên giảng xong lý thuyết trong sách giáo khoa thì các em sẽ làm bài tập tương ứng với bài trong quyển sách này.

Làm bài tập đầy đủ vào vở, trình bày rõ ràng, sạch đẹp. Học theo cách trình bày của giáo viên nhé. Phụ huynh và thầy cô sẽ kiểm tra vở của các em giúp các em tạo thành nề nếp học tập tốt.

Nội quy: ***“Tự trọng, tự giác trong học tập và rèn luyện”***

*Chúc các em có sức khỏe tốt, học tập thật tốt và luôn đam mê học toán!*

***Giáo viên: CLB TOÁN HỌC MATHSUN***

## MỤC LỤC

<b>CHỦ ĐỀ 1: PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH.....</b>	<b>- 4 -</b>
§1. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN .....	- 4 -
§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.....	- 10 -
§3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN .....	- 14 -
<b>CHỦ ĐỀ 2: BẤT ĐẲNG THỨC, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.....</b>	<b>- 22 -</b>
§1. BẤT ĐẲNG THỨC.....	- 22 -
§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN .....	- 28 -
<b>CHỦ ĐỀ 3: CĂN THỨC.....</b>	<b>- 33 -</b>
§1. CĂN BẬC HAI.....	- 33 -
§2. CĂN BẬC BA .....	- 38 -
§3. TÍNH CHẤT CỦA MỘT PHÉP KHAI PHƯƠNG .....	- 41 -
§4. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI.....	- 48 -
<b>CHỦ ĐỀ 4: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG .....</b>	<b>- 58 -</b>
§1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG.....	- 58 -
§2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN .....	- 61 -
<b>CHỦ ĐỀ 5: ĐƯỜNG TRÒN.....</b>	<b>- 72 -</b>
§1. ĐƯỜNG TRÒN.....	- 72 -
§2. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN (3 vị trí tương đối).....	- 80 -
§3. GÓC Ở TÂM VÀ GÓC NỘI TIẾP .....	- 91 -
§4. HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN .....	- 97 -

**CHỦ ĐỀ 1: PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH****§1. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH****BẬC NHẤT MỘT ẨN****I. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH**

Phương trình tích là phương trình có dạng  $A(x).B(x) = 0$ .

- Kiến thức cần nhớ**

Muốn giải phương trình  $(ax+b)(cx+d) = 0$ , ta giải hai phương trình  $ax+b = 0$  và  $cx+d = 0$ , rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

**Ví dụ 1:** Giải các phương trình sau:

a)  $5x(x-6) = 0$ ;

b)  $(9-x)(3x+8) = 0$ .

Hướng dẫn giải:

a) Ta có:  $5x(x-6) = 0$

$$5x = 0 \text{ hoặc } x - 6 = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = 6$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

là  $x = 0$  và  $x = 6$ .

b) Ta có:  $(9-x)(3x+8) = 0$

$$9 - x = 0 \text{ hoặc } 3x + 8 = 0$$

$$-x = -9 \text{ hoặc } 3x = -8$$

$$x = 9 \text{ hoặc } x = -\frac{8}{3}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

$$\text{là } x = 9 \text{ và } x = -\frac{8}{3}.$$

**Chú ý:** Trong nhiều trường hợp, để giải một phương trình, ta biến đổi để đưa phương trình đó về dạng phương trình tích.

**Ví dụ 2:** Giải các phương trình sau bằng cách đưa về phương trình tích:

a)  $x^2 - 6x = 0$ ;

b)  $(4x-5)^2 - 9x^2 = 0$ .

Hướng dẫn giải:

a) Ta có:  $x^2 - 6x = 0$

$$x(x-6) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x - 6 = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = 6$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

là  $x = 0$  và  $x = 6$ .

b) Ta có:  $(4x-5)^2 - 9x^2 = 0$

$$(4x-5-3x)(4x-5+3x) = 0$$

$$(x-5)(7x-5) = 0$$

$$x - 5 = 0 \text{ hoặc } 7x - 5 = 0$$

$$x = 5 \text{ hoặc } x = \frac{5}{7}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

$$\text{là } x = 5 \text{ và } x = \frac{5}{7}.$$

**BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 1:** Giải các phương trình:

1)  $9x^2(2x-3)=0$  ;

2)  $(x-1)(3x-6)=0$  ;

3)  $(x+2)(3-3x)=0$  ;

4)  $(2x-7)(x+13)=0$  ;

5)  $(2x+3)(5-x)=0$  ;

6)  $(3x-5)(2x+9)=0$  ;

7)  $(3x-2)(4x+5)=0$  ;

8)  $(2x+5)(1-3x)=0$  ;

9)  $(4x-10)(24+5x)=0$  ;

10)  $\left(\frac{2}{3}x+6\right)(8-2x)=0$  ;

11)  $(-2x+5)\left(\frac{3}{4}x-6\right)=0$  ;

12)  $\left(2-\frac{5}{3}x\right)(2024x+2025)=0$  ;

13)  $(3,5-7x)(0,1x+2,3)=0$  ;

14)  $(2,3x-6,9)(0,1x+2)=0$  ;

15)  $(4x+2)(x^2+1)=0$  ;

16)  $(3x-4)(x+1)(2x-1)=0$  ;

17)  $6(x-2)(x-4)(1-7x)=0$  ;

18)  $(x+1)^2(x+2)=0$  ;

19)  $(3x-2)^2(x+1)(x-2)=0$  ;

20)  $(5-x)^2(3x-1)=0$  ;

21)  $(14-2x)^2(3-x)(2x-4)=0$  ;

22)  $(3x-3)^3(x+4)=0$  ;

23)  $(2x-1)^3(4x+5)=0$  ;

24)  $(8-x)^3(3x+6)=0$  ;

**Bài 2:** Giải các phương trình:

1)  $(2x+3)^2=(x-5)^2$  ;

2)  $4x^2-1=(2x+1)(3x-5)$  ;

3)  $(x-3)^2-9+x^2=(x-3)(x+1)$  ;

4)  $(2x+5)^2-25+4x^2=(2x+5)(5-9x)$  ;

5)  $3x(x-5)+6(x-5)=0$  ;

6)  $2x(x+7)+9(x+7)=0$  ;

7)  $x(2x-1)+5(2x-1)=0$  ;

8)  $(2x-5)(x+7)=x(x+7)$  ;

9)  $(3x-2)^2-25=0$  ;

10)  $x(3x+5)-6x-10=0$  ;

11)  $(x-1)^2+4x-4=0$  ;

12)  $(x-4)^2=5x-20$  ;

13)  $(2-3x)(x+11)=(3x-2)(2-5x)$  ;

14)  $(2x-1)^2+(2-x)(2x-1)=0$  ;

15)  $2(3x+1)^2=(3x+1)(x-2)$  ;

16)  $-5(4x-1)(x-2)=2(4x-1)^2$  ;

17)  $(2x-1)(5x-7)=(2x-1)(9-7x)$  ;

18)  $(x-2)(7-3x)=(3x-7)(8x+32)$  ;

19)  $(2-x)(x+1)=(x-2)(3x+5)$  ;

20)  $(x-1)(x+7)=(1-x)(3-2x)$  ;

21)  $(6x-7)(3x+4)=(7-6x)(x-1)$  ;

22)  $(2x-3)(5x+1)=(3-2x)(x-5)$  ;

23)  $(2x^2+1)(4x-3)=(2x^2+1)(x-12)$  ;

24)  $(x^2-4)+(x-2)(3-2x)=0$  ;

25)  $(3x-2)(x+1)=x^2-1$  ;

26)  $2(4-x)+3x(x-4)=0$  ;

27)  $(2x+3)^2=(x-7)^2$  ;

28)  $4x^2-1=(2x+1)(3x-5)$  ;

$$29) 4x^2 - 9 = (x+7)(2x+3);$$

$$30) 9x^2 - 4 - (3x+2)(x-1) = 0;$$

$$31) (x+2)(3-4x) = x^2 + 4x + 4;$$

$$32) (x+3)(2x+3) = 4x^2 - 9;$$

$$33) 16x^2 - 25 = (4x-5)(2x+1);$$

$$34) (x-2)(7x+3) = 49x^2 - 9;$$

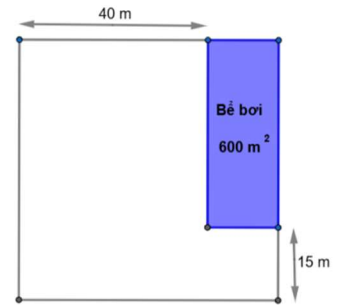
$$35) (9x^2 - 4)(x+1) = (3x+2)(x^2 - 1);$$

$$36) (x^2 - 4)(4x-1) = (x-2)(16x^2 - 1);$$

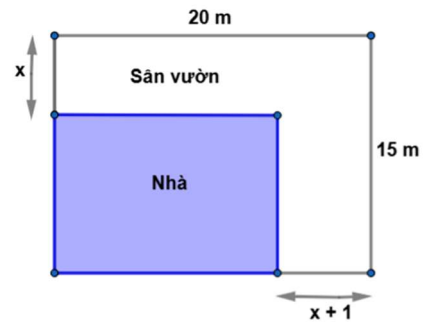
$$37) (x-1)^2 + x^2 - 1 = (x-1)(x+3);$$

$$38) (2x-3)^2 + 4x^2 - 9 = (2x-3)(3x+5);$$

**Bài 3:** Trong một khu đất có dạng hình vuông, người ta dành một mảnh đất có dạng hình chữ nhật ở góc khu đất để làm bể bơi (Hình bên). Biết diện tích của bể bơi bằng  $600 m^2$ . Hãy tính độ dài cạnh của khu đất.



**Bài 4:** Cô Liên có một mảnh đất hình chữ nhật với chiều dài  $20 m$  và chiều rộng  $15 m$ . Cô dự định xây nhà trên mảnh đất đó và dành một phần diện tích đất để làm sân vườn như hình bên. Biết diện tích đất làm nhà là  $140 m^2$ . Hỏi  $x$  bằng bao nhiêu mét?



## II. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU.

### • Kiến thức cần nhớ

Điều kiện xác định của một phương trình chứa ẩn ở mẫu: Cho tất cả các mẫu trong phương trình đều khác 0.

**Ví dụ 3:** Tìm điều kiện xác định của phương trình:  $\frac{2}{x-1} = 1 + \frac{1}{x+2}$

Ta có:  $x-1 \neq 0$  và  $x+2 \neq 0$

$$x \neq 1 \text{ và } x \neq -2.$$

Vậy điều kiện xác định của phương trình là  $x \neq 1$  và  $x \neq -2$ .

**Bài 5:** Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau:

$$1) \frac{1}{2x} = \frac{3}{2};$$

$$2) \frac{2x+1}{x-2} = 1;$$

$$3) \frac{3}{7} = \frac{x+10}{x-3};$$

$$4) \frac{3}{x-2} = \frac{2x-1}{x-2} - x;$$

$$5) \frac{x}{x-1} = \frac{x+4}{x+1};$$

$$6) \frac{2}{x-8} = \frac{7}{x+6};$$

$$7) \frac{x+2}{x} = \frac{3}{2(x-1)};$$

$$8) \frac{14}{x+1} = \frac{3}{x-6};$$

$$9) \frac{7}{3x-9} - \frac{3}{x-3} = 0;$$

$$10) \frac{4}{2x-3} - \frac{7}{3x-5} = 1;$$

$$11) \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+5} = \frac{1}{3x+3};$$

$$12) \frac{6}{x+3} - \frac{1}{x-4} = \frac{5}{2x+6};$$

- Kiến thức cần nhớ**

Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

Bước 1: Phân tích các mẫu ra nhân tử; Rồi đặt điều kiện cho từng nhân tử ở mẫu khác 0.

Bước 3: Quy đồng mẫu chung cho cả hai vế; Rồi khử mẫu

Bước 4: Rút gọn và giải

Bước 5: So với điều kiện rồi kết luận.

**Ví dụ 4:** Giải phương trình:  $\frac{x+2}{x} = \frac{2x+3}{2(x-2)}$

Điều kiện xác định:  $x \neq 0$  và  $x \neq 2$

Với điều kiện trên phương trình trở thành:

$$\frac{2(x-2)(x+2)}{2x(x-2)} = \frac{x(2x+3)}{2(x-2)}$$

$$2(x-2)(x+2) = x(2x+3)$$

$$2(x^2 - 4) = x(2x + 3)$$

$$2x^2 - 8 = 2x^2 + 3x$$

$$3x = -8$$

$$x = -\frac{8}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = -\frac{8}{3}$

**Bài 6:** Giải các phương trình sau:

1)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2}$  ;

2)  $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{4}$  ;

3)  $\frac{2}{3x} - \frac{1}{2x} = \frac{3}{4}$  ;

4)  $\frac{1}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{1}{5}$  ;

5)  $\frac{3}{8x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{x^2}$  ;

6)  $\frac{1}{3x} - \frac{1}{4x} = \frac{1}{x^2}$  ;

7)  $\frac{1}{2x} + \frac{3}{4x} = \frac{5}{2x^2}$  ;

8)  $\frac{2}{3x} - \frac{1}{2x} = \frac{3}{4x^2}$  ;

9)  $\frac{x^2 - 6}{x} = x + \frac{3}{2}$  ;

10)  $\frac{5}{x+2} = 3$  ;

11)  $\frac{2}{x-1} = 1$  ;

12)  $\frac{7}{3x-2} = 4$  ;

13)  $\frac{x}{x+5} = 2$  ;

14)  $\frac{2x-5}{x+5} = 3$  ;

15)  $\frac{3x}{5x-1} = 2$  ;

16)  $\frac{2x}{3x+2} = -3$  ;

17)  $\frac{3x}{4x-3} = -2$  ;

18)  $\frac{5}{3x+2} = 2x-1$  ;

19)  $\frac{2x-(3x+6)}{x-3} = 0$  ;

20)  $\frac{3}{2} = 6 - \frac{x+10}{x-3}$  ;

21)  $\frac{2x-1}{x-1} + 1 = \frac{1}{x-1}$  ;

22)  $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2} + 7$  ;

23)  $\frac{5}{x-3} = \frac{x+2}{x-3} + 3$  ;

24)  $\frac{1-x}{x+1} + 3 = \frac{2x+3}{x+1}$  ;

25)  $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2}$  ;

26)  $\frac{(x+2)^2}{2x-3} - 1 = \frac{x^2+10}{2x-3}$  ;

27)  $2x - \frac{2x^2}{x+3} = \frac{4x}{x+3} + \frac{2}{7}$  ;

28)  $\frac{5x}{2x+2} + 1 = -\frac{6}{x+1}$  ;

29)  $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{3x+3} = \frac{1}{6}$  ;

30)  $x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$  ;

**Bài 7:** Giải các phương trình sau:

1)  $\frac{2}{x-3} = \frac{1}{x+2}$  ;

2)  $\frac{4}{x+1} = \frac{3}{x-2}$  ;

3)  $\frac{2}{x-9} = \frac{9}{x+12}$  ;

4)  $\frac{3}{x+4} = \frac{2}{2x+1}$  ;

5)  $\frac{3x-2}{x+7} = \frac{6x+1}{2x-3}$  ;

6)  $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{5(x-1)}{x+1}$  ;

7)  $\frac{5}{3x-2} - \frac{1}{x-4} = 0$  ;

8)  $\frac{7}{3x-4} - \frac{1}{x-1} = 0$  ;

9)  $\frac{4}{2x-3} - \frac{7}{3x-5} = 0$  ;

10)  $\frac{x+3}{x-1} + \frac{x-2}{x} = 2$  ;

11)  $\frac{x+2}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)}$  ;

12)  $\frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-4} = -1$  ;

13)  $\frac{2x+1}{x+1} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x(x+1)}$  ;

14)  $\frac{2x}{x+1} + \frac{x-1}{x} = \frac{2}{x(x+1)}$  ;

15)  $\frac{1}{x} + \frac{3}{x-2} = \frac{10}{x(x-2)}$  ;

16)  $\frac{x+2}{x-2} - \frac{2}{x(x-2)} = \frac{1}{x}$  ;

17)  $\frac{x+1}{x} - \frac{3x}{x(x+4)} = \frac{x-2}{x+4}$  ;

18)  $\frac{2x}{x-7} - \frac{x-14}{x(x-7)} = \frac{x-2}{x}$  ;

19)  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{(x+1)(x-1)}$  ;

20)  $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{3x-20}{(x-2)(x-3)}$  ;

21)  $\frac{x-1}{x-2} + \frac{8}{(x-2)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4}$  ;

22)  $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2} = \frac{3x-11}{(x+1)(x-2)}$  ;

23)  $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+2} = \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$  ;

24)  $\frac{2}{x-4} + \frac{3}{x-3} = \frac{3x-18}{(x-4)(x-3)}$  ;

25)  $\frac{x}{x-5} + \frac{3}{x-8} = \frac{-5x+1}{(x-5)(x-8)}$  ;

26)  $\frac{x}{x+6} + \frac{3}{x-8} = \frac{-12x+33}{(x+6)(x-8)}$  ;

27)  $\frac{x}{x+11} + \frac{3}{x-12} = \frac{-12x+33}{(x+11)(x-12)}$  ;

28)  $\frac{7}{2x-3} + \frac{1}{2(x-1)} = \frac{3}{x-1}$  ;

29)  $\frac{1}{2x-1} + \frac{3}{4(3x-2)} = \frac{2}{3x-2}$  ;

30)  $\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} = \frac{1}{3(x+1)}$  ;

**Bài 8:** Giải các phương trình sau:

1)  $\frac{x-1}{x} + \frac{1-2x}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}$  ;

2)  $\frac{5}{x} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{x^2-10}{x(x-4)}$  ;

3)  $\frac{x+3}{x-3} = \frac{3}{x^2-3x} + \frac{1}{x}$  ;

4)  $\frac{3}{x^2-3x} + \frac{1}{x} = \frac{x+4}{x-3}$  ;

5)  $\frac{x+4}{x-4} - \frac{1}{x} = \frac{4}{x^2-4x}$  ;

6)  $\frac{x}{x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{2x^2-4}{(x-3)(x+1)}$  ;

7)  $\frac{x+2}{x-2} - \frac{6}{x} = \frac{9}{x^2-2x}$  ;

8)  $\frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} = \frac{x+2}{x-2}$  ;



$$9) \frac{x-5}{x} + \frac{x-3}{x+5} = \frac{x-25}{x^2+5x};$$

$$11) \frac{x+7}{x-7} - \frac{7}{x^2-7x} = \frac{1}{x};$$

$$13) \frac{4x}{4x-3} + \frac{5}{3x-4x^2} = \frac{x+2}{x};$$

$$15) \frac{4x}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{8x-7}{3x-6};$$

$$17) \frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x+1} = \frac{5}{3x+3};$$

$$19) \frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} + \frac{2x}{(1-x)(x+1)} = 0;$$

$$10) \frac{x+6}{x-6} - \frac{6}{x^2-6x} = \frac{1}{x};$$

$$12) \frac{x+5}{x} - \frac{x-7}{x+4} = \frac{x^2+35}{x^2+4x};$$

$$14) \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x-2} = \frac{5}{2x+6};$$

$$16) \frac{x-3}{x-1} = \frac{x-4}{x^2-4x} + \frac{x+1}{x};$$

$$18) \frac{1}{6x-2} - \frac{1}{3x-1} = \frac{4}{3x+1};$$

$$20) \frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2x+2} = \frac{2x}{(x-3)(x+1)}.$$

**Bài 9:** Giải các phương trình sau:

$$1) \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{3}{x^2-4};$$

$$3) \frac{x}{x-1} + \frac{4}{x+1} = \frac{x^2-5}{x^2-1};$$

$$5) \frac{x}{x^2-4} - \frac{7}{x+2} = \frac{3}{x-2};$$

$$7) \frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = \frac{2x^2+2}{x^2-1};$$

$$9) \frac{x+1}{x-2} - \frac{6x^2}{x^2-4} = \frac{x-1}{x+2};$$

$$11) \frac{x+7}{x+4} - \frac{7}{x-4} = \frac{-56}{x^2-16};$$

$$13) \frac{2x-5}{x+4} + \frac{x}{4-x} = \frac{-17x+56}{x^2-16};$$

$$15) \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{2+x} = \frac{x^2+16}{x^2-4};$$

$$17) \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{3x}{x^3+1};$$

$$19) \frac{x+2}{x-2} - \frac{1-x}{x+2} = \frac{3x^2+3x+6}{x^2-4};$$

$$2) \frac{4}{x-3} + \frac{3}{x+3} = \frac{x-2}{x^2-9};$$

$$4) \frac{x+1}{x-2} + \frac{3x}{x+2} = \frac{4x^2-2}{x^2-4};$$

$$6) \frac{x-1}{x-5} - \frac{4x}{x+5} = \frac{9x-5}{x^2-25};$$

$$8) \frac{x}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{x^2+9}{x^2-9};$$

$$10) \frac{3-2x}{x^2-25} + \frac{2}{x-5} = \frac{5}{x+5};$$

$$12) \frac{x+3}{x-3} - \frac{x^2}{x^2-9} = \frac{-6}{x+3};$$

$$14) \frac{3x}{2x+1} - \frac{4x^2+1}{4x^2-1} = \frac{x}{2x-1};$$

$$16) \frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+3} = \frac{2x^2+12x}{x^2-9};$$

$$18) \frac{x+3}{x-4} + \frac{x-3}{x+4} = \frac{2(x^2+12)}{x^2-16};$$

$$20) \frac{2x+1}{x-1} + \frac{2x-1}{x+1} = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}.$$

**Bài 10:** Một người đi xe đạp từ  $A$  đến  $B$  cách nhau  $60km$ . Sau 1 giờ 45 phút, một xe máy cũng đi từ  $A$  đến  $B$  và đến  $B$  sớm hơn xe đạp 2 giờ. Tính tốc độ của mỗi xe, biết rằng tốc độ của xe máy gấp 4 lần tốc độ của xe đạp.

**Bài 11:** Hai ô tô khởi hành cùng một lúc để đi từ địa điểm  $A$  đến địa điểm  $B$  cách nhau  $120km$ . Vận tốc ô tô thứ hai lớn hơn vận tốc ô tô thứ nhất là  $10km/h$  nên ô tô thứ hai đến  $B$  trước ô tô thứ nhất 24 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

**Bài 12:** Một người đi xe máy từ huyện Ngân Sơn đến huyện Chợ Mới cách nhau  $100km$ . Khi về người đó tăng vận tốc thêm  $10km/h$  so với lúc đi, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc lúc đi của xe máy.

- Bài 13:** Hai bạn Long và Trí cùng hẹn nhau đạp xe đến một địa điểm cách vị trí bạn Long  $9\text{km}$  và cách vị trí bạn Trí  $12\text{km}$ . Hai bạn cùng xuất phát đến địa điểm đã hẹn cùng một lúc. Tính tốc độ của mỗi bạn, biết tốc độ của bạn Trí hơn tốc độ của bạn Long là  $4\text{km/h}$ .
- Bài 14:** Hai thành phố A và B cách nhau  $160\text{ km}$ . Một ô tô di chuyển từ A đến B, rồi quay trở về A với tổng thời gian đi và về là  $7\text{ giờ } 12\text{ phút}$ . Tính tốc độ lượt đi của ô tô, biết tốc độ lượt đi lớn hơn tốc độ lượt về  $20\%$ .
- Bài 15:** Một nhóm bạn trẻ cùng tham gia khởi nghiệp và dự định góp vốn là  $180$  triệu đồng, số tiền góp mỗi người là như nhau. Nếu có thêm  $3$  người tham gia cùng thì số tiền mỗi người góp giảm đi  $3$  triệu đồng. Hỏi ban đầu nhóm bạn trẻ đó có bao nhiêu người?
- Bài 16:** Một xí nghiệp dự định chia đều  $39000000$  đồng để thưởng cho các công nhân tham gia hội thảo nhân ngày thành lập xí nghiệp. Khi đến ngày hội thảo chỉ có  $80\%$  số công nhân tham gia, vì thế mỗi người tham gia hội thảo được nhận thêm  $100000$  đồng. Tính số công nhân dự định tham gia lúc đầu.
- Bài 17:** Bạn Giang dự định dùng hết số tiền  $900$  nghìn đồng để mua một số chiếc áo đồng giá tặng các bạn có hoàn cảnh khó khăn. Khi đến cửa hàng, loại áo mà bạn Giang dự định mua được giảm giá  $50$  nghìn đồng/chiếc. Do vậy, bạn Giang đã mua được số lượng áo gấp  $1,5$  lần so với số lượng dự định. Tính giá tiền của mỗi chiếc áo bạn Giang đã mua.
- Bài 18:** Lớp 9A có  $80$  quyển vở dự định khen thưởng học sinh giỏi cuối năm. Thực tế cuối năm tăng thêm  $2$  học sinh giỏi, nên mỗi phần thưởng giảm đi  $2$  quyển vở so với dự định. Hỏi cuối năm lớp 9A có bao nhiêu học sinh giỏi, biết mỗi phần thưởng có số quyển vở bằng nhau.
- Bài 19:** Một đội công nhân làm đường nhận nhiệm vụ trải nhựa  $9800\text{m}^2$  mặt đường. Ở giai đoạn đầu, đội trải được  $4200\text{m}^2$  mặt đường. Ở giai đoạn hai, đội công nhân tăng năng suất thêm  $200\text{m}^3/\text{ngày}$  rồi hoàn thành công việc. Hỏi đội công nhân đã hoàn thành công việc trong bao nhiêu ngày? Biết năng suất lao động của đội là không thay đổi ở mỗi giai đoạn và thời gian làm việc của hai giai đoạn là như nhau.
- Bài 20:** Biết nồng độ muối của nước biển là  $3,5\%$  và khối lượng riêng của nước biển là  $1020\text{g/l}$ . Từ  $4\text{ lít}$  nước biển như thế, người ta hoà thêm muối để được một dung dịch có nồng độ muối là  $20\%$ . Tính lượng muối cần hòa thêm.
- Bài 21:** Hai người cùng làm chung một công việc thì xong trong  $4$  giờ. Hai người cùng làm được  $2$  giờ thì người thứ nhất bị điều đi làm công việc khác. Người thứ hai tiếp tục làm việc trong  $6$  giờ nữa thì xong công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao lâu mới xong công việc đó?
- Bài 22:** Hai người cùng làm việc thì trong  $6\text{ giờ } 40\text{ phút}$  xong việc. Nếu để một mình người thứ nhất làm trong  $5$  giờ rồi người đó nghỉ thì người thứ hai phải là nốt phần việc còn lại trong  $8$  giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người phải mất bao lâu để hoàn thành công việc?

.....♪...HẾT...♪.....

## §2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

### 1. Phương trình bậc nhất hai ẩn:

Phương trình bậc nhất hai ẩn  $x$  và  $y$  là phương trình có dạng:  $ax + by = c$ , trong đó  $a, b, c$  là các số đã biết (gọi là hệ số),  $a$  và  $b$  không đồng thời bằng  $0$ .

Nếu giá trị của vế trái tại  $x = x_0$  và  $y = y_0$  bằng vế phải thì cặp số  $(x_0; y_0)$  được gọi là một nghiệm của phương trình.

Giải phương trình là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó.

**Ví dụ 1:** Trong các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn,

- a.  $6x - 2y = -1$ ;      b.  $4x + 0y = -5$ ;      c.  $-4x + 0y = 5$ ;      d.  $0x + 0y = -7$ .

*Hướng dẫn giải*

- $6x - 2y = -1$  là phương trình bậc nhất hai ẩn với  $a = 6, b = -2, c = -1$ .
- $4x + 0y = -5$  là phương trình bậc nhất hai ẩn với  $a = 4, b = 0, c = -5$ .
- $-4x + 0y = 5$  là phương trình bậc nhất hai ẩn với  $a = -4, b = 0, c = 5$ .
- $0x + 0y = -7$  không là phương trình bậc nhất hai ẩn vì  $a = 0$  và  $b = 0$ .

**Ví dụ 2:** Cho phương trình  $-2x + 3y = 4$ . Trong hai cặp số  $(1; 2)$  và  $(1; -2)$ , cặp số nào là nghiệm của phương trình đã cho?

**Hướng dẫn giải**

- Vì  $-2 \cdot (1) + 3 \cdot (2) = 4$  nên cặp số  $(1; 2)$  là nghiệm của phương trình đã cho.
- Vì  $-2 \cdot (1) + 3 \cdot (-2) \neq 4$  nên cặp số  $(1; -2)$  không là nghiệm của phương trình đã cho.

**Chú ý:**

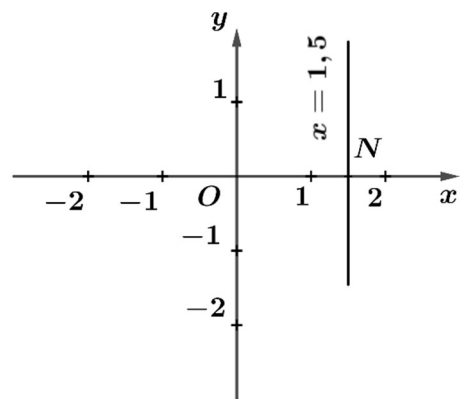
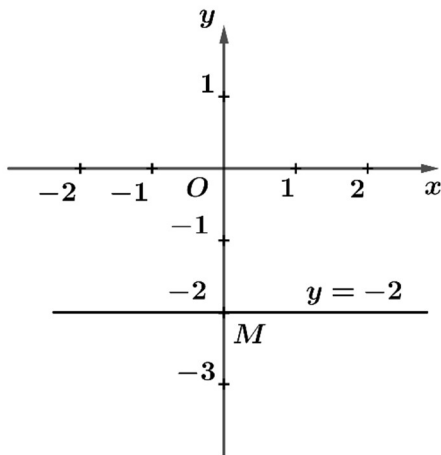
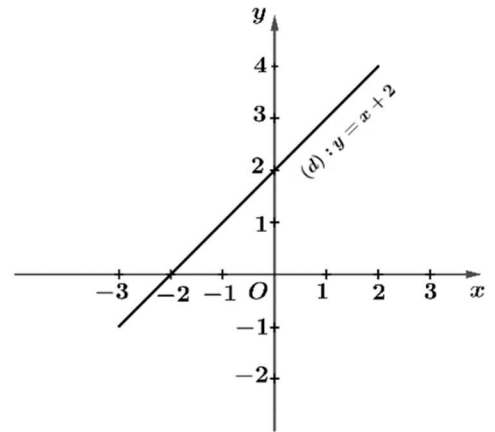
- Mỗi nghiệm  $(x_0; y_0)$  của phương trình  $ax + by = c$  được biểu diễn bởi điểm có tọa độ  $(x_0; y_0)$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .
- Phương trình bậc nhất hai ẩn  $ax + by = c$  luôn luôn có vô số nghiệm. Tất cả các nghiệm của nó được biểu diễn bởi một đường thẳng.

**Ví dụ 3:** Biểu diễn tất cả các nghiệm của mỗi phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

- $-x + y = 2$ ;
- $0x + y = -2$ ;
- $2x + 0y = 3$ .

**Hướng dẫn giải:**

- Viết lại phương trình thành  $y = x + 2$ . Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi đường thẳng  $d: y = x + 2$ . (Hình bên)
- Viết lại phương trình thành  $y = -2$ . Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi đường thẳng  $d$  vuông góc với  $Oy$  tại điểm  $M(0; -2)$ .



- Viết lại phương trình thành  $x = 1,5$ . Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi đường thẳng  $d$  vuông góc với  $Ox$  tại điểm  $N(1,5; 0)$ .

**Ví dụ 4:** Viết nghiệm tổng quát của phương trình:  $-2x + y = 4$

**Hướng dẫn giải:**

Ta có  $-2x + y = 4$

$y = 2x + 4$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là:  $(x; y) = (x; 2x + 4)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**BÀI TẬP VẬN DỤNG****Bài 1:** Xác định các hệ số  $a, b, c$  của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

a)  $2x - y = -4;$

b)  $\sqrt{2}x - 3y = 0;$

c)  $0x - \frac{3}{4}y = -7;$

d)  $-\frac{3}{2}x + 0y = -2,5;$

e)  $-\frac{2}{3}x + 4y = 2;$

f)  $0x - \frac{5}{2}y = 0;$

g)  $10x - 0y = 5$

b)  $-3x + 4y = -6;$

**Bài 2:** Trong các cặp số  $(-2;1), (0;2), (-1;0), (1,5;3)$  và  $(4;-3)$ , cặp số nào là nghiệm của phương trình?

1)  $5x - 4y = 8;$

2)  $3x + 5y = -3;$

**Bài 3:** Cho phương trình:  $2x + y = 3$  (1)1) Trong ba cặp số  $(1;1), (-2;7)$  và  $(2;-7)$ , cặp số nào là nghiệm của phương trình (1)?2) Tìm  $m$  để cặp số  $(-1; m^2)$  là nghiệm của phương trình (1).3) Tìm  $x_0$  để cặp số  $(x_0; -3)$  là nghiệm của phương trình (1).

4) Tìm thêm hai nghiệm của phương trình (1).

5) Hãy biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình (1) trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .**Bài 4:** Cho phương trình:  $5x - 2y = -1$  (2)1) Trong ba cặp số  $(1; 3), (2;5)$  và  $(-3;-7)$ , cặp số nào là nghiệm của phương trình (2)?2) Tìm  $y_0$  để cặp số  $(3; y_0)$  là nghiệm của phương trình (2).3) Tìm  $m$  để cặp số  $(m-1; -2)$  là nghiệm của phương trình (2).

4) Tìm thêm hai nghiệm của phương trình (2).

5) Hãy biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình (2) trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .**Bài 5:** Viết nghiệm tổng quát và biểu diễn hình học các nghiệm của các phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

a)  $3x + y = 1$

b)  $0 \cdot x + y = -2$

c)  $2x - 0 \cdot y = 5$

**2. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:**

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  có dạng: (I) 
$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Trong đó,  $a, b, c, a', b', c'$  là các số đã biết (gọi là hệ số),  $a$  và  $b$  không đồng thời bằng 0,  $a'$  và  $b'$  không đồng thời bằng 0.

Nếu  $(x_0; y_0)$  là nghiệm chung của hai phương trình (1) và (2) thì  $(x_0; y_0)$  được gọi là một nghiệm của hệ (I).

Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó.

**Ví dụ 4:** Trong các hệ phương trình sau, hệ phương trình nào là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn?

1) 
$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases};$$

2) 
$$\begin{cases} 0x + 0y = 6 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} -3x + 0y = 0 \\ 0x + 5y = -2 \end{cases}$$

**Hướng dẫn giải**

1) Hệ phương trình 
$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$$
 là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn với  $a = 3, b = 1,$

$$c = 4, a' = 2, b' = -5, c' = -3.$$

- 2) Hệ phương trình  $\begin{cases} 0x + 0y = 6 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$  không phải là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn vì  $a = b = 0$ .
- 3) Hệ phương trình  $\begin{cases} -3x + 0y = 0 \\ 0x + 5y = -2 \end{cases}$  là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn với  $a = -3, b = 0, c = 0$  và  $a' = 0, b' = 5, c' = -2$ .

**Ví dụ 5:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

Trong các cặp số  $(1; -1); (-1; 3); (0; -4)$  cặp nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

*Hướng dẫn giải:*

- Vì  $\begin{cases} 2.1 + 5.(-1) = -3 \\ 3.1 - (-1) = 4 \end{cases}$  nên cặp số  $(1; -1)$  là nghiệm của hệ phương trình.
- Vì  $\begin{cases} 2.(-1) + 5.3 \neq -3 \\ 3.(-1) - 3 \neq 4 \end{cases}$  nên cặp số  $(-1; 3)$  không là nghiệm của hệ phương trình.
- Vì  $\begin{cases} 2.0 + 5.(-4) \neq -3 \\ 3.0 - (-4) = 4 \end{cases}$  nên cặp số  $(0; -4)$  không là nghiệm của hệ phương trình.

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 5:** Trong các hệ phương trình sau, hệ phương trình nào là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn?

- 1)  $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 3x - y = -5 \end{cases}$       2)  $\begin{cases} \sqrt{2}x + 0y = -2 \\ 0x - \frac{3}{5}y = 6 \end{cases}$       3)  $\begin{cases} 0x + 0y = -3 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$
- 4)  $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases}$       5)  $\begin{cases} 0x + \sqrt{5}y = 5 \\ x - \frac{5}{4}y = 15 \end{cases}$       6)  $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x + 4y = -9 \end{cases}$

**Bài 6:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} -2x + 7y = 12 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$ . Trong các cặp số  $(-6; 0)$  và  $(1; 2)$  cặp nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

**Bài 7:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ -x + 2y = 8 \end{cases}$ . Trong các cặp số  $(2; 5)$  và  $(0; 2)$  cặp nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

**Bài 8:** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn? Xác định các hệ số  $a, b, c$  của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn đó?

- 1)  $-3x + 4y = -9$       2)  $0x - 0y = 4$       3)  $0x - \frac{5}{3}y = 6$
- 4)  $0,4x + 0y = -2,5$       5)  $0x + 7y = -21$       6)  $0x + 0y = 13$
- 7)  $-5x + 0y = 8$       8)  $0,6x - 0y = -7,4$       9)  $\frac{-2}{3}x + 3y = \frac{-5}{2}$

**Bài 9:** Trong các cặp số  $(1; -4); (2; -3); (3; 0)$  cặp số nào là nghiệm của mỗi phương trình sau?

- 1)  $2x + 3y = -5$       2)  $5x - 4y = 15$       3)  $-2x + 5y = -22$       4)  $x - 5y = -12$

**Bài 10:** Tìm nghiệm tổng quát và biểu diễn hình học các nghiệm của mỗi phương trình sau trên mặt phẳng Oxy:

- 1)  $x + y = -2$                       2)  $0x - y = 4$                       3)  $-2x + 0y = 4$                       4)  $2x + y = 0$

**Bài 11:** Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} ax - by = 17 \\ ax + 2by = -3 \end{cases}$$

Tìm a; b biết các cặp số sau đây là nghiệm của hệ phương trình:

- a)  $(1; -1)$                                       b)  $(2; -3)$

**Bài 12:** Cho hai đường thẳng  $y = 3x - 2$  và  $y = x + 2$

- 1) Vẽ hai đường thẳng đó trên cùng một hệ trục tọa độ.
- 2) Xác định tọa độ giao điểm K của hai đường thẳng trên.
- 3) Tọa độ của điểm K có là nghiệm của hệ phương trình 
$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$
 không? Tại sao?

**Bài 13:** Cho hai đường thẳng  $y = \frac{1}{2}x$  và  $y = -x + 3$

- 1) Vẽ hai đường thẳng đó trên cùng một hệ trục tọa độ.
- 2) Xác định tọa độ giao điểm M của hai đường thẳng trên.
- 3) Tọa độ của điểm M có là nghiệm của hệ phương trình 
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$
 không? Tại sao?

.....🎵...HẾT...🎵.....

### §3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

#### I. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

##### ❖ Kiến thức cần nhớ

**Phương pháp giải:** (đặt điều kiện nếu có)

Bước 1: Từ một phương trình, tính ẩn này theo ẩn kia.

Bước 2: Thế vào phương trình còn lại rồi giải.

Bước 3: Đối chiếu với điều kiện (nếu có) và kết luận.

**Ví dụ:** Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

- a) 
$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$$
                      b) 
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x - 6y = 15 \end{cases}$$
                      c) 
$$\begin{cases} -3x + y = 4 \\ 6x - 2y = 7 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

- a) 
$$\begin{cases} -x + y = 1 & (1) \\ 4x + 3y = 17 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có  $y = x + 1$  (3)

Thay  $y = x + 1$  vào phương trình (2) ta được  $4x + 3(x + 1) = 17$

$$4x + 3x + 3 = 17$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

Thay  $x = 2$  vào phương trình (3), ta được:  $y = 2 + 1 = 3$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là  $(2; 3)$ .

❖ **Chú ý:**

a) Ta có thể trình bày việc giải hệ phương trình trên như sau:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 1 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 1 \\ 4x + 3(x + 1) = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 4x + 3x + 3 = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 1 \\ 7x = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là  $(2; 3)$ . (hay  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ )

$$b) \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x - 6y = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 + 2y \\ 3(2y + 5) - 6y = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 + 2y \\ 0y = 0 \end{cases}$$

Phương trình  $0y = 0$  nghiệm đúng với mọi  $y \in \mathbb{R}$ .

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm. Các nghiệm của hệ được viết như sau  $\begin{cases} x = 5 + 2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$c) \begin{cases} -3x + y = 4 \\ 6x - 2y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x + 4 \\ 6x - 2(3x + 4) = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x + 4 \\ 6x - 6x - 8 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x + 4 \\ 0x = 15 \end{cases}$$

Phương trình  $0x = 15$  vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1:** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 2y = 5 \end{cases} & 2) \begin{cases} -2x + y = -3 \\ 7x - 5y = 6 \end{cases} & 3) \begin{cases} x - 5y = 21 \\ -6x + 3y = -45 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} -4x + 5y = 8 \\ 2x - y = 2 \end{cases} & 5) \begin{cases} x + 4y = -16 \\ 5x + 2y = 10 \end{cases} & 6) \begin{cases} 3x - y = 19 \\ -8x - 7y = 17 \end{cases} \\ 7) \begin{cases} -2x - 8y = 7 \\ x + 4y = 5 \end{cases} & 8) \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + y = 2 \end{cases} & 9) \begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \\ 10) \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 2x - y = 2 \end{cases} & 11) \begin{cases} x + 3y = 11 \\ 3x - y = 9 - 2y \end{cases} & 12) \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \\ 13) \begin{cases} 9x - 5y = -6 \\ 6x + y = 9 \end{cases} & 14) \begin{cases} -x + y = -5 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases} & 15) \begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 3x + y = -2 \end{cases} \\ 16) \begin{cases} 3x + 4y = -6 \\ x - 4y = 14 \end{cases} & 17) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = 9 \end{cases} & 18) \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 7y = 9 \end{cases} \\ 19) \begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 3x - y = -15 \end{cases} & 20) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 7 \end{cases} & 21) \begin{cases} 4x = 6 - 3y \\ y + x = -x + 4 \end{cases} \end{array}$$

**Bài 2:** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

$$1) \begin{cases} x - 2y = 6 \\ xy = 8 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2xy + 3y = -21 \\ 5x - y = 13 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 4x + y = -4 \\ -2xy + 5x = 6 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} -3x + y = -14 \\ 3xy + 8x - 2y = -11 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x(y-2) - 4y = -8 \\ x - 7y = 37 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ xy = 3(x+y) - 5 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 - y^2 = -8 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 - xy + y^2 = 28 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + 2y^2 = 11 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4xy - 1 = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 - 6xy + 5y^2 = 0 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + 6xy + 8y^2 = 0 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x - y = 6 \\ x^3 - y^3 = 126 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x-y) \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x^2 - y^2 + 2y = 4 \end{cases}$$

## II. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ

### ❖ Kiến thức cần nhớ

**Phương pháp giải:** (đặt điều kiện nếu có)

Bước 1: Cân bằng hệ số của cùng một ẩn (đưa về hệ số bằng nhau hoặc đối nhau)

Bước 2: Trừ (hoặc cộng) theo vế để khử ẩn vừa chọn, tạo ra phương trình mới. Rồi giải

Bước 3: Đối chiếu điều kiện (nếu có), rồi kết luận.

**Ví dụ:** Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$$

### Hướng dẫn giải:

a) Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được  $3x = 6$ . Suy ra  $x = 2$ .

Thay  $x = 2$  vào phương trình thứ hai của hệ, ta được  $2 + 3y = 11$ . Do đó  $y = 3$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là  $(2; 3)$ .

b) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2, nhân hai vế của phương trình thứ hai với  $-3$ , ta được:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 14 \\ -6x - 9y = -9 \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được  $-5y = 5$ . Suy ra  $y = -1$ .

Thay  $y = -1$  vào phương trình  $3x + 2y = 7$ , ta được  $3x + 2(-1) = 7$ . Do đó  $x = 3$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là  $(3; -1)$ .

❖ **Chú ý:** Có thể trình bày xuống hàng, viết ngoặc nhọn theo hướng dẫn của giáo viên.

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 3:** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

$$1) \begin{cases} x - 5y = 16 \\ -x + 3y = -10 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} -3x + 2y = -3 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x - 11y = -7 \\ 10x + 11y = 31 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 4x + 7y = 16 \\ -4x + 3y = 24 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x - 5y = -14 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} -x + 3y = -10 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

**Bài 4:** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

$$1) \begin{cases} x + y = 0 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ -x + 4y = 10 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x - 5y = -18 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$



4) 
$$\begin{cases} x+10y=-16 \\ 3x-4y=20 \end{cases}$$

5) 
$$\begin{cases} x+5y=9 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$$

6) 
$$\begin{cases} 3x+2y=16 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$$

7) 
$$\begin{cases} 3x-2y=6 \\ x+y=2 \end{cases}$$

8) 
$$\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ -x+3y=4 \end{cases}$$

9) 
$$\begin{cases} x+10y=-16 \\ 3x-4y=20 \end{cases}$$

10) 
$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 6x+y=6 \end{cases}$$

11) 
$$\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

12) 
$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+4y=10 \end{cases}$$

13) 
$$\begin{cases} x-3y=2 \\ -2x+5y=1 \end{cases}$$

14) 
$$\begin{cases} 5x+6y=3 \\ 7x-2y=25 \end{cases}$$

15) 
$$\begin{cases} 3x-2y=-2 \\ -6x+4y=10 \end{cases}$$

16) 
$$\begin{cases} 2x+4y=4 \\ x+2y=2 \end{cases}$$

17) 
$$\begin{cases} 2x-4y=3 \\ -x+2y=1 \end{cases}$$

18) 
$$\begin{cases} 0,5x-y=3 \\ x-2y=6 \end{cases}$$

19) 
$$\begin{cases} 3x-6y=2 \\ x+2y=2 \end{cases}$$

20) 
$$\begin{cases} x-5y=-2 \\ -2x+10y=4 \end{cases}$$

21) 
$$\begin{cases} 3x-7y=1 \\ -6x+14y=-3 \end{cases}$$

**Bài 5:** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số.

1) 
$$\begin{cases} 2x-7y=25 \\ 3x+5y=-9 \end{cases}$$

2) 
$$\begin{cases} 3x-2y=19 \\ 4x-5y=-26 \end{cases}$$

3) 
$$\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 3x-2y=-3 \end{cases}$$

4) 
$$\begin{cases} 4x+3y=-7 \\ 2x-5y=16 \end{cases}$$

5) 
$$\begin{cases} 3x-y=5 \\ 5x+2y=23 \end{cases}$$

6) 
$$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-3y=-12 \end{cases}$$

7) 
$$\begin{cases} 4x+5y=15 \\ 6x-4y=11 \end{cases}$$

8) 
$$\begin{cases} 5x+3y=-7 \\ 3x-2y=-8 \end{cases}$$

9) 
$$\begin{cases} -2x+5y=-10 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$$

10) 
$$\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ -2x-3y=4 \end{cases}$$

11) 
$$\begin{cases} -5x+3y=22 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$$

12) 
$$\begin{cases} 2x+3y=-11 \\ 3x-5y=31 \end{cases}$$

13) 
$$\begin{cases} 2x+5y=-1 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$$

14) 
$$\begin{cases} 11x-3y=-7 \\ 4x+15y=-24 \end{cases}$$

15) 
$$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$$

16) 
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x+y=2 \\ \frac{2}{3}x+3y=6 \end{cases}$$

17) 
$$\begin{cases} 0,3x+0,5y=3 \\ 1,5x-2y=1,5 \end{cases}$$

18) 
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=0 \\ y-x=1 \end{cases}$$

**Bài 6:** Xác định  $a, b$  để đồ thị hàm số  $y = ax + b$  đi qua hai điểm:

1)  $A(2;3)$  và  $B(1;4)$ .

2)  $C(1;-1)$  và  $D(4;5)$ .

3)  $E(2;-1)$  và  $F(3;-4)$ .

4)  $M(-1;-5)$  và  $N(-6;1)$ .

5)  $P(3;4)$  và  $Q(5;7)$ .

6)  $A(2;3)$  và  $B(5;7)$ .

7)  $A(1;-3)$  và  $B(4;2)$ .

8)  $C(2;-1)$  và  $D(3;4)$ .

9)  $E(3;-2)$  và  $F(5;6)$ .

10)  $M(2;-3)$  và  $N(4;1)$ .

11)  $P(1;2)$  và  $Q(3;6)$ .

12)  $A(3;-1)$  và  $F(6;1)$ .

**Bài 7:** Giải các hệ phương trình sau:

1) 
$$\begin{cases} 5x+7y=3 \\ 5x-4y=-8 \end{cases}$$

2) 
$$\begin{cases} -2x+y=-3 \\ 3x+4y=10 \end{cases}$$

3) 
$$\begin{cases} 7x+4y=2 \\ 5x-2y=16 \end{cases}$$

4) 
$$\begin{cases} 3x+2y=25 \\ 2x-3y=2 \end{cases}$$

5) 
$$\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 5x-8y=3 \end{cases}$$

6) 
$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x+5y=6 \end{cases}$$

7) 
$$\begin{cases} 3x+2y=3 \\ 5x+3y=10 \end{cases}$$

8) 
$$\begin{cases} 3x+4y=-37 \\ 2x+y=17 \end{cases}$$

9) 
$$\begin{cases} 3x-3y=y-14 \\ x+2y=32 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ 6x - 4y = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 3x + 4y = -14 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2x + 3y = 21 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 2x + 5y - 8 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 9x + 4y = 13 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 7x - 3y = -1 \\ 4x - 5y = -17 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} 8x + 7y = -7 \\ x + y = 1,5 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} -3x + 5y = -2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} 4x + y = -1 \\ 6x - 2y = 9 \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} 2x - 6y = 5 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} -3x + 5y = -1 \\ 9x - 15y = 3 \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x - \frac{2}{3}y = 3\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} \frac{3}{4}x - 6y = -2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{1}{2}x + y = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} 3(x-1) - 4(1-y) = 2 \\ -x - \frac{4}{3}y = -3 \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{11}{12} \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{3}y = \frac{11}{12} \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$31) \begin{cases} 8x - 2y = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x - y = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$$32) \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}y = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = -1 \end{cases}$$

$$33) \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = -3 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}y + 1 = 0 \end{cases}$$

**Bài 8:** Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 7x - 3y + 1 = 0 \\ 4x - 5y + 17 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2(x-1) + 3(y+5) = 23 \\ 2(x+6) - y = 14 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x + 3y - 17 = -3x - 3y \\ 9x - y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x + 3 = 3y - 2 \\ 3(3y + 2) - 4(x + 2y) = 3 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3(x-6) = 5(y+3) \\ 3(x+y) = 15 - x \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 5(x+2) = 2(y+7) \\ 3(x+y) = 17 - x \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 3x = -2(y-5) \\ 5x + 3y = -5 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 3x + 2(y-1) = -(x+8) \\ 5(x+y) = -3x + 2y - 5 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 5(x-1) - 3y = -1 \\ 3x + 6 = 2y + 1 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 2(x-1) - 5(y+1) = 3 \\ x - 2(y+3) = 4 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x + 3y = 4y - x + 5 \\ 2x - y = 3x - 2(y+1) \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 2(x+1) = -3y \\ 3x - 5y = -3(1+y) \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} -3(x+2) = 5y + 6 \\ -5(y+3) - 4x = 0 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 9x - 3y = -7 - 2x \\ 4x + 17y = -24 + 2y \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} 4(x-2y) - 2(x-3y) = 2 + y \\ -4(2x+y) + 3(2y+x) = 3 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} 2(x+y) = -11 - y \\ 3(x+y) = 31 + 8y \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} xy - (x+3)(y-5) = 43 \\ (3x-1)(y-2) = -27 + 3xy \end{cases}$$

**Bài 9:** Giải các hệ phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ để đưa về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

$$1) \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 2 \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 7 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9 \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \frac{-1}{x} + \frac{3}{y} = -10 \\ \frac{1}{x} - \frac{5}{y} = 16 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 7 \\ \frac{-1}{x} + \frac{2}{y} = 4 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 5x + 4y = 3xy \\ \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = 0 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 2x + 3y = -xy \\ \frac{8}{x} - \frac{6}{y} = 5 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 12x + 3y = 4xy \\ \frac{9}{x} - \frac{8}{y} = 1 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 7x + 9y = 4xy \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 2x + 7y = 2xy \\ \frac{7}{x} - \frac{6}{y} = -2 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 10x + 8y = 3xy \\ \frac{4}{x} - \frac{10}{y} = 0 \end{cases}$$

**Bài 10:** Giải các hệ phương trình sau.

$$1) \begin{cases} x - \sqrt{5}y = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{5}x - 2y = 7 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{2}x + y = \sqrt{2} + 2 \\ 2\sqrt{2}x - y = 2\sqrt{2} - 2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 5 \\ 2x\sqrt{2} - 3y\sqrt{3} = -5 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x\sqrt{2} - 3y = 1 \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 5x\sqrt{2} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 5x - y\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \\ 2x\sqrt{2} + y = 5 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 7x\sqrt{5} + y = 3\sqrt{2} \\ x\sqrt{30} - y\sqrt{6} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2x + y\sqrt{3} = \sqrt{3} \\ x\sqrt{3} - y = 4 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \sqrt{6}x - 3y = 9 \\ \sqrt{2}x - \sqrt{12}y = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x + 3y = 6 + \sqrt{3} \\ -4x + \sqrt{3}y = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 2\sqrt{3}x - \sqrt{2}y = \frac{5}{2} \\ \sqrt{3}x + 2\sqrt{2}y = 10 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} (1 + \sqrt{2})x - y = 4 \\ (1 - \sqrt{2})x + y = -2 \end{cases}$$

**Bài 11:** Giải các hệ phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ để đưa về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

$$1) \begin{cases} 2(x+y) + 3(x-y) = 4 \\ (x+y) + 2(x-y) = 5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2(x-2) + 3(1+y) = -2 \\ 3(x-2) - 2(1+y) = -3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2(2x-3) - (y+2) = 4 \\ 3(2x-3) - 2(y+2) = -5 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 4(1-3x) + 3(2y-7) = 6 \\ 2(1-3x) + (2y-7) = 4 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 3(2x-5) + (2-3y) = 3 \\ (2x-5) - \frac{1}{2}(2-3y) = 3,5 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \frac{3}{2x-y} - \frac{6}{x+y} = -1 \\ \frac{1}{2x-y} - \frac{1}{x+y} = 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{y} = 2 \\ \frac{2}{x-1} - \frac{1}{y} = -1 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \frac{2}{x-2} + \frac{2}{y-1} = 2 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{y-1} = 1 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{4}{3y+1} = 6 \\ \frac{-5}{x-1} + \frac{8}{3y+1} = 3 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \frac{-3}{x-y} + \frac{5}{2x+y} = -2 \\ \frac{4}{x-y} - \frac{1}{2x+y} = 2 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \frac{2}{x+1} + 2 = -\frac{4}{y-2} \\ \frac{3}{x+1} + \frac{5}{y-2} = -6 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} = \frac{5}{3} \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

**II. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH.****❖ Kiến thức cần nhớ****Các bước giải:***Bước 1:* Chọn 2 ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng*Bước 2:* Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.*Bước 3:* Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng, rồi giải hệ*Bước 4:* Đối chiếu với điều kiện, rồi kết luận

**Ví dụ:** Hai lớp 9A và 9B của một trường quyên góp sách ủng hộ cho các bạn học sinh khó khăn. Trung bình mỗi bạn lớp 9A ủng hộ 5 quyển, mỗi bạn lớp 9B ủng hộ 6 quyển nên cả hai lớp ủng hộ 493 quyển. Tính số học sinh mỗi lớp? Biết tổng số học sinh của hai lớp là 90.

*Hướng dẫn giải*

Gọi  $x, y$  (học sinh) lần lượt là số học sinh của lớp 9A và 9B ( $x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*$ ).

Vì tổng số học sinh của hai lớp là 90, nên ta có phương trình:  $x + y = 90$  (1).

Số quyển sách lớp 9A ủng hộ là  $5x$  (quyển)

Số quyển sách lớp 9B ủng hộ là  $6y$  (quyển)

Vì cả hai lớp ủng hộ 493 quyển, nên ta có phương trình:  $5x + 6y = 493$  (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

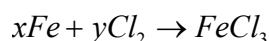
$$\begin{cases} x + y = 90 \\ 5x + 6y = 493 \end{cases} \quad \begin{cases} -5x - 5y = -450 \\ 5x + 6y = 493 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 43 \\ x + y = 90 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 43 \\ x = 47 \end{cases} \text{ (thỏa mãn) }.$$

Vậy lớp 9A có 43 học sinh và lớp 9B có 47 học sinh.

**Ví dụ:** Cân bằng phương trình hóa học sau bằng phương pháp đại số:  $Fe + Cl_2 \rightarrow FeCl_3$ .

*Hướng dẫn giải*

Gọi  $x, y$  lần lượt là hệ số của  $Fe$  và  $Cl_2$  thỏa mãn cân bằng phương trình hóa học.



Cân bằng số nguyên tử  $Fe$ , số nguyên tử  $Cl$  ở hai vế, ta được hệ

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Đưa các hệ số tìm được vào phương trình hóa học, ta có:  $Fe + \frac{3}{2}Cl_2 \rightarrow FeCl_3$ .

Do các hệ số phương trình hóa học phải là số nguyên nên nhân hai vế của phương trình hóa học trên với 2, ta được  $2Fe + 3Cl_2 \rightarrow 2FeCl_3$ .

**BÀI TẬP VẬN DỤNG (Chú ý: lúc học thầy Long sẽ chia thành từng dạng chi tiết hơn)**

**Bài 12:** Chị My và chị Thanh đi mua áo sơ mi và quần tây tại một cửa hàng thời trang. Chị My mua 4 chiếc áo sơ mi và 3 chiếc quần tây với giá tiền tổng cộng là 2,4 triệu đồng. Chị Thanh mua 3 chiếc áo sơ mi và 1 chiếc quần tây với giá tiền tổng cộng là 1,15 triệu đồng. Hỏi giá bán mỗi chiếc áo sơ mi và mỗi chiếc quần tây? Biết rằng tất cả các áo sơ mi đều đồng giá và tất cả các quần tây đều đồng giá.

**Bài 13:** Trong đợt giải tỏa thu hồi đất của nhiều hộ dân để xây dựng quảng trường trung tâm của một thành phố, mỗi hộ dân được cấp lại một lô đất để tái định cư. Được biết mỗi lô đất hình chữ nhật có chiều dài gấp rưỡi chiều rộng và chu vi của lô đất là 50m. Tính diện tích lô đất cấp cho mỗi hộ dân.

**Bài 14:** Hai ngăn của một kệ sách có tổng cộng 450 cuốn sách. Nếu chuyển 65 cuốn sách từ ngăn thứ hai sang ngăn thứ nhất thì số sách ở ngăn thứ hai gấp đôi số sách ở ngăn thứ nhất. Tính số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.

**Bài 15:** Một nhà hàng buffet có một mức giá cho người lớn và một mức giá khác cho trẻ em. Gia đình ông Khanh gồm ba người lớn và bốn trẻ em thanh toán 1350000 đồng khi vào nhà hàng. Gia đình bà Vân gồm ba người lớn và hai trẻ em thanh toán 1050000 đồng khi vào nhà hàng. Hỏi giá buffet của mỗi người lớn và mỗi trẻ em.

**Bài 16:** Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 60 m. Nếu tăng chiều dài thêm 6 m và tăng chiều rộng thêm 2 m thì diện tích tăng thêm 96 m<sup>2</sup>. Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn đó lúc đầu.

**Bài 17:** Một ô tô và một xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh cách nhau 200 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của ô tô và xe máy, biết rằng nếu vận tốc của ô tô tăng thêm 10 km / h và vận tốc của xe máy giảm đi 5 km / h thì vận tốc của ô tô bằng 2 lần vận tốc của xe máy.

**Bài 18:** Tìm hai số tự nhiên có tổng bằng 297, biết rằng nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 6 và số dư là 31.

**Bài 19:** Một chiếc xe khách đi từ Thành phố Hồ Chí Minh đến Cần Thơ, quãng đường dài 170 km. Sau khi xe khách xuất phát 15 phút, một chiếc xe tải bắt đầu đi từ Cần Thơ về Thành phố Hồ Chí Minh và gặp xe khách sau đó 1 giờ 45 phút. Tính vận tốc của mỗi xe, biết rằng mỗi giờ xe khách đi nhanh hơn xe tải 10 km.

**Bài 20:** Trong tháng thứ nhất, hai tổ sản xuất được 750 chi tiết máy. So với tháng thứ nhất, trong tháng thứ hai, tổ một sản xuất vượt 15%, tổ hai sản xuất vượt 10% nên trong tháng này, cả hai tổ đã sản xuất được 845 chi tiết máy. Hỏi trong tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

**Bài 21:** Sau kì thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2023 – 2024, học sinh hai lớp 9A và 9B tặng lại thư viện trường 738 quyển sách gồm hai loại sách giáo khoa và sách tham khảo. Trong đó, mỗi học sinh lớp 9A tặng 6 quyển sách giáo khoa và 3 quyển sách tham khảo, mỗi học sinh lớp 9B tặng 5 quyển sách giáo khoa và 4 quyển sách tham khảo. Biết số sách giáo khoa nhiều hơn số sách tham khảo là 166 quyển. Tính số học sinh mỗi lớp.

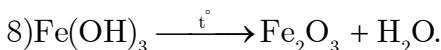
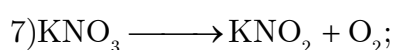
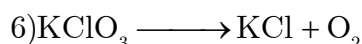
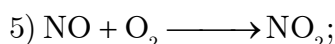
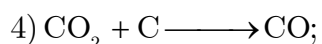
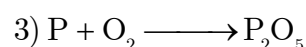
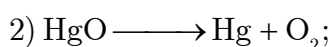
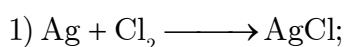
**Bài 22:** Trên một cánh đồng, người ta cấy 58 ha lúa giống mới và 25 ha lúa giống cũ, thu hoạch được tất cả 614 tấn thóc. Hỏi năng suất lúa giống mới trên 1 ha bằng bao nhiêu? Biết rằng 5 ha trồng lúa giống mới thu hoạch được nhiều hơn 6 ha trồng lúa giống cũ là 4 tấn.

**Bài 23:** Trong kì thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2023 - 2024, số học sinh thi vào trường THPT A bằng  $\frac{2}{3}$  số thí sinh thi vào trường B. Biết rằng tổng số phòng thi của cả hai trường là 80 phòng thi và mỗi phòng thi có đúng 24 thí sinh. Hỏi số thí sinh thi vào mỗi trường bằng bao nhiêu?

**Bài 24:** Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 5 m. Nếu giảm chiều rộng 3 m và giữ nguyên chiều dài thì ta được một hình chữ nhật mới có diện tích nhỏ hơn diện tích lúc đầu là 45 m<sup>2</sup>. Tính diện tích khu vườn lúc đầu.

**Bài 25:** Hai người thợ làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được 25% công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình trong mấy giờ thì xong?

**Bài 26:** Cân bằng các phương trình hoá học sau bằng phương pháp đại số.



........**HẾT**........

**CHỦ ĐỀ 2: BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN****§1. BẤT ĐẲNG THỨC****I. KHÁI NIỆM BẤT ĐẲNG THỨC**

Cho hai số thực  $x$  và  $y$  được biểu diễn trên trục số (Hình 1)



Hình 1

Hãy cho biết số nào lớn hơn.

Trên tập hợp số thực, khi so sánh hai số  $a$  và  $b$ , xảy ra một trong ba trường hợp sau:

- Số  $a$  lớn hơn  $b$ , kí hiệu  $a > b$ .
- Số  $a$  nhỏ hơn  $b$ , kí hiệu  $a < b$ .
- Số  $a$  bằng  $b$ , kí hiệu  $a = b$ .

Ta nói tập hợp số thực là tập hợp được sắp thứ tự.

Khi biểu diễn số thực trên trục số (vẽ theo đường nằm ngang như Hình 2), điểm biểu diễn số nhỏ hơn nằm bên trái điểm biểu diễn số lớn hơn. Do đó, trục số được coi là hình ảnh của tập hợp số thực, cho phép chúng ta nhìn thấy được thứ tự của các số thực.



Hình 2

Nếu  $x > y$  hoặc  $x = y$ , ta viết  $x \geq y$  (ta nói  $x$  lớn hơn hoặc bằng  $y$  hay  $x$  không nhỏ hơn  $y$ )

Nếu  $x < y$  hoặc  $x = y$ , ta viết  $x \leq y$  (ta nói  $x$  nhỏ hơn hoặc bằng  $y$  hay  $x$  không lớn hơn  $y$ )

Chẳng hạn: Để diễn tả

- Bình phương của số  $a$  luôn lớn hơn hoặc bằng 0, ta viết:  $a^2 \geq 0$
- Số  $c$  không âm, ta viết:  $c \geq 0$ .
- Số  $m$  không dương, ta viết:  $m \leq 0$ .

Ta có định nghĩa sau đây:

Hệ thức dạng  $a > b$  (hay  $a < b, a \geq b, a \leq b$ ) được gọi là bất đẳng thức và  $a$  được gọi là vế trái,  $b$  được gọi là vế phải của bất đẳng thức.

Lưu ý:

- Bất đẳng thức  $a > b$  còn được viết là  $b < a$ .
- Nếu đồng thời có hai bất đẳng thức  $a > b$  và  $a < c$  thì ta viết gộp lại thành  $b < a < c$  (đọc là  $a$  lớn hơn  $b$ , nhỏ hơn  $c$ ).
- Hai bất đẳng thức  $a > b$  và  $c > d$  (hay  $a \geq b$  và  $c \geq d$ ) được gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều.
- Hai bất đẳng thức  $a > b$  và  $c < d$  (hay  $a \geq b$  và  $c \leq d$ ) được gọi là hai bất đẳng thức ngược chiều.

**Ví dụ 1:** Hãy chỉ ra một bất đẳng thức diễn tả số  $m$  nhỏ hơn 5. Vế trái, vế phải của bất đẳng thức đó là gì?  
 Hướng dẫn giải:

Để diễn tả số  $m$  nhỏ hơn 5, ta có bất đẳng thức  $m < 5$ . Khi đó  $m$  là vế trái, 5 là vế phải của bất đẳng thức.

## BÀI TẬP VẬN DỤNG:

**Bài 1:** Xác định vế trái và vế phải của các bất đẳng thức sau:

- $-5 > -9$ .
- $a^2 + 1 \geq 2a$ ;
- $(m+1)^2 \geq 4m$ .

**Bài 2:**

- Cho hai ví dụ về bất đẳng thức.
- Viết bất đẳng thức mô tả khẳng định "số  $x$  không nhỏ hơn  $-100$ ". Xác định vế trái và vế phải của bất đẳng thức đó.

**Bài 3:** Viết bất đẳng thức để mô tả mỗi tình huống sau:

- Độ tuổi  $x$  kết hôn hợp pháp theo quy định của pháp luật Việt Nam hiện nay là nam từ đủ 20 tuổi trở lên.
- Độ tuổi  $x$  kết hôn hợp pháp theo quy định của pháp luật Việt Nam hiện nay là nữ từ đủ 18 tuổi trở lên.
- Tuần tới, nhiệt độ  $t(^{\circ}\text{C})$  tại Los Angeles là dưới  $20^{\circ}\text{C}$ ;
- Nhiệt độ  $t(^{\circ}\text{C})$  bảo quản của trứng gà là dưới  $10^{\circ}\text{C}$ ;
- Để được điều khiển xe máy điện thì số tuổi  $x$  của một người phải ít nhất là 16 tuổi.
- Mức lương  $p$  tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động là 20000 đồng.
- Số người  $n$  mà xe buýt chở được tối đa 49 người.

**Bài 4:** Hãy chỉ ra các bất đẳng thức diễn tả mỗi khẳng định sau:

- $y$  lớn hơn 8;
- $p$  không nhỏ hơn  $q$ ;
- $a$  là số âm;
- $t$  lớn hơn hoặc bằng 2025;
- $n$  nhỏ hơn 36;
- $y$  lớn hơn hoặc bằng 0;
- $x$  không lớn hơn  $y$ ;
- $x$  nhỏ hơn hoặc bằng  $-9$ ;
- $b$  là số dương;
- $m$  lớn hơn 10;
- $x$  nhỏ hơn hoặc bằng 3;
- $a$  không lớn hơn 13.



**Bài 5:** Biển báo giao thông R. 306 (Hình bên) báo tốc độ tối thiểu cho các xe cơ giới. Biển có hiệu lực bắt buộc các loại xe cơ giới vận hành với tốc độ không nhỏ hơn trị số ghi trên biển trong điều kiện giao thông thuận lợi và an toàn. Cho biết một ô tô đi trên đường đó với tốc độ  $a(\text{km/h})$ . Hãy viết bất đẳng thức cho tình huống trên.



Biển số R. 306



**Bài 6:** Dưới đây là hình ảnh của hai biển báo tốc độ giao thông (đơn vị:  $\text{km/h}$ ) dành cho ô tô, máy kéo, mô tô

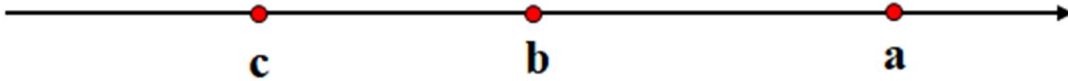
Hình ảnh		
Ý nghĩa	Tốc độ tối đa cho phép là $60\text{km/h}$	Tốc độ tối đa cho phép là $30\text{km/h}$

Gọi  $v(\text{km/h})$  là tốc độ lưu thông của các phương tiện đó khi đi trên đoạn đường có một trong hai biển báo trên. Hãy dùng các bất đẳng thức để mô tả điều kiện của  $v$  theo quy định thể hiện trên mỗi biển báo.

## II. TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

### 1. Tính chất bắc cầu

Cho  $a, b, c$  là ba số thỏa mãn  $a > b$  và  $b > c$ . Trong hai số  $a$  và  $c$ , số nào lớn hơn? Vì sao?



Cho ba số  $a, b, c$ . Nếu  $a > b$  và  $b > c$  thì  $a > c$  (tính chất bắc cầu).

- ❖ **Chú ý:** Tương tự, các thứ tự lớn hơn ( $>$ ), lớn hơn hoặc bằng ( $\geq$ ), nhỏ hơn hoặc bằng ( $\leq$ ) cũng có tính chất bắc cầu.

**Ví dụ 2:** So sánh hai số  $a$  và  $b$ , biết  $a < 8$  và  $b > 8$ .

Hướng dẫn giải:

Do  $a < 8$  và  $b > 8$  nên theo tính chất bắc cầu ta suy ra  $a < b$ .

- ❖ **Chú ý:** Học thêm các bất đẳng thức AM – GM; BUNHIACOPXKI .... Và sơ đồ bất đẳng thức thầy Long sẽ bổ sung lúc học.

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 7:** So sánh hai số  $m$  và  $n$ , biết  $m \leq \pi$  và  $n \geq \pi$ .

**Bài 8:** Chứng minh:

1)  $\frac{2025}{2024} > \frac{2024}{2025}$ ;

2)  $\frac{2025}{1000} > 1,999$ ;

3)  $-\frac{2024}{2025} > -1,1$

### 2. Tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Em hãy viết kí hiệu thích hợp ( $>$ ,  $<$ ) vào ô trống:

a)  $8 > 5$

$8 + 10 \square 5 + 10$

b)  $-20 < -4$

$-20 + (-18) \square -4 + (-18)$

Từ bài trên, ta thấy khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức thì được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.



**Kiến thức cần nhớ:**

Hai bất đẳng thức  $a > b$  và  $m > n$  được gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều.

Hai bất đẳng thức  $a > b$  và  $m < n$  được gọi là hai bất đẳng thức ngược chiều.

Một cách tổng quát, ta có:

Cho ba số  $a, b$  và  $c$ . Nếu  $a > b$  thì  $a + c > b + c$ .

❖ **Chú ý:** Tính chất này vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu  $<, \geq, \leq$ .

**Ví dụ 3:** Chứng tỏ  $2025 + (-8^{90}) > 2024 + (-8^{90})$ .

Hướng dẫn giải:

Ta có  $2025 > 2024$ . Cộng hai vế của bất đẳng thức với  $-8^{90}$ , ta được:

$$2025 + (-8^{90}) > 2024 + (-8^{90})$$

**Ví dụ 4:** Cho hai số  $x$  và  $y$  thỏa mãn  $3x < 2y$ . Chứng tỏ  $3x + 99 < 2y + 100$ .

Hướng dẫn giải:

Cộng 99 vào hai vế của bất đẳng thức  $3x < 2y$ , ta được:

$$3x + 99 < 2y + 99 \quad (1)$$

Cộng  $2y$  vào hai vế của bất đẳng thức  $99 < 100$ , ta được:

$$99 + 2y < 100 + 2y \text{ hay } 2y + 99 < 2y + 100 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $3x + 99 < 2y + 100$  (tính chất bắc cầu).

**E. BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 9:** Cho một ví dụ về hai bất đẳng thức cùng chiều và một ví dụ về hai bất đẳng thức ngược chiều.

**Bài 10:** Cho hai số  $m$  và  $n$  thỏa mãn  $m > n$ . Chứng minh:  $m + 5 > n + 4$ .

**Bài 11:** Cho  $x^2 \geq 1$ . Chứng minh:  $(x+1)^2 \geq 2x+2$ .

**Bài 12:** Cho  $a^2 \leq 3$ . Chứng minh:  $(a-1)^2 \leq 4-2a$ .

**Bài 13:** Cho  $6m \leq 7$ . Chứng minh:  $(m+3)^2 \leq m^2 + 16$ .

**Bài 14:** So sánh  $a^2 + 4$  và  $4$ , với  $a$  là số thực tùy ý.

**Bài 15:** So sánh hai số  $-7 + 99^{100}$  và  $-17 + 99^{100}$ .

**Bài 16:** Chứng minh:  $\sqrt{29} - \sqrt{6} > \sqrt{28} - \sqrt{6}$ .

**Bài 17:** Hãy cho biết các bất đẳng thức được tạo thành khi:

- Cộng hai vế của bất đẳng thức  $3a > 7$  với  $-21$ ;
- Cộng hai vế của bất đẳng thức  $m^2 \leq n-3$  với  $23$ ;
- Cộng vào hai vế của bất đẳng thức  $5b \leq -7$  với  $-2$ , rồi tiếp tục cộng với  $-9$ .

**Bài 18:** Cho  $a > b$  và  $c > d$ . Chứng minh:  $a + c > b + d$ .

**Bài 19:** Cho hai số  $a$  và  $b$  thỏa mãn  $4a < 3b$ . Chứng minh rằng  $4a + 120 < 3b + 150$ .

**Bài 20:** Gọi  $a$  là số tuổi của bạn An,  $b$  là số tuổi của bạn Bình, biết rằng bạn Bình lớn tuổi hơn bạn An. Hãy dùng bất đẳng thức để biểu diễn mối quan hệ về tuổi của hai bạn đó ở hiện tại và sau sáu năm nữa.

### 3. Tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

Em hãy viết kí hiệu thích hợp ( $>$ ,  $<$ ) vào ô trống:

1)  $5 > 4$

$5 \cdot 13 \square 4 \cdot 13$

3)  $7 > 5$

$7 \cdot (-3) \square 5 \cdot (-3)$

2)  $-20 < -4$

$-20 + (-18) \square -4 + (-18)$

4)  $-9 < -7$

$-9 \cdot (-3) \square -7 \cdot (-3)$

Từ bài trên, ta thấy:

Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương thì được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm thì được một bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

Một cách tổng quát, ta có:

#### ❖ Kiến thức cần nhớ

Cho ba số  $a, b, c$  và  $a > b$ .

\* Nếu  $c > 0$  thì  $a \cdot c > b \cdot c$ ;

\* Nếu  $c < 0$  thì  $a \cdot c < b \cdot c$ .

❖ **Chú ý:** Tính chất này vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ .

**Ví dụ 5:** Không thực hiện phép tính, hãy so sánh:  $1982.15$  và  $1983.15$ .

*Hướng dẫn giải:*

Ta có:  $1982 < 1983$ . Nhân hai vế của bất đẳng thức với  $15$ , ta được:  $1982.15 < 1983.15$ .

**Ví dụ 6:** Không thực hiện phép tính, hãy so sánh:  $97 \cdot (-31)$  và  $99 \cdot (-31)$ .

*Hướng dẫn giải:*

Ta có  $97 < 99$ . Nhân hai vế của bất đẳng thức với  $-31$ , ta được:  $97 \cdot (-31) > 99 \cdot (-31)$ .

### BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 21:** Hãy so sánh:  $(-289) \cdot (-85)^{12}$  và  $(-290) \cdot (-85)^{12}$ .

**Bài 22:** Cho  $a < b$ . Chứng minh:

1)  $4a + 7 < 4b + 7$ ;

2)  $6a - 13 < 6b - 13$ ;

3)  $-3a + 2024 > -3b + 2024$ ;

4)  $-4a - 11 > -4b - 11$ ;

5)  $48a - 23 < 48b - 23$ ;

6)  $-2025a + 1 > -2025b + 1$ .

**Bài 23:** Cho  $a \geq b$ . Hãy so sánh:

1)  $13a + 6$  và  $13b + 6$ ;

2)  $21a - 8$  và  $21b - 8$ ;

3)  $20a - 5$  và  $20b - 5$ ;

4)  $-17a + 6$  và  $-17b + 6$ ;

5)  $\sqrt{7} - 5a$  và  $\sqrt{7} - 5b$ ;

6)  $-10a - 3$  và  $-10b - 3$ .

**Bài 24:** Không thực hiện phép tính, hãy chứng minh:

1)  $3 \cdot (-9) + 2025 < 3 \cdot (-5) + 2025$ ;

2)  $(-7) \cdot (-8) + 1982 > (-7) \cdot (-5) + 1982$ .

**Bài 25:** Chứng minh:

1)  $6 \cdot 81 < 3x + 3,9 < 68,4$  với  $21,4 < x < 21,5$ ;

2)  $68,7 \leq 5x + 7,2 \leq 74,2$  với  $12,3 \leq a \leq 13,4$ .

**Bài 26:** Cho hai số  $a, b$  thỏa mãn  $0 < a^2 < b^2$ . Chứng minh:  $\frac{3}{2}a^2 < 2b^2$ .

**Bài 27:** Cho hai số  $a, b$ , thỏa mãn  $a^2 > b^2 > 0$ . Chứng minh:  $5a^2 > 4b^2$ .

**Bài 28:** Cho biết  $-91m \leq -91n$ , hãy so sánh  $m$  và  $n$ .

**Bài 29:** Hãy cho biết các bất đẳng thức được tạo thành khi:

1) Nhân hai vế của bất đẳng thức  $x < 4$  với  $7$ , rồi tiếp tục cộng với  $5$ ;

2) Nhân hai vế của bất đẳng thức  $x \geq 3$  với  $6$ , rồi tiếp tục cộng với  $9$ ;

3) Nhân hai vế của bất đẳng thức  $a^2 - 2 > 3m$  với 5, rồi tiếp tục cộng với  $-20$ .

**Bài 30:** So sánh hai số  $x$  và  $y$  trong mỗi trường hợp sau:

- 1)  $x + 9 > y + 9$ ;      2)  $-19x \leq -19y$ ;      3)  $5x - 7 < 5y - 7$ ;      4)  $-8x + 3 > -8y + 3$ .

**Bài 31:** Cho  $-3a \geq -3b$ . Hãy so sánh:

- 1)  $a$  và  $b$ ;      2)  $5a - 2$  và  $5b - 2$ ;      3)  $1 - 6a$  và  $1 - 6b$ .

**Bài 32:** Không thực hiện phép tính, hãy so sánh các biểu thức:

- 1)  $-3,47.84,5$  và  $-3,74.84,5$ ;      2)  $15,34^3\pi$  và  $15,34^3.3$ ;      3)  $\frac{152}{1891}$  và  $\frac{125}{1891}$ .

**Bài 33:** Cho  $a, b, x, y$  là các số thực dương thỏa mãn  $a > b$  và  $x > y$ . Chứng minh:  $ax > by$ .

**Bài 34:** Cho  $m \geq 2$ . Chứng minh:

- 1)  $m^2 \geq 2m$ ;      2)  $(m+1)^2 \geq 4m+1$ .

**Bài 35:** Cho  $x \geq 5$ . Chứng minh:

- 1)  $x^2 \geq 5x$ ;      2)  $(x+2)^2 \geq 9x+4$ .

**Bài 36:** Không thực hiện phép tính, hãy sắp các số sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

$$7\sqrt{3}, 7\sqrt{2}, 7\sqrt{5}, 14.$$

**Bài 37:** Một ca nô đi xuôi dòng trong 1 giờ 30 phút. Biết rằng tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không quá 35 km/h và tốc độ của dòng nước là 5 km/h. Chứng minh quãng đường ca nô đi được trong thời gian trên không vượt quá 60 km.

**Bài 38:** Một ca nô đi ngược dòng trong 2 giờ. Biết rằng tốc độ chèo ca nô khi nước yên lặng lớn hơn 15 km/h và tốc độ của dòng nước là 3 km/h. Chứng minh quãng đường ca nô đi được trong thời gian trên lớn hơn 24 km.

**Bài 39:** Bác Khang muốn rào xung quanh mảnh vườn hình chữ nhật có số đo chiều rộng là  $x$  (m). Chiều dài dài hơn chiều rộng 5 m. Bác Khang ước lượng là  $x < 20$ . Bác có tấm lưới dài khoảng 95 m. Tấm lưới này có đủ dài để bác Khang rào vườn không? Giải thích vì sao.

**Bài 40:** Bác Hải muốn rào xung quanh mảnh vườn hình chữ nhật có số đo chiều dài là  $x$  (m). Chiều rộng ngắn hơn chiều dài 3 m. Bác Hải ước lượng là  $x < 30$ . Bác có tấm lưới dài khoảng 135 m. Tấm lưới này có đủ dài để bác Hải rào vườn không? Giải thích vì sao?

**Bài 41:** Bác Tuấn muốn rào xung quanh mảnh vườn hình chữ nhật có số đo chiều rộng là  $x$  (m). Chiều dài dài hơn chiều rộng 10m. Bác Tuấn ước lượng là  $x > 15$ . Bác có tấm lưới dài khoảng 85 m. Tấm lưới này có đủ dài để bác Tuấn rào vườn không? Giải thích vì sao.

**Bài 42:** Bác Bình muốn rào xung quanh mảnh vườn hình chữ nhật có số đo chiều dài là  $x$  (m). Chiều rộng ngắn hơn chiều dài 15 m. Bác Bình ước lượng là  $x > 40$ . Bác có tấm lưới dài khoảng 120 m. Tấm lưới này có đủ dài để bác Bình rào vườn không? Giải thích vì sao.

**Bài 43:** Hình chữ nhật ABCD có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Biết rằng chiều rộng của hình chữ nhật lớn hơn 12 cm. Bạn Vy kết luận là chu vi của hình chữ nhật lớn hơn 96 cm. Phát biểu của bạn Vy có đúng không? Vì sao?

**Bài 44:** Hình chữ nhật MNPQ có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết rằng chiều rộng của hình chữ nhật nhỏ hơn 12 cm. Bạn Giang kết luận là chu vi của hình chữ nhật lớn hơn 150 cm. Phát biểu của bạn Giang có đúng không? Vì sao?

........**HẾT**........

**§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN****1. Bất phương trình bậc nhất một ẩn**

Bạn Khanh dự định đọc sách tổng cộng ít nhất 45 phút vào buổi sáng và buổi tối trong ngày. Buổi sáng, bạn Khanh đã đọc sách trong 25 phút. Gọi  $x$  là số phút bạn Khanh đọc sách vào buổi tối. Viết hệ thức chứa  $x$  biểu thị điều kiện để bạn Khanh đọc sách như dự định. Để bạn Khanh đã đọc sách được như dự định,  $x$  phải thỏa mãn hệ thức:

$$25 + x \geq 45 \quad (1)$$

Hệ thức (1) được gọi là bất phương trình với ẩn là  $x$ .

Trong bất phương trình này,  $25 + x$  được gọi là vế trái, 45 được gọi là vế phải.

Ta có định nghĩa sau đây :

Bất phương trình dạng  $ax + b > 0$  (hoặc  $ax + b < 0$ ,  $ax + b \geq 0$ ,  $ax + b \leq 0$ ), với  $a, b$  là hai số đã cho và  $a \neq 0$ , được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn (ẩn là  $x$ ).

**Ví dụ 1:** Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

$$x + 2 < 0; \quad 0x - 7 \leq 0; \quad -4x + 3 \geq 0; \quad -8x > 0; \quad 2x^2 - 3 \leq 0.$$

*Hướng dẫn giải:*

Bất phương trình  $x + 1 < 0$  có dạng  $ax + b < 0$  với  $a = 1 \neq 0$  và  $b = 1$ , nên nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Bất phương trình  $-4x + 3 \geq 0$  có dạng  $ax + b \geq 0$  với  $a = -4$  và  $b = 3$ , nên nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Bất phương trình  $-8x > 0$  có dạng  $ax + b > 0$  với  $a = -8$  và  $b = 0$ , nên nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Hai bất phương trình  $0x - 7 \leq 0$  và  $2x^2 - 3 \leq 0$  không phải là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

**BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 1:** Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

$$0x > 0; \quad 5x < 0; \quad x^2 - 1 \leq 0; \quad -4x + 7 \leq 0; \quad -4x^4 + 5 > 0; \quad 7x - \frac{3}{4} \leq 0; \quad \frac{x+1}{2x-1} < 0.$$

**Bài 2:** Ông Thịnh dự định chạy bộ tổng cộng ít nhất 5500 m vào buổi sáng và buổi chiều trong ngày. Buổi sáng ông Thịnh đã chạy được 3000 m. Gọi  $x$  là số mét ông Thịnh chạy bộ vào buổi chiều. Viết hệ thức chứa  $x$  biểu thị điều kiện để ông Thịnh chạy được như dự định.

**2. Nghiệm của bất phương trình bậc nhất một ẩn**

Cho bất phương trình  $x - 5 > 0$  (1)

Khi thay  $x = 9$  vào bất phương trình (1), ta được  $9 - 5 > 0$  là khẳng định đúng.

Ta nói  $x = 9$  là một nghiệm của bất phương trình.

Khi thay  $x = 3$  vào bất phương trình (1), ta được  $3 - 5 > 0$  là khẳng định sai.

Ta nói  $x = 3$  không phải là nghiệm của bất phương trình.

Với bất phương trình bậc nhất có ẩn là  $x$ , số  $x_0$  được gọi là một nghiệm của bất phương trình nếu ta thay  $x = x_0$  thì nhận được một khẳng định đúng.

Giải bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó.

**Ví dụ 2:** Trong hai giá trị  $x = 4$  và  $x = 3$ , giá trị nào là nghiệm của bất phương trình  $5x - 15 \leq 0$ ?

*Hướng dẫn giải:*

Thay  $x = 4$  vào bất phương trình, ta được  $5 \cdot 4 - 15 \leq 0$  là khẳng định sai. Vậy  $x = 4$  không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Thay  $x = 3$  vào bất phương trình, ta được  $5 \cdot 3 - 15 \leq 0$  là khẳng định đúng. Vậy  $x = 3$  là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

**BÀI TẬP VẬN DỤNG****Bài 3:** Trong các số  $-4; 0; 3; 7; 10$ , những số nào là nghiệm của bất phương trình  $3x - 8 \leq 0$ ?**Bài 4:** Tìm một số là nghiệm và một số không phải là nghiệm của bất phương trình  $-4x + 1 > 0$ .**❖ Kiến thức cần nhớ**Xét bất phương trình  $ax + b > 0$  ( $a \neq 0$ ).+ Cộng hai vế của bất phương trình với  $-b$ , ta được bất phương trình:  $ax > -b$ .+ Nhân hai vế của bất phương trình nhận được với  $\frac{1}{a}$ .+ Nếu  $a > 0$  thì nhận được nghiệm của bất phương trình đã cho là:  $x > -\frac{b}{a}$ .+ Nếu  $a < 0$  thì nhận được nghiệm của bất phương trình đã cho là:  $x < -\frac{b}{a}$ .Với các bất phương trình dạng  $ax + b < 0$ ,  $ax + b \geq 0$ ,  $ax + b \leq 0$ , ta thực hiện các bước giải tương tự.**Ví dụ 3:** Giải các bất phương trình sau:

a)  $4x - 5 > 0$ ;

b)  $0,5x + 8 \leq 0$ ;

c)  $-5x + 7 \leq 0$ .

**Hướng dẫn giải:**

a) Ta có:

$$4x - 5 > 0$$

$$4x > 5 \text{ (cộng hai vế với 5)}$$

$$4x \cdot \frac{1}{4} > 5 \cdot \frac{1}{4} \text{ (nhân hai vế với } \frac{1}{4} \text{)}$$

$$x > \frac{5}{4}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là  $x > \frac{5}{4}$ .

b) Ta có:

$$0,5x + 8 \leq 0$$

$$0,5x \leq -8 \text{ (cộng hai vế với } -8 \text{)}$$

$$(0,5x) \cdot 2 \leq (-8) \cdot 2 \text{ (nhân hai vế với 2)}$$

$$x \leq -16$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là  $x \leq -16$ .

c) Ta có:

$$-5x + 7 \leq 0$$

$$-5x \leq -7 \text{ (cộng hai vế với } -7 \text{)}$$

$$(-5x) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \geq (-7) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \text{ (nhân hai vế với } -\frac{1}{5} \text{)}$$

$$x \geq \frac{7}{5}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là  $x \geq \frac{7}{5}$ .**❖ Chú ý:** Bằng cách sử dụng các tính chất của bất đẳng thức, ta có thể giải một số bất phương trình đưa được về bất phương trình bậc nhất một ẩn.**Ví dụ 4.** Giải bất phương trình  $5x + 4 \leq 9x - 20$ **Hướng dẫn giải:**

Ta có:  $5x + 4 \leq 9x - 20$

$$5x - 9x \leq -20 - 4$$

$$-4x \leq -24$$

$$x \geq 6$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là  $x \geq 6$ .

### BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 5:** Giải các bất phương trình sau:

- |                              |  |
|------------------------------|--|
| 1) $x - 3 > 0$ ;             | 2) $x - 4 < -8$ ;                      |
| 3) $x + 2 < 0$               | 4) $x - 2 > 4$ ;                       |
| 5) $x + 5 < 7$ ;             | 6) $x + 3 > -6$ ;                      |
| 7) $x - 5 > 3$ ;             | 8) $x - 2x < -2x + 4$ ;                |
| 9) $3x < 2x + 5$ ;           | 10) $2x + 1 < x + 4$ ;                 |
| 11) $8x + 2 < 7x - 1$ ;      | 12) $3x + 4 > 2x + 3$ ;                |
| 13) $-3x > -4x + 2$ ;        | 14) $-2x > -3x + 3$ ;                  |
| 15) $-4x - 2 > -5x + 6$ ;    | 16) $5 + 7x > 4x - 9$ ;                |
| 17) $12x - 4 \leq 3x + 12$ ; | 18) $1,5 < 2,3 - 4x$ ;                 |
| 19) $10 - 0,5x \leq -3,5x$ ; | 20) $3,5x - 1 \geq 6$ ;                |
| 21) $5 + \frac{2}{3}x > 3$ ; | 22) $2x + \frac{4}{5} > \frac{9}{5}$ ; |
| 23) $5 - \frac{1}{3}x > 2$ ; | 24) $3x - 8 > 4x - 12$ .               |

**Bài 6:** Giải các bất phương trình sau:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $\frac{3x-1}{4} > 2$                              | 2) $\frac{2x+4}{3} < 3$ ;                                 |
| 3) $\frac{1-2x}{3} > 4$ ;                            | 4) $\frac{6-4x}{5} < 1$ ;                                 |
| 5) $\frac{15-6x}{3} > 5$ ;                           | 6) $\frac{8-11x}{4} < 13$ ;                               |
| 7) $\frac{7x-11}{5} \leq 1-2x$                       | 8) $\frac{4x-5}{3} > \frac{7-x}{5}$                       |
| 9) $\frac{2-x}{3} < \frac{3-2x}{5}$ ;                | 10) $\frac{2-x}{2} \leq \frac{5x+4}{11}$                  |
| 11) $\frac{1}{4}(x-1) < \frac{x-4}{6}$ ;             | 12) $\frac{1-2x}{4} - 2 < \frac{1-5x}{8}$ ;               |
| 13) $\frac{2x-1}{3} - \frac{x}{6} > \frac{x+1}{2}$ ; | 14) $\frac{x}{3} - \frac{2x+1}{2} \geq \frac{x}{6} - x$ ; |

**Bài 7:** Giải các bất phương trình sau:

- |                                     |                                    |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $3(x-2) - 5 \geq 3(2x-1)$ ;      | 2) $-5(x-2) + 2(x-3) \geq 7$ ;     |
| 3) $4x - 7 \geq 5(2x-3) + 4$ ;      | 4) $5x - 7(2x-5) < 2(x-1)$ ;       |
| 5) $3(5x-2) - 2(x+4) \geq 3x-2$ ;   | 6) $2x - 4(x+2) \geq 5(-2x+1)$ .   |
| 7) $-7x + 2(x-4) \leq 5 - 3(x-2)$ ; | 8) $6 - 7(x-4) \geq 3x + 2(3-x)$ ; |
| 9) $5x - 3(2-7x) > 5(x-2) + 8$ ;    | 10) $10x - 3(x-5) > 3x - 2(x-4)$ , |
| 11) $8x + 3(x+1) > 5x - (2x-6)$ ;   | 12) $2x(6x-1) > (3x-2)(4x+3)$ .    |

**Bài 8:** Giải các bất phương trình sau

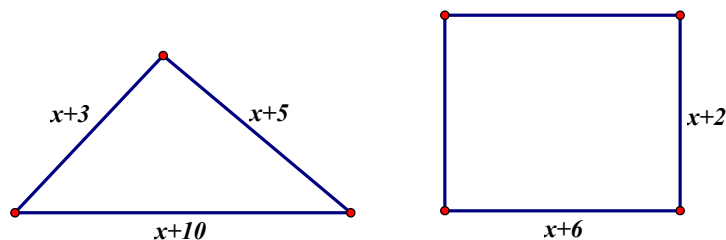
- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| 1) $(x-1)^2 < x(x+3)$ ;         | 2) $2(x+2)^2 < 2x(x+2) + 4$ ;           |
| 3) $(x-2)(x+2) > x(x-4)$ ;      | 4) $6x^2 - 36 \geq 6x(x-2) - 5(2x+1)$ ; |
| 5) $(x+3)(x-1) < (x+1)^2 - 4$ ; | 6) $(x+5)^2 - 6 > x(x-5) - (3x-7)$ ;    |

- 7)  $(x+3)(x^2-3x+9)-2x \geq x^3-7$ ;
- 8)  $(x-2)^3+6x^2 \geq x^3+7(2x-1)$ ;
- 9)  $(4x+3)^2-2 < (4x-3)^2-(5x+4)$ ;
- 10)  $3(x-2)^2+9x \geq 12+3(x^2-x+3)$ ;
- 11)  $(x-3)(x+2)-x(x+4) > 5x-2$ ;
- 12)  $(x+2)(x+4) > (x-2)(x+8)+26$ ;
- 13)  $(x+2)^2-4(x-3) \geq (x+1)(x-1)$ ;
- 14)  $(4x-1)(x+2)-7x > (2x-1)(2x+1)$ ;
- 15)  $(4x-1)^2-2 \geq 16(x-1)(x+1)+2x$ ;
- 16)  $(x-2)^2+(x-3)(x+2) \leq -5x+2x^2-2$
- 17)  $(x-4)^2-(x+5)(x-5) \geq -8x+41$ ;
- 18)  $(2x-3)^2-4x(x+1) > 4(1-4x)+5$ ;
- 19)  $(x+2)^2-(x-5)(x+5) > 2(2x-5)$ ;
- 20)  $(x+2)(x^2-2x+4) < 5+(x^3+2x^2)-2x^2+x$ ;
- 21)  $(2x+1)(2x-1)-4(x-1)^2 > 4(2x+1)$ ;
- 22)  $(x+2)^2+(x-3)^2 \geq 2(x-1)(x+1)+9$ .

**Bài 9:** Giải các bất phương trình sau

- 1)  $\frac{x+1}{3}+\frac{x}{2} \geq 4$ ;
- 2)  $4-\frac{x+4}{8} \geq \frac{x-5}{2}$ ;
- 3)  $\frac{7-2x}{4} \leq \frac{5x-1}{8}+4$ ;
- 4)  $\frac{3-2x}{3} > \frac{1-5x}{9}+2$ ;
- 5)  $\frac{-x+3}{6}-\frac{x-2}{3} \leq \frac{-5}{4}$ ;
- 6)  $\frac{3x-1}{3}-\frac{2x-3}{4} \geq \frac{4x-1}{6}$ ;
- 7)  $\frac{4x-1}{3}+\frac{2+x}{15} \geq \frac{2x-3}{5}$ ;
- 8)  $\frac{x-1}{2}+\frac{x-1}{4} \leq 1-\frac{2(x-1)}{3}$ ;
- 9)  $\frac{5x+1}{8}-\frac{x-2}{4} \geq \frac{3}{2}$ ;
- 10)  $\frac{7-2x}{4}-3 \geq \frac{1-5x}{8}$ ;
- 11)  $\frac{5x+1}{8}-\frac{x-2}{4} \leq \frac{7}{2}$ ;
- 12)  $\frac{3+2x}{4}-\frac{1+3x}{6} \leq \frac{8-x}{12}$ ;
- 13)  $\frac{2x-1}{3}-\frac{x+2}{2} \geq \frac{5x+4}{6}$ ;
- 14)  $\frac{2x+3}{-4} \geq \frac{4-x}{-6}+1$ ;
- 15)  $\frac{7x+3}{4}-\frac{2-5x}{3} \leq \frac{2x-7}{2}+1$ ;
- 16)  $\frac{x-3}{3}-\frac{x-4}{4} \geq \frac{2x-3}{8}$ ;
- 17)  $\frac{1}{3}(x+4)-\frac{x-2}{10} \leq \frac{3}{2}$ ;
- 18)  $\frac{2x+1}{7}-\frac{2(x-2)}{3} \leq \frac{x-7}{21}$ ;
- 19)  $\frac{4x-1}{3}-\frac{3x+2}{2} \leq \frac{2x-3}{4}$ ;
- 20)  $\frac{3x+2}{4}-\frac{x-2}{3} > \frac{4x+1}{12}$ ;
- 21)  $\frac{5x-1}{4}+\frac{2x-1}{3} \geq \frac{3x}{2}$ ;
- 22)  $\frac{x+2}{5} \geq \frac{x+3}{2}-\frac{7x+5}{10}$ ;
- 23)  $\frac{x-3}{3}-\frac{x-1}{6} \leq -\frac{x+2}{4}$ ;
- 24)  $\frac{x(x+1)}{12}-\frac{x-1}{8} \leq \frac{2x^2+3}{24}+\frac{5x}{6}$ .

**Bài 10:** Tìm  $x > 0$  sao cho ở Hình bên dưới chu vi của hình tam giác lớn hơn chu vi của hình chữ nhật:



**Bài 11:** Bạn Lan tham gia học tiếng Anh ở một trung tâm ngoại ngữ. Qua hai bài kiểm tra của khoá học, bạn đã đạt lần lượt 61 và 66 điểm (thang điểm 100). Bạn phấn đấu đạt điểm trung bình ít nhất là 70 ba lần kiểm tra. Để có kết quả này, ở lần kiểm tra thứ ba, bạn Lan phải được ít nhất bao nhiêu điểm?



**Bài 12:** Chị Cúc gửi tiền tiết kiệm kì hạn 12 tháng ở một ngân hàng với lãi suất 6,5% một năm. Chị Cúc dự định tổng số tiền nhận được sau khi gửi 12 tháng ít nhất là 319500000 đồng. Hỏi Chị Cúc phải gửi số tiền tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu để đạt được dự định đó?

**Bài 13:** Tổng chi phí của một doanh nghiệp sản xuất áo sơ mi là 390 triệu đồng/tháng. Giá bán của mỗi chiếc áo sơ mi là 380 nghìn đồng. Hỏi trung bình mỗi tháng doanh nghiệp phải bán được ít nhất bao nhiêu chiếc áo sơ mi để thu được lợi nhuận ít nhất là 1,02 tỉ đồng sau 1 năm?

**Bài 14:** Trong buổi sáng đầu tiên của đợt hiến máu nhân đạo tổ chức ở Ủy Ban Nhân Dân Phường 5, Quận Tân Bình, người ta đã thu được không dưới 22600 ml máu. Theo thống kê thì sáng hôm đó có 35 người hiến máu ở mức 350 ml. Số còn lại hiến ở mức 450 ml. Hỏi trong buổi sáng hôm đó đã có ít nhất bao nhiêu người hiến máu ở mức 450 ml?

**Bài 15:** Trong một kì thi gồm ba môn Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh, điểm số môn Toán và Ngữ văn tính theo hệ số 2, điểm số môn Tiếng Anh tính theo hệ số 1. Để trúng tuyển, điểm số trung bình của ba môn ít nhất phải bằng 8. Bạn Na đã đạt 9,1 điểm môn Toán và 6,9 điểm môn Ngữ văn. Hãy lập và giải bất phương trình để tìm điểm số Tiếng Anh tối thiểu mà bạn Na phải đạt để trúng tuyển?

**Bài 16:** Bạn Lan để dành tiền mua quà tặng em trai vào Quốc tế Thiếu nhi 1/6. Hiện tại bạn Lan đã để dành được số tiền không quá 50000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá 5000 đồng và 2000 đồng. Hỏi bạn Lan có thể có nhiều nhất bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng?

**Bài 17:** Sau Tết Nga có 1500000 đồng tiền lì xì. Mỗi ngày Nga để dành được 25000 đồng, Nga muốn mua một chiếc xe đạp trị giá 3280000 đồng. Mỗi ngày Nga phải để dành ít nhất bao nhiêu ngày?

**Bài 18:** Do ảnh hưởng của đại dịch Covid 19, Ngân đã kêu gọi người thân và bạn bè quyên góp được 10000000 đồng và dự định mua gạo và mì gói dành tặng cho những người khó khăn. Ngân đã mua 10 bao gạo giá 650000 đồng/bao, số tiền còn lại Ngân mua mì gói. Hỏi Ngân có thể mua tối đa bao nhiêu thùng mì, biết 1 thùng mì giá 150000 đồng?

**Bài 19:** Trong một kì thi, bạn Chiến phải thi bốn môn Văn, Toán, Tiếng Anh và Hóa. Chiến đã thi ba môn và được kết quả như bảng sau:

Môn	Văn	Tiếng Anh	Hóa
Điểm	8	7	10

Kì thi quy định muốn đạt loại giỏi phải có điểm trung bình các môn thi là 8 trở lên và không có môn nào bị điểm dưới 6. Biết môn Văn và Toán được tính hệ số 2. Hãy cho biết, để đạt loại giỏi bạn Chiến phải có điểm thi môn Toán ít nhất là bao nhiêu?

**Bài 20:** Để lập đội tuyển năng khiếu về bóng rổ của trường, thầy thể dục đưa ra quy định tuyển chọn như sau: mỗi bạn dự tuyển sẽ được ném 20 quả bóng vào rổ, quả bóng vào rổ được cộng 3 điểm; quả bóng ném ra ngoài bị trừ 1 điểm. Nếu bạn nào có số điểm từ 28 điểm trở lên sẽ được vào đội tuyển. Hỏi một học sinh muốn được chọn vào đội tuyển thì phải ném ít nhất bao nhiêu quả bóng vào rổ.

.....♪...**HẾT**...♪.....



## CHỦ ĐỀ 3: CĂN THỨC

## §1. CĂN BẬC HAI

## I. CĂN BẬC HAI

**Kiến thức cần nhớ:**

**Định nghĩa:** Cho số thực  $a$  không âm. Số thực  $x$  thỏa mãn  $x^2 = a$  được gọi là một căn bậc hai của  $a$ .

Ta có kết quả sau đây:

- Mỗi số dương  $a$  có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau: số dương là  $\sqrt{a}$  (căn bậc hai số học của  $a$ ), số âm là  $-\sqrt{a}$ .
- Số 0 chỉ có đúng một căn bậc hai là chính nó, ta viết  $\sqrt{0} = 0$ .

**Chú ý:**

- i) Số âm không có căn bậc hai.
- ii) Phép toán tìm căn bậc hai số học của số không âm gọi là phép khai căn bậc hai hay phép khai phương (gọi tắt là khai phương).
- iii) Ở lớp 7 ta đã biết, nếu  $a > b > 0$  thì  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ . Từ đó suy ra:

$$-\sqrt{a} < -\sqrt{b} < 0 < \sqrt{b} < \sqrt{a}$$

**Ví dụ 1.** Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau

- a) 16                                      b)  $\frac{4}{25}$                                       c) 0,01

*Hướng dẫn giải*

- a) Ta có  $4^2 = 16$ , nên 16 có hai căn bậc hai là 4 và -4  
b) Ta có  $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ , nên  $\frac{4}{25}$  có hai căn bậc hai là  $\frac{2}{5}$  và  $-\frac{2}{5}$ .  
c) Ta có  $0,1^2 = 0,01$ , nên 0,01 có hai căn bậc hai là 0,1 và -0,1.

**Ví dụ 2.** Tìm các căn bậc hai số học của mỗi số sau:

- a) 16                                      b)  $\frac{4}{25}$                                       c) 0,01

*Hướng dẫn giải*

- a) Căn bậc hai số học của 16 là  $\sqrt{16} = 4$ .  
b) Căn bậc hai số học của 0,01 là  $\sqrt{0,01} = 0,1$ .

**Ví dụ 3.** Sử dụng dấu căn bậc hai ( $\sqrt{\phantom{x}}$ ) để viết các căn bậc hai của mỗi số sau:

- a) 3;                                      b) 2,5                                      c) -16.

*Hướng dẫn giải*

- a) Căn bậc hai của 3 là  $\sqrt{3}$  và  $-\sqrt{3}$ .  
b) Căn bậc hai của 2,5 là  $\sqrt{2,5}$  và  $-\sqrt{2,5}$ .  
c) Do -16 là số âm nên nó không có căn bậc hai.

Chú ý: Từ định nghĩa căn bậc hai của một số thực  $a$  không âm, ta có

$$(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a \text{ và } \sqrt{a^2} = a$$

**Ví dụ 4:** Tính:

- a)  $\sqrt{100}$                                       b)  $-\sqrt{\frac{1}{16}}$

*Hướng dẫn giải*

- a)  $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$

$$b) -\sqrt{\frac{1}{16}} = -\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{1}{4}$$

**Ví dụ 5:** Tính giá trị của biểu thức  $A = \sqrt{25} + 3(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{0,25})^2$

**Hướng dẫn giải**

$$A = \sqrt{25} + 3(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{0,25})^2 = \sqrt{5^2} + 3.5 + 0,25 = 5 + 15 + 0,25 = 20,25$$

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1:** Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau:

- |       |                    |         |      |         |
|-------|--------------------|---------|------|---------|
| 1) 4  | 2) $\frac{16}{81}$ | 3) 0,81 | 4) 0 | 5) 81   |
| 6) 25 | 7) $\frac{9}{16}$  | 8) 0,16 | 9) 1 | 10) 121 |

**Bài 2:** Sử dụng dấu căn bậc hai để viết các căn bậc hai của mỗi số:

- |       |        |          |        |        |
|-------|--------|----------|--------|--------|
| 1) 17 | 2) 3,2 | 3) -0,13 | 4) 3,9 | 5) 14  |
| 6) -4 | 7) 72  | 8) 0,25  | 9) 173 | 10) 34 |

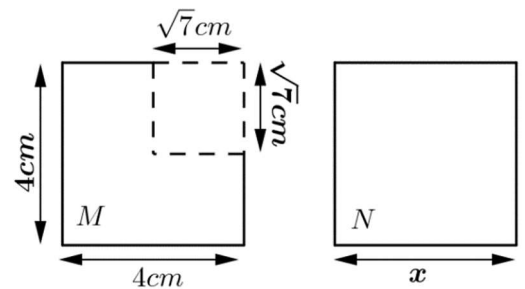
**Bài 3:** Tính:

- |                |                  |                            |                 |                            |
|----------------|------------------|----------------------------|-----------------|----------------------------|
| 1) $\sqrt{25}$ | 2) $\sqrt{0,81}$ | 3) $\sqrt{\frac{4}{121}}$  | 4) $\sqrt{49}$  | 5) $\sqrt{14}$             |
| 6) $\sqrt{16}$ | 7) $\sqrt{169}$  | 8) $\sqrt{\frac{36}{196}}$ | 9) $\sqrt{400}$ | 10) $\sqrt{\frac{25}{81}}$ |

**Bài 4:** Tính giá trị của các biểu thức:

- |                                      |                                       |   |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1) $(\sqrt{15})^2$                   | 2) $(\sqrt{123})^2$                   | 3) $(\sqrt{2,57})^2$                                  |
| 4) $(\sqrt{1,33})^2$                 | 5) $(-\sqrt{182})^2$                  | 6) $(-\sqrt{0,73})^2$                                 |
| 7) $(\sqrt{7})^2 + (-\sqrt{4,52})^2$ | 8) $(\sqrt{5,21})^2 + (-\sqrt{13})^2$ | 9) $(\sqrt{9,21})^2 - (-\sqrt{13})^2 + (\sqrt{17})^2$ |

**Bài 5:** Biết rằng hình M và hình vuông N trong Hình bên dưới có diện tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh  $x$  của hình vuông N



## II. Căn thức bậc hai

**Kiến thức cần nhớ:** Với  $A$  là một biểu thức đại số, ta gọi  $\sqrt{A}$  là căn thức bậc hai của  $A$ , còn được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.

**\* Chú ý:**

- Ta cũng nói  $\sqrt{A}$  là một biểu thức. Biểu thức  $\sqrt{A}$  xác định (hay có nghĩa) khi  $A \geq 0$ .
- Khi  $A$  nhận giá trị không âm, khai phương giá trị này ta nhận được giá trị tương ứng của  $\sqrt{A}$ .

**Ví dụ 5:** Cho biểu thức  $M = \sqrt{9 - 4x}$

- Với giá trị nào của  $x$  thì biểu thức  $M$  xác định?
- Tính giá trị của biểu thức  $M$  khi  $x = -4$  và khi  $x = 5$ .

**Hướng dẫn giải:**

a) Biểu thức  $M$  xác định khi  $9 - 4x \geq 0$  hay  $-4x \geq -9$  hay  $x \leq \frac{9}{4}$ .

b) Khi  $x = -4$ , ta có  $M = \sqrt{9 - 4 \cdot (-4)} = \sqrt{25} = 5$

Ta thấy  $x = 5 > \frac{9}{4}$  nên  $M$  không xác định tại  $x = 5$

**Ví dụ 6:** Cho biểu thức  $N = \sqrt{a^2 - 4ac + b^2}$ . Tính giá trị của  $N$  khi:

a)  $a = -1, b = 2, c = 5$

b)  $a = 2, b = -3, c = 6$

**Hướng dẫn giải:**

a) Với  $a = -1, b = 2, c = 5$ ,

Ta có  $a^2 - 4ac + b^2 = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5 + 2^2 = 1 + 20 + 4 = 25$ . Khi đó  $N = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$

b) Với  $a = 2, b = -3, c = 6$ , ta có:  $a^2 - 4ac + b^2 = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 + (-3)^2 = 4 - 48 + 9 = -35$

Vì  $-35 < 0$  nên biểu thức  $N$  không xác định tại  $a = 2, b = -3, c = 6$ .

**BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 6:** Với giá trị nào của  $x$  thì các biểu thức sau xác định.

- |                             |                               |                              |                               |
|-----------------------------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\sqrt{3x-36}$           | 2) $\sqrt{24-3x}$             | 3) $\sqrt{5-2x}$             | 4) $\sqrt{-2x+3}$             |
| 5) $\sqrt{5x-7}$            | 6) $\sqrt{4-2x}$              | 7) $\sqrt{4x-3}$             | 8) $\sqrt{2x-16}$             |
| 9) $\sqrt{3x+15}$           | 10) $\sqrt{8-4x}$             | 11) $\sqrt{\frac{8-4x}{17}}$ | 12) $\sqrt{\frac{4}{x+3}}$    |
| 13) $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$  | 14) $2\sqrt{\frac{1}{x-1}}$   | 15) $\sqrt{\frac{3}{1-2x}}$  | 16) $\sqrt{\frac{-3}{-4x+7}}$ |
| 17) $\sqrt{\frac{4}{3-8x}}$ | 18) $\sqrt{\frac{-10}{2x+4}}$ | 19) $\sqrt{\frac{3}{5x-14}}$ | 20) $\sqrt{\frac{1}{-6x+2}}$  |

**Bài 7:** Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau:

- $\sqrt{29-x^2}$  tại  $x = 2$ ;  $x = -5$ ;  $x = \sqrt{13}$
- $\sqrt{x^2+x+4}$  tại  $x = 0$ ;  $x = -4$ ;  $x = 3$ ;  $x = -11$
- $\sqrt{2x^2-x+9}$  tại  $x = -5$ ;  $x = -2$ ;  $x = 3$ ;  $x = 7$
- $\sqrt{-3x^2-5x+7}$  tại  $x = 0$ ;  $x = -1$ ;  $x = -2$ ;  $x = -\frac{1}{3}$

**Bài 8:** Tính giá trị của các biểu thức sau, khi  $a = 36, b = 64$

- $\sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a} - 2\sqrt{b}$
- $\sqrt{a+b}$
- $\sqrt{4a-2b}$
- $\frac{1}{5}\sqrt{ab}$
- $\frac{1}{4}(\sqrt{ab}-8)$

**Bài 9:** Với giá trị nào của  $x$  thì biểu thức  $P = \sqrt{5x-8}$  xác định? Tính giá trị của  $P$  khi  $x = 12$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

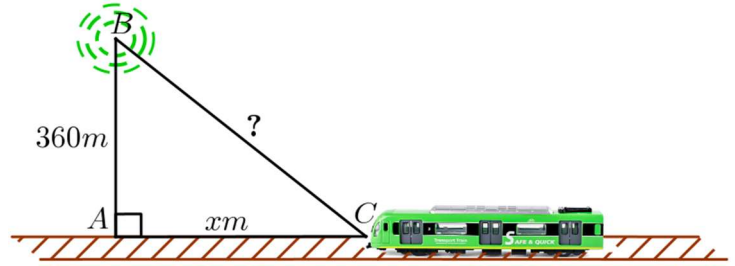
**Bài 10:** Với giá trị nào của  $x$  thì biểu thức  $Q = \sqrt{27-3x}$  xác định? Tính giá trị của  $Q$  khi  $x = 5$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

**Bài 11:** Cho biểu thức  $T = \sqrt{2a^2-7ab-3b^2}$ . Tính giá trị của  $T$  khi:

- $a = 3; b = -2$
- $a = 4; b = 1$
- $a = 2, b = 5$

**Bài 12:** Một trạm phát sóng được đặt ở vị trí  $B$  cách đường tàu một khoảng  $AB = 360m$ . Đầu tàu đang ở vị trí  $C$ , cách vị trí  $A$  một khoảng  $AC = x (m)$

- Viết biểu thức biểu thị khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu.
- Tính khoảng cách trên khi  $x = 480$ ;  $x = 900$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



**Bài 13:** Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau:

- |                   |                    |                    |                      |                       |                       |
|-------------------|--------------------|--------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1) 25             | 2) 36              | 3) 49              | 4) 81                | 5) 121                | 6) 144                |
| 7) 400            | 8) 625             | 9) 441             | 10) 2500             | 11) 196               | 12) 225               |
| 13) 0,01          | 14) 0,09           | 15) 0,25           | 16) 0,81             | 17) 2,25              | 18) 20,25             |
| 19) $\frac{1}{4}$ | 20) $\frac{1}{36}$ | 21) $\frac{4}{49}$ | 22) $\frac{25}{121}$ | 23) $\frac{361}{144}$ | 24) $\frac{289}{324}$ |

**Bài 14:** Tính:

- |                           |                             |                             |                             |                            |                              |
|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 1) $\sqrt{8}$             | 2) $\sqrt{64}$              | 3) $\sqrt{81}$              | 4) $\sqrt{100}$             | 5) $\sqrt{144}$            | 6) $\sqrt{256}$              |
| 7) $\sqrt{324}$           | 8) $\sqrt{400}$             | 9) $\sqrt{484}$             | 10) $\sqrt{576}$            | 11) $\sqrt{676}$           | 12) $\sqrt{784}$             |
| 13) $\sqrt{900}$          | 14) $\sqrt{36}$             | 15) $\sqrt{48}$             | 16) $\sqrt{225}$            | 17) $\sqrt{289}$           | 18) $\sqrt{10000}$           |
| 19) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ | 20) $\sqrt{\frac{25}{144}}$ | 21) $\sqrt{\frac{289}{36}}$ | 22) $\sqrt{\frac{121}{49}}$ | 23) $\sqrt{\frac{4}{361}}$ | 24) $\sqrt{\frac{169}{729}}$ |
| 25) $\sqrt{0,16}$         | 26) $\sqrt{1,44}$           | 27) $\sqrt{5,29}$           | 28) $\sqrt{9,61}$           | 29) $\sqrt{6,25}$          | 30) $\sqrt{2,89}$            |

**Bài 15:** Sử dụng máy tính cầm tay, tính (kết quả làm tròn đến hàng phần chục nghìn)

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1) $\sqrt{27}$                         | 2) $\sqrt{59}$                           | 3) $\sqrt{92}$                             |
| 4) $\sqrt{104}$                        | 5) $\sqrt{394}$                          | 6) $\sqrt{56,27}$                          |
| 7) $\sqrt{93,2}$                       | 8) $\sqrt{138,99}$                       | 9) $\sqrt{7} + \sqrt{17} + \sqrt{27}$      |
| 10) $\sqrt{28} - \sqrt{32} + \sqrt{5}$ | 11) $2\sqrt{3} - \sqrt{43} + 4\sqrt{91}$ | 12) $-4\sqrt{7} + 7\sqrt{3} - 5\sqrt{365}$ |

**Bài 16:** Tính giá trị của các biểu thức:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $(-\sqrt{7,26})^2 + (\sqrt{5,74})^2$          | 2) $(\sqrt{23})^2 - \sqrt{47}^2$                  |
| 3) $(\sqrt{58})^2 - \sqrt{45}^2$                 | 4) $\sqrt{27,25}^2 + (-\sqrt{24,75})^2$           |
| 5) $(\sqrt{53})^2 - \sqrt{21}^2 - (\sqrt{47})^2$ | 6) $(\sqrt{34})^2 - \sqrt{85}^2 + (-\sqrt{27})^2$ |

**Bài 17:** Tìm  $x$ , biết:

- |                     |                     |                    |
|---------------------|---------------------|--------------------|
| 1) $x^2 = 1$        | 2) $x^2 = 2$        | 3) $x^2 = 3$       |
| 4) $x^2 = 4$        | 5) $x^2 = 5$        | 6) $(-x)^2 = 7$    |
| 7) $(-x)^2 = 6$     | 9) $(-x)^2 = 8$     | 10) $(-x)^2 = 9$   |
| 10) $(-x)^2 = 10$   | 11) $x^2 = -11$     | 12) $x^2 = 12$     |
| 13) $x^2 = 13$      | 14) $x^2 = 14$      | 15) $(-x)^2 = -15$ |
| 16) $x^2 = 16$      | 17) $x^2 = 25$      | 18) $x^2 = 36$     |
| 19) $x^2 = 49$      | 20) $x^2 = 64$      | 21) $x^2 = 81$     |
| 22) $(2x-1)^2 = 49$ | 23) $(3x+4)^2 = 25$ | 24) $(2x+7)^2 = 1$ |

25)  $(6-4x)^2 = 16$

26)  $(7x-5)^2 = 36$

27)  $(10x-7)^2 = 64$

28)  $(5x-7)^2 = 4$

29)  $(13-25x)^2 = 81$

30)  $(26x+9)^2 = 100$

31)  $(15-37x)^2 = 1$

32)  $(2x-3)^2 = 5$

33)  $(x-1)^2 = 2$

34)  $(x+4)^2 = 6$

35)  $(x-2)^2 = 10$

36)  $(5x+1)^2 = 2$

37)  $(4x-6)^2 = 7$

38)  $(7x-7)^2 = 3$

39)  $(9x+10)^2 = 10$

40)  $(6x-7)^2 = 5$

41)  $(7x+2)^2 = 7$

42)  $2x^2 = 8$

43)  $2x^2 = 18$

44)  $-3x^2 = -48$

45)  $4x^2 = -16$

46)  $5x^2 = 125$

47)  $-6x^2 = -216$

48)  $7x^2 = -7$

49)  $-2x^2 = -128$

50)  $\frac{2}{3}x^2 = \frac{8}{3}$

51)  $-\frac{4}{5}x^2 = -\frac{1}{5}$

**Bài 18:** Tìm  $x$ , biết:

1)  $\sqrt{x} = 2$

2)  $\sqrt{x} = 5$

3)  $\sqrt{x} = 6$

4)  $\sqrt{x} = \frac{3}{5}$

5)  $\sqrt{x} = \frac{1}{4}$

6)  $\sqrt{x} = \frac{2}{7}$

7)  $\sqrt{x-3} = 4$

8)  $\sqrt{x+5} = 3$

9)  $\sqrt{x-8} = 5$

10)  $\sqrt{3x-2} = 10$

11)  $\sqrt{-2x+5} = 3$

12)  $\sqrt{4x-7} = 11$

13)  $\sqrt{2x-3} = \frac{1}{2}$

14)  $\sqrt{3x+7} = \frac{2}{3}$

15)  $\sqrt{10x-3} = \frac{2}{5}$

**Bài 19:** Tìm  $x$ , biết:

1)  $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} = 28$

2)  $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \sqrt{15x} + 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

3)  $2\sqrt{3x} - 3\sqrt{48x} + 5\sqrt{27x}$

4)  $\sqrt{4x-20} + \sqrt{9x-45} = 5$

5)  $5\sqrt{4x+28} + 6\sqrt{x+7} = 64$

6)  $5\sqrt{8-4x} - 2\sqrt{32-16x} = 10$

7)  $2\sqrt{4x-12} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-27} - 9 = 0$

8)  $\frac{5}{3}\sqrt{9x-18} + \frac{1}{2}\sqrt{16x-32} - 15 = 0$

9)  $3\sqrt{x^2+2} - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+8} = 4$

10)  $2\sqrt{16x-32} + \sqrt{9x-18} = 15 + \sqrt{4x-8}$

11)  $\sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + 2\sqrt{4x+4} = 10$

12)  $\sqrt{4x+20} - \sqrt{x+5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x+45} = 4$

13)  $24 + \sqrt{4x-4} = \frac{14}{3}\sqrt{9x-9}$

14)  $\sqrt{4x-8} - 4\sqrt{\frac{x-2}{4}} = 5$

15)  $\sqrt{-4x+8} + \frac{2}{5}\sqrt{-25x+50} = \sqrt{81}$

16)  $3\sqrt{4x+4} + \sqrt{9x+9} = \sqrt{25x+25} + 2$

17)  $6\sqrt{4x-20} - 2\sqrt{x-5} = \sqrt{9x-45} + 14;$

18)  $\sqrt{36x-9} - 3\sqrt{16x-4} - 28 = 2\sqrt{4x-1};$

19)  $\sqrt{9x+9} + 3\sqrt{4x+4} = 22 - 4\sqrt{\frac{x+1}{4}};$

20)  $\sqrt{4x-12} - 6\sqrt{\frac{x-3}{4}} = 10 - \sqrt{9x-27};$

21)  $4\sqrt{-4x+8} + \frac{2}{5}\sqrt{-25x+50} = \sqrt{144};$

22)  $\frac{5}{2}\sqrt{4x-8} = \frac{2}{5}\sqrt{25x-50} + 27;$

23)  $\sqrt{4x+20} - 3\sqrt{5+x} + \frac{4}{3}\sqrt{9x+45} = 9;$

24)  $\frac{1}{2}\sqrt{16x-32} - 2\sqrt{4x-8} + \sqrt{9x-18} = 5.$



13)  $-\frac{1}{27}$ ;

14)  $-\frac{1331}{8}$ ;

15)  $\frac{64}{343}$ ;

16)  $-0,216$ ;

17)  $-216$ ;

18)  $-0,027$ ;

19)  $-\frac{125}{729}$ ;

20)  $\frac{8}{343}$ ;

21)  $6\frac{1}{8}$ ;

22)  $2\frac{10}{27}$ ;

23)  $-3\frac{3}{8}$ ;

24)  $2\frac{93}{125}$ ;

**Bài 3:** Tính giá trị của các biểu thức:

1)  $A = \sqrt[3]{27000} + \sqrt[3]{0,008}$ ;

2)  $B = \sqrt[3]{(-15)^3} + \sqrt[3]{19^3}$ ;

3)  $C = (\sqrt[3]{7})^3 + (\sqrt[3]{-18})^3$ ;

4)  $D = (\sqrt[3]{-6})^3 - (\sqrt[3]{-21})^3$ ;

5)  $E = \sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{-8} - 2\sqrt[3]{27}$ ;

6)  $F = \sqrt[3]{216} - \sqrt[3]{512} + 3\sqrt[3]{-27}$ ;

7)  $G = \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{-125} - 2\sqrt[3]{216}$ ;

8)  $H = \sqrt[3]{-1331} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$ ;

9)  $I = \sqrt[3]{29^3} + (\sqrt[3]{-9})^3$ ;

10)  $K = \sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-216}$ ;

11)  $L = \sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{0,064}$ ;

12)  $M = (\sqrt[3]{-34})^3 - \sqrt[3]{0,125}$ .

## II. CĂN THỨC BẬC BA

### ❖ Kiến thức cần nhớ

**Định nghĩa:** Với A là một biểu thức đại số, ta gọi  $\sqrt[3]{A}$  là căn thức bậc ba của A.

**Ví dụ 1:** Cho biểu thức  $A = \sqrt[3]{x-28}$ . Tính giá trị của A khi  $x=20$  và khi  $x=100$  (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn) (theo chương trình cũ là: kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

*Hướng dẫn giải:*

Với  $x=3$ , ta có  $A = \sqrt[3]{20-28} = \sqrt[3]{-8} = -2$ .

Với  $x=100$ , ta có  $A = \sqrt[3]{100-28} = \sqrt[3]{78} \approx 8,485$ .

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 4:** Tính giá trị của mỗi căn thức bậc ba sau:

1)  $A = \sqrt[3]{5x-7}$  tại  $x=-4$ ;  $x=70$ ;  $x=-0,2$ ;

2)  $B = \sqrt[3]{3x^2-8}$  tại  $x=0$ ;  $x=\sqrt{24}$ ;  $x=\sqrt{117}$ .

**Bài 5:** Sử dụng máy tính cầm tay, tính (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)

1)  $\sqrt[3]{54} = \dots\dots\dots$ ;

2)  $\sqrt[3]{-7,431} = \dots\dots\dots$ ;

3)  $\sqrt[3]{-195} = \dots\dots\dots$ ;

4)  $\sqrt[3]{23,953} = \dots\dots\dots$ ;

5)  $\frac{\sqrt[3]{39} + \sqrt[3]{45}}{3} = \dots\dots\dots$ ;

6)  $\frac{\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{25}}{2} = \dots\dots\dots$ ;

**Bài 6:** Rút gọn các biểu thức sau:

1)  $\sqrt[3]{(a-1)^3}$ ;

2)  $\sqrt[3]{(2y-7)^3}$ ;

3)  $\sqrt[3]{(4a-3)^3} + \sqrt[3]{(7+4a)^3}$ ;

4)  $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$ ;

5)  $\sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$ ;

6)  $\sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}$ .

**Bài 7:** Tìm x, biết:

1)  $x^3 = 1$ ;

2)  $x^3 = 8$ ;

3)  $x^3 = 27$ ;

4)  $x^3 = 64$ ;

5)  $x^3 = 125$ ;

6)  $x^3 = -1$ ;

7)  $x^3 = -8$ ;

9)  $(-x)^3 = -64$ ;

11)  $(-x)^3 = 216$ ;

13)  $(x+1)^3 = 1$ ;

15)  $(4x-3)^3 = 64$ ;

17)  $(1-2x)^3 = 8$ ;

19)  $(6-4x)^3 = -8$ ;

21)  $(11x-12)^3 = -125$ ;

23)  $(5-3x)^3 = 1331$ ;

25)  $x^3 = -\frac{125}{27}$ ;

8)  $x^3 = -27$ ;

10)  $(-x)^3 = -125$ ;

12)  $(-x)^3 = -343$ ;

14)  $(3x-4)^3 = 27$ ;

16)  $(6x-7)^3 = 125$ ;

18)  $(7x-5)^3 = -1$ ;

20)  $(9x-10)^3 = -27$ ;

22)  $(6-12x)^3 = -216$ ;

24)  $-4\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{4}x\right)^3 = \frac{1}{16}$ ;

26)  $(x+4)^3 = \frac{8}{27}$ ;

**Bài 8:** Tìm  $x$ , biết:

1)  $\sqrt[3]{x} = 2$ ;

3)  $\sqrt[3]{x} = 7$ ;

5)  $\sqrt[3]{x} = -3$ ;

7)  $\sqrt[3]{x-4} = -5$ ;

9)  $\sqrt[3]{x-25} = 10$ ;

11)  $\sqrt[3]{3x+6} = -8$ ;

13)  $\sqrt[3]{2x-3} = -3$ ;

15)  $\sqrt[3]{5x-9} = 6$ ;

17)  $\sqrt[3]{3x-5} = -\frac{2}{3}$ ;

2)  $\sqrt[3]{x} = -10$ ;

4)  $\sqrt[3]{x} = -4$ ;

6)  $\sqrt[3]{x} = 8$ ;

8)  $\sqrt[3]{x+6} = 5$ ;

10)  $\sqrt[3]{x-5} = 4$ ;

12)  $\sqrt[3]{5x+25} = -5$ ;

14)  $\sqrt[3]{3x-7} = -4$ ;

16)  $\sqrt[3]{-2x-1} = \frac{1}{2}$ ;

18)  $\sqrt[3]{3x-1} = \frac{3}{2}$ .

**Bài 9:** Tính giá trị của biểu thức  $A = \sqrt[3]{-27x}$  khi  $x = 1$ ;  $x = -1$ ;  $x = \frac{1}{1000}$ .

**Bài 10:** Một khối gỗ hình lập phương có thể tích  $16000 \text{ cm}^3$ . Chia khối gỗ này thành 16 khối gỗ hình lập phương nhỏ có thể tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh của mỗi khối gỗ lập phương nhỏ.

**Bài 11:** Người ta cần làm một thùng hình lập phương bằng bìa cứng không có nắp trên và có thể tích  $32768 \text{ cm}^3$  để đựng đồ. Tính diện tích bìa cứng cần dùng để làm thùng đựng đó (coi diện tích các mép nối là không đáng kể).

**Bài 12:** Công thức  $h = 0,4\sqrt[3]{x}$  biểu diễn mối tương quan giữa cân nặng  $x$  (tính bằng kg) và chiều cao  $h$  (tính bằng m) của một con hươu cao cổ.

- Một con hươu cao cổ cân nặng 195 kg thì cao bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Một con hươu cao cổ có chiều cao 2,62 m thì cân nặng bao nhiêu kg? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



.....🎵...HẾT...🎵.....



**§3. TÍNH CHẤT CỦA MỘT PHÉP KHAI PHƯƠNG****I. CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG****❖ Kiến thức cần nhớ**

Với mọi số thực  $a$ , ta có  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

Tổng quát hơn, ta có tính chất sau đây:

Với biểu thức  $A$  bất kì, ta có  $\sqrt{A^2} = |A|$ , nghĩa là

$\sqrt{A^2} = A$  khi  $A \geq 0$  (tức là khi  $A$  nhận giá trị không âm);

$\sqrt{A^2} = -A$  khi  $A < 0$  (tức là khi  $A$  nhận giá trị âm).

**Ví dụ 1:** Tính:

a)  $\sqrt{5^2}$ ;

b)  $(-\sqrt{7})^2 + \sqrt{(-8)^2}$ .

Hướng dẫn giải:

a)  $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ ;

b)  $(-\sqrt{7})^2 + \sqrt{(-8)^2} = 7 + |-8| = 7 + 8 = 15$ .

**Ví dụ 2:** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ ;

b)  $\sqrt{(a-\sqrt{7})^2}$  với  $a > 3$ ;

c)  $\sqrt{x^6}$  với  $x < 0$ .

Hướng dẫn giải:

a)  $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$  (vì  $2-\sqrt{5} < 0$ );

b)  $\sqrt{(a-\sqrt{7})^2} = |a-\sqrt{7}| = a-\sqrt{7}$  (vì  $a-\sqrt{7} > 0$  với  $a > 3$ );

c)  $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3| = -x^3$  (vì  $x^3 < 0$  với  $x < 0$ ).

**BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 1:** Tính và rút gọn:

1)  $\sqrt{2^2}$ ;

2)  $\sqrt{(-2)^2}$ ;

3)  $\sqrt{3^2}$ ;

4)  $\sqrt{(-3)^2}$ ;

5)  $\sqrt{4^2}$ ;

6)  $\sqrt{(-4)^2}$ ;

7)  $\sqrt{5^2}$

8)  $\sqrt{(-5)^2}$ ;

9)  $\sqrt{6^2}$ ;

10)  $\sqrt{(-6)^2}$ .

11)  $\sqrt{7^2}$ ;

12)  $\sqrt{(-7)^2}$ ;

13)  $\sqrt{8^2}$ ;

14)  $\sqrt{(0,8)^2}$ ;

15)  $\sqrt{(-8)^2}$ ;

16)  $\sqrt{(-9)^2}$ ;

17)  $\sqrt{10^2}$ ;

18)  $\sqrt{(-10)^2}$ ;

19)  $\sqrt{11^2}$ ;

20)  $\sqrt{(-11)^2}$ ;

21)  $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$ ;

22)  $\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2}$ ;

23)  $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$ ;

24)  $\sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2}$ ;

25)  $\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2}$ ;

26)  $\sqrt{\left(\frac{-4}{5}\right)^2}$ ;

27)  $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$ ;

**Bài 2.** Tính:

1)  $(\sqrt{5})^2 - \sqrt{7^2}$ ;

2)  $\sqrt{(-48)^2} - \sqrt{17^2} - (-\sqrt{13})^2$ ;

3)  $\sqrt{7^2} + (-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{14})^2$ ;

4)  $\left(-\sqrt{\frac{7}{9}}\right)^2 - \sqrt{\left(-\frac{25}{9}\right)^2}$ ;

**Bài 3.** Rút gọn các biểu thức sau

1)  $\sqrt{(5-\sqrt{23})^2}$ ;

2)  $\sqrt{(7-\sqrt{47})^2}$ ;

3)  $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}$ ;

4)  $\sqrt{(1-\sqrt{6})^2}$ ;

5)  $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$ ;

6)  $\sqrt{(3+\sqrt{11})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$ ;

7)  $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(4-2\sqrt{2})^2}$ ;

8)  $\sqrt{(7-2\sqrt{6})^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{6})^2}$ ;

9)  $\sqrt{(4-2\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-2\sqrt{3})^2}$ ;

10)  $\sqrt{3(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{4}$ ;

11)  $\sqrt{a^2} + \sqrt{(-7a)^2}$  với  $a > 0$ ;

12)  $\sqrt{(-a)^2} + \sqrt{(3a)^2} - 9$  với  $a < 0$ ;

13)  $\sqrt{(x-3)^2}$  với  $x \geq 3$ ;

14)  $\sqrt{(4-x)^2}$  với  $x \geq 4$ ;

15)  $\sqrt{(x-8)^2} + \sqrt{x^2}$  với  $x \geq 8$ ;

16)  $\sqrt{(5-x)^4}$ ;

17)  $\sqrt{(2x^2+3)^2} - \sqrt{(2x^2)^2}$ ;

18)  $\sqrt{(a-2)^6}$  với  $x \leq 2$ ;

19)  $\sqrt{25t^2-20t+4} - 3t + 1$  với  $t < \frac{2}{5}$ ;

20)  $\sqrt{9-24x+16x^2} + 5x + 7$  với  $x < \frac{3}{4}$ ;

**II. CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT TÍCH****❖ Kiến thức cần nhớ:**

Với hai số thực  $a$  và  $b$  không âm, ta có  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Tổng quát hơn, ta có tính chất sau đây:

Với hai biểu thức  $A$  và  $B$  nhận giá trị không âm, ta có  $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ .

**Ví dụ 3:** Tính

a)  $\sqrt{36.1,44}$ ;

b)  $\sqrt{250.40}$ ;

Hướng dẫn giải:

a)  $\sqrt{36.1,44} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{1,44} = 6.1,2 = 7,2$ .

b)  $\sqrt{250.40} = \sqrt{25.4.100} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{100} = 5.2.10 = 1000$

**Ví dụ 4:** Tính

a)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$ ;

b)  $\sqrt{4.5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$ ;

Hướng dẫn giải:

a)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{6.24} = \sqrt{144} = 12$

b)  $\sqrt{4.5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{4.5.5.10} = \sqrt{9.5.5} = \sqrt{3^2.5^2} = \sqrt{15^2} = 15$

**Nhận xét:** Như hai ví dụ trên tùy từng trường hợp mà ta biến đổi  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  hoặc  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$  ( $a \geq 0$  và  $b \geq 0$ ) để việc tính toán trở nên dễ dàng hơn.

**Ví dụ 5:** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $\sqrt{7x} \cdot \sqrt{28x}$  với  $x \leq 0$ ;

b)  $\sqrt{6x^3.8y.3xy}$ .

Hướng dẫn giải:

$$a) \sqrt{7x} \cdot \sqrt{28x} = \sqrt{7x \cdot 28x} = \sqrt{196x^2} = \sqrt{196} \cdot \sqrt{x^2} = 14|x| = 14(-x) = -14x \text{ (vì } x \leq 0)$$

$$b) \sqrt{6x^3 \cdot 8y \cdot 3xy} = \sqrt{6 \cdot 8 \cdot 3 \cdot x^4 \cdot y^2} = \sqrt{144 \cdot (x^2)^2 \cdot y^2} = 12x^2 |y|$$

❖ Kiến thức cần nhớ

Với số thực  $a$  bất kỳ và  $b$  không âm, ta có  $\sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}$

Phép biến đổi này được gọi là đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Ngược lại, ta có biến đổi đưa thừa số vào trong dấu căn

- Nếu  $a \geq 0$ , thì  $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ .
- Nếu  $a < 0$ , thì  $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$ .

Nhận xét: Tổng quát hơn, với biểu thức  $A, B$  mà  $B \geq 0$ , ta có  $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$

Ví dụ 6: Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{50}; \quad b) -\sqrt{27} \cdot \sqrt{48}; \quad c) \sqrt{5y} \cdot \sqrt{15y} \text{ với } y \geq 0$$

Hướng dẫn giải:

$$a) \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

$$b) -\sqrt{27} \cdot \sqrt{48} = -\sqrt{3^2 \cdot 3} \cdot \sqrt{4^2 \cdot 3} = -3\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = -12(\sqrt{3})^2 = -36.$$

$$c) \sqrt{5y} \cdot \sqrt{15y} = \sqrt{5y \cdot 15y} = \sqrt{5^2 y^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}y \text{ (vì } y \geq 0)$$

Ví dụ 7: Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai

$$a) 7\sqrt{2};$$

$$b) -5\sqrt{3}.$$

$$c) \sqrt{5y} \cdot \sqrt{15y} \text{ với } y \geq 0$$

Hướng dẫn giải:

$$a) 7\sqrt{2} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{98};$$

$$b) -5\sqrt{3} = -\sqrt{5^2 \cdot 3} = -\sqrt{75};$$

$$c) \sqrt{5y} \cdot \sqrt{15y} = \sqrt{b^2 \cdot \frac{7}{b}} = \sqrt{7b} \text{ (vì } b > 0).$$

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 4:** Tính:

- |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1) $\sqrt{8}$ ;    | 2) $\sqrt{32}$ ;   | 3) $3\sqrt{50}$ ;  |
| 4) $\sqrt{72}$ ;   | 5) $\sqrt{98}$ ;   | 6) $\sqrt{128}$ ;  |
| 7) $\sqrt{162}$ ;  | 8) $\sqrt{200}$ ;  | 9) $\sqrt{242}$ ;  |
| 10) $\sqrt{288}$ ; | 11) $\sqrt{388}$ ; | 12) $\sqrt{392}$ ; |
| 13) $\sqrt{450}$ ; | 14) $\sqrt{12}$ ;  | 15) $\sqrt{48}$ ;  |
| 16) $\sqrt{75}$ ;  | 17) $\sqrt{108}$ ; | 18) $\sqrt{192}$ ; |
| 19) $\sqrt{243}$ ; | 20) $\sqrt{300}$ ; | 21) $\sqrt{363}$ ; |
| 22) $\sqrt{20}$ ;  | 23) $\sqrt{45}$ ;  | 24) $\sqrt{80}$ ;  |
| 25) $\sqrt{125}$ ; | 26) $\sqrt{180}$ ; | 27) $\sqrt{125}$ ; |
| 28) $\sqrt{320}$ ; | 29) $\sqrt{405}$ ; | 30) $\sqrt{500}$ ; |
| 31) $\sqrt{24}$ ;  | 32) $\sqrt{54}$ ;  | 33) $\sqrt{96}$ ;  |

- |                               |                              |                               |
|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 34) $\sqrt{150}$ ;            | 35) $\sqrt{216}$ ;           | 36) $\sqrt{294}$ ;            |
| 37) $\sqrt{384}$ ;            | 38) $\sqrt{486}$ ;           | 39) $\sqrt{600}$ ;            |
| 40) $\sqrt{28}$ ;             | 41) $\sqrt{63}$ ;            | 42) $\sqrt{112}$ ;            |
| 43) $\sqrt{175}$ ;            | 44) $\sqrt{252}$ ;           | 45) $\sqrt{343}$ ;            |
| 46) $\sqrt{448}$ ;            | 47) $\sqrt{567}$ ;           | 48) $\sqrt{700}$ ;            |
| 49) $\sqrt{1000}$ ;           | 50) $\sqrt{0,16}$ ;          | 51) $\sqrt{1,44}$ ;           |
| 52) $\sqrt{5,29}$ ;           | 53) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ ;  | 54) $\sqrt{\frac{25}{144}}$ ; |
| 55) $\sqrt{\frac{289}{36}}$ ; | 56) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ ; | 57) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$ ;  |
| 58) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$ ; | 59) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$ ; | 60) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$ ; |

**Bài 5:** Tính

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{7}$ ;                          | 2) $(-2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{10}$ ;                |
| 3) $(-7\sqrt{7}) \cdot (-2\sqrt{8})$ ;                   | 4) $3\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{6}$ ;                   |
| 5) $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{6}$ ;                         | 6) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ ;                   |
| 7) $\sqrt{36 \cdot 0,25}$ ;                              | 8) $(\sqrt{0,81}) \cdot \sqrt{1000}$ ;             |
| 9) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{80}$ ;           | 10) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$ ;                   |
| 11) $\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}$ ;                        | 12) $(8\sqrt{6}) \cdot (-2\sqrt{24})$ ;            |
| 13) $9\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{27}$ ;                       | 14) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{162}$ ;                  |
| 15) $3\sqrt{5} \cdot (-10\sqrt{3})$ ;                    | 16) $(\frac{1}{2}\sqrt{5}) \cdot (-6\sqrt{2})$ ;   |
| 17) $\frac{2}{3}\sqrt{7} \cdot (\frac{9}{16}\sqrt{3})$ ; | 18) $\sqrt{0,09 \cdot 25}$ ;                       |
| 19) $\sqrt{28 \cdot 9 \cdot 10^3}$ ;                     | 20) $\sqrt{75 \cdot 3^3}$ ;                        |
| 21) $\sqrt{1,5 \cdot 360 \cdot 15}$ ;                    | 22) $\sqrt{6,4} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{45}$ ; |
| 23) $(-\sqrt{\frac{5}{3}})^2 \cdot \sqrt{0,09}$ ;        | 24) $\sqrt{(-\frac{7}{5})^2} \cdot \sqrt{0,25}$ ;  |

**Bài 6:** Rút gọn các biểu thức sau

- |  |   |
|--|---|
| 1) $\sqrt{18x} \cdot \sqrt{8x}$ với $x \geq 0$ ;     | 2) $\sqrt{6y} \cdot \sqrt{24y}$ với $y \leq 0$ ;          |
| 3) $\sqrt{75(x-18)^2}$ với $x > 18$ ;                | 4) $\sqrt{54(2-x)^2}$ với $x < 2$ ;                       |
| 5) $\sqrt{75(x-18)^2}$ với $a \leq -12$ ;            | 6) $\sqrt{180(x-7)^2}$ với $x < 7$ ;                      |
| 7) $\sqrt{175(x^2-4x+4)}$ với $x \geq 2$ ;           | 8) $\sqrt{96(9x^2-12x+4)}$ với $x < \frac{2}{3}$ ;        |
| 9) $3\sqrt{4b^6} + 7b^3$ với $3\sqrt{4b^6} + 7b^3$ ; | 10) $\sqrt{0,6} \cdot \sqrt{150(a-1)^2}$ với $a \leq 1$ ; |
| 11) $\sqrt{36x^4} - 5x^2 + 3$ ;                      | 12) $\sqrt{81a^4} - 21a^2 + 7$ ;                          |

13)  $\frac{3}{x-y}\sqrt{x^4(x-y)^2}$  với  $x > y$ ;

14)  $\frac{3}{x-2y}\sqrt{16x^8(2y-x)^2}$  với  $x > 2y$ ;

15)  $\sqrt{49(m-2)^2} - 5m$  với  $m < 2$ ;

16)  $7\sqrt{x^2} - 5x$  với  $x < 0$ ;

17)  $\sqrt{x^2} - \sqrt{(6-x)^2}$  với  $0 < x < 6$ ;

18)  $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-7)^2}$  với  $2 \leq x \leq 7$ ;

19)  $\sqrt{64x^2}$  với  $x < 0$ ;

20)  $\sqrt{5y} \cdot \sqrt{80y} - 7y$  với  $y \geq 0$ ;

**Bài 7:** Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai

1)  $3\sqrt{2}$ ;

2)  $4\sqrt{5}$ ;

3)  $2\sqrt{7}$ ;

4)  $10\sqrt{3}$ ;

5)  $-8\sqrt{3}$ ;

6)  $-5\sqrt{10}$ ;

7)  $-12\sqrt{3}$ ;

8)  $-7\sqrt{5}$ ;

9)  $2\sqrt{x}$  với  $x \geq 0$ ;

10)  $x\sqrt{7}$  với  $x \geq 0$ ;

11)  $x\sqrt{5}$  với  $x < 0$ ;

12)  $(x-1)\sqrt{3}$  với  $x > 1$ ;

13)  $4a\sqrt{\frac{5}{7a}}$  với  $a > 0$ ;

14)  $-2x\sqrt{\frac{5}{8x^2}}$  với  $x > 0$ ;

15)  $2x\sqrt{\frac{3}{4(x^2+1)}}$  với  $x < 0$ ;

16)  $3a\sqrt{\frac{7}{18a^2}}$  với  $a < 0$ ;

**Bài 8:** Cho hình chữ nhật có chiều rộng  $a$  (cm), chiều dài  $b$  (cm) và diện tích  $S$  (cm<sup>2</sup>)

a) Tìm  $S$ , biết  $a = \sqrt{18}, b = \sqrt{72}$ .

b) Tìm  $S$ , biết  $a = \sqrt{27}, b = \sqrt{108}$ .

**Bài 9:** Cho hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là  $\sqrt{18}$  cm và 24 cm. Tính diện tích hình chữ nhật.

**Bài 10:** Một hình chữ nhật có chiều rộng và độ dài đường chéo lần lượt là  $\sqrt{18}$  cm và 24 cm. Tính diện tích hình chữ nhật.

**Bài 11:** Tính độ dài cạnh của một khu vườn hình vuông (kết quả làm tròn đến hàng phần mười), biết diện tích của nó bằng diện tích của khu vườn hình chữ nhật có chiều rộng 6,3 m và chiều dài 24 m.

**Bài 12:** Tốc độ âm thanh  $v$  (m/s) gần bề mặt trái đất được cho bởi  $v = 20\sqrt{T+273}$ , trong đó  $T$  (°C) là nhiệt độ bề mặt trái đất (nguồn: <https://phys.libretexts.org>). Tính tốc độ âm thanh gần bề mặt trái đất khi nhiệt độ bề mặt lần lượt là 12°C và 34°C (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Bài 13:** Khi bay vào không gian, trọng lượng  $P$  (m) của một phi hành gia ở vị trí cách mặt đất một độ cao  $h$  (m)

được tính theo công thức: 
$$P = \frac{28014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + h)^2}$$

(Nguồn: chuyên đề vật lý 11, NXB Đại học Sư phạm 2023)

1) Trọng lượng của phi hành gia là bao nhiêu Newton khi cách mặt đất 10500m (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

2) Ở độ cao bao nhiêu mét thì trọng lượng của phi hành gia là 650N (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

**Bài 14:** Biến đổi biểu thức trong căn thành bình phương của một tổng hay một hiệu rồi từ đó phá bớt một lớp căn.

1)  $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ;

2)  $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ;

3)  $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ ;

4)  $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ ;

5)  $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ ;

6)  $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ ;

7)  $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ;

8)  $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ ;

9)  $\sqrt{11-2\sqrt{30}}$ ;

10)  $\sqrt{21-4\sqrt{17}}$ ;

11)  $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$ ;

12)  $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$

- |                              |                              |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 13) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ ;  | 14) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ ;   | 15) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$ ; | 16) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ ;  |
| 17) $\sqrt{11+2\sqrt{18}}$ ; | 18) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ ;  | 19) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ ;   | 20) $\sqrt{12-2\sqrt{35}}$   |
| 21) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ ;   | 22) $\sqrt{16-2\sqrt{55}}$ ; | 23) $\sqrt{14-2\sqrt{33}}$ ; | 24) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ ;  |
| 25) $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$ ; | 26) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}$ ;  | 27) $\sqrt{16+2\sqrt{55}}$ ; | 28) $\sqrt{25-4\sqrt{6}}$ ;  |
| 29) $\sqrt{14-8\sqrt{3}}$ ;  | 30) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$ ; | 31) $\sqrt{25+4\sqrt{6}}$ ;  | 32) $\sqrt{21-6\sqrt{6}}$ ;  |
| 33) $\sqrt{14+8\sqrt{3}}$ ;  | 34) $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ ; | 35) $\sqrt{13+4\sqrt{10}}$ ; | 36) $\sqrt{33-20\sqrt{2}}$ ; |
| 37) $\sqrt{21+6\sqrt{6}}$ ;  | 38) $\sqrt{13-4\sqrt{10}}$ ; | 39) $\sqrt{46+6\sqrt{5}}$ ;  | 40) $\sqrt{29-12\sqrt{5}}$ ; |
| 41) $\sqrt{36+12\sqrt{5}}$ ; | 42) $\sqrt{35-12\sqrt{6}}$ ; | 43) $\sqrt{33+20\sqrt{2}}$ ; | 44) $\sqrt{36-12\sqrt{5}}$ ; |
| 45) $\sqrt{46-6\sqrt{5}}$ ;  | 46) $\sqrt{29+12\sqrt{5}}$ ; | 47) $\sqrt{27+12\sqrt{2}}$ ; | 48) $\sqrt{49-20\sqrt{6}}$ ; |
| 49) $\sqrt{98-16\sqrt{3}}$ ; | 50) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ;    | 51) $\sqrt{4+\sqrt{15}}$ ;   | 52) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$ ;   |
| 53) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ ;    | 54) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ;    | 55) $\sqrt{4-\sqrt{15}}$ ;   | 56) $\sqrt{8-\sqrt{55}}$ ;   |
| 57) $\sqrt{7+\sqrt{33}}$ ;   | 58) $\sqrt{6+\sqrt{35}}$ ;   | 59) $\sqrt{7-3\sqrt{5}}$ ;   | 60) $\sqrt{23+3\sqrt{5}}$ ;  |

## II. CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT THƯƠNG

### Kiến thức cần nhớ

Với số thực  $a$  không âm và số thực  $b$  dương, ta có:  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

### Tổng quát hơn, ta có:

Với biểu thức  $A$  nhận giá trị không âm và biểu thức  $B$  nhận giá trị dương, ta có:  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ .

**Ví dụ 8:** Tính:

a)  $\sqrt{\frac{25}{81}}$ ;

b)  $\sqrt{\frac{75}{48}}$ .

### Hướng dẫn giải

a)  $\sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}} = \frac{5}{9}$ ;

b)  $\sqrt{\frac{75}{48}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$ .

**Ví dụ 9:** Tính:

a)  $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$ ;

b)  $\sqrt{150} : \sqrt{3}$ ;

c)  $\sqrt{\frac{5}{14}} : \sqrt{1\frac{3}{7}}$ .

### Hướng dẫn giải

a)  $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{147}{3}} = \sqrt{49} = 7$ ;

b)  $\sqrt{150} : \sqrt{3} = \sqrt{\frac{150}{3}} = \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$ ;

c)  $\sqrt{\frac{5}{14}} : \sqrt{1\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{5}{14}} : \sqrt{\frac{10}{7}} = \sqrt{\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{10}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ .

**Nhận xét:** Như hai ví dụ trên, tùy từng trường hợp mà ta biến đổi  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  hoặc  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$  ( $a \geq 0$  và  $b > 0$ ) để việc tính toán trở nên dễ dàng hơn.

**Ví dụ 10:** Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}; & \text{b)} \quad \sqrt{\frac{25(x+1)^2}{36}}; & \text{c)} \quad \frac{\sqrt{5x^3y^4}}{\sqrt{125x^3}} \text{ với } x > 0. \end{array}$$

**Hướng dẫn giải**

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{12}{6}} = \sqrt{2}; & & \\ \text{b)} \quad \sqrt{\frac{25(x+1)^2}{36}} = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{36}} = \frac{5|x+1|}{6}; & & \\ \text{c)} \quad \frac{\sqrt{5x^3y^4}}{\sqrt{125x^3}} = \sqrt{\frac{5x^3y^4}{125x^3}} = \sqrt{\frac{y^4}{25}} = \frac{\sqrt{(y^2)^2}}{\sqrt{25}} = \frac{y^2}{5} \text{ với } x > 0. & & \end{array}$$

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 15:** Tính:

$$\begin{array}{lll} 1) \quad \sqrt{\frac{4}{9}}; & 2) \quad \sqrt{108} : \sqrt{3}; & 3) \quad 5\sqrt{3} : \sqrt{15}; \\ 4) \quad \sqrt{1\frac{13}{36}}; & 5) \quad \sqrt{2\frac{23}{49}}; & 6) \quad (15\sqrt{6}) : (5\sqrt{3}); \\ 7) \quad (-25\sqrt{12}) : (-5\sqrt{6}); & 8) \quad 36\sqrt{8} : 12\sqrt{2}; & 9) \quad 4\sqrt{27} : (-2\sqrt{3}); \\ 10) \quad 2\sqrt{48} : 2\sqrt{3}; & 11) \quad -3\sqrt{45} : \sqrt{15}; & 12) \quad 7\sqrt{5} : \sqrt{35}; \\ 13) \quad (5\sqrt{7}) : (-\sqrt{35}); & 14) \quad 6\sqrt{5} : \sqrt{30}; & 15) \quad \sqrt{\frac{3}{5}} : \sqrt{\frac{5}{12}}; \\ 16) \quad \sqrt{\frac{0,49}{81}}; & 17) \quad \sqrt{3\frac{1}{16}}; & 18) \quad \sqrt{\frac{1}{25} \cdot \frac{16}{81}}; \\ 19) \quad \sqrt{117} : (-\sqrt{13}); & 20) \quad \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{10}}; & 21) \quad \sqrt{\frac{25}{16}} : \sqrt{2\frac{4}{16}}. \end{array}$$

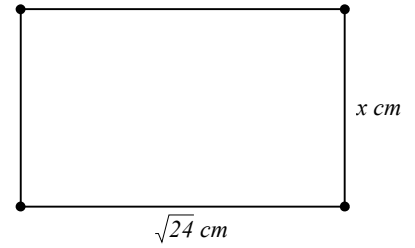
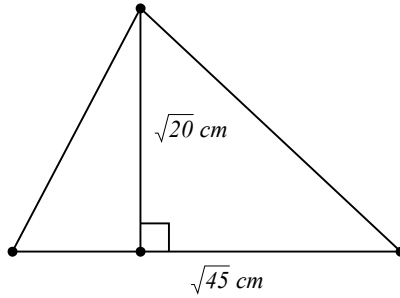
**Bài 16:** Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{lll} 1) \quad \frac{\sqrt{192}}{\sqrt{12}}; & 2) \quad \frac{\sqrt{252}}{\sqrt{7}}; & 3) \quad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}; \\ 4) \quad \frac{\sqrt{492}}{\sqrt{123}}; & 5) \quad \frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}; & 6) \quad \frac{\sqrt{272}}{\sqrt{17}}; \\ 7) \quad \frac{\sqrt{44}}{\sqrt{539}}; & 8) \quad \frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}; & 9) \quad \frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}} \text{ với } y > 0; \\ 10) \quad \frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}} \text{ với } x > 0; & 11) \quad \frac{\sqrt{45mn^2}}{\sqrt{20m}} \text{ với } \begin{cases} m > 0 \\ n > 0 \end{cases}; & 12) \quad \sqrt{\frac{(x+5)^2}{16y^4}} \text{ với } \begin{cases} x \geq -5 \\ y \neq 0 \end{cases}; \\ 13) \quad \frac{\sqrt{3x^2(3-x)^2}}{\sqrt{108}} \text{ với } x > 1; & 14) \quad \frac{\sqrt{16a^4b^6}}{\sqrt{128a^6b^6}} \text{ với } \begin{cases} a < 0 \\ b \neq 0 \end{cases}; & 15) \quad \frac{\sqrt{6a^2b}}{\sqrt{54}} \text{ với } \begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}; \\ 16) \quad \frac{\sqrt{54(x+1)^3}}{\sqrt{6(x+1)}} \text{ với } x > -1; & 17) \quad \left( x\sqrt{\frac{3}{x}} + 3\sqrt{\frac{x}{3}} - \sqrt{27x^3} \right) : \sqrt{3x} \text{ với } x > 0. & \end{array}$$

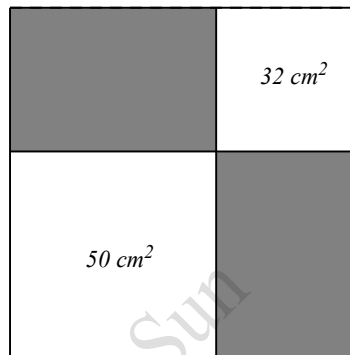
**Bài 17:** Cho hình chữ nhật có chiều rộng  $a(cm)$ , chiều dài  $b(cm)$  và diện tích  $S(cm^2)$ .

- 1) Tìm  $b$ , biết  $S = 5\sqrt{21}, a = \sqrt{15}$ ;
- 2) Tìm  $a$ , biết  $S = 13\sqrt{2}, b = \sqrt{13}$ .

**Bài 18:** Biết rằng hình tam giác và hình chữ nhật ở hình bên dưới có diện tích bằng nhau. Tính chiều rộng  $x$  của hình chữ nhật.



**Bài 19:** Từ một tấm thép vuông, người thợ cắt ra hai mảnh hình vuông có diện tích lần lượt là  $32 cm^2$  và  $50 cm^2$  như hình vẽ. Tính diện tích phần còn lại của tấm thép.



........HẾT........

## §4. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

### I. TRỰC CĂN THỨC Ở MẪU

#### Kiến thức cần nhớ

Định nghĩa: Trục căn thức ở mẫu là làm cho mẫu mất căn mà không làm thay đổi giá trị của biểu thức.

Các phương pháp:

- Ưu tiên 1: Phân tích cả tử và mẫu ra nhân tử rồi rút gọn.
- Ưu tiên 2: Nhân cả tử và mẫu cho chính căn ở mẫu.
- Ưu tiên 3: Nhân cả tử và mẫu cho biểu thức liên hợp của mẫu.

Lưu ý:  $A - B$  và  $A + B$  được gọi là hai biểu thức liên hợp của nhau.

**Ví dụ 1:** Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau:

a)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}$ ;      b)  $\frac{7}{2\sqrt{5}}$ ;      c)  $\frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ .

**Hướng dẫn giải**

a)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{2}$ ;

b)  $\frac{7}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{2 \cdot (\sqrt{5})^2} = \frac{7\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{7\sqrt{5}}{10}$ ;



$$c) \frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} = 2(\sqrt{5}+\sqrt{2}).$$

**Ví dụ 2:** Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

$$a) \sqrt{\frac{7}{3}}; \quad b) \sqrt{\frac{5x}{6y}} \text{ với } xy > 0.$$

**Hướng dẫn giải**

$$a) \sqrt{\frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{21}}{3};$$

$$b) \sqrt{\frac{5x}{6y}} = \sqrt{\frac{5x \cdot 6y}{6y \cdot 6y}} = \frac{\sqrt{30xy}}{\sqrt{(6y)^2}} = \frac{\sqrt{30xy}}{6|y|} \text{ với } xy > 0.$$

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1:** Phân tích các biểu thức sau thành tích:

- |                                      |                               |                                   |
|--------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $5 + \sqrt{5}$ ;                  | 2) $\sqrt{33} + \sqrt{22}$ ;  | 3) $3 + \sqrt{3}$ ;               |
| 4) $\sqrt{14} - \sqrt{7}$ ;          | 5) $\sqrt{15} - \sqrt{6}$ ;   | 6) $\sqrt{15} - \sqrt{12}$ ;      |
| 7) $7 - \sqrt{7}$ ;                  | 8) $10 + 2\sqrt{10}$ ;        | 9) $4 - 4\sqrt{5}$ ;              |
| 10) $5 - 2\sqrt{5}$ ;                | 11) $3 - 2\sqrt{3}$ ;         | 12) $2\sqrt{3} - 15$ ;            |
| 13) $5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$ ;        | 14) $5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$ ; | 15) $2\sqrt{3} - \sqrt{6}$ ;      |
| 16) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ ;        | 17) $5\sqrt{6} + 6\sqrt{5}$ ; | 18) $2\sqrt{6} + 6\sqrt{7}$ ;     |
| 19) $3\sqrt{2} - 6$ ;                | 20) $6\sqrt{2} - 4$ ;         | 21) $12\sqrt{10} - 16\sqrt{14}$ . |
| 22) $6\sqrt{6} - 27$ ;               | 23) $18\sqrt{14} - 60$ ;      | 24) $b + \sqrt{b}$ với $b > 0$ ;  |
| 25) $a - 2\sqrt{a}$ với $a \geq 0$ ; | 26) $x^3 - 3$ ;               | 27) $6 - x^2$ ;                   |
| 28) $1 - a$ với $a \geq 0$ ;         | 29) $a - 4$ với $a \geq 0$ ;  | 30) $a - b$ với $a, b \geq 0$ .   |

**Bài 2:** Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau:

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 1) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ ;                                 | 2) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ ;             | 3) $\frac{2\sqrt{2} + 2}{5\sqrt{2}}$ ;                          |
| 4) $\frac{4\sqrt{5} + \sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ ;             | 5) $\frac{7 - \sqrt{7}}{3\sqrt{7}}$ ;                     | 6) $\frac{\sqrt{6} - 6}{1 - \sqrt{6}}$ ;                        |
| 7) $\frac{7 + \sqrt{7}}{\sqrt{7} + 1}$ ;                  | 8) $\frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}$ ;                 | 9) $\frac{2\sqrt{6} + 6\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$ ;                  |
| 10) $\frac{6\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2} - 3}$ ;                | 11) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3\sqrt{3} - 3}$ ;         | 12) $\frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ ;       |
| 13) $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}}$ ;         | 14) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}}$ ;         | 15) $\frac{3\sqrt{2} - 6}{\sqrt{2} - 1}$ ;                      |
| 16) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{12}}{\sqrt{5} - 2}$ ;        | 17) $\frac{5 - 2\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}$ ;                | 18) $\frac{5 + 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$ ;                      |
| 19) $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ ; | 20) $\frac{5\sqrt{6} + 6\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{6}}$ ; | 21) $\frac{6\sqrt{2} + 3}{1 + 2\sqrt{2}}$ .                     |
| 22) $\frac{6\sqrt{6} - 27}{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}$ ;      | 23) $\frac{18\sqrt{14} - 60}{2(3\sqrt{7} - 5\sqrt{2})}$ ; | 24) $\frac{12\sqrt{10} - 16\sqrt{14}}{6\sqrt{5} - 8\sqrt{7}}$ . |

**Bài 3:** Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau:

- 1)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; 2)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; 3)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ;
- 4)  $\frac{1}{\sqrt{7}}$ ; 5)  $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$ ; 6)  $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ ;
- 7)  $-\frac{20}{3\sqrt{5}}$ ; 8)  $\frac{12}{5\sqrt{3}}$ ; 9)  $\frac{5}{\sqrt{10}}$ ;
- 10)  $\frac{14}{\sqrt{7}}$ ; 11)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ; 12)  $\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ ;

**Bài 4:** Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau:

- 1)  $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ; 2)  $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ ; 3)  $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$ ; 4)  $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ ;
- 5)  $\frac{1}{2-\sqrt{6}}$ ; 6)  $\frac{1}{2-\sqrt{6}}$ ; 7)  $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$ ; 8)  $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ;
- 9)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ ; 10)  $\frac{27}{\sqrt{6}-3}$ ; 11)  $\frac{-16}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ ; 12)  $\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-3}$ .

**Bài 5:** Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau:

- 1)  $\frac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} + \frac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$ ; 2)  $\frac{6-6\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ ;
- 3)  $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ ; 4)  $\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$ ;
- 5)  $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1} + \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ ; 6)  $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} + \frac{5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}$ ;
- 7)  $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2} + \frac{6+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ; 8)  $\frac{3\sqrt{2}-6}{\sqrt{2}-1} + \frac{6\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}-3}$ ;
- 9)  $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (2+\sqrt{3})$ ; 10)  $\frac{\sqrt{160}-\sqrt{80}}{\sqrt{8}-2} - \frac{\sqrt{40}-\sqrt{15}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ;
- 11)  $\left(1 - \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} - 1\right)$ ; 12)  $\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} - 2\right) \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} - 2\right)$ ;
- 13)  $\frac{1}{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ ; 14)  $\frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{1-\sqrt{5}}$ ;
- 15)  $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ ; 16)  $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ;
- 17)  $\frac{1}{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-3}$ ; 18)  $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ ;
- 19)  $\frac{1}{5+2\sqrt{6}} - \frac{1}{5-2\sqrt{6}}$ ; 20)  $\frac{2}{\sqrt{5}-2} + \frac{-2}{\sqrt{5}+2}$ ;
- 21)  $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ; 22)  $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{5}}$ ;
- 23)  $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ ; 24)  $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{2}{1-\sqrt{7}}$ ;

25)  $\frac{4}{1-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1};$

27)  $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}};$

29)  $\frac{3}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1};$

31)  $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2};$

33)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1};$

35)  $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\sqrt{7}+1}-1} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\sqrt{7}+1}+1};$

37)  $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2} + \frac{1}{2-\sqrt{3}};$

39)  $\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}};$

41)  $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{5}{1+\sqrt{6}};$

26)  $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{18}+2\sqrt{3}};$

28)  $\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{18}+2\sqrt{3}};$

30)  $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} + \frac{6}{1-\sqrt{5}};$

32)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1};$

34)  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}-1} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}+1};$

36)  $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+1}+1} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+1}-1};$

38)  $\frac{6}{1-\sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1};$

40)  $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} + \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2};$

42)  $\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{6}{2-\sqrt{10}}.$

**Bài 6:** Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau:

1)  $\frac{4-4\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{10}};$

3)  $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{40}};$

5)  $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{1-\sqrt{3}} - \frac{5}{1-\sqrt{6}};$

7)  $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}-2};$

9)  $\frac{2\sqrt{24}+6}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}} - \frac{10}{\sqrt{8}-\sqrt{3}};$

11)  $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}};$

13)  $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-1} - \frac{5}{\sqrt{6}+1};$

15)  $\frac{1}{2-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1};$

2)  $\frac{2\sqrt{7}-4\sqrt{3}}{3\sqrt{35}-6\sqrt{15}};$

4)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{21}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} - \frac{2}{3\sqrt{3}+5};$

6)  $\frac{4}{1+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{20}-5}{2-\sqrt{5}};$

8)  $\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1};$

10)  $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{3-\sqrt{5}} - \frac{2}{1+\sqrt{2}};$

12)  $\frac{\sqrt{21}-7\sqrt{7}}{\sqrt{3}-7} + \frac{18}{\sqrt{7}+5};$

14)  $\frac{3}{\sqrt{3}-2} - \frac{12}{3+\sqrt{3}};$

16)  $\frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} - \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}.$

**Bài 7:** Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau:

1)  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} - 2\sqrt{5};$

2)  $\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}};$

3)  $(\sqrt{3}-1) \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}};$

4)  $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \sqrt{28} + \sqrt{54};$

$$5) \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}};$$

$$7) \frac{6}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{75};$$

$$9) \frac{7}{5-3\sqrt{2}} - \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} - \frac{4}{\sqrt{2}};$$

$$11) \frac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} - \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{9}{\sqrt{3}};$$

$$13) \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{15}} - \frac{10}{\sqrt{5}};$$

$$15) \frac{\sqrt{10}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1} - 6\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{12}{4-\sqrt{10}};$$

$$6) \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{27} + \frac{3}{\sqrt{3}};$$

$$8) \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}};$$

$$10) \frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{7}-1} - \sqrt{125};$$

$$12) \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}};$$

$$14) \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{10}{1+\sqrt{6}} + 2\sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$16) (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) - \frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2}.$$

**Bài 8:** Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

$$1) \sqrt{\frac{13}{5}};$$

$$3) \sqrt{\frac{3}{31}};$$

$$5) \sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$7) \sqrt{\frac{3}{5}};$$

$$9) -4\sqrt{\frac{5}{13}};$$

$$11) \sqrt{\frac{11}{18}};$$

$$13) x\sqrt{\frac{5}{x}} \text{ với } x > 0;$$

$$15) \sqrt{\frac{9a^3}{4b}} \text{ với } ab > 0;$$

$$17) x\sqrt{\frac{3}{7x}} \text{ với } x > 0;$$

$$19) 2a \cdot \sqrt{\frac{7}{3}};$$

$$21) 3x\sqrt{\frac{5}{3xy}} \text{ với } x > 0, y > 0.$$

$$23) -5x \cdot \sqrt{\frac{3}{x}} \text{ với } x > 0;$$

$$2) \sqrt{\frac{17}{3}};$$

$$4) 6\sqrt{\frac{5}{21}};$$

$$6) \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$8) \sqrt{\frac{16}{7}};$$

$$10) \sqrt{\frac{9}{5}};$$

$$12) -\sqrt{\frac{17}{128}};$$

$$14) ab\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ với } ab > 0;$$

$$16) 3xy\sqrt{\frac{2}{xy}} \text{ với } xy > 0;$$

$$18) (a-1)\sqrt{\frac{3}{19(a-1)}} \text{ với } a > 1;$$

$$20) \sqrt{\frac{5}{7x^3}} \text{ với } x > 0;$$

$$22) \sqrt{\frac{7a}{3b}} \text{ với } ab > 0;$$

$$24) 6x\sqrt{\frac{7}{4xy}} \text{ với } x > 0, y > 0;$$

**Bài 9:** Trục căn thức ở mẫu (với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

$$1) \frac{x-3\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}};$$

$$2) \frac{5x+\sqrt{xy}}{5\sqrt{x}+\sqrt{y}};$$

$$3) \frac{y+a\sqrt{y}}{a\sqrt{y}};$$

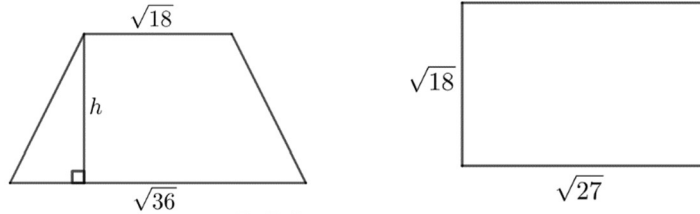
$$4) \frac{b-\sqrt{b}}{\sqrt{b}-1};$$

$$\begin{array}{llll} 5) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a\sqrt{b}}; & 6) \frac{2x+1}{(x-1)\sqrt{x}}; & 7) \frac{a}{5+\sqrt{a}}; & 8) \frac{x}{2\sqrt{x}-1}; \\ 9) \frac{2\sqrt{b}}{3\sqrt{a}-1}; & 10) \frac{3ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}; & 11) \frac{5b}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}; & 12) \frac{4}{\sqrt{x}-2}. \end{array}$$

**Bài 10:** Trục căn thức ở mẫu

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{4}{\sqrt{a}} \text{ với } a > 0; & 2) \frac{4}{\sqrt{b}-1} \text{ với } b > 1; \\ 3) \frac{3}{\sqrt{x}+2} \text{ với } x > -2; & 4) \frac{9}{\sqrt{x}-3} \text{ với } x > 0, x \neq 9; \\ 5) \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \text{ với } x > 0, x \neq 2; & 6) \frac{1}{\sqrt{x}-5} \text{ với } x \geq 0, x \neq 25; \\ 7) \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} \text{ với } x > 0, y > 0; & 8) \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \text{ với } x > 0, y > 0, x \neq y; \\ 9) \frac{a+1}{\sqrt{2a+5}-\sqrt{a+2}} \text{ với } a > -1; & 10) -\frac{5\sqrt{a}}{\sqrt{20a}} \text{ với } a > 0. \end{array}$$

**Bài 11:** Biết rằng hình thang và hình chữ nhật ở Hình bên dưới có diện tích bằng nhau. Tính chiều cao  $h$  của hình thang.



**Bài 12:** Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{2}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}; & 2) \frac{-4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{4-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}; \\ 3) \frac{5}{3-\sqrt{7}} - \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}; & 4) \frac{6}{\sqrt{5}-1} + \frac{7}{1-\sqrt{3}} + \frac{4-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}; \\ 5) \frac{\sqrt{12}-6}{\sqrt{8}-\sqrt{24}} - \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{4}{1-\sqrt{7}}; & 6) \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}; \\ 7) \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{2}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}; & 8) \frac{15}{3-\sqrt{3}} - \frac{2}{1-\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}-2}; \\ 9) \left( \frac{12}{\sqrt{5}+1} - \frac{4}{\sqrt{5}+2} + \frac{20}{3+\sqrt{5}} \right) (10+3\sqrt{5}); & 10) \left( \frac{24}{\sqrt{7}+1} + \frac{4}{3+\sqrt{7}} - \frac{3}{\sqrt{7}+2} \right) (4-\sqrt{7}); \\ 11) \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2 + 4\sqrt{15}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}; & 12) \frac{(\sqrt{2}+1)^2 - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} (\sqrt{2}+1); \\ 13) \left( \frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}; & 14) \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{2}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}; \\ 15) \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + 4\sqrt{6}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} (\sqrt{3}-\sqrt{2}); & 16) \left( \frac{12}{\sqrt{5}+1} - \frac{4}{\sqrt{5}+2} + \frac{20}{3+\sqrt{5}} \right) (10+3\sqrt{5}). \end{array}$$

## II. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

### Kiến thức cần nhớ:

Để rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai, ta thường cần vận dụng thích hợp các tính chất (giao hoán, kết hợp, phân phối) của phép tính, quy tắc về thứ tự thực hiện phép tính và các phép biến đổi đã biết.

**Ví dụ 5:** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $2\sqrt{12} + 3\sqrt{48} - \sqrt{27}$ ; b)  $(\sqrt{24} - \sqrt{18})\sqrt{3}$ .

**Hướng dẫn giải:**

a)  $2\sqrt{12} + 3\sqrt{48} - \sqrt{27} = 2\sqrt{2^2 \cdot 3} + 3\sqrt{4^2 \cdot 3} - \sqrt{3^2 \cdot 3}$   
 $= 4\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = (4 + 12 - 3)\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$ .

b)  $(\sqrt{24} - \sqrt{18})\sqrt{3} = \sqrt{24} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{18} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{24 \cdot 3} + \sqrt{18 \cdot 3} = \sqrt{6^2 \cdot 2} + \sqrt{3^2 \cdot 6} = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$ .

**Ví dụ 6:** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $\sqrt{\frac{x}{9}} - \sqrt{16x} - x\sqrt{\frac{4}{x}} + \frac{2}{3x}\sqrt{x^3}$  với  $x > 0$ ; b)  $\frac{1 - x\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} - \frac{x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$  với  $x \geq 0$ .

**Hướng dẫn giải:**

a) Với  $x > 0$ , ta có:

$$\sqrt{\frac{x}{9}} - \sqrt{16x} - x\sqrt{\frac{4}{x}} + \frac{2}{3x}\sqrt{x^3} = \frac{\sqrt{x}}{3} - 4\sqrt{x} - x \cdot \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{3x}\sqrt{x^2 \cdot x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{3} - 4\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x} = -5\sqrt{x}.$$

b) Với  $x \geq 0$ , ta có:

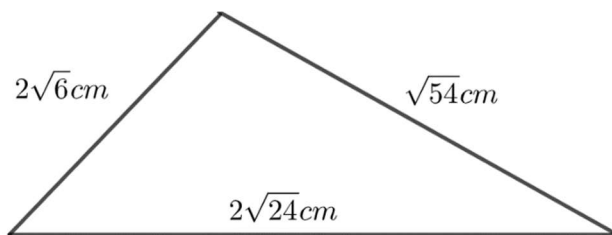
$$\frac{1 - x\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} - \frac{x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1 - (\sqrt{x})^3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x} + x)}{1 - \sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

$$= 1 + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} = x + 1.$$

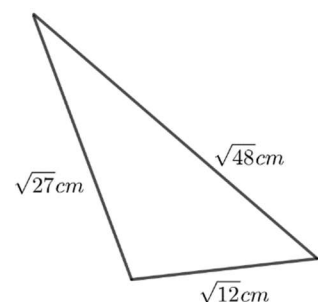
**Bài 13:** Rút gọn các biểu thức sau:

- 1)  $5\sqrt{20} - 4\sqrt{5}$ ; 2)  $2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80}$ ;
- 3)  $\sqrt{8} - 3\sqrt{32} + \sqrt{72}$ ; 4)  $3\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{50} - 4\sqrt{32}$ ;
- 5)  $5\sqrt{48} + 2\sqrt{300} - 3\sqrt{75}$ ; 6)  $6\sqrt{12} - 2\sqrt{48} + 5\sqrt{75} - 7\sqrt{108}$ ;
- 7)  $\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{48} - 3\sqrt{75}$ ; 8)  $3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{50}$ ;
- 9)  $2\sqrt{3} - \sqrt{75} + 2\sqrt{12} - \sqrt{147}$ ; 10)  $\sqrt{20} - 2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125}$ ;
- 11)  $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27} - 6\sqrt{75}$ ; 12)  $-\sqrt{242} + \sqrt{288} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{338}$ ;
- 13)  $2\sqrt{2} + \sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{450} + \frac{2}{7}\sqrt{392}$ ; 14)  $10\sqrt{72} - \frac{5}{3}\sqrt{162} + \sqrt{128} - 2\sqrt{50} + \sqrt{98}$ ;
- 15)  $\sqrt{450} - \sqrt{392} - \sqrt{338} + \sqrt{242} - \sqrt{288}$ ; 16)  $2\sqrt{128} + \sqrt{162} - \sqrt{200} - 6\sqrt{98}$ ;
- 17)  $5\sqrt{12} - 2\sqrt{48} + 6\sqrt{75} - \sqrt{108}$ ; 18)  $2\sqrt{147} - \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{2}{9}\sqrt{243} - \frac{1}{10}\sqrt{300}$ ;
- 19)  $-\frac{1}{2}\sqrt{108} + \frac{1}{15}\sqrt{75} - \frac{1}{22}\sqrt{363} + \sqrt{12}$ ; 20)  $\frac{5}{8}\sqrt{48} - \frac{1}{33}\sqrt{363} + \frac{3}{14}\sqrt{147} - \frac{1}{4}\sqrt{192}$ ;

**Bài 14:** Tính chu vi của tam giác trong hình a, hình b dưới đây:



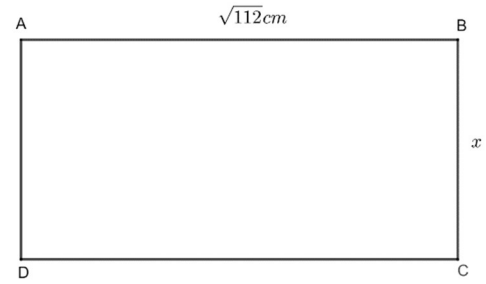
Hình a



Hình b

**Bài 15:** Biết chu vi của hình chữ nhật  $ABCD$  ở hình bên bằng  $12\sqrt{7}$  cm.

Tìm  $x$ .



**Bài 16:** Rút gọn các biểu thức sau:

- 1)  $\sqrt{27} - \sqrt{54} + \frac{6}{\sqrt{3}}$ ;
- 2)  $(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10})\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$ ;
- 3)  $\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - \sqrt{3}\right)\sqrt{6}$ ;
- 4)  $(2 - \sqrt{3})^2$ ;
- 5)  $(\sqrt{7} - 3)^2$ ;
- 6)  $(2\sqrt{3} - \sqrt{6})^2$ ;
- 7)  $(3\sqrt{6} - \sqrt{8})^2$ ;
- 8)  $(\sqrt{2} - \sqrt{15})(\sqrt{6} + \sqrt{5})$ ;
- 9)  $(2\sqrt{3} + 3)(2 - \sqrt{3})$ ;
- 10)  $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$ ;
- 11)  $(\sqrt{2} - 1)(3 + \sqrt{8})$ ;
- 12)  $(2 - \sqrt{3})(\sqrt{6} - 2\sqrt{2})$ ;
- 13)  $(2\sqrt{5} - 5)(1 + \sqrt{5}) + 3\sqrt{5}$ ;
- 14)  $(2 - \sqrt{6})(\sqrt{3} - \sqrt{8})$ ;
- 15)  $(\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 3) - \sqrt{2} \cdot (5 - \sqrt{2})$ ;
- 16)  $(\sqrt{7} - 3)^2 - 8\sqrt{\frac{7}{3}}$ ;
- 17)  $(\sqrt{7 + 2\sqrt{12}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{12}})^2$ ;
- 18)  $(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^2$ .

**Bài 17:** Một hình chữ nhật  $ABCD$  có độ dài cạnh  $AB = \sqrt{432}$  cm và  $BC = \sqrt{243}$  cm. Tính chính xác chu vi của hình chữ nhật  $ABCD$ .

**Bài 18:** Thực hiện các phép tính sau:

- 1)  $\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}$ ;
- 2)  $\sqrt{x+1} + 5\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x+1}$ ;
- 3)  $\sqrt{2x} - 3\sqrt{2x} + 6\sqrt{2x}$ ;
- 4)  $2\sqrt{x-1} + 5\sqrt{x-1} - 3\sqrt{x-1}$ ;
- 5)  $\sqrt{4x} + 2\sqrt{x} - \sqrt{x}$ ;
- 6)  $\sqrt{4x} + \sqrt{9x} - 5\sqrt{x}$ ;
- 7)  $\sqrt{4(x-1)} + \sqrt{x-1} - \sqrt{9(x-1)}$ ;
- 8)  $\sqrt{25(x+1)} - \sqrt{x+1} - \sqrt{4(x+1)}$ ;
- 9)  $-2\sqrt{8x+4} + 5\sqrt{16x+8} + \sqrt{2x+1}$ ;
- 10)  $\sqrt{25(x-2)} - 2\sqrt{9(x-2)} + \sqrt{x-2}$ ;
- 11)  $\sqrt{4x+8} + \sqrt{x+2} - 2\sqrt{9x+18}$ ;
- 12)  $3\sqrt{8x+4} - 5\sqrt{16x+8} + 2\sqrt{2x+1}$ .

**Bài 19:** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$  với  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$ .

- 1) Rút gọn biểu thức  $A$ .
- 2) Tính giá trị của biểu thức tại  $x = 104$ .

**Bài 20:** Cho biểu thức  $A = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{x}$  với  $x > 0, y > 0$ .

- 1) Rút gọn biểu thức  $A$ .
- 2) Tính giá trị của biểu thức tại  $x = 4, y = 16$ .

**Bài 21:** Cho biểu thức  $B = \frac{a\sqrt{a+8}}{a-4} - \frac{a+4}{\sqrt{a}-2}$  với  $a \geq 0$  và  $a \neq 4$ .

- 1) Rút gọn biểu thức  $B$ .
- 2) Tính giá trị của biểu thức tại  $a = 36$ .

**Bài 22:** Cho biểu thức  $D = \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x+2\sqrt{x}+1}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 1$ .

- 1) Rút gọn biểu thức  $D$ .
- 2) Tính giá trị của  $D$  khi  $x = 9$ .

**Bài 23:** Cho biểu thức  $E = \left( 1 + \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \left( 1 - \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$ .

- 1) Rút gọn  $E$ .
- 2) Tính giá trị của  $E$  khi  $x = 16$ .

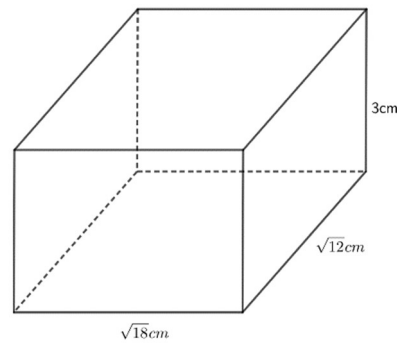
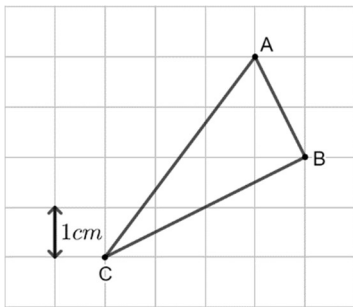
**Bài 24:** Cho biểu thức  $F = \left( \frac{3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{x-1} \right) : \left( \frac{x+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right)$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$ .

- 1) Rút gọn  $F$ .
- 2) Tìm các giá trị của  $x$  sao cho  $F = \frac{5}{2}$ .

**Bài 25:** Tam giác  $ABC$  được vẽ trên lưới ô vuông như hình bên dưới. Tính diện tích và chu vi của tam giác  $ABC$ .

**Bài 26:** Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài  $\sqrt{18}$  cm, chiều rộng  $\sqrt{12}$  cm, chiều cao 3 cm như hình bên.

- 1) Tính thể tích của hình hộp chữ nhật đó.
- 2) Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.



**Bài 27:** Biết rằng  $x > 0, y > 0$  và  $xy = 4$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = x\sqrt{\frac{18y}{x}} + y\sqrt{\frac{24x}{y}}$ .

**Bài 28:** Rút gọn:  $Q = \frac{3}{b-2} \sqrt{\frac{b^2-4b+4}{9}}$  (với  $b < 2$ ).

**Bài 29:** Rút gọn các biểu thức sau:

- 1)  $\sqrt{49a} - \sqrt{72} - a\sqrt{\frac{16}{a}} + \sqrt{32}$  với  $a > 0$ ;
- 2)  $5x\sqrt{\frac{x}{5}} + \frac{5}{4}\sqrt{16x^3} - 2x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$  với  $x > 0$ ;
- 3)  $\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$  với  $x \neq \sqrt{3}$ ;
- 4)  $\frac{x^2-5}{x+\sqrt{5}} + \frac{x^2-10\sqrt{x}+25}{x-\sqrt{5}}$  với  $\begin{cases} x \neq -\sqrt{5} \\ x \neq \sqrt{5} \end{cases}$ ;
- 5)  $\frac{a+4\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2} + \frac{4-a}{\sqrt{a}-2}$  với  $\begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 4 \end{cases}$ ;
- 6)  $\frac{9-a}{\sqrt{a}+3} - \frac{9-6\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-3}$  với  $\begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 9 \end{cases}$ ;
- 7)  $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$  với  $a, b > 0$ ;
- 8)  $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$  với  $\begin{cases} a, b \geq 0 \\ a \neq b \end{cases}$ ;



$$9) \left( \frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left( \frac{1-\sqrt{a}}{1-a} \right)^2 \text{ với } \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 1 \end{cases};$$

$$10) \frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \text{ với } \begin{cases} a \geq 0; b \geq 0 \\ a \neq b \end{cases};$$

$$11) \frac{(2+\sqrt{a})^2 - (\sqrt{a}-3)^2}{2a-\sqrt{a}} \text{ với } \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 4 \end{cases};$$

$$12) \left( \frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a} \right) \left( \frac{1+\sqrt{a}}{1-a} \right)^2 \text{ với } \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 1 \end{cases};$$

$$13) \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} \text{ với } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases};$$

$$14) \frac{(2-\sqrt{a})^2 - (\sqrt{a}+3)^2}{1+2\sqrt{a}} \text{ với } a \geq 0;$$

$$15) \left( 1 + \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right) \left( 1 - \frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} \right) \text{ với } \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 1 \end{cases};$$

$$16) \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \sqrt{ab} \text{ với } \begin{cases} a \geq 0; b \geq 0 \\ a \neq b \end{cases};$$

$$17) \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{y\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \text{ với } \begin{cases} x > 0; y > 0 \\ x \neq y \end{cases};$$

$$18) \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}} \cdot \frac{x-y}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} \text{ với } \begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x \neq y \end{cases};$$

$$19) \left( \frac{b\sqrt{b}-a\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} + \sqrt{ab} \right) \left( \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} \right)^2 \text{ với } \begin{cases} a \geq 0; b \geq 0 \\ a \neq b \end{cases};$$

$$20) \left( \frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left( \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} \right)^2 \text{ với } \begin{cases} a \geq 0; b \geq 0 \\ a \neq b \end{cases};$$

$$21) \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}} \left( \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y} \right) \text{ với } \begin{cases} x > 0; y > 0 \\ x \neq y \end{cases};$$

$$22) \left( \frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left( \frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a} \right) \text{ với } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases};$$

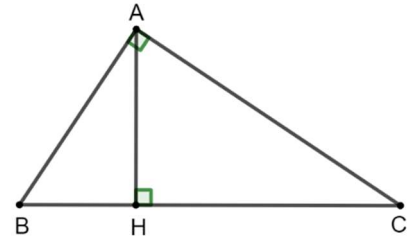
$$23) \left( 2 - \frac{a-3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} \right) \left( 2 - \frac{5\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{b}-5} \right) \text{ với } \begin{cases} a \geq 0; b \geq 0 \\ a \neq 9; b \neq 25 \end{cases};$$

........HẾT........

**CHỦ ĐỀ 4: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG****§1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG**

**Bài tập mẫu:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $AH$  là đường cao. Chứng minh các hệ thức sau:

- 1)  $AB^2 = BH \cdot BC$ ,  $AC^2 = CH \cdot CB$ ;
- 2)  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ;
- 3)  $AH \cdot BC = AB \cdot AC$ ;
- 4)  $AH^2 = BH \cdot HC$ ;
- 5)  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ .

**Hướng dẫn giải**

- 1) Chứng minh  $AB^2 = BH \cdot BC$ ,  $AC^2 = CH \cdot CB$ .

Xét  $\triangle ABH$  và  $\triangle ABC$ , ta có: 
$$\begin{cases} \widehat{ABH} = \widehat{ABC} \text{ (góc chung)} \\ \widehat{AHB} = \widehat{BAC} (= 90^\circ) \end{cases}$$

Do đó,  $\triangle ABH \sim \triangle CBA$  (g - g)

Suy ra  $\frac{AB}{CB} = \frac{BH}{BA}$  (tỉ số đồng dạng)

Suy ra:  $AB^2 = BH \cdot BC$ .

Tương tự ta cũng có:  $AC^2 = CH \cdot CB$ .

- 2) Chứng minh  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

Ta có: 
$$\begin{cases} AB^2 = BH \cdot BC \text{ (câu 1)} \\ AC^2 = CH \cdot CB \text{ (câu 1)} \end{cases}$$

Suy ra:

$$AB^2 + AC^2 = BH \cdot BC + CH \cdot CB$$

$$AB^2 + AC^2 = BC(BH + CH)$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

- 3) Chứng minh  $AH \cdot BC = AB \cdot AC$ .

Ta có:  $\triangle ABH \sim \triangle CBA$  (câu 1)

Suy ra:  $\frac{AB}{BC} = \frac{AH}{CA}$  (tỉ số đồng dạng)

Vậy:  $AH \cdot BC = AB \cdot AC$

- 4) Chứng minh  $AH^2 = BH \cdot HC$ .

Xét  $\triangle ABH$  và  $\triangle CAH$ , ta có: 
$$\begin{cases} \widehat{AHB} = \widehat{AHC} (= 90^\circ) \\ \widehat{BAH} = \widehat{ACH} \end{cases}$$

Do đó,  $\triangle ABH \sim \triangle CAH$  (g - g)

Suy ra:  $\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{CH}$  (tỉ số đồng dạng)

Vậy  $AH^2 = BH \cdot HC$ .

- 5) Chứng minh  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ .

Ta có:  $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{BC^2}{(AH \cdot BC)^2} = \frac{BC^2}{AH^2 \cdot BC^2} = \frac{1}{AH^2}$ , suy ra  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

**Nhận xét:** Trong tam giác vuông có đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông, ta có:

1. Vuông bình = chiều × huyền.
2. Huyền bình = vuông bình + vuông bình.
3. Cao × huyền = vuông × vuông.
4. Cao bình = chiều × chiều.
5. Nghịch cao bình = nghịch vuông bình + nghịch vuông bình.

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có đường cao  $AH$ . Hãy tính lần lượt độ dài các đoạn  $BH, CH, AH, AC$  nếu biết:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $AB = 6 \text{ cm}; BC = 10 \text{ cm};$  | 2) $AB = 20 \text{ cm}; BC = 25 \text{ cm};$       |
| 3) $AB = 12 \text{ cm}; BC = 13 \text{ cm};$ | 4) $AB = \sqrt{3} \text{ cm}; BC = 2 \text{ cm};$  |
| 5) $AB = 5 \text{ cm}; BC = 1 \text{ dm};$   | 6) $AB = 2\sqrt{2} \text{ cm}; BC = 4 \text{ cm}.$ |

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có đường cao  $AH$ . Hãy tính lần lượt độ dài các đoạn  $BC, AH, BH, CH$  nếu biết:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $AB = 3 \text{ cm}; AC = 4 \text{ cm};$        | 2) $AB = 12 \text{ cm}; AC = 9 \text{ cm};$              |
| 3) $AB = 12 \text{ cm}; AC = 5 \text{ cm};$       | 4) $AB = \sqrt{2} \text{ cm}; AC = \sqrt{2} \text{ cm};$ |
| 5) $AB = \sqrt{3} \text{ cm}; AC = 1 \text{ cm};$ | 6) $AB = 3a; AC = 4a (a > 0).$                           |

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có đường cao  $AH$ . Hãy tính lần lượt độ dài các đoạn  $AH, BC, AB, AC$  nếu biết:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $BH = 9 \text{ cm}; CH = 16 \text{ cm};$ | 2) $BH = \sqrt{2} \text{ cm}; CH = \sqrt{2} \text{ cm};$ |
| 3) $BH = 1 \text{ cm}; CH = 3 \text{ cm};$  | 4) $BH = 25 \text{ cm}; CH = 144 \text{ cm};$            |
| 5) $BH = 16a; CH = 9a (a > 0);$             | 6) $BH = 144a; CH = 25a (a > 0).$                        |

**Bài 4.** Cho tam giác  $DEF$  vuông tại  $D$ , có đường cao  $DI$ . Tính độ dài  $DI$  nếu biết:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $DE = 15 \text{ cm}; DF = 20 \text{ cm};$      | 2) $DE = 1 \text{ cm}; DF = 1 \text{ cm};$   |
| 3) $DE = 7 \text{ cm}; DF = 24 \text{ cm};$       | 4) $DE = 12 \text{ cm}; EF = 15 \text{ cm};$ |
| 5) $DF = \sqrt{3} \text{ cm}; EF = 2 \text{ cm};$ | 6) $EI = 15 \text{ cm}; EF = 20 \text{ cm}.$ |

**Bài 5.** Giả sử tam giác  $ABC$  không có góc tù,  $AH$  là đường cao. Chứng minh: tam giác  $ABC$  là tam giác vuông nếu biết:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $AB = 6 \text{ cm}; AC = 8 \text{ cm}; BC = 10 \text{ cm};$  | 2) $AB = 15 \text{ cm}; AC = 20 \text{ cm}; BC = 25 \text{ cm};$   |
| 3) $AH = 12 \text{ cm}; BH = 16 \text{ cm}; CH = 9 \text{ cm};$ | 4) $AH = 30 \text{ cm}; BH = 36 \text{ cm}; CH = 25 \text{ cm};$   |
| 5) $AB = 2 \text{ cm}; BH = 1 \text{ cm}; BC = 4 \text{ cm};$   | 6) $AC = 24 \text{ cm}; BH = 1,96 \text{ cm}; BC = 25 \text{ cm}.$ |

**Bài 6.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Tính chu vi tam giác  $ABC$  biết rằng:

$$AC = 5 \text{ cm}, HC = \frac{25}{13} \text{ cm}.$$

**Bài 7.** Cho tam giác  $MNP$  cân tại  $M$ , đường cao  $MH (H \in NP)$ . Từ  $H$  kẻ  $HE$  vuông góc với  $MN (E \in MN)$ . Biết  $MN = 25 \text{ cm}, HP = 15 \text{ cm}$ . Tính  $MH, ME$ .

- Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn có đường cao  $AH$ . Gọi  $M, N$  là hình chiếu của  $H$  lên  $AB$  và  $AC$ . Chứng minh:  $AB \cdot AM = AC \cdot AN$ .
- Bài 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Biết  $AB = 3\text{ cm}$ ,  $AC = 4\text{ cm}$ . Tính độ dài đường cao  $AH$  và diện tích tam giác  $AMB$ .
- Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Từ trung điểm  $D$  của  $AC$  kẻ  $DE$  vuông góc với  $BC$  tại  $E$ . Chứng minh:
- 1)  $BE^2 - CE^2 = BD^2 - CD^2$ .
  - 2)  $AB^2 = BE^2 - CE^2$ .
- Bài 11.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có đường cao  $AH$ . Chứng minh:  $BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$
- Bài 12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AC = 16\text{ cm}$ ,  $BC = 20\text{ cm}$ , vẽ đường cao  $AK$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là hình chiếu của  $K$  lên  $AB$  và  $AC$ .
- 1) Tính độ dài  $BK, AK$ .
  - 2) Chứng minh:  $AE \cdot AB + AF \cdot AC = 2AK$ .
- Bài 13.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $AH$  là đường cao. Kẻ  $HD$  vuông góc với  $AB$  tại  $D$  và  $HE$  vuông góc với  $AC$  tại  $E$ .
- 1) Chứng minh:  $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH}$  sau đó suy ra  $\frac{AB^4}{AC^4} = \frac{BH^2}{CH^2}$ .
  - 2) Chứng minh:  $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BD}{CE}$ .
- Bài 14.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và  $M$  thuộc cạnh  $BC$ . Kẻ  $ME, MF$  lần lượt vuông góc với  $AB, AC$  tại  $E$  và  $F$ . Chứng minh rằng:
- 1)  $MB^2 = 2ME^2$  và  $MC^2 = 2MF^2$ .
  - 2)  $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ .
- Bài 15.** Cho hình vuông  $ABCD$  và  $M$  thuộc cạnh  $BC$ . Kéo dài  $AM$  cắt tia  $DC$  tại  $N$ . Qua  $A$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AM$  cắt tia  $CB$  tại  $E$ . Chứng minh:
- 1)  $AE = AN$ .
  - 2)  $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$ .
- Bài 16.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có các đường cao  $AH$  và  $BK$ . Qua  $B$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BC$  cắt tia đối của tia  $AC$  tại  $D$ . Chứng minh:
- 1)  $BD = 2AH$ .
  - 2)  $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$ .
- Bài 17.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có cạnh  $AB = 6\text{ cm}$  và  $AC = 8\text{ cm}$ . Các đường phân giác trong và ngoài của góc  $B$  cắt đường thẳng  $AC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ .
- 1) Chứng minh: tam giác  $BMN$  vuông.
  - 2) Tính độ dài các đoạn  $AM, AN, BM, BN$ .
- Bài 18.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có đường cao  $AH$ . Biết  $BH = 4\text{ cm}$ ,  $CH = 9\text{ cm}$ . Gọi  $D$  và  $E$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  lên  $AB$  và  $AC$ .
- 1) Tính độ dài đoạn thẳng  $DE$ .
  - 2) Các đường thẳng vuông góc với  $DE$  tại  $D$  và tại  $E$  lần lượt cắt  $BC$  tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh:  $M$  là trung điểm của  $BH$  và  $N$  là trung điểm của  $CH$ .
  - 3) Tính diện tích tứ giác  $DENM$ .
- Bài 19.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH$  bằng  $12\text{ cm}$ . Hãy tính cạnh huyền  $BC$  nếu biết  $HB : HC = 1 : 3$ .

**Bài 20.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có đường cao  $AH$ . Biết  $BC = 125 \text{ cm}$  và  $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$ . Tính  $AB, AC, AH, BH, CH$ .

**Bài 21.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AH$  là đường cao. Biết  $\frac{AH}{AC} = \frac{3}{5}$  và  $AB = 15 \text{ cm}$ .

1. Tính  $HB, HC$ .
2. Gọi  $E, F$  là hình chiếu của  $H$  lên  $AB, AC$ . Chứng minh:  $AH^3 = BC \cdot BF \cdot CF$

**Bài 22.** Cho một tam giác vuông có cạnh huyền là  $5 \text{ cm}$  và đường cao ứng với cạnh huyền là  $2 \text{ cm}$ . Hãy tính cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông này.

.....🎵...HẾT...🎵.....

## §2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

### Kiến thức cần nhớ

**I) Định nghĩa:** Cho góc nhọn  $\alpha$ . Xét tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\widehat{ABC} = \alpha$ , ta có:

1. Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là *sin* của góc  $\alpha$ , kí hiệu  $\sin \alpha$ .
2. Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là *côsin* của góc  $\alpha$ , kí hiệu  $\cos \alpha$ .
3. Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là *tan* của góc  $\alpha$ , kí hiệu  $\tan \alpha$ .
4. Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là *côtang* của góc  $\alpha$ , kí hiệu  $\cot \alpha$ .

$$\text{Hoặc: } \sin \alpha = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}}; \cos \alpha = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}}; \tan \alpha = \frac{\text{đối}}{\text{kề}}; \cot \alpha = \frac{\text{kề}}{\text{đối}}.$$

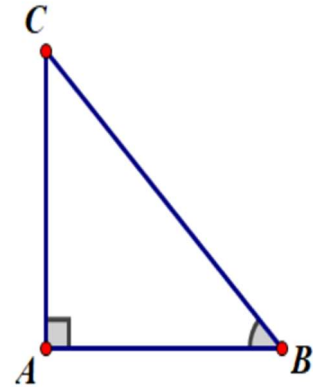
**Ví dụ 1:** Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{BC};$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC};$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB};$$

$$\cot B = \frac{AB}{AC};$$



### Kiến thức cần nhớ

**II) Định lý:** Nếu hai góc phụ nhau thì *sin* góc này bằng *côsin* góc kia; *tan* góc này bằng *côtang* góc kia và ngược lại.

**III) Các hệ thức cơ bản:**

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$3) \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$4) \tan x \cdot \cot x = 1.$$

Bảng tỉ số lượng giác:

$\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

**Ví dụ 2:** Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ}{2 \cdot \cot 45^\circ}$ .

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } P = \frac{\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ}{2 \cdot \cot 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot 1} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}.$$

#### ♦ Kiến thức cần nhớ

#### IV) Hệ thức giữa cạnh và góc của tam giác vuông:

Trong một tam giác vuông:

Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với  $\sin$  góc đối hoặc nhân với  $\cos$  góc kề.

Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông còn lại nhân với  $\tan$  góc đối hoặc nhân với  $\cot$  góc kề.

Lưu ý: Giải một tam giác vuông là tính các cạnh và các góc của tam giác đó.

### BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1.** Dùng máy tính bỏ túi, hãy tính các tỉ số lượng giác sau (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

- |                                 |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) $\sin 37^\circ = \dots$      | 2) $\sin 56^\circ = \dots$      | 3) $\cos 42^\circ = \dots$      |
| 4) $\cos 21^\circ = \dots$      | 5) $\tan 66^\circ = \dots$      | 6) $\tan 15^\circ = \dots$      |
| 7) $\cot 28^\circ = \dots$      | 8) $\cot 69^\circ = \dots$      | 9) $\sin 70^\circ 13' = \dots$  |
| 10) $\cos 25^\circ 32' = \dots$ | 11) $\tan 43^\circ 10' = \dots$ | 12) $\cot 32^\circ 15' = \dots$ |

**Bài 2.** Dùng máy tính bỏ túi, hãy tìm góc nhọn  $x$  (kết quả làm tròn đến độ), biết rằng:

- |                      |                      |                      |                      |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1) $\sin x = 0,3495$ | 2) $\sin x = 0,5651$ | 3) $\cos x = 0,4853$ | 4) $\cos x = 0,7448$ |
| 5) $\tan x = 1,3417$ | 6) $\tan x = 1,5142$ | 7) $\cot x = 3,163$  | 8) $\cot x = 4,173$  |

**Bài 3.** Dùng máy tính bỏ túi, hãy tìm góc nhọn  $x$  (kết quả làm tròn đến phút), biết rằng:

- |                           |                            |                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1) $\sin x = \frac{3}{4}$ | 2) $\sin x = \frac{1}{3}$  | 3) $\cos x = \frac{2}{5}$ | 4) $\cos x = \frac{5}{12}$ |
| 5) $\tan x = \frac{4}{3}$ | 6) $\tan x = \frac{12}{5}$ | 7) $\cot x = \frac{4}{5}$ | 8) $\cot x = 4,173$        |

**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Hãy tính tỉ số lượng giác của góc  $B$  và góc  $C$  nếu biết:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $AB = 3 \text{ cm}, AC = 4 \text{ cm};$        | 2) $AB = 6 \text{ cm}, BC = 10 \text{ cm};$        |
| 3) $AC = 5 \text{ cm}, BC = 13 \text{ cm};$       | 4) $AB = 5 \text{ cm}, BC = 1 \text{ dm};$         |
| 5) $AC = \sqrt{2} \text{ cm}, BC = 2 \text{ cm};$ | 6) $AB = 3\sqrt{3} \text{ cm}, AC = 3 \text{ cm};$ |

**Bài 5.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có đường cao  $AH$ . Hãy tính  $\sin B, \cos B, \tan B, \cot B$  rồi suy ra  $\sin C, \cos C, \tan C, \cot C$  nếu biết:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $AB = 30 \text{ cm}, AH = 24 \text{ cm};$  | 2) $AB = 9 \text{ cm}, AH = 7,2 \text{ cm};$       |
| 3) $BH = 3,6 \text{ cm}, BC = 10 \text{ cm};$ | 4) $AH = 6 \text{ cm}, CH = 2\sqrt{3} \text{ cm};$ |
| 5) $BH = 25 \text{ cm}, CH = 9 \text{ cm};$   | 6) $BH = 9 \text{ cm}, CH = 16 \text{ cm}.$        |

**Bài 6.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Tính độ dài các cạnh  $AC$  và  $BC$  nếu biết:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $AB = 12 \text{ cm}, \tan B = \frac{3}{4};$     | 2) $AB = 15 \text{ cm}, \cos B = \frac{5}{13};$      |
| 3) $AB = 2\sqrt{3} \text{ cm}, \cot B = \sqrt{3};$ | 4) $AB = 1 \text{ cm}, \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ |

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Tính độ dài các cạnh  $AB$  và  $AC$  nếu biết:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $BC = 15 \text{ cm}, \sin B = \frac{3}{5};$ | 2) $BC = 13 \text{ cm}, \cos B = \frac{5}{13};$ |
| 3) $BC = 2 \text{ cm}, \tan B = \sqrt{3};$     | 4) $BC = 41 \text{ cm}, \cot B = \frac{9}{40}.$ |

**Bài 8:** Cho hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 9 và  $9\sqrt{3}$ . Tính góc giữa đường chéo và cạnh ngắn hơn của hình chữ nhật.

**Bài 9:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Đặt  $\widehat{ABC} = x$  với  $0^\circ < x < 90^\circ$ . Chứng minh

- |                              |  |  |
|------------------------------|--|--|
| 1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ | 2. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$    | 3. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$    |
| 4. $\tan x \cdot \cot x = 1$ | 5. $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$ | 6. $\frac{1}{\sin^2 x} = \cot^2 x + 1$ |

**Bài 10:** Tính giá trị các biểu thức sau:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $A = \sin 23^\circ - \cos 67^\circ$     | 2. $B = \cos 34^\circ - \sin 56^\circ$     | 3. $C = \tan 18^\circ - \cot 72^\circ$     |
| 4. $D = \cot 36^\circ - \tan 54^\circ$     | 5. $E = \sin^2 22^\circ + \cos^2 22^\circ$ | 6. $F = \sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ$ |
| 7. $G = \tan 15^\circ \cdot \cot 15^\circ$ | 8. $H = \tan 18^\circ \cdot \tan 72^\circ$ |  |

**Bài 11:** Tính giá trị của biểu thức:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $A = \sin 30^\circ - 2 \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$                   | 2. $B = \sin 45^\circ + \cot 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$                               |
| 3. $C = \cot 44^\circ \cdot \cot 45^\circ \cdot \cot 46^\circ$             | 4. $D = \frac{3 \cot 60^\circ}{2 \cos^2 30^\circ - 1}$                                   |
| 5. $E = \frac{\cos 60^\circ}{1 + \sin 60^\circ} + \frac{1}{\tan 30^\circ}$ | 6. $F = 10 - \sin^2 45^\circ + 3 \cos^2 60^\circ - 5 \cot^3 45^\circ$                    |
| 7. $G = \tan 45^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cot 30^\circ$             | 8. $H = \sin 15^\circ + \sin 75^\circ - \cos 15^\circ - \cos 75^\circ + 2 \sin 30^\circ$ |

**Bài 12:** Tính giá trị các biểu thức sau:

- |  |
|--|
| 1. $A = \sin 10^\circ + \sin 40^\circ - \cos 50^\circ - \cos 80^\circ$ |
| 2. $B = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \sin 55^\circ - \sin 75^\circ$ |

3.  $C = \sin^2 15^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 75^\circ$
4.  $D = \cos^2 15^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 55^\circ + \cos^2 75^\circ$
5.  $E = \cos^2 81^\circ + \cos^2 9^\circ - 5 \cot 62^\circ \cdot \cot 28^\circ$
6.  $F = \sin^2 72^\circ + \cos^2 72^\circ + \frac{2 \tan 55^\circ}{\cot 35^\circ}$
7.  $G = \cot 33^\circ + \sin^2 25^\circ - \tan 57^\circ + \sin^2 65^\circ - \frac{5 \tan 24^\circ}{\cot 66^\circ}$
8.  $H = \sin^2 56^\circ - \cot 27^\circ + \sin^2 34^\circ + \tan 63^\circ - 12 \tan 37^\circ \cdot \tan 53^\circ$
9.  $M = \frac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} - 7 \sin^2 65^\circ - 7 \sin^2 25^\circ - \tan 27^\circ + \tan 45^\circ$
10.  $N = 12 \tan 32^\circ \cdot \tan 58^\circ + \sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ - \frac{8 \cot 35^\circ}{\tan 55^\circ}$
11.  $P = \frac{9 \tan 38^\circ}{\cot 52^\circ} + \cos^2 26^\circ + \cos^2 64^\circ + 4 \sin^2 85^\circ + 4 \sin^2 5^\circ$
12.  $A = (\tan 23^\circ + \cot 23^\circ)^2 - (\cos 23^\circ - \tan 23^\circ)^2 :$
13.  $A = 7 \cdot \tan 42^\circ \cdot \tan 48^\circ - \frac{4 \cdot \cos 35^\circ}{\sin 55^\circ} + \sin^2 11^\circ + \sin^2 79^\circ$
14.  $B = \sin^2 52^\circ + \sin^2 38^\circ - \tan 31^\circ + \cot 59^\circ - \frac{\cot 22^\circ}{\tan 68^\circ}$
15.  $A = 6 \cos 17^\circ \cdot \cos 73^\circ + \sin^2 31^\circ - \frac{16 \cdot \tan 43^\circ}{\cot 47^\circ} + \sin^2 59^\circ ;$
16.  $B = \cot 74^\circ \cdot \cos 16^\circ - 2(\cos 45^\circ - \sin 34^\circ)^2 - \frac{2 \sin 37^\circ}{3 \cos 53^\circ} - \sin^2 56^\circ .$

**Bài 13:** Cho  $\alpha$  là góc nhọn ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ).

- 1) Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ . Hãy tìm  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$ ;
- 2) Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ . Hãy tìm  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$ ;
- 3) Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ . Hãy tìm  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$ ;
- 4) Cho  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ . Hãy tìm  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$ ;
- 5) Cho  $\tan \alpha = \sqrt{3}$ . Hãy tìm  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\cot \alpha$ ;
- 6) Cho  $\cot \alpha = 1$ . Hãy tìm  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ;

**Bài 14:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $AB = \frac{1}{2}BC$ . Tính  $\sin B$ ,  $\cos B$ ,  $\tan B$ ,  $\cot B$ .

**Bài 15:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn,  $AH$  là đường cao. Chứng minh:

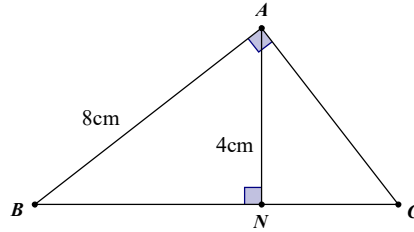
- 1)  $AB \cdot \sin B = AC \cdot \sin C$ .
- 2)  $BH = AB \cdot \cos B$  và  $CH = AC \cdot \cos C$ . Từ đó suy ra:  $BC = AB \cdot \cos B + AC \cdot \cos C$ .

**Bài 16:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Tính chu vi tam giác  $ABC$ , biết rằng:  $CH = 20 \text{ cm}$ . Góc  $B$  bằng  $60^\circ$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Bài 17:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AH$  là đường cao (hình bên). Biết  $AB = 8 \text{ cm}$  và  $AH = 4 \text{ cm}$ .

- 1) Tính  $\sin B$ . Suy ra số đo của góc  $B$ .
- 2) Tính các độ dài  $HB, HC$  và  $AC$ .





**Bài 18:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có cạnh  $AB = 10\text{ cm}$ , đường cao  $AH = 5\text{ cm}$ . Hãy Tính các góc và diện tích của tam giác  $ABC$ .

**Bài 19:** Giải tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  biết:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $BC = 20\text{ cm}, \hat{B} = 30^\circ$ ; | 2) $BC = 18\text{ cm}, \hat{B} = 60^\circ$ ; |
| 3) $AB = 12\text{ cm}, \hat{C} = 30^\circ$ ; | 4) $AC = 20\text{ cm}, \hat{B} = 30^\circ$ ; |
| 5) $AB = 4\text{ cm}, \hat{C} = 45^\circ$ ;  | 6) $AB = 12\text{ cm}, BC = 20\text{ cm}$ .  |

**Bài 20:** Giải tam giác  $DEF$  vuông tại  $D$  biết: (độ dài làm tròn đến hàng phần mười, góc làm tròn đến phút)

- |  |  |
|--|--|
| 1) $DE = 16\text{ cm}, \hat{E} = 50^\circ$ ; | 2) $DE = 9\text{ cm}, \hat{F} = 43^\circ$ ;  |
| 3) $EF = 15\text{ cm}, \hat{E} = 56^\circ$ ; | 4) $EF = 16\text{ cm}, \hat{F} = 34^\circ$ ; |
| 5) $DE = 16\text{ cm}, \hat{E} = 50^\circ$ ; | 6) $DE = 16\text{ cm}, DF = 20\text{ cm}$ ;  |
| 7) $DE = 8\text{ cm}, EF = 17\text{ cm}$ ;   | 8) $DF = 15\text{ cm}, EF = 21\text{ cm}$ .  |

**Bài 21:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ , biết  $AC = 16\text{ cm}$  và  $\sin \widehat{CAH} = \frac{4}{5}$ . Tính độ dài các cạnh  $BC, AB$ .

**Bài 22:** Giải tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  biết  $AB = 12\text{ cm}, \hat{C} = 60^\circ$ .

**Bài 23:** Giải tam giác  $DEF$  vuông tại  $D$  biết  $DE = 10\text{ cm}, \hat{F} = 32^\circ$ . (kết quả độ dài làm tròn đến hàng phần mười, kết quả góc làm tròn đến độ)

**Bài 24:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết tỉ số  $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ ;  $AH = 4,8\text{ cm}$ .

- 1) Giải tam giác  $ABC$ .
- 2) Tính diện tích tam giác  $ABH$ .

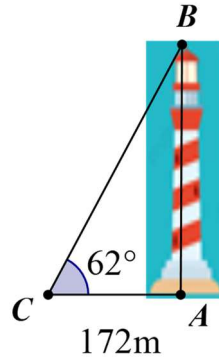
**Bài 25:** Cho tam giác  $DEF$  vuông tại  $D$ , đường cao  $DI$ . Biết tỉ số  $\frac{DE}{EF} = \frac{4}{5}$ ;  $DF = 12\text{ cm}$ .

- 1) Giải  $\triangle DEF$ .
- 2) Tính diện tích  $\triangle DIF$ .

**Bài 26:** Một chiếc thang dài  $3\text{ m}$ . Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng cách bằng bao nhiêu để nó tạo được với mặt đất một góc an toàn  $65^\circ$  (tức là đảm bảo thang không bị đổ khi sử dụng)? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

**Bài 27:** Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng  $34^\circ$  và bóng của một tháp trên mặt đất dài  $86\text{ m}$ . Tính chiều cao của tháp. (Kết quả làm tròn đến mét)

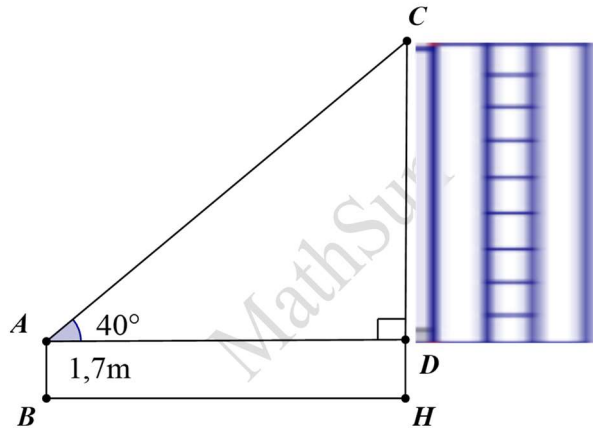
**Bài 28:** Tính chiều cao của ngọn Hải Đăng (hình vẽ) khi biết góc nhọn tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất là  $62^\circ$  và bóng của tháp trên mặt đất dài  $172\text{ m}$ . (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



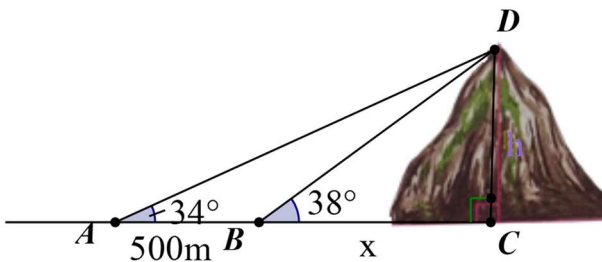
**Bài 29:** Để chuyển đồ lên xe hàng người ta dùng băng chuyền dài  $4,5\text{ m}$ . Biết góc tạo bởi băng chuyền và mặt đất là  $28^\circ$ . Tính khoảng cách từ khoang của xe hàng đến mặt đất? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

**Bài 30:** Bài toán cột cờ. Làm dây kéo cờ. Tính chiều dài của dây kéo cờ, biết bóng của cột cờ (chiều dài ánh sáng mặt trời) dài  $11,6\text{ m}$  và góc nhìn mặt trời là  $36^\circ 50'$ .

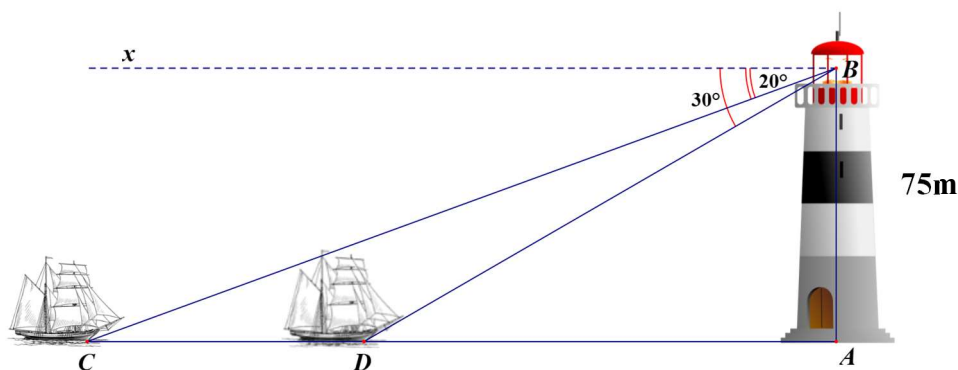
**Bài 31:** Một người dùng giác kế cao  $1,7\text{ m}$  để đo khoảng cách  $BH$  từ vị trí người đó đứng (điểm B) đến chân tòa nhà (điểm H). Biết chiều cao CH của tòa nhà là  $20\text{ m}$  và góc nhìn lên là  $40^\circ$  (so với phương nằm ngang như hình vẽ) (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



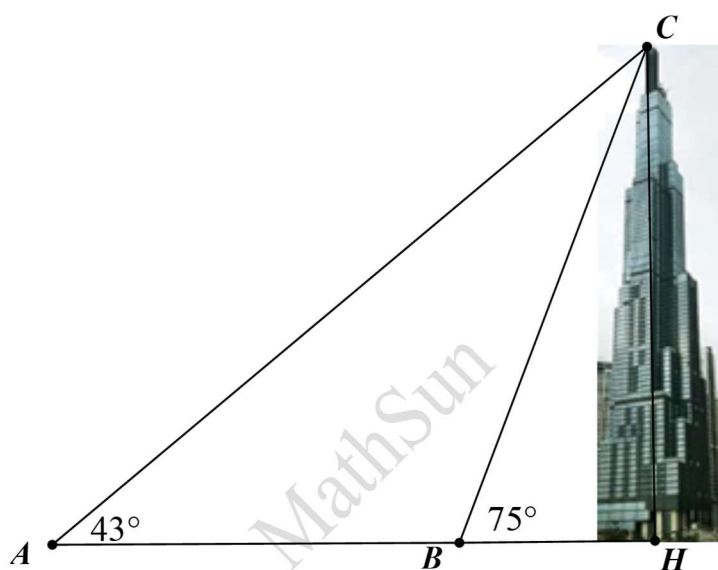
**Bài 32:** Tính chiều cao của một ngọn núi (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị), biết tại hai điểm A, B cách nhau  $500\text{ m}$ , người ta nhìn thấy đỉnh núi với góc nâng lần lượt là  $34^\circ$  và  $38^\circ$ .



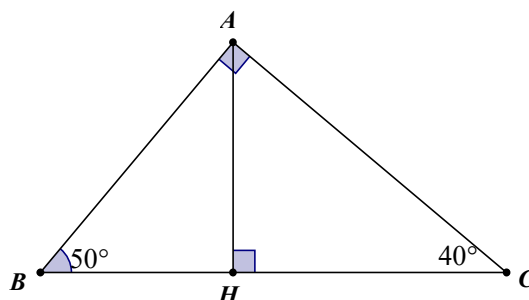
**Bài 33.** Một người đứng trên tháp (tại B) của ngọn hải đăng cao  $75\text{ m}$  quan sát hai lần một con tàu đang hướng về ngọn hải đăng. Lần thứ nhất người đó nhìn thấy tàu tại C với góc hạ là  $20^\circ$ , lần thứ 2 người đó nhìn thấy tàu tại D với góc hạ là  $30^\circ$ . Hỏi con tàu đã đi được bao nhiêu mét giữa hai lần quan sát. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



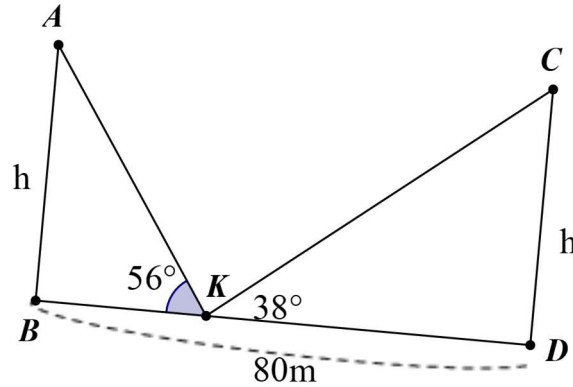
**Bài 34:** Tính chiều cao  $CH$  của tòa nhà Larkmark ở bên kia sông biết  $AB = 371\text{m}$ ,  $\widehat{HAC} = 43^\circ$ ,  $\widehat{HBC} = 75^\circ$  và ba điểm  $A, B, H$  thẳng hàng (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



**Bài 35:** Một chiếc flycam đang ở vị trí  $A$  cách chiếc cầu  $BC$  một khoảng  $AH$ . Biết góc tạo bởi  $AB, AC$  với mặt cầu tại  $B, C$  thứ tự là  $\widehat{ABH} = 50^\circ$ ,  $\widehat{ACH} = 40^\circ$ . Biết chiều dài chiếc cầu  $BC$  là  $1200\text{m}$ . Tính  $AH$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



**Bài 36:** Hai trụ điện  $AB$ ,  $CD$  có cùng chiều cao  $h$  được dựng thẳng đứng hai bên lề đối diện một đại lộ rộng 80m. Từ một điểm  $K$  trên mặt đường giữa hai trụ điện người ta nhìn thấy đỉnh hai trụ điện lần lượt là  $56^\circ$  và  $38^\circ$ . Tính chiều cao trụ điện. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



**Bài 37:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AC = 16\text{cm}$ ,  $AB = 12\text{cm}$ ,  $BC = 20\text{cm}$

- 1) Chứng minh: tam giác  $ABC$  vuông.
- 2) Tính đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$ .
- 3) Kẻ  $HE$  vuông góc với  $AC$  tại  $E$ ,  $HF$  vuông góc với  $AB$  tại  $F$ . Tính  $HE$ ,  $HF$ .

**Bài 38:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  vẽ  $AH$  vuông góc với  $BC$  tại  $H$ . Biết  $AB = 6\text{cm}$ ,  $\sin C = \frac{3}{5}$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $BC$  và  $AH$ .

**Bài 39:** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 4\sqrt{2}\text{cm}$ ,  $BC = 7\text{cm}$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ . Tính độ dài  $AC$ .

**Bài 40:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 6\text{cm}$ ,  $BC = 10\text{cm}$ .  $AH$  là đường cao của tam giác  $ABC$ .

- 1) Tính  $AC$ ,  $AH$ .
- 2) Tính  $\hat{B}$  và  $\hat{C}$  của tam giác  $ABC$ .
- 3) Chứng minh:  $AB \cdot \cos B + AC \cdot \cos C = BC$ .

**Bài 41:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH = \sqrt{3}\text{cm}$ ,  $BH = 1\text{cm}$ . Tính  $HC$  và  $\widehat{ACB}$ .

**Bài 42:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 9\text{cm}$ ,  $\hat{C} = 30^\circ$ .

- 1) Giải tam giác  $ABC$ .
- 2) Kẻ đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$ . Tính  $AH$ ,  $BH$ .
- 3) Kẻ  $AD$  là tia phân giác của  $\widehat{BAC}$ . Tính  $AD$ .

**Bài 43:** Cho tam giác  $DEF$  vuông tại  $D$ . Biết  $DF = 63\text{cm}$  và  $\widehat{DEF} = 36^\circ$ , hãy tính  $DE$  và  $EF$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

**Bài 44:** Cho tam giác  $HKT$  vuông tại  $H$ . Biết  $KH = 16\text{cm}$  và  $\widehat{HKT} = 36^\circ$ , hãy tính  $TK$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

**Bài 45:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AH$  là đường cao. Cho  $AB = 6\text{cm}$ ;  $AC = 8\text{cm}$ .

- 1) Tính  $BC$  và  $AH$ .
- 2) Tính số đo  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  và tính độ dài của  $HB$ ,  $HC$ .

**Bài 46:** Cho tam giác  $DEF$  vuông tại  $D$ ,  $DK$  là đường cao. Cho  $DF = 24\text{cm}$ ;  $EF = 25\text{cm}$ .

- 1) Tính  $DE$  và  $DK$ .
- 2) Tính số đo  $\hat{E}$ ,  $\hat{F}$ , và Tính độ dài của  $KE$ ,  $KF$ .

**Bài 47:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 12\text{cm}$ ,  $AC = 9\text{cm}$ .

- 1) Tính  $BC$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ .

2) Phân giác của góc  $A$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Tính  $BD, CD$ .

3) Từ  $D$  kẻ  $DE$  và  $DF$  lần lượt vuông góc với  $AB$  và  $AC$ . Tứ giác  $AEDF$  là hình gì? Tính chu vi và diện tích của tứ giác  $AEDF$ .

**Bài 48:** Cho tam giác  $ABC$ . Biết  $AB = 21\text{cm}, AC = 28\text{cm}, BC = 35\text{cm}$ .

1) Chứng minh: tam giác  $ABC$  vuông.

2) Tính  $\sin B, \sin C$ .

**Bài 49:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 6\text{cm}, AC = 4,5\text{cm}, BC = 7,5\text{cm}$ .

1) Chứng minh: tam giác  $ABC$  vuông.

2) Tính các góc  $\hat{B}, \hat{C}$  và đường cao  $AH$  của tam giác.

**Bài 50:** Tính các góc của tam giác  $ABC$ , biết  $AB = 3\text{cm}, AC = 4\text{cm}, BC = 5\text{cm}$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

**Bài 51:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 6\text{cm}$ . Biết  $\tan B = \frac{5}{12}$ . Tính  $AC, BC$ .

**Bài 52:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Chứng minh rằng:  $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C}$ .

**Bài 53:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .  $\hat{B} = 30^\circ, BC = 15\text{cm}$ . Hãy tính cạnh  $AB$ .

**Bài 54:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn, đường cao  $AH$ . Biết  $\widehat{BCA} = 40^\circ, AC = 16\text{cm}$ . Tính  $AH, BH$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

**Bài 55:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AH$  là đường cao. Cho  $\widehat{BAC} = 30^\circ, AH = 12\text{cm}, AB = 15\text{cm}$  (độ dài làm tròn đến hàng phần mười; số đo góc làm tròn đến phút).

1) Tính  $BH, CH$ .

2) Từ  $C$  kẻ đường thẳng vuông góc  $AC$  cắt  $AH$  tại  $D$ . Tính  $DH$  và  $\widehat{CBD}$ ?

**Bài 56:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $\hat{C} = 30^\circ, BC = 10\text{cm}$ .

1) Tính  $AB, AC$ .

2) Từ  $A$  kẻ  $AM, AN$  lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc  $B$ . chứng minh  $MN \parallel BC$  và  $MN = AB$ .

**Bài 57:** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , có  $AD$  là đường phân giác trong. Biết  $\hat{A} = 120^\circ$  và  $AB = 16\text{cm}$ . Tính  $AD$  và  $BC$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

**Bài 58:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 12\text{cm}, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 40^\circ$ . Tính:

1) Đường cao  $CH$  và cạnh  $AC$ .

2) Diện tích tam giác  $ABC$ .

**Bài 59:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 12\text{cm}; AC = 18\text{cm}$  và  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

**Bài 60:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn, đường cao  $AH$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  lên cạnh  $AB, AC$ .

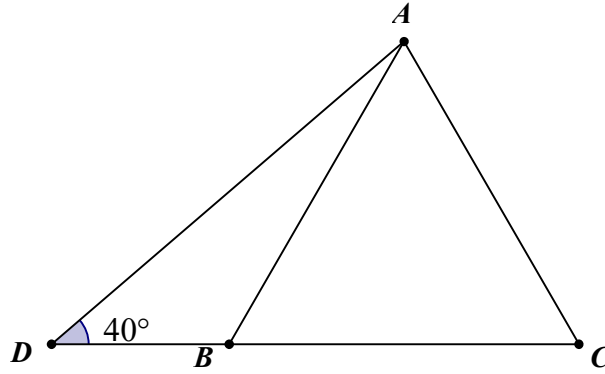
Chứng minh:

1)  $AD \cdot AB = AH \cdot AC$ .

2)  $\triangle ADE \sim \triangle ACB$  và  $\widehat{ADE} = \widehat{AHE}$ .

3)  $DH = AH \cdot \sin \widehat{BAC}$

**Bài 61:** Cho tam giác  $ABC$  có cạnh  $5\text{cm}$  và  $\widehat{ADB} = 40^\circ$  (như hình bên). Hãy tính:  $AD, DB$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



**Bài 62:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết  $BH = 9\text{cm}$ ,  $CH = 4\text{cm}$ .

- 1) Tính độ dài  $AH$ .
- 2) Gọi  $E, F$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  lên cạnh  $AB, AC$ . Chứng minh:  $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ .
- 3) Chứng minh:  $BE = BC \cdot \cos^3 B$

**Bài 63:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ , có  $\hat{B} = 37^\circ$ . Gọi  $I$  là giao điểm của cạnh  $BC$  với đường trung trực của đoạn  $AH$ . Hãy tính  $AB, AC$ , nếu biết  $BI = 20\text{ cm}$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

**Bài 64:** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 60^\circ$ . Chứng minh:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$ .

**Bài 65:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn có đường cao  $BH$  ( $H \in CA$ )

- 1) Chứng minh:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A$ .
- 2) Cho  $\hat{A} = 60^\circ$  và  $AB = 4\text{cm}$ ,  $AC = 6\text{cm}$ . Kẻ đường phân giác  $AD$ , áp dụng công thức tính diện tích tam giác ở câu 1), tính độ dài  $AD$ .

**Bài 66:** Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Chứng minh:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin C$ .

**Bài 67:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\alpha$  là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo, chứng minh rằng:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha.$$

**Bài 68:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn có ba đường cao  $AM, BN, CL$ . Chứng minh:

- 1)  $\triangle ANL \sim \triangle ABC$ .
- 2)  $AN \cdot BL \cdot CM = AB \cdot BC \cdot CA \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .

**Bài 69:** Đường cao  $MQ$  của tam giác  $MNP$  chia cạnh huyền  $NP$  thành hai đoạn  $NQ = 3\text{cm}$ ,  $PQ = 6\text{cm}$ . Hãy tính  $\cot N$  và  $\cot P$ . Tỉ số nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu lần?

**Bài 70:** Cho  $x$  là góc nhọn. Chứng minh:  $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \tan^2 x - \cot^2 x$ .

**Bài 71:** Cho tam giác  $PMN$  vuông tại  $P$ . Chứng minh:  $\tan M \cdot \tan N = \cos^2 M + \cos^2 N$ .

**Bài 72:** Cho góc nhọn  $\alpha$ .

- 1) Chứng minh:  $\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$ .
- 2) Cho  $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ . Tính:  $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$ .

**Bài 73:** Cho  $0^\circ < x < 90^\circ$ . Chứng minh các đẳng thức sau.

1)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$ .

2)  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$ .

3)  $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$ .

4)  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ .

5)  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$ .

6)  $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1}$ .

**Bài 74:** Cho  $0^\circ < x < 90^\circ$ . Chứng minh các đẳng thức sau.

1)  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$ .

2)  $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$ .

3)  $\frac{1}{\tan x + 1} + \frac{1}{\cot x + 1} = 1$ .

4)  $\left( \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} - \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} \right)^2 = 4 \tan^2 x$ .

........**HẾT**........

**CHỦ ĐỀ 5: ĐƯỜNG TRÒN****§1. ĐƯỜNG TRÒN****I. KHÁI NIỆM VỀ ĐƯỜNG TRÒN**

Đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  ( $R > 0$ ), kí hiệu  $(O; R)$ , là hình gồm tất cả các điểm trong mặt phẳng cách  $O$  một khoảng bằng  $R$ .

**Chú ý:**

- Khi không cần chú ý đến bán kính, đường tròn  $(O; R)$  còn được kí hiệu là  $(O)$ .
- Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $M$ . Khi đó:
  - + Nếu  $OM = R$  thì điểm  $M$  nằm trên đường tròn hay  $M$  thuộc đường tròn,
  - + Nếu  $OM < R$  thì điểm  $M$  nằm trong đường tròn,
  - + Nếu  $OM > R$  thì điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn.

**II. TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN**

Đường tròn là hình có tâm đối xứng; tâm đối xứng là tâm của đường tròn. Đường tròn là hình có trục đối xứng. Mọi đường thẳng đi qua tâm của đường tròn đều là trục đối xứng của nó.

**III. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CUNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN.**

Cho hai điểm  $C, D$  cùng thuộc một đường tròn. Đoạn thẳng  $CD$  gọi là dây cung hoặc dây. Đường kính là một dây đi qua tâm.

Trong các dây của một đường tròn, đường kính là dây có độ dài lớn nhất.

**Ví dụ 1:** Cho đường tròn  $(O)$  có  $AB$  là dây cung. Kẻ  $OI \perp AB$  tại  $I$ . Chứng minh  $I$  là trung điểm của  $AB$ .

**Hướng dẫn giải:**

Xét  $\triangle OAB$ , ta có:

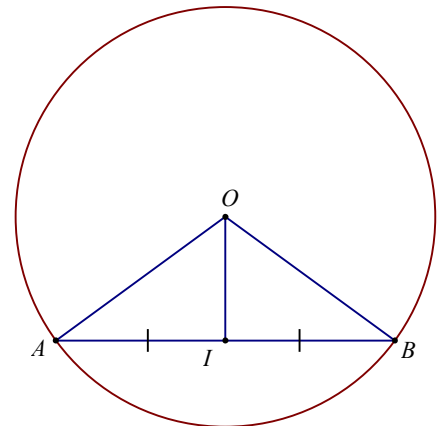
$$OA = OB \text{ (bán kính } (O) \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle OAB \text{ cân tại } O$$

Mà  $OI$  là đường cao ( $OI \perp AB$  tại  $I$ )

Nên  $OI$  là đường trung tuyến

$$\Rightarrow I \text{ là trung điểm của } AB.$$



**Ví dụ 2:** Cho đường tròn  $(O)$  có  $AB$  là dây cung. Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Chứng minh  $OI \perp AB$  tại  $I$ .

**Hướng dẫn giải:**

Xét  $\triangle OAB$ , ta có:  $OA = OB$  (bán kính  $(O)$ )

Suy ra:  $\triangle OAB$  cân tại  $O$

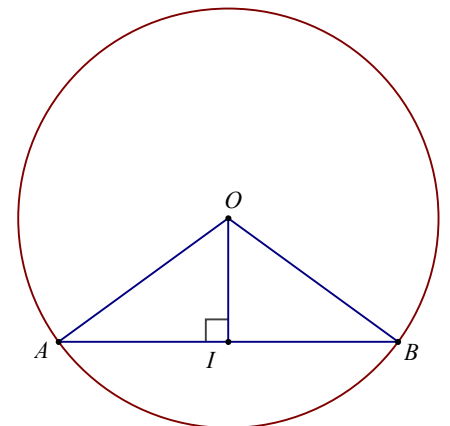
Mà  $OI$  là đường trung tuyến ( $I$  là trung điểm của  $AB$ )

Nên  $OI$  là đường cao.

Suy ra  $OI \perp AB$  tại  $I$ .

**Nhận xét:** Trong một đường tròn

- + Đường kính, bán kính, hay một phần bán kính vuông góc với dây thì đi qua trung điểm của dây cung đó.
- + Và ngược lại đường kính, bán kính hay một phần bán kính đi qua trung điểm của dây không chứa tâm thì vuông góc với dây cung đó.





## VI. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

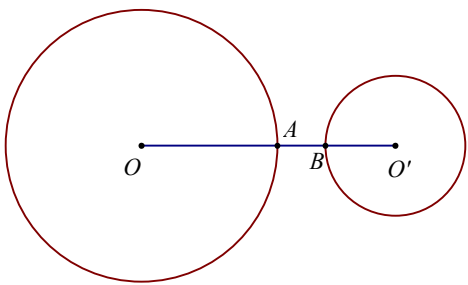
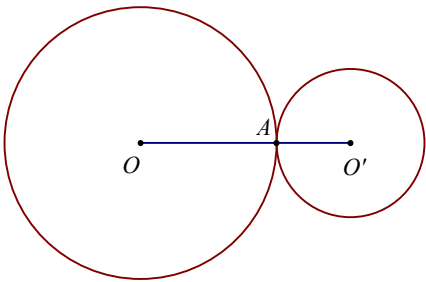
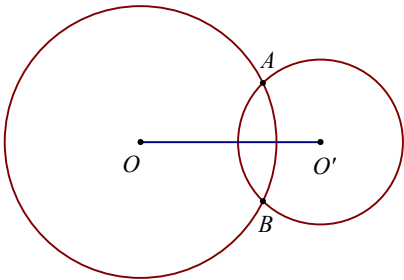
**Định nghĩa:**

- Hai đường tròn không có điểm chung gọi là hai đường tròn không giao nhau. Hai đường tròn không giao nhau có thể ở ngoài nhau hoặc đường tròn này đựng đường tròn kia.
- Hai đường tròn chỉ có một điểm chung gọi là hai đường tròn tiếp xúc nhau. Điểm chung đó gọi là tiếp điểm. Hai đường tròn tiếp xúc có thể tiếp xúc ngoài hoặc tiếp xúc trong.
- Hai đường tròn có đúng hai điểm chung gọi là hai đường tròn cắt nhau. Hai điểm chung gọi là hai giao điểm. Đoạn thẳng nối hai điểm chung được gọi là dây chung.

Ta có các kết quả sau:

**Kiến thức cần nhớ**

- Hai đường tròn ngoài nhau khi khoảng cách hai tâm lớn hơn tổng hai bán kính.
- Hai đường tròn tiếp xúc ngoài khi khoảng cách hai tâm bằng tổng hai bán kính. Lúc đó tiếp điểm thẳng hàng với hai tâm.
- Hai đường tròn cắt nhau khi khoảng cách hai tâm nhỏ hơn tổng lớn hơn hiệu của hai bán kính.
- Hai đường tròn tiếp xúc trong khi khoảng cách hai tâm bằng hiệu hai bán kính. Lúc đó tiếp điểm thẳng hàng với hai tâm.
- Đường tròn này chứa đường tròn kia khi khoảng cách hai tâm nhỏ hơn hiệu của hai bán kính.

Hình ảnh mô tả	Vị trí tương đối của $(O)$ và $(O')$
<p>Hai đường tròn ngoài nhau</p> 	$OO' > R + R'$ khi $(O)$ và $(O')$ ngoài nhau
<p>Hai đường tròn tiếp xúc ngoài</p> 	$OO' = R + R'$ khi $(O)$ và $(O')$ tiếp xúc ngoài
<p>Hai đường tròn cắt nhau</p> 	$ R' - R  < OO' < R + R'$ khi $(O)$ và $(O')$ cắt nhau tại 2 điểm

<p>Hai đường tròn tiếp xúc trong</p>	<p><math>OO' =  R - R' </math> khi <math>(O)</math> và <math>(O')</math> tiếp xúc trong</p>
<p>Hai đường tròn chứa nhau</p>	<p><math>OO' &lt;  R - R' </math> khi <math>(O)</math> và <math>(O')</math> chứa nhau</p>

**Ví dụ 3:** Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn  $(O;R)$  và  $(O';R')$  trong mỗi trường hợp sau:

- a)  $OO' = 20; R = 8; R' = 4$ .  
b)  $OO' = 15; R = 8; R' = 7$ .  
c)  $OO' = 6; R = 9; R' = 4$ .  
d)  $OO' = 0; R = 7; R' = 5$ .

**Hướng dẫn giải:**

- a) Ta có  $20 > 8 + 4$  nên  $OO' > R + R'$ , suy ra hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  ở ngoài nhau.
- b) Ta có  $15 = 8 + 7$  nên  $OO' = R + R'$ , suy ra hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  tiếp xúc ngoài.
- c) Ta có  $9 - 4 < 6 < 9 + 4$  nên  $R - R' < OO' < R + R'$ , suy ra hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  cắt nhau.
- d) Ta có  $0 < 7 - 5$  nên  $OO' < R - R'$ , suy ra đường tròn  $(O; R)$  đựng đường tròn  $(O'; R')$ .

**Chú ý:** Nếu  $OO' = 0$  thì  $O$  trùng với  $O'$ . Hai đường tròn có tâm trùng nhau gọi là hai đường tròn đồng tâm.

### BÀI TẬP VẬN DỤNG:

## BÀI TẬP ĐƯỜNG TRÒN

**Bài 1:** Cho đường tròn  $(O; 3\text{cm})$ , dây  $AB = 2\text{cm}$ . Kẻ  $OI \perp AB$  tại  $I$ . Tính  $OI$ ?

**Bài 2:** Cho đường tròn  $(O; 10\text{cm})$ ,  $I$  là trung điểm của dây  $MN$ . Biết  $OI = 6\text{cm}$ .

- 1) Chứng minh:  $OI \perp MN$  tại  $I$ .
- 2) Tính  $MN$ ?

**Bài 3:** Cho đường tròn  $(O; 5\text{cm})$ , dây  $BC = 6\text{cm}$ . Hãy tính khoảng cách từ tâm đến dây  $BC$ . (Gợi ý: kẻ  $OK \perp BC$  tại  $K$ ).

**Bài 4:** Cho đường tròn  $(O, R)$ , vẽ dây  $DE = R\sqrt{3}$ . Kẻ  $OI \perp DE$  tại  $I$ .

- 1) Dùng tỉ số lượng giác hãy tính  $\widehat{DOI}$ . Từ đó suy ra  $\widehat{DOE}$ .
- 2) Tính  $OI$  theo  $R$ . (GV hướng dẫn học sinh vẽ dây cung có độ dài  $R\sqrt{3}$ ).

**Bài 5:** Cho đường tròn  $(O)$  có bán kính  $OA = 3\text{ cm}$ . Dây  $BC$  của đường tròn vuông góc với  $OA$  tại trung điểm của  $OA$ . Tính độ dài  $BC$ .

**Bài 6:** Bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều có cạnh bằng  $6\text{ cm}$  là bao nhiêu?

**Bài 7:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{DAB} = 90^\circ$  và  $\widehat{BCD} = 90^\circ$ . Gọi  $O$  là trung điểm của  $BD$ .

- 1) Chứng minh:  $OA = OC$ .
- 2) Chứng minh:  $OA = OB = OC = OD$ , từ đó suy ra  $A, B, C, D$  cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 8:** Cho đường tròn  $(O; 5\text{cm})$ , vẽ dây  $AB = 8\text{cm}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Qua  $M$  vẽ  $CD$  là đường kính của  $(O)$  ( $D$  thuộc cung nhỏ  $AB$ ). Tính dây  $AD$  của  $(O)$ .

**Bài 9:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 12\text{cm}$ ,  $BC = 5\text{cm}$ . Chứng minh: bốn điểm  $A, B, C, D$  thuộc cùng một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

**Bài 10:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn có hai đường cao  $BD$  và  $CE$ . Gọi  $O$  là trung điểm của  $BC$ .

- 1) Chứng minh:  $OD = OE$ .
- 2) Bốn điểm  $B, C, D, E$  có nằm trên một đường tròn không? Vì sao?

**Bài 11:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn có hai đường cao  $BD$  và  $CE$ . Gọi  $O$  là trung điểm của  $BC$ .

- 1) Chứng minh: bốn điểm  $B, C, D, E$  cùng thuộc một đường tròn.
- 2) Gọi  $I$  là trung điểm của  $DE$ . Chứng minh:  $OI \perp ED$ .

**Bài 12:** Cho tam giác  $ABC$ , các đường cao  $BD$  và  $CE$ . Chứng minh:

- 1) Bốn điểm  $B, E, D, C$  cùng thuộc một đường tròn.
- 2)  $DE < BC$ .

### BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 13:** Cho đường tròn  $(O, R)$  đường kính  $AB$ . Trên  $(O)$  lấy điểm  $C$  sao cho  $AC = R$ .

- 1) Hãy tính  $BC$  theo  $R$ .
- 2) Tính số đo các góc của tam giác  $ABC$ .

**Bài 14:** Cho tam giác  $ABC$  đều có  $I$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $AB$  và  $AC$ .

- 1) Chứng minh:  $CI$  và  $BK$  là hai đường cao của tam giác  $ABC$ .
- 2) Gọi  $O$  là trung điểm của  $BC$ . So sánh  $OI$  và  $OK$ .
- 3) Chứng minh: bốn điểm  $B, I, K, C$  cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 15:** Cho đường tròn tâm  $O$  có hai dây cung  $AB$  và  $CD$  không cắt nhau. Gọi  $OH$  và  $OK$  lần lượt là khoảng cách từ  $O$  đến dây  $AB$  và dây  $CD$ .

- 1) Chứng minh:  $H, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .
- 2) Giả sử  $OH = OK$ . Chứng minh:  $\triangle AHO = \triangle CKO$  suy ra  $AB = CD$ .

**Bài 16:** Cho đường tròn tâm  $O$  có hai dây  $AB$  và  $CD$  bằng nhau và cắt nhau ở  $I$  nằm bên trong  $(O)$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .

- 1) Tam giác  $AHO$  và tam giác  $CKO$  là tam giác gì?
- 2) So sánh  $OH$  và  $OK$ .
- 3) Chứng minh:  $IH = IK$ .

**Bài 17:** Cho đường tròn tâm  $O$  có hai dây cung  $AB$  và  $CD$  dài bằng nhau và không cắt nhau. Kẻ  $OH \perp AB$  tại  $H$ ,  $OK \perp CD$  tại  $K$ .

- 1) Chứng minh:  $HA = HB = KC = KD$ .
- 2) So sánh  $OH$  và  $OK$ .

**Bài 18:** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , dây  $CD$  không cắt đường kính  $AB$ . Gọi  $H$  và  $K$  theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ  $A$  và  $B$  đến  $CD$ . Chứng minh rằng  $CH = DK$ . (Gợi ý: Kẻ  $OM$  vuông góc với  $CD$ ).

**Bài 19:** Cho đường tròn  $(O)$  có đường kính  $AB$ . Vẽ dây  $CD$  không song song và không cắt  $AB$ . Vẽ  $AH, OI, BK$  lần lượt vuông góc với  $CD$  tại  $H, I, K$ .

- 1) Tứ giác  $AHKB$  là hình gì? Vì sao?
- 2) Chứng minh:  $I$  là trung điểm của  $HK$ .
- 3) So sánh  $CH$  và  $DK$ .

**Bài 20.** Cho đường tròn tâm  $O$  có đường kính  $AB$ . Vẽ dây  $CD$  không song song và không cắt dây  $AB$ . Vẽ  $AH, OI, BK$  lần lượt vuông góc với  $CD$  tại  $H, I, K$ . Chứng minh:

- 1)  $I$  là trung điểm của  $CD$ .
- 2)  $OI = \frac{1}{2}(AH + BK)$ .
- 3)  $CH = DK$ .

**Bài 21.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $M$  nằm bên trong  $(O)$ .

- 1) Hãy nêu cách dựng dây  $AB$  nhận  $M$  làm trung điểm.
- 2) Tính độ dài  $AB$  ở câu 1) biết  $R = 5\text{cm}$ ;  $OM = 1,4\text{cm}$ .

**Bài 22.** Cho đường tròn  $(O)$  có đường kính  $AD = 2R$ . Vẽ cung tâm  $D$  bán kính  $R$ , cung này cắt đường tròn ở  $B$  và  $C$ .

- 1) Tứ giác  $OBDC$  là hình gì? Vì sao?
- 2) Tính số đo các góc  $\widehat{CBD}, \widehat{CBO}, \widehat{OBA}$ .
- 3) Chứng minh:  $\triangle ABC$  đều.

**Bài 23.** Cho đường tròn  $(O; R)$  có đường kính  $AI$ . Lấy  $H$  là trung điểm của  $OI$ . Kẻ dây  $BC \perp OI$  tại  $H$ .

- 1) Tam giác  $OBI$  và tam giác  $OCI$  là tam giác gì? Vì sao?
- 2) Tính  $\widehat{BAI}, \widehat{CAI}$ .
- 3) Chứng minh: tam giác  $ABC$  đều.

**Bài 24.** Cho đường tròn tâm  $O$  có bán kính  $5\text{cm}$  và dây  $AB = 6\text{cm}$ . Kẻ  $OH \perp AB$  tại  $H$ .

- 1) Tính  $HA, HB, OH$ .
- 2) Vẽ dây  $BC$  sao cho  $BC = AB$ ,  $K$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $OK$ .

**Bài 25.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , điểm  $D$  thuộc cạnh  $AB$ , điểm  $E$  thuộc cạnh  $AC$ . Gọi  $M, N, P, Q$  theo thứ tự là trung điểm của  $DE, DC, BC, BE$ . Chứng minh: bốn điểm  $M, N, P, Q$  thuộc cùng một đường tròn.

**Bài 26.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AB$  và dây  $AF$  không cắt đường kính. Gọi  $I$  và  $K$  lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ  $A$  và  $B$  đến  $EF$ . Chứng minh:  $IE = KF$ .

**Bài 27.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AB$ , dây  $CD$ . Các đường vuông góc với  $CD$  tại  $C$  và  $D$  tương ứng cắt  $AB$  ở  $M$  và  $N$ . Chứng minh:  $AM = BN$ .

**Bài 28.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AB$ . Trên  $AB$  lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $AM = BN$ . Qua  $M$  và  $N$ , kẻ các đường thẳng song song với nhau, chúng cắt nửa đường tròn lần lượt ở  $C$  và  $D$ . Chứng minh  $MC$  và  $ND$  vuông góc với  $CD$ .

**Bài 29.** Cho đường tròn  $(O)$ , có hai dây  $CD, EF$  bằng nhau và vuông góc với nhau tại  $I$ ,  $IC = 2\text{cm}$ ,  $ID = 14\text{cm}$ . Tính khoảng cách từ  $O$  đến mỗi dây.

**Bài 30.** Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$  và dây  $CD$ ,  $AB < CD$ . Giao điểm  $K$  của các đường thẳng  $AB, CD$  nằm ngoài đường tròn. Đường tròn  $(O; OK)$  cắt  $KA$  và  $KC$  tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh:  $KM < KN$ .

**Bài 31.** Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $I$  nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng dây  $AB$  vuông góc với  $OI$  tại  $I$  ngắn hơn mọi dây khác đi qua  $I$ .

**Bài 32.** Cho đường tròn  $(O)$ , hai dây  $AB, CD$  bằng nhau và cắt nhau tại điểm  $I$  nằm bên trong đường tròn. Chứng minh:

- 1)  $IO$  là tia phân giác của một trong hai góc tạo bởi hai dây  $AB$  và  $CD$ .
- 2) Điểm  $I$  chia  $AB$ ,  $CD$  thành các đoạn thẳng bằng nhau đôi một.

**Bài 33.** Cho đường tròn  $(O)$  bán kính 25cm. Hai dây  $AB$ ,  $CD$  song song với nhau và có độ dài theo thứ tự bằng 40cm, 48cm. Tính khoảng cách giữa hai dây ấy.

**Bài 34.** Cho đường tròn  $(O)$ , các bán kính  $OA$  và  $OB$ . Trên cung nhỏ  $AB$  lấy các điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $AM = BN$ . Gọi  $C$  là giao điểm của các đường thẳng  $AM$  và  $BN$ . Chứng minh:

- 1)  $OC$  là tia phân giác của  $\widehat{AOB}$ .
- 2)  $OC$  vuông góc với  $AB$ .

**Bài 35.** Cho đường tròn tâm  $O$  bán kính 5cm, dây  $AB = 8$ cm.

- 1) Tính khoảng cách từ tâm đến dây  $AB$ .
- 2) Gọi  $I$  là điểm thuộc dây  $AB$  sao cho  $AI = 1$  cm. Kẻ dây  $CD$  đi qua  $I$  và vuông góc với  $AB$ . Chứng minh:  $CD = AB$ .

**Bài 36.** Cho đường tròn  $(O)$  có bán kính 25 cm. Hai dây  $AB$  và  $CD$  song song với nhau. ( $AB$  và  $CD$  ở khác phía đối với điểm  $O$ ). Gọi  $OH$  là khoảng cách từ  $O$  đến dây  $AB$ ,  $OK$  là khoảng cách từ  $O$  đến dây  $CD$ .

- 1) Chứng minh:  $H, O, K$  thẳng hàng.
- 2) Tính khoảng cách giữa hai dây  $AB$  và  $CD$ , biết  $AB = 40$ cm,  $CD = 32$ cm.

**Bài 37.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AH$  là đường cao.

- 1) Tính  $AH$ ? Biết  $AB = 6$ cm,  $AC = 8$ cm.
- 2) Vẽ đường tròn tâm  $B$ ; bán kính  $BA$ , ( $B$ ) cắt đường thẳng  $BC$  tại  $D$  và  $E$  ( $E$  nằm giữa  $B$  và  $C$ ).

Đường thẳng  $AB$  cắt ( $B$ ) tại  $N$  ( $N$  khác  $A$ ); đường thẳng  $NC$  cắt ( $B$ ) tại  $M$  ( $M$  khác  $N$ ). Chứng minh:  $CE \cdot CD = CM \cdot CN$ .

**Bài 38.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $AH$ . Từ  $H$  hạ vuông góc với  $AB$  và  $AC$  lần lượt tại  $D$  và  $E$ . Đường tròn tâm  $K$  bán kính  $AK$  cắt đường tròn tâm  $O$  đường kính  $BC$  tại  $I$ ,  $AI$  cắt  $BC$  tại  $M$ .

- 1) Chứng minh: 5 điểm  $A, I, D, H, E$  thuộc một đường tròn.
- 2) Chứng minh:  $MK \perp AO$ .
- 3) Chứng minh: 4 điểm  $M, D, K, E$  thẳng hàng.

### BÀI TẬP VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

**Bài 39.** Cho đường tròn bán kính  $R = 15$ cm và  $r = 12$ cm. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn nếu khoảng cách giữa hai tâm bằng:

- |          |          |          |
|----------|----------|----------|
| 1) 2 cm  | 2) 3 cm  | 3) 16 cm |
| 4) 30 cm | 5) 15 cm | 6) 8 cm  |

**Bài 40.** Điền vào chỗ. trong bảng dưới đây bằng một độ dài hoặc một khẳng định thích hợp:

Bán kính của $(O)$	Bán kính của $(O')$	$OO'$	Vị trí tương đối của $(O)$ và $(O')$
9 cm	3 cm	.....	$(O)$ và $(O')$ tiếp xúc ngoài
16 cm	7 cm	.....	$(O)$ và $(O')$ tiếp xúc trong
5 cm	11 cm	17 cm	.....
8 cm	17 cm	6 cm	.....

**Bài 41.** Cho điểm  $A$  thuộc đoạn  $OO'$ . Vẽ  $(O;OA)$  và  $(O';O'A)$ .

- 1) Hãy cho biết vị trí tương đối giữa đường tròn  $(O)$  và đường tròn  $(O')$ .
- 2) Đường thẳng qua  $A$  cắt  $(O)$  và  $(O')$  tại  $C$  và  $D$ . Định dạng  $\triangle OCA$  và  $\triangle O'AD$ .
- 3) Chứng minh:  $\widehat{OCA} = \widehat{O'DA}$  và  $OC \parallel OD'$ .

**Bài 42.** Cho đường tròn tâm  $O$  bán kính 13 cm và đường tròn tâm  $O'$  bán kính 15 cm cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Đường thẳng  $OO'$  cắt  $AB$  tại  $H$ . Giả sử  $AB = 24$  cm.

- 1) Chứng minh:  $OO'$  là đường trung trực của đoạn  $AB$  và tính  $AH, OH, O'H$ .
- 2) Tính  $OO'$  trong hai trường hợp:  $H$  thuộc đoạn  $OO'$  và  $H$  nằm ngoài  $OO'$ .

**Bài 43.** Cho điểm  $A$  thuộc  $(O)$ . Gọi  $O'$  là tâm đường tròn đường kính  $OA$ .

- 1) Hãy cho biết vị trí tương đối của  $(O)$  và  $(O')$ .
- 2) Giả sử  $(O)$  có dây  $AB$  cắt  $(O')$  tại  $C$  khác  $A$ .  $\triangle AOC$  có gì đặc biệt. Chứng minh:  $\widehat{ACO'} = \widehat{ABO}$  và  $O'C \parallel OB$ .
- 3) Chứng minh:  $C$  là trung điểm của  $AB$ .

**Bài 44.** Cho  $(O;4\text{cm})$  và  $(O';6\text{cm})$ ;  $OO' = 12\text{cm}$ . Chứng minh: đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  ở ngoài nhau.

**Bài 45.** Cho điểm  $A$  thuộc đoạn  $OO'$ . Vẽ  $(O;OA)$  và  $(O';O'A)$ . Chứng minh: đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài.

**Bài 46.** Cho  $(O;12\text{ cm})$  và  $(O';5\text{ cm})$ , giả sử  $OO' = 13\text{ cm}$ . Chứng minh: đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau.

**Bài 47.** Cho điểm  $A$  thuộc  $(O)$ . Gọi  $O'$  là tâm đường tròn đường kính  $OA$ . Chứng minh: đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc trong.

**Bài 48.** Cho đoạn  $OO' = 3\text{ cm}$  vẽ  $(O;2\text{ cm})$  và  $(O';7\text{ cm})$ . Chứng minh: đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  đựng nhau.

**Bài 49.** Cho  $(O;3\text{ cm})$  và  $(O';1\text{ cm})$ ;  $OO' = 4\text{ cm}$ . Vẽ bán kính  $OB$  của  $(O)$  song song với bán kính  $O'C$  của  $(O')$  trên cùng nửa mặt phẳng bờ  $OO'$ .

- 1) Hãy cho biết vị trí tương đối giữa đường tròn tâm  $O$  và đường tròn tâm  $O'$ .
- 2) Gọi  $A$  là tiếp điểm của hai đường tròn. Tính  $\widehat{AOB} + \widehat{AOC}$  và cho biết tam giác  $OAB$  là tam giác gì?
- 3) Chứng minh:  $\widehat{OAB} = \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2}$  và  $\widehat{O'AC} = \frac{180^\circ - \widehat{AO'C}}{2}$ .
- 4) Chứng minh: tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .
- 5)  $BC$  cắt  $OO'$  tại  $I$ . Tính tỉ số  $\frac{OO'}{IO}$  và tính  $IO$ . (áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

**Bài 50.** Cho  $(O;13\text{ cm})$  và  $(O';15\text{ cm})$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$  ( $A, B$  ở khác phía với  $OO'$ ). Đường thẳng  $OO'$  cắt  $AB$  tại  $H$ . Giả sử  $AB = 24\text{ cm}$ .

- 1) Chứng minh:  $OO'$  là đường trung trực của  $AB$ ,  $H$  là trung điểm  $AB$
- 2) Tính  $AH, OH, O'H, OO'$ .

**Bài 51.** Cho  $(O;13\text{ cm})$  và  $(O';15\text{ cm})$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$  ( $A, B$  nằm cùng nửa mặt phẳng có bờ là  $OO'$ ). Đường thẳng  $OO'$  cắt  $AB$  tại  $H$ . Giả sử  $AB = 24\text{ cm}$ .

- 3) Chứng minh:  $OO'$  là đường trung trực của  $AB$  và  $H$  là trung điểm  $AB$ .
- 4) Tính  $AH, OH, O'H, OO'$ .

**Bài 52.** Cho  $(O;12\text{ cm})$  và  $(O';5\text{ cm})$ , giả sử  $OO' = 13\text{ cm}$ .



- 1) Cho biết vị trí tương đối giữa hai đường tròn.
- 2) Gọi  $A, B$  là giao điểm của hai đường tròn. Tam giác  $OAO'$  là tam giác gì? (Hướng dẫn: Dùng định lý Pytagore đảo).
- 3) Gọi  $H$  là giao điểm của  $OO'$  và  $AB$ . Chứng minh:  $OO'$  là đường trung trực của  $AB$ . Tính  $AH, AB$ .

**Bài 53.** Cho  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Kẻ đường kính  $AC$  của  $(O)$  và đường kính  $AD$  của  $(O')$ .

- 1) Tam giác  $ABC$  và tam giác  $ABD$  là tam giác gì?
- 2) Chứng minh:  $C, B, D$  thẳng hàng.
- 3) Chứng minh:  $CD = 2OO'$ .

**Bài 54.** Cho  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $OO'$ . Đường thẳng vuông góc với  $AK$  tại  $A$  cắt  $(O)$  tại  $M$  và cắt  $(O')$  tại  $N$ .

- 4) Kẻ  $OI$  vuông góc với  $MN$  tại  $I$ . Chứng minh:  $MA = 2.IA$ .
- 5) Kẻ  $O'H$  vuông góc với  $MN$  tại  $H$ . Chứng minh:  $NA = 2.AH$ .
- 6) Tứ giác  $OIH O'$  là hình gì? Chứng minh:  $A$  là trung điểm của  $IH$
- 7) Chứng minh:  $A$  là trung điểm của  $MN$ .

**Bài 55.** Cho  $(O)$  và  $(O')$  có cùng bán kính cắt nhau tại  $A$  và  $B$  sao cho  $O$  và  $O'$  nằm ở hai bên đường thẳng  $AB$ . Đường thẳng qua  $A$  cắt  $(O)$  tại  $C$  và cắt  $(O')$  tại  $D$  sao cho  $A$  nằm giữa  $C$  và  $D$ .

- 1) Kẻ đường kính  $AM$  của  $(O)$  và đường kính  $AN$  của  $(O')$ . Tam giác  $ABM$  và tam giác  $ABN$  gì? Chứng minh:  $M, B, N$  thẳng hàng.
- 2) Chứng minh tam giác  $AMN$  cân tại  $A$  và  $B$  là trung điểm của  $MN$ .
- 3) Tam giác  $ACM$  và tam giác  $ADN$  là tam giác gì? Chứng minh: tứ giác  $MCDN$  là hình thang.
- 4) Kẻ  $BH \perp CD$  tại  $H$ . Chứng minh:  $H$  là trung điểm của  $CD$ .
- 5) Chứng minh:  $BC = BD$ .

**Bài 56.** Cho  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Một cát tuyến quay quanh  $A$  cắt  $(O)$  tại  $M$  và cắt  $(O')$  tại  $N$ .

- 1) Kẻ  $OI$  vuông góc với  $MN$  tại  $I$ ,  $O'H$  vuông góc với  $MN$  tại  $H$ ,  $OK$  vuông góc với  $O'H$  tại  $K$ . Chứng minh tứ giác  $OIH K$  là hình chữ nhật. So sánh  $OO'$  và  $OK$ . Suy ra  $IH \leq OO'$ .
- 2) Chứng minh:  $I, H$  lần lượt là trung điểm của  $MA, AN$ .
- 3) Chứng minh:  $MN = 2.IH$ .
- 4) Chứng minh:  $MN \leq 2.OO'$ . Xác định vị trí của  $MN$  để cát tuyến  $MN$  dài nhất.

**Bài 57.** Cho điểm  $A$  thuộc  $(O)$ . Gọi  $O'$  là tâm đường tròn đường kính  $OA$ .

- 1) Hãy cho biết vị trí tương đối của  $(O)$  và  $(O')$ .
- 2) Dây  $AB$  của  $(O)$  cắt  $(O')$  tại  $C \neq A$ . Tam giác  $AO'C$  có gì đặc biệt?
- 3) Chứng minh:  $\widehat{ACO'} = \widehat{ABO}$  và  $O'C \parallel OB$ .
- 4) Chứng minh:  $C$  là trung điểm của  $AB$ .

**Bài 58.** Cho  $I$  là trung điểm của  $OA$ . Kẻ  $(O; OA)$  và  $(I; IA)$ .

- 1) Hãy cho biết vị trí tương đối của  $(O)$  và  $(I)$ .
- 2) Một đường thẳng qua  $A$  cắt  $(I)$  tại  $C$  và cắt  $(O)$  tại  $B$ . Chứng minh: tam giác  $OAB$  cân tại  $O$  và tam giác  $OCA$  vuông tại  $C$ .
- 3) Chứng minh:  $C$  là trung điểm của  $AB$ .

**Bài 59.** Cho  $(O)$  có đường kính  $BC$ , điểm  $A$  thuộc  $(O)$  sao cho  $AB < AC$ . Kẻ  $AH$  vuông góc với  $BC$  tại  $H$ .  $D$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $H$ . Kẻ đường tròn tâm  $O'$  đường kính  $DC$  cắt  $AC$  tại  $K$ .

- 1) Chứng minh:  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc trong tại  $C$ .
- 2) Định dạng tam giác  $ABC, CKD$ ? Chứng minh:  $ABDK$  là hình thang.
- 3) Gọi  $M$  là trung điểm  $AK$  và chứng minh:  $\widehat{HKA} + \widehat{O'KC} = 90^\circ$ .
- 4) Chứng minh: tam giác  $O'HK$  cân tại  $K$ .

**Bài 60.** Cho  $(O)$  có đường kính  $BC$  và điểm  $D$  nằm giữa  $B$  và  $O$ . Vẽ  $(O')$  có đường kính  $CD$

- 1) Hãy cho biết vị trí tương đối của  $(O)$  và  $(O')$ .
- 2) Kẻ dây  $AE$  của  $(O)$  vuông góc với  $BD$  tại  $H$  với  $H$  là trung điểm của  $AC$ . Chứng minh:  $H$  là trung điểm của  $AE$  và tứ giác  $ABED$  là hình thoi.
- 3) Gọi  $K$  là giao điểm của  $(O')$  và  $AC$ . Chứng minh:  $\triangle DKC$  vuông tại  $K$  và  $DK \parallel AB$ .
- 4) Chứng minh:  $E, D, K$  thẳng hàng.

.....🎵...HẾT...🎵.....

## §2. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN (3 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI)

### I. Định nghĩa:

#### Kiến thức cần nhớ

Nếu đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$ :

- + Không có điểm chung thì ta nói  $a$  và  $(O)$  không giao nhau.
- + Có duy nhất một điểm chung  $C$  thì ta nói  $a$  tiếp xúc với  $(O)$  tại  $C$ , khi đó  $a$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  và  $C$  là tiếp điểm.
- + Có hai điểm chung  $A, B$  thì ta nói  $a$  cắt  $(O)$ ,  $a$  là cát tuyến của đường tròn  $(O)$  và  $A, B$  là hai giao điểm.

**Nhận xét:** Cho đường tròn  $(O; R)$ . Gọi  $d$  là khoảng cách từ điểm  $O$  đến đường thẳng  $a$

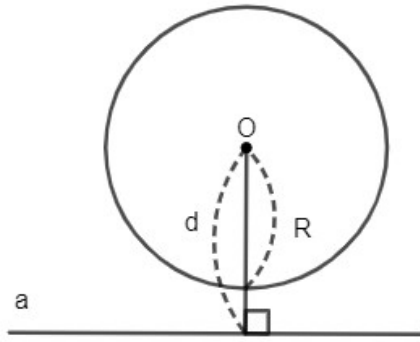
Ta có kết quả sau:

Đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O; R)$  không giao nhau khi  $d > R$ .

Đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O; R)$  tiếp xúc nhau khi  $d = R$ .

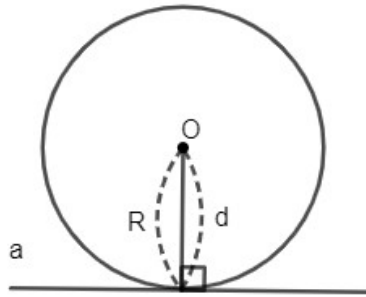
Đường thẳng  $a$  cắt đường tròn  $(O; R)$  khi  $d < R$





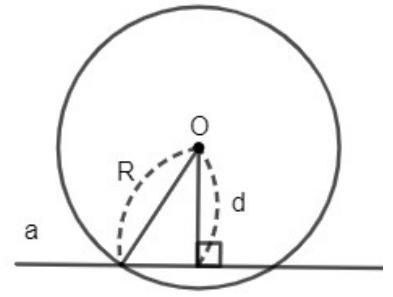
$$d > R$$

a)



$$d = R$$

b)



$$d < R$$

c)

**Ví dụ 1:** Cho đường thẳng  $d$  và một điểm  $O$  cách  $d$  một khoảng  $t = 9cm$ . Xác định vị trí tương đối của  $d$  với các đường tròn sau :

- a) Đường tròn  $(O; 6cm)$       b) Đường tròn  $(O; 9cm)$       c) Đường tròn  $(O; 12cm)$ .

*Hướng dẫn giải*

a) Ta có :  $t = 9cm, R = 6cm$ . Vì  $t > R$  nên  $d$  và đường tròn  $(O; 6cm)$  không giao nhau.

b) Ta có :  $t = 9cm, R = 9cm$ . Vì  $t = R$  nên  $d$  và đường tròn  $(O; 9cm)$  tiếp xúc nhau.

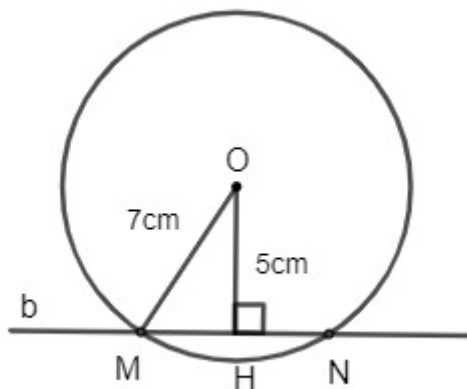
c) Ta có  $t = 9cm, R = 12cm$ . Vì  $t < R$  nên  $d$  cắt đường tròn  $(O; 12cm)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

**Ví dụ 2:** Cho đường thẳng  $b$  và một điểm  $O$  cách  $b$  một khoảng  $5cm$ . Vẽ đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $7cm$

a) Giải thích vì sao  $b$  và  $(O)$  cắt nhau.

b) Gọi  $M$  và  $N$  là các giao điểm của đường thẳng  $b$  và đường tròn  $(O; 7cm)$ . Tính độ dài của dây  $MN$ .

*Hướng dẫn giải*



a) Vẽ  $OH$  vuông góc với  $a$  tại  $H$ .

Ta có:  $OH = 5\text{ cm}$ ,  $R = 7\text{ cm}$ , suy ra  $OH < R$ , suy ra  $b$  cắt  $(O; 7\text{ cm})$  tại hai điểm.

b) Do  $M, N$  thuộc  $(O)$  nên ta có  $OM = ON = R$ , suy ra tam giác  $OMN$  cân tại  $O$  có  $OH$  là đường cao vừa là đường trung tuyến. Do đó,  $H$  là trung điểm của dây cung  $MN$ .

Xét  $\triangle OMH$  vuông tại  $H$ , ta có:

$$MH^2 + OH^2 = OM^2 \text{ (Định lí Pythagore)}$$

$$\text{Suy ra } MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{7^2 - 5^2} = 2\sqrt{6}(\text{ cm}), \text{ suy ra } MN = 2MH = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}(\text{ cm}).$$

## II. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

**Một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn khi nó đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.**

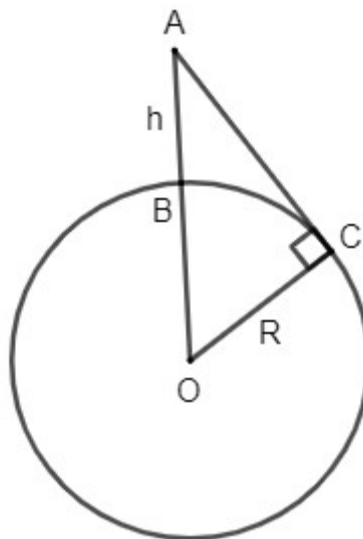
Tiếp tuyến có các tính chất như sau:

Tiếp tuyến của đường tròn vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

Khoảng cách từ tâm của đường tròn đến tiếp tuyến luôn bằng bán kính của đường tròn đó.

**Ví dụ 3:** Một người quan sát đặt mắt ở vị trí  $A$  có độ cao cách mặt nước biển  $h$  là đoạn  $AB$ . Tầm nhìn xa tối đa là đoạn  $AC$  ( $C$  là tiếp điểm của tiếp tuyến vẽ qua  $A$ , xem hình vẽ). Cho biết bán kính Trái Đất là  $OB = OC \approx 6400\text{ km}$  và  $AC = 40\text{ km}$ . Tính độ dài  $AB$ .

Hướng dẫn giải



Xét  $\triangle ACO$  vuông tại  $C$ , ta có:

$$AO^2 = AC^2 + OC^2 \text{ (Định lí Pythagore)}$$

$$OA = \sqrt{AC^2 + OC^2}$$

$$OA = \sqrt{40^2 + 6400^2}(\text{ km})$$

Ta có:  $OA = OB + BA (B \in OA)$

Suy ra:

$$BA = AO - OB$$

$$BA = \sqrt{40^2 + 6400^2} - 6400$$

$$BA \approx 0,125(km)$$

$$BA \approx 125(m)$$

**Bài 2:** Điền vào chỗ ... trong bảng dưới đây bằng một độ dài hoặc một khẳng định thích hợp

Bán kính của $(O)$	Khoảng cách từ $O$ đến đường thẳng $b$	Vị trí tương đối của $(O)$ và đường thẳng $b$
$12\text{ cm}$	$9\text{ cm}$	.....
$7\text{ cm}$	.....	$(O)$ và $b$ tiếp xúc
$5\text{ cm}$	$8\text{ cm}$	.....

**Bài 3.** Cho đường tròn  $(O; 12\text{ cm})$  và điểm  $M$  cách  $O$  là  $8\text{ cm}$ . Hãy xác định vị trí tương đối của  $(O)$  và đường thẳng  $d$  đi qua  $M$  vuông góc  $OM$ .

**Bài 4.** Cho đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  và một điểm  $S$  nằm trong  $(O)$  ( $OS < R$ ). Vẽ đường thẳng  $a$  bất kỳ qua  $S$ . Xác định vị trí tương đối của đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$ .

**Bài 5.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn. Từ điểm  $M$  vẽ tiếp tuyến  $MA$  đến  $(O; R)$  (với  $A$  là tiếp điểm). Đoạn thẳng  $OA$  cắt  $(O; R)$  tại  $K$ . Biết  $MA = 8\text{ cm}$  và  $MK = 4\text{ cm}$

- 1) Tính bán kính  $R$  của đường tròn  $(O)$ .
- 2) Tính chiều dài cạnh  $OM$  của tam giác  $AOM$ .

**Bài 6.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3\text{ cm}$ ,  $AC = 4\text{ cm}$ ,  $BC = 5\text{ cm}$ . Vẽ đường tròn  $(B; BA)$ . Chứng minh:  $AC$  là tiếp tuyến của đường tròn.

**Bài 7.** Cho đường tròn tâm  $O$  có bán kính bằng  $5\text{ cm}$  và điểm  $B$  cách  $O$  một khoảng bằng  $13\text{ cm}$ . Lấy điểm  $A$  thuộc đường tròn  $(O)$  sao cho  $AB = 12\text{ cm}$ .

- 1)  $\triangle OAB$  là tam giác gì?    b) Chứng minh:  $BA$  tiếp xúc với  $(O)$ .

**Bài 8.** Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $S$  nằm ngoài  $(O)$  sao cho  $SA$  và  $SB$  là hai tiếp tuyến ( $A, B$  là hai tiếp điểm) thỏa mãn  $\widehat{ASB} = 60^\circ$ . Biết chu vi tam giác  $SAB$  là  $15\text{ cm}$ .

- 1) Chứng minh: tam giác  $SAB$  đều và tính độ dài dây  $AB$ .
- 2) Tính bán kính của đường tròn  $(O)$ .

**Bài 9.** Từ điểm  $A$  ngoài đường tròn tâm  $O$ , vẽ tiếp tuyến với tiếp điểm  $B$ . Lấy điểm  $C$  thuộc  $(O)$  khác  $B$  sao cho  $AB = AC$ .

- 1) So sánh  $\triangle OAB$  và  $\triangle OAC$ .
- 2) Chứng minh:  $AC$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Bài 10.** Lấy hai điểm  $A$  và  $B$  cùng thuộc đường tròn tâm  $O$  ( $A, O, B$  không thẳng hàng). Tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $A$  cắt tia phân giác  $\widehat{AOB}$  tại  $C$ .

- 1) So sánh  $\triangle OAC$  và  $\triangle OBC$ .

2) Chứng minh: đường thẳng  $BC$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Bài 11.** Từ điểm  $M$  ngoài đường tròn tâm  $O$ , vẽ tiếp tuyến  $MA$  đến  $(O)$  ( $A$  là tiếp điểm). Từ  $A$  vẽ dây cung  $AB$  vuông góc với  $OM$  tại  $H$ .

1) Chứng minh:  $OM$  là tia phân giác của  $\widehat{AOC}$ .

2) So sánh  $\triangle OAM$  và  $\triangle OBM$ . Chứng minh: đường thẳng  $MB$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Bài 12.** Trên tiếp tuyến tại  $A$  của  $(O)$ , lấy điểm  $B$  sao cho  $AB = AO$ . Lấy điểm  $C$  khác  $A$  và thuộc  $(O)$  sao cho  $BA = BC$ .

1) So sánh  $\triangle OBA$  và  $\triangle OBC$ .

2) Chứng minh: tứ giác  $OABC$  là hình vuông và  $BC$  tiếp xúc với  $(O)$ .

**Bài 13.** Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Vẽ dây  $AM$  sao cho  $AM = R$ . Gọi  $K$  là trung điểm của dây  $MB$ . Đường thẳng  $OK$  cắt tiếp tuyến  $Bx$  tại  $E$ . Chứng minh:

1) Tam giác  $MAB$  vuông, từ đó suy ra độ dài của  $MB$  theo  $R$ .

2)  $OE$  là tia phân giác của  $\widehat{MOB}$ .

3)  $EM$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O; R)$ .

**Bài 14.** Cho  $(O)$  và một điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$ . Từ  $A$  vẽ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  của đường tròn  $(O)$  ( $B, C$  là hai tiếp điểm). Gọi  $H$  là giao điểm của  $OA$  và  $BC$ .

1) Chứng minh  $OA \perp BC$  tại  $H$ .

2) Từ  $B$  kẻ đường kính  $BD$  của  $(O)$ , đường thẳng  $AD$  cắt  $(O)$  tại  $E$  ( $E$  khác  $D$ ). Chứng minh:  $AE \cdot AD = AH \cdot AO$ .

**Bài 15.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB > AC$ ). Vẽ đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AB$ ;  $BC$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $H$ .

1) Gọi  $K$  là trung điểm  $AC$ . Chứng minh:  $\triangle ABH$  vuông từ đó suy ra  $KO \perp AH$ .

2) Chứng minh:  $\triangle AOK = \triangle HOK$ . Từ đó suy ra  $KH$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**Bài 16.** Trên tiếp tuyến tại  $A$  của đường tròn  $(O)$  bán kính bằng  $R$ , lấy điểm  $I$  sao cho  $AI = R\sqrt{3}$ . Lấy điểm  $B$  khác  $A$  và thuộc  $(O)$  sao cho  $IB = IA$ .

1) Tính  $\tan \widehat{AIO}$ .

2) Tính  $\widehat{AIB}$  và chứng minh:  $IB$  tiếp xúc với  $(O)$ .

3) Kéo dài  $BO$  cắt tia  $IA$  ở  $K$ . Dùng tỉ số lượng giác, hãy tính các cạnh của  $\triangle IBK$  theo  $R$ .

**Bài 17.** Trên tiếp tuyến tại  $B$  của đường tròn  $(O)$  bán kính bằng  $R$ , lấy điểm  $A$  cách  $O$  một khoảng bằng  $2R$ . Lấy điểm  $C$  khác  $B$  và thuộc  $(O)$  sao cho  $AB = AC$ ,  $BC$  cắt  $OA$  tại  $H$ .

1) Tính  $\sin \widehat{OAB}$  và  $\widehat{BAC}$ .

2) Tính  $BC$  theo  $R$  và chứng minh:  $AC$  tiếp xúc với  $(O)$ .

3) Đường thẳng  $OA$  là gì đối với đoạn thẳng  $BC$ ? Tại sao? Tính  $OH, HA$ .

**Bài 18.** Hai tiếp tuyến tại  $B$  và  $C$  của đường tròn  $(O)$  cắt nhau tại  $A$ . Từ  $O$  kẻ tia vuông góc với  $OB$  cắt  $AC$  tại  $D$ . Chứng minh:  $OB \parallel AB$  và  $DO = DA$ .

**Bài 19.** Cho đường tròn tâm  $O$  bán kính bằng  $R$ . Lấy điểm  $A$  cách  $O$  một khoảng bằng  $2R$ . Từ điểm  $A$  vẽ hai tiếp tuyến với hai tiếp điểm là  $B$  và  $C$ . Đoạn thẳng  $OA$  cắt  $(O)$  tại  $I$ . Đường thẳng qua  $O$  và vuông góc với  $OB$  cắt  $AC$  tại  $K$ . Chứng minh:

- 1)  $OK \parallel AB$  và  $\Delta OAK$  tại  $K$
- 2) Đường thẳng  $KI$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Bài 20:** Hai tiếp tuyến tại  $A$  và  $B$  của đường tròn  $(O)$  cắt nhau ở  $I$ . Đường thẳng qua  $I$  và vuông góc với  $IA$  cắt tia  $OB$  tại  $K$ . Chứng minh:

- 1)  $IK \parallel OA$
- 2)  $\Delta IOK$  cân.

**Bài 21:** Cho đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  đường kính  $AB$ . Từ điểm  $T$  trên tiếp tuyến tại  $A$  của  $(O)$ , vẽ tiếp tuyến thứ hai  $TM$  ( $M$  là tiếp điểm). Gọi  $H$  và  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên  $AB$  và tia  $AT$ . Chứng minh:

- 1)  $HK$  đi qua trung điểm  $I$  của  $AM$ .
- 2) Ba đường thẳng  $OT, HK, AM$  đồng quy.

**Bài 22:** Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$  khác đường kính. Qua  $O$  kẻ đường vuông góc với  $AB$ , cắt tiếp tuyến tại  $A$  của đường tròn ở điểm  $C$ .

- 1) Chứng minh:  $CB$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .
- 2) Cho bán kính của đường tròn bằng  $15\text{ cm}$ ,  $AB = 24\text{ cm}$ . Tính độ dài  $OC$ .

**Bài 23:** Cho đường tròn  $(O)$  có bán kính  $OA = R$ , dây  $BC \perp OA$  tại trung điểm  $M$  của  $OA$ .

- 1) Tứ giác  $OBAC$  là hình gì? Vì sao?
- 2) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại  $B$ , nó cắt đường thẳng  $OA$  tại  $E$ . Tính độ dài  $BE$  theo  $R$ .

**Bài 24:** Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $A$  nằm ngoài  $(O)$ . Kẻ các tiếp tuyến  $AM; AN$  với đường tròn ( $M; N$  là các tiếp điểm).

- 1) Chứng minh  $OA \perp MN$ .
- 2) Vẽ đường kính  $NC$ . Chứng minh:  $MC \parallel AO$ .
- 3) Tính độ dài các cạnh của  $\Delta AMN$  biết  $OM = 3\text{ cm}$ ,  $OA = 5\text{ cm}$ .

**Bài 25:** Cho đường tròn  $(O; 6\text{ cm})$ , điểm  $N$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$  sao cho hai tiếp tuyến  $NA$  và  $NB$  ( $A; B$  là hai tiếp điểm) vuông góc với nhau tại  $N$ .

- 1) Chứng minh tứ giác  $NAOB$  là hình vuông và tính độ dài của  $NA$  và  $NB$ .
- 2) Qua giao điểm  $K$  của đoạn thẳng  $ON$  và đường tròn  $(O)$ , vẽ một tiếp tuyến cắt  $OA; OB$  lần lượt tại  $P$  và  $Q$ . Chứng minh  $K$  là trung điểm của đoạn  $PQ$ .
- 3) Chứng minh:  $\Delta OKP = \Delta OAN$  và tính độ dài của  $PQ$ .

**Bài 26:** Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $M$  nằm ngoài  $(O)$ . Kẻ tiếp tuyến  $MD; ME$  với đường tròn ( $D; E$  là các tiếp điểm). Qua điểm  $I$  thuộc cung nhỏ  $DE$ , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt  $MD$  và  $ME$  theo thứ tự ở  $P$  và  $Q$ . Biết  $MD = 4\text{ cm}$ , tính chu vi  $\Delta MPQ$ .

**Bài 27:** Cho  $\Delta ABC$  nhọn. Vẽ đường tròn  $(O)$  đường kính  $BC$  cắt  $AB; AC$  lần lượt tại  $E$  và  $F$ .  $BE$  và  $CF$  cắt nhau tại  $H$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AH$  và  $BC$ .

- 1) Chứng minh  $AH \perp BC$  tại  $H$ .
- 2) Gọi  $M$  là trung điểm của  $AH$ . Chứng minh:  $\Delta MAF$  cân và  $MF$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Bài 28:** Cho  $(O; 3\text{ cm})$  và điểm  $A$  có  $AO = 5\text{ cm}$ . Kẻ các tiếp tuyến  $AB; AC$  với đường tròn ( $B; C$  là các tiếp điểm). Gọi  $H$  là giao điểm của  $AO$  và  $BC$ .

- 1) Tính độ dài  $OH$ .
- 2) Qua điểm  $M$  bất kỳ thuộc cung nhỏ  $BC$ , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt  $AB$  và  $AC$  theo thứ tự tại  $D$  và  $E$ . Tính chu vi  $\Delta ADE$ .

**Bài 29:** Cho đường tròn  $(O)$  có dây  $AB$ . Bán kính  $OM$  vuông góc với dây  $AB$  ( $M$  thuộc cung nhỏ  $AB$ ). Tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $A$  cắt tia  $OM$  ở  $C$ . Chứng minh:  $AM$  là tia phân giác  $\widehat{BAC}$ .

**Bài 30:** Cho đường tròn  $(O; 2cm)$ , các tiếp tuyến  $AB; AC$  kẻ từ  $A$  đến đường tròn vuông góc với nhau tại  $A$  ( $B; C$  là các tiếp điểm).

1) Tứ giác  $ABOC$  là hình gì? Vì sao?

2) Gọi  $M$  là điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ  $BC$ . Qua  $M$  kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt  $AB$  và  $AC$  theo thứ tự tại  $D$  và  $E$ . Tính chu vi  $\triangle ADE$ .

3) Tính số đo  $\widehat{DOE}$ .

**Bài 31:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Vẽ đường tròn  $(A; AH)$ . Kẻ các tiếp tuyến  $BD; CE$  với đường tròn ( $D; E$  là các tiếp điểm khác  $H$ ). Chứng minh rằng:

1) Ba điểm  $D; A; E$  thẳng hàng.

2)  $DE$  tiếp xúc với đường tròn có đường kính  $BC$ .

**Bài 32:** Chứng minh rằng nếu  $\triangle ABC$  có chu vi  $2p$ , bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  bằng  $r$  thì diện tích  $S$  của tam giác có công thức:  $S = p.r$

**Bài 33:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $AB; AC$  lần lượt tại  $D$  và  $E$ .

1) Tứ giác  $ADOE$  là hình gì? Vì sao?

2) Tính bán kính của  $(O)$  biết  $AB = 3\text{ cm}; AC = 4\text{ cm}$ .

### BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 34:** Cho  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Gọi  $C$  là điểm thuộc đường tròn  $(O)$  sao cho  $AC > BC$

1) Chứng minh:  $\triangle ABC$  vuông.

2) Tiếp tuyến tại  $A$  và  $C$  của  $(O)$  cắt nhau tại  $D$ . Chứng minh  $OD \perp AC$ .

**Bài 35:** Cho đường tròn  $(O; R)$ , dây cung  $AB$  không đi qua tâm. Vẽ các tiếp tuyến tại  $A$  và  $B$  của  $(O)$  cắt nhau tại  $C$ .

1) Chứng minh:  $OD \perp AB$

2) Vẽ đường kính  $AD$  của  $(O)$ . Chứng minh  $BD \parallel OC$ .

**Bài 36:** Cho đường tròn  $(O; R)$  và một điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$  sao cho  $OA = 2R$ . Từ  $A$  kẻ tiếp tuyến  $AB$  của đường tròn  $(O)$  ( $B$  là tiếp điểm).

1) Chứng minh:  $\triangle ABO$  vuông tại  $B$  và tính độ dài  $AB$  theo  $R$ .

2) Từ  $B$  vẽ dây cung  $BC$  của  $(O)$  vuông góc với cạnh  $OA$  tại  $H$ . Chứng minh  $AC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**Bài 37:** Cho  $AB$  là đường kính của  $(O; R)$ . Cho dây  $BC = R$ . Tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $A$  cắt tia  $BC$  ở  $D$ . Tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $C$  cắt  $AD$  ở  $M$ .

1) Tính  $\widehat{ABC}$  và dùng tỉ số lượng giác để tính  $AD$  theo  $R$ .

2) Tính  $\widehat{AOM}$  và tính  $AM$  theo  $R$ .

**Bài 38:** Cho đường tròn  $(O; R)$  có đường kính  $AB$ , vẽ hai tiếp tuyến  $Ax$  và  $By$  với đường tròn  $(O; R)$ . Qua điểm  $M$  trên đường tròn ( $M \neq A; B$ ), vẽ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn  $(O; R)$ , tiếp tuyến này cắt  $Ax$ ;  $By$  lần lượt tại  $C$  và  $D$ .

1) Tính số đo  $\widehat{AMB}$  và chứng minh:  $AC + BD = CD$ .

2) Chứng minh:  $\widehat{COD} = 90^\circ$  và  $AC \cdot BD = R^2$ .

**Bài 39:** Từ điểm  $A$  ở ngoài  $(O; R)$  kẻ tiếp tuyến  $AB$  với đường tròn ( $B$  là tiếp điểm). Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$ , kẻ tiếp tuyến  $IM$  với đường tròn ( $O$ ) ( $M$  là tiếp điểm). Vẽ đường kính  $BC$  của đường tròn ( $O$ ). Chứng minh:

1)  $\triangle AMB$  là tam giác vuông.

2) Chứng minh  $OI \parallel AM$ .

**Bài 40:** Cho  $AC$  là đường kính của  $(O; R)$ . Trên tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $A$  lấy điểm  $I$ . Vẽ dây cung  $CB \parallel OI$ . Chứng minh:

1)  $\widehat{IOA} = \widehat{IOB}$

2) Đường thẳng  $IB$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Bài 41:** Từ điểm  $M$  nằm bên ngoài đường tròn  $(O)$  vẽ hai tiếp tuyến  $MA; MB$  đến  $(O)$  ( $A; B$  là tiếp điểm).  $MO$  cắt  $AB$  tại  $I$ .

1) Chứng minh: Bốn điểm  $M; A; O; B$  cùng thuộc một đường tròn và  $MO \perp AB$  tại  $I$ .

2) Kẻ đường kính  $AC$  của  $(O)$ ;  $MC$  cắt  $(O)$  tại  $H$  ( $H \neq C$ ). Chứng minh:  $\widehat{AHC} = 90^\circ$  và  $\triangle MIH \sim \triangle MCO$ .

3) Kẻ  $BK \perp AC$  tại  $K$ . Gọi  $E; F$  lần lượt là giao điểm của  $MC$  với  $AB$  và  $MC$  với  $BK$ . Chứng minh:  $BE$  là đường phân giác trong của  $\triangle BFM$  và  $EM \cdot CF = EF \cdot CM$ .

**Bài 42:** Từ điểm  $A$  ngoài  $(O; R)$  vẽ hai tiếp tuyến  $AB; AC$  với  $(O)$ ; ( $B; C$  là tiếp điểm). Vẽ dây  $BD$  của  $(O)$  sao cho  $BD \parallel AO$ .

1) Chứng minh:  $OA \perp BC$

2) Chứng minh: ba điểm  $C; O; D$  thẳng hàng.

3)  $AD$  cắt  $(O)$  tại  $E$ ;  $AO$  cắt  $BC$  tại  $H$ . Chứng minh:  $HB$  là tia phân giác của  $\widehat{EHD}$ .

**Bài 43:** Cho  $(O)$  đường kính  $AB$ . Lấy điểm  $H$  trên  $OB$  ( $H \neq O; B$ ). Trên đường thẳng vuông góc với  $OB$  tại  $H$ , lấy  $M$  ngoài  $(O)$ ;  $MA$  cắt  $(O)$  tại  $C$ ;  $MB$  cắt  $(O)$  tại  $D$ .

1) Tính  $\widehat{ACB}; \widehat{ADB}$ .

2)  $MH$  cắt  $BC$  tại  $I$ . Chứng minh:  $A; I; D$  thẳng hàng.

3) Chứng minh:  $M; C; I; D$  cùng nằm trên một đường tròn.

4) Gọi  $E$  là trung điểm của  $MI$ . Chứng minh  $EC$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Bài 44:** Cho điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O; R)$ . Từ  $A$  kẻ tiếp tuyến  $AB$  đến đường tròn  $(O)$ ; ( $B$  là tiếp điểm). Kẻ dây  $BC \perp OA$  tại  $H$ .

1) Chứng minh  $AC$  là tiếp tuyến tại  $C$  của  $(O)$ .

2) Từ  $B$  vẽ đường thẳng song song với  $OA$ ; cắt  $(O)$  tại  $D$  ( $D \neq B$ ). Chứng minh:  $CD$  là đường kính của  $(O)$ .

3) Gọi  $K$  là giao điểm thứ hai của  $AD$  và  $(O)$ . Chứng minh:  $\widehat{ODH} = \widehat{OKH}$ .



**Bài 45:** Cho  $(O; R)$  đường kính  $AB$  và một điểm  $M$  nằm trên  $(O; R)$  với  $MA < MB$  ( $M \neq A; B$ ). Tiếp tuyến tại  $M$  của  $(O; R)$  cắt tiếp tuyến tại  $A$  và  $B$  của  $(O; R)$  theo thứ tự ở  $C$  và  $D$ .

- 1) Chứng minh: tứ giác  $ACDB$  là hình thang vuông.
- 2)  $AD$  cắt  $(O; R)$  tại  $E$ ,  $OD$  cắt  $MB$  tại  $N$ . Chứng minh:  $OD \perp MB$  và  $DE \cdot DA = DN \cdot DO$ .
- 3) Đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $O$  cắt đường thẳng  $AM$  tại  $F$ . Chứng minh: tứ giác  $OFDB$  là hình chữ nhật.
- 4) Cho  $AM = R$ . Tính theo  $R$  diện tích tứ giác  $ACDB$ .

**Bài 46:** Cho  $(O; R)$  và điểm  $A$  nằm ngoài  $(O)$  sao cho  $OA = 2R$ . Từ  $A$  vẽ hai tiếp tuyến  $AB; AC$  đến  $(O)$  với  $B; C$  là hai tiếp điểm. Chứng minh:

- 1)  $AO$  là đường trung trực của đoạn  $BC$ .
- 2)  $\triangle ABC$  đều. Tính  $BC$  theo  $R$ .
- 3) Đường vuông góc với  $OB$  tại  $O$  cắt  $AC$  tại  $E$ . Đường vuông góc với  $OC$  tại  $O$  cắt  $AB$  tại  $F$ . Chứng minh: tứ giác  $AEOF$  là hình thoi và  $EF$  là tiếp tuyến của  $(O; R)$ .

**Bài 47:** Từ điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O; R)$  vẽ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  đến  $(O; R)$  với  $B; C$  là các tiếp điểm. Tia  $AO$  cắt dây  $BC$  tại  $H$ .

- 1) Chứng minh:  $AO$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$  và  $AB^2 = AH \cdot AO$
- 2) Vẽ đường kính  $BD$  của  $(O; R)$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Chứng minh:  $OMCH$  là hình chữ nhật.

**Bài 48:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 5 \text{ cm}$  và  $AC = 4 \text{ cm}$ .

- 1) Giải  $\triangle ABC$ .
- 2) Kẻ đường cao  $AH$  của  $\triangle ABC$ . Chứng minh:  $BC$  là tiếp tuyến của  $(A; AH)$ .
- 3) Từ  $H$  kẻ  $HE \perp AB$  cắt  $(A)$  tại  $I$  và từ  $H$  kẻ  $HF \perp AC$  cắt  $(A)$  tại  $K$ . Chứng minh:  $BI$  là tiếp tuyến của  $(A)$ .
- 4) Chứng minh: ba điểm  $I; A; K$  thẳng hàng.

**Bài 49:** Cho  $(O)$  đường kính  $AB$ . Lấy điểm  $C$  thuộc  $(O)$  với  $C$  không trùng  $A$  và  $B$ . Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AC$ . Vẽ tiếp tuyến tại  $C$  của  $(O)$  cắt tia  $OI$  tại  $D$ .

- 1) Chứng minh:  $OI \parallel BC$ .
- 2) Chứng minh:  $DA$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .
- 3) Vẽ  $CH \perp AB; H \in AB$  và vẽ  $BK \perp CD; K \in CD$ . Chứng minh:  $CK^2 = HA \cdot HB$ .

**Bài 50:** Từ điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O; R)$  vẽ hai tiếp tuyến  $AB; AC$  đến  $(O)$  ( $B; C$  là các tiếp điểm)

- 1) Chứng minh:  $OA \perp BC$  tại  $H$ .
- 2) Vẽ đường thẳng vuông góc với  $OB$  tại  $O$  cắt cạnh  $AC$  tại  $E$ . Chứng minh:  $\triangle OAE$  là tam giác cân.
- 3) Trên tia đối của tia  $BC$  lấy điểm  $Q$ . Vẽ hai tiếp tuyến  $QM; QN$  đến  $(O)$  ( $M; N$  là các tiếp điểm). Chứng minh ba điểm  $A; M; N$  thẳng hàng.

**Bài 51:** Cho điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O; R)$ , vẽ hai tiếp tuyến  $AB; AC$  với đường tròn  $(O)$  ( $B; C$  là các tiếp điểm). Vẽ đường kính  $CD$  của đường tròn  $(O)$ .

- 1) Chứng minh:  $OA \perp BC$  và  $OA \parallel BD$ .
- 2) Gọi  $E$  là giao điểm của  $AD$  và đường tròn  $(O)$  ( $E \neq D$ ),  $H$  là giao điểm của  $OA$  và  $BC$ . Chứng minh:  $AE \cdot AD = AH \cdot AO$ .



- 3) Chứng minh:  $\widehat{AHE} = \widehat{OED}$ .
- 4) Gọi  $r$  là bán kính của đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $BD$  theo  $R, r$ .

**Bài 52:** Cho  $(O)$  và  $A$  là điểm nằm ngoài  $(O)$ . Qua  $A$  vẽ tiếp tuyến  $AB, AC$  với  $(O)$  ( $B, C$  là các tiếp điểm).  $AO$  cắt  $BC$  tại  $M$ .

- 1) Chứng minh:  $AO$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$ .
- 2) Tính  $BM$  biết  $OM = 2 \text{ cm}$  và  $AM = 8 \text{ cm}$ .
- 3) Vẽ đường kính  $BE$ ;  $AE$  cắt  $(O)$  tại  $F$ . Gọi  $G$  là trung điểm của  $EF$ . Đường thẳng  $OG$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $H$ . Chứng minh:  $OM.OA = OG.OH$ .
- 4) Chứng minh:  $EH$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Bài 53:** Từ điểm  $A$  ngoài  $(O)$  vẽ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  với  $(O)$  ( $B, C$  là các tiếp điểm). Qua  $O$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $OC$ ; qua  $A$  vẽ đường thẳng này vuông góc với  $AC$ . Hai đường thẳng này cắt nhau tại  $D$ .

- 1) Chứng minh  $OA$  đi qua trung điểm  $H$  của  $BC$  và năm điểm  $A, D, B, O, C$  cùng nằm trên một đường tròn.
- 2) Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $OD$  và  $AH$ . Chứng minh:  $MN \perp CD$ . (Gợi ý: gọi  $T$  là trung điểm của  $CH$ ).
- 3)  $OD$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Chứng minh:  $OE.OD + AE.AB = OA^2$ . (Gợi ý: vẽ  $MK \perp OA$  tại  $K$ ).

**Bài 54:** Cho nửa đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Gọi  $Ax$  và  $By$  là các tia vuông góc với  $AB$  ( $Ax$  và  $By$  và nửa đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ  $AB$ ). Qua điểm  $M$  thuộc nửa đường tròn ( $M \neq A, B$ ) kẻ tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  cắt  $Ax$  và  $By$  theo thứ tự tại  $C$  và  $D$ . Chứng minh rằng:

- 1)  $CD = AC + BD$ .
- 2) Bốn điểm  $D, M, O, B$  cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.
- 3) Cho  $\widehat{MBA} = 30^\circ$ . Tính diện tích  $\triangle AMB$  theo  $R$ .

**Bài 55:** Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Lấy điểm  $M$  thuộc đường tròn  $(O)$  ( $AM < MB$ ). Tiếp tuyến tại  $A$  của đường tròn  $(O)$  cắt tia  $BM$  tại  $C$ .

- 1) Chứng minh:  $AC^2 = CM.CB$ .
- 2) Tia  $CO$  cắt đường tròn  $(O)$  lần lượt tại hai điểm  $D$  và  $E$  (Điểm  $D$  nằm giữa hai điểm  $C$  và  $O$ ). Chứng minh:  $CM.CB = CD.CE$ .
- 3) Vẽ dây  $AK \perp CO$  tại  $H$ . Chứng minh:  $CK$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**Bài 56:** Cho đường tròn  $(O; R)$  và dây  $AB$  không đi qua tâm  $O$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ .

- 1) Chứng minh:  $OH \perp AB$
- 2) Tiếp tuyến tại  $A$  của đường tròn  $(O)$  cắt tia  $OH$  tại điểm  $K$ . Vẽ đường kính  $AC$ ;  $CK$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $D$ . Chứng minh:  $CD.CK = 4R^2$ .
- 3) Chứng minh:  $AK = \frac{AD^2}{2R \sin C \cos C}$ .
- 4) Tiếp tuyến tại  $C$  của đường tròn  $(O)$  cắt đường thẳng  $AB$  tại  $E$ .  $OE$  cắt  $CK$  tại điểm  $I$ . Chứng minh:  $OH.OK = OI.OE$ .

**Bài 57:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$  cắt  $BC$  tại  $D$ .

- 1) Chứng minh:  $AC^2 = CD.BC$ .

2) Gọi I là trung điểm của BD. Tiếp tuyến tại D cắt AC ở M và cắt OI tại N. Chứng minh: NB là tiếp tuyến của (O).

3) OM cắt AD ở K. Chứng minh:  $OK \cdot OM = OL \cdot ON$ .

4) Gọi Q là giao điểm của MB và AN. Chứng minh:  $DQ \perp AB$

**Bài 58:** Cho đường tròn tâm O có đường kính BC và có bán kính bằng R. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng BC ở I. Chứng minh:

1)  $IB \cdot IC = IO^2 - R^2$

2)  $IB \cdot IB = IA^2$

**Bài 59:** Tiếp tuyến tại M của (O; R) cắt dây BC kéo dài tại A ngoài (O). Vẽ OH vuông góc với BC tại H.

1) Chứng minh:  $AB + AC = 2AH$

2) Chứng minh:  $AB + AC \geq 2AM$

**Bài 60:** Trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB, lấy điểm M. Vẽ đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại H. Vẽ tiếp tuyến AC và BD của (M) với C và D là hai tiếp điểm.

1) Tìm hai góc so le trong bằng nhau để chứng minh  $OM \parallel BD$ ;  $OM \parallel AC$ .

2) Chứng minh C, M, D thẳng hàng và đường thẳng CD tiếp xúc với (O).

3) Giả sử  $CD = 2a$ . Tính  $AC \cdot BD$  theo a.

**Bài 61:** Cho AC là đường kính của đường tròn tâm O. Trên tiếp tuyến tại A của (O), lấy điểm I sao cho IA lớn hơn bán kính của (O), Từ I vẽ tiếp tuyến thứ hai với tiếp điểm B.

1) Chứng minh:  $BC \parallel OI$

2) Đường thẳng vuông góc với AC tại O cắt tia CB ở H. Chứng minh:  $IH \parallel AC$ .

3) Tia OB cắt tia IH ở K. Chứng minh:  $\Delta IOK$  cân ở K.

**Bài 62:** Cho đường tròn tâm O có dây cung AB sao cho  $\widehat{AOB}$  tù. Tiếp tuyến của (O) tại A và dây AB lần lượt cắt tia phân giác của  $\widehat{AOB}$  ở C và K. Vẽ BI vuông góc với AC ở I và cắt OC ở H. Chứng minh:

1) H là trực tâm của  $\Delta ABC$ .

2)  $AH \parallel OB$ .

3) Tứ giác AHBO là hình thoi.

**Bài 63:** Cho tam giác ABC nhọn, đường tròn tâm O có đường kính BC cắt AB, AC lần lượt ở D và E. Gọi H là giao điểm của BE và DC, K là giao điểm của AH và BC.

1) Tính số đo  $\widehat{BDC}$  và  $\widehat{BEC}$ .

2) Chứng minh: Bốn điểm A, D, H, E cùng thuộc một đường tròn, xác định tâm I của đường tròn.

3) Gọi M là trung điểm của HC. Chứng minh:  $IM \perp OM$ .

4) Chứng minh: tiếp tuyến tại D và E của đường tròn (O) cắt nhau tại I.

**Bài 64:** Cho (O; R) đường kính  $BD = 2R$ , trên tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) lấy điểm A sao cho  $BA = R$ . Từ A vẽ tiếp tuyến AC của (O) (C là tiếp điểm và C khác B).

1) Tính độ dài OA theo R và chứng minh:  $OA \parallel DC$ .

2) Gọi I là giao điểm của OA và BC. Chứng minh: bốn điểm A, B, O, C thuộc cùng một đường tròn và DC là tiếp tuyến của đường tròn tâm I bán kính IA.

.....🎵...HẾT...🎵.....

**§3. GÓC Ở TÂM VÀ GÓC NỘI TIẾP****I. GÓC Ở TÂM**

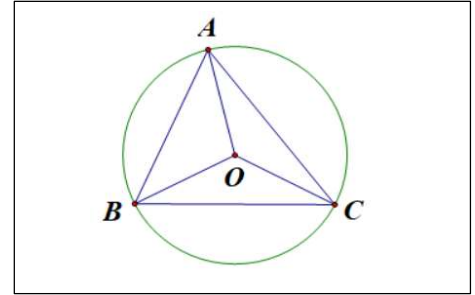
**Góc ở tâm:** là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên đường tròn (O).

Hãy chỉ ra các góc ở tâm của đường tròn.

Hướng dẫn giải:

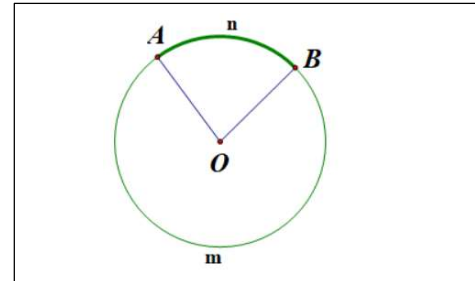
Trong Hình, đường tròn (O) có các góc ở tâm là  $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COA}$

**II. CUNG, SỐ ĐO CUNG**

Mỗi phần đường tròn giới hạn bởi hai điểm A, B trên đường tròn gọi là một cung AB, kí hiệu là  $\widehat{AB}$ .

a) Trong Hình trên, ta nói góc ở tâm  $\widehat{AOB}$  chắn cung AnB

hay cung AnB bị chắn bởi góc ở tâm  $\widehat{AOB}$ .



Khi  $0^\circ < \widehat{AOB} < 180^\circ$ , để phân biệt hai cung có chung các mút là A và B;  $\widehat{AnB}$  là cung nhỏ

và  $\widehat{AmB}$  là cung lớn.

Khi AB là đường kính thì gọi cung AB là cung nửa đường tròn.

b) Khi nói "góc ở tâm  $\widehat{AOB}$  chắn cung AB" thì ta hiểu là góc ở tâm chắn cung nhỏ AB.

c) Nếu EF là đường kính thì mỗi cung EF là một nửa đường tròn. Góc bẹt  $\widehat{EOF}$  chắn nửa đường tròn.

Một cách tổng quát, ta có:

**♦ Kiến thức cần nhớ**

+ Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó. Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa  $360^\circ$  và số đo của cung nhỏ có chung hai đầu mút với cung lớn.

+ Số đo của cung nửa đường tròn bằng  $180^\circ$

+ Số đo của cung AB được kí hiệu là số  $\widehat{AB}$

**Ví dụ 2:** Tính số đo các cung  $\widehat{MaN}$  và  $\widehat{MbN}$  trong hình bên.

**Hướng dẫn giải:**

Trong hình ta có:  $\widehat{MON}$  là góc ở tâm chắn cung MaN

nên số  $\widehat{MaN} = \widehat{MON}$

$$\text{sđ } \widehat{MaN} = 120^\circ$$

$$\text{sđ } \widehat{MbN} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

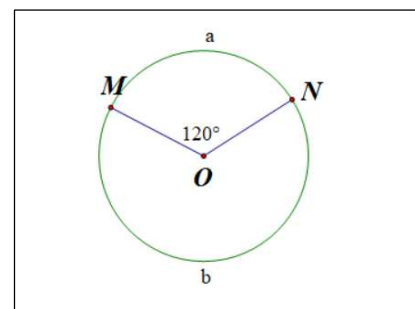
♦ Chú ý:

a) Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn  $180^\circ$ , cung lớn có số đo lớn hơn  $180^\circ$ . Cung nửa đường tròn có số đo  $180^\circ$ .

b) Khi hai mút của cung trùng nhau, ta có cung không với số đo  $0^\circ$  và cung cả đường tròn có số đo  $360^\circ$ .

c) Một cung có số đo  $n^\circ$  thường được gọi tắt là cung  $n^\circ$

d) Trong một đường tròn, hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

**II. GÓC NỘI TIẾP****\* Kiến thức cần nhớ**

**Góc nội tiếp** là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

**Ví dụ 3:** Cho tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên đường tròn (O).

Hãy chỉ ra các góc nội tiếp của đường tròn và nó chắn cung nào?

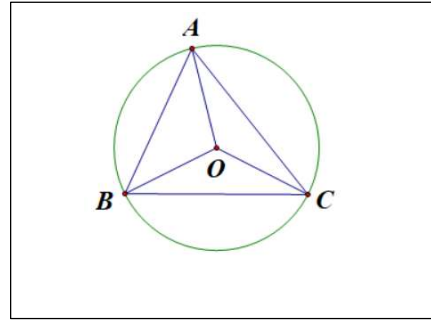
Hướng dẫn giải:

Trong Hình, đường tròn (O) có:

$\widehat{ACB}$  là góc nội tiếp chắn  $\widehat{AB}$ .

$\widehat{CAB}$  là góc nội tiếp chắn  $\widehat{CB}$ .

$\widehat{ABC}$  là góc nội tiếp chắn  $\widehat{AC}$ .



### III. SỐ ĐO GÓC NỘI TIẾP

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Chú ý: Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp nhỏ hơn hoặc bằng  $90^\circ$  có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

**Ví dụ 4:** Trên đường tròn tâm O đường kính AB lấy điểm C sao cho  $\widehat{AOC} = 70^\circ$ . Hãy tính các góc của tam giác ABC

Hướng dẫn giải:

Xét (O), ta có:  $\widehat{ACB}$  là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (AB là đường kính (O)). Suy ra  $\widehat{ACB} = 90^\circ$ .

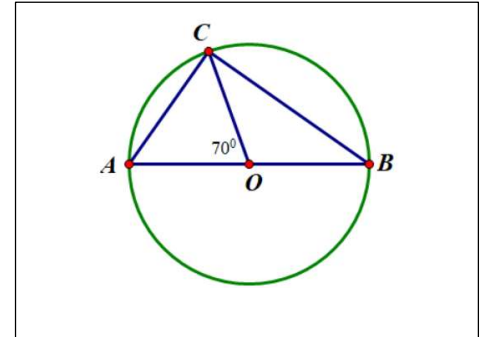
Xét (O), ta có:  $\widehat{ABC}$  là góc nội tiếp chắn  $\widehat{AC}$ . Suy ra:

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ$$

Ta có  $\widehat{CAB} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ$  (Tổng ba góc trong tam giác ABC)

$$\widehat{CAB} + 90^\circ + 70^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{CAB} = 65^\circ$$



### BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1:** Cho AB là dây cung không chứa tâm của đường tròn tâm O. Vẽ dây AC vuông góc với AB. Chứng minh:

$\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$  và suy ra B, O, C thẳng hàng.

**Bài 2:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AC, có bán kính OB vuông góc với AC. Điểm M thuộc cung AB.

Tính  $\widehat{BMC}$ ,  $\widehat{AMB}$

**Bài 3:** Cho điểm K nằm trên đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của OK. Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với OK, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm A và B.

1) Chứng minh: tam giác OAK đều.

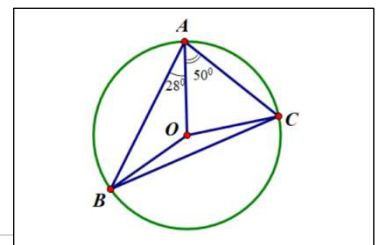
2) Tính số đo của các cung  $\widehat{AKB}$  và  $\widehat{ABK}$ .

**Bài 4:** Cho tam giác ABC cân ở A và có ba đỉnh nằm trên một đường tròn. Lấy D thuộc cung BC không chứa A.

Chứng minh:  $\widehat{ADC} = \widehat{ACB}$ .

**Bài 5:** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng

$\widehat{OAB} = 28^\circ$ ,  $\widehat{OAC} = 50^\circ$  như Hình bên. Hãy tính số đo của các góc ABC và ACB.



**Bài 6:** Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH ( $H \in BC$ ) và có ba đỉnh nằm trên một đường tròn (O) và  $AB < AC$ . Vẽ đường kính AK của (O).

1) Chứng minh: tam giác ACK vuông.

2) Chứng minh:  $\widehat{OAC} = \widehat{BAH}$ .

**Bài 7:** Cho hai đường tròn tâm O và O' cùng có bán kính bằng R, cắt nhau tại A và B sao cho O và O' nằm ở hai bên đường thẳng AB. Cắt tuyến đi qua A cắt (O) và (O') lần lượt tại C và D (A nằm giữa C và D). Tứ giác AOBO là hình gì? Chứng minh:  $BC = BD$

**Bài 8:** Cho  $\widehat{BAC} = 30^\circ$  nội tiếp đường tròn O (B và C thuộc (O)). Vẽ đường tròn tâm I đi qua O sao cho hai điểm B và C nằm ở bên trong (I). Hai tia OB và OC cắt (I) lần lượt tại E và F. Tính  $\widehat{EIF}$

**Bài 9:** Cho AB là đường kính của đường tròn tâm O, bán kính bằng R. Vẽ hai dây cung AD và BC cắt nhau tại E. Vẽ EF vuông góc với AB ở F. Chứng minh:  $\triangle AFE$  đồng dạng với  $\triangle ADB$ ;  $\triangle BFE$  đồng dạng với  $\triangle BCA$

**Bài 10:** Cho hai đường tròn tâm O và O' cắt nhau ở A và B. Vẽ AC và AD lần lượt là hai đường kính của (O) và (O'). Chứng minh: C, B, D thẳng hàng.

**Bài 11:** Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Đường vuông góc với AB kẻ qua B cắt (O) và (O') lần lượt tại các điểm C, D. Lấy N trên cung nhỏ BC của đường tròn (O). Gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng NB với đường tròn (O') là M. Chứng minh:

1)  $AC = AD$

2)  $\triangle AMN$  cân tại A.

**Bài 12:** Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD. Đường tròn đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại F và E. Chứng minh AD, BE và CF đồng quy.

**Bài 13:** Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên (O) lấy điểm C sao cho  $\widehat{CAB} = 50^\circ$ . Trên nửa đường tròn tâm O không chứa điểm C, lấy điểm M bất kì.

1) Chứng minh: tam giác ABC vuông.

2) Tính  $\widehat{CMA}$

**Bài 14:** Cho đường tròn tâm O, đường kính BC. Trên (O) lấy điểm A sao cho  $\widehat{ACB} = 30^\circ$ . Gọi E là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Trên nửa đường tròn tâm O không chứa điểm A, lấy điểm T bất kì.

1) Tính  $\widehat{ABC}$

2) Tính  $\widehat{ETC}$ .

**Bài 15:** Cho tam giác ABC nhọn có ba đỉnh nằm trên (O; R), có hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H. AD cắt (O) tại K. Chứng minh:

1)  $BH \cdot BE = BD \cdot BC$

2)  $DH = DK$ .

**Bài 16:** Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính MN. Kẻ  $Nx$  là tiếp tuyến tại N của (O) và lấy điểm E thuộc nửa đường tròn. Gọi D là giao điểm của tia ME và  $Nx$ . Lấy điểm F thuộc cung nhỏ NE của (O). Gọi C là giao điểm của tia MF và  $Nx$ . Chứng minh:

1)  $ME \cdot MD = 4R^2$

2)  $\widehat{MFE} = \widehat{CDE}$

**Bài 17:** Cho AB và CD dây song song của một đường tròn (tia AB và tia DC cùng chiều). Chứng minh:

sđ  $\widehat{AC} = \text{sđ } \widehat{BD}$ . Tứ giác ABCD là hình gì?

**Bài 18:** Cho AB là đường kính của đường tròn O. CD là dây song song với AB (tia CD cùng chiều với tia AB). Chứng minh:

1)  $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$

2)  $\widehat{ACD} - \widehat{ADC} = 90^\circ$

**Bài 19:** Vẽ đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác nhọn ABC và vẽ đường kính AD. AH là đường cao của tam giác. Chứng minh:  $\triangle AHB$  đồng dạng với  $\triangle ACD$ .

**Bài 20:** Cho AB là dây cung của đường tròn tâm O. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D. Bán kính OC vuông góc với AB (C thuộc cung lớn AB). CD cắt (O) tại E. Chứng minh:

$$1) \widehat{CEA} = \widehat{CAB}.$$

$$2) CA^2 = CE.CD$$

**Bài 21:** Cho tam giác ABC nhọn có ba đỉnh nằm trên đường tròn tâm O. Gọi OM là bán kính vuông góc cạnh BC (M thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh: AM là tia phân giác của  $\widehat{BAC}$

**Bài 22:** Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn. Vẽ MH vuông góc với tiếp tuyến đó tại H. So sánh  $\widehat{MAH}$  và  $\widehat{MBA}$ , chứng minh:  $MH.AB = MA^2$ .

**Bài 23:** Trên nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, có điểm C di động. Tia phân giác của  $\widehat{BAC}$  cắt (O) tại D.

1) Chứng minh: OD vuông góc BC

2) Tia AC cắt tia BD tại K. Tam giác ABK có gì đặc biệt? Chứng minh: khi C di động thì K chạy trên một đường cố định.

**Bài 24:** Cho tam giác ABC nhọn có ba đỉnh nằm trên đường tròn tâm O và có hai đường cao BE và CF lần lượt cắt (O) ở I và K. Chứng minh:

$$1) \widehat{ABE} = \widehat{ACF}$$

$$2) OA \text{ vuông góc với } IK.$$

**Bài 25:** Cho tam giác ABC nhọn có ba đỉnh nằm trên đường tròn tâm O. Đường cao AD của tam giác cắt (O) ở E. Vẽ đường kính AF của đường tròn. Chứng minh:  $EF \parallel BC$  và  $\widehat{BAD} = \widehat{CAF}$

**Bài 26:** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O và có đường cao AD. Gọi H là trực tâm của tam giác. Tia AD cắt (O) ở E. Chứng minh:

$$1) \widehat{DBE} = \widehat{DAC} = \widehat{DBH}$$

2) Điểm H và E đối xứng nhau qua đường thẳng BC

**Bài 27:** Cho đường tròn tâm O có dây AB. Gọi M là trung điểm của dây AB. Vẽ dây CD bất kỳ đi qua M (CD không trùng với AB). Chứng minh dây CD dài hơn dây AB.

**Bài 28:** Cho điểm I bên trong đường tròn tâm O. Cho hai dây cung AC và BD cùng đi qua I sao cho OI là tia phân giác của  $\widehat{AIB}$ . Vẽ OH vuông góc với AC ở H, OK vuông góc với BD ở K.

1) Chứng minh:  $AC = BD$ .

2) Chứng minh:  $s\widehat{AD} = s\widehat{BC}$  và tứ giác ABCD là hình thang cân.

3) Chứng minh: OI vuông góc với AB.

### C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

**Bài 29:** Cho AB là đường kính của đường tròn tâm O bán kính R. Vẽ hai dây cung AD và BC cắt nhau tại E. Vẽ EF vuông góc với AB ở F. Chứng minh:

1)  $AE.AD = AF.AB$  và phát biểu kết quả tương tự.

$$2) AE.AD + BE.BC = 4R^2$$

**Bài 30:** Cho tam giác ABC cân ở A và có ba đỉnh nằm trên 1 đường tròn. Lấy D thuộc cung BC không chứa A. AD cắt BC tại E. Chứng minh:  $AB^2 = AD.AE$ .

**Bài 31:** Trên nửa đường tròn tâm O bán kính R, đường kính AB, lấy điểm M sao cho  $AM = MO$ . Vẽ tiếp tuyến tại A. Vẽ MH vuông góc với tiếp tuyến đó tại H.

1) Chứng minh:  $AM^2 = MH.AB$ .

2) Tính MH và AH theo R.

**Bài 32:** Tam giác ABC nhọn có đường cao AH và có ba đỉnh nằm trên đường tròn bán kính R. AD là đường kính của đường tròn. Chứng minh:

$$1) 2R.AH = AB.AC$$

$$2) S_{\triangle ABC} = \frac{AB.AC.BC}{4R}$$



- Bài 33:** Cho điểm  $A$  thuộc đường tròn tâm  $O$ . Trên tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $A$ , lấy điểm  $B$  khác  $A$ . Đoạn thẳng  $OB$  cắt  $(O)$  tại  $M$ . Vẽ  $AC$  vuông góc với  $OB$  tại  $C$ . Chứng minh:  $\triangle OAM$  cân và  $AM$  là đường phân giác của tam giác  $ABC$ .
- Bài 34:** Hai tiếp tuyến tại  $B$  và  $C$  của  $(O)$  cắt nhau tại  $A$ .  $OA$  cắt  $BC$  ở  $H$  và cung nhỏ  $BC$  ở  $I$ . Chứng minh:
- 1)  $\widehat{dIB} = \widehat{dIC}$  và  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .
  - 2)  $IA \cdot BC = 2IH \cdot AB$  (Gợi ý: Hệ quả định lý Thales về tính chất đường phân giác trong  $\triangle ABH$ ).
- Bài 35:** Cho tam giác  $BCD$  tù tại đỉnh  $B$  và có đường cao  $BA$ . Tia  $CB$  cắt đường tròn  $(ABD)$  tại  $I$ . Tia  $DB$  cắt đường tròn  $(ABC)$  tại  $K$ . Chứng minh:
- 1)  $\widehat{CAK} = \widehat{DAI}$ .
  - 2)  $AB$  là tia phân giác của  $\widehat{IAK}$ .
- Bài 36:** Cho đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $D$  là trung điểm của đoạn thẳng  $OA$ , qua  $D$  kẻ dây cung  $MN$  vuông góc với  $OA$ . Gọi  $K$  là điểm tùy ý trên cung nhỏ  $BM$  ( $K$  không trùng với  $B$  và  $M$ ),  $H$  là giao điểm của  $AK$  và  $MN$ .
- 1) Chứng minh:  $\triangle OAM$  đều và tính  $\widehat{MBA}$ .
  - 2) Chứng minh:  $\triangle ADH \sim \triangle AKB$  và  $AK \cdot AH = R^2$ .
  - 3) Trên đoạn  $KN$  lấy điểm  $I$  sao cho  $KI = KM$ . Chứng minh:  $\widehat{NMI} = \widehat{KMB}$  và  $NI = KB$ .
- Bài 37:** Cho tam giác  $ABC$  có  $I$  là tâm đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác  $ABC$ . Gọi  $O$  là tâm của đường tròn  $(BIC)$ . Chứng minh:  $\widehat{IOC} = \widehat{ABC}$  và  $\widehat{IOB} = \widehat{ACB}$ .
- Bài 38:** Cho điểm  $M$  thuộc đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Vẽ tiếp tuyến  $Ax$  của đường tròn tâm  $O$  tại  $A$  (sao cho  $\widehat{xAM} < 90^\circ$ ).
- 1) Chứng minh:  $\widehat{xAM} = \widehat{ABM}$ .
  - 2) Lấy  $N$  thuộc cung lớn  $AM$ . Chứng minh:  $\widehat{MNA} = \widehat{xAm}$ .
- Bài 39:** Cho  $AM$  là dây cung của đường tròn tâm  $O$ . Vẽ tiếp tuyến  $Ax$  của đường tròn tâm  $O$  tại  $A$  sao cho  $\widehat{xAM} < 90^\circ$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $O$  lên  $AM$ .
- 1) Chứng minh:  $\widehat{AOH} = \widehat{xAM} = \frac{1}{2} \widehat{MOA}$
  - 2) Lấy điểm  $N$  thuộc cung lớn  $AM$ . Chứng minh:  $\widehat{MNA} = \widehat{xAm}$ .
- Bài 40:** Cho tam giác  $ABM$  có ba đỉnh nằm trên đường tròn tâm  $O$ . Tia phân giác của  $\widehat{AMB}$  cắt  $AB$  ở  $C$ , cắt  $(O)$  ở  $D$ . Chứng minh:  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ .
- Bài 41:** Cho tam giác  $ABD$  có  $AB < AD$ . Đường trung trực của đoạn  $BD$  cắt tia phân giác của  $\widehat{BAD}$  tại  $C$ . Chứng minh điểm  $C$  thuộc đường tròn  $(ABD)$ . (Hướng dẫn: tia phân giác của  $\widehat{BAD}$  cắt đường tròn  $(ABD)$  tại  $C$ . Chứng minh:  $C_1$  cách đều hai điểm  $B$  và  $D$ ;  $C_1$  trùng với  $C$ ).
- Bài 42:** Cho tam giác  $ABC$  có ba đỉnh nằm trên đường tròn tâm  $O$ . Tia phân giác của  $\widehat{BAC}$  cắt  $(O)$  tại  $M$ . Tia phân giác của  $\widehat{ABC}$  cắt  $(O)$  tại  $M$ . Tia phân giác của  $\widehat{ABC}$  cắt  $AM$  tại  $I$ .
- 1) Chứng minh:  $\widehat{IAB} = \widehat{MBC}$

2)  $\widehat{MIB}$  là góc ngoài của tam giác nào? Chứng minh  $\triangle MBI$  cân ở  $M$ .

**Bài 43:** Cho tam giác  $ABC$  có 3 đỉnh nằm trên đường tròn tâm  $(O)$ . Trên cung  $BC$  không chứa  $A$ , lấy điểm chính giữa  $M$ . Trên đoạn thẳng  $AM$  lấy điểm  $I$  sao cho  $MI = MB$ . Chứng minh:

1)  $\widehat{IAB} = \widehat{MBC}$

2)  $\widehat{IBA} = \widehat{IBC}$ . Điểm  $I$  là gì của  $\triangle ABC$ .

**Bài 44:** Hai đường tròn tâm  $O$  và  $O'$  cắt nhau ở  $A$  và  $B$ . Cắt tuyến qua  $B$  cắt  $(O)$  ở  $C$ , cắt  $(O')$  ở  $D$  sao cho  $B$  nằm giữa  $C$  và  $D$ . Chứng minh:  $\triangle AOO'$  đồng dạng với  $\triangle ACD$ . (Gợi ý:  $\widehat{ADO'} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$  do  $\triangle AOO' = \triangle BOO'$ ).

**Bài 45:** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ . Lấy  $D$  và  $E$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $BD = BA$ ,  $CE = CA$ .

1) Chứng minh:  $\widehat{BAE} = \frac{1}{2}\widehat{C}$  và  $\widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{B}$ .

2) Tính  $\widehat{DAE}$ .

**Bài 46:** Cho  $BC$  là dây cung cố định của  $(O)$  cố định. Gọi  $I$  là điểm chính giữa của cung lớn  $BC$ . Vẽ đường tròn tâm  $I$  bán kính bằng  $IB = IC$ . Điểm  $A$  di động trên cung lớn  $BC$  của  $(O)$ . Tia  $BA$  cắt  $(I)$  tại  $D$ .

1) Chứng minh:  $AC = AD$  (Gợi ý:  $\widehat{BAC} = 2\widehat{BDC}$ ).

2) Tìm vị trí của  $A$  trên  $\widehat{BC}$  để chi vi  $\triangle ABC$  lớn nhất.

**Bài 47:** Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ , có bán kính  $OC$  vuông góc với  $AB$ . Lấy điểm  $M$  thuộc cung  $AC$  rồi vẽ tiếp tuyến tại  $M$  cắt tia  $OC$  tại  $D$ . Chứng minh:  $\widehat{MDO} = 2\widehat{MBO}$  (Gợi ý: Chứng minh:  $\widehat{MDO} = \widehat{MOA}$ ).

**Bài 48:** Trên nửa đường tròn đường kính  $AB$ , lấy điểm  $D$ . Lấy điểm  $H$  thuộc đoạn  $AD$ . Một đường thẳng qua  $H$  vuông góc với  $AB$  tại  $F$  và cắt tia  $BD$  tại  $C$ . Tiếp tuyến tại  $D$  cắt  $CH$  tại  $I$ . Chứng minh:

1)  $\widehat{IHD} = \widehat{FBC} = \widehat{IDH}$ .

2)  $\widehat{ICD} = \widehat{IDC}$  và  $I$  là trung điểm của  $CH$ .

**Bài 49:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn có ba đỉnh nằm trên đường tròn bán kính  $R$ . Vẽ đường kính  $BD$ . Chứng minh:

1)  $\frac{BC}{BD} = \sin A$  (ký hiệu  $\sin A$  là  $\sin \widehat{BAC}$ ).

2)  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = 2R$  (Định lý hàm sin: Trong tam giác nhọn, cạnh chia sin góc đối bằng

đường kính đường tròn ngoại tiếp).

**Bài 50:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn có điểm  $M$  di động trên cạnh  $BC$ . Vẽ  $MH$  vuông góc với  $AB$  ở  $H$ ,  $MK$  vuông góc với  $AC$  ở  $K$ .

1) Chứng minh:  $AM$  là đường kính của đường tròn  $(AHK)$ .

2) Sử dụng định lý hàm sin trong  $\triangle AHK$ , chứng minh  $HK = AM \cdot \sin \widehat{BAC}$ .

3) Xác định vị trí của điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  để  $HK$  ngắn nhất.

**Bài 51:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn có ba đỉnh nằm trên  $(O)$ . Điểm  $M$  di động trên cung nhỏ  $BC$ . Vẽ  $MH$  vuông góc với  $AB$  ở  $H$ ,  $MK$  vuông góc với  $AC$  ở  $K$ .



- 1) Chứng minh:  $AM$  là đường kính của đường tròn  $(AHK)$
- 2) Chứng minh  $HK = AM \cdot \sin \widehat{BAC}$
- 3) Xác định vị trí của điểm  $M$  trên cung nhỏ  $BC$  để  $HK$  dài nhất.

**Bài 52:** Lấy hai điểm  $B$  và  $D$  lần lượt thuộc cung lớn và cung nhỏ  $AC$  của một đường tròn. Lấy điểm  $M$  thuộc dây  $AC$  sao cho  $\widehat{MBC} = \widehat{ABD}$ . Chứng minh:

- 1)  $\triangle BMC$  đồng dạng với  $\triangle BAD$  suy ra  $MC \cdot BD = AD \cdot BC$ .
- 2)  $\triangle BAM \sim \triangle BDC$  suy ra  $AM \cdot BD = AB \cdot CD$ . Từ đó chứng minh định lý Ptoleme:  
 $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$  (Tích hai đường chéo của tứ giác nội tiếp bằng tổng của tích hai cặp cạnh đối).

**Bài 53:** Cho tam giác  $ABC$  có ba đỉnh nằm trên một đường tròn. Lấy điểm  $D$  tùy ý thuộc cung  $BC$  không chứa  $A$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $\widehat{MDC} = \widehat{BDA}$ .

- 1) Chứng minh:  $\triangle DMC \sim \triangle DBA$ ;  $\triangle DBM \sim \triangle DAC$ .
- 2) Vẽ  $DH, DI, DK$  tương ứng vuông góc với  $BC, CA, AB$  ở  $H, I, K$ . Chứng minh  $\frac{MC}{DH} = \frac{AB}{DK}$  và  
 $\frac{BM}{DH} = \frac{AC}{DI}$  rồi suy ra  $\frac{BC}{HD} = \frac{AB}{DK} + \frac{AC}{DI}$  (Gợi ý: Tỉ số đồng dạng bằng tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác).

.....🎵...HẾT...🎵.....

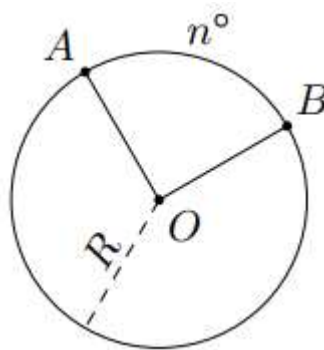
## §4. HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

### I. ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Người ta chứng minh được tỉ số giữa chu vi và đường kính của một đường tròn luôn bằng một số không đổi gọi là  $\pi$  (ta thường lấy  $\pi \approx 3,14$  hoặc lấy  $\pi$  theo máy tính). Độ dài của cung tỉ lệ thuận với số đo của chúng.

Ta có công thức tính chu vi  $C$  của đường tròn là:  $C = \pi d = 2\pi R$  trong đó  $d$  là đường kính và  $R$  là bán kính.

Trên đường tròn bán kính  $R$ , độ dài  $l$  của một cung có số đo  $n^\circ$  được tính theo công thức  $l = \frac{\pi R n}{180}$



Ví dụ 1: Tính độ dài cung  $60^\circ$  của một đường tròn có bán kính  $15\text{cm}$ . (Lấy  $\pi = 3,14$  và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

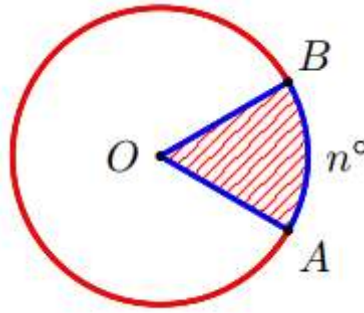
Hướng dẫn giải:

Cung  $60^\circ$ , bán kính  $R = 15\text{cm}$  có độ dài là:  $l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{3,14 \cdot 15 \cdot 60}{180} \approx 515,7 \text{ (cm)}$ .

### II. HÌNH QUẠT TRÒN

Ta có công thức tính diện tích  $S$  của hình tròn là:  $S = \pi R^2$ , trong đó  $R$  là bán kính.

Hình quạt tròn là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó. Diện tích hình quạt tròn bán kính  $R$ , ứng với cung  $n^\circ$  được tính theo công thức  $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$



**Ví dụ 2:** Tính diện tích hình quạt tròn bán kính  $R = 5 \text{ cm}$ , ứng với cung  $120^\circ$  ( $\pi$  theo máy tính và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của  $\text{cm}^2$ ).

Hướng dẫn giải

Hình quạt tròn bán kính  $R = 5 \text{ cm}$ , ứng với cung  $120^\circ$  có diện tích là:

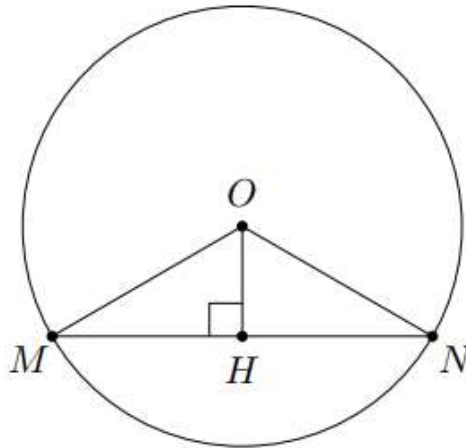
$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{3,14 \cdot 5^2 \cdot 120}{360} \approx 25,18 (\text{cm}^2)$$

Phần hình tròn được giới hạn bởi một cung và dây căng cung đó gọi là hình viên phân.

Diện tích hình viên phân  $S_{\text{viên phân}} = S_{\text{quạt}} - S_{\text{tam giác}}$ .

**Ví dụ 3:** Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung  $MN$  và dây cung  $MN$  của  $(O; 5 \text{ cm})$ , biết góc ở tâm  $\widehat{MON} = 120^\circ$ . (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của  $\text{cm}^2$ ).

Hướng dẫn giải



Kẻ  $OH \perp MN$  tại H,

Suy ra: OH là đường cao cũng là đường phân giác, trung tuyến của  $\triangle OMN$  cân tại O.

Suy ra  $\widehat{MOH} = 60^\circ$ ;  $OH = \frac{5}{2}$ ;  $MH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$  suy ra  $MN = 5\sqrt{3}$

$$S_{OMN} = \frac{1}{2} MN \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4} (\text{cm}^2)$$

Diện tích hình quạt tròn OMN là:

$$S_{OMN} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{25}{3} \pi (\text{cm}^2).$$

Diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung  $MN$  và dây cung  $MN$  của  $(O)$  là:

$$S_{VP} = S_{\text{quạt}MON} - S_{\Delta MON} = \frac{25}{3}\pi - \frac{25\sqrt{3}}{4} \approx 15,35(\text{ cm}^2)$$

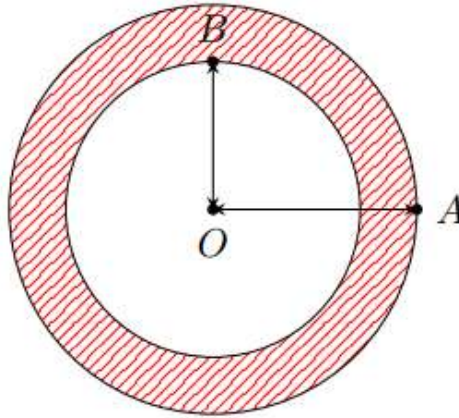
## II. HÌNH VÀNH KHUYÊN

Cho hai đường tròn đồng tâm  $(O; R)$  và  $(O; r)$  với  $R > r$ .

Hình vành khuyên là phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường tròn  $(O; r)$  và  $(O; R)$ .

Diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn  $(O; r)$  và  $(O; R)$  được tính bởi công thức:

$$S = \pi(R^2 - r^2)$$



**Ví dụ 4:** Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn  $(O; 9\text{ cm})$  và  $(O; 13\text{ cm})$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

### Hướng dẫn giải

Diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn  $(O; 9\text{ cm})$  và  $(O; 13\text{ cm})$  là:

$$S = \pi(R^2 - r^2) = 3,14.(13^2 - 9^2) \approx 276,46(\text{ cm}^2).$$

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1.** Cho  $(O; R)$ , có đường kính  $AB$ . Trên  $(O)$  lấy  $K$  sao cho số đo  $\widehat{KA} = 120^\circ$ .

- Tính độ dài các cung  $KA$  và cung  $KB$  theo  $R$ .
- Tính  $S_{\text{quạt}OAK}$  theo  $R$ .

**Bài 2.** Cho  $(O; R)$ , lấy điểm  $A$  và  $B$  trên đường tròn sao cho số đo  $\widehat{AB} = 90^\circ$ . Tính chính xác theo  $R$ :

- Độ dài cung nhỏ  $AB$ .
- Diện tích hình quạt tròn  $AOB$  giới hạn bởi  $OA$ ,  $OB$  và cung nhỏ  $AB$ .
- Độ dài dây  $AB$ .

**Bài 3.** Cho  $(O; R)$  và cung  $AB$  có số đo  $60^\circ$ . Tính theo bán kính  $R$ :

- Độ dài cung  $AB$ .
- Độ dài dây  $AB$  và  $S_{\Delta AOB}$ .
- Diện tích hình quạt  $AOB$  và diện tích viên phân giới hạn bởi cung và dây  $AB$ .

**Bài 4.** Cho  $(O; R)$  và số đo  $\widehat{AB} = 120^\circ$ . Tính theo bán kính  $R$ :

- Độ dài  $\widehat{AB}$  và độ dài dây  $AB$ .
- Diện tích hình quạt  $AOB$  và diện tích viên phân giới hạn bởi cung và dây  $AB$ .

**Bài 5.** Trên  $(O; R)$  lấy các điểm  $M, N, K$  theo thứ tự đó sao cho số đo cung  $MN$  bằng  $60^\circ$  và số đo cung  $NK$  bằng  $90^\circ$ .

- Tính độ dài các cung tròn  $MN, NK$  theo  $R$ .
- Tính diện tích hình quạt  $MON, NOK$  theo  $R$ .

**Bài 6.** Cho đường tròn  $(O; 9\text{cm})$ , trên đường tròn lấy hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho số  $\widehat{MN} = 120^\circ$ .

- Tính độ dài đường tròn  $(O)$ .
- Tính độ dài cung  $MN$ .
- Tính diện tích hình tròn  $(O)$ .
- Tính diện tích hình quạt  $MON$ .
- Tính diện tích phần giới hạn bởi dây  $MN$  và cung  $MN$ .  
(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Bài 7.** Cho  $(O; R)$ , có đường kính  $MN$ . Trên  $(O)$  lấy  $I$  sao cho số  $\widehat{IM} = 120^\circ$ .

- Tính độ dài các cung  $IM$  và  $IN$  theo  $R$ .
- Tính  $S_{\text{quạt}MOI}$  theo  $R$ .

**Bài 8.** Cho  $(O; R)$  và dây  $AB$  sao cho  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ .

- Tính diện tích hình quạt  $AOB$  theo  $R$ .
- Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ  $AB$  và dây  $AB$  theo  $R$ .

**Bài 9.** Cho  $(O; R)$  và hai bán kính  $OA, OB$  vuông góc với nhau. Tính theo  $R$ :

- Độ dài cung  $AB$  và độ dài dây  $AB$ .
- Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ  $AB$  và dây  $AB$ .

**Bài 10.** Cho  $(O; 3\text{cm})$  và  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ .

- Độ dài cung lớn  $AB$ .
- Tính diện tích hình quạt nằm trong góc ở tâm  $\widehat{AOB}$ .

**Bài 11.** Cho  $(O; 3\text{cm})$  và dây  $AB = 3\sqrt{3}\text{ cm}$ .

- Độ dài cung nhỏ  $AB$ .
- Tính diện tích hình quạt nằm trong góc ở tâm  $\widehat{AOB}$ .

**Bài 12.** Cho đường tròn  $(O; 12\text{ cm})$ , trên đường tròn lấy 2 điểm  $A$  và  $B$  sao cho số  $\widehat{AB} = 120^\circ$ .

- Tính độ dài cung  $AB$ ? độ dài  $(O)$ ?
- Tính diện tích hình tròn? Tính diện tích quạt  $OAB$ ?
- Tính diện tích viên phân giới hạn bởi dây  $AB$  và cung  $AB$ ? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Bài 13.** Cho tam giác  $ABC$  có ba đỉnh nằm trên  $(O; R)$ . Biết  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ .

- Tính số đo  $\widehat{BC}$ .
- Tính độ dài dây  $BC$  và độ dài  $\widehat{BC}$  theo  $R$ .

**Bài 14.** Cho tam giác  $ABC$  có ba đỉnh nằm trên  $(O; R)$ ,  $AB = R\sqrt{2}$ .

- Tính số đo  $\widehat{ACB}$ .
- Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây và cung nhỏ  $AB$  của  $(O)$  theo  $R$ .

**Bài 15.** Cho  $(O; R)$ , vẽ dây cung  $CD$  sao cho  $\widehat{COD} = 90^\circ$ . Tính theo  $R$  và  $\pi$ .

- Độ dài cung nhỏ  $CD$ .
- Dây cung  $CD$ .
- Diện tích quạt giới hạn bởi các bán kính  $OC, OD$  và cung nhỏ  $CD$ .

**Bài 16.** Từ điểm  $A$  nằm ngoài  $(O; R)$  sao cho  $OA = 2R$ , kẻ hai tiếp tuyến  $AB$  và  $AC$  với đường tròn ( $B, C$  là các tiếp điểm).

- Tính  $BC$  theo  $R$ .
- Tính diện tích hình giới hạn bởi  $AB, AC$  và cung nhỏ  $BC$ .

**Bài 17.** Từ một điểm  $T$  nằm ngoài  $(O; R)$  kẻ hai tiếp tuyến  $TA$  và  $TB$  với đường tròn. Biết  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ , dây  $BC = 2R$ ,  $OT$  cắt đường tròn  $(O; R)$  tại  $D$ .

- Tính  $S_{AOC}$  theo  $R$ .
- Tính diện tích hình giới hạn bởi  $\widehat{BDC}$  và ba dây cung  $CA, DA, DB$  theo  $R$ .

**Bài 18.** Cho  $(O; 6\text{ cm})$  và góc nội tiếp  $\widehat{CBD} = 60^\circ$ .

- Tính  $\widehat{COD}$ .
- Vẽ góc tạo bởi tiếp tuyến  $Cx$  và dây cung  $CD$ . Tính  $\widehat{DCx}$ .
- Lấy điểm  $A$  thuộc cung nhỏ  $CD$ . Tính  $\widehat{CAD}$ .
- Tính diện tích hình quạt  $OCD$  theo  $\pi$ .

.....🎵...**HẾT**...🎵.....

**CHÚ Ý:**

- 1) Tài liệu ôn thi giữa HK1,2; cuối HK1,2 ; tài liệu ôn thi tuyển sinh 10 thầy cô sẽ phát riêng.*
- 2) Trong quá trình học thầy cô sẽ giảng kĩ thêm về cách trình bày, mẹo làm bài; chia thành từng dạng chi tiết và bổ sung các công thức; các bài toán hay khác mà trong sách chưa có.*

**CHÚC CÁC EM LUÔN MẠNH KHỎE, HỌC TẬP TỐT!**